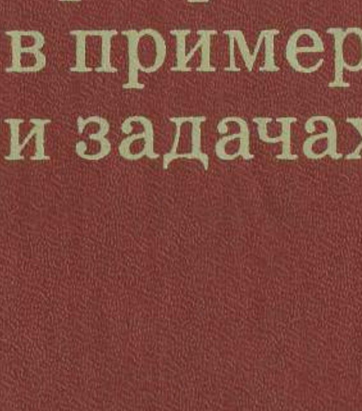
И. Л. АКУЛИЧ

Математическое программирование в примерах и задачах



учебное пособие для вузов

И. Л. АКУЛИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов экономических
специальностей вузов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1986

519.85(075)
ББК 22.1
А44
УДК 517.8

Рецензенты: кафедра исследования операций Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (зав. кафедрой — чл.-кор. АН СССР П. С. Краснощеков); канд. физ.-мат. наук, доц. Б. Г. Белоусов

Акулич И. Л.

А 44 Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов.— М.: Высш. шк., 1986.— 319 с., ил.

Пособие написано в соответствии с программой курса «Математические методы исследования операций». Рассматриваются задачи линейного, нелинейного и динамического программирования. В начале каждого параграфа приводятся определения, формулы, а также методические указания, необходимые для решения задач; даются подробные решения типовых задач. В конце параграфов имеются задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы.

А $\frac{1502000000-537}{001(01)-86}$ 67—86

ББК 22.1
517.8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Успешная реализация достижений научно-технического прогресса в нашей стране тесным образом связана с использованием математических методов и средств вычислительной техники при решении задач из различных областей человеческой деятельности. Исключительно важное значение приобретает использование указанных методов и средств и при решении экономических задач. В связи с этим для студентов экономических специальностей вузов необходимо как знание возможностей применения математических методов и ЭВМ, так и понимание тех проблем, которые возникают при их использовании.

В данном учебном пособии изложен материал, позволяющий получить довольно полное представление о возможностях практического использования математического программирования и ЕС ЭВМ при решении конкретных экономических задач. Это пособие предназначено прежде всего для тех, кто самостоятельно изучает указанные вопросы и желает приобрести необходимые навыки в решении практических задач.

В начале каждого параграфа пособия помещены определения, формулы и другие краткие теоретические сведения и методические указания, необходимые для решения приведенных задач. Затем дается подробное решение типовых задач с краткими пояснениями теоретических положений. В каждом параграфе приводятся задачи для самостоятельного решения.

Большинство задач носит условный характер, а числовые параметры подобраны так, чтобы при решении задач можно было обойтись наиболее простыми вычислениями.

Дополнительные сведения из теории, а также задачи для самостоятельного решения можно получить из книг, приведенных в списке литературы.

Автор выражает искреннюю признательность сотрудникам кафедры исследования операций МГУ им. М. В. Ломоносова, кафедры прикладной математики МИУ им. С. Орджоникидзе, кафедры экономической кибернетики ЛФЭИ им. Н. А. Вознесенского, а также канд. физ.-мат. наук, доц. Б. Г. Белоусову за ценные замечания и пожелания, способствовавшие улучшению рукописи.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Математическое программирование представляет собой математическую дисциплину, занимающуюся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения.

В общем виде математическая постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant b_i$ $(i = \overline{1, m})$, где f и g_i — заданные функции, а b_i — некоторые действительные числа.

В зависимости от свойств функций f и g_i математическое программирование можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач.

Прежде всего задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. При этом если все функции f и g_i линейные, то соответствующая задача является *задачей линейного программирования*. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является *задачей нелинейного программирования*.

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения задач линейного программирования разработан целый ряд эффективных методов, алгоритмов и программ.

Среди задач нелинейного программирования наиболее глубоко изучены *задачи выпуклого программирования*. Это задачи, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

В свою очередь, среди задач выпуклого программирования более подробно исследованы *задачи квадратичного программирования*. В результате решения таких задач требуется в общем случае найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств или линейных уравнений либо некоторой системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи целочисленного, параметрического и дробно-линейного программирования.

В *задачах целочисленного программирования* неизвестные могут принимать только целочисленные значения.

В *задачах параметрического программирования* целевая функция или функции, определяющие область возможных изменений переменных, либо то и другое зависят от некоторых параметров.

В *задачах дробно-линейного программирования* целевая функция представляет собой отношение двух линейных функций, а функции, определяющие область возможных изменений переменных, также являются линейными.

Выделяют отдельные классы задач стохастического и динамического программирования.

Если в целевой функции или в функциях, определяющих область возможных изменений переменных, содержатся случайные величины, то такая задача относится к *задаче стохастического программирования.*

Задача, процесс нахождения решения которой является многоэтапным, относится к *задаче динамического программирования.*

ГЛАВА 1
ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1.1. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1. Для изготовления трех видов изделий A, B и C используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования указаны в табл. 1.1. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Таблица 1.1

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (ч)
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение. Предположим, что будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц — вида B и x_3 единиц — вида C. Тогда для производства такого количества изделий потребуется затратить $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станко-часов фрезерного оборудования.

Так как общий фонд рабочего времени станков данного типа не может превышать 120, то должно выполняться неравенство

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 120.$$

Аналогичные рассуждения относительно возможного использования токарного, сварочного и шлифовального оборудования приведут к следующим неравенствам:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leqslant 280,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 240,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leqslant 360.$$

При этом так как количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, то

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \tag{1}$$

Далее, если будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц изделий вида B и x_3 единиц изделий вида C, то прибыль от их реализации составит $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$.

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 120, \\ \ \ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leqslant 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leqslant 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leqslant 360 \end{cases} \tag{2}$$

четырех линейных неравенств с тремя неизвестными x_j $(j = \overline{1,\ 3})$ и линейная функция относительно этих же переменных

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3; \tag{3}$$

требуется среди всех неотрицательных решений системы неравенств (2) найти такое, при котором функция (3) принимает максимальное значение. Как это сделать, будет показано в дальнейшем.

Линейная функция (3), максимум которой требуется определить, вместе с системой неравенств (2) и условием неотрицательности переменных (1) образуют математическую модель исходной задачи.

Так как функция (3) линейная, а система (2) содержит только линейные неравенства, то задача (1)—(3) является задачей линейного программирования.

1.2. Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в бутылки. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136 000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны — в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготовлять заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение. Предположим, что молочный завод будет ежедневно производить x_1 тонн молока, x_2 тонн кефира и x_3 тонн сметаны. Тогда ему для изготовления этой продукции необходимо $1010x_1+1010x_2+9450x_3$ тонн молока.

Так как завод может использовать ежедневно не более 136 000 т молока, то должно выполняться неравенство

$$1010x_1+1010x_2+9450x_3\leqslant 136\,000.$$

Аналогичные рассуждения, проведенные относительно возможного использования линий разлива цельномолочной продукции и автоматов по расфасовке сметаны, позволяют записать следующие неравенства:

$$0{,}18x_1+0{,}19x_2\leqslant 21{,}4,$$
$$3{,}25x_2\leqslant 16{,}25.$$

Так как ежедневно должно вырабатываться не менее 100 т молока, то $x_1\geqslant 100$. Далее, по своему экономическому смыслу переменные x_2 и x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения: $x_2\geqslant 0$, $x_3\geqslant 0$. Общая прибыль от реализации x_1 тонн молока, x_2 тонн кефира и x_3 тонн сметаны равна $30x_1+22x_2+$ $+136x_3$ руб. Таким образом, приходим к следующей математической задаче: дана система

$$\left\{\begin{array}{llll} 1010x_1 & +1010x_2 & +9450x_3 & \leqslant 136000, \\ 0{,}18x_1 & +0{,}19x_2 & & \leqslant 21{,}4, \\ & 3{,}25x_2 & & \leqslant 16{,}25, \\ x_1 & & & \geqslant 100 \end{array}\right. \qquad (4)$$

четырех линейных неравенств с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 и линейная функция относительно этих же переменных

$$F=30x_1+22x_2+136x_3; \qquad (5)$$

требуется среди всех неотрицательных решений системы неравенств (4) найти такое, при котором функция (5) принимает максимальное значение. Так как система (4) представляет собой совокупность линейных неравенств и функция (5) линейная, то исходная задача является задачей линейного программирования.

1.3. На швейной фабрике ткань может быть раскроена несколькими способами для изготовления нужных деталей швейных изделий. Пусть при j-м варианте раскроя $(j=\overline{1,n})$ 100 м² ткани изготовляется b_{ij} деталей i-го вида $(i=\overline{1,m})$, а величина отходов при данном варианте раскроя равна c_j м^2. Зная, что деталей i-го вида следует изготовлять B_i штук, требуется раскроить ткань так, чтобы было получено необходимое количество деталей каждого вида при минимальных общих отходах. Составить математическую модель задачи.

Решение. Предположим, что по j-му варианту раскраивается x_j сотен м^2 ткани. Поскольку при раскрое 100 м^2 ткани по j-му варианту получается b_{ij} деталей i-го вида, по всем вариантам раскроя из используемых тканей будет получено

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n$$

деталей i-го вида. Так как должно быть изготовлено B_i деталей данного вида, то

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n = B_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Общая величина отходов по всем вариантам раскроя ткани составит

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: найти минимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{6}$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = B_i \quad (i = \overline{1, m}) \tag{7}$$

и условию неотрицательности $x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n})$.

Сформулированная задача является задачей линейного программирования, так как функция (6) линейная, а система (7) содержит только лишь линейные уравнения.

Составьте математические модели задач 1.4—1.10.

1.4. В трех пунктах отправления сосредоточен однородный груз в количествах, соответственно равных 420, 380 и 400 т. Этот груз необходимо перевезти в три пункта назначения в количествах, соответственно равных 260, 520 и 420 т. Стоимости перевозок 1 т груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения являются известными величинами и задаются матрицей

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найти план перевозок, обеспечивающий вывоз имеющегося в пунктах отправления и завоз необходимого в пунктах назначения груза при минимальной общей стоимости перевозок.

1.5. Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели A, B и C использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 т карамели данного вида приведены в таблице.

В ней же указано общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано фабрикой, а также приведена прибыль от реализации 1 т карамели данного вида.

Вид сырья	Нормы расхода сырья (т) на 1 т карамели			Общее количество сырья (т)
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	—	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции (руб.)	108	112	126	

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

1.6. При откорме животных каждое животное ежедневно должно получить не менее 60 ед. питательного вещества A, не менее 50 ед. вещества B и не менее 12 ед. вещества C. Указанные питательные вещества содержат три вида корма. Содержание единиц питательных веществ в 1 кг каждого из видов корма приведено в следующей таблице:

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма вида		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах, если цена 1 кг корма I вида составляет 9 коп., корма II вида — 12 коп. и корма III вида — 10 коп.

1.7. В m пунктах могут быть размещены предприятия, производящие некоторую однородную продукцию. Эта продукция поступает в n пунктов ее потребления, причем в j-м пункте потребности в продукции равны a_j единицам. Затраты, связанные с доставкой единицы продукции с i-го пункта отправления в j-й пункт потребления, составляют c_{ij} руб. Известно, что в i-м пункте изготовления продукции максимальный объем ее производства не может превышать b_i единиц, а затраты, связанные с изготовлением единицы продукции, составляют d_i руб. Определить такое размещение предприятий, при котором обеспечиваются потребности в продукции в каждом из пунктов ее потребления при наименьших общих затратах, связанных с производством и доставкой продукции.

1.8. Для производства n видов изделий предприятие использует m групп взаимозаменяемого оборудования. Изделий i-го вида необходимо изготовить B_i единиц $(i=\overline{1, n})$, причем j-я группа оборудования может быть занята изготовлением изделий не больше чем a_j часов $(j=\overline{1, m})$. Время изготовления одного изделия i-го вида на j-й группе оборудования равно a_{ij} часам, а цена производства равна c_{ij} руб. Определить, сколько изделий данного вида с использованием каждой из групп оборудования следует изготовить, чтобы произвести нужное количество изделий каждого вида при наименьшей общей стоимости их изготовления.

1.9. При выращивании некоторой культуры (или группы родственных культур) может быть использован i-й вид удобрений в количестве, не большем чем b_i кг $(i=\overline{1, m})$. Вся посевная площадь содержит n почвенно-климатических зон, причем площадь j-й зоны равна d_j га $(j=\overline{1, n})$. Внесение на каждый гектар площади j-й зоны 1 кг удобрений i-го вида увеличивает среднюю урожайность на c_{ij} центнеров. Требуется распределить выделенный фонд удобрений между посевными зонами так, чтобы суммарный прирост урожайности культур за счет внесения удобрений был максимален.

1.10. Для производства чугунного литья используется n различных исходных шихтовых материалов (чугун различных марок, стальной лом, феррофосфор и др.). Химический состав чугунного литья определяется содержанием в нем химических элементов (кремния, марганца, фосфора и др.). Готовый чугун должен иметь строго определенный химический состав, который задается величинами H_j, представляющими собой доли (в процентах) j-го химического элемента в готовом продукте. При этом известны величины: h_{ij} — содержание (в процентах) j-го химического элемента в i-м исходном шихтовом материале; c_i — цена единицы каждого i-го шихтового материала. Определить состав шихты, обеспечивающий получение литья заданного качества при минимальной общей стоимости используемых шихтовых материалов.

§ 1.2. ОБЩАЯ И ОСНОВНАЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В предыдущем параграфе были рассмотрены примеры задач линейного программирования. Во всех этих задачах требовалось найти максимум или минимум линейной функции при условии, что ее переменные принимали неотрицательные значения и удовлетворяли некоторой системе линейных уравнений или линейных неравенств либо системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения. Каждая из этих задач является частным случаем общей задачи линейного программирования.

Определение 1.1. *Общей задачей линейного программирования* называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i=\overline{1,k}), \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=\overline{k+1,m}), \tag{10}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,l},\ l \leqslant n), \tag{11}$$

где a_{ij}, b_i, c_j — заданные постоянные величины и $k \leqslant m$.

Определение 1.2. Функция (8) называется *целевой функцией* (или *линейной формой*) задачи (8)—(11), а условия (9)—(11) — *ограничениями* данной задачи.

Определение 1.3. *Стандартной* (или *симметричной*) *задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (8) при выполнении условий (9) и (11), где $k=m$ и $l=n$.

Определение 1.4. *Канонической* (или *основной*) *задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (8) при выполнении условий (10) и (11), где $k=0$ и $l=n$.

Определение 1.5. Совокупность чисел $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (9)—(11), называется *допустимым решением* (или *планом*).

Определение 1.6. План $X^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, при котором целевая функция задачи (8) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным*.

Значение целевой функции (8) при плане X будем обозначать через $F(X)$. Следовательно, X^* — оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F(X) \leqslant F(X^*)$ [соответственно $F(X) \geqslant F(X^*)$].

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определен оптимальный план любой из трех задач.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно в общем случае уметь, во-первых, сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации, во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот, в-третьих, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

В том случае, когда требуется найти минимум функции $F=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$, можно перейти к нахождению максимума функции $F_1=-F=-c_1x_1-c_2x_2-...-c_nx_n$, поскольку $\min F=-\max(-F)$.

Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид «$\leqslant$», можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида «$\geqslant$» — в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n\leqslant b_i$$

преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i \quad (x_{n+1}\geqslant 0), \tag{12}$$

а ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n\geqslant b_i$$

— в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n-x_{n+1}=b_i \quad (x_{n+1}\geqslant 0). \tag{13}$$

В то же время каждое уравнение системы ограничений

$$a_{i1}x_1+a_{i2}+...+a_{in}x_n=b_i$$

можно записать в виде неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n\leqslant b_i,\\ -a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-...-a_{in}x_n\leqslant -b_i. \end{array}\right. \tag{14}$$

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражается расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в форме основной, равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

Отметим, наконец, что если переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, то ее следует заменить двумя неотрицательными переменными u_k и v_k, приняв $x_k=u_k-v_k$.

1.11. Записать в форме основной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции $F=3x_1-2x_2-5x_4+x_5$ при условиях

$$\left\{\begin{array}{r} 2x_1+x_3-x_4+x_5\leqslant 2,\\ x_1-x_3+2x_4+x_5\leqslant 3,\\ 2x_2+x_3-x_4+2x_5\leqslant 6,\\ x_1+x_4-5x_5\geqslant 8, \end{array}\right.$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. В данной задаче требуется найти максимум функции, а система ограничений содержит четыре неравенства. Следовательно, чтобы записать ее в форме основной задачи, нужно перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Так как число неравенств, входящих в систему ограничений задачи, равно четырем, то этот переход может быть осуществлен введением четырех дополнительных неотрицательных переменных. При этом к левым частям каждого из неравенств вида «$\leqslant$» соответствующая дополнительная переменная прибавляется, а из левых частей каждого из неравенств вида «$\geqslant$» вычитается. В результате ограничения принимают вид уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_3-x_4+x_5+x_6=2, \\ x_1-x_3+2x_4+x_5+x_7=3, \\ 2x_2+x_3-x_4+2x_5+x_8=6, \\ x_1+x_4-5x_5-x_9=8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_9\geqslant 0.$$

Следовательно, данная задача может быть записана в форме основной задачи таким образом: максимизировать функцию $F=3x_1-2x_2-5x_4+x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1+x_3-\ x_4+\ x_5+x_6=2, \\ x_1-x_3+2x_4+\ x_5+x_7=3, \\ 2x_1+x_3-x_4+2x_5+x_8=6, \\ x_1+x_4-5x_5-x_9=8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_9\geqslant 0.$$

1.12. Записать задачу, состоящую в минимизации функции $F=-x_1+2x_2-x_3+x_4$, при условиях

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2-\ x_3+\ x_4\leqslant 6, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4\geqslant 8, \\ 3x_1-\ x_2+2x_3+2x_4\leqslant 10, \\ -x_1+3x_2+5x_3-3x_4=15, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0$$

в форме основной задачи линейного программирования.

Р е ш е н и е. В данной задаче требуется найти минимум целевой функции, а система ограничений содержит три неравенства. Следовательно, чтобы записать ее в форме основной задачи, вместо нахождения минимума функции F нужно найти максимум функции $F_1=-F$ при ограничениях, получающихся из ограничений исходной задачи добавлением к левым частям каждого из ограничений-неравенств вида «$\leqslant$» дополнительной неотрицательной переменной и вычитанием дополнительных переменных из левых частей каждого из ограничений-неравенств вида «$\geqslant$».

Следовательно, исходная задача может быть записана в форме основной задачи линейного программирования так: найти максимум функции $F_1=x_1-2x_2+x_3-x_4$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+x_4+x_5=6, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4-x_6=8, \\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_4+x_7=10, \\ -x_1+3x_2+5x_3-3x_4=15, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_7\geqslant 0.$$

1.13. Записать в форме стандартной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции $F=6{,}5x_1-7{,}5x_3+23{,}5x_4-5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+4x_4-x_5=12, \\ 2x_1-\qquad x_3+12x_4-x_5=14, \\ x_1+2x_2+3x_4-x_5=6, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_5\geqslant 0.$$

Решение. Методом последовательного исключения неизвестных сведем данную задачу к следующей: найти максимум функции $F=6{,}5x_1-7{,}5x_3+23{,}5x_4-5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_2+\ \ x_3+\ \ x_4=6, \\ 3x_3+10x_4+\ \ x_5=26, \\ x_1+\ \ x_3+11x_4=20, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_5\geqslant 0.$$

Последняя задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции $F=x_3+2x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_3+\ \ x_4\leqslant 6, \\ 3x_3+10x_4\leqslant 26, \\ x^3+11x_4\leqslant 20, \end{cases}$$

$$x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

Целевая функция задачи преобразована с помощью подстановки вместо x_1 и x_5 их значений в соответствии с уравнениями системы ограничений задачи.

Запишите задачи 1.14—1.17 в форме основной задачи линейного программирования:

1.14. $F=-2x_1-x_2+x_3\to\min$,

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+6x_3\leqslant 12, \\ 3x_1+5x_2-12x_3=14, \\ -3x_1+6x_2+4x_3\leqslant 18, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

1.15. $F=-2x_1+x_2+5x_3\to\max$,

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+5x_3\leqslant 12, \\ 6x_1-3x_2+4x_3=18, \\ 3x_1+3x_2-2x_3\geqslant 16, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

1.16. $F = 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 16, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 18, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

1.17. $F = -3x_1 - 5x_2 - 6x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leqslant 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \geqslant 15, \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 \leqslant 17, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

1.18.—1.27. Используя математические модели задач 1.1—1.10, запишите их в форме моделей основной задачи.

§ 1.3. СВОЙСТВА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим основную задачу линейного программирования. Как было отмечено в § 1.2, она состоит в определении максимального значения функции $F = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ при условиях $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ $(i = \overline{1, m})$, $x_j \geqslant 0$ $(j = \overline{1, n})$.

Перепишем эту задачу в векторной форме: найти максимум функции

$$F = CX \tag{15}$$

при условиях

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0, \tag{16}$$

$$X \geqslant 0, \tag{17}$$

где $C = (c_1;\ c_2;\ \dots;\ c_n)$, $X = (x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n)$; CX — скалярное произведение; $P_1, \dots, P_n$ и P_0 — m-мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи:

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};\ P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ \dots;\ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.7. План $X = (x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n)$ называется *опорным планом* основной задачи линейного программирования, если система векторов P_j, входящих в разложение (16) с положительными коэффициентами x_j, линейно независима.

Так как векторы P_j являются m-мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может быть больше, чем m.

Определение 1.8. Опорный план называется *невырожденным*, если он содержит ровно m положительных компонент, в противном случае он называется *вырожденным*.

Свойства основной задачи линейного программирования (15)—(17) тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение 1.9. Пусть X_1, X_2, ..., X_n — произвольные точки евклидова пространства E_n. *Выпуклой линейной комбинацией этих точек* называется сумма $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$, где α_i — произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i=\overline{1, n})$.

Определение 1.10. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Определение 1.11. Точка X выпуклого множества называется *угловой*, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Теорема 1.1. *Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).*

Определение 1.12. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования называется *многогранником решений*, а всякая угловая точка многогранника решений — *вершиной*.

Теорема 1.2. *Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.*

Теорема 1.3. *Если система векторов* P_1, P_2, ..., P_k $(k \leqslant n)$ *в разложении* (16) *линейно независима и такова, что*

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_k P_k = P_0, \tag{18}$$

где все $x_j \geqslant 0$, *то точка* $X = (x_1; x_2; \ldots; x_k; 0; \ldots; 0)$ *является вершиной многогранника решений.*

Теорема 1.4. *Если* $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ — *вершина многогранника решений, то векторы* P_j, *соответствующие положительным* x_j *в разложении* (16), *линейно независимы.*

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (т. е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение, найти сравнительно просто, если задача, записанная в форме стандартной, содержит не более двух переменных или задача, записанная в форме основной, содержит не более двух свободных переменных, т. е. $n-r \leqslant 2$, где n — число переменных, r — ранг матрицы, составленной из коэффициентов в системе ограничений задачи.

Найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{19}$$

при условиях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i \quad (i=\overline{1, k}), \tag{20}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1, 2). \tag{21}$$

Каждое из неравенств (20), (21) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $(i=\overline{1, k})$, $x_1=0$ и $x_2=0$. В том случае, если система неравенств (20), (21) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей — выпуклое, то областью допустимых решений задачи (19)—(21) является выпуклое множество, которое называется *многоугольником решений* (введенный ранее термин «многогранник решений» обычно употребляется, если $n \geqslant 3$). Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (где h — некоторая постоянная), проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора $\bar{C} = (c_1;\ c_2)$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю ее общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации

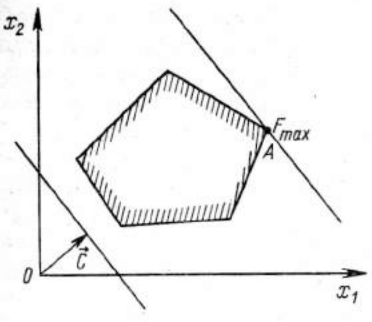


Рис. 1.1

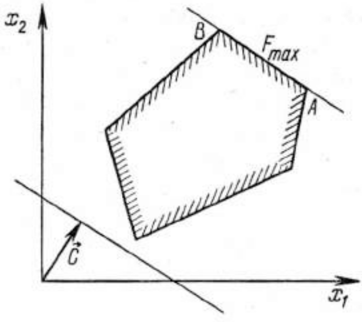


Рис. 1.2

задачи (9) — (21), отметим, что при нахождении ее решения могут встретиться случаи, изображенные на рис. 1.1—1.4. Рис. 1.1 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке A. Из рис. 1.2 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка AB. На рис. 1.3 изображен случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений, а на рис. 1.4 — случай, когда система ограничений задачи несовместна.

Отметим, что нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь

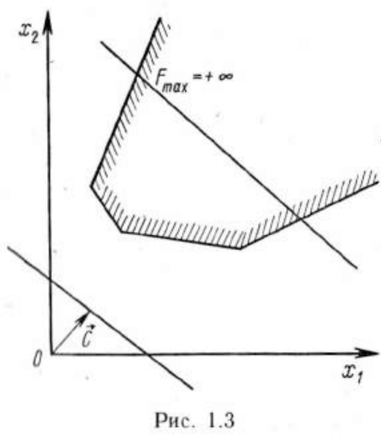


Рис. 1.3

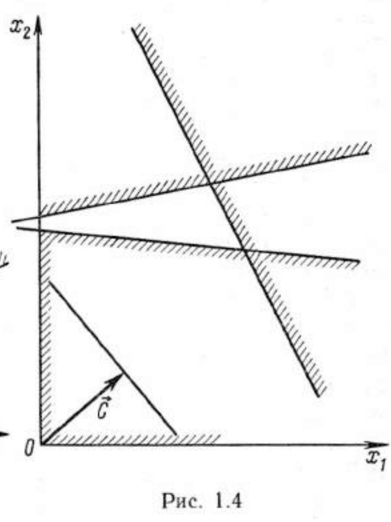


Рис. 1.4

тем, что линия уровня $c_1x_1+c_2x_2=h$ передвигается не в направлении вектора $\vec{C}=(c_1;\ c_2)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Итак, нахождение решения задачи линейного программирования (19)—(21) на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (20) и (21) знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Находят многоугольник решений.

4. Строят вектор $\vec{C}=(c_1;\ c_2)$.

5. Строят прямую $c_1x_1+c_2x_2=h$, проходящую через многоугольник решений.

6. Передвигают прямую $c_1x_1+c_2x_2=h$ в направлении вектора $\vec{C}$, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

1.28. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 1.2. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 1.2

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Учитывая, что изделия A и B могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 12x_1 + \ \ 4x_2 \leqslant 300, \\ \ \ 4x_1 + \ \ 4x_2 \leqslant 120, \\ \ \ 3x_1 + 12x_2 \leqslant 252, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B составит $F = 30x_1 + 40x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 12x_1 + \ \ 4x_2 = 300, & \text{(I)} \\ \ \ 4x_1 + \ \ 4x_2 = 120, & \text{(II)} \\ \ \ 3x_1 + 12x_2 = 252, & \text{(III)} \\ \qquad x_1 = 0, & \text{(IV)} \\ \qquad x_2 = 0. & \text{(V)} \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 1.5. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой — нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае — другая полуплоскость.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12x_1 + 4x_2 < 300$. Для этого, построив прямую $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рис. 1.5 эта прямая I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей, например точку O (0; 0). Координаты этой точки удовлетворяют

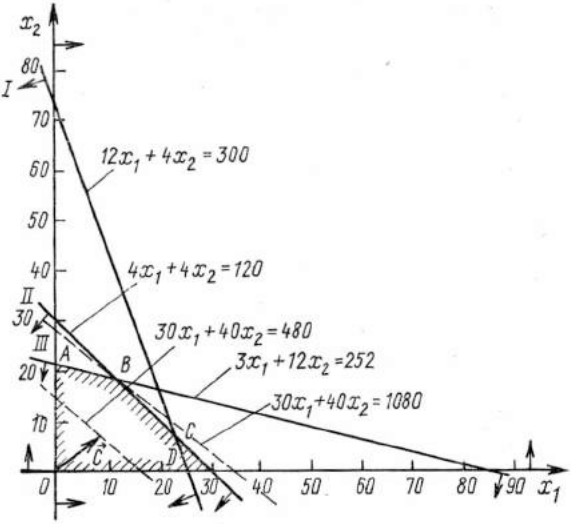


Рис. 1.5

неравенству $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$; значит, полуплоскость, которой принадлежит точка O (0; 0), определяется неравенством $12x_1 + 4x_2 \leqslant 300$. Это и показано стрелками на рис. 1.5.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 1.5, многоугольником решений является пятиугольник $OABCD$. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику $OABCD$, в которой функция F принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор $\vec{C} = (30; 40)$ и прямую $30x_1 + 40x_2 = h$, где h — некоторая постоянная такая, что прямая $30x_1 + 40x_2 = h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, $h = 480$ и построим прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ (рис. 1.5).

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий A и B, при котором прибыль от их реализации равна 480 руб. Далее, полагая h равным некоторому числу, большему чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий A и B, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 руб.

Перемещая построенную прямую $30x_1+40x_2=480$ в направлении вектора $\vec{C}$, видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка B. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий A и B, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки B как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$\begin{cases} 4x_1+\ \ 4x_2=120, \\ 3x_1+12x_2=252. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^*=12$, $x_2^*=18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида A и 18 изделий вида B, то оно получит максимальную прибыль, равную $F_{\max}=30\cdot 12+40\cdot 18=1080$ руб.

1.29. Найти максимум и минимум функции $F=x_1+x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2\leqslant 16, \\ -4x_1+2x_2\leqslant 8, \\ x_1+3x_2\geqslant 9, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

Решение. Построим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств:

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=16, & \text{(I)} \\ 4x_1+2x_2=\ \ 8, & \text{(II)} \\ x_1+3x_2=\ \ 9, & \text{(III)} \\ x_1=0, & \text{(IV)} \\ x_2=0. & \text{(V)} \end{cases}$$

Построив полученные прямые, найдем соответствующие полуплоскости и их пересечение (рис. 1.6).

Как видно из рис. 1.6, многоугольником решений задачи является треугольник ABC. Координаты точек этого треугольника удовлетворяют условию неотрицательности и неравенствам системы ограничений задачи. Следовательно, задача будет решена, если среди точек треугольника ABC найти такие, в которых функция $F=x_1+x_2$ принимает максимальное и минимальное значения. Для нахождения этих точек построим прямую $x_1+x_2=4$ (число 4 взято произвольно) и вектор $\vec{C}=(1;\ 1)$.

Передвигая данную прямую параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{C}$, видим, что ее последней общей точкой с многоугольником решений задачи является точка C. Следова-

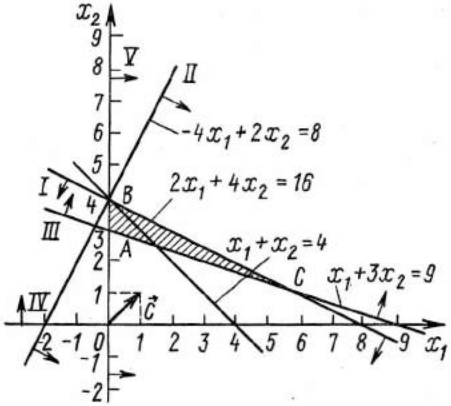


Рис. 1.6

тельно, в этой точке функция F принимает максимальное значение. Так как C — точка пересечения прямых I и II, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=16, \\ x_1+3x_2=\ \ 9. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^*=6$, $x_2^*=1$. Таким образом, максимальное значение функции $F_{\max}=7$.

Для нахождения минимального значения целевой функции задачи передвигаем прямую $x_1+x_2=4$ в направлении, противоположном направлению вектора $\vec{C}=(1;\,1)$. В этом случае, как видно из рис. 1.6, последней общей точкой прямой с многоугольником решений задачи является точка A. Следовательно, в этой точке функция F принимает минимальное значение. Для определения координат точки A решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2=9, \\ \qquad x_1=0, \end{cases}$$

откуда $x_1^*=0$, $x_2^*=3$. Подставляя найденные значения переменных в целевую функцию, получим $F_{\min}=3$.

1.30. Найти максимальное значение функции $F=-16x_1-$ $-x_2+x_3+5x_4+5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2+x_3=10, \\ -2x_1+3x_2+x_4=\ \ 6, \\ 2x_1+4x_2-x_5=\ \ 8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. В отличие от рассмотренных выше задач в исходной задаче ограничения заданы в виде уравнений. При этом число неизвестных равно пяти. Поэтому данную задачу следует свести к задаче, в которой число неизвестных было бы равно двум. В рассматриваемом случае это можно сделать путем перехода от исходной задачи, записанной в форме основной, к задаче, записанной в форме стандартной.

Выше было показано (см. § 1.2), что исходная задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции $F = 2x_1 + 3x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geqslant 8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0.$$

Из целевой функции исходной задачи переменные x_3, x_4, x_5 исключены с помощью подстановки их значений из соответствующих уравнений системы ограничений.

Построим многоугольник решений полученной задачи (рис. 1.7). Как видно из рис. 1.7, максимальное значение целевая функция задачи принимает в точке C пересечения прямых I и II. Вдоль каждой из граничных прямых значение одной из переменных, исключенной при переходе к соответствующему неравенству, равно нулю. Поэтому в каждой из вершин полученного многоугольника решений последней задачи по крайней мере две переменные исходной задачи принимают нулевые значения. Так, в

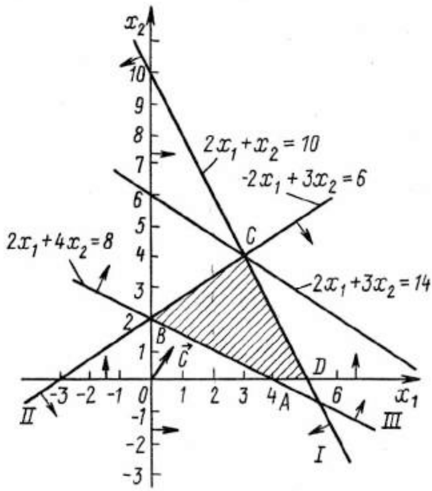


Рис. 1.7

точке C имеем $x_3=0$ и $x_4=0$. Подставляя эти значения в первое и второе уравнения системы ограничений исходной задачи, получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 = 6, \end{cases}$$

решая которую находим $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$.

Подставляя найденные значения x_1 и x_2 в третье уравнение системы ограничений исходной задачи, определяем значение переменной x_5, равное 14.

Следовательно, оптимальным планом рассматриваемой задачи является $X^* = (3; 4; 0; 0; 14)$. При этом плане значение целевой функции есть $F_{\max} = 18$.

1.31. Найти решение задачи 1.13, состоящей в определении максимального значения функции $F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6, \\ x_1, x_2, \ldots, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Как было показано при решении задачи 1.13, исходная задача может быть записана в форме стандартной следующим образом: найти максимум функции $F = x_3 + 2x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \leqslant 6, \\ 3x_3 + 10x_4 \leqslant 26, \\ x_3 + 11x_4 \leqslant 20, \end{cases}$$

$$x_3, x_4 \geqslant 0.$$

Полученная задача содержит две неизвестные. Следовательно, ее решение можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования. Из рис. 1.8 видно, что максимальное значение целевая функция $F = x_3 + 2x_4$ принимает в точке B, в которой пересекаются прямые I и II. Следовательно, координаты этой точки можно найти из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_3 + 10x_4 = 26. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x_3^* = 34/7$ и $x_4^* = 8/7$. Подставляя найденные значения x_3 и x_4 в уравнения системы ограничений исходной задачи, имеем $x_1^* = 18/7$; $x_2^* = 0$; $x_5^* = 0$.

Таким образом, $X^* = (18/7; 0; 34/7; 8/7; 0)$ является оптимальным планом исходной задачи. При этом плане $F_{\max} = 50/7$.

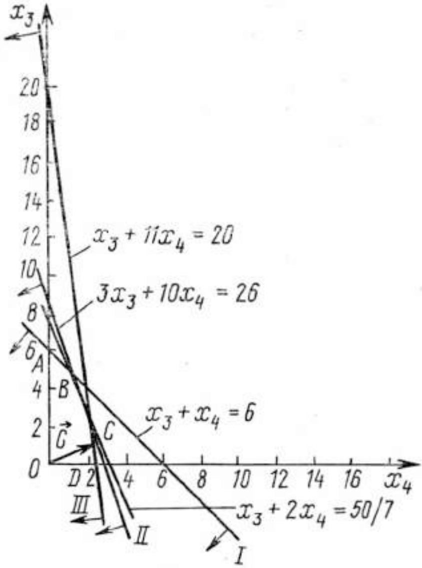


Рис. 1.8

Используя геометрическую интерпретацию, найдите решения задач **1.32—1.40**.

1.32. $F=x_1+x_2\to\max;$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 14,\\ -5x_1+3x_2\leqslant 15,\\ 4x_1+6x_2\geqslant 24,\end{cases}$$
$x_1,\ x_2\geqslant 0.$

1.33. $F=x_1+2x_2\to\max;$

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2\leqslant 12,\\ -x_1+3x_2\leqslant 6,\\ 2x_1+4x_2\geqslant 16,\end{cases}$$
$x_1,\ x_2\geqslant 0.$

1.34. $F=-2x_1+x_2\to\min;$

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2\leqslant 12,\\ -x_1+2x_2\leqslant 8,\\ 2x_1+3x_2\geqslant 6,\end{cases}$$
$x_1,\ x_2\geqslant 0.$

1.35. $F=-x_1+4x_2+2x_4-x_5\to\max;$

$$\begin{cases} x_1-5x_2+x_3=5,\\ -x_1+x_2+x_4=4,\\ x_1+x_2+x_5=8.\end{cases}$$
$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0.$

1.36. $F=-5x_1+x_2-x_3\to\max;$

$$\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=4,\\ x_1-x_2+x_3-x_4=1,\\ 2x_1+x_2+2x_3+x_5=7.\end{cases}$$
$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0.$

1.37. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в следующей таблице:

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина ($м^3$):			
I вида	0,2	0,1	40
II вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-ч)	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовлять, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

1.38. Для производства двух видов изделий *A* и *B* используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования (ч)
	A	*B*	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	14	18	

Найти план выпуска изделий *A* и *B*, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

1.39. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31 и 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры.

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
I II III	2 5 2	6 4 3
Величина отходов (см^2)	12	16

Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах.

1.40. На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лисица	песец	
I II III	2 4 6	3 1 7	180 240 426
Прибыль от реализации одной шкурки (руб.)	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

§ 1.4. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решение любой задачи линейного программирования можно найти либо симплексным методом, либо методом искусственного базиса. Прежде чем применять один из указанных методов, следует записать исходную задачу в форме основной задачи линейного программирования, если она не имеет такой формы записи.

1. Симплексный метод. Симплексный метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции возрастает (при условии, что данная задача имеет оптимальный план и каждый ее опорный план является невырожденным). Указанный переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план. Рассмотрим задачу, для которой этот план можно непосредственно записать.

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_m + a_{m\,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Здесь a_{ij}, b_i и c_j $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ — заданные постоянные числа $(m < n$ и $b_i > 0)$.

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{22}$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + x_nP_n = P_0, \tag{23}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}), \tag{24}$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ \ldots; \quad P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

P

$$F_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \ \ldots; \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Так как

$$b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_mP_m = P_0,$$

то по определению опорного плана $X = (b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ является опорным планом данной задачи (последние $n - m$ компонент вектора X равны нулю). Этот план определяется системой единичных векторов $P_1, P_2, ..., P_m$, которые образуют базис m-мерного пространства. Поэтому каждый из векторов $P_1, P_2, ..., ..., P_n$, а также вектор P_0 могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса. Пусть

$$P_j=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}P_i \ (j=\overline{0, n}).$$

Положим $z_j=\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \ (j=\overline{1, n})$; $\Delta_j=z_j-c_j \ (j=\overline{1, n})$. Так как векторы $P_1, P_2, ..., P_m$ — единичные, то $x_{ij}=a_{ij}$ и $z_j=\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$, а

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}-c_j.$$

Теорема 1.5 (признак оптимальности опорного плана). *Опорный план* $X^*=(x_1^*; x_2^*; ...; x_m^*; 0; 0; ...; 0)$ *задачи* (22)—(24) *является оптимальным, если* $\Delta_j \geqslant 0$ *для любого* j $(j=\overline{1, n})$.

Теорема 1.6. *Если* $\Delta_k<0$ *для некоторого* $j=k$ *и среди чисел* a_{ik} $(i=\overline{1, m})$ *нет положительных* $(a_{ik}\leqslant 0)$, *то целевая функция* (22) *задачи* (22)—(24) *не ограничена на множестве ее планов.*

Теорема 1.7. *Если опорный план* X *задачи* (22)—(24) *не вырожден и* $\Delta_k<0$, *но среди чисел* a_{ik} *есть положительные (не все* $a_{ik}\leqslant 0$), *то существует опорный план* X' *такой, что* $F(X')>F(X)$.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейший вычислительный процесс удобнее вести, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения исходного опорного плана, записать так, как показано в табл. 1.3.

В столбце $C_б$ этой таблицы записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

В столбце P_0 записывают положительные компоненты исходного опорного плана, в нем же в результате вычислений получают положительные компоненты оптимального плана. Столбцы векторов P_j представляют собой коэффициенты разложения этих векторов по векторам данного базиса.

В табл. 1.3 первые m строк определяются исходными данными задачи, а показатели $(m+1)$-й строки вычисляют. В этой строке в столбце вектора P_0 записывают значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, а в столбце вектора P_j — значение $\Delta_j=z_j-c_j$.

Значение z_j находится как скалярное произведение вектора P_j $(j=\overline{1, m})$ на вектор $C_б=(c_1; c_2; ...; c_m)$:

$$z_j=\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad (j=\overline{1, n}).$$

Значение F_0 равно скалярному произведению вектора P_0 на вектор $C_б$:

$$F_0=\sum_{i=1}^{m} c_i b_i.$$

После заполнения табл. 1.3 исходный опорный план проверяют на оптимальность. Для этого просматривают элементы $(m+1)$-й строки таблицы. В результате может иметь место один из следующих трех случаев:

1) $\Delta_j \geqslant 0$ для $j=m+1, m+2, ..., n$ (при $j=\overline{1, m}$ $z_j=c_j$). Поэтому в данном случае числа $\Delta_j \geqslant 0$ для всех j от 1 до n;

2) $\Delta_j < 0$ для некоторого j, и все соответствующие этому индексу величины $a_{ij} \leqslant 0$ $(i=\overline{1, m})$;

3) $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов j, и для каждого такого j по крайней мере одно из чисел a_{ij} положительно.

В первом случае на основании признака оптимальности исходный опорный план является оптимальным. Во втором случае целевая функция не ограничена сверху на множестве планов, а в третьем случае можно перейти от исходного плана к новому опорному плану, при котором значение целевой функции увеличится. Этот переход от одного опорного плана к другому осуществляется исключением из исходного базиса какого-нибудь из векторов и введением в него нового вектора. В качестве вектора, вводимого в базис, можно взять любой из векторов P_j, имеющий индекс j, для которого $\Delta_j < 0$. Пусть, например, $\Delta_k < 0$ и решено ввести в базис вектор P_k.

Для определения вектора, подлежащего исключению из базиса, находят $\min (b_i/a_{ik})$ для всех $a_{ik} > 0$. Пусть этот минимум достигается при $i=r$. Тогда из базиса исключают вектор P_r, а число a_{rk} называют *разрешающим элементом*.

Столбец и строку, на пересечении которых находится разрешающий элемент, называют *направляющими*.

После выделения направляющей строки и направляющего столбца находят новый опорный план и коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану. Это легко реализовать, если воспользоваться методом Жордана—Гаусса. При этом можно показать, что положительные компоненты нового опорного плана вычисляются по формулам

$$b_i'=\begin{cases} b_i-(b_r/a_{rk})a_{ik} & \text{при } i\neq r, \\ b_r/a_{rk} & \text{при } i=r, \end{cases} \qquad (25)$$

Таблица 1.3

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$m+1$			F_0	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

Таблица 1.4

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b'_1	1	0	…	a'_{1r}	…	0	a'_{1m+1}	…	0	…	a'_{1n}
2	P_2	c_2	b'_2	0	1	…	a'_{2r}	…	0	a'_{2m+1}	…	0	…	a'_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_k	c_k	b'_r	0	0	…	a'_{rr}	…	0	a'_{rm+1}	…	1	…	a'_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b'_m	0	0	…	a'_{mr}	…	1	a'_{mm+1}	…	0	…	a'_{mn}
$m+1$			F_0	0	0	…	z'_r-c_r	…	0	$z'_{m+1}-c_{m+1}$	…	0	…	z'_n-c_n

а коэффициенты разложения векторов P_j через векторы нового базиса, соответствующего новому опорному плану,— по формулам

$$a'_{ij}=\begin{cases} a_{ij}-(a_{rj}/a_{rk})\,a_{ik} & \text{при } i\neq r,\\ a_{rj}/a_{rk} & \text{при } i=r. \end{cases} \tag{26}$$

После вычисления b'_i и a'_{ij} согласно формулам (25) и (26) их значения заносят в табл. 1.4. Элементы $(m+1)$-й строки этой таблицы могут быть вычислены либо по формулам

$$F'_0=F_0-(b_r/a_{rk})\,\Delta_k, \tag{27}$$

$$\Delta'_j=\Delta_j-(a_{rj}/a_{rk})\,\Delta_k, \tag{28}$$

либо на основании их определения.

Наличие двух способов нахождения элементов $(m+1)$-й строки позволяет осуществлять контроль правильности проводимых вычислений.

Из формулы (27) следует, что при переходе от одного опорного плана к другому наиболее целесообразно ввести в базис вектор P_j, имеющий индекс j, при котором максимальным по абсолютной величине является число $(b_r/a_{rj})\,\Delta_j$ $(\Delta_j<0,\ \ a_{rj}>0)$. Однако с целью упрощения вычислительного процесса в дальнейшем будем вектор, вводимый в базис, определять, исходя из максимальной абсолютной величины отрицательных чисел Δ_j. Если же таких чисел несколько, то в базис будем вводить вектор, имеющий такой же индекс, как и максимальное из чисел c_j, определяемых данными числами Δ_j $(\Delta_j<0)$.

Итак, переход от одного опорного плана к другому сводится к переходу от одной симплекс-таблицы к другой. Элементы новой симплекс-таблицы можно вычислить как с помощью рекуррентных формул (25) — (28), так и по правилам, непосредственно вытекающим из них. Эти правила состоят в следующем.

В столбцах векторов, входящих в базис, на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляются единицы, а все остальные элементы данных столбцов полагают равными нулю.

Элементы векторов P_0 и P_j в строке новой симплекс-таблицы, в которой записан вектор, вводимый в базис, получают из элементов этой же строки исходной таблицы делением их на величину разрешающего элемента. В столбце $C_б$ в строке вводимого вектора проставляют величину c_k, где k — индекс вводимого вектора.

Остальные элементы столбцов вектора P_0 и P_j новой симплекс-таблицы вычисляют по *правилу треугольника*. Для вычисления какого-нибудь из этих элементов находят три числа:

1) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на месте искомого элемента новой симплекс-таблицы;

2) число, стоящее в исходной симплекс-таблице на пересечении строки, в которой находится искомый элемент новой симплекс-таблицы, и столбца, соответствующего вектору, вводимому в базис;

3) число, стоящее в новой симплекс-таблице на пересечении столбца, в котором стоит искомый элемент, и строки вновь вводимого в базис вектора (как отмечено выше, эта строка получается из строки исходной симплекс-таблицы делением ее элементов на разрешающий элемент).

Эти три числа образуют своеобразный треугольник, две вершины которого соответствуют числам, находящимся в исходной симплекс-таблице, а третья — числу, находящемуся в новой симплекс-таблице. Для определения искомого элемента новой симплекс-таблицы из первого числа вычитают произведение второго и третьего.

После заполнения новой симплекс-таблицы просматривают элементы $(m+1)$-й строки. Если все $z_j' - c_j \geqslant 0$, то новый опорный план является оптимальным. Если же среди указанных чисел имеются отрицательные, то, используя описанную выше последовательность действий, находят новый опорный план. Этот процесс продолжают до тех пор, пока либо не получают оптимальный план задачи, либо не устанавливают ее неразрешимость.

При нахождении решения задачи линейного программирования мы предполагали, что эта задача имеет опорные планы и каждый такой план является невырожденным. Если же задача имеет вырожденные опорные планы, то на одной из итераций одна или несколько переменных опорного плана могут оказаться равными нулю. Таким образом, при переходе от одного опорного плана к другому значение функции может остаться прежним. Более того, возможен случай, когда функция сохраняет свое значение в течение нескольких итераций, а также возможен возврат к первоначальному базису. В последнем случае обычно говорят, что произошло *зацикливание*. Однако при решении практических задач этот случай встречается очень редко, поэтому мы на нем останавливаться не будем.

Итак, нахождение оптимального плана симплексным методом включает следующие этапы:

1. Находят опорный план.

2. Составляют симплекс-таблицу.

3. Выясняют, имеется ли хотя бы одно отрицательное число Δ_j. Если нет, то найденный опорный план оптимален. Если же среди чисел Δ_j имеются отрицательные, то либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому опорному плану.

4. Находят направляющие столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δ_j, а направляющая строка — минимальным из отношений компонент столбца вектора P_0 к положительным компонентам направляющего столбца.

5. По формулам (25) — (28) определяют положительные компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов P_j по векторам нового базиса и числа F_0', Δ_j'. Все эти числа записываются в новой симплекс-таблице.

6. Проверяют найденный опорный план на оптимальность. Если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то возвращаются к этапу **4**, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости процесс решения задачи заканчивают.

1.41. Для изготовления различных изделий A, B и C предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A, B и C, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида.

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий A обозначим через x_1, изделий B — через x_2, изделий C — через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 18x_1+15x_2+12x_3\leqslant 360, \\ 6x_1+4x_2+8x_3\leqslant 192, \\ 5x_1+3x_2+3x_3\leqslant 180. \end{cases} \tag{29}$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий A, x_2 изделий B и x_3 изделий C составляет

$$F=9x_1+10x_2+16x_3. \tag{30}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2 и x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения:

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0. \tag{31}$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств (29) требуется найти такое, при котором функция (30) принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 18x_1+15x_2+12x_3+x_4=360, \\ 6x_1+4x_2+8x_3+x_5=192, \\ 5x_1+3x_2+3x_3+x_6=180. \end{cases}$$

Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида. Например, x_4 — это неиспользуемое количество сырья I вида.

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме:

$$x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3+x_4P_4+x_5P_5+x_6P_6=P_0,$$

где

$$P_1=\begin{pmatrix}18\\6\\5\end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix}15\\4\\3\end{pmatrix};\quad P_3=\begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix};\quad P_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$P_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad P_6=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};\quad P_0=\begin{pmatrix}360\\192\\180\end{pmatrix}.$$

Поскольку среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 имеются три единичных вектора, для данной задачи можно непосредственно записать опорный план. Таковым является план $X = (0;\ 0;\ 0;\ 360;\ 192;\ 180)$, определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6, которые образуют базис трехмерного векторного пространства.

Составляем симплексную таблицу для I итерации (табл. 1.6), подсчитываем значения F_0, $z_j - c_j$ и проверяем исходный опорный план на оптимальность:

$$F_0 = (C,\ P_0) = 0;\ z_1 = (C,\ P_1) = 0;\ z_2 = (C,\ P_2) = 0;\ z_3 = (C,\ P_3) = 0;$$

$$z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9;\ z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10;\ z_3 - c_3 = -16.$$

Для векторов базиса $z_j - c_j = 0$.

Таблица 1.6

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Как видно из табл. 1.6, значения всех основных переменных x_1, x_2, x_3 равны нулю, а дополнительные переменные принимают свои значения в соответствии с ограничениями задачи. Эти значения переменных отвечают такому «плану», при котором ничего не производится, сырье не используется и значение целевой функции равно нулю (т. е. стоимость произведенной продукции отсутствует). Этот план, конечно, не является оптимальным.

Это видно и из 4-й строки табл. 1.6, так как в ней имеется три отрицательных числа: $z_1 - c_1 = -9$, $z_2 - c_2 = -10$ и $z_3 - c_3 = -16$. Отрицательные числа не только свидетельствуют о возможности увеличения общей стоимости производимой продукции, но и показывают, на сколько увеличится эта сумма при введении в план единицы того или другого вида продукции.

Так, число -9 означает, что при включении в план производства одного изделия A обеспечивается увеличение выпуска продукции на 9 руб. Если включить в план производства по одному изделию B и C, то общая стоимость изготовляемой продукции возрастет соответственно на 10 и 16 руб. Поэтому с экономической точки зрения наиболее целесообразным является включение в план производства изделий C. Это же необходимо сделать и на основании формального признака симплексного метода, поскольку максимальное по абсолютной величине отрицательное число Δ_j стоит в 4-й строке столбца вектора P_3. Следовательно, в базис введем вектор P_3. Определяем вектор, подлежащий исключению из базиса. Для этого находим $\theta_0 = \min (b_i/a_{i3})$ для $a_{i3} > 0$, т. е. $\theta_0 = \min (360/12;\ 192/8;\ 180/3) = 192/8$.

Найдя число $192/8 = 24$, мы тем самым с экономической точки зрения определили, какое количество изделий C предприятие может изготовлять с учетом норм расхода и имеющихся объемов сырья каждого вида. Так как сырья данного вида соответственно имеется 360, 192 и 180 кг, а на одно изделие C требуется затратить сырья каждого вида соответственно 12, 8 и 3 кг, то максимальное число изделий C, которое может быть изготовлено предприятием, равно $\min(360/12;\ 192/8;\ 180/3) = 192/8 = 24$, т. е. ограничивающим фактором для производства изделий C является имеющийся объем сырья II вида. С учетом его наличия предприятие может изготовить 24 изделия C. При этом сырье II вида будет полностью использовано.

Следовательно, вектор P_5 подлежит исключению из базиса. Столбец вектора P_3 и 2-я строка являются направляющими. Составляем таблицу для II итерации (табл. 1.7).

Таблица 1.7

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	$-3/2$	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	$-3/8$	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

Сначала заполняем строку вектора, вновь введенного в базис, т. е. строку, номер которой совпадает с номером направляющей строки. Здесь направляющей является 2-я строка. Элементы этой строки табл. 1.7 получаются из соответствующих элементов табл. 1.6 делением их на разрешающий элемент (т. е. на 8). При этом в столбце $C_б$ записываем коэффициент $C_3 = 16$, стоящий в столбце вводимого в базис вектора P_3. Затем заполняем элементы столбцов для векторов, входящих в новый базис. В этих столбцах на пересечении строк и столбцов одноименных векторов проставляем единицы, а все остальные элементы полагаем равными нулю.

Для определения остальных элементов табл. 1.7 применяем правило треугольника. Эти элементы могут быть вычислены и непосредственно по рекуррентным формулам.

Вычислим элементы табл. 1.7, стоящие в столбце вектора P_0. Первый из них находится в 1-й строке этого столбца. Для его вычисления находим три числа:

1) число, стоящее в табл. 1.6 на пересечении столбца вектора P_0 и 1-й строки (360);

2) число, стоящее в табл. 1.6 на пересечении столбца вектора P_3 и 1-й строки (12);

3) число, стоящее в табл. 1.7 на пересечении столбца вектора P_0 и 2-й строки (24).

Вычитая из первого числа произведение двух других, находим искомый элемент: $360-12\cdot 24=72$; записываем его в 1-й строке столбца вектора P_0 табл. 1.7.

Второй элемент столбца вектора P_0 табл. 1.7 был уже вычислен ранее. Для вычисления третьего элемента столбца вектора P_0 также находим три числа. Первое из них (180) находится на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_0 табл. 1.6, второе (3) — на пересечении 3-й строки и столбца вектора P_3 табл. 1.6, третье (24) — на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_0 табл. 1.8. Итак, указанный элемент есть $180-24\cdot 3=108$. Число 108 записываем в 3-й строке столбца вектора P_0 табл. 1.7.

Значение F_0 в 4-й строке столбца этого же вектора можно найти двумя способами:

1) по формуле $F_0=(C, P_0)$, т. е. $F_0=0\cdot 72+16\cdot 24+0\cdot 108=$ $=384$;

2) по правилу треугольника; в данном случае треугольник образован числами 0, -16, 24. Этот способ приводит к тому же результату: $0-(-16)\cdot 24=384$.

При определении по правилу треугольника элементов столбца вектора P_0 третье число, стоящее в нижней вершине треугольника, все время оставалось неизменным и менялись лишь первые два числа. Учтем это при нахождении элементов столбца вектора P_1 табл. 1.7. Для вычисления указанных элементов первые два числа берем из столбцов векторов P_1 и P_3 табл. 1.6, а третье число — из табл. 1.7. Это число стоит на пересечении 2-й строки и столбца вектора P_1 последней таблицы. В результате получаем значения искомых элементов: $18-12\cdot(3/4)=9$; $5-3\cdot(3/4)=11/4$.

Число z_1-c_1 в 4-й строке столбца вектора P_1 табл. 1.7 можно найти двумя способами:

1) по формуле $z_1-c_1=(C, P_1)-c_1$ имеем $0\cdot 9+16\cdot 3/4+$ $+0\cdot 11/4-9=3$;

2) по правилу треугольника получим $-9-(-16)\cdot(3/4)=3$. Аналогично находим элементы столбца вектора P_2.

Элементы столбца вектора P_5 вычисляем по правилу треугольника. Однако построенные для определения этих элементов треугольники выглядят иначе.

При вычислении элемента 1-й строки указанного столбца получается треугольник, образованный числами 0,12 и 1/8. Следовательно, искомый элемент равен $0-12\cdot(1/8)=-3/2$. Элемент, стоящий в 3-й строке данного столбца, равен $0-3\cdot(1/8)=$ $=-3/8$.

По окончании расчета всех элементов табл. 1.7 в ней получены новый опорный план и коэффициенты разложения векторов P $(j=\overline{1,6})$ через базисные векторы P_4, P_3, P_6 и значения Δ_j' и F_0'. Как видно из этой таблицы, новым опорным планом задачи является план $X=(0;\ 0;\ 24;\ 72;\ 0;\ 108)$. При данном плане производства изготовляется 24 изделия C и остается неиспользованным 72 кг сырья I вида и 108 кг сырья III вида. Стоимость всей производимой при этом плане продукции равна 384 руб. Указанные числа записаны в столбце вектора P_0 табл. 1.7. Как видно, данные этого столбца по-прежнему представляют собой параметры рассматриваемой задачи, хотя они претерпели значительные изменения. Изменились данные и других столбцов, а их экономическое содержание стало более сложным. Так, например, возьмем данные столбца вектора P_2. Число 1/2 во 2-й строке этого столбца показывает, на сколько следует уменьшить изготовление изделий C, если запланировать выпуск одного изделия B. Числа 9 и 3/2 в 1-й и 3-й строках вектора P_2 показывают соответственно, сколько потребуется сырья I и II вида при включении в план производства одного изделия B, а число -2 в 4-й строке показывает, что если будет запланирован выпуск одного изделия B, то это обеспечит увеличение выпуска продукции в стоимостном выражении на 2 руб. Иными словами, если включить в план производства продукции одно изделие B, то это потребует уменьшения выпуска изделия C на 1/2 ед. и потребует дополнительных затрат 9 кг сырья I вида и 3/2 кг сырья III вида, а общая стоимость изготовляемой продукции в соответствии с новым оптимальным планом возрастет на 2 руб. Таким образом, числа 9 и 3/2 выступают как бы новыми «нормами» затрат сырья I и III вида на изготовление одного изделия B (как видно из табл. 1.6, ранее они были равны 15 и 3), что объясняется уменьшением выпуска изделий C.

Такой же экономический смысл имеют и данные столбца вектора P_1 табл. 1.7. Несколько иное экономическое содержание имеют числа, записанные в столбце вектора P_5. Число 1/8 во 2-й строке этого столбца, показывает, что увеличение объемов сырья II вида на 1 кг позволило бы увеличить выпуск изделий C на 1/8 ед. Одновременно потребовалось бы дополнительно 3/2 кг сырья I вида и 3/8 кг сырья III вида. Увеличение выпуска изделий C на 1/8 ед. приведет к росту выпуска продукции на 2 руб.

Из изложенного выше экономического содержания данных табл. 1.7 следует, что найденный на II итерации план задачи не является оптимальным. Это видно и из 4-й строки табл. 1.7, поскольку в столбце вектора P_2 этой строки стоит отрицательное число -2. Значит, в базис следует ввести вектор P_2, т. е. в новом плане следует предусмотреть выпуск изделий B. При определении возможного числа изготовления изделий B следует учитывать имеющееся количество сырья каждого вида, а именно: возможный выпуск изделий B определяется $\min (b_i'/a_{i2}')$ для $a_{i2}' > 0$, т. е. находим

$$\theta_0 = \min\left(\frac{72}{9};\quad \frac{24\cdot 2}{1};\quad \frac{108\cdot 2}{3}\right) = \frac{72}{9} = 8.$$

Следовательно, исключению из базиса подлежит вектор P_4, иными словами, выпуск изделий B ограничен имеющимся в распоряжении предприятия сырьем I вида. С учетом имеющихся объемов этого сырья предприятию следует изготовить 8 изделий B. Число 9 является разрешающим элементом, а столбец вектора P_2 и 1-я строка табл. 1.7 являются направляющими. Составляем таблицу для III итерации (табл. 1.8).

Таблица 1.8

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	$-1/6$	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	$-1/18$	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	$-1/6$	$-1/8$	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

В табл. 1.8 сначала заполняем элементы 1-й строки, которая представляет собой строку вновь вводимого в базис вектора P_2. Элементы этой строки получаем из элементов 1-й строки табл. 1.7 делением последних на разрешающий элемент (т. е. на 9). При этом в столбце $C_б$ данной строки записываем $C_2 = 10$.

Затем заполняем элементы столбцов векторов базиса и по правилу треугольника вычисляем элементы остальных столбцов. В результате в табл. 1.8 получаем новый опорный план $X = (0;\ 8;\ 20;\ 0;\ 0;\ 96)$ и коэффициенты разложения векторов P_j $(j=\overline{1,6})$ через базисные векторы P_2, P_3, P_6 и соответствующие значения Δ_j'' и F_0''.

Проверяем, является ли данный опорный план оптимальным или нет. Для этого рассмотрим 4-ю строку табл. 1.8. В этой строке среди чисел Δ_j'' нет отрицательных. Это означает, что найденный опорный план является оптимальным и $F_{\max}=400$.

Следовательно, план выпуска продукции, включающий изготовление 8 изделий B и 20 изделий C, является оптимальным. При данном плане выпуска изделий полностью используется сырье I и II видов и остается неиспользованным 96 кг сырья III вида, а стоимость производимой продукции равна 400 руб.

Оптимальным планом производства продукции не предусматривается изготовление изделий A. Введение в план выпуска продукции изделий вида A привело бы к уменьшению указанной общей стоимости. Это видно из 4-й строки столбца вектора P_1, где число 5 показывает, что при данном плане включение в него выпуска единицы изделия A приводит лишь к уменьшению общей величины стоимости на 5 руб.

Решение данного примера симплексным методом можно было бы проводить, используя лишь одну таблицу (табл. 1.9). В этой таблице последовательно записаны одна за другой все три итерации вычислительного процесса.

Таблица 1.9

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	−9	−10	−16	0	0	0
1	P_4	0	72	9	9	0	1	−3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	−3/8	1
4			384	3	−2	0	0	2	0
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	−1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	−1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	−1/6	−1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

1.42. Найти максимум функции $F=2x_1-6x_2+5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3+x_5=20, \\ -\ x_1-2x_2+x_4+3x_5=24, \\ 3x_1-x_2-12x_5+x_6=18, \end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0 \ \ (j=\overline{1,6}).$$

Решение. Систему уравнений задачи запишем в векторной форме:

$$x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3+x_4P_4+x_5P_5+x_6P_6=P_0,$$

где

$$P_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix};\quad P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};$$

$$P_5=\begin{pmatrix}1\\3\\-12\end{pmatrix};\quad P_6=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\quad P_0=\begin{pmatrix}20\\24\\18\end{pmatrix}.$$

Так как среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 имеется три единичных вектора, то для данной задачи можно непосредственно найти опорный план. Таковым является план $X=(0;\ 0;\ 20;\ 24;\ 0;\ 18)$. Составляем симплексную таблицу (табл. 1.10) и проверяем, является ли данный опорный план оптимальным.

Таблица 1.10

i	Базис	$C_б$	P_0	2	−6	0	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	20	−2	1	1	0	1	0
2	P_4	0	24	−1	−2	0	1	3	0
3	P_6	0	18	3	−1	0	0	−12	1
4			0	−2	6	0	0	−5	0

Как видно из табл. 1.10, исходный опорный план не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану. Это можно сделать, так как в столбцах векторов P_1 и P_5, 4-я строка которых содержит отрицательные числа, имеются положительные элементы. Для перехода к новому опорному плану введем в базис вектор P_5 и исключим из базиса вектор P_4. Составляем таблицу II итерации.

Таблица 1.11

i	Базис	$C_б$	P_0	2	−6	0	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	12	−5/3	5/3	1	−1/3	0	0
2	P_5	5	8	−1/3	−2/3	0	1/3	1	0
3	P_6	0	114	−1	−9	0	4	0	1
			40	−11/3	8/3	0	5/3	0	0

Как видно из табл. 1.11, новый опорный план задачи не является оптимальным, так как в 4-й строке столбца вектора P_1 стоит отрицательное число −11/3. Поскольку в столбце этого вектора нет положительных элементов, данная задача не имеет оптимального плана.

1.43. Найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции $F=2x_1+x_2-x_3+x_4-x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5, \\ 2x_1+x_2+x_4=9, \\ x_1+2x_2+x_5=7, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0$$

и дать геометрическую интерпретацию процесса решения.

Решение. Систему уравнений задачи запишем в векторной форме:

$$x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3+x_4P_4+x_5P_5=P_0,$$

где

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};\qquad P_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix};\qquad P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\qquad P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\qquad P_0=\begin{pmatrix}5\\9\\7\end{pmatrix}.$$

Так как среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 имеется три единичных вектора P_3, P_4 и P_5, то для данной задачи можно непосредственно написать опорный план и, следовательно, найти ее решение симплексным методом (табл. 1.12).

Таблица 1.12

i	Базис	$C_б$	P_0	2	1	−1	1	−1
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	−1	5	1	1	1	0	0
2	P_4	1	9	2	1	0	1	0
3	P_5	−1	7	1	2	0	0	1
4			−3	−2	−3	0	0	0
1	P_3	−1	3/2	1/2	0	1	0	−1/2
2	P_4	1	11/2	3/2	0	0	1	−1/2
3	P_2	1	7/2	1/2	1	0	0	1/2
4			15/2	−1/2	0	0	0	3/2
1	P_1	2	3	1	0	2	0	−1
2	P_4	1	1	0	0	−3	1	1
3	P_2	1	2	0	1	−1	0	1
4			9	0	0	1	0	1

Из табл. 1.12 видно, что $X^* = (3;\ 2;\ 0;\ 1;\ 0)$ является оптимальным планом исходной задачи. При этом плане значение линейной формы равно $F_{\max} = 9$.

Дадим геометрическую интерпретацию процесса нахождения решения задачи. Для этого прежде всего перейдем от исходной задачи, система ограничений которой содержит уравнения, к задаче, система ограничений которой включает лишь неравенства. Это сделать нетрудно, так как исходная задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции $F = -3 + 2x_1 + 3x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 9, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 7, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

Целевая функция исходной задачи преобразована с помощью подстановки вместо x_3, x_4 и x_5 их значений в соответствии с уравнениями системы ограничений.

Решение последней задачи можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 1.9). Исходный опорный план задачи $X = (0;\ 0;\ 5;\ 9;\ 7)$ соответствует на рис. 1.9 точке O. После II итерации был получен новый опорный план $X = (0;\ 5/2;\ 3/2;\ 11/2;\ 0)$, которому соответствует точка A. На рисунке переход от одного опорного плана к другому показан стрелкой, указывающей направление

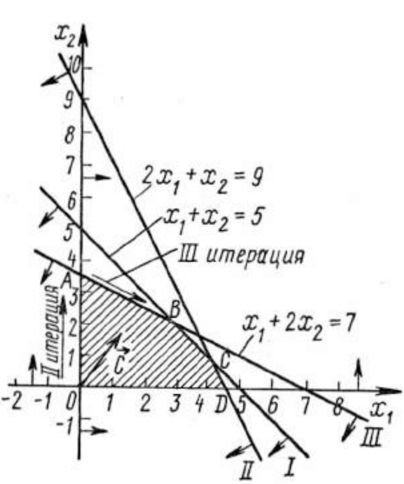


Рис. 1.9

перехода. После III итерации получен опорный план $X^* = (3; 2; 0; 1; 0)$, соответствующий точке B, т. е. осуществлен переход от точки A к точке B. Полученный на данной итерации опорный план является оптимальным.

2. Метод искусственного базиса. Как показано выше, для задачи, записанной в форме основной задачи линейного программирования, можно непосредственно указать ее опорный план, если среди векторов P_j, компонентами которых служат коэффициенты при неизвестных в системе уравнений данной задачи, имеется m единичных. Однако для многих задач линейного программирования, записанных в форме основной задачи и имеющих опорные планы, среди векторов P_j не всегда есть m единичных. Рассмотрим такую задачу:

Пусть требуется найти максимум функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{32}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{33}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}), \tag{34}$$

где $b_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, m})$, $m < n$ и среди векторов

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

нет m единичных.

Определение 1.13. Задача, состоящая в определении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \tag{35}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{36}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n+m}), \tag{37}$$

где M — некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задается, называется *расширенной задачей* по отношению к задаче (32) — (34).

Расширенная задача имеет опорный план

$$X=(0;\ \underbrace{0;\ \ldots;\ 0}_{n\ \text{нулей}};\ b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m),$$

определяется системой единичных векторов $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{n+m}$, образующих базис m-го векторного пространства, который называется *искусственным*. Сами векторы, так же как и переменные x_{n+i} $(i=\overline{1, m})$, называются *искусственными*. Так как расширенная задача имеет опорный план, то ее решение может быть найдено симплексным методом.

Теорема 1.8. *Если в оптимальном плане* $\overline{X}^*=(x_1^*;\ x_2^*;\ \ldots;\ x_n^*,\ x_{n+1}^*;\ \ldots;\ x_{n+m}^*)$ *расширенной задачи* (35) — (37) *значения искусственных переменных* $x_{n+i}^*=0$ $(i=\overline{1, m})$, *то* $X^*=(x_1^*;\ x_2^*;\ \ldots;\ x_n^*)$ *является оптимальным планом задачи* (32) — (34).

Таким образом, если в найденном оптимальном плане расширенной задачи, значения искусственных переменных равны нулю, то тем самым получен оптимальный план исходной задачи. Поэтому остановимся более подробно на нахождении решения расширенной задачи.

При опорном плане $X=(0;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m)$ расширенной задачи значение линейной формы есть $F_0=-M\sum\limits_{i=1}^{m} b_i$, а значения $\Delta_j=z_j-c_j$ равны $-M\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}-c_j$. Таким образом, F_0 и разности z_j-c_j состоят из двух независимых частей, одна из которых зависит от M, а другая — нет.

После вычисления F_0 и Δ_j их значения, а также исходные данные расширенной задачи заносят в таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплексная таблица. При этом в $(m+2)$-ю строку помещают коэффициенты при M, а в $(m+1)$-ю — слагаемые, не содержащие M.

При переходе от одного опорного плана к другому в базис вводят вектор, соответствующий наибольшему по абсолютной величине отрицательному числу $(m+2)$-й строки. Искусственный вектор, исключенный из базиса в результате некоторой итерации, в дальнейшем не имеет смысла вводить ни в один из последующих базисов и, следовательно, преобразование столбцов этого вектора излишне. Однако если нужно найти решение двойственной задачи для данной (о чем будет сказано в § 1.6), то такое преобразование необходимо. Может случиться так, что в результате некоторой итерации ни один из искусственных векторов из базиса не будет исключен.

Пересчет симплекс-таблиц при переходе от одного опорного плана к другому производят по общим правилам симплексного метода.

Итерационный процесс по $(m+2)$-й строке ведут до тех пор, пока:

1) либо все искусственные векторы не будут исключены из базиса;

2) либо не все искусственные векторы исключены, но $(m+2)$-я строка не содержит больше отрицательных элементов в столбцах векторов P_1, P_2, ..., P_{n+m}.

В первом случае базис отвечает некоторому опорному плану исходной задачи и определение ее оптимального плана продолжают по $(m+1)$-й строке.

Во втором случае, если элемент, стоящий в $(m+2)$-й строке столбца вектора P_0 отрицателен, исходная задача не имеет решения; если же он равен нулю, то найденный опорный план исходной задачи является вырожденным и базис содержит по крайней мере один из векторов искусственного базиса.

Если исходная задача содержит несколько единичных векторов, то их следует включить в искусственный базис.

Следовательно, процесс нахождения решения задачи (32) — (34) методом искусственного базиса включает следующие основные этапы:

1. Составляют расширенную задачу (35) — (37).
2. Находят опорный план расширенной задачи.
3. С помощью обычных вычислений симплекс-метода исключают искусственные векторы из базиса. В результате либо находят опорный план исходной задачи (32) — (34), либо устанавливают ее неразрешимость.
4. Используя найденный опорный план задачи (32) — (34), либо находят симплекс-методом оптимальный план исходной задачи, либо устанавливают ее неразрешимость.

1.44. Найти минимум функции $F=-2x_1+3x_2-6x_3-x_4$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4=24, \\ x_1+2x_2+4x_3\leqslant 22, \\ x_1-x_2+2x_3\geqslant 10, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

Решение. Запишем данную задачу в форме основной задачи: найти максимум функции $F_1=2x_1-3x_2+6x_3+x_4$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4=24, \\ x_1+2x_2+4x_3+x_5=22, \\ x_1-x_2+2x_3-x_6=10, \end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0 \ \ (j=\overline{1,6}).$$

В системе уравнений последней задачи рассмотрим векторы из коэффициентов при неизвестных:

$$P_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix};\quad P_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix};\quad P_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$P_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad P_6=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Среди векторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и P_6 только два единичных (P_4 и P_5). Поэтому в левую часть третьего уравнения системы ограничений задачи добавим дополнительную неотрицательную переменную x_7 и рассмотрим расширенную задачу, состоящую в максимизации функции

$$F=2x_1-3x_2+6x_3+x_4-Mx_7$$

при условиях

$$\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+x_4=24,\\ x_1+2x_2+4x_3+x_5=22,\\ x_1-x_2+2x_3-x_6+x_7=10,\end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,7}).$$

Расширенная задача имеет опорный план $X=(0;\ 0;\ 0;\ 24;\ 22;\ 0;\ 10)$, определяемый системой трех единичных векторов: P_4, P_5, P_7.

Таблица 1.13

i	Базис	$C_б$	P_0	2	−3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	−2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	$-M$	10	1	−1	2	0	0	−1	1
4			24	0	4	−8	0	0	0	0
5			−10	−1	1	−2	0	0	1	0

Составляем таблицу I итерации (табл. 1.13), содержащую пять строк. Для заполнения 4-й и 5-й строк находим F_0 и значения разностей $z_j-c_j (j=\overline{1,7})$:

$$F_0=24-10M;\ z_1-c_1=0-M;\ z_2-c_2=4+M;\ z_3-c_3=-8-2M;$$
$$z_4-c_4=0;\ z_5-c_5=0;\ z_6-c_6=0+M;\ z_7-c_7=0.$$

Значения F_0 и z_j-c_j состоят из двух слагаемых, одно из которых содержит M, а другое — нет. Для удобства итерационного процесса число, состоящее при M, записываем в 5-й строке, а слагаемое, которое не содержит M,— в 4-й строке.

В 5-й строке табл. 1.13 в столбцах векторов P_j ($j=\overline{1,7}$) имеется два отрицательных числа (—1 и —2). Наличие этих чисел говорит о том, что данный опорный план расширенной задачи не является оптимальным. Переходим к новому опорному плану расширенной задачи. В базис вводим вектор P_3. Чтобы определить вектор, исключаемый из базиса, находим $\theta = \min(22/4; 10/2) = 10/2$. Следовательно, вектор P_7 исключаем из базиса. Этот вектор не имеет смысла вводить ни в один из последующих базисов, поэтому в дальнейшем столбец данного вектора не заполняется (табл. 1.14 и 1.15).

Составляем таблицу II итерации (табл. 1.14). Она содержит только четыре строки, так как искусственный вектор из базиса исключен.

Таблица 1.14

i	Базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	-1
2	P_5	0	2	-1	4	0	0	1	2
3	P_3	6	5	1/2	$-1/2$	1	0	0	$-1/2$
4			64	4	0	0	0	0	-4

Как видно из табл. 1.14, для исходной задачи опорным является план $X=(0;\ 0;\ 5;\ 34;\ 2)$. Проверим его на оптимальность. Для этого рассмотрим элементы 4-й строки. В этой строке в столбце вектора P_6 имеется отрицательное число (—4). Следовательно, данный опорный план не является оптимальным и может быть улучшен благодаря введению в базис вектора P_6. Из базиса исключается вектор P_5. Составляем таблицу III итерации.

Таблица 1.15

i	Базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0
2	P_6	0	1	$-1/2$	2	0	0	1/2	1
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0
4			68	2	8	0	0	2	0

В 4-й строке табл. 1.15 среди чисел Δ_j нет отрицательных. Это означает, что найденный новый опорный план исходной задачи $X^*=(0;\ 0;\ 11/2;\ 35;\ 0;\ 1)$ является оптимальным. При этом плане значение линейной формы $F_{\max}=68$. Решение данной задачи можно было бы проводить, используя одну таблицу (табл. 1.16), в которой последовательно записаны все три итерации.

Таблица 1.16

i	Базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	$-M$	10	1	-1	2	0	0	-1	1
4			24	0	4	-8	0	0	0	0
5			-10	-1	1	-2	0	0	1	0
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	-1	
2	P_5	0	2	-1	4	0	0	1	2	
3	P_3	6	5	$1/2$	$-1/2$	1	0	0	$-1/2$	
4			64	4	0	0	0	0	-4	
1	P_4	1	35	$5/2$	2	0	1	$1/2$	0	
2	P_6	0	1	$-1/2$	2	0	0	$1/2$	1	
3	P_3	6	$11/2$	$1/4$	$1/2$	1	0	$1/4$	0	
4			68	2	8	0	0	2	0	

1.45. Найти минимум функции $F=2x_1-x_2-x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=10, \\ -2x_1-x_2-2x_4\geqslant 18, \\ 3x_1+2x_2+x_4\geqslant 36, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем данную задачу в форме основной задачи линейного программирования: найти максимум функции $F=-2x_1+x_2+x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=10, \\ -2x_1-x_2-2x_4-x_5=18, \\ 3x_1+2x_2+x_4-x_6=36, \\ x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,6}). \end{cases}$$

Так как среди векторов

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\quad P_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\quad P_4=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_5=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad P_6=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

имеется только один единичный (P_3), то находим решение расширенной задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = -2x_1 + x_2 + x_4 - Mx_7 - Mx_8$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_4 - x_5 + x_7 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 + x_8 = 36, \\ x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,8}). \end{cases}$$

Расширенная задача имеет опорный план $X = (0;\ 0;\ 10;\ 0;\ 0;\ 0;\ 18;\ 36)$, определяемый системой трех единичных векторов: P_3, P_7 и P_8.

Составляем таблицу I итерации.

Таблица 1.17

i	Базис	$C_б$	P_0	-2	1	0	1	0	0	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
1	P_3	0	10	1	-2	1	0	0	0	0	0
2	P_7	$-M$	18	-2	-1	0	-2	-1	0	1	0
3	P_8	$-M$	36	3	2	0	1	0	-1	0	1
4			0	2	-1	0	-1	0	0	0	0
5			-54	-1	-1	0	1	1	1	0	0

В 5-й строке табл. 1.17 в столбцах векторов P_1 и P_2 имеются отрицательные числа. Поэтому переходим к новому опорному плану расширенной задачи. В базис вводим вектор P_2, а из базиса исключаем вектор P_3.

Составляем таблицу II итерации (табл. 1.18). Так как исключенный из базиса искусственный вектор P_8 не имеет смысла вводить ни в один из последующих базисов, то в таблице этот вектор не указывается.

Таблица 1.18

i	Базис	$C_б$	P_0	-2	1	0	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_3	0	46	4	0	1	1	0	-1	0
2	P_7	$-M$	36	$-1/2$	0	0	$-3/2$	-1	$-1/2$	1
3	P_2	1	18	$3/2$	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	0
4			18	$7/2$	0	0	$-1/2$	0	$-1/2$	0
5			-36	$1/2$	0	0	$3/2$	1	$1/2$	0

В 5-й строке табл. 1.18 в столбцах векторов P_1, P_2, ..., P_7 не содержится отрицательных элементов. В столбце же вектора P_0 этой строки находится отрицательное число (-36). Следовательно, исходная задача не имеет опорного плана.

1.46. Найти максимум функции $F=2x_1-3x_2+6x_3+x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3\leqslant 20, \\ x_1-x_2+2x_3\geqslant 10, \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=24, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

Решение. Запишем данную задачу в форме основной задачи линейного программирования: найти максимум функции $F=2x_1-3x_2+6x_3-x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3+x_5=20, \\ x_1-x_2+2x_3-x_6=10, \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=24, \end{cases}$$
$$x_j\geqslant 0\ \ (j=\overline{1,6}).$$

Среди векторов

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\quad P_3=\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix};\quad P_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$P_5=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad P_6=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

имеется лишь два единичных (P_4 и P_5). Поэтому находим решение расширенной задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F=2x_1-3x_2+6x_3+x_4-Mx_7$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3+x_5=20, \\ x_1-x_2+2x_3-x_6+x_7=10, \\ 2x_1+x_2-2x_3+x_4=24, \end{cases}$$
$$x_j\geqslant 0\ \ (j=\overline{1,7}).$$

Расширенная задача имеет опорный план $X=(0;\ 0;\ 0;\ 24;\ 20;\ 0;\ 10)$, определяемый системой трех единичных векторов P_4, P_5 и P_7.

Составляем таблицу I итерации.

Таблица 1.19

i	Базис	$C_б$	P_0	2	−3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_5	0	20	1	2	−4	0	1	0	0
2	P_7	$-M$	10	1	−1	2	0	0	−1	1
3	P_4	1	24	2	1	−2	1	0	0	0
4			24	0	4	−8	0	0	0	0
5			−10	−1	1	−2	0	0	1	0

Из табл. 1.19 видно, что исходный опорный план не является оптимальным. Переходим к новому опорному плану. В базис вводим вектор P_3, а из базиса исключаем вектор P_7.

Составляем таблицу II итерации (табл. 1.20). Эта таблица содержит только четыре строки, так как искусственный вектор P_7 из базиса исключен.

Таблица 1.20

i	Базис	$C_б$	P_0	2	−3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	0	40	3	0	0	0	1	−2
2	P_3	6	5	1/2	−1/2	1	0	0	−1/2
3	P_4	1	34	3	0	0	1	0	−1
4			64	4	0	0	0	0	−4

Из последней таблицы видно, что найденный опорный план исходной задачи $X = (0; 0; 5; 34; 40; 0)$ не является оптимальным, поскольку в 4-й строке столбца вектора P_6 этой таблицы находится отрицательное число (—4). Так как в указанном столбце нет положительных элементов, то данная задача не имеет оптимального плана.

3. Модифицированный симплекс-метод. При решении задач линейного программирования симплексным методом осуществлялся упорядоченный переход от одного опорного плана к другому до тех пор, пока либо не была установлена неразрешимость задачи, либо не был найден ее оптимальный план. При этом для определения того, является ли найденный опорный план оптимальным или нет, на каждой из итераций нужно было находить числа

$$\Delta_j = Z_j - c_j = c_{i_1}x_{i_1j} + c_{i_2}x_{i_2j} + \ldots + c_{i_m}x_{i_mj} - c_j,$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — номера базисных векторов, а $x_{i_1j}, x_{i_2j}, \ldots, x_{i_mj}$ — коэффициенты разложения векторов P_j по векторам данного базиса. Все указанные коэффициенты следовало определять на каждой из итераций вычислительного процесса. Эта необходимость отпадает при решении задач линейного программирования модифицированным симплексным методом. В этом случае на каждой из итераций вычисляют вектор

$$\Omega = C_б B^{-1}, \tag{38}$$

где B^{-1} — матрица, обратная матрице B, составленной из компонент векторов данного базиса, а затем находят числа Δ_j по формуле

$$\Delta_j = \Omega P_j - c_j. \tag{39}$$

Определим компоненты вектора Ω и чисел Δ_j в случае решения основной задачи линейного программирования модифицированным симплекс-методом.

Итак, пусть дана задача линейного программирования, записанная в форме основной задачи, и пусть для нее найден опорный план, который определяется базисом, образованным векторами P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m}. Следовательно, известна матрица B, для которой можно найти обратную матрицу B^{-1}. Дальнейшее вычисление удобнее вести, если их результаты, как и при решении задачи симплексным методом, оформлять в виде таблиц. В этом случае при переходе от одной так называемой основной таблицы к другой используется вспомогательная таблица.

Вспомогательная таблица (табл. 1.21) отличается от обычной симплекс-таблицы тем, что в ней содержатся дополнительные столбцы и строки, в которых соответственно записывают координаты векторов $\Omega^{(i)}$ и значения $\Delta_j^{(1)}$, получаемые в процессе нахождения решения задачи.

Основная таблица (табл. 1.22) отличается от обычной симплекс-таблицы, во-первых, тем, что вместо столбцов векторов P_j с соответствующими числами c_j записывают столбцы векторов A_i, координатами которых являются соответствующие столбцы матрицы B^{-1}; во-вторых, в $(m+1)$-й строке записывают компоненты векторов Ω, а не числа Δ_j; в-третьих, табл. 1.22 имеет один дополнительный столбец, в первых m строках которого записывают координаты вектора P_s в базисе P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m} и который было бы целесообразно включить в базис на следующей итерации.

Чтобы определить вектор P_s, сначала находят вектор $\Omega^{(1)}$. Его компоненты определяют как скалярное произведение вектора $C_б$ на соответствующие векторы A_i, т. е. по формуле (38). Найденные компоненты вектора $\Omega^{(1)}$ записывают в последней строке табл. 1.22 и в столбце $\Omega^{(1)}$ табл. 1.21. После этого по фор-

Таблица 1.21

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1 / P_1	c_2 / P_2	...	c_n / P_n	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	...	$\Omega^{(k)}$
1	P_{i_1}	c_{i_1}	$x_{i_1 0}$	$x_{i_1 1}$	$x_{i_1 2}$	...	$x_{i_1 n}$	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_1^{(2)}$	...	$\lambda_1^{(k)}$
2	P_{i_2}	c_{i_2}	$x_{i_2 0}$	$x_{i_2 1}$	$x_{i_2 2}$	...	$x_{i_2 n}$	$\lambda_2^{(1)}$	$\lambda_2^{(2)}$	...	$\lambda_2^{(k)}$
.	.			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		.	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	P_{im}	c_{im}	$x_{i_m 0}$	$x_{i_m 1}$	$x_{i_m 2}$	...	$x_{i_m n}$	$\lambda_m^{(1)}$	$\lambda_m^{(2)}$	...	$\lambda_m^{(k)}$
$m+1$	$\Delta_j^{(1)}$			$\Delta_1^{(1)}$	$\Delta_2^{(1)}$	...	$\Delta_n^{(1)}$				
$m+2$	$\Delta_j^{(2)}$			$\Delta_1^{(2)}$	$\Delta_2^{(2)}$	...	$\Delta_n^{(2)}$				
$\vdots$	.			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					
$m+k$	$\Delta_j^{(k)}$			$\Delta_1^{(k)}$	$\Delta_2^{(k)}$	...	$\Delta_n^{(k)}$				

Таблица 1.22

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	...	A_m	P_s
1	P_{i_1}	$c_{i_1 0}$	$x_{i_1 0}$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	$x_{i_1 s}$
2	P_{i_2}	$c_{i_2 0}$	$x_{i_2 0}$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	$x_{i_2 s}$
$\vdots$			$\vdots$	.	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	P_{i_r}	c_{i_r}	$x_{i_r 0}$	a_{r1}	a_{r2}	...	a_{rm}	$x_{i_r s}$
$\vdots$	.	.	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	P_{i_m}	c_{i_m}	$x_{i_m 0}$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mm}	$x_{i_m s}$
$m+1$	$\Omega^{(1)}$		F_0	$\lambda_1^{(1)}$	$\lambda_2^{(1)}$	...	$\lambda_m^{(1)}$	$\Delta_s^{(i)}$

муле (39) находят элементы $(m+1)$-й строки вспомогательной таблицы. Если среди найденных чисел $(m+1)$-й строки вспомогательной таблицы нет отрицательных, то исходный опорный план является оптимальным. Если же таковые есть, то либо задача не имеет решения, либо можно перейти к новому опорному плану, при котором значение целевой функции не уменьшится. Для выяснения этого выбирают среди отрицательных чисел $(m+1)$-й строки табл. 1.21 наибольшее по абсолютной величине. В том случае, когда таких чисел несколько, берут какое-нибудь одно. Пусть этим числом является $\Delta_s^{(1)}$. Тогда последний столбец табл. 1.22 отводят для вектора P_s. В первых m строках этого столбца записывают компоненты вектора P_s в базисе $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$. Они получаются в результате умножения матрицы B^{-1}, записанной в табл. 1.22, на вектор P_s, компоненты которого указаны в табл. 1.21. После определения чисел $x_{i_1s}, x_{i_2s}, \ldots, x_{i_ms}$ выясняют, имеются ли среди них положительные или нет. Если таких чисел нет, то задача не имеет решения. Если же положительные числа имеются, то переходят к новому опорному плану задачи. Для этого находят $\min\limits_{x_{i_ks}>0} (x_{i_k0}/x_{i_ks})$. Пусть $\min\limits_{x_{i_ks}>0}(x_{i_k0}/x_{i_ks})=x_{i_r0}/x_{i_rs}$. Тогда новый опорный план определяется базисом, получаемым из исходного исключением из него вектора P_{i_r} и введением вместо него вектора P_s. Считая элемент x_{i_rs} разрешающим, а r-ю строку и столбец вектора P_s направляющими, переходят к новой основной таблице. Первые m строк столбцов векторов $P_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ новой таблицы находят по известным правилам перехода от одной симплекс-таблицы к другой, рассмотренным выше. После того как эти элементы определены, находят вектор $\Omega^{(2)}$. Компоненты этого вектора записывают как в новой основной таблице, так и в вспомогательной таблице (табл. 1.21). Затем вычисляют числа $\Delta^{(2)}_j$ и проверяют новый опорный план на оптимальность. Если план не оптимален, то либо устанавливают неразрешимость исходной задачи, либо переходят к новому опорному плану. Продолжая итерационный процесс, после конечного числа шагов либо находят оптимальный план задачи, либо устанавливают ее неразрешимость.

Таким образом, процесс нахождения решения задачи модифицированным симплекс-методом включает следующие этапы:

1. Находят опорный план задачи.

2. Вычисляют матрицу B^{-1}, обратную матрице B, составленной из компонентов векторов исходного базиса.

3. Находят вектор $\Omega=C_6B^{-1}$.

4. Вычисляют числа $\Delta_j=\Omega P_j-c_j$. Если все Δ_j не отрицательны, то исследуемый опорный план является оптимальным. Если же среди чисел Δ_j имеются отрицательные, то выбирают среди них наибольшее по абсолютной величине. Пусть это Δ_s.

5. Вычисляют компоненты вектора P_s в исходном базисе. Если среди компонент вектора P_s нет положительных, то целевая функция задачи не ограничена на множестве планов. Если же среди компонент вектора P_s имеются положительные, то переходят к новому опорному плану.

6. По известным правилам симплекс-метода находят разрешающую строку и вычисляют положительные компоненты нового опорного плана, а также матрицу B^{-1}, обратную матрице B, составленной из компонент векторов нового базиса.

7. Проверяют новый опорный план на оптимальность и в случае необходимости проводят вычисление начиная с этапа 3.

1.47. Решить модифицированным симплексным методом задачу 1.41, состоящую в определении максимального значения функции $F=9x_1+10x_2+16x_3$ при условиях

$$\begin{cases} 18x_1+15x_2+12x_3+x_4=360, \\ 6x_1+4x_2+8x_3+x_5=192, \\ 5x_1+3x_2+3x_3+x_6=180, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,6}).$$

Решение. Данная задача имеет опорный план $X=(0;\ 0;\ 0;\ 360;\ 192;\ 180)$, который определяется базисом, образованным векторами P_4, P_5 и P_6. Компоненты этих векторов определяют единичную матрицу B, обратная к которой B^{-1} также является единичной.

Таблица 1.23

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	$\Omega^{(3)}$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6			
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0	0	0	2/9
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0	0	2	5/3
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1	0	0	0
4		$\Delta_j^{(1)}$		-9	-10	-16	0	0	0			
5		$\Delta_j^{(2)}$		3	-2	0	0	2	0			
6		$\Delta_j^{(3)}$		5	0	0	2/9	5/3	0			

Таблица 1.24

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3	P_3
1	P_4	0	360	1	0	0	12
2	P_5	0	192	0	1	0	8
3	P_6	0	180	0	0	1	3
4			0	0	0	0	-16

Составляем вспомогательную и основную таблицы (табл. 1.23 и 1.24). Сначала в табл. 1.23 на основе исходных данных заполняем первые три строки столбцов векторов P_0, P_1, ..., P_6, а в табл. 1.24 — первые три строки столбцов векторов P_0, A_1, A_2, A_3 (элементы столбцов векторов A_1, A_2, A_3 представляют собой соответствующие столбцы матрицы B^{-1}). После этого находим вектор $\Omega^{(1)}$, компоненты которого запишем в 4-й строке табл. 1.23. Эти числа определяем по формуле (38), т. е. получаем в результате скалярных произведений вектора C_6 на соответствующие векторы A_i:

$$\lambda_1^{(1)}=C_6A_1=0\cdot1+0\cdot0+0\cdot0=0,$$
$$\lambda_2^{(1)}=C_6A_2=0\cdot0+0\cdot1+0\cdot0=0,$$
$$\lambda_3^{(1)}=C_6A_3=0\cdot0+0\cdot0+0\cdot1=0.$$

В 4-й строке табл. 1.24 в столбце вектора P_0 записано также значение целевой функции задачи при исходном опорном плане, которое получено как результат скалярного произведения вектора C_6 на вектор P_0:

$$F_0=C_6P_0=0\cdot360+0\cdot192+0\cdot180=0.$$

После заполнения 4-й строки табл. 1.24 найденные компоненты вектора $\Omega^{(1)}$ записываем в табл. 1.23. На основе данных этой таблицы по формуле (39) находим числа $\Delta_j^{(1)}$:

$$\Delta_1^{(1)}=\Omega^{(1)}P_1-C_1=0\cdot18+0\cdot6+0\cdot5-9=-9,$$
$$\Delta_2^{(1)}=\Omega^{(1)}P_2-C_2=0\cdot15+0\cdot4+0\cdot3-10=-10,$$
$$\Delta_3^{(1)}=\Omega^{(1)}P_3-C_3=0\cdot12+0\cdot8+0\cdot3-16=-16,$$
$$\Delta_4^{(1)}=\Delta_5^{(1)}=\Delta_6^{(1)}=0.$$

Так как среди чисел $\Delta_j^{(1)}$ имеются отрицательные, то исходный опорный план не является оптимальным. Перейдем к новому опорному плану. Вектор, который при этом следует ввести в базис, определяют по наибольшей абсолютной величине отрицательных чисел $\Delta_j^{(1)}$. В данном случае это число — 16, которое находится в столбце вектора P_3 табл. 1.23. Поэтому последний столбец табл. 1.24 отводим для вектора P_3. В этом столбце записываем компоненты разложения вектора P_3 по векторам данного базиса. Они определяются в результате умножения матрицы B^{-1} (записанной в табл. 1.24) на матрицу-столбец, элементами которой являются компоненты вектора P_3 (записанные в табл. 1.23):

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix}.$$

Если бы среди найденных чисел не было положительных, то задача не имела бы оптимального плана. Поскольку положительные числа имеются, переходим к новому опорному плану. Для этого введем в базис вектор P_3, а исключим из него вектор P_5. Вывод из базиса вектора P_5 обусловлен тем, что $\min (x_{i0}/x_{i3}) = \min(360/12;\ 192/8;\ 180/3) = 192/8$ достигается при $i=5$.

Считая теперь число 8 разрешающим элементом, а 2-ю строку и столбец вектора P_3 табл. 1.24 — направляющими, переходим к табл. 1.25, в которой элементы первых трех строк столбцов векторов P_0, A_1, A_2 и A_3 найдены с помощью известных правил перехода от одной симплекс-таблицы к другой. После этого находим компоненты вектора $\Omega^{(2)}$. Их значения получаются в результате скалярного произведения вектора $C_б$ и соответствующих векторов A_1, A_2, A_3, компоненты которых записаны в табл. 1.25:

Таблица 1.25

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3	P_2
1	P_4	0	72	1	$-3/2$	0	9
2	P_3	16	24	0	$1/8$	0	2
3	P_6	0	108	0	$-3/8$	1	$3/2$
4			384	0	2	0	-2

$$\lambda_1^{(2)} = C_б A_1 = 0\cdot 1 + 16\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0,$$

$$\lambda_2^{(2)} = C_б A_2 = 0\cdot(-3/2) + 16\cdot 1/8 + 0\cdot(-3/8) = 2,$$

$$\lambda_3^{(2)} = C_б A_3 = 0\cdot 0 + 16\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0.$$

Полученные компоненты вектора $\Omega^{(2)}$ записываем в 4-й строке табл. 1.25 и в соответствующем столбце табл. 1.23. После этого находим числа $\Delta_j^{(2)}$ и записываем их в 5-й строке таблицы. Так как среди чисел $\Delta_j^{(2)}$ есть отрицательное (-2), то найденный опорный план $X=(0;\ 0;\ 24;\ 72;\ 0;\ 108)$ не является оптимальным. Поэтому в табл. 1.25 отводим последний столбец для вектора P_2. Его компоненты в новом базисе определяются в результате умножения матрицы B^{-1} (элементами которой являются числа табл. 1.25, стоящие в столбцах векторов A_1, A_2, A_3) на матрицу-столбец, элементами которой являются компоненты вектора P_2 (записанные в табл. 1.23):

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & -3/8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Найденные числа записываем в столбце вектора P_2 табл. 1.25. Так как среди этих чисел имеются положительные, то переходим к новому опорному плану (табл. 1.26). Это достигается введением в базис вектора P_2 и исключением из него вектора P_4.

Таблица 1.26

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3
1	P_2	10	8	1/9	−1/6	0
2	P_3	16	20	−1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	−3/2	−1/8	1
			400	2/9	5/3	0

После заполнения первых трех строк табл. 1.26 вычисляем, как и выше, компоненты вектора $\Omega^{(3)}$, записываем их в 4-й строке табл. 1.26 и в соответствующем столбце табл. 1.23. Затем вычисляем числа $\Delta_j^{(3)}$. Эти числа записаны в 6-й строке табл. 1.23. Так как среди них нет отрицательных, то найденный опорный план $X^* = (0;\ 8;\ 20;\ 0;\ 0;\ 96)$ является оптимальным. При этом плане целевая функция задачи принимает свое максимальное значение $F_{\max} = 400$.

1.48. Найти модифицированным симплекс-методом решение задачи 1.46, состоящей в определении максимального значения функции $F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \ \ (j = \overline{1,6}).$$

Решение. Для сформулированной задачи нельзя непосредственно написать опорный план. Поэтому рассмотрим расширенную задачу: найти максимум функции $F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \ \ (j = \overline{1,7}).$$

Расширенная задача имеет опорный план $X = (0;\ 0;\ 0;\ 24;\ 22;\ 0;\ 10)$, который определяется базисом, образованным векторами P_4, P_5, P_7. Так как эти векторы единичные, то матрица, составленная из компонент этих векторов B, и обратная к ней B^{-1} являются единичными.

Таблица 1.27

i	Базис	$C_б$	P_0	2	-3	6	1	0	0	$-M$	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	$\Omega^{(3)}$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7			
1	P_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0	1	1	1
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0	0	0	2
3	P_7	$-M$	10	1	-1	2	0	0	-1	1	$-M$	4	0
4		$\Delta_j^{(1)}$		$-M$	$M+4$	$-2M-8$	0	0	M	0			
5		$\Delta_j^{(2)}$		4	0	0	0	0	-4	$4+M$			
6		$\Delta_j^{(3)}$		2	8	0	0	2	0	M			

Таблица 1.28

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3	P_3
1	P_4	1	24	1	0	0	-2
2	P_5	0	22	0	1	0	4
3	P_7	$-M$	10	0	0	1	2
4			$-10M+24$	1	0	$-M$	

Составляем вспомогательную и основную таблицы (табл. 1.27 и 1.28). Затем находим компоненты вектора $\Omega^{(1)}$, записываем их в 4-й строке табл. 1.28 и в соответствующем столбце табл. 1.27. После этого находим числа $\Delta_j^{(1)}$ записываем их в 4-й строке табл. 1.27. Так как под M понимается некоторое сколь угодно большое положительное число, то среди чисел $\Delta_j^{(1)}$ есть два отрицательных: $-M$ и $-2M-8$. Наибольшее по абсолютной величине отрицательное число находится в столбце вектора P_3. Поэтому в последнем столбце табл. 1.28 записываем компоненты разложения вектора P_3 по векторам данного базиса. Вводя в базис вектор P_3 и исключая из него вектор P_7, переходим к новому опорному плану (табл. 1.29).

Таблица 1.29

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3	P_6
1	P_4	1	34	1	0	1	-1
2	P_5	0	2	0	1	-2	2
3	P_3	6	5	0	0	$1/2$	$-1/2$
4			54	1	0	4	

Найденный опорный план $X=(0;\ 0;\ 5;\ 2;\ 34;\ 0)$ проверяем на оптимальность. Для этого находим вектор $\Omega^{(2)}$ и определяем числа $\Delta_j^{(2)}$. Так как среди этих чисел есть отрицательные (—4), то в табл. 1.29 заполняем столбец вектора P_6 и переходим к новому опорному плану (табл. 1.30).

Таблица 1.30

i	Базис	$C_б$	P_0	A_1	A_2	A_3
1	P_4	1	35	1	1/2	0
2	P_6	0	1	0	1/2	−1
3	P_3	6	11/2	0	1/4	0
4			68	1	2	0

Находим вектор $\Omega^{(3)}$, записываем его компоненты в 4-й строке табл. 1.30 и в соответствующем столбце табл. 1.27. После этого находим числа $\Delta_j^{(3)}$. Эти числа записаны в 6-й строке табл. 1.27. Так как среди указанных чисел нет отрицательных, то найденный опорный план $X^*=(0;\ 0;\ 11/2;\ 35;\ 0;\ 1)$ является оптимальным планом исходной задачи. При этом плане целевая функция принимает свое максимальное значение $F_{\max}=68$.

Сравнивая процессы нахождения решения приведенных выше задач симплексным методом и модифицированным симплексным методом, заключаем, что при использовании последнего метода понадобилось проводить меньше вычислений. Это характерно и для нахождения решения других задач линейного программирования, прежде всего таких, для которых число m существенно меньше, нежели n. Поэтому во многих случаях при выборе метода решения конкретных задач предпочтение отдается модифицированному симплексному методу. При этом для различных форм этого метода разработаны стандартные программы его использования при решении конкретных задач на ЭВМ.

Используя рассмотренные методы, найдите решение задач 1.49—1.64.

1.49. $F=3x_1+2x_3-6x_6\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+6x_6=18, \\ -3x_1+2x_3+x_4-2x_6=24, \\ x_1+3x_3+x_5-4x_6=36, \end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0\ \ (j=\overline{1,6}).$$

1.50. $F=2x_1+3x_2-x_4\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_4+x_5=16, \\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_4=18, \\ -x_1+3x_2+4x_4+x_6=24, \\ x_j\geqslant 0\ \ (j=\overline{1,6}). \end{cases}$$

1.51. $F=8x_2+7x_4+x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1-2x_2-3x_4-2x_6=12, \\ 4x_2+x_3-4x_4-3x_6=12, \\ 5x_2+5x_4+x_5+x_6=25, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,6}).$$

1.52. $F=x_1+3x_2-5x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3+2x_4=28, \\ -3x_1+5x_2-3x_4+x_5=30, \\ 4x_1-2x_2+8x_4+x_6=32, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,6}).$$

1.53. $F=3x_1+2x_5-5x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_5+5x_6=34, \\ 4x_1+x_3+2x_5-4x_6=28, \\ -3x_1+x_4-3x_5+6x_6=24, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,6}).$$

1.54. $F=x_1+2x_2-x_3 \to \max;$

$$\begin{cases} -x_1+4x_2-2x_3 \leqslant 6, \\ x_1+x_2+2x_3 \geqslant 6, \\ 2x_1-x_2+2x_3=4, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

1.55. $F=8x_1-3x_2+x_3+6x_4-5x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3+x_4-2x_5=28, \\ x_1-2x_2+x_4+x_5=31, \\ -x_1+3x_2+5x_3+4x_4-8x_5=118, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0.$$

1.56. $F=2x_1-3x_2+4x_3+5x_4-x_5+8x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1+5x_2-3x_3-4x_4+2x_5+x_6=120, \\ 2x_1+9x_2-5x_3-7x_4+4x_5+2x_6=320, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,6}).$$

1.57. $F=-3x_1+5x_2-3x_3+x_4+x_5+8x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+5x_4-6x_5+x_6=60, \\ 7x_1-17x_2+26x_3+31x_4-35x_5+6x_6=420, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,6}).$$

1.58. $F=5x_1-x_2+8x_3+10x_4-5x_5+x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_4+x_5-x_6=36, \\ -x_1+2x_2+x_3+2x_4+2x_6=20, \\ 3x_2-x_2+2x_3-x_4+3x_5+x_6=30, \end{cases}$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,6}).$$

1.59. Определить оптимальный план производства изделий по условиям задачи 1.1.

1.60. Определить оптимальный план перевозок груза по условиям задачи 1.4.

1.61. Определить оптимальный план производства продукции кондитерской фабрикой по условиям задачи 1.5.

1.62. На швейной фабрике для изготовления четырех видов изделий может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в таблице. В ней же указаны имеющееся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Артикул ткани	Норма расхода ткани (м) на одно изделие вида				Общее количество ткани (м)
	1	2	3	4	
I	1	—	2	1	180
II	—	1	3	2	210
III	4	2	—	4	800
Цена одного изделия (руб.)	9	6	4	7	

1.63. Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на единицу продукции вида				Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	1	2	3	4	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	—	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	—	340
Прибыль от реализации единицы продукции (руб.)	8	3	2	1	

1.64. Для перевозок груза на трех линиях могут быть использованы суда трех типов. Производительность судов при использовании их на различных линиях характеризуется данными, приведенными в таблице. В ней же указаны общее время, в течении которого суда каждого типа находятся в эксплуатации, и минимально необходимые объемы перевозок на каждой из линии. Определите, какие суда, на какой линии и в течение какого времени следует использовать, чтобы обеспечить максимальную загрузку судов с учетом возможного времени их эксплуатации.

Тип судна	Производительность судов (млн. тонно-миль в сутки) на линии			Общее время эксплуатации судов (сут.)
	1	2	3	
I	8	14	11	300
II	6	15	13	300
III	12	12	4	300
Заданный объем перевозок (млн. тонно-миль)	3000	5400	3300	—

§ 1.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В предыдущих параграфах мы рассмотрели методы нахождения решения различных задач линейного программирования. Эти методы определяют алгоритмы решения конкретных задач. Под алгоритмом имеется в виду определенное правило, согласно которому установлен соответствующий порядок выполнения действий над исходными данными в целях получения искомых результатов.

Зная алгоритм решения данной конкретной задачи, можно составить программу ее решения на ЭВМ. Однако во многих случаях составление такой программы оказывается излишним, поскольку можно воспользоваться существующими пакетами прикладных программ.

Пакет прикладных программ (ППП) представляет собой набор программ, позволяющий решать определенный класс задач и ориентированный на определенный тип машин. Рассмотрим более подробно наиболее часто используемые для нахождения решения задач линейного программирования пакеты прикладных программ: ППП «Линейное программирование-2» (ППП ЛП2) и ППП «Линейное программирование в АСУ» (ППП ЛП АСУ).

1. Использование ППП ЛП2 для нахождения решения задач линейного программирования. ППП ЛП2 предназначается для решения задач под управлением дисковой операционной системы ДОС ЕС; при этом используется алгоритм модифицированного симплекс-метода. Применение ППП ЛП2 позволяет находить решения задач линейного программирования с 200 ограничениями на машинах с оперативной памятью 32 К байт и с 1500 ограничениями на машинах с памятью 64 Кбайт. При этом в машину вводятся с перфокарт лишь отличные от нуля исходные данные задачи.

В условиях использования данного пакета прикладных программ появляется возможность одновременно хранить в памяти машины исходные данные нескольких задач, решение каждой из которых может находиться неоднократно с учетом различных изменений в целевой функции и системе ограничений. Кроме того, пользователь ППП ЛП2 может на базе хранящихся в памяти машины различных задач формировать новые задачи.

Наряду с возможностями нахождения решения различных задач использование ППП ЛП2 позволяет проводить анализ полученного решения. Этот анализ может быть самым широким, что определяется пользователем. Например, можно определить, в каких интервалах могут изменяться коэффициенты целевой функции задачи, так чтобы данная задача имела один и тот же оптимальный план. Далее, можно выявить устойчивость оптимального плана задачи относительно изменения свободных членов системы ограничений, а также других параметров задачи.

Чтобы найти решение конкретной задачи линейного программирования с использованием ППП ЛП2, нужно определенным образом подготовить исходные данные задачи, ввести их в ЭВМ и осуществить управление процессом решения задачи, обеспечив выдачу необходимых результатов.

Таким образом, процесс нахождения решения конкретной задачи линейного программирования с использованием ППП ЛП2 включает следующие этапы:

1. Составляют математическую модель задачи.
2. В соответствии с требованиями ППП ЛП2 элементам математической модели присваивают определенные имена.
3. Переписывают математическую модель задачи с учетом введенных имен.
4. Составляют матрицу исходных данных.
5. Записывают исходные данные на специальном бланке.
6. Определяют управляющую программу решения задачи.
7. Находят решение задачи на ЭВМ.
8. Проводят анализ полученного решения.

1.65. Используя ППП ЛП2, найти решение задачи 1.41, состоящей в определении плана изготовления изделий *A*, *B* и *C*, обеспечивающего максимальный их выпуск в стоимостном выражении с учетом ограничений на возможное использование сырья трех видов. Нормы расхода сырья каждого вида на одно изделие, цена одного изделия соответствующего вида, а также имеющегося сырья, приведены в табл. 1.31.

Таблица 1.31

Вид сырья	Нормы затрат (кг) на одно изделие			Общее количество сырья (кг)
	A	*B*	*C*	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия (руб.)	9	10	16	

Решение. Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* — через x_2, изделий *C* — через x_3. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении максимального значения функции $F=9x_1+10x_2+16x_3$ при условиях

$$\begin{cases} 18x_1+15x_2+12x_3\leqslant 360, \\ 6x_1+4x_2+8x_3\leqslant 192, \\ 5x_1+3x_2+3x_3\leqslant 180, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

Перепишем теперь целевую функцию и систему ограничений задачи в соответствии с требованиями ППП ЛП2. Для этого прежде всего переменным, ограничениям и целевой функции присвоим соответствующие имена. Эти имена не должны содержать более восьми символов и быть информативными. Переменным x_1, x_2 и x_3 присвоим соответственно имена ИЗДА, ИЗДВ и ИЗДС, ограничениям — имена СЫРЬЕ1, СЫРЬЕ2, СЫРЬЕ3, а целевой функции — имя СТОИМ. С учетом введения имен целевая функция и система ограничений задачи, согласно требованиям ППП ЛП2, записываются в виде уравнений:

СТОИМ = 9ИЗДА + 10ИЗДВ + 16ИЗДС
СЫРЬЕ1 = 18ИЗДА + 15ИЗДВ + 12ИЗДС
СЫРЬЕ2 = 6ИЗДА + 4ИЗДВ + 8ИЗДС
СЫРЬЕ3 = 5ИЗДА + 3ИЗДВ + 3ИЗДС

Из приведенной записи видно, что в левую часть полученной системы уравнений одна и та же переменная входит только один раз. Такие переменные, а именно переменные СТОИМ, СЫРЬЕ1, СЫРЬЕ2 и СЫРЬЕ3, называются *строчными*. Переменные ИЗДА, ИЗДВ и ИЗДС являются *столбцовыми*. Эти переменные никогда не могут находиться в левой части уравнений.

Следующим шагом является запись исходных данных на специальном бланке. Прежде чем это сделать, составим матрицу исходных данных задачи (табл. 1.32).

Таблица 1.32

Строчные переменные	Столбцовые переменные			Нижняя граница	Верхняя граница
	ИЗДА	ИЗДВ	ИЗДС		
СТОИМ	9	10	16	—	—
СЫРЬЕ1	18	15	12	0	360
СЫРЬЕ2	6	4	8	0	192
СЫРЬЕ3	5	3	3	0	180
Нижняя граница	—	—	—	—	—
Верхняя граница	—	—	—	—	—

В этой таблице соответствующим образом записана приведенная выше система уравнений, а также по всем строчным и столбцовым переменным указана область их возможных изменений.

Используя табл. 1.32, запишем исходные данные на бланке для их последующей перфорации. При этом бланк разобьем на шесть вспомогательных полей (табл. 1.33). Поле 1 включает позиции со 2-й по 3-ю, поле 2 — с 5-й по 12-ю, поле 3 — с 15-й по 22-ю, поле 4 — с 25-й по 36-ю, поле 5 — с 40-й по 47-ю, поле 6 — с 50-й по 61-ю.

Таблица 1.33

Поле	1	2	3	4	5	6
Позиции	2—3	5—12	15—22	25—36	40—47	50—61
		Столбцовая переменная	Строчная переменная	Коэффициент	Строчная переменная	Коэффициент

В поле 4 запишем коэффициент, с которым столбцовая переменная, указанная в поле 2, входит в уравнение строчной переменной, приведенной в поле 3. Точно так же в поле 6 запишем коэффициент, с которым столбцовая переменная, указанная в поле 2, входит в уравнение строчной переменной, приведенной в поле 5.

Записи исходных данных на бланке предшествует указание комментария, начинающегося с символа * в позиции 1 и трех операторов, которые записываются с позиции 1:
INPUT — (начало ввода данных);
NAME — имя задачи;
LISTON — вывод на печать исходных данных.

Размещение и величина комментария не ограничены. Здесь в качестве комментария взято: «исходные данные».

После указания комментария и трех указанных выше операторов запишем исходные данные в соответствии с описанными выше правилами (рис. 1.10).

При записи исходных данных укажем ограничения на столбцовые и строчные переменные. Эти ограничения запишем с помощью следующих обозначений: FR — переменная может принимать любые значения от $-\infty$ до ∞; UB — значения переменной ограничены сверху; LB — значения переменной ограничены

```
1        10        20        30        40        50        60
INPUT
NAME          ПЛАН
/LISTON
*ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ
    ИЗДА      СТОИМ          9.0       СЫРЬЕ1         18.0
    ИЗДА      СЫРЬЕ2         6.0       СЫРЬЕ3          5.0
    ИЗДВ      СТОИМ         10.0       СЫРЬЕ1         15.0
    ИЗДВ      СЫРЬЕ2         4.0       СЫРЬЕ3          3.0
    ИЗДС      СТОИМ         16.0       СЫРЬЕ1         12.0
    ИЗДС      СЫРЬЕ2         8.0       СЫРЬЕ3          3.0
*ОГРАНИЧЕНИЯ
 FR ОГР       СТОИМ
 UB ОГР       СЫРЬЕ1       360.0
 UB ОГР       СЫРЬЕ2       192.0
 UB ОГР       СЫРЬЕ3       180.0
ENDATA
MOVE
    DATA      ПЛАН
    MAXIMIZE  СТОИМ
    BOUNDS    ОГР
ENDATA
LPSOLUTION
END
/*
```

Рис. 1.10

снизу; FX — переменная принимает фиксированное значение. При этом всему набору ограничений присваиваем одно и то же имя, которое запишем в каждой строке.

В данном случае набору ограничений присвоим имя ОГР. Для наглядности перед записью граничных условий дадим какой-нибудь комментарий, например ОГРАНИЧЕНИЯ. После этого в каждой последующей строке в поле 1 указываем обозначения, границы, в поле 2 — имя набора граничных условий, в поле 3 — имя переменной и в поле 4 — числовое значение граничного условия (рис. 1.10). При этом по переменным, на которые наложено только требование неотрицательности, на бланках ничего не записываем. Если же по переменной заданы нижний и верхний пределы, то в одной строке запишем нижний предел, а в другой — верхний.

После завершения записи граничных условий указываем оператор окончания ввода ENDATA, который записываем с позиции 1 (рис. 1.10). Затем записываем операторы, обеспечивающие управление решением и получение нужных отчетов. Управление решением включает в себя MOVE — оператор начала управления решением, который записываем с позиции 1. Затем с позиции 5 указываем оператор DATA, который открывает доступ к именуемому файлу исходных данных. Оператор MAXIMIZE указывает на то, что определяется максимальное значение целевой функции, а оператор BOUNDS — имя набора граничных условий. Управление решением завершается оператором окончания ввода ENDATA, который записывается с позиции 1.

Оператор LPSOLUTION обеспечивает решение задачи и выдает отчет о решении задачи. Этот оператор запишем с позиции 1. Запись на бланке завершаем оператором окончания END.

Отчет по решению задачи выдается в виде двух таблиц. Для данной задачи отчеты приведены в табл. 1.34 и 1.35.

Таблица 1.34

Номер итерации	Значение стоимости	Число неудовлетворенных ограничений	Общая сумма неудовлетворенных ограничений
0	0.0	0	0.0
2	400.000	0	0.0
ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ			
ОШИБКА НИЖЕ ТОЛЕРАНСА НА		0.000	

В табл. 1.34 1-я строка характеризует начало решения задачи, 2-я строка — окончание решения. В данном случае оптимальный план был получен на II итерации.

Если бы задача не имела оптимального плана, то вместо слов ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ в отчете был бы текст ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ НЕ ОГРАНИЧЕНА или ЗАДАЧА НЕСОВМЕСТНА.

Строка ОШИБКА НИЖЕ ТОЛЕРАНСА НА 0.000 указывает, на сколько накопленная в процессе вычислений погрешность (обусловленная конечным числом разрядов машинного слова) выходит за установленные ППП ЛП2 пределы (ТОЛЕРАНС).

Таблица 1.35

Переменная	Тип	Входит	Значение в решении	Верхняя граница	Нижняя граница	Коэффициент в целевой функции	Двойственная оценка
ИЗДА	LL	4	0.0	* * *	0.0	9.000	—5.000
СЫРЬЕ1	UL	0	360.000	360.000	0.0	0.0	—0.223
ИЗДВ	B *	4	8.000	* * *	0.0	10.000	0.0
ИЗДС	B *	4	20.000	* * *	0.0	16.000	0.0
СЫРЬЕ2	UL	0	192.000	192.000	0.0	0.0	—1.667
СЫРЬЕ3	B *	0	84.000	180.000	0.0	0.0	0.0
СТОИМ	B *	0	400.000	* * *	0.0	—1.000	—1.000

Из отчета по решению данной задачи, приведенного в табл. 1.35, видно, что оптимальным планом производства продукции является план, согласно которому следует изготовить 8 изделий *B* и 20 изделий *C*. При таком плане общая стоимость изготовляемой продукции равна 400 руб. и используется 360 кг сырья I вида, 192 кг сырья II вида и 84 кг сырья III вида (что меньше имеющегося на 96 кг). Этот результат записан в столбце ЗНАЧЕНИЕ В РЕШЕНИИ, где указаны значения всех переменных, как строчных, так и столбцовых при оптимальном плане задачи. Тот факт, что при оптимальном плане производства продукции сырье I и II видов используется полностью, определяется вторым столбцом табл. 1.35, где указан «тип» переменной. В этом столбце против переменных СЫРЬЕ1 и СЫРЬЕ2 стоят обозначения UL, указывающие на то, что данные переменные приняли свои верхние граничные значения. Из этого же столбца видно, что переменная ИЗДА приняла нижнее граничное значение (обозначение LL), а переменные ИЗДВ, ИЗДС, СЫРЬЕ и СТОИМ приняли значения из соответствующих интервалов их возможных изменений (обозначение B*).

Помимо указанных данных, характеризующих решение задачи, в табл. 1.35 столбцами «Верхняя граница», «Нижняя граница» и «Коэффициент в целевой функции» воспроизведены условия задачи. В столбце «Входит» указано число уравнений, в которые данная столбцовая переменная входит, а в столбце «Двойственная оценка» — соответствующие числа Δ_j, взятые с противоположным знаком (см. задачу 1.41). Заметим, что знаки перед числами Δ_j соответствуют случаю минимизации данной целевой функции.

1.66. На ткацкой фабрике для изготовления трех артикулов ткани используются ткацкие станки двух типов, пряжа и красители. В табл. 1.36 указаны производительность станков каждого типа, нормы расхода пряжи и красителей, цена 1 м ткани данного артикула, а также общий фонд рабочего времени станков каждого типа, имеющиеся в распоряжении фабрики фонды пряжи и красителей и ограничения на возможный выпуск тканей данного артикула.

Таблица 1.36

Ресурсы	Нормы затрат на 1 м ткани артикула			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность станков (станко-ч):				
I типа	0,02	—	0,04	200
II типа	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа (кг)	1,0	1,5	2,0	15000
Красители (кг)	0,03	0,02	0,025	450
Цена 1 м ткани (руб.)	5	8	8	—
Выпуск ткани (м):				
минимальный	1000	2000	2500	—
максимальный	2000	9000	4000	—

Составить такой план изготовления тканей, согласно которому будет произведено возможное количество тканей данного артикула, а общая стоимость всех тканей максимальна.

Решение. Составим математическую модель задачи. Предположим, что предприятие произведет x_1 метров ткани 1-го артикула, x_2 метров ткани 2-го артикула и x_3 метров ткани 3-го артикула. Тогда задача состоит в определении максимального в стоимостном выражении выпуска ткани

$$F = 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 \qquad (40)$$

при выполнении следующих ограничений:

на имеющийся фонд рабочего времени каждого из типов станков:

$$\begin{cases} 0{,}02x_1+0{,}04x_3\leqslant 200, \\ 0{,}04x_1+0{,}03x_2+0{,}01x_3\leqslant 500; \end{cases} \tag{41}$$

на выделенные предприятию фонды пряжи и красителей:

$$\begin{cases} x_1+1{,}5x_2+2x_3\leqslant 1500, \\ 0{,}03x_1+0{,}02x_2+0{,}025x_3\leqslant 450; \end{cases} \tag{42}$$

на возможный выпуск ткани каждого из артикулов:

$$\begin{cases} 1000\leqslant x_1\leqslant 2000, \\ 2000\leqslant x_2\leqslant 9000, \\ 2500\leqslant x_3\leqslant 4000. \end{cases} \tag{43}$$

Перепишем теперь целевую функцию и систему ограничений в соответствии с требованиями ППП ЛП2. Для этого прежде всего каждой переменной, ограничениям (41), (42) и целевой функции (40) присвоим соответствующие имена. Переменным x_1, x_2, x_3 присвоим соответственно имена ТКАНЬ1, ТКАНЬ2 и ТКАНЬ3, ограничениям (41) — имена СТАН1 и СТАН2, ограничениям (42) — имена ПРЯЖА и КРАС, а целевой функции (40) — имя СТОИМ.

С учетом введенных имен целевую функцию задачи и ограничения (41), (42) запишем в виде следующей системы уравнений:

СТОИМ = 5ТКАНЬ1 + 8ТКАНЬ2 + 8ТКАНЬ3
СТАН1 = 0,02ТКАНЬ1 + 0,04ТКАНЬ3
СТАН2 = 0,04ТКАНЬ1 + 0,03ТКАНЬ2 + 0,01ТКАНЬ3
ПРЯЖА = ТКАНЬ1 + 1,5ТКАНЬ2 + 2ТКАНЬ3
КРАС = 0,03ТКАНЬ1 + 0,02ТКАНЬ2 + 0,02ТКАНЬ3

Используя полученные уравнения и учитывая значения правых частей ограничений и граничных условий, составляем матрицу исходных данных задачи (табл. 1.37).

Таблица 1.37

Строчные переменные	Столбцовые переменные			Нижняя граница	Верхняя граница
	ТКАНЬ1	ТКАНЬ2	ТКАНЬ3		
СТОИМ	5	8	8	—	—
СТАН1	0,02	—	0,04	0	200
СТАН2	0,04	0,03	0,01	0	500
ПРЯЖА	1	1,5	2	0	15000
КРАС	0,03	0,02	0,025	0	450
Нижняя граница	1,000	2000	2500	—	—
Верхняя граница	2000	9000	4000	—	—

```
1        10        20        30        40        50        60
INPUT
NAME          ПЛАН
/LISTON
*ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ
    ТКАНЬ1    СТОИМ          5.0        СТАН1           0.02
    ТКАНЬ1    СТАН2          0.04       ПРЯЖА           1.0
    ТКАНЬ1    КРАС           0.03
    ТКАНЬ2    СТОИМ          8.0        СТАН2           0.03
    ТКАНЬ2    ПРЯЖА          1.5        КРАС            0.02
    ТКАНЬ3    СТОИМ          8.0        СТАН1           0.04
    ТКАНЬ3    СТАН2          0.01       ПРЯЖА           2.0
    ТКАНЬ3    КРАС           0.025
*ОГРАНИЧЕНИЯ
 FR ОГР       СТОИМ
 LB ОГР       ТКАНЬ1      1000.0
 LB ОГР       ТКАНЬ2      2000.0
 LB ОГР       ТКАНЬ3      2500.0
 UB ОГР       ТКАНЬ1      2000.0
 UB ОГР       ТКАНЬ2      9000.0
 UB ОГР       ТКАНЬ3      4000.0
 UB ОГР       СТАН1        200.0
 UB ОГР       СТАН2        500.0
 UB ОГР       ПРЯЖА       1500.0
 UB ОГР       КРАС         450.0
ENDATA
MOVE
    DATA      ПЛАН
    MAXIMIZE  СТОИМ
    BOUNDS    ОГР
ENDATA
LPSOLUTION
END
/*
```

Рис. 1.11

На основе табл. 1.37 исходные данные задачи, операторы управления и операторы описания запишем на бланке (рис. 1.11).

После этого проводим решение задачи на ЭВМ. Результат решения приведен в табл. 1.38.

Из табл. 1.38 следует, что оптимальным планом изготовления ткани является план, согласно которому выпускается 1000 м ткани 1-го артикула, 6000 м ткани 2-го артикула и 2500 м ткани 3-го артикула. Общая стоимость изготовленных тканей равна 73 000 руб. При данном плане выпуска тканей полностью используется пряжа, остаются неиспользованными красители и не полностью загружены станки I и II типов.

Таблица 1.38

Переменная	Тип	Входит	Значение в решении	Верхняя граница	Нижняя граница	Коэффициент в целевой функции	Двойственная оценка
ТКАНЬ1	LL	5	1000.000	2000.000	1000.000	5.000	—33.334
СТОИМ	B*	0	73000.000	xxx	xxx	—1.000	—1.000
СТАН1	B*	0	120.000	200.000	0.0	0.0	0.0
СТАН2	B*	0	245.000	500.000	0.0	0.0	0.0
ПРЯЖА	UL	0	15000.000	15000.000	0.0	0.0	—53.334
КРАС	B*	0	212.500	450.000	0.0	0.0	0.0
ТКАНЬ2	B*	4	6000.000	9000.000	2000.000	8.000	0.0
ТКАНЬ3	B*	5	2500.000	4000.000	2500.000	8.000	0.0

2. Использование ППП ЛП АСУ для нахождения решения задачи линейного программирования. ППП ЛП АСУ предназначается для решения задач под управлением операционной системы ОС ЕС. С помощью этого пакета можно найти решение как задачи линейного программирования, так и задачи частично целочисленного и некоторых задач нелинейного программирования.

При оперативной памяти, равной 1024 Кбайт, можно найти решение задач линейного и нелинейного программирования, содержащих до 16 000 ограничений при любом числе переменных и задач частично-целочисленного программирования, имеющих до 4095 целочисленных переменных.

Использование ППП ЛП АСУ позволяет последовательно находить решение задач, получающихся из исходной с помощью внесения изменений в исходные данные, а также построения различных целевых функций. Наряду с этим использование указанных программ дает возможность получать отчеты, необходимые для проведения широкого послеоптимизационного анализа решения задач линейного и нелинейного программирования, а также проводить другие различные исследования, обусловленные рациональным подходом к решению задач математического программирования.

Нахождение решения задачи линейного программирования с использованием ППП ЛП АСУ включает те же основные этапы, что и при ее решении с использованием ППП ЛП2.

1.67. Машиностроительное предприятие для изготовления четырех видов продукции использует токарное, фрезерное, сверлильное, расточное и шлифовальное оборудование, а также комплектующие изделия. Кроме того, сборка изделий требует выполнения определенных сборочно-наладочных работ. Нормы затрат всех видов ресурсов на изготовление каждого из изделий приведены в табл. 1.39. В этой же таблице указаны наличный фонд каждого из ресурсов, прибыль от реализации единицы продукции данного вида, а также ограничения на возможный выпуск продукции 2-го и 3-вида.

Таблица 1.39

Ресурсы	Нормы затрат на изготовление одного изделия				Общий объем ресурсов
	1	2	3	4	
Производительность оборудования (человеко-ч):					
токарного	550	—	620	—	64 270
фрезерного	40	30	20	20	4 800
сверлильного	86	110	150	52	22 360
расточного	160	92	158	128	26 240
шлифовального	—	158	30	50	7 900
Комплектующие изделия (шт)	3	4	3	3	520
Сборочно-наладочные работы (человеко-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	315	278	573	370	—
Выпуск (шт.):					
минимальный	—	40	—	—	—
максимальный	—	—	120	—	—

Найти план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации является максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий 1-го вида, x_2 изделий 2-го вида, x_3 изделий 3-го вида и x_4 изделий 4-го вида. Тогда задача состоит в определении максимального значения прибыли

$$F=315x_1+278x_2+573x_3+370x_4 \tag{44}$$

при ограничениях:

на имеющийся фонд рабочего времени каждой из групп оборудования:

$$\begin{cases} 550x_1 + 620x_3 \leqslant 64\,270, \\ 40x_1+30x_2+20x_3+20x_4 \leqslant 4800, \\ 86x_1+110x_2+150x_3+52x_4 \leqslant 22\,360, \\ 160x_1+92x_2+158x_3+128x_4 \leqslant 26\,240, \\ 158x_2+30x_3+50x_4 \leqslant 7900; \end{cases} \tag{45}$$

на возможное использование комплектующих изделий:

$$3x_1+4x_2+3x_3+3x_4\leqslant 520; \qquad (46)$$

на возможный объем выполнения сборочно-наладочных работ:

$$4{,}5x_1+4{,}5x_2+4{,}5x_3+4{,}5x_4\leqslant 720; \qquad (47)$$

на возможный выпуск изделий каждого вида:

$$x_2\geqslant 40, \qquad (48)$$

$$x_3\leqslant 120,$$

$$x_1,\ x_3,\ x_4\geqslant 0. \qquad (49)$$

Перепишем теперь целевую функцию и систему ограничений нашей задачи в соответствии с требованиями ППП ЛП АСУ. Эти требования аналогичны требованиям, предъявляемым к записи задачи ППП ЛП2.

Присвоим переменным x_1, x_2, x_3 и x_4 соответственно имена ПР1, ПР2, ПР3 и ПР4, ограничениям (45) — имена ТОКАР, ФРЕЗЕР, СВЕРЛИЛ, РАСТОЧ и ШЛИФОВАЛ, ограничениям (46) и (47) — имена КОМПЛЕКТ и СБОРКА, а целевой функции (44) — имя ПРИБ.

С учетом введенных имен целевую функцию задачи и ограничения (45) — (47) запишем в виде следующей системы уравнений:

```
ПРИБ      =315ПР1+278ПР2+573ПР3+370ПР4
ТОКАР     =550ПР1        +620ПР3
ФРЕЗЕР    = 40ПР1+ 30ПР2+ 20ПР3+ 20ПР4
СВЕРЛИЛ   =86ПР1+110ПР2+150ПР3+ 52ПР4
РАСТОЧ    =160ПР1+ 92ПР2+158ПР3+128ПР4
ШЛИФОВАЛ  =        158ПР2+30ПР3+ 50ПР4
КОМПЛЕКТ  =  3ПР1+  4ПР2+  3ПР3+  3ПР4
СБОРКА    = 4,5ПР1+4,5ПР2+ 4,5ПР3+ 4,5ПР4
```

Используя полученные уравнения и учитывая значения правых частей ограничений (строчные переменные) и граничные условия на столбцовые переменные, составим матрицу исходных данных задачи (табл. 1.40).

На основе табл. 1.40 исходные данные запишем на бланке для последующей перфорации. При этом используем разбиение бланка на вспомогательные поля аналогично требованиям, предъявляемым ППП ЛП2. Однако исходные данные из табл. 1.40 переносим на бланк в «секционном» формате.

Запись исходных данных на бланке начинается словом NAME и заканчивается словом ENDATA (рис. 1.12).

Слово NAME записываем с позиции 1, а с позиции 15 записываем имя, присваиваемое задаче, которое должно содержать не более восьми буквенно-цифровых символов.

Таблица 1.40

Строчные переменные	Столбцовые переменные				Правая часть уравнений	
	ПР1	ПР2	ПР3	ПР4	нижняя граница	верхняя граница
ПРИБ	315	278	573	370	—	—
ТОКАР	550	—	620	—	0	64 270
ФРЕЗЕР	40	30	20	20	0	4 800
СВЕРЛИЛ	86	110	150	52	0	22 360
РАСТОЧ	160	92	158	128	0	26 240
ШЛИФОВАЛ	—	158	30	50	0	7 900
КОМПЛЕКТ	3	4	3	3	0	520
СБОРКА	4,5	4,5	4,5	4,5	0	720
Нижняя граница	—	40	—	—	—	—
Верхняя граница	—	—	120	—	—	—

Слово ENDATA записываем с позиции 1 после окончания записи исходных данных. Между словами ENDATA и NAME записываем в виде пяти секций условия задачи:

1) секция строк (имен ограничений) — ROWS;
2) секция столбцов (элементов матрицы) — COLUMNS;
3) секция свободных членов ограничений — RHS;
4) секция интервалов — RANGES;
5) секция границ переменных — BOUNDS.

В секциях ROWS указываем строчные переменные: поле 1 — тип ограничения, поле 2 — имя переменной (см. рис. 1.14). Для обозначения типа переменной используются:

L — переменная, ограниченная сверху ($\leqslant$);
G — переменная, ограниченная снизу ($\geqslant$);
E — фиксированная переменная ($=$);
N — неограниченная переменная (от $-\infty$ до $+\infty$).

В секции COLUMNS записываем элементы табл. 1.40 аналогично тому, как это было сделано при записи исходных данных задачи с использованием ППП ЛП2 (рис. 1.12).

Секция RHS содержит ненулевые значения свободных членов системы ограничений задачи. Каждый свободный член записываем вместе с именем столбца свободных членов и именем той строки, которой он соответствует.

Секция RANGES не является обязательной. Она используется лишь тогда, когда для строчных переменных имеются двусторонние ограничения. В этом случае в секции RANGES указываются разности между верхними и нижними пределами изменения переменных, т. е. интервалы их изменений. При этом в поле 2 указывается имя набора интервалов, в полях 3 и 5

```
1        10        20        30        40        50        60
NAME                ПЛАН
ROWS
 N  ПРИБ
 L  ТОКАР
 L  ФРЕЗЕР
 L  СВЕРЛИЛ
 L  РАСТОЧ
 L  ШЛИФОВАЛ
 L  КОМПЛЕКТ
 L  СБОРКА
COLUMNS
    ПР1       ПРИБ         315.0         ТОКАР        550.0
    ПР1       ФРЕЗЕР        40.0         СВЕРЛИЛ       86.0
    ПР1       РАСТОЧ       160.0         КОМПЛЕКТ       3.0
    ПР1       СБОРКА         4.5
    ПР2       ПРИБ         278.0         ФРЕЗЕР        30.0
    ПР2       СВЕРЛИЛ      110.0         РАСТОЧ        92.0
    ПР2       ШЛИФОВАЛ     158.0         КОМПЛЕКТ       4.0
    ПР2       СБОРКА         4.5
    ПР3       ПРИБ         573.0         ТОКАР        620.0
    ПР3       ФРЕЗЕР        20.0         СВЕРЛИЛ      150.0
    ПР3       РАСТОЧ       158.0         ШЛИФОВАЛ      30.0
    ПР3       КОМПЛЕКТ       3.0         СБОРКА         4.5
    ПР4       ПРИБ         370.0         ФРЕЗЕР        20.0
    ПР4       СВЕРЛИЛ       52.0         РАСТОЧ       128.0
    ПР4       ШЛИФОВАЛ      50.0         КОМПЛЕКТ       3.0
    ПР4       СБОРКА         4.5
RHS
    ССЧ       ТОКАР      64270.0         ФРЕЗЕР      4800.0
    ССЧ       СВЕРЛИЛ    22360.0         РАСТОЧ     26240.0
    ССЧ       ШЛИФОВАЛ    7900.0         КОМПЛЕКТ     520.0
    ССЧ       СБОРКА       720.0
BOUNDS
 LO OGR       ПР2           40.0
 UP OGR       ПР3          120.0
ENDATA
/*
```

Рис. 1.12

записывается имя переменных, в полях 4 и 6 помещаются величины интервалов. В рассматриваемой задаче данная секция не используется.

В секции BOUNDS, которая также не является обязательной, указываются верхние и нижние границы для столбцовых переменных. Эти границы записываются аналогично тому, как это было сделано для граничных условий при использовании ППП ЛП2. Для того чтобы указать тип ограничения, используются следующие обозначения:

```
1       10        20        30        40        50        60
        PROGRAM
        INITIALZ
        MOVE(XDATA,'ПЛАН')
        MOVE(XPBNAME,'OPTIM')
        CONVERT('SUMMARY')
        BCDOUT
        SETUP('MAX','BOUND' ,'OGR')
        MOVE(XOBJ,'ПРИБ')
        MOVE(XRHS,'ССЧ')
        XGUERDPF=1
        OPTIMIZE
        SOLUTION
        EXIT
        PEND
/*
```

Рис. 1.13

UP — переменная, ограниченная сверху ($\leqslant$);
LO — переменная, ограниченная снизу ($\geqslant$);
FX — фиксированная переменная ($=$);
FR — неограниченная переменная (от $-\infty$ до $+\infty$);
MI — переменная с бесконечной нижней границей ($-\infty$).

Тип ограничения указывается в поле 1. В поле 2 записывается имя набора граничных условий, в поле 3 — имя переменной, а в поле 4 — значение границ (см. рис. 1.14).

Имена переменных в секции BOUNDS записываются в такой же последовательности, в какой они записаны в секции COLUMNS.

Секция BOUNDS не является обязательной. Если границы переменных не определены, то они автоматически устанавливаются как 0 и ∞.

Чтобы теперь получить программу решения задачи, определяем операторы управления заданиями ОС ЕС, управляющие операторы ППП ЛП АСУ и исходные данные. Управляющую программу решения задачи записываем на стандартном бланке начиная с позиции 10 (рис. 1.13).

Начало управляющей программы определяет оператор PROGRAM. Микрооператор INITIALZ осуществляет инициализацию пакета (определяет начальные значения для ряда параметров, значений, допусков и т. п.).

Управляющие операторы MOVE устанавливают обязательные параметры задачи:

MOVE (XDATA, 'ПЛАН') — имя входных данных;

MOVE (XPBNAME, 'OPTIM') — имя, присваиваемое решаемой задаче.

Первое имя совпадает с именем, указанным при записи исходных данных задачи на бланке, а под вторым будет создана задача на проблемном файле.

Благодаря указанию процедуры CONVERT будут считаны входные данные под именем ПЛАН, преобразованы в двоичный формат и записаны на проблемном файле под именем OPTIM. Наличие параметра SUMMARY в процедуре CONVERT после обработки входных данных обеспечит распечатку краткой статистической информации о строках и столбцах исходной матрицы.

Наличие последующей процедуры BCDOUT обеспечивает распечатку на АЦПУ входных данных задачи в том же порядке и формате, в каком были введены секции входных данных.

Параметры процедуры SETUP указывают на то, что задача должна быть решена на максимум (если на минимум, то вместо MAX указывается MIN), далее, что существует секция BOUNDS с именем строки ограничений на переменные OGR (если бы в задаче была секция RANGES, то были бы указаны имя этой секции и имя столбца интервалов).

Следующие два оператора MOVE устанавливают имя целевой функции (ПРИБ) и имя столбца свободных членов (ССЧ), а благодаря указанию XGUARDPF-1 обеспечивается защита проблемного файла.

Микрокоманда OPTIMIZE используется для получения оптимального решения, а процедура SOLUTION выводит его на печать. Вместо микрокоманды OPTIMIZE может быть использована процедура PRIMAL.

В конце управляющей программы указываются два оператора: EXIT и PEND. Их наличие является обязательным. Первый оператор возвращает управление операционной системе ОС ЕС, а оператор PEND указывает на конец управляющей программы.

По итогам решения задачи выводится стандартный отчет об оптимальном решении (табл. 1.41). Этот отчет состоит из двух частей: СЕКЦИИ 1 — СТРОКИ, в которой приводится соответствующая информация о строчных переменных, и СЕКЦИИ 2 — СТОЛБЦЫ, в которой содержится информация о столбцовых переменных.

В СЕКЦИИ 1 в столбце «Тип» указывается, какое значение приняла данная строчная переменная в оптимальном плане задачи. При этом употребляются следующие обозначения:

** — значение переменной является недопустимым;

BS — переменная является базисной и приняла свое значение из интервала возможного изменения;

FQ — переменная имеет фиксированное значение;

UL — переменная приняла свое верхнее значение;

LL — переменная приняла свое нижнее значение;

FR — переменная является небазисной и приняла некоторое произвольное значение.

В столбце «Решение» указывается значение строчной переменной, которое она принимает при оптимальном плане задачи, т. е. величина используемого ресурса, а в столбце «Дополнительная переменная» — объемы неиспользуемых ресурсов. Так, из табл. 1.41 видно, что останутся неиспользованными 150 комплектующих изделий, сверлильное и расточное оборудование будет свободным соответственно 5262 и 4380 человеко-ч, а на сборочно-наладочных работах простои составят 22,5 человеко-ч.

Следующие два столбца СЕКЦИИ 1 «Нижняя граница» и «Верхняя граница» характеризуют интервалы возможных изменений строчных переменных, а столбец «Оценка строки» определяет двойственные оценки соответствующих переменных. Заметим, что знаки оценок строки соответствуют тому случаю, когда находится минимум целевой функции. Если находится максимум функции, как в данном случае, то необходимо заменить эти знаки на противоположные.

Таблица 1.41

СЕКЦИЯ 1 — СТРОКИ

Номер	Строка	Тип	Решение	Дополнительная переменная	Нижняя граница	Верхняя граница	Оценка строки
1	ПРИБ	BS	59433.00000	59433.00000	Нет	Нет	1.00000
2	ТОКАР	UL	64270.00000	●	Нет	64270.00000	0,56471—
3	ФРЕЗЕР	UL	4800.00000	●	Нет	4800.00000	0.11029—
4	КОМПЛЕКТ	BS	505.00000	15.00000	Нет	520.00000	●
5	СВЕРЛИЛ	BS	17098.00000	5262.00000	Нет	22360.00000	●
6	РАСТОЧ	BS	21860.00000	4380.00000	Нет	26240.00000	●
7	ШЛИФОВАЛ	UL	7900.00000	●	Нет	7900.00000	7.35588—
8	СБОРКА	BL	697.50000	22.50000	Нет	720.00000	●

СЕКЦИЯ 2 — СТОЛБЦЫ

Номер	Столбец	Тип	Решение	Коэффициенты целевой функции	Нижняя граница	Верхняя граница	Оценка столбца
9	ПР1	BS	65.00000	315.00000	●	Нет	●
10	ПР2	LL	40.00000	278.00000	40.00000	Нет	887.5382—
11	ПР3	BS	46.00000	573.00000	●	120.00000	●
12	ПР4	BS	4.00000	370.00000	●	Нет	●

СЕКЦИЯ 2 — СТОЛБЦЫ содержит информацию о столбцовых переменных. Из столбца «Решение» видим, что оптимальным планом производства продукции является план, согласно которому изготовляется 65 изделий 1-го вида, 40 изделий 2-го вида, 63 изделия 3-го вида и 4 изделия 4-го вида. В соответствии с этим планом прибыль от реализации производимой продукции равна 59 433 руб.

Используя пакеты прикладных программ, найдите решение задач 1.68—1.76.

1.68. $F=4x_1+3x_2+6x_3+7x_4\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 280, \\ x_1+x_3+x_4\leqslant 80, \\ x_1+2x_2+x_3\leqslant 250, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

1.69. $F=3x_1+2x_2+4x_3+5x_4+3x_5+2x_6\to\min;$

$$\begin{cases} 2{,}5x_1-2{,}375x_2+4x_3+1{,}5x_4+0{,}75x_5+x_6\geqslant 12, \\ 2{,}5x_1-0{,}125x_2+2x_3+2{,}25x_5+3x_6\geqslant 18, \\ 4x_1+5x_2+4x_4-2x_5+8x_6\geqslant 32, \end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,6}).$$

1.70. $F=6x_1+3x_2-4x_3+5x_4+6x_5-2x_6\to\max;$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4-x_5+2x_6\leqslant 36, \\ -x_1+3x_2+4x_3+2x_4+3x_6=24, \\ 2x_1-4x_2+5x_3+3x_5-x_6\geqslant 20, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+4x_5\geqslant 12, \\ x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,6}). \end{cases}$$

1.71. $F=7x_1-4x_2+3x_3-4x_4+6x_5+5x_6\to\min;$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5+4x_6=48, \\ -3x_1+4x_3+4x_5+3x_6\leqslant 36, \\ x_1+4x_2+5x_3+4x_4+6x_5+4x_6\geqslant 20, \\ 5x_1+3x_2+6x_3+x_4+2x_5+x_6\geqslant 30, \end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,6}).$$

1.72. Для обогрева помещений используют четыре агрегата, каждый из которых может работать на любом из пяти сортов топлива, имеющемся в количествах 90, 110, 70, 80 и 150 т. Потребность в топливе каждого из агрегатов соответственно равна 80, 120, 140 и 160 т. Теплотворная способность i-го сорта топлива при использовании его на j-м агрегате задается матрицей

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 11 & 5 & 8 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найти такое распределение топлива между агрегатами, при котором получается максимальное количество теплоты от использования всего топлива.

1.73. Изготовляемый на пяти кирпичных заводах кирпич поступает на шесть строящихся объектов. Ежедневное производство кирпича и потребность в нем указаны в таблице. В ней же указана цена перевозки 1000 шт. кирпича с каждого из заводов к каждому из объектов.

Кирпичный завод	Цена перевозки 1 тыс. шт. кирпича к строящемуся объекту						Производство кирпича (тыс. шт.)
	1	2	3	4	5	6	
I	8	7	5	10	12	8	240
II	13	8	10	7	6	13	360
III	12	4	11	9	10	11	180
IV	14	6	12	13	7	14	120
V	9	12	14	15	8	13	150
Потребность в кирпиче (тыс. шт.)	230	220	130	170	190	110	

Составить план перевозок, согласно которому обеспечиваются потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов при минимальной общей стоимости перевозок.

1.74. Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в следующей таблице:

Питательные вещества	Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов						
	мясо	рыба	молоко	масло	сыр	крупа	картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	—	—	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов (руб.)	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

1.75. Для производства трех видов продукции предприятие использует два типа технологического оборудования и два вида сырья. Нормы затрат сырья и времени на изготовление одного изделия каждого вида приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждой из групп технологического оборудования, объемы имеющегося сырья каждого вида, а также цена одного изделия данного вида и ограничения на возможный выпуск каждого из изделий.

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие вида			Общее количество ресурсов
	1	2	3	
Производительность оборудования (нормо-ч):				
I типа	2	—	4	200
II типа	4	3	1	500
Сырье (кг):				
1-го вида	10	15	20	1495
2-го вида	30	20	25	4500
Цена одного изделия (руб.)	10	15	20	—
Выпуск (шт.):				
минимальный	10	20	25	—
максимальный	20	40	100	—

Составить такой план производства продукции, согласно которому будет изготовлено необходимое количество изделий каждого вида, а общая стоимость всей изготовляемой продукции максимальна.

1.76. При производстве четырех видов кабеля выполняется пять групп технологических операций. Нормы затрат на 1 км кабеля данного вида на каждой из групп операций, прибыль от реализации 1 км каждого вида кабеля, а также общий фонд рабочего времени, в течение которого могут выполняться эти операции, указаны в таблице.

Технологическая операция	Нормы затрат времени (ч) на обработку 1 км кабеля вида				Общий фонд рабочего времени (ч)
	1	2	3	4	
Волочение	1,2	1,8	1,6	2,4	7 200
Наложение изоляций	1,0	0,4	0,8	0,7	5 600
Скручивание элементов в кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11 176
Освинцование	3,0	—	1,8	2,4	3 600
Испытание и контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4 200
Прибыль от реализации 1 км кабеля (руб.)	1,2	0,8	1,0	1,3	

Определить такой план выпуска кабеля, при котором общая прибыль от реализации изготовляемой продукции является максимальной.

§ 1.6. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Прямая и двойственная задачи. Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Дадим определение двойственной задачи по отношению к общей задаче линейного программирования, состоящей в нахождении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{50}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leqslant b_k, \\ a_{k+1\,1}x_1 + a_{k+1\,2}x_2 + \ldots + a_{k+1\,n}x_n = b_{k+1}, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{51}$$

$$x_j \geqslant 0 \; (j = \overline{1, l}, l \leqslant n). \tag{52}$$

Определение 1.14. Задача, состоящая в нахождении минимального значения функции

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \tag{53}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geqslant c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geqslant c_2, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_l \geqslant c_l, \\ a_{1\,l+1}y_1 + a_{2\,l+1}y_2 + \ldots + a_{m\,l+1}y_m = c_{l+1}, \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_m, \end{cases} \tag{54}$$

$$y_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, k}, \; k \leqslant m), \tag{55}$$

называется *двойственной* по отношению к задаче (50) — (52).

Задачи (50)—(52) и (53)—(55) образуют пару задач, называемую в линейном программировании *двойственной парой*.

Сравнивая две сформулированные задачи, видим, что двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам:

1. Целевая функция исходной задачи (50)—(52) задается на максимум, а целевая функция двойственной (53)—(55) — на минимум.

2. Матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{56}$$

составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений (51) исходной задачи (50)—(52), и аналогичная матрица

$$A^{\tau}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{57}$$

в двойственной задаче (53)—(55) получаются друг из друга транспонированием (т. е. заменой строк столбцами, а столбцов — строками).

3. Число переменных в двойственной задаче (53)—(55) равно числу соотношений в системе (51) исходной задачи (50)—(52), а число ограничений в системе (54) двойственной задачи — числу переменных в исходной задаче.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции (53) двойственной задачи (53)—(55) являются свободные члены в системе (51) исходной задачи (50)—(52), а правыми частями в соотношениях системы (54) двойственной задачи — коэффициенты при неизвестных в целевой функции (50) исходной задачи.

5. Если переменная x_j исходной задачи (50)—(52) может принимать только лишь положительные значения, то j-е условие в системе (54) двойственной задачи (53)—(55) является неравенством вида «$\geqslant$». Если же переменная x_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то j-е соотношение в системе (54) представляет собой уравнение. Аналогичные связи имеют место между ограничениями (51) исходной задачи (50)—(52) и переменными двойственной задачи (53)—(55). Если i-е соотношение в системе (51) исходной задачи является неравенством, то i-я переменная двойственной задачи $y_i \geqslant 0$. В противном случае переменная y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Двойственные пары задач обычно подразделяют на симметричные и несимметричные. В симметричной паре двойственных задач ограничения (51) прямой задачи и соотношения (54) двойственной задачи являются неравенствами вида «$\leqslant$». Таким образом, переменные обеих задач могут принимать только лишь неотрицательные значения.

1.77. Составить двойственную задачу по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции

$$F=2x_1+x_2+3x_3 \tag{58}$$

при условиях

$$\begin{cases} -x_1+3x_2-5x_3=12, \\ 2x_1-\ x_2+4x_3=24, \\ 3x_1+\ x_2+\ x_3=18, \end{cases} \tag{59}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \geqslant 0. \tag{60}$$

Решение. Для данной задачи

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } A^{т}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число переменных в двойственной задаче равно числу уравнений в системе (59), т. е. равно трем. Коэффициентами в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы уравнений (59), т. е. числа 12, 24, 18.

Целевая функция исходной задачи (58)—(60) исследуется на максимум, а система условий (59) содержит только уравнения. Поэтому в двойственной задаче целевая функция исследуется на минимум, а ее переменные могут принимать любые значения (в том числе и отрицательные). Так как все три переменные исходной задачи (58)—(60) принимают только лишь неотрицательные значения, то в системе условий двойственной задачи должны быть три неравенства вида «$\geqslant$». Следовательно, для задачи (58)—(60) двойственная задача такова: найти минимум функции $F^*=12y_1+24y_2+18y_3$ при условиях

$$\begin{cases} -y_1+2y_2+3y_3\geqslant 2, \\ 3y_1-\ y_2+\ y_3\geqslant 1, \\ -5y_1+4y_2+\ y_3\geqslant 3. \end{cases}$$

1.78. Для задачи, состоящей в максимизации функции

$$F=4x_1+x_2-4x_3$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2+4x_3\leqslant 12, \\ x_1+3x_2-2x_3=13, \\ 2x_1+5x_2-6x_3\leqslant 11, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0,$$

сформулировать двойственную задачу.

Решение. Для данной задачи

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с общими правилами задача, двойственная по отношению к данной, формулируется следующим образом: найти минимум функции $F^*=12y_1+13y_2+11y_3$ при условиях

$$\begin{cases} 2y_1+\ \ y_2+2y_3\geqslant 4, \\ -y_1+3y_2+5y_3\geqslant 1, \\ 4y_1-2y_2-6y_3\geqslant -1, \end{cases}$$
$$y_1,\ y_3\geqslant 0.$$

Сформулируйте двойственные задачи по отношению к задачам 1.79—1.83.

1.79. $F=x_1-2x_2+5x_3\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+4x_3\leqslant 18, \\ 2x_1+\ \ x_2-3x_3\leqslant 20, \\ 5x_1-3x_2+6x_3\geqslant 19, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

1.80. $F=3x_1+3x_2-4x_3\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2-3x_3\geqslant 18, \\ 4x_1-\qquad\ \ 5x_3\leqslant 12, \\ 3x_1-2x_2+\ \ x_3\geqslant 14, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

1.81. $F=6x_1-x_2+3x_3\to\max;$

$$\begin{cases} 3x_1-7x_2+5x_3\leqslant 15, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=16, \\ 6x_1+5x_2-8x_3\leqslant 12, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

1.82. $F=-2x_1+5x_2-4x_3\to\min;$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3\geqslant 9, \\ 3x_1-2x_2+5x_3\geqslant 8, \\ x_1+3x_2+4x_3\geqslant 12, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

1.83. $F=-3x_1+4x_2-6x_3\to\min;$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-\ \ x_3\geqslant 8, \\ -3x_1+2x_2-2x_3=10, \\ 5x_1-4x_2+\ \ x_3\geqslant 7, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

1.84—1.86. Используя математические модели задач 1.1—1.3, постройте математические модели двойственных задач.

2. Связь между решениями прямой и двойственной задач. Рассмотрим пару двойственных задач, образованную основной задачей линейного программирования и двойственной к ней.

Исходная задача: найти максимум функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{61}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i=\overline{1,m}); \tag{62}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,n}). \tag{63}$$

Двойственная задача: найти минимум функции

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{64}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad (j=\overline{1,n}). \tag{65}$$

Каждая из задач двойственной пары (61)—(63) и (64), (65) фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо одна от другой. Однако при определении симплексным методом оптимального плана одной из задач тем самым находится решение и другой задачи.

Существующие зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются сформулированными ниже леммами и теоремами двойственности.

Лемма 1.1. *Если X — некоторый план исходной задачи* (61)—(63), *а Y — произвольный план двойственной задачи* (64), (65), *то значение целевой функции исходной задачи при плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане Y, т. е. $F(X) \leqslant F^*(Y)$.*

Лемма 1.2. *Если $F(X^*) = F^*(Y^*)$ для некоторых планов X^* и Y^* задач* (61)—(63) *и* (64), (65), *то X^* — оптимальный план исходной задачи, а Y^* — оптимальный план двойственной задачи.*

Теорема 1.9 (первая теорема двойственности). *Если одна из пары двойственных задач* (61)—(63) *или* (64), (65) *имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е. $F_{\max} = F^*_{\min}$.*

Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена [для исходной (61)—(63) *— сверху, для двойственной* (64), (65) *— снизу], то другая задача вообще не имеет планов.*

Теорема 1.10 (вторая теорема двойственности). *План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ задачи* (61)—(63) *и план $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ задачи* (64), (65) *являются оптимальными планами этих задач тогда и только тогда, когда для любого*

j $(j=\overline{1,n})$ *выполняется равенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0.$$

Геометрическая интерпретация двойственных задач. Если число переменных в прямой и двойственной задачах, образующих данную пару, равно двум, то, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования, можно легко найти решение данной пары задач. При этом имеет место один из следующих трех взаимно исключающих друг друга случаев: 1) обе задачи имеют планы; 2) планы имеет только одна задача; 3) для каждой задачи двойственной пары множество планов пусто.

1.87. Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции $F=2x_1+7x_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2 \leqslant 14, \\ x_1+x_2 \leqslant 8, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0,$$

составить двойственную задачу и найти решение обеих задач.

Решение. Двойственной задачей по отношению к исходной является задача, состоящая в определении минимального значения функции $F^*=14y_1+8y_2$ при условиях

$$\begin{cases} -2y_1+y_2 \geqslant 2, \\ 3y_1+y_2 \geqslant 7, \end{cases}$$
$$y_1,\ y_2 \geqslant 0.$$

Как в исходной, так и в двойственной задаче число неизвестных равно двум. Следовательно, их решение можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 1.14 и 1.15).

Как видно из рис. 1.14, максимальное значение целевая функция исходной задачи принимает в точке B. Следовательно, $X^*=(2;\ 6)$ является оптимальным планом, при котором $F_{\max}=46$.

Минимальное значение целевая функция двойственной задачи принимает в точке E (рис. 1.17). Значит, $Y^*=(1;\ 4)$ является оптимальным планом двойственной задачи, при котором $F^*_{\min}=46$. Таким образом, значения целевых функций исходной и двойственной задач при их оптимальных планах равны между собой.

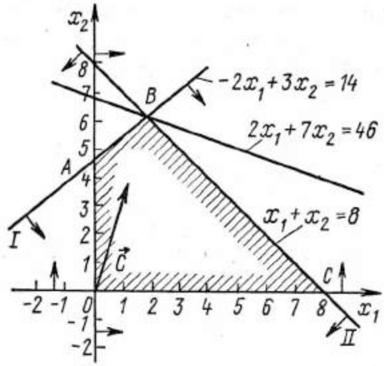


Рис. 1.14

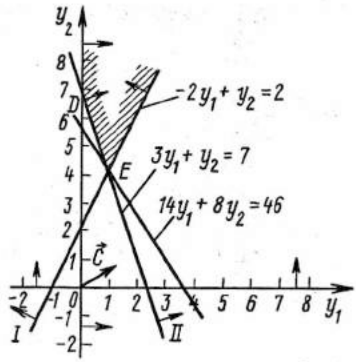


Рис. 1.15

Из рис. 1.14 видно, что при всяком плане исходной задачи значение целевой функции не больше 46. Одновременно, как видно из рис. 1.15, значение целевой функции двойственной задачи при любом ее плане не меньше 46. Таким образом, при любом плане исходной задачи значение целевой функции не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при ее произвольном плане.

1.88. Найти решение двойственной пары задач.

Исходная задача:

$$F=-2x_1-3x_2\to\min;$$

$$\begin{cases}-4x_1+2x_2\geqslant 4,\\ \quad x_1+\ x_2\geqslant 6,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

Двойственная задача:

$$F^*=4y_1+6y_2\to\max,$$

$$\begin{cases}-4y_1+y_2\leqslant -2,\\ \quad 2y_1+y_2\leqslant -3,\end{cases}$$

$$y_1,\ y_2\geqslant 0.$$

Решение. Как исходная, так и двойственная задача содержат по две переменные. Поэтому их решение находим, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 1.16 и 1.17). Из рис. 1.16 видно, что исходная задача не имеет оптимального плана из-за неограниченности снизу ее целевой функции на множестве допустимых решений.

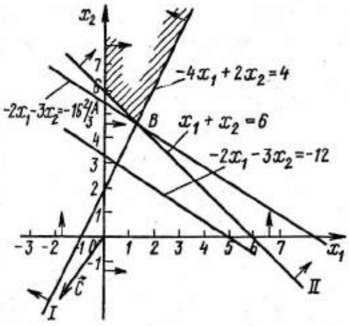


Рис. 1.16

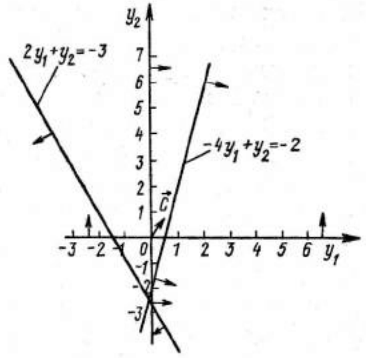


Рис. 1.17

Из рис. 1.17 следует, что двойственная задача не имеет планов, поскольку многоугольник решений ее пуст. Это означает, что если исходная задача двойственной пары не имеет оптимального плана из-за неограниченности на множестве допустимых решений ее целевой функции, то двойственная задача также не имеет планов.

Нахождение решения двойственных задач. Рассмотрим пару двойственных задач — основную задачу линейного программирования (61) — (63) и двойственную к ней задачу (64), (65).

Предположим, что с помощью симплексного метода найден оптимальный план X^* задачи (61) — (63) и этот план определяется базисом, образованным векторами $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}$.

Обозначим через $C_б=(c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m})$ вектор-строку, составленную из коэффициентов при неизвестных в целевой функции (61) задачи (61) — (63), а через P^{-1} — матрицу, обратную матрице P, составленной из компонент векторов $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}$ базиса. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.11. *Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план X^*, то $Y^*=C_бP^{-1}$ является оптимальным планом двойственной задачи.*

Таким образом, если найти симплексным методом оптимальный план задачи (61) — (63), то, используя последнюю симплекс-таблицу, можно определить $C_б$ и P^{-1} и с помощью соотношения $Y^*=C_бP^{-1}$ найти оптимальный план двойственной задачи (64), (65).

В том случае, когда среди векторов $P_1, P_2, \dots, P_n$, составленных из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений (62), имеется m единичных, указанную матрицу P^{-1} образуют числа первых m строк последней симплекс-таблицы, стоящие в столбцах данных векторов. Тогда нет необходимости определять оптимальный план двойственной задачи умножением $C_б$ на P^{-1}, поскольку компоненты этого плана совпадают с соответствующими элементами $(m+1)$-й строки столбцов единичных векторов, если данный коэффициент $c_j=0$, и равны сумме соответствующего элемента этой строки и c_j, если $c_j \neq 0$.

Сказанное выше имеет место и для симметричной пары двойственных задач. При этом так как система ограничений исходной задачи содержит неравенства вида «$\leqslant$», то компоненты оптимального плана двойственной задачи совпадают с соответствующими числами $(m+1)$-й строки последней симплекс-таблицы решения исходной задачи. Указанные числа стоят в столбцах векторов, соответствующих дополнительным переменным.

1.89. Для задачи, состоящей в определении максимального значения функции $F=x_1+2x_2-x_3$ при условиях

$$\begin{cases} -x_1+4x_2-2x_3 \leqslant 12, \\ \;\; x_1+\;x_2+2x_3 \leqslant 17, \\ 2x_1-\;x_2+2x_3=4, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0,$$

составить двойственную задачу и найти ее решение.

Р е ш е н и е. Двойственная задача по отношению к исходной состоит в нахождении минимума функции $F^*=12y_1+17y_2+4y_3$ при условиях

$$\begin{cases} -\;y_1+\;y_2+2y_3 \geqslant 1, \\ 4y_1+\;y_2-\;y_3 \geqslant 2, \\ -2y_1+2y_2+2y_3 \geqslant -1, \end{cases}$$
$$y_1,\ y_2 \geqslant 0.$$

Чтобы найти решение двойственной задачи, сначала находим решение исходной задачи методом искусственного базиса. Оно приведено в табл. 1.42.

Из последней симплекс-таблицы видно, что двойственная задача имеет решение $y_1^*=5/7$; $y_2^*=0$; $y_3^*=6/7$.

Оптимальные двойственные оценки удовлетворяют всем условиям двойственной задачи. При этом минимальное значение целевой функции двойственной задачи, равное $F^*_{\min}=$ $=12\cdot(5/7)+17\cdot 0+4\cdot(6/7)=12$, совпадает с максимальным значением целевой функции $F_{\max}$ исходной задачи.

Таблица 1.42

i	Базис	$C_б$	P_0	1	2	-1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	12	-1	4	-2	1	0	0
2	P_5	0	17	1	1	2	0	1	0
3	P_6	$-M$	4	2	-1	2	0	0	1
4			0	-1	-2	1	0	0	0
5			-4	-2	1	-2	0	0	0
1	P_4	0	14	0	7/2	-1	1	0	1/2
2	P_5	0	15	0	3/2	1	0	1	$-1/2$
3	P_1	1	2	1	$-1/2$	1	0	0	1/2
4			2	0	$-5/2$	2	0	0	1/2
1	P_2	2	4	0	1	$-2/7$	2/7	0	1/7
2	P_5	0	9	0	0	13/7	$-3/7$	1	$-5/7$
3	P_1	1	4	1	0	6/7	1/7	0	4/7
4			12	0	0	9/7	5/7	0	6/7

3. Экономическая интерпретация двойственных задач. Экономическую интерпретацию двойственных задач и двойственных оценок рассмотрим на примере.

1.90. Для производства трех видов изделий A, B и C используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в табл. 1.43.

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость, и оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому из видов сырья, должны быть такими, чтобы оценка всего используемого сырья была минимальной, а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида,— не меньше цены единицы продукции данного вида.

Таблица 1.43

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	B	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (руб.)	10	14	12

Решение. Предположим, что производится x_1 изделий A, x_2 изделий B и x_3 изделий C. Для определения оптимального плана производства нужно решить задачу, состоящую в максимизации целевой функции

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \tag{66}$$

при следующих условиях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 244, \end{cases} \tag{67}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0. \tag{68}$$

Припишем каждому из видов сырья, используемых для производства продукции, двойственную оценку, соответственно равную y_1, y_2 и y_3. Тогда общая оценка сырья, используемого на производство продукции, составит

$$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min. \tag{69}$$

Согласно условию, двойственные оценки должны быть такими, чтобы общая оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, была не меньше цены единицы продукции данного вида, т. е. y_1, y_2 и y_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \geqslant 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geqslant 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geqslant 12, \end{cases} \tag{70}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3 \geqslant 0. \tag{71}$$

Как видно, задачи (66) — (68) и (69) — (71) образуют симметричную пару двойственных задач. Решение прямой задачи дает оптимальный план производства изделий A, B и C, а решение двойственной — оптимальную систему оценок сырья, используемого для производства этих изделий. Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать решение какой-либо одной из них. Так как система ограничений задачи (66) — (68) содержит лишь неравенства вида «$\leqslant$», то лучше сначала найти решение этой задачи. Ее решение приведено в табл. 1.44.

Из этой таблицы видно, что оптимальным планом производства изделий является такой, при котором изготовляется 82 изделия B и 16 изделий C. При данном плане производства остается

Таблица 1.44

i	Базис	$C_б$	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	$-1/8$
2	P_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	$-5/8$
3	P_3	12	16	$-3/4$	0	1	$-1/4$	0	1/4
			1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

неиспользованным 80 кг сырья II вида, а общая стоимость изделий равна 1340 руб. Из табл. 1.44 также видно, что оптимальным решением двойственной задачи является $y_1^*=23/4$; $y_2^*=0$; $y_3^*=5/4$.

Переменные y_1^* и y_3^* обозначают условные двойственные оценки единицы сырья, соответственно I и III видов. Эти оценки отличны от нуля, а сырье I и III видов полностью используется при оптимальном плане производства продукции. Двойственная оценка единицы сырья II вида равна нулю. Этот вид сырья не полностью используется при оптимальном плане производства продукции.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются при оптимальном плане производства изделий. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемого предприятием сырья. Более того, величина данной двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 кг. Так, увеличение количества сырья I вида на 1 кг приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 5,75 руб. и станет равной $1340+5{,}75=1345{,}75$ руб. При этом числа, стоящие в столбце вектора P_4 табл. 1.44, показывают, что указанное увеличение общей стоимости изготовляемой продукции может быть достигнуто за счет увеличения выпуска изделий B на 5/8 ед. и сокращения выпуска изделий C на 1/4 ед. Вследствие этого использование сырья II вида уменьшится на 1/8 кг. Точно так же увеличение на 1 кг сырья III вида позволит найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет на 1,25 руб. и составит $1340+1{,}25=$ $=1341{,}25$ руб. Это будет достигнуто в результате увеличения выпуска изделий C на 1/4 ед. и уменьшения изготовления изделий B на $1/8$ ед., причем объем используемого сырья II вида возрастет на $5/8$ кг.

Продолжим рассмотрение оптимальных двойственных оценок. Вычисляя минимальное значение целевой функции двойственной задачи

$$F^*_{\min}=180\cdot(23/4)+210\cdot 0+244\cdot(5/4)=1340,$$

видим, что оно совпадает с максимальным значением целевой функции исходной задачи.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи получаем

$$\begin{cases} 23+5/4>10, \\ 23/2+5/2=14, \\ 23/4+25/4=12. \end{cases}$$

Первое ограничение двойственной задачи выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка сырья, используемого на производство одного изделия вида A, выше цены этого изделия и, следовательно, выпускать изделия вида A невыгодно. Его производство и не предусмотрено оптимальным планом прямой задачи. Второе и третье ограничения двойственной задачи выполняются как строгие равенства. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемого для производства единицы соответственно изделий B и C, равны в точности их ценам. Поэтому выпускать эти два вида продукции по двойственным оценкам экономически целесообразно. Их производство и предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

Таким образом, двойственные оценки тесным образом связаны с оптимальным планом прямой задачи. Всякое изменение исходных данных прямой задачи может оказать влияние как на ее оптимальный план, так и на систему оптимальных двойственных оценок. Поэтому, чтобы проводить экономический анализ с использованием двойственных оценок, нужно знать их интервал устойчивости. К рассмотрению этого мы сейчас и перейдем.

4. Анализ устойчивости двойственных оценок. Продолжим рассмотрение основной задачи линейного программирования (61) — (63) и двойственной к ней (64), (65).

Предположим, что задача (61) — (63) имеет невырожденные опорные планы и хотя бы один из них является оптимальным.

Максимальное значение целевой функции (61) задачи (61) — (63) будем рассматривать как функцию свободных членов системы линейных уравнений (62): $F_{\max}(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 1.12. *В оптимальном плане двойственной задачи* (64), (65) *значение переменной y_i^* численно равно частной производной функции $F_{\max}(b_1, b_2,...,b_m)$ по данному аргументу, т. е.*

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*. \qquad (72)$$

Последнее равенство означает, что изменение значений величин b_i приводит к увеличению или уменьшению $F_{\max}(b_1, b_2,...,b_m)$. Это изменение $F_{\max}(b_1, b_2,..., b_m)$ определяется величиной $|y_i^*|$ и может быть охарактеризовано лишь тогда, когда при изменении величин b_i значения переменных y_i^* в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи (64), (65) остаются неизменными. Поэтому представляет интерес определить такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы линейных уравнений (62), в которых оптимальный план двойственной задачи (64), (65) не меняется. Это имеет место для всех тех значений $b_i + \Delta b_i$, при которых столбец вектора P_0 последней симплекс-таблицы решения задачи (61) — (63) не содержит отрицательных чисел, т. е. тогда, когда среди компонент вектора

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_1+\Delta b_1 \\ b_2+\Delta b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_n+\Delta b_n \end{pmatrix}$$

нет отрицательных. Здесь B^{-1} — матрица, обратная матрице B, составленной из компонент векторов базиса, который определяет оптимальный план задачи (61) — (63).

Таким образом, если найдено решение задачи (61) — (63), то нетрудно провести анализ устойчивости двойственных оценок относительно изменений b_i. Это, в свою очередь, позволяет проанализировать устойчивость оптимального плана задачи (64), (65) относительно изменений свободных членов системы линейных уравнений (62), оценить степень влияния изменения b_i на максимальное значение целевой функции задачи (61) — (63) и дает возможность определить наиболее целесообразный вариант возможных изменений b_i.

1.91. Для изготовления четырех видов продукции предприятие использует три типа ресурсов. Нормы расхода ресурсов каждого типа на единицу продукции, их наличие в распоряжении предприятия, а также цена единицы продукции приведены в табл. 1.45.

Требуется: а) сформулировать двойственную задачу и найти оптимальные планы прямой и двойственной задач; б) найти

Таблица 1. 45

Тип ресурса	Норма расхода ресурсов на единицу продукции				Наличие ресурса
	A	B	C	D	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Цена единицы продукции	9	6	4	7	

интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям ресурсов каждого типа; в) выявить изменение общей стоимости изготовляемой продукции, определяемой оптимальным планом ее производства при уменьшении количества ресурса I типа на 60 ед. и увеличении количества ресурсов II и III типов соответственно на 120 и 160 ед. Провести анализ возможного изменения общей стоимости продукции как при изменении объемов каждого из ресурсов по отдельности, так и при их одновременном изменении в указанных размерах.

Решение. а) Предположим, что изделия видов A, B, C и D будут произведены соответственно в количествах x_1, x_2, x_3 и x_4. Для определения оптимального плана производства продукции следует найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \tag{73}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \leqslant 180, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 210, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \leqslant 800, \end{cases} \tag{74}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0. \tag{75}$$

Припишем единице каждого из используемых ресурсов двойственную оценку, соответственно равную y_1, y_2, y_3. Тогда двойственная задача по отношению к задаче (73) — (75) состоит в определении минимального значения функции

$$F^* = 180y_1 + 210y_2 + 800y_3 \tag{76}$$

при условиях

$$\begin{cases} y_1+4y_3\geqslant 9, \\ y_2+2y_3\geqslant 6, \\ 2y_1+3y_2\geqslant 4, \\ y_1+2y_2+4y_3\geqslant 7, \end{cases} \quad (77)$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3\geqslant 0. \quad (78)$$

Как видно, задачи (73) — (75) и (76) — (78) образуют симметричную пару двойственных задач. Решение исходной задачи дает оптимальный план производства изделий видов A, B, C и D, а решение двойственной — оптимальную систему двойственных оценок ресурсов, используемых для производства этих изделий. Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать решение какой-нибудь одной из них. Так как система ограничений задачи (73) — (75) содержит лишь неравенства вида «$\leqslant$», то сначала лучше найти решение этой задачи. Ее решение симплексным методом приведено в табл. 1.46.

Таблица 1.46

i	Базис	$C_б$	P_0	9	6	4	7	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_5	0	180	1	0	2	1	1	0	0
2	P_6	0	210	0	1	3	2	0	1	0
3	P_7	0	800	4	2	0	4	0	0	1
4			0	−9	−6	−4	−7	0	0	0
1	P_1	9	180	1	0	2	1	1	0	0
2	P_6	0	210	0	1	3	2	0	1	0
3	P_7	0	80	0	2	−8	0	−4	0	1
4			1620	0	−6	14	2	9	0	0
1	P_1	9	180	1	0	2	1	1	0	0
2	P_6	0	170	0	0	7	2	2	1	−1/2
3	P_2	6	40	0	1	−4	0	−2	0	1/2
4			1860	0	0	−10	2	−3	0	3
1	P_1	9	95	1	0	−3/2	0	0	−1/2	1/4
2	P_5	0	85	0	0	7/2	1	1	1/2	−1/4
3	P_2	6	210	0	1	3	2	0	1	0
4			2115	0	0	1/2	5	0	3/2	9/4

Из этой таблицы видно, что оптимальным планом производства изделий является такой план, при котором изготовляется 95 изделий вида A и 210 изделий вида B. При данном плане производства общая стоимость изделий равна 2115 руб.

Из табл. 1.46 также видно, что оптимальным планом двойственной задачи является $Y^* = (0;\ 3/2;\ 9/4)$.

б) Определим теперь интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям ресурсов каждого вида. Для этого найдем компоненты вектора

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_1+\Delta b_1 \\ b_2+\Delta b_2 \\ b_3+\Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 180+\Delta b_1 \\ 210+\Delta b_2 \\ 800+\Delta b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 95-(1/2)\Delta b_2+(1/4)\Delta b_3 \\ 85+\Delta b_1+(1/2)\Delta b_2-(1/4)\Delta b_3 \\ 210+\Delta b_2 \end{pmatrix}$$

и определим, при каких значениях Δb_1, Δb_2 и Δb_3 они не отрицательны. Прежде чем это сделать, отметим, что матрица B^{-1}, обратная матрице B, составленной из компонент векторов P_1, P_5 и P_2 базиса, который определяет оптимальный план задачи (73) — (75), записана непосредственно на основании данных табл. 1.46, а именно: элементы матрицы B^{-1} взяты из столбцов векторов P_5, P_6 и P_7, образующих первоначальный единичный базис.

Условие неотрицательности компонент указанного выше вектора приводит к следующей системе неравенств:

$$\begin{aligned} &95-(1/2)\Delta b_2+(1/4)\Delta b_3 > 0, \\ &85+\Delta b_1+(1/2)\Delta b_2-(1/4)\Delta b_3 > 0, \\ &210+\Delta b_2 > 0. \end{aligned} \tag{79}$$

Очевидно, если $\Delta b_2 = 0$ и $\Delta b_3 = 0$, то $\Delta b_1 > -85$. Это означает, что если количество ресурсов I типа будет увеличено или уменьшено в пределах 85 ед., то, несмотря на это, оптимальным планом двойственной задачи (76) — (78) остается $Y^* = (0;\ 3/2;\ 9/4)$.

Далее, если $\Delta b_1 = 0$ и $\Delta b_3 = 0$, то $-170 < \Delta b_2 < -190$, а если $\Delta b_1 = 0$ и $\Delta b_2 = 0$, то $-380 < \Delta b_3 < 340$. Таким образом, если количество одного из типов ресурсов II или III принадлежит соответственно промежутку $40 < b_2 < 400$ или $420 < b_3 < 1140$, а количество остальных ресурсов остается первоначальным, то двойственная задача (76) — (78) имеет один и тот же оптимальный план $Y^* = (0;\ 3/2;\ 9/4)$.

Если b_1, b_2 и b_3 изменяются одновременно, то исследование устойчивости двойственных оценок несколько усложняется, поскольку в данном случае нужно найти многогранник решений системы линейных неравенств (79). Точки этого многогранника определяют количество ресурсов каждого типа, при которых двойственные оценки остаются прежними.

в) В данной задаче одновременно изменяется количество ресурсов всех трех типов. При этом количество ресурса I типа уменьшается на 60 ед. ($\Delta b_1=-60$), а количество ресурсов II и III типов соответственно увеличиваются на 120 и 160 ед. ($\Delta b_2=120$ и $\Delta b_3=160$). Следовательно, чтобы выяснить, остается ли $Y^*=(0;\ 3/2;\ 9/4)$ оптимальным планом двойственной задачи (76)—(78) при указанном изменении количества ресурсов или нет, нужно проверить, удовлетворяют данные значения Δb_1, Δb_2 и Δb_3 системе неравенств (79) или нет. Для этого подставим в неравенства (79) вместо Δb_1, Δb_2 и Δb_3 их значения —60, 120 и 160:

$$\begin{cases} 95-(1/2)\cdot 120+(1/4)\cdot 160=75>0, \\ 85-60+(1/2)\cdot 120-(1/4)\cdot 160=45>0, \\ 210+120>0. \end{cases}$$

Следовательно, несмотря на изменение объемов ресурсов в указанных размерах, оптимальным планом двойственной задачи останется $Y^*=(0;\ 3/2;\ 9/4)$. Данное заключение позволяет воспользоваться равенством (72) для определения приращения максимального значения функции (73) при указанных изменениях количества ресурсов. В этом случае

$$\Delta F_{\max}=y_1^*\Delta b_1+y_2^*\Delta b_2+y_3^*\Delta b_3=$$
$$=0\cdot(-60)+(3/2)\cdot 120+(9/4)\cdot 160=540.$$

Это означает, что уменьшение количества ресурсов I типа на 60 ед. и увеличение количества ресурсов II и III типов соответственно на 120 и 160 ед. приведет к возможности построения такого плана производства продукции, реализация которого обеспечит выпуск изделий на 540 руб. больше, чем при плане производства продукции, обусловленном первоначальным количеством ресурсов. Уменьшение количества ресурсов I типа на 60 ед. не повлияет на изменение максимального значения функции, в то время как увеличение количества ресурсов II и III типов на 120 и 160 ед. приведет к увеличению максимального значения функции соответственно на $y_2^*\Delta b_2=(3/2)\cdot 120=60$ и $y_3^*\Delta b_3= =(9/4)\cdot 160=360$.

Сформулируйте двойственные задачи по отношению к задачам 1.92—1.97 и найдите их решения,

1.92. $F=6x_1+8x_2+x_3\to\max$;

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\leqslant 3, \\ x_1+2x_2 \qquad \leqslant 4, \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0. \end{cases}$$

1.93. $F=27x_1+10x_2+15x_3+28x_4\to\max;$

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+2x_4\leqslant 2,\\ 3x_1+x_2+3x_3+4x_4\leqslant 5,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

1.94. $F=3x_1+2x_2-6x_3\to\max;$

$$\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3\leqslant 18,\\ -3x_1+2x_2-2x_3\leqslant 24,\\ x_1+3x_2-4x_3\leqslant 36,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

1.95. $F=3x_1-7x_2-4x_3\to\min;$

$$\begin{cases}-2x_1-3x_2-2x_3\leqslant 12,\\ -4x_1-4x_2-3x_3\leqslant 24,\\ 5x_1+5x_2+3x_3\leqslant 15,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

1.96. $F=x_1+3x_2-5x_4\to\max;$

$$\begin{cases}2x_1+4x_2+x_3+2x_4=28,\\ -3x_1+5x_2-\quad 3x_4\leqslant 30,\\ 4x_1-2x_2\quad 8x_4\leqslant 32,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_n\geqslant 0.$$

1.97. $F=3x_1+2x_5-5x_6\to\max;$

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3x_5+5x_6=30,\\ 4x_1+x_3+2x_5-4x_6=28,\\ -3x_1+x_4-3x_5+6x_6=24,\end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,6}\ ).$$

1.98. Сформулируйте двойственную задачу по отношению к задаче 1.1 и найдите ее решение.

1.99. Найдите решение двойственной задачи по отношению к задаче 1.5.

1.100. Сформулируйте двойственную задачу по отношению к задаче 1.6 и найдите ее решение.

1.101. Найдите решение двойственной задачи по отношению к задаче 1.63.

1.102. Сформулируйте двойственную задачу по отношению к задаче 1.62 и найдите ее решение.

1.103. Сформулируйте для задачи 1.41 двойственную задачу. Кроме того:

а) найдите оптимальный план двойственной задачи;

б) найдите интервалы устойчивости двойственных оценок по отношению к изменениям количества сырья каждого типа;

в) определите увеличение максимального значения общей стоимости изготовляемой продукции при увеличении количества сырья всех трех типов соответственно на 30, 40 и 50 кг. Оцените раздельное и суммарное влияние этих изменений.

1.104. Для производства продукции трех видов A, B и C используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в объеме, соответственно не большем, чем 180, 210 и 236 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	изделие *A*	изделие *B*	изделие *C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (руб.)	10	14	12

Требуется определить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальный ее выпуск в стоимостном выражении.

Сформулируйте для данной задачи двойственную. Кроме того:

а) найдите оптимальный план двойственной задачи;

б) найдите интервалы устойчивости двойственных оценок;

в) найдите увеличение максимального значения общей стоимости изготовляемой продукции при увеличении количества сырья II и III вида соответственно на 80 и 160 ед. и при уменьшении количества сырья I вида на 40 ед. Оцените раздельное и суммарное влияние этих изменений;

г) определите целесообразность в плане производства 4-го вида изделий, нормы затрат сырья на единицу которого равны 2, 4 и 3 кг, а цена единицы изделия равна 18 руб;

д) найдите оптимальные планы прямой и двойственной задачи, если количество сырья I, II и III видов равно 140, 250 и 240 кг.

5. Двойственный симплекс-метод. Двойственный симплекс-метод, как и симплекс-метод, используется при нахождении решения задачи линейного программирования, записанной в форме основной задачи, для которой среди векторов P_j, составленных из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений, имеется m единичных. Вместе с тем двойственный симплекс-метод можно применять при решении задачи линейного программирования, свободные члены системы уравнений которой могут быть любыми числами (при решении задачи симплексным методом эти числа предполагались неотрицательными). Такую задачу и рассмотрим теперь, предварительно предположив, что единичными являются векторы $P_1, P_2, \dots, P_m$, т. е. рассмотрим задачу, состоящую в определении максимального значения функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad (80)$$

при условиях

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m + x_{m+1}P_{m+1} + \dots + x_nP_n = P_0, \qquad (81)$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1,n}), \qquad (82)$$

где

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_m=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix};$$

$$P_{m+1}=\begin{pmatrix}a_{1m+1}\\a_{2m+1}\\a_{3m+1}\\\cdots\\a_{mm+1}\end{pmatrix};\ \ldots;\ P_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\a_{3n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix};\ P_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

и среди чисел b_i $(i=\overline{1,m})$ имеются отрицательные.

В данном случае $X=(b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m;\ 0;\ldots;0)$ есть решение системы линейных уравнений (81). Однако это решение не является планом задачи (80)—(82), так как среди его компонент имеются отрицательные числа.

Поскольку векторы $P_1,\ P_2,\ldots,P_m$ — единичные, каждый из векторов $P_j\,(j=\overline{1,n})$ можно представить в виде линейной комбинации данных векторов, причем коэффициентами разложения векторов P_j по векторам $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m$ служат числа $x_{ij}=a_{ij}$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$. Таким образом, можно найти

$$\Delta_j=z_j-c_j=\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}-c_j\ (j=\overline{1,n}).$$

Определение 1.15. Решение $X=(b_1;\ b_2;\ldots;\ b_m;\ 0;\ldots;\ 0)$ системы линейных уравнений (81), определяемое базисом $P_1,\ P_2,\ldots,P_m$, называется *псевдопланом* задачи (80)—(82), если $\Delta_j\geqslant0$ для любого j $(j=\overline{1,n})$.

Теорема 1.13. *Если в псевдоплане $X=(b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m,\ 0;\ldots;0)$, определяемом базисом $P_1,\ P_2,\ldots,P_m$, есть хотя бы одно отрицательное число $b_i<0$ такое, что все $a_{ij}\geqslant0$ $(j=\overline{1,n})$, то задача (80)—(82) вообще не имеет планов.*

Теорема 1.14. *Если в псевдоплане $X=(b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, определяемом базисом $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m$, имеются отрицательные числа $b_i<0$ такие, что для любого из них существуют числа $a_{ij}<0$, то можно перейти к новому псевдоплану, при котором значение целевой функции задачи (80)—(82) не уменьшится.*

Сформулированные теоремы дают основание для построения алгоритма двойственного симплекс-метода.

Итак, продолжим рассмотрение задачи (80)—(82). Пусть $X=(b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$ — псевдоплан этой задачи. На основе исходных данных составляют симплекс-таблицу (табл. 1.47), в которой некоторые элементы столбца вектора P_0 являются отрицательными числами. Если таких чисел нет, то в симплекс-таблице записан оптимальный план задачи (80)—(82), поскольку, по предположению, все $\Delta_j \geqslant 0$. Поэтому для определения оптимального плана задачи при условии, что он существует, следует произвести упорядоченный переход от одной симплекс-таблицы к другой до тех пор, пока из столбца вектора P_0 не будут исключены отрицательные элементы. При этом все время должны оставаться неотрицательными все элементы $(m+1)$-й строки, т. е. $z_j - c_j \geqslant 0$ для любого j $(j=\overline{1, n})$.

Таким образом, после составления симплекс-таблицы проверяют, имеются ли в столбце вектора P_0 отрицательные числа. Если их нет, то найден оптимальный план исходной задачи. Если же они имеются (что мы и предполагаем), то выбирают наибольшее по абсолютной величине отрицательное число. В том случае, когда таких чисел несколько, берут какое-нибудь одно из них: пусть это число b_l. Выбор этого числа определяет вектор, исключаемый из базиса, т. е. в данном случае из базиса выводится вектор P_l. Чтобы определить, какой вектор следует ввести в базис, находим $\min\ (-\Delta_j/a_{lj})$, где $a_{lj} < 0$.

Пусть это минимальное значение принимается при $j=r$; тогда в базис вводят вектор P_r. Число a_{lr} является разрешающим элементом. Переход к новой симплекс-таблице производят по обычным правилам симплексного метода. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока в столбце вектора P_0 не будет больше отрицательных чисел. При этом находят оптимальный план исходной задачи, а следовательно, и двойственной. Если на некотором шаге окажется, что в i-й строке симплекс-таблицы (табл. 1.47) в столбце вектора P_0 стоит отрицательное число b_i, а среди остальных элементов этой строки нет отрицательных, то исходная задача не имеет решения.

Таким образом, отыскание решения задачи (80)—(82) двойственным симплекс-методом включает следующие этапы:

1. Находят псевдоплан задачи.

2. Проверяют этот псевдоплан на оптимальность. Если псевдоплан оптимален, то найдено решение задачи. В противном случае либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому псевдоплану.

3. Выбирают разрешающую строку с помощью определения наибольшего по абсолютной величине отрицательного числа столбца вектора P_0 и разрешающий столбец с помощью нахождения наименьшего по абсолютной величине отношения элементов

Таблица 1.47

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	...	c_e	...	c_m	c_{m+1}	...	c_r	...	c_n
				P_1	P_2	...	P_e	...	P_m	P_{m+1}	...	P_r	...	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1r}	...	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2r}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
e	P_e	c_e	b_e	0	0	...	1	...	0	a_{em+1}	...	a_{er}	...	a_{en}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	P_i	c_i	b_i	0	0	...	0	...	0	a_{im+1}	...	a_{ir}	...	a_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0	...	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mr}		a_{mn}
$m+1$			F_0	0	0	...	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_r	...	Δ_n

$(m+1)$-й строки к соответствующим отрицательным элементам разрешающей строки.

4. Находят новый псевдоплан и повторяют все действия начиная с этапа 2.

1.105. Найти максимальное значение функции $F=x_1+x_2+2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=8, \\ x_1-x_2\geqslant 4, \\ x_1+x_2\geqslant 6, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

Решение. Запишем исходную задачу линейного программирования в форме основной задачи: найти максимум функции $F=x_1+x_2+2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+x_3=8, \\ x_1-\ \ x_2-x_4=4, \\ x_1+2x_2-x_5=6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5\geqslant 0.$$

Умножим второе и третье уравнения системы ограничений последней задачи на -1 и переходим к следующей задаче: найти максимум функции

$$F=x_1+x_2+2x_3 \tag{83}$$

при условиях

$$\begin{cases} \ \ x_1+\ \ x_2+x_3=\ \ 8, \\ -x_1+\ \ x_2+x_4=-4, \\ -x_1-2x_2+x_5=-6, \end{cases} \tag{84}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geqslant 0. \tag{85}$$

Составим для последней задачи двойственную. Такой является задача, в результате решения которой требуется найти минимальное значение функции

$$F^* = 8y_1 - 4y_2 - 6y_3, \tag{86}$$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - \ y_3 \geqslant 1, \\ y_1 + y_2 - 2y_3 \geqslant 1, \\ \qquad\quad y_1 \geqslant 2, \end{cases} \tag{87}$$

$$y_2, y_3 \geqslant 0. \tag{88}$$

Выбрав в качестве базиса векторы P_3, P_4 и P_5, составим симплексную таблицу (табл. 1.48) для исходной задачи (83) — (85).

Таблица 1.48

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	8	1	1	1	0	0
2	P_4	0	—4	—1	1	0	1	0
3	P_5	0	—6	—1	—2	0	0	1
4			16	1	1	0	0	0

Из этой таблицы видим, что планом двойственной задачи (86) — (88) является $Y = (2;\ 0;\ 0;)$. При этом плане $F^* = 16$. Так как в столбце вектора P_0 табл. 1.48 имеются два отрицательных числа (—4 и —6), а в 4-й строке отрицательных чисел нет, то в соответствии с алгоритмом двойственного симплекс-метода переходим к новой симплекс-таблице. (В данном случае это можно сделать, так как в строках векторов P_4 и P_5 имеются отрицательные числа. Если бы они отсутствовали, то задача была бы неразрешима.) Вектор, исключаемый из базиса, определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом, стоящим в столбце вектора P_0. В данном случае это число —6. Следовательно, из базиса исключаем вектор P_5. Чтобы определить, какой вектор необходимо ввести в базис, находим $\min\limits_j (-\Delta_j / a_{3j})$, где $a_{3j} < 0$. Имеем

$$\min_j (-\Delta_j / a_{3j}) = \min\ (-1/(-1);\ -1/(-2)) = 1/2.$$

Значит, в базис вводим вектор P_2. Переходим к новой симплекс-таблице (табл. 1.49).

Таблица 1.49

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	5	1/2	0	1	0	1/2
2	P_4	0	—7	—3/2	0	0	1	1/2
3	P_2	1	3	1/2	1	0	0	—1/2
			13	1/2	0	0	0	1/2

Из этой таблицы видно, что получен новый план двойственной задачи $Y=(2;\ 0;\ 1/2)$. При этом плане значение ее линейной формы равно $F^*=13$. Таким образом, с помощью алгоритма двойственного симплекс-метода произведен упорядоченный переход от одного плана двойственной задачи к другому.

Так как в столбце вектора P_0 табл. 1.49 стоит отрицательное число —7, то рассмотрим элементы 2-й строки. Среди этих чисел есть одно отрицательное —3/2. Если бы такое число отсутствовало, то исходная задача была бы неразрешима. В данном случае переходим к новой симплекс-таблице (табл. 1.50).

Таблица 1.50

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
2	P_1	1	14/3	1	0	0	—2/3	—1/3
3	P_2	1	2/3	0	1	0	1/3	—1/3
4			32/3	0	0	0	1/3	2/3

Как видно из табл. 1.50, найдены оптимальные планы исходной и двойственной задач. Ими являются $X^*=(14/3;\ 2/3;\ 8/3;\ 0)$ и $Y^*=(2;\ 1/3;\ 2/3)$. При этих планах значения линейных форм исходной и двойственной задач равны: $F_{\max}=F^*_{\min}=32/3$.

1.106. Найти максимальное значение функции $F=2x_1+$ $+3x_2+5x_4$ при условиях

$$\begin{cases} -2x_1+\ x_2-x_3=12, \\ x_1+2x_2+x_4=10, \\ 3x_1-2x_2-x_5=18, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geqslant 0.$$

Решение. Умножая первое и третье уравнения системы ограничений задачи на -1, в результате приходим к задаче нахождения максимального значения функции $F=2x_1+3x_2+5x_4$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = -18, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geqslant 0.$$

Взяв в качестве базиса векторы P_3, P_4 и P_5, составляем симплекс-таблицу (табл. 1.51).

Таблица 1.51

i	Базис	$C_б$	P_0	2	3	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	−12	2	−1	1	0	0
2	P_4	5	10	1	2	0	1	0
3	P_5	0	−18	−3	2	0	0	1
4			50	3	7	0	0	0

В 4-й строке табл. 1.51 нет отрицательных чисел. Следовательно, если бы в столбце вектора P_0 не было отрицательных чисел, то в табл. 1.51 был бы записан оптимальный план. Поскольку в указанном столбце отрицательные числа имеются и такие же числа содержатся в соответствующих строках, переходим к новой симплекс-таблице (табл. 1.52). Для этого исключим из базиса вектор P_5 и введем в базис вектор P_1. В результате получим псевдоплан $X=(6;\ 0;\ -24;\ 4)$.

Таблица 1.52

i	Базис	$C_б$	P_0	2	3	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	−24	0	1/3	1	0	2/3
2	P_4	5	4	0	8/3	0	1	1/3
3	P_1	2	6	1	−2/3	0	0	−1/3
4			32	0	9	0	0	1

Так как в строке вектора P_3 нет отрицательных чисел, то исходная задача не имеет решения.

Найдите решение задач 1.107—1.117, используя двойственный симплекс-метод.

1.107. $F=-4x_1-7x_2-8x_3-5x_4\to\max;$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_4\geqslant 4,\\ 2x_1+x_2+2x_3\geqslant 6,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

1.108. $F=5x_1+6x_2+x_3+x_4\to\min;$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1+3x_2-\ x_3+\ x_4\geqslant 18,\\ 3x_1\qquad +2x_3-4x_4\geqslant 24,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

1.109. $F=x_1+3x_2+4x_3+2x_4\to\min;$

$$\begin{cases} x_1-\ x_2+4x_3+5x_4\geqslant 27,\\ 2x_1+3x_2-\ x_3+4x_4\geqslant 24,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

1.110. $F=-x_1-7x_2+4x_3-9x_4-8x_5+3x_6\to\max;$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+3x_3-2x_4+\ x_5+x_6=18,\\ 2x_1+\ x_2-\ x_3-3x_4+2x_5\qquad\geqslant 24,\end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,6}).$$

1.111. $F=x_1-2x_2-4x_3+2x_4+3x_5\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-\ x_3+x_4+x_5=18,\\ \qquad -2x_2+3x_3+x_4\qquad\geqslant 24,\\ -x_1+4x_2-\qquad x_4\qquad\geqslant 12,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0.$$

1.112. $F=5x_1-2x_2-6x_3+4x_4+2x_5\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4\qquad\geqslant 12,\\ 3x_1+2x_2-2x_3+5x_4+x_5=30,\\ -x_1+3x_2+5x_3+\ x_4\qquad\geqslant 16,\end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,5}).$$

1.113. $F=-2x_1-8x_2-x_3-5x_4\to\max;$

$$\begin{cases} -2x_1+\ x_2-3x_3+\ x_4\geqslant 18,\\ x_1+2x_2+4x_3+2x_4\geqslant 24,\\ 3x_1+4x_2+2x_3-3x_4\geqslant 30,\end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

1.114. Определить оптимальный рацион для животных по условиям задачи 1.6.

1.115. Из трех видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества A, 30 ед.— вещества B и 24 ед.— вещества C. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг сырья каждого вида, указано в таблице. В ней же приведена цена 1 кг сырья каждого вида.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья вида			
	1	2	3	4
A	1	1	—	4
B	2	—	3	5
C	1	2	4	6
Цена 1 кг сырья (руб.)	5	6	7	4

Составить смесь, содержащую не менее нужного количества веществ данного вида и имеющую минимальную стоимость.

1.116. Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в следующей таблице:

Длина заготовки, (см)	Вариант разреза					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	—	—	—
35	—	1	—	3	1	—
50	—	—	1	—	1	2
Величина отходов (см)	20	30	15	5	25	10

Определить, сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого вида при минимальных отходах.

1.117. Из отходов производства предприятие может организовать выпуск четырех видов продукции. Для этого оно планирует использовать два типа взаимозаменяемого оборудования. Количество изделий каждого вида, которое может быть изготовлено на соответствующем оборудовании в течение 1 ч, а также затраты, связанные с производством одного изделия, приведены в следующей таблице:

Тип оборудования	Количество производимых в течение 1 ч изделий вида				Затраты (руб.), связанные с производством в течение 1 ч изделий вида			
	1	2	3	4	1	2	3	4
I	8	7	4	5	2,7	2,6	2,7	2,4
II	6	8	6	4	2,6	2,7	2,6	2,5

Оборудование I типа предприятие может использовать не более 80 ч, а оборудование II типа — не более 60 ч.

Учитывая, что предприятию следует изготовить изделий каждого вида соответственно не меньше 240, 160, 150 и 220 ед., определить, в течение какого времени и на каком оборудовании следует изготовлять каждое из изделий так, чтобы получить не менее нужного количества изделий при минимальных затратах на их производство.

§ 1.7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ ПОСЛЕОПТИМИЗАЦИОННОГО АНАЛИЗА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотренный выше послеоптимизационный анализ решения задачи линейного программирования имеет большое значение для эффективного использования экономико-математических методов в реальных условиях. При этом использование ЕС ЭВМ и ППП позволяет за короткое время и при незначительных затратах находить оптимальный план данной конкретной задачи и проводить послеоптимизационный анализ найденного решения. Это очень важно при принятии управленческих решений, поскольку позволяет для данной конкретной ситуации выбрать наиболее подходящий вариант решения данной задачи.

1. Использование ППП ЛП2 для послеоптимизационного анализа решения задачи. Послеоптимизационный анализ решения задачи в условиях использования ППП ЛП2 реализуется процедурой LPANALYSIS. Отчет о послеоптимизационном анализе выдается в виде таблицы, состоящей из двух частей. В одной из них приводятся данные анализа для переменных, принявших свои значения на границе области допустимых значений, а в другой — для переменных, принявших значения внутри области их допустимых значений.

В отчете о послеоптимизационном анализе содержится вся информация, имеющаяся в отчетах LPSOLUTION (см. § 1.5), а также приводятся:

верхнее и нижнее критические значения переменной. Это предельные значения переменной, до которых она может изменяться, так что базис, определяющий данный оптимальный план, содержит одни и те же векторы;

оценки изменения значения целевой функции при единичном увеличении или уменьшении данной переменной. Эти оценки позволяют определить, как изменится значение целевой функции при принудительном изменении значения переменной. Их действие имеет место в интервале от верхнего до нижнего критического значения переменной;

минимальное и максимальное значения коэффициента целевой функции. Эти числа определяют интервал возможных изменений коэффициента целевой функции, для которого оптимальный план остается прежним.

Получение отчета о послеоптимизационном анализе решения задачи с использованием ППП ЛП2 включает те же основные этапы, что и процесс нахождения решения задачи с использованием данного пакета.

1.118. На мебельной фабрике изготовляется пять видов продукции: столы, шкафы, диваны-кровати, кресла-кровати и тахты. Нормы затрат труда, а также древесины и ткани на производство единицы продукции данного вида приведены в табл. 1.53.

Таблица 1.53

Ресурсы	Норма расхода ресурса на единицу продукции					Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	диван-кровать	кресло-кровать	тахта	
Трудозатраты (человеко-ч)	4	8	12	9	10	3456
Древесина ($м^3$)	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Ткань (м)	—		6	4	5	2400
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	8	10	16	14	12	—
Выпуск (шт.): минимальный	120	90	20	40	30	—
максимальный	480	560	180	160	120	—

В этой же таблице указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении фабрики, а также указано (на основе изучения спроса), в пределах каких объемов может изготовляться каждый вид продукции.

Определить план производства продукции мебельной фабрикой, согласно которому прибыль от ее реализации является максимальной. Используя ППП ЛП2, найти решение задачи, а также провести послеоптимизационный анализ полученного решения.

Решение. Составим математическую модель задачи. Для этого предположим, что мебельная фабрика изготовит каждый из пяти видов продукции (стол, шкаф, диван-кровать, кресло-кровать и тахту) в количестве, соответственно равном x_1, x_2, x_3,

x_4 и x_5 ед. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении максимального значения функции

$$F = 8x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 12x_5 \tag{89}$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 9x_4 + 10x_5 \leqslant 3456, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}3x_5 \leqslant 432, \\ 6x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leqslant 2400, \end{cases} \tag{90}$$

$$\begin{cases} 120 \leqslant x_1 \leqslant 480, \\ 90 \leqslant x_2 \leqslant 560, \\ 20 \leqslant x_3 \leqslant 180, \\ 40 \leqslant x_4 \leqslant 160, \\ 30 \leqslant x_5 \leqslant 120. \end{cases} \tag{91}$$

Значение целевой функции задачи (89) определяет величину прибыли, получаемую мебельной фабрикой при данном плане производства продукции, а выполнение неравенств (90) системы ограничений обеспечивает непревышение имеющихся в распоряжении фабрики ресурсов.

В соответствии с требованиями ППП ЛП2 каждой переменной, каждому неравенству системы ограничений (90) и целевой функции (89) присваиваем имена. Переменным x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 присвоим соответственно имена СТОЛ, ШКАФ, ДИВАН, КРЕСЛО и ТАХТА. Первому неравенству системы ограничений (90) дадим имя ТРУД, второму — ДРЕВ, третьему — ТКАНЬ, а целевой функции — ПРИБ. С учетом введенных обозначений целевую функцию и систему ограничений задачи записываем в виде системы уравнений:

ПРИБ = 8СТОЛ + 10ШКАФ + 16ДИВАН + 14КРЕСЛО + 12ТАХТА

ТРУД = 4СТОЛ + 8ШКАФ + 12ДИВАН + 9КРЕСЛО + 10ТАХТА

ДРЕВ = 0,4СТОЛ + 0,6ШКАФ + 0,3ДИВАН + 0,2КРЕСЛО + 0,3ТАХТА

ТКАНЬ = 6ДИВАН + 4КРЕСЛО + 5ТАХТА

Используя последнюю систему уравнений, составляем матрицу исходных данных задачи (табл. 1.54).

Исходные данные задачи, операторы управления и операторы описания записываем на специальном бланке (рис. 1.18), так же как мы это делали при нахождении решения задачи линейного программирования в § 1.5. Вместе с тем, чтобы получить отчет о послеоптимизационном анализе решения задачи, после оператора LPSOLUTION указываем оператор LPANALYSIS (ср. рис. 1.10 и 1.18).

После этого производим решение задачи на ЭВМ. Результаты решения выдаются в виде двух таблиц (см. табл. 1.55 и 1.56).

Таблица 1.54

Строчные переменные	Столбцовые переменные					Нижняя граница	Верхняя граница
	СТОЛ	ШКАФ	ДИВАН	КРЕСЛО	ТАХТА		
ПРИБ	8	10	16	14	12	—	—
ТРУД	4	8	12	9	10	0	3456
ДРЕВ	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	0	432
ТКАНЬ	—	—	6	4	5	0	2400
Нижняя граница	120	90	20	40	30	—	—
Верхняя граница	480	560	180	160	120	—	—

В табл. 1.55 содержится отчет о решении задачи (о чем было подробно сказано в § 1.5), а в табл. 1.56 — отчет о послеоптимизационном анализе решения задачи.

Из табл. 1.55 видно, что оптимальным планом производства продукции мебельной фабрикой является план, согласно которому изготовляется 459 столов, 90 шкафов, 20 диванов-кроватей, 40 кресел-кроватей и тахты в количестве, равном 30. В соответствии с этим планом производства продукции прибыль фабрики от ее реализации является максимальной и равна 5812 руб., причем полностью используются трудовые ресурсы и остаются не использованными древесина и ткань.

Таблица 1.55

Переменная	Тип	Входит	Значение в решении	Верхняя граница	Нижняя граница	Коэффициент в целевой функции	Двойственная оценка
СТОЛ	B *	3	459.000	480.000	120.000	8.000	0.0
ПРИБ	B *	0	5812.00	* * *	* * *	—1.000	—1.000
ТРУД	LL	0	3456.000	3456.000	0.0	0.0	—2.000
ДРЕВ	B *	0	260.6	432.000	0.0	0.0	0.0
ШКАФ	LL	3	90.000	560.00	90.000	10.000	—6.000
ДИВАН	LL	4	20.000	180.000	20.000	16.000	—8.000
ТКАНЬ	B *	0	430.000	2400.000	0.0	0.0	0.0
КРЕСЛО	LL	4	40.000	160.000	40.000	14.000	—4.000
ТАХТА	LL	4	30.000	120.000	30.000	12.000	—8.000

```
1        10        20        30        40        50        60
INPUT
NAME          ПЛАН
LISTON
*ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ
    СТОЛ      ПРИБ            8.0      ТРУД            4.0
    СТОЛ      ДРЕВ            0.4
    ШКАФ      ПРИБ           10.0      ТРУД            8.0
    ШКАФ      ДРЕВ            0.6
    ДИВАН     ПРИБ           16.0      ТРУД           12.0
    ДИВАН     ДРЕВ            0.3      ТКАНЬ           6.0
    КРЕСЛО    ПРИБ           25.0      ТРУД            9.0
    КРЕСЛО    ДРЕВ            0.2      ТКАНЬ           4.0
    ТАХТА     ПРИБ           30.0      ТРУД           10.0
    ТАХТА     ДРЕВ            0.3      ТКАНЬ           5.0
*ОГРАНИЧЕНИЯ
 FR ОГР       ПРИБ
 UB ОГР       ТРУД         3456.0
 UB ОГР       ДРЕВ          432.0
 UB ОГР       ТКАНЬ        2400.0
 LB ОГР       СТОЛ          120.0
 UB ОГР       СТОЛ          480.0
 LB ОГР       ШКАФ           90.0
 UB ОГР       ШКАФ          560.0
 LB ОГР       ДИВАН          20.0
 UB ОГР       ДИВАН         180.0
 LB ОГР       КРЕСЛО         40.0
 UB ОГР       КРЕСЛО        160.0
 LB ОГР       ТАХТА          30.0
 UB ОГР       ТАХТА         120.0
ENDATA
MOVE
    DATA      ПЛАН
    MAXIMIZE  ПРИБ
    BOUNDS    ОГР
ENDATA
LPSOLUTION
LPANALYSIS
END
/*
```

Рис. 1.18

Проведем теперь анализ полученного решения задачи. Для этого воспользуемся данными табл. 1.56. Как видно, эта таблица состоит из двух частей. В первой части приводятся данные для анализа переменных, принявших свои значения на границе области их допустимых значений (переменные типа LL, UL и FQ), а во второй части — для переменных, принявших свои значения внутри области допустимых значений (переменные типа B*).

Таблица 1.56

Переменная	Тип	Значение в решении	Верхняя граница	Оценка при единичном увеличении	Верхнее критическое значение	Минимальное значение коэффициента
		Коэффициент в целевой функции	Нижняя граница	Оценка при единичном уменьшении	Нижнее критическое значение	Максимальное значение коэффициента
Переменные на границе допустимой области						
ТРУД	UL	3456.000	3454.000	—2.000	3540.000	* * *
		0.0	0.0	2.000	2100.000	—2.000
ШКАФ	LL	90.000	560.000	6.000	259.500	16.001
		10.000	90.000	—6.000	79.500	* * *
ДИВАН	LL	20.000	180.000	8.000	133.000	24.001
		16.000	20.000	—8.000	13.000	* * *
КРЕСЛО	LL	40.000	160.000	4.000	190.667	18.001
		14.000	40.000	—4.000	30.666	* * *
ТАХТА	LL	30.000	120.000	8.000	165.600	20.001
		12.000	30.000	—8.000	21.600	* * *
Переменные внутри допустимой области						
СТОЛ	B*	459.000	480.000	* * *	459.000	* * *
		8.000	120.000	1.778	189.000	6.222
ПРИБ	B*	5812.000	* * *	* * *	5812.000	* * *
		—1.000	* * *	* * *	5812.000	* * *
ДРЕВ	B*	260.600	432.000	* * *	260.600	* * *
		0.0	0.0	5.715	155.133	—5.715
ТКАНЬ	B*	430.000	2400.000	1.000	1032.668	1.000
		0.0	0.0	* * *	430.000	* * *

Первые четыре графы табл. 1.56 повторяют исходные данные и воспроизводят результат решения задачи.

В пятой графе указываются оценки, характеризующие степень изменения целевой функции при единичном изменении значения данной переменной (заметим, что знаки оценок соответствуют тому случаю, когда находится минимум целевой функции; в случае максимизации целевой функции, как в рассматриваемой задаче, знаки оценок следует изменить на противоположные). Действие оценок справедливо в интервале от нижнего до верхнего предельного значения переменной. Так, например, если принудительно увеличить выпуск диванов-кроватей на один и довести до 21 (оптимальным планом производства продукции предусмотрено изготовление 20 диванов-кроватей), то это приведет к уменьшению прибыли мебельной фабрики на 8 руб.

Такое изменение прибыли будет иметь место при каждом увеличении выпуска на один диван-кровать до тех пор, пока выпуск данной продукции не превзойдет 133 шт.

Далее, если теперь рассмотрим один из видов ресурсов, например древесину, то видим, что этот вид ресурсов при оптимальном плане производства продукции используется не полностью. Вместе с тем если считать, что его объемы заключены между 260,6 и 155,133 м^3, то каждое принудительное уменьшение объема использования данного ресурса на 1 м^3 приведет к уменьшению прибыли на 5,715 руб.

Рассмотрим теперь шестую графу табл. 1.56. В ней указываются пределы, в которых принудительно можно изменять значения переменных, так что базис, определяющий данный оптимальный план, остается неизменным. Так, например, если изготовление столов, выпуск которых в соответствии с оптимальным планом равен 459, изменять от 189 до 459, то базис, определяющий исходный оптимальный план, не меняется. Этот базис сохраняется и в том случае, если объем трудозатрат изменяется в пределах от 2100 до 3540 человеко-ч.

Рассмотрим, наконец, седьмую графу табл. 1.56. В ней указывается, в каких пределах могут изменяться значения коэффициентов целевой функции задачи, так что найденный оптимальный план остается неизменным. При этом в указанной графе табл. 1.56 приведены данные для того случая, когда находится минимум функции. В том случае, когда находится максимум функции (как в рассматриваемой задаче), в шестой графе верхние и нижние строки следует поменять местами. Так, например, для диванов-кроватей, прибыль от реализации которых равна 20 руб., максимальное значение коэффициента при переменной ДИВАН в целевой функции равно 24, а минимальное не ограничено. Это означает, что если прибыль от реализации одного дивана-кровати не превышает 24 руб., то выпускать диваны-кровати сверх установленного задания (20 шт.) невыгодно. Если прибыль окажется больше чем 24 руб., то выпуск диванов-кроватей при оптимальном плане производства продукции превысит 20 шт.

Из рассмотренного примера видно, что использование ППП ЛП2 позволяет не только найти решение задачи, но и провести довольно полный послеоптимизационный анализ полученного решения. Еще более полный послеоптимизационный анализ позволяет провести использование ППП ЛП АСУ.

2. Использование ППП ЛП АСУ для послеоптимизационного анализа решения задачи. В условиях использования ППП ЛП АСУ наиболее подробный послеоптимизационный анализ обеспечивается процедурой RANGE. Отчет о послеоптимизационном анализе выдается в виде таблицы, включающей четыре секции. Первая секция — СТРОКИ НА ГРАНИЦЕ, вторая секция — СТОЛБЦЫ НА ГРАНИЦЕ, третья секция — СТРОКИ НА ПРОМЕЖУТОЧНОМ УРОВНЕ и четвертая секция — СТОЛБЦЫ НА ПРОМЕЖУТОЧНОМ УРОВНЕ. В секциях содержится вся информация, выдача которой обеспечивается процедурой SOLUTION (см. § 1.5). Кроме того, указываются:

нижняя и верхняя границы переменной, т. е. числа, характеризующие интервал, в котором может изменяться переменная, так что базис, определяющий данный оптимальный план, остается неизменным;

оценка при единичном увеличении (уменьшении) переменной, определяющая возможное изменение значения целевой функции при принудительном изменении значения переменной, принятого в оптимальном плане. Справедливость этого имеет место в интервале, определяемом нижней и верхней границами переменной;

верхнее и нижнее значения коэффициента целевой функции, определяющие интервал возможных значений переменной, для каждого из которых найденный оптимальный план не изменяется;

имена векторов, вводимого в базис и выводимого из базиса, в том случае, если переменная примет значение, не принадлежащее интервалу от нижней до верхней границы переменной;

тип переменной, т. е. новое положение переменной.

Получение отчета о послеоптимизационном анализе решения задачи включает те же основные этапы, что и процесс нахождения решения задачи с использованием данного пакета.

1.119. На молочном комбинате для производства двух видов сливочного мороженого и двух видов пломбира требуется молоко натуральное, молоко сухое, молоко сухое обезжиренное, масло сливочное, сахар, молоко сгущенное, молоко сгущенное обезжиренное, а также используется соответствующее оборудование для расфасовки и упаковки мороженого. Нормы затрат указанных ресурсов на производство 1 т мороженого приведены в табл. 1.57.

Таблица 1.57

Ресурсы (кг)	Норма расхода ресурса на 1 т мороженого				Общее количество ресурсов
	сливочное I вида	сливочное II вида	пломбир I вида	пломбир II вида	
Молоко натуральное	550	—	620	—	64 100
Молоко сухое	40	30	20	20	4 800
Молоко сухое обезжиренное	30	40	30	30	55 200
Масло сливочное	86	110	150	52	22 360
Сахар	160	92	158	128	26 240
Молоко сгущенное	—	—	—	50	800
Молоко сгущенное обезжиренное	—	158	30	50	7 910
Производительность оборудования (машино-ч)	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибыль от реализации 1 т мороженого (руб.)	315	278	573	370	—
Выпуск (т):					
минимальный	—	40	—	—	—
максимальный	—	—	120	—	—

В этой же таблице указана прибыль от реализации 1 т мороженого каждого вида, приведено общее количество ресурсов данного вида, имеющееся в распоряжении молочного комбината, а также указаны минимально возможный выпуск сливочного мороженого II вида и максимально возможный — пломбира I вида (эти границы определены на основе установившегося спроса на мороженое).

Определить план производства мороженого молочным комбинатом, обеспечивающий максимальную прибыль от его реализации. Используя ППП ЛП АСУ, найти решение задачи и провести послеоптимизационный анализ найденного решения.

Решение. Составим математическую модель задачи. Для этого будем считать, что сливочного мороженого I и II видов будет изготовлено соответственно x_1 и x_2 тонн, а пломбира I и II видов — x_3 и x_4 тонн. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении максимального значения функции

$$F=315x_1+278x_2+573x_3+370x_4 \tag{92}$$

при условиях

$$\begin{cases} 550x_1 \qquad\qquad +620x_3 \qquad\qquad \leqslant 64100, \\ 40x_1+\ 30x_2+\ 20x_3+\ 20x_4\leqslant\ 4800, \\ 30x_1+\ 40x_2+\ 30x_3+\ 30x_4\leqslant\ 5200, \\ 86x_1+110x_2+150x_3+\ 52x_4\leqslant 22360, \\ 160x_1+\ 92x_2+158x_3+128x_4\leqslant 26240, \\ 50x_4\leqslant\ 800, \\ 158x_2+\ 30x_3+\ 50x_4\leqslant\ 7910, \\ 4{,}5x_1+4{,}5x_2+4{,}5x_3+4{,}5x_4\leqslant\ 720, \end{cases} \tag{93}$$

$$\begin{cases} x_2\geqslant 40, \\ x_3\leqslant 120, \end{cases} \tag{94}$$

$$x_1,\ x_3,\ x_4\geqslant 0. \tag{95}$$

Значение целевой функции задачи определяет величину прибыли, получаемую молочным комбинатом при данном плане производства мороженого, а выполнение неравенств системы ограничений обеспечивает непревышение имеющихся ресурсов каждого вида и выполнение условий относительно возможного выпуска мороженого данного вида.

В соответствии с требованиями ППП ЛП АСУ переменным задачи, неравенствам (93) и целевой функции (92) присваиваем имена: СЛИВ1, СЛИВ2, ПЛОМ1 и ПЛОМ2 — столбцовые переменные, обозначающие имя мороженого данного вида; МОЛН, МОЛС, МОЛСО, МАСЛО, САХАР, МОЛСГ, МОЛСГО и ОБОР — строчные переменные, обозначающие имя ресурсов; ПРИБ — строчная переменная, обозначающая имя целевой функции. Тогда имеем

```
ПРИБ   =315СЛИВ1+278СЛИВ2+573ПЛОМ1+370ПЛОМ2
МОЛН   =550СЛИВ1          +620ПЛОМ1
МОЛС   = 40СЛИВ1+ 30СЛИВ2+ 20ПЛОМ1+ 20ПЛОМ2
МОЛСО= 30СЛИВ1+ 40СЛИВ2+ 30ПЛОМ1+ 30ПЛОМ2
МАСЛО= 86СЛИВ1+110СЛИВ2+150ПЛОМ1+ 52ПЛОМ2
САХАР =160СЛИВ1+ 92СЛИВ2+158ПЛОМ1+128ПЛОМ2
МОЛСГ=                                 50ПЛОМ2
МОЛСГО=          158СЛИВ2+ 30ПЛОМ1+ 50ПЛОМ2
ОБОР   =4,5СЛИВ1 +4,5СЛИВ2+4,5ПЛОМ1 +4,5ПЛОМ2
```

Используя последнюю систему уравнений, составляем матрицу исходных данных задачи (табл. 1.58).

Таблица 1.58

Строчные переменные	Столбцовые переменные				Нижняя граница	Верхняя граница
	СЛИВ1	СЛИВ2	ПЛОМ1	ПЛОМ2		
ПРИБ	315	278	573	370	—	—
МОЛН	550	—	620	—	0	64 100
МОЛС	40	30	20	20	0	4 800
МОЛСО	30	40	30	30	0	5 200
МАСЛО	86	110	150	52	0	22 360
САХАР	160	92	158	128	0	26 240
МОЛСГ	—	—	—	50	0	800
МОЛСГО	—	158	30	50	0	7 910
ОБОР	4,5	4,5	4,5	4,5	0	720
Нижняя граница	—	40	—	—	—	—
Верхняя граница	—	—	120	—	—	—

Используя табл. 1.58, исходные данные задачи записываем на бланке для их последующей перфорации (рис. 1.19).

Следующим шагом является построение управляющей программы решения данной задачи. Эта программа приведена на рис. 1.20 и, как видно из этого рисунка, отличается от программы решения задачи линейного программирования (см. рис. 1.13) тем, что последняя содержит оператор RANGE, включение которого необходимо для получения отчета о послеоптимизационном анализе решения задачи.

После этого производим решение задачи на ЭВМ. Результаты решения приведены в табл. 1.59 и 1.60.

Приведенный в табл. 1.59 отчет о решении задачи состоит из двух частей: СЕКЦИИ 1 — СТРОКИ, в которой содержится информация о строчных переменных, а СЕКЦИИ 2 — СТОЛБЦЫ, содержащей информацию о столбцовых переменных. Структура этих отчетов подробно рассмотрена в § 1.5.

Из табл. 1.59 следует, что оптимальным планом производства мороженого молочным комбинатом является такой план, согласно которому будет изготовлено сливочного мороженого I и II видов соответственно 64,945 и 40,0 т, а пломбира I и II видов — 45,774 и 4,335 т. При этом общая прибыль молочного комбината от реализации указанного количества мороженого составляет 59410,127 руб. Отметим, что несовпадение величины прибыли, приведенной в табл. 1.59, определяется округлением полученных значений переменных. Это округление с точностью до тысячных

Таблица 1.59

СЕКЦИЯ 1 — СТРОКИ

Номер	Строка	Тип	Решение	Дополнительная переменная	Нижняя граница	Верхняя граница	Оценка строки
1	ПРИБ	BS	59410.55882	59410.55882	Нет	Нет	1.00000
2	МОЛН	UL	64100.00000	.	Нет	64100.00000	0.56471
3	МОЛС	UL	4800.00000	.	Нет	4800.00000	0.11029
4	МОЛСО	BS	5051.64706	148.35294	Нет	5200.00000	.
5	МАСЛО	BS	17076.89020	5283.10980	Нет	22360.00000	.
6	САХАР	BS	21858.50588	4381.49412	Нет	26240.00000	.
7	МОЛСГ	BS	216.76471	583.23529	Нет	800.00000	.
8	МОЛСГО	UL	7910.00000	.	Нет	7910.00000	7.35588—
9	ОБОР	BS	697.74706	22.25294	Нет	720.00000	.

СЕКЦИЯ 2 — СТОЛБЦЫ

Номер	Столбец	Тип	Решение	Коэффициенты целевой функции	Нижняя граница	Верхняя граница	Оценка столбца
10	СЛИВ 1	BS	64.94510	315.00000	.	Нет	.
11	СЛИВ 2	LL	40.00000	278.00000	40.00000	Нет	887.538—
12	ПЛОМ 1	BS	45.77451	573.00000	.	120.00000	.
13	ПЛОМ 2	BS	4.33529	370.00000	.	Нет	.

мы будем использовать и при проведении послеоптимизационного анализа решения задачи.

Отчет о послеоптимизационном анализе решения задачи характеризуется информацией, содержащейся в табл. 1.60, которая включает четыре части: СЕКЦИЯ 1 — СТРОКИ НА ГРАНИЦЕ, СЕКЦИЯ 2 — СТОЛБЦЫ НА ГРАНИЦЕ, СЕКЦИЯ 3 — СТРОКИ НА ПРОМЕЖУТОЧНОМ УРОВНЕ и СЕКЦИЯ 4 — СТОЛБЦЫ НА ПРОМЕЖУТОЧНОМ УРОВНЕ. Структура этого отчета аналогична структуре отчета о послеоптимизационном анализе решения задачи, получаемом с использованием ППП ЛП2. Вместе с тем в отчете о послеоптимизационном анализе решения задачи, получаемом с использованием ППП ЛП АСУ, имеется дополнительный столбец «Ввод—вывод из базиса», содержащий имя переменной, которая определяет вектор, меняющий свое состояние (выйдет из базиса или войдет в базис), если значение анализируемой переменной выйдет за допустимые

```
1        10        20        30        40        50        60
NAME          ПЛАН
ROWS
 N  ПРИБ
 L  МОЛН
 L  МОЛС
 L  МОЛСО
 L  МАСЛО
 L  САХАР
 L  МОЛСГ
 L  МОЛСГО
 L  ОБОР
COLUMNS
    СЛИВ1     ПРИБ          315.0      МОЛН          550.0
    СЛИВ1     МОЛС           40.0      МОЛСО          30.0
    СЛИВ1     МАСЛО          86.0      САХАР         160.0
    СЛИВ1     ОБОР            4.5
    СЛИВ2     ПРИБ          278.0
    СЛИВ2     МОЛС           30.0      МОЛСО          40.0
    СЛИВ2     МАСЛО         110.0      САХАР          92.0
    СЛИВ2     МОЛСГО        158.0      ОБОР            4.5
    ПЛОМ1     ПРИБ          573.0      МОЛН          620.0
    ПЛОМ1     МОЛС           20.0      МОЛСО          30.0
    ПЛОМ1     МАСЛО         150.0      САХАР         158.0
    ПЛОМ1     МОЛСГО         30.0      ОБОР            4.5
    ПЛОМ2     ПРИБ          370.0      МОЛС           20.0
    ПЛОМ2     МОЛСО          30.0      МАСЛО          52.0
    ПЛОМ2     САХАР         128.0      МОЛСГ          50.0
    ПЛОМ2     МОЛСГО         50.0      ОБОР            4.5
RHS
    ССЧ       МОЛН        64100.0      МОЛС         4800.0
    ССЧ       МОЛСО        5200.0      МАСЛО       22360.0
    ССЧ       САХАР       26240.0      МОЛСГ         800.0
    ССЧ       МОЛСГО       7910.0      ОБОР          720.0
BOUNDS
 UP GR        ПЛОМ1         120.0
 LO GR        СЛИВ2          40.0
ENDATA
/*
```

Рис. 1.19

пределы. При этом в последней графе табл. 1.60 указывается, на какой уровень перейдет переменная, если определяемый ею вектор будет введен или выведен из базиса.

С учетом сказанного выше проведен послеоптимизационный анализ полученного решения нашей задачи. Рассмотрим, например, вторую строку секции 1. Данные этой строки характеризуют использование сухого молока. В третьей графе этой строки ука-

Таблица 1.60

СЕКЦИЯ 1 — СТРОКИ НА ГРАНИЦЕ

Номер	Строка	Тип	Решение	Дополнительная переменная	Нижняя (верхняя) граница	Нижнее (верхнее) значение	Оценка при единичном увеличении (уменьшении)	Верхнее (нижнее) значение коэффициента целевой функции	Ввод — вывод из базиса	Тип
2	МОЛН	UL	64099.99156	.	Нет	54184.99206	0.56471—		МОЛСГ	UL
					64099.99156	67784.99078	0.56471		ПЛОМ2	LL
3	МОЛС	UL	4799.99908	.	Нет	4531.99914	0.11029—		ПЛОМ2	LL
					4799.99908	5052.19902	0.11029		МОЛСО	UL
8	МОЛСГО	UL	7909.99761	.	Нет	7589.56294	7.35588—		ПЛОМ2	LL
					7909.99761	8316.77167	7.35588		ОБОР	UL

СЕКЦИЯ 2 — СТОЛБЦЫ НА ГРАНИЦЕ

Номер	Столбец	Тип	Решение	Коэффициенты целевой функции	Нижняя (верхняя) граница	Нижнее (верхнее) значение	Оценка при единичном увеличении (уменьшении)	Верхнее (нижнее) значение коэффициента целевой функции	Ввод — вывод из базиса	Тип
11	СЛИВ2	LL	40.00000	278.00000	40.00000	36.72297	887.53811	Минус бесконечность	ОБОР	UL
					Нет	41.65283	887.53811—	1165.53811	ПЛОМ2	LL

СЕКЦИЯ 3 — СТРОКИ НА ПРОМЕЖУТОЧНОМ УРОВНЕ

Номер	Строка	Тип	Решение	Дополнительная переменная	Нижняя (верхняя) граница	Нижнее (верхнее) значение	Оценка при единичном увеличении (уменьшении)	Верхнее (нижнее) значение коэффициента целевой функции	Ввод — вывод из базиса	Тип
4	МОЛСО	BS	5051.64625	148.35292	Нет	4893.99925	0.18750		МОЛС	UL
					5199.99917	5051.64625	Минус бесконечность		Нет	
5	МАСЛО	BS	17076.88936	5283.10733	Нет	15101.66615	2.83465—		МОЛН	UL
					22359.99669	17234.79910	0.18719—		МОЛС	UL
6	САХАР	BS	21858.50443	4381.49268	Нет	21141.99879	0.04125—		МОЛС	UL
					26239.99710	21858.50443	Минус бесконечность		Нет	
					Нет	·			МОЛС	UL
7	МОЛСГ	BS	216.76470	583.23524	799.99995	1589.99813	0.13636—		МОЛН	UL
							9.60000—			
9	ОБОР	BS	697.74706	22.25294	Нет	674.10001	1.25000—		МОЛС	UL
					720.00000	697.74706	Минус бесконечность		Нет	

СЕКЦИЯ 4 — СТОЛБЦЫ НА ПРОМЕЖУТОЧНОМ УРОВНЕ

Номер	Столбец	Тип	Решение	Коэффициенты целевой функции	Нижняя (верхняя) граница	Нижнее (верхнее) значение	Оценка при единичном увеличении (уменьшении)	Верхнее (нижнее) значение коэффициента целевой функции	Ввод — вывод из базиса	Тип
10	СЛИВ1	BS	64.94508	315.00000	.	56.79999	3.62903—	311.37097	МОЛС	UL
					Нет	68.84056	605.08048—	920.08048	МОЛСГО	UL
12	ПЛОМ1	BS	45.77446	573.00044	.	26.33332	288.00027	285.00016	МОЛН	UL
					119.9991	52.99994	4.09091—	577.09135	МОЛС	UL
13	ПЛОМ2	BS	4.33529	370.00024	.	30.32221—	6.81819—	363.18206	МОЛС	UL
					Нет	15.99999	480.00030—	850.00054	МОЛН	UL

```
1        10        20        30        40        50        60
         PROGRAM
         INITIALZ
         MOVE(XDATA,'ПЛАН')
         MOVE(XPBNAME,'PRIM')
         CONVERT('SUMMARY')
         BCDOUT
         SETUP('MAX','BOUND' ,'GR')
         MOVE(XOBJ,'ПРИБ')
         MOVE(XRHS,'ССЧ')
         XGUARDPF=1
         PRIMAL
         SOLUTION
         RANGE
         EXIT
         PEND
```

Рис. 1.20

зан тип переменной UL, т. е. оговорено, что она приняла свое верхнее предельное значение. В последующей четвертой графе указано это значение, а из пятой графы видно, что количество неиспользованного сухого молока при оптимальном плане производства мороженого равно нулю. Из следующей графы видно, что нижняя граница использования сухого молока не определена (в табл. 1.60 это отмечено словом «Нет», а верхняя граница равна 4799,999 т). Данное число совпадает со значением переменной МОЛС в решении задачи, поскольку эта переменная приняла значение на своей верхней границе. Если верхняя граница будет увеличиваться, то базис, определяющий исходный оптимальный план, будет оставаться без изменения до тех пор, пока значение переменной не достигнет верхнего значения, равного 5052,199 т. Аналогично, уменьшение нижней границы переменной МОЛС без изменения базиса, определяющего оптимальный план, возможно до нижнего значения, равного 4531,999 т. При дальнейшем изменении нижней или верхней границы переменной МОЛС произойдет изменение базиса за счет «Ввода—вывода из базиса» вектора, определяемого переменной, стоящей в предпоследней графе табл. 1.60, а именно переменной ПЛОМ2 или МОЛСО. При этом переменная ПЛОМ2 перейдет на уровень LL, а переменная МОЛСО — на уровень UL.

Далее, увеличение количества сухого молока на 1 кг, т. е. увеличение значения переменной МОЛС на единицу, приведет к увеличению значения целевой функции, т. е. прибыли от реализации мороженого, на 0,11 руб. Точно так же уменьшение значения переменной МОЛС на единицу приведет к уменьшению значения целевой функции на 0,11 ед. Это справедливо при изменении переменной МОЛС от 4531,999 до 5052,199.

Аналогично можно провести анализ использования и других ресурсов, которые полностью или частично необходимы для реализации оптимального плана изготовления мороженого, т. е. аналогично можно провести анализ строк СЕКЦИИ 3 табл. 1.60.

Остановимся теперь на послеоптимизационном анализе производства продукции. Рассмотрим, например, анализ переменной ПЛОМ1, т. е. рассмотрим 12-й столбец, находящийся в СЕКЦИИ 4 табл. 1.60. Из этого столбца видно, что переменная ПЛОМ1 приняла свое промежуточное значение (тип BS) в интервале ее изменения от 0 до 119,999. Это значение равно 45,774, т. е. оптимальным является выпуск 45,774 т пломбира I вида, цена 1 т которого равна 573,000 руб. Если в принудительном порядке увеличить производство пломбира I вида на 1 т, то это приведет к уменьшению общей прибыли молочного комбината от реализации мороженого на 4,090 руб. Каждое уменьшение в принудительном порядке производства пломбира I вида на 1 т приводит к уменьшению прибыли молочного комбината на 288,0 руб. Таким образом, всякое принудительное изменение значения переменной ПЛОМ1 относительно значения, принятого в оптимальном плане производства продукции, приводит к уменьшению значения целевой функции. Это изменение значения целевой функции является более существенным при уменьшении производства пломбира I вида на 1 т, чем при увеличении его производства на 1 т. При этом указанные изменения целевой функции задачи имеют место до тех пор, пока выпуск пломбира I вида не будет увеличен до 52,999 т или уменьшен до 26,333 т. Если производство пломбира I вида не будет заключено в указанных границах, то нарушатся как указанные оценки изменения значения целевой функции, так и структура оптимального плана.

Далее, оптимальный план производства мороженого не изменится до тех пор, пока цена 1 т пломбира I вида не станет меньше 285,0 руб. и не больше 577,091 руб. Иными словами, если цена 1 т пломбира I вида будет выше 577,091 руб., то оптимальным станет его изготовление в количестве 52,999 т. Если же цена 1 т пломбира станет меньше чем 285,0 руб., то оптимальная величина его производства будет равна 26,333 т.

Из изложенного выше видно, что использование ППП ЛП АСУ позволяет довольно полно проводить послеоптимизационный анализ полученного решения задачи линейного программирования. Это очень важно для практики принятия управленческих решений, поскольку для каждой конкретной ситуации позволяет принять наиболее приемлемое управленческое решение.

1.120—1.123. Используя пакеты прикладных программ, проведите послеоптимизационный анализ решения задач 1.74—1.76.

ГЛАВА 2

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 2.1. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

1. Математическая постановка задачи. Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, ..., A_m$ в n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$. При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза. Обозначим через c_{ij} тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i — запасы груза в i-м пункте отправления, через b_j — потребности в грузе в j-м пункте назначения, а через x_{ij} — количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \ (j=\overline{1, n}), \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \ (i=\overline{1, m}), \tag{3}$$

$$x_{ij}\geqslant 0 \ (i=\overline{1, m};\ j=\overline{1, n}). \tag{4}$$

Поскольку переменные x_{ij} $(i=\overline{1, m};\ j=\overline{1, n})$ удовлетворяют системам линейных уравнений (2) и (3) и условию неотрицательности (4), обеспечиваются доставка необходимого количества груза в каждый из пунктов назначения, вывоз имеющегося груза из всех пунктов отправления, а также исключаются обратные перевозки.

Определение 2.1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (2) и (3), определяемое матрицей $X=(x_{ij})$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, называется *планом* транспортной задачи.

О п р е д е л е н и е 2.2. План $X^*=(x_{ij}^*)$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, при котором функция (1) принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом* транспортной задачи.

Обычно исходные данные транспортной задачи записывают в виде табл. 2.1.

Т а б л и ц а 2.1

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	...	B_j	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
...	...	...	...	...	...	...
A_i	c_{i1} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	...	b_j	...	b_n	

Очевидно, общее наличие груза у поставщиков равно $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность в грузе в пунктах назначения равна $\sum_{j=1}^{n} b_j$ единиц. Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{5}$$

то модель такой транспортной задачи называется *закрытой*. Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется *открытой*.

Теорема 2.1. *Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, т. е. чтобы выполнялось равенство* (5).

В случае превышения запаса над потребностью, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{in+1} = 0$ $(i=\overline{1, m})$. Полученная задача является транспортной задачей, для которой выполняется равенство (5).

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный $(m+1)$-й пункт отправления с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и тарифы полагаются равными нулю: $c_{m+1j} = 0$ $(j=\overline{1, n})$. Этим задача сводится к обычной транспортной задаче, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи. В дальнейшем будем рассматривать закрытую модель транспортной задачи. Если же модель конкретной задачи является открытой, то, исходя из сказанного выше, перепишем таблицу условий задачи так, чтобы выполнялось равенство (5).

Число переменных x_{ij} в транспортной задаче с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно nm, а число уравнений в системах (2) и (3) равно $n+m$. Так как мы предполагаем, что выполняется условие (5), то число линейно независимых уравнений равно $n+m-1$. Следовательно, опорный план транспортной задачи может иметь не более $n+m-1$ отличных от нуля неизвестных.

Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности $n+m-1$, то план является невырожденным, а если меньше — то вырожденным.

Для определения опорного плана существует несколько методов. Три из них — метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод аппроксимации Фогеля — рассматриваются ниже.

Как и для всякой задачи линейного программирования, оптимальный план транспортной задачи является и опорным планом.

Для определения оптимального плана транспортной задачи можно использовать изложенные выше методы. Однако ввиду исключительной практической важности этой задачи и специфики ее ограничений [каждая неизвестная входит лишь в два уравнения систем (2) и (3) и коэффициенты при неизвестных равны единице] для определения оптимального плана транспортной задачи разработаны специальные методы. Два из них — метод потенциалов и метод дифференциальных рент — рассмотрены ниже.

2.1. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны 120, 50, 190 и 110 ед. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны 160, 140, 170 ед. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок являются известными величинами и задаются матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Р е ш е н и е. Обозначим через x_{ij} количество единиц сырья, перевозимого из i-го пункта его получения на j-е предприятие. Тогда условия доставки и вывоза необходимого и имеющегося сырья обеспечиваются за счет выполнения следующих равенств:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=160, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=140, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=170, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=120, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=\ \ 50, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=190, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=110. \end{cases} \qquad (6)$$

При данном плане $X=(x_{ij})$ $(i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4})$ перевозок общая стоимость перевозок составит

$$F=7x_{11}+8x_{12}+x_{13}+2x_{14}+4x_{21}+5x_{22}+9x_{23}+8x_{24}+9x_{31}+ \\ +2x_{32}+3x_{33}+6x_{34}. \qquad (7)$$

Таким образом, математическая постановка данной транспортной задачи состоит в нахождении такого неотрицательного решения системы линейных уравнений (6), при котором целевая функция (7) принимает минимальное значение.

Составьте математические модели транспортных задач 2.2—2.7.

2.2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	7	9	200
A_2	5	1	8	12	270
A_3	11	6	4	3	130
Потребности	120	80	240	160	600

2.3

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	2	3	12	180
A_2	3	4	8	7	160
A_3	4	5	6	12	140
A_4	7	1	5	6	220
Потребности	150	250	120	180	700

2.4

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	a_3
A_4	c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	a_4
A_5	c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	a_5
Потребности	$в_1$	$в_2$	$в_3$	$в_4$	

2.5. На трех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 180, 60 и 80 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 120, 40, 60 и 80 ед. груза. Тарифы перевозок единицы груза из каждого из складов во все магазины задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

2.6. Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 50, 30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенные в разных местах. Их потребности соответственно равны 30, 30, 10 и 20 ед. Тарифы перевозок единицы продукции от каждого из филиалов соответствующим потребителям задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции к ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

2.7. Три предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 180, 350 и 20 ед. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количествах, соответственно равных 110, 90, 120, 80 и 150 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором общие затраты являются минимальными.

2. Определение опорного плана транспортной задачи. Как и при решении задачи линейного программирования симплексным методом, определение оптимального плана транспортной задачи начинают с нахождения какого-нибудь ее опорного плана. Этот план, как уже отмечалось выше, находят методом северо-западного угла, методом минимального элемента или методом аппроксимации Фогеля. Сущность этих методов состоит в том, что опорный план находят последовательно за $n+m-1$ шагов, на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одну клетку, которую называют *занятой*. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (из того, в строке которого находится заполняемая клетка).

В первом случае временно исключают из рассмотрения столбец, содержащий заполненную на данном шаге клетку, и рассматривают задачу, таблица условий которой содержит на один столбец меньше, чем было перед этим шагом, но то же количество строк и соответственно измененные запасы груза в одном из пунктов отправления (в том, за счет запаса которого была удовлетворена потребность в грузе пункта назначения на данном шаге). Во втором случае временно исключают из рассмотрения строку, содержащую заполненную клетку, и считают, что таблица условий имеет на одну строку меньше при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности в грузе в пункте назначения, в столбце которого находится заполняемая клетка.

После того как проделаны $m+n-2$ описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом останется свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребностям оставшегося пункта назначения. Заполнив эту клетку, тем самым делают $(n+m-1)$-й шаг и получают искомый опорный план. Следует заметить, что на некотором шаге (но не на последнем) может оказаться, что потребности очередного пункта назначения равны запасам очередного пункта отправления. В этом случае также временно исключают из рассмотрения либо столбец, либо строку (что-нибудь одно). Таким образом, либо запасы соответствующего пункта отправления, либо потребности данного пункта назначения считают равными нулю. Этот нуль записывают в очередную заполняемую клетку. Указанные выше условия гарантируют получение $n+m-1$ занятых клеток, в которых стоят компоненты опорного плана, что является исходным условием для проверки последнего на оптимальность и нахождения оптимального плана.

Метод северо-западного угла. При нахождении опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} («северо-западный угол») и заканчивается клеткой для неизвестного x_{mn}, т. е. идет как бы по диагонали таблицы.

2.8. На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 140, 180 и 160 ед. Этот груз требуется перевезти в пять пунктов назначения B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соответственно в количествах 60, 70, 120, 130 и 100 ед. Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов отправления в соответствующие пункты назначения указаны в следующей таблице:

Таблица 2.2

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Найти план перевозок данной транспортной задачи методом северо-западного угла.

Р е ш е н и е. Здесь число пунктов отправления $m=3$, а число пунктов назначения $n=5$. Следовательно, опорный план задачи определяется числами, стоящими в $5+3-1=7$ заполненных клетках.

Заполнение таблицы начнем с клетки для неизвестного x_{11}, т. е. попытаемся удовлетворить потребности первого пункта назначения за счет запасов первого пункта отправления. Так как запасы пункта A_1 больше, чем потребности пункта B_1, то полагаем $x_{11}=60$, записываем это значение в соответствующей клетке табл. 2.3 и временно исключаем из рассмотрения столбец B_1, считая при этом запасы пункта A_1 равными 80.

Т а б л и ц а 2.3

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3 70	4 10	2	4	140
A_2	8	4	1 110	4 70	1	180
A_3	9	7	3	7 60	2 100	160
Потребности	60	70	120	130	100	480

Рассмотрим первые из оставшихся пунктов отправления A_1 и назначения B_2. Запасы пункта A_1 больше потребностей пункта B_2. Положим $x_{12}=70$, запишем это значение в соответствующей клетке табл. 2.3 и временно исключим из рассмотрения столбец B_2. В пункте A_1 запасы считаем равными 10 ед. Снова рассмотрим первые из оставшихся пунктов отправления A_1 и назначения B_3. Потребности пункта B_3 больше оставшихся запасов пункта A_1. Положим $x_{13}=10$ и исключим из рассмотрения строку A_1. Значение $x_{13}=10$ запишем в соответствующую клетку табл. 2.3 и считаем потребности пункта B_3 равными 110 ед.

Теперь перейдем к заполнению клетки для неизвестного x_{23} и т. д. Через шесть шагов остается один пункт отправления A_3 с запасом груза 100 ед. и один пункт назначения B_5 с потребностью 100 ед. Соответственно имеется одна свободная клетка, которую и заполняем, полагая $x_{35}=100$ (табл. 2.3). В результате получаем опорный план

$$X=\begin{pmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{pmatrix}$$

Согласно данному плану перевозок, общая стоимость перевозок всего груза составляет

$$S=2\cdot60+3\cdot70+4\cdot10+1\cdot110+4\cdot70+7\cdot60+2\cdot100=1380.$$

Метод минимального элемента. В методе северо-западного угла на каждом шаге потребности первого из оставшихся пунктов назначения удовлетворялись за счет запасов первого из оставшихся пунктов отправления. Очевидно, выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на тарифы перевозок, а именно: на каждом шаге следует выбирать какую-нибудь клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то следует выбрать любую из них), и рассмотреть пункты назначения и отправления, соответствующие выбранной клетке. Сущность метода минимального элемента и состоит в выборе клетки с минимальным тарифом. Следует отметить, что этот метод, как правило, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем общая стоимость перевозок при плане, найденном для данной задачи с помощью метода северо-западного угла. Поэтому наиболее целесообразно опорный план транспортной задачи находить методом минимального элемента.

2.9. Найти опорный план транспортной задачи 2.1 методом минимального элемента.

Решение. Исходные данные задачи запишем в виде табл. 2.4. Минимальный тариф, равный 1, находится в клетке для переменной x_{13}. Положим $x_{13}=160$, запишем это значение в соответствующую клетку табл. 2.4 и исключим временно из рассмотрения строку A_1. Потребности пункта назначения B_3 считаем равными 30 ед.

В оставшейся части таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и четырьмя столбцами B_1, B_2, B_3 и B_4 клетка с наименьшим значением тарифа c_{ij} находится на пересечении строки A_3 и столбца B_2, где $c_{32}=2$. Положим $x_{32}=50$ и внесем это значение в соответствующую клетку табл. 2.4.

Временно исключим из рассмотрения столбец B_2 и будем считать запасы пункта A_3 равными 120 ед. После этого рассмотрим оставшуюся часть таблицы с двумя строками A_2 и A_3 и тремя столбцами B_1, B_3 и B_4. В ней минимальный тариф c_{ij} находится в клетке на пересечении строки A_3 и столбца B_3 и равен 3. Запол-

Таблица 2.4

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	3 30	6 90	170
Потребности	120	50	190	110	470

ним описанным выше способом эту клетку и аналогично заполним (в определенной последовательности) клетки, находящиеся на пересечении строки A_2 и столбца B_1, строки A_3 и столбца B_4, строки A_2 и столбца B_4. В результате получим опорный план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}.$$

При данном плане перевозок общая стоимость перевозок составляет

$$S = 1 \cdot 160 + 4 \cdot 120 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 30 + 6 \cdot 90 = 1530.$$

Метод аппроксимации Фогеля. При определении оптимального плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

2.10. Используя метод аппроксимации Фогеля, найти опорный план транспортной задачи 2.1, исходные данные которой

Таблица 2.5

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Потребности	120	50	190	110	470

приведены в табл. 2.5 (опорный план этой задачи ранее был найден методом минимального элемента).

Решение. Для каждой строки и столбца таблицы условий найдем разности между двумя минимальными тарифами, записанными в данной строке или столбце, и поместим их в соответствующем дополнительном столбце или дополнительной строке табл. 2.6. Так, в строке A_2 минимальный тариф равен 4, а следующий за ним равен 5, разность между ними $5-4=1$. Точно так же разность между минимальными элементами в столбце B_4 равна $6-2=4$. Вычислив все эти разности, видим, что наибольшая из них соответствует столбцу B_4. В этом столбце минимальный тариф записан в клетке, находящейся на пересечении строки A_1 и столбца B_4. Таким образом, эту клетку следует заполнить. Заполнив ее, тем самым мы удовлетворим потребности пункта B_4. Поэтому исключим из рассмотрения столбец B_4 и будем считать запасы пункта A_1 равными $160-110=50$ ед. После этого определим следующую клетку для заполнения. Снова найдем разности между оставшимися двумя минимальными тарифами в каждой из строк и столбцов и запишем их во втором дополнительном столбце и во второй дополнительной строке табл. 2.6. Как видно из этой таблицы, наибольшая указанная разность соответствует строке A_1. Минимальный тариф в этой строке записан в клетке, которая находится на пересечении ее с столбцом B_3. Следовательно, заполняем эту клетку. Поместив в нее число 50, тем самым предполагаем, что запасы в пункте A_1 полностью исчерпаны, а потребности в пункте B_3 стали равными $190-50=140$ ед. Исключим из рассмотрения строку A_1 и определим новую клетку для заполнения. Продолжая итерационный процесс, последовательно заполняем клетки, находящиеся на пересечении строки A_3 и столбца B_3, строки A_3 и столбца B_2, строки A_2 и столбца B_1,

Таблица 2.6

Пункты отправления	Пункты назначения B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы	Разности по строкам					
A_1	7	8	1 50	2 110	160	1	6	—	—	—	—
A_2	4 120	5 20	9	8	140	1	1	1	1	1	0
A_3	9	2 30	3 140	6	170	1	1	1	7	—	—
Потребности	120	50	190	110	470						
Разности по столбцам	3	3	2	4							
	3	3	2	—							
	5	3	6	—							
	5	3	—	—							
	—	0	—	—							
	—	0	—	—							

строки A_2 и столбца B_2. В результате получим опорный план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

При этом плане общая стоимость перевозок такова:

$$S = 1 \cdot 50 + 2 \cdot 110 + 4 \cdot 120 + 5 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 140 = 1330.$$

Как правило, применение метода апроксимации Фогеля позволяет получить либо опорный план, близкий к оптимальному, либо сам оптимальный план. Кстати, найденный выше опорный план транспортной задачи является и оптимальным.

Используя методы северо-западного угла, потенциалов и аппроксимации Фогеля, найдите опорные планы транспортных задач 2.11—2.13.

2.11

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	5	2	8	6	115
A_2	3	1	9	7	3	175
A_3	9	6	7	2	1	130
Потребности	70	220	40	30	60	420

2.12

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	3	7	280
A_2	7	6	2	9	175
A_3	1	3	9	8	125
A_4	2	4	5	6	130
Потребности	90	180	310	130	710

2.13

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	4	7	3	510
A_2	5	6	8	9	90
A_3	7	2	4	8	120
Потребности	270	140	200	110	720

2.14—2.16. Найдите опорные планы транспортных задач 2.5—2.7 методами северо-западного угла, минимального элемента и аппроксимации Фогеля и сравните их между собой.

3. Определение оптимального плана транспортной задачи. Для определения оптимального плана транспортной задачи разработано несколько методов. Однако наиболее часто используются метод потенциалов и метод дифференциальных рент.

Метод потенциалов. Общий принцип определения оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов аналогичен принципу решения задачи линейного программирования симплексным методом, а именно: сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Для определения опорного плана транспортной задачи будем пользоваться одним из методов, рассмотренных в предыдущем параграфе. Эти методы гарантируют получение занятых в исходном плане $n+m-1$ клеток, причем в некоторых из них могут стоять нули. Полученный план следует проверить на оптимальность.

Теорема 2.2. *Если для некоторого опорного плана* $X^*=(x_{ij}^*)$ $(i=\overline{1,m}\ j=\overline{1,n})$ *транспортной задачи существуют такие числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, *что*

$$\beta_j-\alpha_i=c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij}>0 \tag{8}$$

и

$$\beta_j-\alpha_i\leqslant c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij}=0 \tag{9}$$

для всех $i=\overline{1,m}$ *и* $j=\overline{1,n}$, *то* $X^*=(x_{ij}^*)$ — *оптимальный план транспортной задачи.*

Определение 2.3. Числа α_i и β_j $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ называются *потенциалами* соответственно пунктов назначения и пунктов потребления.

Сформулированная теорема позволяет построить алгоритм нахождения решения транспортной задачи. Он состоит в следующем. Пусть одним из рассмотренных выше методов найден опорный план транспортной задачи. Для каждого из пунктов отправления и назначения определяют потенциалы α_i и β_j $(i=\overline{1,m};$ $j=\overline{1,n})$. Эти числа находят из системы уравнений

$$\beta_j-\alpha_i=c_{ij}, \tag{10}$$

где c_{ij} — тарифы, стоящие в заполненных клетках таблицы условий транспортной задачи.

Так как число заполненных клеток равно $n+m-1$, то система (10) с $n+m$ неизвестными содержит $n+m-1$ уравнений. Поскольку число неизвестных превышает на единицу число уравнений, одно из неизвестных можно положить равным произвольному числу, например $\alpha_1=0$, и найти последовательно из уравнений (10) значения остальных неизвестных. После того как все потенциалы найдены, для каждой из свободных клеток определяют числа $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$.

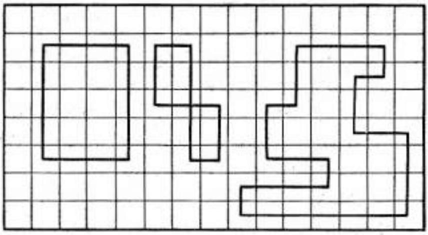


Рис. 2.1

Если среди чисел α_{ij} нет положительных, то найденный опорный план является оптимальным. Если же для некоторой свободной клетки $\alpha_{ij} > 0$, то исходный опорный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану. Для этого рассматривают все свободные клетки, для которых $\alpha_{ij} > 0$, и среди данных чисел выбирают максимальное. Клетку, которой это число соответствует, следует заполнить.

Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы поставок, записанных в ряде других занятых клеток и связанных с заполненной так называемым циклом.

Определение 2.4. *Циклом* в таблице условий транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья — вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое — в столбце.

Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами. Примеры некоторых циклов показаны на рис. 2.1.

При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл. После того как для выбранной свободной клетки он построен, следует перейти к новому опорному плану. Для этого необходимо переместить грузы в пределах клеток, связанных с данной свободной клеткой. Это перемещение производят по следующим правилам:

1) каждой из клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, приписывают определенный знак, причем свободной клетке — знак плюс, а всем остальным клеткам — поочередно знаки минус и плюс (будем называть эти клетки минусовыми и плюсовыми);

2) в данную свободную клетку переносят меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. Одновременно это число прибавляют к соответствующим числам, стоящим в плюсовых клетках, и вычитают из чисел, стоящих в минусовых клетках. Клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а мину-

совая клетка, в которой стояло минимальное из чисел x_{ij}, считается свободной.

В результате указанных выше перемещений грузов в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, определяют новый опорный план транспортной задачи.

Описанный выше переход от одного опорного плана транспортной задачи к другому ее опорному плану называется *сдвигом по циклу пересчета.*

Следует отметить, что при сдвиге по циклу пересчета число занятых клеток остается неизменным, а именно остается равным $n+m-1$. При этом если в минусовых клетках имеется два (или более) одинаковых числа x_{ij}, то освобождают лишь одну из таких клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми поставками).

Полученный новый опорный план транспортной задачи проверяют на оптимальность. Для этого определяют потенциалы пунктов отправления и назначения и находят числа $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$ для всех свободных клеток. Если среди этих чисел не окажется положительных, то это свидетельствует о получении оптимального плана. Если же положительные числа имеются, то следует перейти к новому опорному плану. В результате итерационного процесса после конечного числа шагов получают оптимальный план задачи.

Из изложенного выше следует, что процесс нахождения решения транспортной задачи методом потенциалов включает следующие этапы:

1. Находят опорный план. При этом число заполненных клеток должно быть равным $n+m-1$.

2. Находят потенциалы β_j и α_i соответственно пунктов назначения и отправления.

3. Для каждой свободной клетки определяют число α_{ij}. Если среди чисел α_{ij} нет положительных, то получен оптимальный план транспортной задачи; если же они имеются, то переходят к новому опорному плану.

4. Среди положительных чисел α_{ij} выбирают максимальное, строят для свободной клетки, которой оно соответствует, цикл пересчета и производят сдвиг по циклу пересчета.

5. Полученный опорный план проверяют на оптимальность, т. е. снова повторят все действия начиная с этапа 2.

В заключение отметим, что при определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать в этом случае зацикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить сколь угодно малым положительным числом ε и решать задачу как невырожденную. В оптимальном плане такой задачи необходимо считать ε равным нулю.

2.17. Для транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 2.7, найти оптимальный план.

Таблица 2.7

Пункты отправления	Пункты назначения B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	1 30	2 20	4	1	50
A_2	2	3 10	1 10	5 10	30
A_3	3	2	4	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Решение. Сначала, используя метод северо-западного угла, находим опорный план задачи. Этот план записан в табл. 2.7.

Найденный опорный план проверяем на оптимальность. В связи с этим находим потенциалы пунктов отправления и назначения. Для определения потенциалов получаем систему

$$\beta_1-\alpha_1=1,\qquad \beta_2-\alpha_1=2,\qquad \beta_2-\alpha_2=3,$$
$$\beta_3-\alpha_2=1,\qquad \beta_4-\alpha_2=5,\qquad \beta_4-\alpha_3=4,$$

содержащую шесть уравнений с семью неизвестными. Полагая $\alpha_1=0$, находим $\beta_1=1$, $\beta_2=2$, $\alpha_2=-1$, $\beta_3=0$, $\beta_4=4$, $\alpha_3=0$. Для каждой свободной клетки вычисляем число $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$:

$$\alpha_{13}=-4,\ \alpha_{14}=3,\ \alpha_{21}=\alpha_{32}=0,\ \alpha_{31}=-2,\ \alpha_{33}=-4.$$

Заключаем найденные числа в рамки и записываем их в каждую из свободных клеток табл. 2.8.

Так как среди чисел α_{ij} имеются положительные, то построенный план перевозок не является оптимальным и надо перейти к новому опорному плану. Наибольшим среди положительных чисел α_{ij} являются $\alpha_{14}=3$, поэтому для данной свободной клетки строим цикл пересчета (табл. 2.8) и производим сдвиг по этому циклу. Наименьшее из чисел в минусовых клетках равно 10. Клетка, в которой находится это число, становится свободной в новой табл. 2.9. Другие числа в табл. 2.9 получаются так: к

Таблица 2.8

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 — 20	4 $\boxed{-4}$	1 + $\boxed{3}$	50
A_2	2 $\boxed{0}$	3 + 10	1 10	5 — 10	30
A_3	3 $\boxed{-2}$	2 $\boxed{0}$	4 $\boxed{-4}$	4 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

числу 10, стоящему в плюсовой клетке табл. 2.8, добавим 10 и вычтем 10 из числа 20, находящегося в минусовой клетке табл. 2.8. Клетка на пересечении строки A_2 и столбца B_4 становится свободной.

После этих преобразований получаем новый опорный план (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 — 10	2 $\boxed{-2}$	1 + 10	50
A_2	2 $\boxed{0}$	3 20	1 10	5 $\boxed{-3}$	30
A_3	3 $\boxed{+1}$	2 + $\boxed{+3}$	4 $\boxed{-1}$	4 — 10	10
Потребности	30	30	10	20	90

Этот план проверяем на оптимальность. Снова находим потенциалы пунктов отправления и назначения. Для этого составляем следующую систему уравнений:

$$\beta_1-\alpha_1=1, \qquad \beta_2-\alpha_1=2, \qquad \beta_4-\alpha_1=1,$$
$$\beta_2-\alpha_2=3, \qquad \beta_3-\alpha_2=1, \qquad \beta_4-\alpha_3=4.$$

Полагаем $\alpha_1=0$, получаем $\beta_1=\beta_4=1$, $\beta_2=2$, $\beta_3=0$, $\alpha_3=-3$, $\alpha_2=-1$. Для каждой свободной клетки вычисляем число α_{ij}; имеем, $\alpha_{13}=-2$, $\alpha_{21}=0$, $\alpha_{24}=-3$, $\alpha_{31}=1$, $\alpha_{32}=3$, $\alpha_{33}=-1$.

Таким образом, видим, что данный план перевозок не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану (табл. 2.10).

Таблица 2.10

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1 30	2 0	4 $\boxed{-4}$	1 20	50
A_2	2 $\boxed{0}$	3 20	1 10	5 $\boxed{-3}$	30
A_3	3 $\boxed{-2}$	2 10	4 $\boxed{-4}$	4 $\boxed{-3}$	10
Потребности	30	30	10	20	90

Сравнивая разности $\beta_j-\alpha_i$ новых потенциалов, отвечающих свободным клеткам табл. 2.10, с соответствующими числами c_{ij}, видим, что указанные разности потенциалов для всех свободных клеток не превосходят соответствующих чисел c_{ij}. Следовательно, полученный план

$$X^*=\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является оптимальным. При данном плане стоимость перевозок

$$S=1\cdot 30+2\cdot 0+1\cdot 20+3\cdot 20+1\cdot 10+2\cdot 10=140.$$

2.18. Для строительства трех дорог используется гравий из четырех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 120, 280 и 160 усл. ед. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 130, 220, 60 и 70 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. гравия из каждого из карьеров к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

Решение. Исходные данные задачи сведем в таблицу (табл. 2.11).

Таблица 2.11

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	280
A_3	3	8	1	2	160
Потребности	130	220	60	70	

Как видно из табл. 2.11, запасы гравия в карьерах $(120+280+160=560)$ больше, чем потребности в нем $(130+220+60+70=480)$ на строящихся дорогах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительный пункт назначения B_5 с потребностями, равными $560-480=80$ усл. ед. Тарифы перевозки единицы гравия из всех карьеров в пункт B_5 полагаем равными нулю. В результате получаем закрытую модель транспортной задачи, план перевозок которой определяем методом минимального элемента (табл. 2.12).

Оптимальный план находим методом потенциалов (табл. 2.13).

Как видно из табл. 2.13, исходная задача имеет оптимальный план

$$X^*=\begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 60 & 70 \end{pmatrix}$$

При этом плане остается неиспользованным 60 усл. ед. гравия во втором карьере и 20 усл. ед. в третьем карьере, а общая стоимость перевозок составляет

$$S=1\cdot120+3\cdot10+2\cdot220+1\cdot60+2\cdot70=790.$$

Таблица 2.12

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 40	7	9	5	0 80	120
A_2	4 60	2 220	6	8	0	280
A_3	3 30	8	1 60	2 70	0	160
Потребности	130	220	60	70	80	560

Таблица 2.13

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 120	7	9	5	0	120
A_2	4	2 220	6	8	0 60	280
A_3	3 10	8	1 60	2 70	0 20	160
Потребности	130	220	60	70	80	560

Метод дифференциальных рент. Если при определении оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов сначала находился какой-нибудь ее опорный план, а затем он последовательно улучшался, то при нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза (так называемое *условно оптимальное рас-*

пределение) и на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок. Первоначальный вариант распределения груза определяют следующим образом. В каждом из столбцов таблицы данных транспортной задачи находят минимальный тариф. Найденные числа заключают в кружки, а клетки, в которых стоят указанные числа, заполняют. В них записывают максимально возможные числа. В результате получают некоторое распределение поставок груза в пункты назначения. Это распределение в общем случае не удовлетворяет ограничениям исходной транспортной задачи. Поэтому в результате последующих шагов следует постепенно сокращать нераспределенные поставки груза так, чтобы при этом общая стоимость перевозок оставалась минимальной. Для этого сначала определяют избыточные и недостаточные строки.

Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых полностью распределены, а потребности пунктов назначения, связанных с данными потребителями запланированными поставками, не удовлетворены, считаются недостаточными. Эти строки иногда называют также отрицательными. Строки, запасы которых исчерпаны не полностью, считаются избыточными. Иногда их называют также положительными.

После того как определены избыточные и недостаточные строки, для каждого из столбцов находят разности между числом в кружке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Если число в кружке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел находят наименьшее. Это число называется *промежуточной рентой*. После определения промежуточной ренты переходят к новой таблице. Эта таблица получается из предыдущей таблицы прибавлением к соответствующим тарифам, стоящим в отрицательных строках, промежуточной ренты. Остальные элементы остаются прежними. При этом все клетки новой таблицы считают свободными. После построения новой таблицы начинают заполнение ее клеток. Теперь уже число заполняемых клеток на одну больше, чем на предыдущем этапе. Эта дополнительная клетка находится в столбце, в котором была записана промежуточная рента. Все остальные клетки находятся по одной в каждом из столбцов и в них записаны наименьшие для данного столбца числа, заключенные в кружки. Заключены в кружки и два одинаковых числа, стоящих в столбце, в котором в предыдущей таблице была записана промежуточная рента.

Поскольку в новой таблице число заполняемых клеток больше, чем число столбцов, то при заполнении клеток следует пользоваться специальным правилом, которое состоит в следующем. Выбирают некоторый столбец (строку), в котором имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данный столбец (строку). После этого берут некоторую строку (столбец), в которой имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данную строку (столбец). Продолжая так, после конечного числа шагов заполняют все клетки, в которых помещены кружки с заключенными в них числами. Если к тому же удается распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получают оптимальный план транспортной задачи. Если же оптимальный план не получен, то переходят к новой таблице. Для этого находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту и на основе этого строят новую таблицу. При этом могут возникнуть некоторые затруднения при определении знака строки, когда ее нераспределенный остаток равен нулю. В этом случае строку считают положительной при условии, что вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой, расположена в положительной строке.

После конечного числа описанных выше итераций нераспределенный остаток становится равным нулю. В результате получают оптимальный план данной транспортной задачи.

Описанный выше метод решения транспортной задачи имеет более простую логическую схему расчетов, чем рассмотренный выше метод потенциалов. Поэтому в большинстве случаев для нахождения решения конкретных транспортных задач с использованием ЭВМ применяется метод дифференциальных рент.

2.19. Для транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 2.14, найти оптимальный план методом дифференциальных рент.

Таблица 2.14

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Потребности	110	90	120	80	150	550

Решение. Перейдем от табл. 2.14 к табл. 2.15, добавив один дополнительный столбец для указания избытка и недостатка по строкам и одну строку для записи соответствующих разностей.

Таблица 2.15

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы	Недостаток (−), избыток (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	7	12	④ 120	8	5	180	+60
A_2	① 110	⑧ 90	6	⑤ 80	③ 70	350	−80
A_3	6	13	8	7	4	20	+20
Потребности	110	90	120	80	150	550	
Разность	5	4	—	2	1		

В каждом из столбцов табл. 2.15 находим минимальные тарифы и обводим их кружками. Заполняем клетки, в которых стоят указанные числа. Для этого в каждую из клеток записываем максимально допустимое число. Например, в клетку, находящуюся на пересечении строки A_1 и столбца B_3, записываем число 120. В эту клетку нельзя поместить большее число, поскольку в таком случае были бы превышены потребности пункта назначения B_3.

В результате заполнения отмеченных выше клеток получен так называемый условно оптимальный план, согласно которому полностью удовлетворяются потребности пунктов назначения B_1, B_2, B_3 и B_4 и частично — пункта назначения B_5. При этом полностью распределены запасы пункта отправления A_2, частично — пункта отправления A_1 и остались совсем нераспределенными запасы пункта отправления A_3.

После получения условно оптимального плана определяем избыточные и недостаточные строки. Здесь недостаточной является строка A_2, так как запасы пункта отправления A_2 полностью использованы, а потребности пункта назначения B_5 удовлетворены частично. Величина недостатка равна 80 ед.

Строки A_1 и A_3 являются избыточными, поскольку запасы пунктов отправления A_1 и A_3 распределены не полностью. При этом величина избытка строки A_1 равна 60 ед., а строки A_3 —

20 ед. Общая величина избытка $60+20=80$ совпадает с общей величиной недостатка, равной 80.

После определения избыточных и недостаточных строк по каждому из столбцов находим разности между минимальными тарифами, записанными в избыточных строках, и тарифами, стоящими в заполненных клетках. В данном случае эти разности соответственно равны 5, 4, 2, 1 (табл. 2.15). Для столбца B_3 разность не определена, так как число, записанное в кружке в данном столбце, находится в положительной строке. В столбце B_1 число, стоящее в кружке, равно 1, а в избыточных строках в клетках данного столбца наименьшим является число 6. Следовательно, разность для данного столбца равна $6-1=5$. Аналогично находим разности для других столбцов: для B_2 $12-8=4$; для B_4 $7-5=2$; для B_5 $4-3=1$.

Выбираем наименьшую из найденных разностей, которая является промежуточной рентой. В данном случае промежуточная рента равна 1 и находится в столбце B_5. Найдя промежуточную ренту, переходим к табл. 2.16.

Таблица 2.16

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы	Недостаток (−), избыток (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	7	12	4 120	8	5	180	+60
A_2	2 110	9 90	7	6 80	4 70	350	−60
A_3	6	13	8	7	4 20	20	−0
Потребности	110	90	120	80	150	550	
Разность	5	3	—	2	1		

В этой таблице в строках A_1 и A_3 (являющихся избыточными) переписываем соответствующие тарифы из строк A_1 и A_3 табл. 2.15. Элементы строки A_2 (которая была недостаточной) получаются в результате прибавления к соответствующим тарифам, находящимся в строке A_2 табл. 2.15, промежуточной ренты, т. е. 1.

В табл. 2.16 число заполняемых клеток возросло на одну. Это обусловленно тем, что число минимальных тарифов, стоящих в каждом из столбцов данной таблицы, возросло на единицу, а именно в столбце B_5 теперь имеются два минимальных элемента 4. Эти числа заключаем в кружки; клетки, в которых они стоят, следует заполнить. Необходимо заполнить и клетки, в которых стоят наименьшие для других столбцов тарифы. Это клетки табл. 2.16, в которых соответствующие тарифы заключены в кружки. После того как указанные клетки определены, устанавливаем последовательность их заполнения. Для этого находим столбцы (строки), в которых имеется лишь одна клетка для заполнения. Определив и заполнив некоторую клетку, исключаем из рассмотрения соответствующий столбец (строку) и переходим к заполнению следующей клетки. В данном случае заполнение клеток проводим в такой последовательности. Сначала заполняем клетки A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_4, так как они являются единственными клетками для заполнения в столбцах B_1, B_2, B_3 и B_4. После заполнения указанных клеток заполняем клетку A_3B_5, поскольку она является единственной для заполнения в строке A_3. Заполнив эту клетку (табл. 2.16), исключаем из рассмотрения строку A_3. Тогда в столбце B_5 остается лишь одна клетка для заполнения. Это клетка A_2B_5, которую заполняем. После заполнения клеток устанавливаем избыточные и недостаточные строки (табл. 2.16). Как видно из табл. 2.16, еще имеется нераспределенный остаток. Следовательно, получен условно оптимальный план задачи и нужно перейти к новой таблице. Для этого по каждому из столбцов находим разности между числом, записанным в кружке данного столбца, и наименьшим по отношению к нему числом, находящимся в избыточных строках (табл. 2.16). Среди этих разностей наименьшая равна 1. Это и есть промежуточная рента. Переходим к новой таблице (табл. 2.17).

Таблица 2.17

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы	Недостаток (−), избыток (+)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		
A_1	7	12	4 120	8	5 60	180	0
A_2	3 110	10 90	8	7 80	5 70	350	0
A_3	7	14	9	8	5 20	20	0
Потребности	110	90	120	80	150	550	

В новой таблице элементы строк A_2 и A_3 получены в результате прибавления к соответствующим числам строк A_2 и A_3 (являющихся недостаточными) табл. 2.16 промежуточной ренты, т. е. 1. В результате в табл. 2.17 число клеток для заполнения возросло еще на одну и стало равным 6. Определяем указанные клетки и заполняем их. Сначала заполняем клетки A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_4, а затем A_3B_5, A_2B_5, A_1B_5. В результате все имеющиеся запасы поставщиков распределяются в соответствии с фактическими потребностями пунктов назначения. Число заполненных клеток равно 7, и все они имеют наименьший показатель c_{ij}. Следовательно, получен оптимальный план исходной транспортной задачи:

$$X^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 110 & 90 & 0 & 80 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

При этом плане перевозок общие затраты таковы:

$$S=4\cdot120+5\cdot60+1\cdot110+8\cdot90+5\cdot80+3\cdot70+4\cdot20=2300.$$

2.20—2.22. Методом потенциалов и методом дифференциальных рент найдите оптимальные планы транспортных задач 2.5—2.7.

Используя рассмотренные методы, найдите оптимальные планы транспортных задач 2.23—2.28.

2.23

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Потребности	80	80	60	80	

2.24

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	70
Потребности	80	50	50	70	

2.25

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
Потребности	45	45	100	160	

2.26. Для строительства трех объектов используется кирпич, изготовляемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовлять 100, 150 и 50 усл. ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 75, 80, 60 и 85 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. кирпича с каждого с заводов к каждому из строящихся объектов:

$$C=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 8 & 10 & 20 & 1\end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

2.27. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей

$$C=\begin{pmatrix}8 & 1 & 9 & 7\\ 4 & 6 & 2 & 12\\ 3 & 5 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

2.28. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Стоимости перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$C=\begin{pmatrix}9 & 7 & 5 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12 & 1\end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

4. Определение оптимального плана транспортных задач, имеющих некоторые усложнения в их постановке. При нахождении решения ряда конкретных транспортных задач часто бывает необходимо учитывать дополнительные ограничения, которые не встречались выше при рассмотрении простых вариантов данных задач. Остановимся подробнее на некоторых возможных усложнениях в постановках транспортных задач.

1. При некоторых реальных условиях перевозки груза из определенного пункта отправления A_i в пункт назначения B_j не могут быть осуществлены. Для определения оптимальных планов таких задач предполагают, что тариф перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j является сколь угодно большой величиной M, и при этом условии известными методами находят решение новой транспортной задачи. При таком предположении исключается возможность при оптимальном плане транспортной задачи перевозить груз из пункта A_i в пункт B_j. Такой подход к нахождению решения транспортной задачи называют *запрещением перевозок* или *блокированием* соответствующей клетки таблицы данных задачи.

2. В отдельных транспортных задачах дополнительным условием является обеспечение перевозки по соответствующим маршрутам определенного количества груза. Пусть, например, из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j требуется обязательно перевести d_{ij} единиц груза. Тогда в клетку таблицы данных транспортной задачи, находящуюся на пересечении строки A_i и столбца B_j, записывает указанное число α_{ij} и в дальнейшем эту клетку считают свободной со сколь угодно большим тарифом перевозок M. Для полученной таким образом новой транспортной задачи находят оптимальный план, который определяет оптимальный план исходной задачи.

3. Иногда требуется найти решение транспортной задачи, при котором из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j должно быть завезено не менее заданного количества груза α_{ij}. Для определения оптимального плана такой задачи считают, что запасы пункта A_i и потребности пункта B_j меньше фактических на α_{ij} единиц. После этого находят оптимальный план новой транспортной задачи, на основании которого и определяют решение исходной задачи.

4. В некоторых транспортных задачах требуется найти оптимальный план перевозок при условии, что из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j перевозится не более чем α_{ij} единиц груза, т. е.

$$x_{ij} \leqslant \alpha_{ij}. \tag{11}$$

Сформулированную задачу можно решить так. В таблице исходных данных задачи для каждого j-го ограничения (11) предусматривают дополнительный столбец, т. е. вводят дополнительный пункт назначения. В данном столбце записывают те же тарифы, что и в столбце B_j, за исключением тарифа, находящегося в i-й строке. В дополнительном столбце в этой строке тариф считают равным некоторому сколь угодно большому числу M. При этом потребности пункта B_j считают равными α_{ij}, а потребности вновь введенного пункта назначения полагают равными $b_j - \alpha_{ij}$. Решение полученной транспортной задачи может быть найдено методом потенциалов, и тем самым будет определен оптимальный план или установлена неразрешимость исходной задачи. Заметим, что исходная транспортная задача разрешима лишь в том случае, когда для нее существует хотя бы один опорный план.

Приведенную выше задачу можно решить и таким способом. С учетом ограничения (11) по правилу минимального элемента строят опорный план. При этом если величина записываемого на данном шаге в соответствующую клетку числа определяется только ограничением (11), то в последующем из рассмотрения исключают только заполненную клетку. В других случаях из рассмотрения исключают либо строку, либо столбец (что-нибудь одно).

Если в результате составления плана поставок все имеющиеся запасы пунктов отправления распределены и потребности в пунктах назначения удовлетворены, то получен опорный план транспортной задачи.

Если в какой-то строке (а следовательно, и в столбце) остался нераспределенный остаток, равный d, то вводят дополнительный пункт назначения и дополнительный пункт отправления с потребностями и запасами, равными d. В клетке, находящейся на пересечении столбца дополнительного пункта назначения и строки дополнительного пункта отправления, тариф считают равным нулю. Во всех остальных клетках данной строки и столбца тарифы полагают равными некоторому сколь угодно большому числу M. Полученную в результате этого транспортную задачу решают методом потенциалов. После конечного числа шагов либо устанавливают, что исходная задача не имеет опорного плана, либо находят ее оптимальный план. При этом (x_{ij}^*) — оптимальный план исходной задачи, если

$$\begin{cases} \beta_j - \alpha_i - c_{ij} \leqslant 0 & \text{при} \quad x_{ij}^* = 0, \\ \beta_j - \alpha_i - c_{ij} \geqslant 0 & \text{при} \quad x_{ij}^* = \alpha_{ij}, \\ \beta_j - \alpha_i - c_{ij} = 0 & \text{при} \quad 0 < x_{ij}^* < \alpha_{ij}. \end{cases} \tag{12}$$

2.29. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в табл. 2.18, при дополнительных условиях: из A_1 в B_2 и из A_2 в B_5 перевозки не могут быть осуществлены, а из A_2 в B_1 будет завезено 60 ед. груза.

Таблица 2.18

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	2	3	1	4	180
A_2	6	3	4	5	2	220
A_3	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Решение. Так как из A_1 в B_2 и из A_2 в B_5 перевозки не могут быть осуществлены, то в клетках A_1B_2 и A_2B_5 табл. 2.19 тарифы считаем равными некоторому сколь угодно большому числу M. Полагаем равным этому же числу и тариф для клетки A_2B_1. Одновременно в эту клетку помещаем число 60, поскольку, по условию, из A_2 в B_1 нужно завести 60 ед. груза. В дальнейшем клетку A_2B_1 считаем свободной со сколь угодно большим тарифом M.

Таблица 2.19

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 60	M $\boxed{2-M}$	3 30	1 90	4 $\boxed{M-5}$	180
A_2	M 60 $\boxed{2-M}$	3 80	4 30	5 $\boxed{-3}$	M 50	220
A_3	8 $\boxed{-9}$	2 $\boxed{-2}$	1 100	9 $\boxed{-10}$	3 $\boxed{M-6}$	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Для транспортной задачи, исходные данные которой записаны в табл. 2.19, методом минимального элемента находим опорный план. Этот план проверяем на оптимальность. Для каждого из пунктов отправления и назначения находим потенциалы, а для каждой из свободных клеток — числа $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$. Эти числа записываем в квадратах в соответствующих клетках табл. 2.19. Если среди данных чисел нет положительных, то найденный опорный план является оптимальным. В данном случае имеется два положительных числа, расположенных в клетках A_1B_5 и A_3B_5. Поэтому переходим к новому опорному плану. Строим для клетки A_1B_5 цикл пересчета и производим сдвиг по циклу пересчета (табл. 2.20).

Таблица 2.20

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 60	M $\boxed{-2M+7}$	3 $\boxed{-M+5}$	1 90	4 30	180
A_2	M 60 $\boxed{M-3}$	3 80	4 60	5 $\boxed{M-8}$	M 20	220
A_3	8 $\boxed{M-8}$	2 $\boxed{-2}$	1 100	9 $\boxed{M-15}$	3 $\boxed{M-6}$	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

Полученный опорный план проверяем на оптимальность; так как он не оптимален, то переходим к новому опорному плану (табл. 2.21).

Как видно из табл. 2.21, исходная транспортная задача имеет оптимальный план

$$X^*=\begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 & 90 & 30 \\ 60 & 80 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

При этом общая стоимость перевозок

$$S=1\cdot 60+1\cdot 90+4\cdot 30+6\cdot 60+3\cdot 80+4\cdot 80+1\cdot 80+3\cdot 20= =1330$$

является минимальной.

Таблица 2.21

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 60	M $\boxed{1-M}$	3 $\boxed{-1}$	1 90	4 30	180
A_2	M 60 $\boxed{3-M}$	3 80	4 80	5 $\boxed{-2}$	M $\boxed{6-M}$	220
A_3	8 $\boxed{-8}$	2 $\boxed{-2}$	1 80	9 $\boxed{-9}$	3 20	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

2.30. Найти решение транспортной задачи, исходные данные которой приведены в талб. 2.22, при дополнительных условиях: из A_1 в B_2 должно быть перевезено не менее 50 ед. груза, из A_3 в B_5 — не менее 60 ед. груза, а из A_2 в B_4 — не более 40 ед. груза.

Таблица 2.22

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	3	2	4	8	160
A_2	7	6	5	3	1	90
A_3	8	9	4	5	2	140
Потребности	90	60	80	70	90	390

Решение. Так как из A_1 и A_3 соответственно в B_2 и B_5 необходимо завезти не менее 50 и 60 ед. груза, то запасы этих пунктов отправления и потребности пунктов назначения считаем меньшими соответственно на 50 и 60 ед. (табл. 2.23). Кроме того, поскольку из A_2 в B_4 необходимо завезти не более 40 ед. груза, то рассмотрим дополнительный пункт назначения B_4^1 с потребностями, равными $70-40=30$ ед., а потребности пункта B_4 считаем равными 40 ед. В столбце B_4^1 записываем тарифы, помещенные в клетках столбца B_4, за исключением клетки A_2B_4. В этой клетке тариф полагаем равным некоторому сколь угодно большому числу M. В результате получаем транспортную задачу, исходные данные которой записаны в табл. 2.23.

Таблица 2.23

Пункты отправления	Пункты назначения						Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_4^1	
A_1	5	3 / 30	2 / 80	4	8	4	110
A_2	7 / 20	6	5	3 / 40	1 / 30	M	90
A_3	8 / 20	9 / 30	4	5	2	5 / 30	80
Потребности	40	60	80	40	30	30	280

Таблица 2.24

Пункты отправления	Пункты назначения						Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_4^1	
A_1	5 / 20	3 / 60	2 / 30	4 / $\boxed{-3}$	8 / $\boxed{-9}$	4 / $\boxed{-1}$	110
A_2	7 / 20	6 / $\boxed{-1}$	5 / $\boxed{-1}$	3 / 40	1 / 30	M / $\boxed{5-M}$	90
A_3	8 / $\boxed{-1}$	9 / $\boxed{-4}$	4 / 50	5 / $\boxed{-2}$	2 / $\boxed{-1}$	5 / 30	80
Потребности	40	60	80	40	30	30	280

Данную задачу решаем методом потенциалов. Найденное решение приведено в табл. 2.24. Как следует из этой таблицы, оптимальное решение исходной задачи

$$X^* = \begin{pmatrix} 70 & 60 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 40 & 30 \\ 0 & 0 & 50 & 30 & 60 \end{pmatrix}.$$

При таком плане перевозок общая стоимость перевозок

$$S = 5 \cdot 70 + 3 \cdot 60 + 2 \cdot 30 + 7 \cdot 20 + 3 \cdot 40 + 1 \cdot 30 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 30 + \\ + 2 \cdot 60 = 1350$$

является минимальной.

2.31. Найдите решение транспортной задачи, исходные данные которой определяются таблицей

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	8	7	2	1	220
A_2	6	3	5	4	6	140
A_3	7	4	2	3	2	160
Потребности	80	140	90	130	80	520

и матрицей

$$D = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 60 & \infty & \infty \\ \infty & 70 & \infty & 70 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

Числа в матрице D определяют предельное количество груза, которое можно перевезти из данного пункта отправления в соответствующий пункт назначения. Символ ∞ означает, что на перевозки из данного пункта отправления в соответствующий пункт назначения нет ограничений.

2.32. Найдите решение транспортной задачи, исходные данные которой определяются таблицей

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	2	3	1	4	180
A_2	6	3	4	5	2	220
A_3	8	2	1	9	3	100
Потребности	120	80	160	90	50	500

и матрицей

$$D=\begin{pmatrix} \infty & 70 & 40 & 60 & \infty \\ \infty & \infty & 80 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 40 & \infty & \infty \end{pmatrix}.$$

2.33. На трех складах оптовой базы сосредоточена мука в количествах, равных соответственно 140, 360 и 180 т. Эту муку необходимо завезти в пять магазинов, каждый из которых должен получить соответственно 90, 120, 230, 180 и 60 т. С 1-го склада муку не представляется возможным перевозить во 2-й и 5-й магазины, а из 2-го склада в 3-й магазин должно быть завезено 100 т муки. Зная тарифы перевозки 1 т муки с каждого из складов в соответствующие магазины, которые определяются матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 7 & - & 8 & 2 & - \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

составьте план перевозок, обеспечивающий минимальную общую стоимость перевозок.

2.34. На трех железнодорожных станциях A_1, A_2 и A_3 скопилось 120, 110 и 130 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на железнодорожные станции B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5. На каждой из этих станций потребность в вагонах соответственно равна 80, 60, 70, 100 и 50. Учитывая, что с железнодорожной станции A_2 не представляется возможным перегнать вагоны на станцию B_2 и B_4, и зная, что тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

составьте такой план перегонок вагонов, чтобы общая стоимость была минимальной.

5. Нахождение решения некоторых экономических задач, сводящихся к транспортной. Выше были подробно рассмотрены методы нахождения решения транспортной задачи. Этими же методами может быть также найдено решение многих других задач, которые по своей экономической сущности не связаны с транспортными перевозками. Рассмотрим некоторые из них.

2.35. На текстильном предприятии имеется три типа ткацких станков. На станках каждого из типов могут вырабатываться четыре вида тканей: миткаль, бязь, ситец и сатин. Производительность каждого станка и себестоимость тканей приведены в табл. 2.25. Учитывая, что фонд рабочего времени каждой из групп ткацких станков соответственно равен 90, 220 и 180 станко-ч, составить такой план их загрузки, при котором общая себестои-

Тип станка	Производительность станка, (м/ч) при выработке				Себестоимость (руб.) ткани при выработке 1 м/ч			
	миткаля	бязи	ситца	сатина	миткаля	бязи	ситца	сатина
I	24	30	18	42	2	1	3	1
II	12	15	9	21	3	2	4	1
III	8	10	6	14	6	3	5	2

мость выпускаемых тканей в количестве 1200 м миткаля, 900 м бязи, 1800 м ситца и 840 м сатина является минимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Будем считать, что i-й тип станков занят изготовлением j-го вида тканей x_{ij} станко-часов. Тогда переменные x_{ij} должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=\ 90, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=220, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=180; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} 24x_{11}+12x_{21}+\ 8x_{31}=1200, \\ 30x_{12}+15x_{22}+10x_{32}=\ 900, \\ 18x_{13}+\ 9x_{23}+\ 6x_{33}=1800, \\ 42x_{14}+21x_{24}+14x_{34}=\ 840. \end{cases} \tag{14}$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять также условию неотрицательности:

$$x_{ij}\geqslant 0 \qquad (i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}). \tag{15}$$

Среди всех возможных значений неизвестных x_{ij}, удовлетворяющих уравнениям (13) и (14) и условию неотрицательности переменных (15), требуется найти такое, при котором линейная функция

$$F=2x_{11}+x_{12}+3x_{13}+x_{14}+3x_{21}+2x_{22}+ \\ +4x_{23}+x_{24}+6x_{31}+3x_{32}+ \\ +5x_{33}+2x_{34} \tag{16}$$

принимает наименьшее значение.

Преобразуем математическую модель задачи таким образом, чтобы свести ее к модели транспортной задачи. Для этого приведем исходные данные и неизвестные величины исходной задачи к одной единице, в качестве которой возьмем 1 станко-ч работы станков I типа. Тогда, поскольку производительность станков II и III типов соответственно составляют 1/2 и 1/3 производительности станков I типа (табл. 2.25), фактический фонд рабочего времени в приведенных станко-часах для II типа станков равен 105, а для III типа — 60. Общий фонд рабочего времени в приведенных станко-часах составляет $90+105+60=255$.

Определим теперь, какое время требуется для выработки нужного количества каждого из видов тканей. Так как нужно изготовить 1200 м миткаля и за один приведенный станко-час можно выработать 24 м, то для выпуска необходимого количества миткаля потребуется $1200/24=50$ станко-ч. Аналогично определяем потребности для выработки бязи, ситца и сатина. Эти потребности соответственно составляют 30, 100 и 20 станко-ч. Обозначим теперь через x'_{ij} количество приведенных станко-часов i-го типа станков, используемых при выработке j-го вида ткани. Тогда системы уравнений (13) и (14) исходной задачи можно переписать так:

$$\begin{cases} x'_{11}+x'_{12}+x'_{13}+x'_{14}=90, \\ x'_{21}+x'_{22}+x'_{23}+x'_{24}=105, \\ x'_{31}+x'_{32}+x'_{33}+x'_{34}=60; \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} x'_{11}+x'_{21}+x'_{31}=50, \\ x'_{12}+x'_{22}+x'_{32}=30, \\ x'_{13}+x'_{23}+x'_{33}=100, \\ x'_{14}+x'_{24}+x'_{34}=20, \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\begin{gathered} x'_{11}=x_{11};\ x'_{12}=x_{12};\ x'_{13}=x_{13};\ x'_{14}=x_{14}; \\ x'_{21}=\frac{1}{2}x_{21};\ x'_{22}=\frac{1}{2}x_{22};\ x'_{23}=\frac{1}{2}x_{23};\ x'_{24}=\frac{1}{2}x_{24}; \\ x'_{31}=\frac{1}{3}x_{31};\ x'_{32}=\frac{1}{3}x_{32};\ x'_{33}=\frac{1}{3}x_{33};\ x'_{34}=\frac{1}{3}x_{34}. \end{gathered} \tag{19}$$

Целевая функция (16) исходной задачи записывается в виде

$$\begin{aligned} F_1=2x'_{11}+x'_{12}+3x'_{13}+x'_{14}+6x'_{21}+4x'_{22}+ \\ +8x'_{23}+2x'_{24}+18x'_{31}+9x'_{32}+15x'_{33}+6x'_{34}. \end{aligned} \tag{20}$$

В результате приходим к следующей математической задаче: требуется среди всех неотрицательных решений систем линейных уравнений (17) и (18) найти такое, при котором функция (20) принимает минимальное значение.

Таким образом, исходная задача свелась к задаче, математическая модель которой ничем не отличается от математической модели транспортной задачи. Поскольку $90+105+60=225>$ $>50+30+100+20=200$, полученная задача имеет открытую модель. Поэтому, чтобы найти ее решение, считаем, что имеется фиктивная потребность в тканях, на выработку которых необходимо затратить $255-200=55$ станко-ч. Полученную в результате последнего предположения задачу решаем методом потенциалов (табл. 2.26).

Таблица 2.26

Тип станков	Ткань					Производственная мощность
	миткаль	бязь	ситец	сатин	некоторая ткань	
I	2	1	3 90	1	0	90
II	6 50	4 30	8 10	2 15	0	105
III	18	9	15	6 5	0 55	60
Потребность в ткани	50	30	100	20	55	255

Как видно из табл. 2.26, оптимальный план задачи (17) — (20) определяется матрицей

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \\ 50 & 30 & 10 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 55 \end{pmatrix}.$$

Используя соотношения (19), для определения оптимального плана исходной задачи (13) — (16) получим матрицу

$$A^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \\ 100 & 60 & 20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 165 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, согласно плану выработки тканей, предусматривается использовать 90 станко-ч станков I типа для производства ситца, соответственно 100, 60, 20 и 30 станко-ч станков II типа для выработки миткаля, бязи, ситца и сатина, 15 станко-ч станков III типа для изготовления сатина. При этом 155 станко-ч станки III типа остаются свободными.

В соответствии с данным планом на станках I типа вырабатывается 1620 м ситца, на станках II типа — 1200 м миткаля, 900 м бязи, 180 м ситца и 630 м сатина, на станках III типа —

210 м сатина. При этом 165 станко-ч станки III типа могут быть использованы для выработки сверхплановой продукции. При данном плане выработки тканей их себестоимость является минимальной и составляет

$$S=3\cdot 1620+3\cdot 1200+2\cdot 900+4\cdot 180+1\cdot 630+2\cdot 210=12030.$$

2.36. На пяти токарных станках различных типов можно выполнять пять операций по обработке детали. При этом за каждым из станков может быть закреплена лишь одна операция и одна и та же операция может выполняться только одним станком. Зная время выполнения каждой из операций на каждом из станков, которое задается матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

составить такое распределение выполняемых операций между станками, при котором суммарные затраты времени на обработку детали являются минимальными.

Р е ш е н и е. Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij} $(i=\overline{1,5};\ j=\overline{1,5})$ переменную, значение которой равно 1, если на i-м станке j-я операция выполняется, и равно 0 в противном случае. Тогда закрепление за каждым станком только одной операции выражается равенствами

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=1, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=1, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=1, \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=1, \\ x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}=1, \end{cases} \tag{21}$$

а закрепление каждой из операций только на одном станке — равенствами

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=1, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1, \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=1. \end{cases} \tag{22}$$

Требуется найти такие значения неизвестных x_{ij} $(i=\overline{1,5};\ j=\overline{1,5})$, удовлетворяющие системам линейных уравнений (21) и (22) и равные 0 или 1, при которых функция

$$F=2x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+8x_{14}+3x_{15}+x_{21}+3x_{22}+2x_{23}+7x_{24}+ +6x_{25}+7x_{31}+2x_{32}+4x_{33}+5x_{34}+8x_{35}+9x_{41}+x_{42}+3x_{43}+4x_{44}+ +6x_{45}+3x_{51}+2x_{52}+x_{53}+4x_{54}+5x_{55} \tag{23}$$

принимает минимальное значение.

Оптимальный план сформулированной задачи может быть найден методами решения транспортных задач. Найдем его методом потенциалов (табл. 2.27).

Таблица 2.27

Станки	Операции					За каждым станком закрепляется одна операция
	1	2	3	4	5	
I	2 0	4	6	8	3 1	1
II	1 1	3	2 0	7	6	1
III	7	2 1	4	5	8	1
IV	9	1 0	3	4 1	6	1
V	3	2	1 1	4 0	5	1
Каждая операция выполняется только на одном станке	1	1	1	1	1	5

Как видно, оптимальным планом задачи является план, согласно которому на I станке выполняется 5-я операция, на II станке — 1-я операция, на III станке — 2-я операция, на IV станке — 4-я операция и на V станке — 3-я операция. В соответствии с этим планом время обработки детали является минимальным и составляет $S=3+1+2+1+4=11$.

Сведите задачи 2.37—2.40 к транспортной задаче и найдите их решение.

2.37. Имеется три участка земли, на которых могут быть засеяны кукуруза, пшеница, ячмень и просо. Площадь каждого из участков соответственно равна 600, 180 и 220 га. С учетом наличия семян кукурузой, пшеницей, ячменем и просом следует соответственно засеять 290, 180, 110 и 420 га. Урожайность каждой из культур для каждого из участков различна и задается матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 \\ 30 & 28 & 22 \\ 18 & 22 & 14 \\ 24 & 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определить, сколько гектаров каждой культуры на каждом из участков следует засеять так, чтобы общий сбор зерна был максимальным.

2.38. На каждом из четырех филиалов производственного объединения могут изготовляться изделия четырех видов. Учитывая необходимость углубления специализации, на филиалах решено сосредоточить выпуск только по одному виду изделий. Себестоимость каждого из изделий на каждом из филиалов различна и определяется матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти такое распределение выпуска продукции между филиалами, чтобы общая себестоимость продукции была минимальной.

2.39. Мясокомбинат имеет в своем составе четыре завода, на каждом из которых может изготовляться три вида колбасных изделий. Мощности каждого из заводов соответственно равны 320, 280, 270 и 350 т/сут. Ежедневные потребности в колбасных изделиях каждого вида также известны и соответственно равны 450, 370 и 400 т. Зная себестоимость 1 т каждого вида колбасных изделий на каждом заводе, которые определяются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

найти такое распределение выпуска колбасных изделий между заводами, при котором себестоимость изготовляемой продукции является минимальной.

§ 2.2. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Экономическая и геометрическая интерпретация задачи целочисленного программирования. Экстремальная задача, переменные которой принимают лишь целочисленные значения, называется задачей целочисленного программирования.

В математической модели задачи целочисленного программирования как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Ограничимся случаем, когда целевая функция и система ограничений задачи являются линейными.

2.40. В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено 19/3 м^2 площади. На приобретение оборудования предприятие может израсходовать 10 тыс. руб., при этом оно может купить оборудование двух видов. Комплект оборудования I вида стоит 1000 руб., а II вида — 3000 руб. Приобретение одного комплекта оборудования I вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования II вида — на 4 ед. Зная, что для установки одного комплекта оборудования I вида требуется 2 м^2 площади, а оборудования II вида — 1 м^2 площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

Решение. Составим математическую модель задачи. Предположим, что предприятие приобретет x_1 комплектов оборудования I вида и x_2 комплектов оборудования II вида. Тогда переменные x_1 и x_2 должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 10. \end{cases} \tag{24}$$

Если предприятие приобретет указанное количество оборудования, то общее увеличение выпуска продукции составит

$$F = 2x_1 + 4x_2. \tag{25}$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1 и x_2 могут принимать лишь целые неотрицательные значения, т. е.

$$x_1,\ x_2 \leqslant 0, \tag{26}$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые.} \tag{27}$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: найти максимальное значение линейной функции (25) при выполнении условий (24), (26) и (27). Так как неизвестные могут принимать только целые значения, то задача (24) — (27) является задачей целочисленного программирования. Поскольку число неизвестных задачи равно двум, решение данной задачи можно найти, используя ее геометрическую интерпретацию. Для этого прежде всего построим многоугольник решений задачи, состоящей в определении максимального значения линейной функции (25) при выполнении условий (24) и (26) (рис. 2.2). Координаты всех точек построенного многоугольника решений *OAEBC* удовлетворяют системе линейных неравенств (24) и условию неотрицательности переменных (26). Вместе с тем условию (27), т. е. условию целочисленности переменных, удовлетворяют координа-

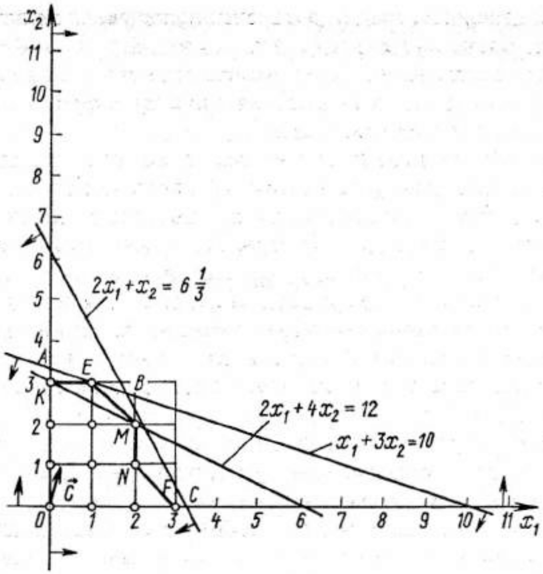


Рис. 2.2

ты лишь 12 точек, отмеченных на рис. 2.2. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник $OABC$ многоугольником $OKEMNF$, содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами и таким, что координаты каждой из вершин являются целыми числами. Значит, если найти точку максимума функции (25) на многоугольнике $OKEMNF$, то координаты этой точки и определят оптимальный план задачи.

Для этого построим вектор $\vec{C}=(2;\ 4)$ и прямую $2x_1+4x_2=12$, проходящую через многоугольник решений $OKEMNF$ (число 12 взято произвольно). Построенную прямую передвигаем в направлении вектора $\vec{C}$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю общую точку ее с данным многоугольником. Координаты этой точки и определяют оптимальный план, а значение целевой функции в ней является максимальным.

В данном случае искомой является точка $E(1;3)$, в которой целевая функция принимает максимальное значение $F_{\max}=14$. Следовательно, координаты точки E определяют оптимальный план задачи (24) — (27). В соответствии с этим планом предприятию следует приобрести один комплект оборудования I вида и три комплекта оборудования II вида. Это обеспечит предприятию при имеющихся у него ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 ед. в смену.

2.41. Для выполнения работ могут быть использованы n механизмов. Производительность i-го механизма $(i=\overline{1,n})$ при выполнении j-й работы $(j=\overline{1,n})$ равна c_{ij}. Предполагая, что каждый механизм может быть использован только на одной работе и каждая работа может выполняться только одним механизмом, определить закрепление механизмов за работами, обеспечивающее максимальную производительность. Построить математическую модель задачи.

Р е ш е н и е. Введем переменную x_{ij}, значение которой равно 1, если при выполнении i-й работы используется j-й механизм, и равно 0 в противном случае. Тогда условия использования каждого механизма только на одной работе выражаются равенствами

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad (i=\overline{1, m}), \tag{28}$$

а условия выполнения работы только одним механизмом — равенствами

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \quad (j=\overline{1,n}), \tag{29}$$

$$x_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ю работу выполняет } j\text{-й механизм;} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{30}$$

Таким образом, задача состоит в определении таких значений неизвестных x_{ij} $(j=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n})$, удовлетворяющих системам уравнений (28) и (29) и условию (30), при которых достигается максимальное значение функции

$$F=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}. \tag{31}$$

Сформулированная задача является задачей целочисленного программирования.

Найдите решение задач целочисленного программирования 2.42—2.44.

2.42. $3x_1+x_2\to\min;$

$$\begin{cases} -4x_1+x_2\leqslant 29, \\ 3x_1-x_2\leqslant 15, \\ 5x_1+2x_2\geqslant 38, \end{cases}$$

$x_1,\ x_2\geqslant 0,\ x_1,\ x_2$ — целые.

2.43. $5x_1+7x_2\to\min;$

$$\begin{cases} -3x_1+14x_2\leqslant 78, \\ 5x_1-6x_2\leqslant 26, \\ x_1+4x_2\geqslant 25, \end{cases}$$

$x_1,\ x_2\geqslant 0,\ x_1,\ x_2$ — целые.

2.44. $F=2x_1+x_2\to\max;$

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2+x_3=24, \\ 3x_1-3x_2+x_4=9, \\ -x_1+3x_2+x_5=3, \end{cases}$$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0,$

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ — целые.

Составьте математические модели задач 2.45—2.48.

2.45. Министерству необходимо составить план развития каждого из m предприятий, выпускающих однородную продукцию. Число возможных вариантов развития i-го предприятия различно и равно n_i. Реализация j-го варианта развития i-го предприятия $(j=\overline{1,n_i})$ требует капитальных затрат, равных K_{ij}, и обеспечивает выпуск продукции в объеме b_{ij} единиц. При этом экономический эффект от капитальных вложений на развитие i-го предприятия по j-му варианту равен c_{ij}. Учитывая, что необходимо выпустить продукции в количестве B единиц и что общая величина капиталовложений ограничена и равна K, составить такой план развития предприятий, при котором экономический эффект от реализации выбранных вариантов развития предприятий является максимальным.

2.46. В аэропорту для перевозки пассажиров по n маршрутам может быть использовано m типов самолетов. Вместимость самолета i-го типа равна a_i человек, а количество пассажиров, перевозимых по j-му маршруту за сезон, составляет b_j человек. Затраты, связанные с использованием самолета i-го типа на j-м маршруте, составляют c_{ij} руб.

Определить, сколько самолетов данного типа и на каком из маршрутов следует использовать, чтобы удовлетворить потребности в перевозках при наименьших общих затратах.

2.47. В обувном производственном объединении производится раскрой m различных партий материалов, причем каждая из партий состоит из b_i единиц материала, имеющего одинаковую форму (например, пластины) и размер. Из материалов всех партий требуется выкроить максимальное количество комплектов деталей обуви, в каждый из которых входит d_j $(j=\overline{1,n})$ деталей j-го вида, если при раскрое единицы материала i-й партии по k-му варианту $(k=\overline{1,K})$ получается a_{ikj} деталей j-го вида.

2.48. Имеется n городов, расстояние между любыми двумя из которых равно c_{ij}. Найти маршрут, имеющий минимальную длину, начинающийся и кончающийся в одном и том же городе и включающий по одному разу все остальные города.

2. Определение оптимального плана задачи целочисленного программирования. Рассмотрим задачи целочисленного программирования, в которых как целевая функция, так и функции в системе ограничений являются линейными. В связи с этим сформулируем основную задачу линейного программирования, в которой переменные могут принимать только целые значения. В общем виде эту задачу можно записать так: найти максимум функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{32}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \ (i=\overline{1, m}), \tag{33}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1, n}), \tag{34}$$

$$x_j \text{ — целые } (j=\overline{1, n}). \tag{35}$$

Если найти решение задачи (32) — (35) симплексным методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нет (примером задачи линейного программирования, решение которой всегда является целочисленным, служит транспортная задача). В общем же случае для определения оптимального плана задачи (32) — (35) требуются специальные методы. В настоящее время существует несколько таких методов, из которых наиболее известным является метод Гомори, в основе которого лежит описанный выше симплексный метод.

Метод Гомори. Нахождение решения задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи (32) — (34) без учета целочисленности переменных. После того как этот план найден, просматривают его компоненты. Если среди компонент нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования (32) — (35). Если же в оптимальном плане задачи (32) — (34) переменная x_i принимает дробное значение, то к системе уравнений (33) добавляют неравенство

$$\sum_{j} f\ (a_{ij}^*)\, x_j \geqslant f\ (b_i^*) \tag{36}$$

и находят решение задачи (32) — (34), (36).

В неравенстве (36) a_{ij}^* и b_i^* — преобразованные исходные величины a_{ij} и b_i, значения которых взяты из последней симплекс-таблицы, а $f\ (a_{ij}^*)$ и $f\ (b_i^*)$ — дробные части чисел (под дробной частью некоторого числа a понимается наименьшее неотрицательное число b такое, что разность между a и b есть целое). Если в оптимальном плане задачи (32) — (34) дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство (36) определяется наибольшей дробной частью.

Если в найденном плане задачи (32) — (34), (36) переменные принимают дробные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяют. Проводя конечное число итераций, либо получают оптимальный план задачи целочисленного программирования (32) — (35), либо устанавливают ее неразрешимость.

Если требование целочисленности (35) относится лишь к некоторым переменным, то такие задачи называются *частично целочисленными.* Их решение также находят последовательным решением задач, каждая из которых получается из предыдущей с помощью введения дополнительного ограничения. В этом случае такое ограничение имеет вид

$$\sum_j \gamma_{ij} x_j \geqslant f\ (b_i^*), \tag{37}$$

где γ_{ij} определяются из следующих соотношений:

1) для x_j, которые могут принимать нецелочисленные значения,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^* & \text{при } a_{ij}^* \geqslant 0, \\ \dfrac{f\ (b_i^*)}{1 - f\ (b_i^*)} |a_{ij}^*| & \text{при } a_{ij}^* < 0; \end{cases} \tag{38}$$

2) для x_j, которые могут принимать только целочисленные значения,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} f(a_{ij}^*) & \text{при } f(a_{ij}^*) \leqslant f(b_i^*), \\ \dfrac{f(b_i^*)}{1 - f\ (b_i^*)} [1 - f(a_{ij}^*)] & \text{при } f(a_{ij}^*) > f(b_i^*). \end{cases} \tag{39}$$

Из изложенного выше следует, что процесс определения оптимального плана задачи целочисленного программирования методом Гомори включает следующие основные этапы:

1. Используя симплексный метод, находят решение задачи (32) — (34) без учета требования целочисленности переменных.

2. Составляют дополнительное ограничение для переменной, которая в оптимальном плане задачи (32) — (34) имеет максимальное дробное значение, а в оптимальном плане задачи (32) — (35) должна быть целочисленной.

3. Используя двойственный симплекс-метод, находят решение задачи, получающейся из задачи (32) — (34) в результате присоединения дополнительного ограничения.

4. В случае необходимости составляют еще одно дополнительное ограничение и продолжают итерационный процесс до получения оптимального плана задачи (32) — (35) или установления ее неразрешимости.

2.49. Методом Гомори найти максимальное значение функции

$$F=3x_1+2x_2 \tag{40}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=13, \\ x_1-x_2+x_4=6, \\ -3x_1+x_2+x_5=9, \end{cases} \tag{41}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1,\ 5}), \tag{42}$$

$$x_j \text{ — целые } (j=\overline{1,5}). \tag{43}$$

Дать геометрическую интерпретацию решения задачи.

Решение. Для определения оптимального плана задачи (40)—(43) сначала находим оптимальный план задачи (40)—(42) (табл. 2.28).

Таблица 2.28

i	Базис	$C_б$	P_0	3	2	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	13	1	1	1	0	0
2	P_4	0	6	1	−1	0	1	0
3	P_5	0	9	−3	1	0	0	1
4			0	−3	−2	0	0	0
1	P_3	0	7	0	2	1	−1	0
2	P_1	3	6	1	−1	0	1	0
3	P_5	0	27	0	−2	0	3	1
4			18	0	−5	0	3	0
1	P_2	2	7/2	0	1	1/2	−1/2	0
2	P_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0
3	P_5	0	34	0	0	1	2	1
4			71/2	0	0	5/2	1/2	0

Как видно из табл. 2.28, найденный оптимальный план $X=(19/2;\ 7/2;\ 0;\ 0;\ 10)$ задачи (40)—(42) не является оптимальным планом задачи (40)—(43), поскольку две компоненты x_1 и x_2 имеют нецелочисленные значения. При этом дробные части этих чисел равны между собой. Поэтому для одной из этих переменных составляется дополнительное ограничение. Составим, например, такое ограничение для переменной x_2. Из последней симплекс-таблицы (табл. 2.28) имеем

$$x_2+(1/2)x_3-(1/2)x_4=7/2.$$

Таким образом, к системе ограничений задачи (40)—(42) добавляем неравенство

$$f\ (1)\ x_2+f\ (1/2)x_3+f\ (-1/2)x_4 \geqslant f\ (7/2), \text{ или}$$
$$(1/2)x_3+(1/2)x_4 \geqslant 1/2,$$

т. е.

$$x_3+x_4 \geqslant 1. \tag{44}$$

Таблица 2.29

i	Базис	$C_б$	P_0	3	2	0	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	2	7/2	0	1	1/2	−1/2	0	0
2	P_1	3	19/2	1	0	1/2	1/2	0	0
3	P_5	0	34	0	0	1	2	1	0
4	P_6	0	−1	0	0	−1	−1	0	1
5			71/2	0	0	5/2	1/2	0	0
1	P_2	2	4	0	1	1	0	0	−1/2
2	P_1	3	9	1	0	0	0	0	1/2
3	P_5	0	32	0	0	−1	0	1	2
4	P_4	0	1	0	0	1	1	0	−1
5			35	0	0	2	0	0	1/2

Находим теперь максимальное значение функции (40) при выполнении условий (41), (42) и (44) (табл. 2.29).

Из табл. 2.29 видно, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $X^* = (9; 4; 0; 1; 32)$. При этом плане значение целевой функции равно $F_{max} = 35$. Дадим геометрическую интерпретацию решения задачи. Областью допустимых решений задачи (40) — (42) является многоугольник $OABCD$ (рис. 2.3). Из рис. 2.3 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в точке C (19/2; 7/2), т. е. что $X = (19/2; 7/2; 0; 0; 34)$ является оптимальным планом. Это непосредственно видно и из табл. 2.28. Так как $X = (19/2; 7/2; 0; 0; 34)$

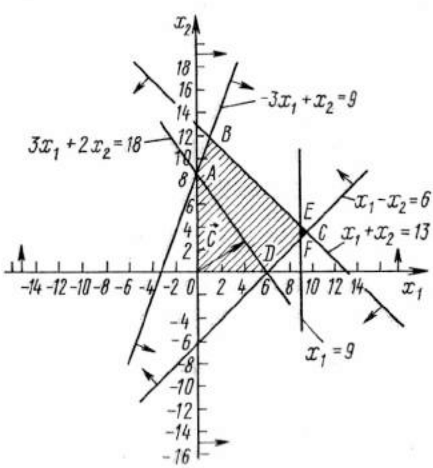


Рис. 2.3

не является оптимальным планом задачи (40) — (43) (числа 19/2 и 7/2 — дробные), то вводится дополнительное ограничение $x_3+x_4 \geqslant 1$. Исключая из него x_3 и x_4 подстановкой вместо них соответствующих значений из уравнений системы ограничений (41), получим $x_1 \leqslant 9$. Этому неравенству соответствует полуплоскость, ограниченная прямой $x_1=9$, отсекающей от многоугольника $OABCD$ треугольник EFC.

Как видно из рис. 2.3, областью допустимых решений полученной задачи является многоугольник $OABEFD$. В точке E (9; 4) этого многоугольника целевая функция данной задачи принимает максимальное значение. Так как координаты точки E — целые числа и неизвестные x_3, x_4 и x_5 принимают целочисленные значения при подстановке в уравнения (41) значений $x_1=9$ и $x_2=4$, то $X^*=(9; 4; 0; 0; 32)$ является оптимальным планом задачи (40) — (43). Это следует и из табл. 2.29.

2.50. Методом Гомори найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F=x_1+4x_2 \tag{45}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \leqslant 6^1/_3, \\ x_1+3x_2 \leqslant 4, \end{cases} \tag{46}$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0, \tag{47}$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые.} \tag{48}$$

Дать геометрическую интерпретацию решения задачи.

Р е ш е н и е. Сформулированную задачу перепишем так: найти максимальное значение функции

$$F=x_1+4x_2 \tag{49}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 \qquad =19/3, \\ x_1+3x_2 \qquad +x_4=4, \end{cases} \tag{50}$$

$$x_j \geqslant 0\ (j=\overline{1,4}), \tag{51}$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые.} \tag{52}$$

Задача (49) — (52) является частично целочисленной, так как переменные x_3 и x_4 могут принимать нецелочисленные значения.

Находим симплексным методом решение задачи (49) — (51) (табл. 2.30).

После II итерации получаем оптимальный план данной задачи $X=(0; 4/3; 5; 0)$. При этом плане переменная x_2 приняла нецелочисленное значение. Поэтому необходимо перейти к новой

Таблица 2.30

i	Базис	$C_б$	P_0	1	4	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	0	19/3	2	1	1	0
2	P_4	0	4	1	3	0	1
3			0	−1	−4	0	0
1	P_3	0	5	5/3	0	1	−1/3
2	P_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3
3			16/3	1/3	0	0	4/3

задаче, добавив к системе ограничений (49) — (51) еще одно ограничение: $(1/3)x_1+(1/3)x_4\geqslant 1/3$, или

$$x_1+x_4-x_5=1 \ (x_5\geqslant 0). \tag{53}$$

Находим теперь решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции (49) при условиях (50), (51) и (53). Данную задачу решаем двойственным симплекс-методом (табл. 2.31).

Таблица 2.31

i	Базис	$C_б$	P_0	1	4	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	5	5/3	0	1	−1/3	0
2	P_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0
3	P_5	0	−1	−1	0	0	−1	1
4			16/3	1/3	0	0	4/3	0
1	P_3	0	10/3	0	0	1	−2	5/3
2	P_2	4	1	0	1	0	0	1/3
3	P_1	1	1	1	0	0	1	−1
4			5	0	0	0	1	1/3

Из табл. 2.31 видно, что $X^*=(1;\ 1;\ 10/3;\ 0;\ 0)$ является оптимальным планом построенной задачи. Так как при этом плане переменные x_1 и x_2 принимают целые значения, то он также является оптимальным планом исходной задачи (49) — (52).

Дадим геометрическую интерпретацию решения задачи. На рис. 2.4 показана область допустимых решений задачи (49) — (51). Из рисунка видно, что максимальное значение целевая функция принимает в точке A $(0;\ 4/3)$, т. е. что $X=(0;\ 4/3;\ 5;\ 0)$ является оптимальным планом задачи (49) — (51). В то же время $X=(0;\ 4/3;\ 5;\ 0)$ не является планом задачи (49) — (52), так как переменная x_2 принимает дробное значение. Поэтому вводим

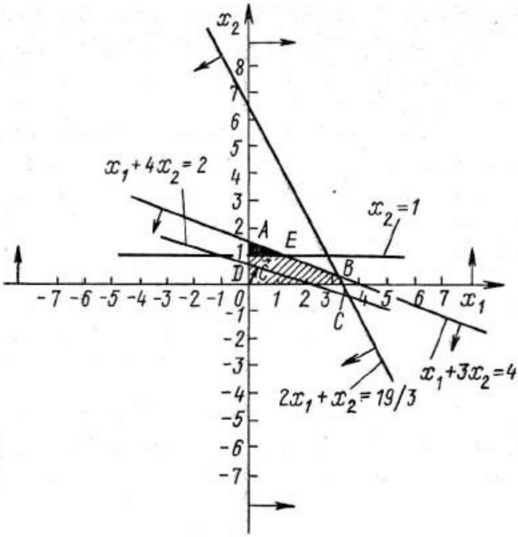


Рис. 2.4

дополнительное ограничение $x_1+x_4 \geqslant 1$, откуда, подставляя вместо x_4 его значение из второго уравнения системы уравнений (50), получаем $x_2 \leqslant 1$. Этому неравенству на рис. 2.4 соответствует полуплоскость, ограниченная прямой $x_2=1$, отсекающей от многоугольника $OABC$ треугольник ADE. В области $ODEBC$ находим точку E (1; 1), в которой функция (49) принимает максимальное значение. Так как координаты точки E — целые числа, то $X^*=(1;\ 1;\ 10/3;\ 0)$ является оптимальным планом задачи (49) — (52). Это видно и из табл. 2.31.

3. Использование ППП ЛП АСУ для решения задач целочисленного программирования. Как уже отмечалось выше, решение задачи целочисленного программирования может быть найдено с использованием ППП ЛП АСУ. При этом число переменных решаемой задачи при оперативной памяти, равной 1024 Кбайт, не должно превышать 4095. Для решения задач целочисленного программирования используется метод ветвей и границ.

Процесс нахождения решения задачи целочисленного программирования с использованием ППП ЛП АСУ включает те же основные этапы, что и при нахождении решения задачи линейного программирования с использованием данного пакета. Однако здесь имеется некоторая специфика в записи исходных данных и в управляющей программе. Основной особенностью записи целочисленных переменных является то, что в секции COLUMNS запись каждого набора целочисленных переменных начинается и заканчивается специальными маркерами, а в секции BOUNDS обязательным является задание верхних границ целочисленных переменных. Эти границы определяются исходя из условий каждой конкретной задачи.

В начале каждого набора целочисленных переменных в поле 2 записывается присвоенное имя начала набора переменных (оно может быть любым и должно отличаться от других используемых маркеров и имен), в поле 3 указывается ключевое слово 'MARKER', а в поле 5 записывается маркер начала набора переменных 'INTORG'. Все остальные поля остаются пустыми.

После записи данного набора целочисленных переменных в поле 2 указывается имя конца набора переменных, в поле 3 записывается ключевое слово 'MARKER', а в поле 5 указывается маркер конца набора 'INTEND'.

2.51. Используя ПП ЛП АСУ, найти решение задачи 2.49, целочисленного программирования, состоящей в определении максимального значения функции

$$F=3x_1+2x_2 \tag{54}$$

при условиях

$$\left\{\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \quad &=13,\\ x_1-x_2+x_4 \quad &=\ 6,\\ -3x_1+x_2 \quad +x_5 &=\ 9, \end{aligned}\right. \tag{55}$$

$$x_j\geqslant 0,\ x_j\text{ — целые } (j=\overline{1,5}). \tag{56}$$

Решение. В соответствии с требованием ППП ЛП АСУ каждой переменной, целевой функции и уравнениям системы ограничений задачи присваиваем имена. Переменным x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 присвоим соответственно имена ПЕРХ1, ПЕРХ2, ПЕРХ3, ПЕРХ4, ПЕРХ5, целевой функции — имя ФУНКЦИЯ и каждому из уравнений (55) соответственно имена ОГР1, ОГР2 и ОГР3.

В соответствии с введенными обозначениями целевую функцию и систему уравнений (55) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{ФУНКЦИЯ} = && 3\text{ПЕРХ1}+2\text{ПЕРХ2}\\ &\text{ОГР1} = && \text{ПЕРХ1}+\text{ПЕРХ2}+\text{ПЕРХ3}\\ &\text{ОГР2} = && \text{ПЕРХ1}-\text{ПЕРХ2}+\text{ПЕРХ4}\\ &\text{ОГР3} = && -3\text{ПЕРХ1}+\text{ПЕРХ2}+\text{ПЕРХ5} \end{aligned}$$

Используя последнюю систему уравнений, составляем матрицу исходных данных задачи (табл. 2.32).

Таблица 2.32

Строчные переменные	Столбцовые переменные					Нижняя граница	Верхняя граница
	ПЕРХ1	ПЕРХ2	ПЕРХ3	ПЕРХ4	ПЕРХ5		
ФУНКЦИЯ	3	2	—	—	—	—	—
ОГР1	1	1	1	—	—	13	13
ОГР2	1	−1	—	1	—	6	6
ОГР3	−3	1	—	—	1	9	9
Нижняя граница	—	—	—	—	—	—	—
Верхняя граница	—	—	—	—	—	—	—

С помощью табл. 2.32 записываем исходные данные на бланке для последующей перфорации (рис. 2.6). Как видно из рис. 2.6, запись исходных данных рассматриваемой задачи отличается от записи исходных данных такой же задачи линейного программирования тем, что в секции COLUMNS набор целочисленных переменных начинается и заканчивается специальными маркерами (началу набора переменных присвоено имя 1МУ1, а концу набора переменных — имя 1МУ2) и в секции BOUNDS указана верхняя граница для каждой из целочисленных переменных исходной задачи. В качестве такой границы взято число 40. Выбор его в определенной степени произволен. А именно: из условий задачи видно, что в ее целочисленном решении каждая из переменных не может принять значение, большее 40. Отметим, что задавать

```
1        10        20        30        40        50        60
         PROGRAM
         INITIALZ
         MOVE(XDATA,'ПРИМЕР')
         MOVE(XPBNAME,'PRIM')
         CONVERT('SUMMARY')
         BCDOUT
         SETUP('BOUND','R','MIN','NODES',40)
         MOVE(XOBJ,'ФУНКЦИЯ')
         MOVE(XRHS,'РЕСУРС')
         XGUARDPF=1
         OPTIMIZE
         SOLUTION
         OPTIMIX('COST',0,0,0,0)
         EXIT
         PEND
/*
```

Рис. 2.5

```
1        10        20        30        40        50        60
NAME          ПРИМЕР
ROWS
 N  ФУНКЦИЯ
 E  ОГР1
 E  ОГР2
 E  ОГР3
COLUMNS
    IMY1      'MARKER'                 'INTORG'
    ПЕРХ1     ФУНКЦИЯ         3.0      ОГР1            1.0
    ПЕРХ1     ОГР2            1.0      ОГР3           -3.0
    ПЕРХ2     ФУНКЦИЯ         2.0      ОГР1            1.0
    ПЕРХ2     ОГР2           -1.0      ОГР3            1.0
    ПЕРХ3     ОГР1            1.0
    ПЕРХ4     ОГР2            1.0
    ПЕРХ5     ОГР3            1.0
    IMY2      'MARKER'                 'INTEND'
RHS
    РЕСУРС    ОГР1           13.0      ОГР2            6.0
    РЕСУРС    ОГР3            9.0
BOUNDS
 UP R         ПЕРХ1          40.0
 UP R         ПЕРХ2          40.0
 UP R         ПЕРХ3          40.0
 UP R         ПЕРХ4          40.0
 UP R         ПЕРХ5          40.0
ENDATA
/*
```

Рис. 2.6

слишком большие верхние границы не следует, так как это увеличивает время решения задачи.

После записи исходных задачи на бланке определяем управляющую программу (рис. 2.5) и проводим решение задачи. Оно выдается в виде ряда отчетов о процессе нахождения решения задачи. Основной из них приведен в табл. 2.33. Содержащийся

Таблица 2.33

СЕКЦИЯ 1 — СТРОКИ

Номер	Строка	Тип	Решение	Дополнительная переменная	Нижняя граница	Верхняя граница	Оценка строки
1	ФУНКЦИЯ	BS	35.00000	35.00000—	Нет	Нет	1.00000
2	ОГР1	EQ	13.00000	.	13.00000	13.00000	2.00000—
3	ОГР2	EQ	6.00000	.	6.00000	6.00000	
4	ОГР3	EQ	9.00000	.	9.00000	9.00000	

СЕКЦИЯ 2 — СТОЛБЦЫ

Номер	Строка	Тип	Решение	Коэффициент целевой функции	Нижняя граница	Верхняя граница	Оценка столбца
5	ПЕРХ1	IV	9.00000	3.00000	.	40.00000	1.00000
6	ПЕРХ2	IV	4.00000	2.00000	.	40.00000	.
7	ПЕРХ3	IV	.	.	.	40.00000	2.00000—
8	ПЕРХ4	IV	1.00000	.	.	40.00000	.
9	ПЕРХ5	IV	32.00000	.	.	40.00000	

в этой таблице отчет о решении исходной задачи целочисленного программирования ничем не отличается от отчета решения задачи линейного программирования, за исключением лишь того, что в графе «Тип» СЕКЦИИ2—СТОЛБЦЫ целочисленные переменные имеют обозначения IV.

Используя рассмотренные методы, найдите решение задач 2.52—2.58.

2.52. $F=7x_1+x_2\to\max;$

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2+x_3 = 110, \\ 11x_1-3x_2-x_4 = 24, \\ 2x_1-7x_2-x_5 = 15, \end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0,\ x_j \text{ — целые } (j=\overline{1,5}).$$

2.53. $F=-5x_1+8x_2-3x_3+4x_4+7x_5+6x_6\to\max;$

$$\begin{cases} -2x_1-3x_2-4x_3+2x_4+x_5+x_6\leqslant 24, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_4+2x_5+x_6\leqslant 30, \\ -4x_1-x_2-5x_3+3x_4+x_5+2x_6\leqslant 60, \end{cases}$$

$$0\leqslant x_j\leqslant 10,\ x_j \text{ — целые } (j=\overline{1,6}).$$

2.54. $F=60x_1+70x_2+120{,}4x_3+130x_4\to\max;$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=16, \\ x_1+1{,}85x_2+x_3+x_4\leqslant 16, \\ x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 10, \\ 4x_1+6{,}9x_2+10x_3+13x_4\leqslant 100, \\ 6{,}3x_1+5x_2+4x_3+3x_4\leqslant 100. \end{cases}$$

$$x_j\geqslant 0,\ x_j \text{ — целые } (j=\overline{1,4}).$$

2.55. $F=5x_1+2x_2-3x_3+2x_4+3x_5-3x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1+6x_2+4x_3+2x_4-3x_5+5x_6=11, \\ 5x_1+5x_2+7x_3+\qquad\quad 3x_5+5x_6=10, \\ 2x_1+2x_2+2x_3+\qquad\quad \underline{3x_5} \qquad = 4, \end{cases}$$
$x_j \geqslant 0$, x_j — целые $(j=\overline{1,6})$.

2.56. Для выполнения четырех видов землеройных работ могут быть использованы экскаваторы четырех типов. Производительность экскаватора i-го типа при выполнении j-й работы задается матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}9 \\ 0{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Учитывая, что на каждой из работ может быть занят только лишь один экскаватор и что все экскаваторы должны быть задействованы, найти такое распределение экскаваторов между работами, которое обеспечивает максимальную производительность.

2.57. Пароход может быть использован для перевозки 11 наименований груза, масса, объем и цена единицы каждого из которых приведены в следующей таблице:

Параметры единицы груза	Номер груза										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Масса (т)	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65	83
Объем ($м^3$)	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114	86
Цена (тыс. руб)	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9	4,0

На пароход может быть погружено не более 800 т груза общим объемом, не превышающим 600 $м^3$. Определить, сколько единиц каждого груза следует поместить на пароход так, чтобы общая стоимость размещенного груза была максимальной.

2.58. Из листового проката нужно выкроить заготовки четырех видов. Один лист длиной 184 см можно разрезать на заготовки длиной 45, 50, 65 и 85 см. Всего заготовок каждого вида необходимо соответственно 90, 96, 88 и 56 шт. Способы разреза одного листа на заготовки и величина отходов при каждом способе приведены в следующей таблице:

Длина заготовки (см)	Количество заготовок, выкраиваемых из одного листа при разрезе способом												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
45	4	2	2	2	1	1	1	1	—	—	—	—	—
50	—	1	—	—	2	—	1	1	3	2	1	—	2
65	—	—	1	—	—	2	1	—	—	1	2	1	
85	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	1	
Величина отходов (см)	4	44	29	9	39	9	24	4	34	19	4	34	14

Определить, какое количество листов по каждому из способов следует разрезать, чтобы получить нужное количество заготовок данного вида при минимальных общих отходах.

§ 2.3. ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Экономическая и геометрическая интерпретации задачи параметрического программирования. Во многих задачах математического программирования исходные данные зависят от некоторого параметра. Такие задачи называются задачами параметрического программирования.

Рассмотрим зависимость исходных данных от некоторого параметра применительно к основной задаче линейного программирования.

Задача, в которой коэффициенты целевой функции линейно зависят от параметра t, заключается в нахождении для каждого значения параметра t из промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ максимального значения функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} (c'_j+c''_j t)\, x_j \tag{57}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \ (i=\overline{1, m}), \tag{58}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1, n}), \tag{59}$$

где c'_j, c''_j, a_{ij} и b_i — заданные постоянные числа.

Если от параметра t линейно зависят свободные члены системы ограничений, то задача состоит в нахождении для каждого значения параметра t из промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ максимального значения линейной функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{60}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b'_i+b''_i t \ (i=\overline{1, m}), \tag{61}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=1, n), \tag{62}$$

где c_j, a_{ij}, b'_i и b''_i— заданные постоянные числа.

В том случае, когда от параметра t линейно зависят как коэффициенты целевой функции, так и свободные члены системы ограничений, задача состоит в нахождении для каждого значения параметра t из промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ максимального значения функции

$$F=\sum_{j=1}^{n}(c'_j+c''_j t)x_j \tag{63}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b'_i+b''_i t(i=\overline{1, m}), \tag{64}$$

$$x_j\geqslant 0 \quad (j=\overline{1, n}). \tag{65}$$

Обобщением этих задач является общая задача параметрического программирования, в которой от параметра t линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции, коэффициенты при неизвестных в системе уравнений и свободные члены системы уравнений. Она заключается в следующем. Для каждого значения параметра t из некоторого промежутка его изменения $[\alpha, \beta]$ требуется найти максимальное значение функции

$$F=\sum_{j=1}^{n}(c'_j+c''_j t)x_j \tag{66}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}(a'_{ij}+a''_{ij}t)x_j=b'_i+b''_i t \quad (i=\overline{1, m}), \tag{67}$$

$$x_j\geqslant 0 \ (j=\overline{1, n}). \tag{68}$$

Решение сформулированных задач можно найти методами линейного программирования, о чем более подробно будет сказано в дальнейшем. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задач параметрического программирования, остановившись более подробно на задаче (57)—(59). Предположим, что множество неотрицательных решений системы линейных уравнений (58) (многогранник решений) не пусто и включает более чем одну точку. Тогда исходная задача состоит в определении при каждом значении параметра $t\in[\alpha, \beta]$ такой точки многогранника решений, в которой функция (57) принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, будем считать $t=t_0$ и, используя геометрическую интерпретацию, находим решение полученной задачи линейного программирования (57)—(59), т. е.

либо определяем вершину многогранника решений, в которой функция (57) имеет максимальное значение, либо устанавливаем, что при данном значении t_0 задача неразрешима. После того как найдена точка, в которой при $t=t_0$ функция (57) принимает максимальное значение, ищется множество значений t, для которых координаты указанной точки определяют оптимальный план задачи (57) — (59). Найденные значения параметра t исключаются из рассмотрения и берется некоторое новое значение t, принадлежащее промежутку $[\alpha, \beta]$. Для выбранного значения параметра t_1 определяется оптимальный план полученной задачи или устанавливается ее неразрешимость. После этого находится отрезок изменения параметра t, принадлежащий промежутку $[\alpha, \beta]$, для которого найденная точка определяет оптимальный план или для которого задача неразрешима. В результате после конечного числа шагов для каждого значения параметра t из промежутка $[\alpha, \beta]$ либо находится оптимальный план, либо устанавливается неразрешимость задачи.

2.59. Предприятие должно выпустить два вида продукции A и B, для изготовления которых используется три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на производство единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.34. В ней же указаны запасы сырья каждого вида, которое может быть использовано на производство единицы продукции данного вида.

Известно, что цена единицы продукции может изменяться для изделия A от 2 до 12 руб., а для изделия B — от 13 до 3 руб., причем эти изменения определяются соотношениями $c_1=2+t$, $c_2=13-t$, где $0\leqslant t\leqslant 10$.

Для каждого из возможных значений цены единицы продукции каждого из видов найти такой план их производства, при котором общая стоимость продукции является максимальной.

Таблица 2.34

Вид сырья	Нормы расхода сырья на производство единицы продукции		Запасы сырья
	A	B	
I	4	1	16
II	2	2	22
III	6	3	36

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции A и x_2 единиц продукции B. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении для каждого значения параметра t $(0\leqslant t\leqslant 10)$ максимального значения

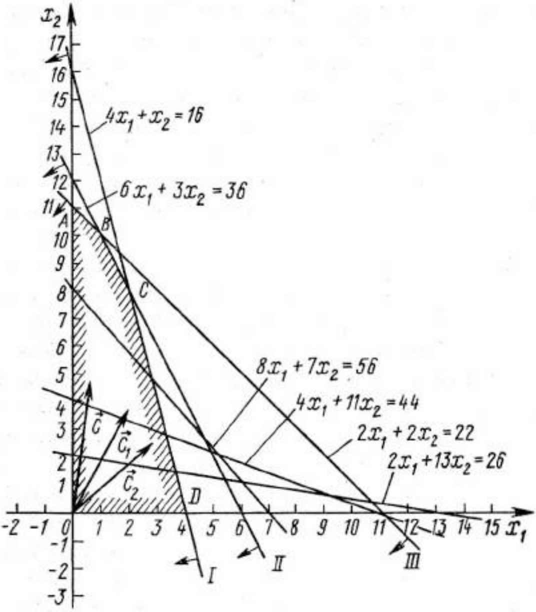


Рис. 2.7

функции

$$F=(2+t)x_1+(13-t)x_2 \tag{69}$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1+x_2\leqslant 16, \\ 2x_1+2x_2\leqslant 22, \\ 6x_1+3x_2\leqslant 36, \end{cases} \tag{70}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0. \tag{71}$$

Чтобы найти решение задачи (69) — (71), строим многоугольник решений, определяемый системой линейных неравенств (70) и условием неотрицательности переменных (71) (рис. 2.7). После этого, полагая $t=0$, строим прямую $2x_1+13x_2=26$ (число 26 взято произвольно) и вектор $\vec{C}=(2;\ 13)$. Передвигая построенную прямую в направлении вектора $\vec{C}$, видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений $OABCD$ является точка $A\,(0;\ 11)$. Следовательно, задача, полученная из задачи (69) — (71) при $t=0$, имеет оптимальный план $X_0^*=(0;$

11). Это означает, что если цена единицы продукции A равна $2+0=2$ руб., а цена единицы продукции B равна $13-0=13$ руб., то оптимальным планом производства является план, согласно которому производится 11 изделий B и не производятся изделия A. При таком плане производства продукции ее стоимость максимальна и равна $F_{\max}=143$.

Положим теперь $t=2$ и построим прямую $(2+2)x_1+$ $+(13-2)x_2=4x_1+11x_2=44$ (число 44 взято произвольно) и вектор $\vec{C}_1=(4; 11)$. Передвигая построенную прямую в направлении вектора $\vec{C}_1$, видим, что последней ее общей точкой с многоугольником решений является точка A (0; 11). Следовательно, задача, полученная из задачи (69) — (71) при $t=2$, имеет оптимальный план $X_0^*=(0; 11)$. Это означает, что если цена единицы продукции A равна $2+2=4$ руб., а цена единицы продукции B равна $13-2=11$ руб., то предприятию также наиболее целесообразно производить 11 ед. продукции вида B и совсем не производить продукцию вида A. При таком плане производства продукции ее общая стоимость является максимальной и составляет $F_{\max}=$ $=(2+2)\cdot 0+(13-2)\cdot 11=121$ руб.

Как видно из рис. 2.7, данный план производства продукции будет оставаться оптимальным для всякого значения t, пока прямая $(2+t)x_1+(13-t)x_2=h$ не станет параллельной прямой $2x_1+2x_2=22$. Это произойдет тогда, когда $(2+t)/2=(13-t)/2$, т. е. при $t=5{,}5$. При этом значении t координаты любой точки отрезка AB дают оптимальный план задачи (69) — (71).

Таким образом, для всякого $0\leqslant t\leqslant 5{,}5$ задача (69) — (71) имеет оптимальный план $X_0^*=(0; 11)$, при котором значение целевой функции (69) есть

$$F_{\max}=(2+t)\cdot 0+(13-t)\cdot 11=143-11t.$$

Возьмем теперь какое-нибудь значение параметра t, большее 5,5, например 6. Полагая $t=6$, найдем решение соответствующей задачи (69) — (71). Для этого построим прямую $(2+6)x_1+$ $+(13-6)x_2=8x_1+7x_2=56$ (число 56 взято произвольно) и вектор $\vec{C}_2=(8; 7)$. Передвигая построенную прямую в направлении вектора $\vec{C}_2$, видим, что последней ее общей точкой с многоугольником решений является точка B (1; 10). Следовательно, задача, полученная из задачи (69) — (71) при $t=6$, имеет оптимальный план $X_1^*=(1; 10)$. Это означает, что если цена единицы продукции A равна $2+6=8$ руб., а цена единицы продукции B равна $13-6=7$ руб., то оптимальным планом ее изготовления является план, согласно которому производится одно изделие вида A и 10 изделий вида B. При этом плане общая стоимость производимой продукции максимальна: $F_{\max}=8\cdot 1+7\cdot 10=78$ руб.

Как видно из рис. 2.7, план $X_1^* = (1;\ 10)$ является оптимальным планом задачи (69) — (71) для всякого $t > 5{,}5$ до тех пор, пока прямая $(2+t)x_1 + (13-t)x_2 = h$ не станет параллельной прямой $6x_1 + 3x_2 = 36$. Это произойдет тогда, когда $(2+t)/6 = (13-t)/3$, т. е. при $t = 8$. При этом значении t координаты любой точки отрезка BC дают оптимальный план задачи (69) — (71).

Таким образом, для всякого $5{,}5 \leqslant t \leqslant 8$ задача (69) — (71) имеет оптимальный план $X_1^* = (1;\ 10)$, при котором значение линейной функции (69) составляет

$$F_{\max} = (2+t)\cdot 1 + (13-t)\cdot 10 = 132 - 9t.$$

Используя рис. 2.7 и проводя аналогичные рассуждения, получим, что для всякого $8 \leqslant t \leqslant 10$ оптимальным планом задачи (69) — (71) является $X_2^* = (2;\ 8)$. Это означает, что если цена единицы продукции вида A заключена между (или равна) 10 и 12 руб., а единицы продукции B — между (или равна) 3 и 5 руб., то оптимальным планом ее производства является такой план, согласно которому изготовляется 2 ед. продукции вида A и 12 ед. продукции вида B. При этом плане производства продукции ее общая стоимость для каждого значения параметра $8 \leqslant t \leqslant 10$ составляет $F_{\max} = 108 - 6t$.

Таким образом, получаем следующее решение задачи (69) — (71): если $0 \leqslant t \leqslant 5{,}5$, то оптимальным планом является $X_0^* = (0;\ 11)$, причем $F_{\max} = 143 - 11t$; если $5{,}5 \leqslant t \leqslant 8$, то оптимальным планом является $X_1^* = (1;\ 10)$, причем $F_{\max} = 132 - 9t$; наконец, если $8 \leqslant t \leqslant 10$, то оптимальный план $X_2^* = (2;\ 8)$, причем $F_{\max} = 108 - 6t$.

Используя геометрическую интерпретацию задачи параметрического программирования и считая, что $-\infty < t < \infty$, найдите решение задач 2.60 и 2.61.

2.60. $F = 6x_1 + (4+t)x_3 + (12-t)x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -1/2x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0.$$

2.61. $F = 5x_1 - (3+t)x_2 + (4+t)x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12; \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0.$$

Составьте математические модели задач 2.62 и 2.63.

2.62. Для производства n видов продукции, сбыт которой обеспечен, предприятие использует m видов сырья. Нормы расхода сырья i-го вида на производство единицы продукции j-го вида равны a_{ij} ($i=\overline{1, m}$; $j=\overline{1, n}$). Известна также и прибыль от реализации единицы продукции j-го вида, равная c_j ($j=\overline{1, m}$). Предприятие может использовать не более чем $b_i'+b''t$ ($i=\overline{1, m}$) единиц сырья i-го вида, где t — некоторый параметр, значения которого принадлежат промежутку изменения (α, β). Для каждого значения t определить план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации является максимальной.

2.63. В производственном объединении n видов продукции могут производиться m технологическими способами. Потребность в продукции каждого вида определяется числами b_i ($i=\overline{1, m}$). Количество i-й продукции, изготовляемой j-м технологическим способом в единицу времени, равно $a_{ij}'+a_{ij}''t$, где t — некоторый параметр ($\alpha \leqslant t \leqslant \beta$). Для каждого значения параметра t определить план производства продукции, согласно которому необходимое количество продукции каждого вида будет изготовлено за минимальное время.

2. Нахождение решения задачи параметрического программирования. Решение задачи, целевая функция которой содержит параметр. Продолжим рассмотрение задачи (57)—(59). Считая значение параметра t равным некоторому числу $t_0 \in [\alpha, \beta]$, находим симплексным методом или методом искусственного базиса решение полученной таким образом задачи линейного программирования.

В результате при данном значении t_0 либо найдем оптимальный план задачи (57)—(59), либо установим ее неразрешимость. В первом случае, используя элементы $(m+1)$-й строки последней симплекс-таблицы решения задачи, в которой записаны числа $\Delta_j(t_0)=\Delta_j'+t_0\Delta_j''$, находим:

$$\underline{t}=\begin{cases} \max(-\Delta_j'/\Delta_j''), & \text{если существует } \Delta_j''>0; \\ -\infty, & \text{если } \Delta_j''\leqslant 0; \end{cases} \tag{72}$$

$$\overline{t}=\begin{cases} \min(-\Delta_j'/\Delta_j''), & \text{если существует } \Delta_j''<0; \\ \infty, & \text{если все } \Delta_j''\geqslant 0. \end{cases} \tag{73}$$

Для всех $\underline{t}\leqslant t\leqslant \overline{t}$ задача (57)—(59) имеет один и тот же оптимальный план, что и при t_0.

В том случае, если задача (57)—(59) при t_0 неразрешима, в $(m+1)$-й строке последней симплекс-таблицы ее решения имеется число $\Delta_k=\Delta_k'+t_0\Delta_k''<0$, где $x_{ik}\leqslant 0$ ($i=\overline{1, m}$). Тогда:

1) если $\Delta_k''=0$, то задача (57)—(59) неразрешима для любого t;

2) если $\Delta_k''<0$, то задача (57)—(59) неразрешима для всех $t<t_1=-\Delta_k'/\Delta''_k$;

3) если $\Delta_k'' > 0$, то задача (57) — (59) неразрешима для всех $t > t_1$.

Определив все значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для которых задача (57) — (59) имеет один и тот же оптимальный план или для которых задача неразрешима, получаем промежуток изменения параметра t, который исключаем из рассмотрения. Снова полагаем значение параметра t равным некоторому числу, принадлежащему промежутку $[\alpha, \beta]$, и находим решение полученной задачи.

После конечного числа итераций определяется либо промежуток, в котором для всех значений параметра задача имеет один и тот же оптимальный план, либо промежуток, в котором для всех значений параметра задача не имеет решения.

Итак, процесс нахождения решения задачи (57) — (59) включает следующие этапы:

1. Считая значение параметра t равным некоторому числу $t_0 \in [\alpha, \beta]$, находят оптимальный план X^* или устанавливают неразрешимость полученной задачи линейного программирования.

2. Определяют множество значений параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для которых найденный оптимальный план является оптимальным или задача неразрешима. Эти значения параметра исключают из рассмотрения.

3. Полагают значение параметра t равным некоторому числу, принадлежащему оставшейся части промежутка $[\alpha, \beta]$, и симплексным методом находят решение полученной задачи линейного программирования.

4. Определяют множество значений параметра t, для которых новый оптимальный план остается оптимальным или задача неразрешима. Вычисления повторяют до тех пор, пока не будут исследованы все значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$.

2.64. Для всех значений параметра t $(-\infty < t < \infty)$ найти максимальное значение функции

$$F = 2x_1 + (3+4t)x_2 \tag{74}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 12, \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 & = 10, \\ -x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 & = 6, \end{cases} \tag{75}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0. \tag{76}$$

Р е ш е н и е. Считая в целевой функции исходной задачи значение параметра t равным 0 (число 0 взято произвольно), находим симплексным методом ее оптимальный план $X_0^* = (3;\ 9;\ 0;\ 16;\ 0)$ (табл. 2.35). После этого определяем значения параметра t, для которых $X_0^* = (3;\ 9;\ 0;\ 16;\ 0)$ остается оптимальным планом. Очевидно, это будет тогда, когда среди элементов 4-й строки последней симплекс-таблицы (кроме элемента, стоящего в столбце вектора P_0) не будет отрицательных, т. е. при $2{,}5 + 2t \geqslant 0$ и $0{,}5 + 2t \geqslant 0$, откуда $t \geqslant -0{,}25$. Итак, если $t \in [-0{,}25,\ \infty)$, то задача (74)—(76) имеет оптимальный план $X_0^* = (3;\ 9;\ 0;\ 16;\ 0)$, при котором $F_{max} = 33 + 36t$.

Таблица 2.35

i	Базис	$C_б$	P_0	2	$3+4t$	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	12	1	1	1	0	0
2	P_4	0	10	1	-1	0	1	0
3	P_5	0	6	-1	1	0	0	1
4			0	-2	$-3-4t$	0	0	0
1	P_3	0	6	2	0	1	0	-1
2	P_4	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	$3+4t$	6	-1	1	0	0	1
			$18+24t$	$-5-4t$	0	0	0	$3+4t$
1	P_1	2	3	1	0	$1/2$	0	$-1/2$
2	P_4	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	$3+4t$	9	0	1	$1/2$	0	$1/2$
4			$33+36t$	0	0	$2{,}5+2t$	0	$0{,}5+2t$

Возьмем теперь некоторое значение параметра t, меньшее чем $-0{,}25$. Тогда элемент, стоящий в 4-й строке столбца вектора P_5 последней симплекс-таблицы (табл. 2.35), станет отрицательным. Следовательно, при данном значении параметра t план $X = (3;\ 9;\ 0;\ 16;\ 0)$ не является оптимальным. Поэтому переходим к новому опорному плану, для чего исключим из базиса вектор P_4 и введем в него вектор P_5 (табл. 2.36).

Таблица 2.36

i	Базис	$C_б$	P_0	2	$3+4t$	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	11	1	0	0,5	0,5	0
2	P_5	0	16	0	0	0	1	1
3	P_2	$3+4t$	1	0	1	0,5	$-0{,}5$	0
4			$25+4t$	0	0	$2{,}5+2t$	$-0{,}5-2t$	0

Полученный новый план $X_1^* = (11;\ 1;\ 0;\ 0;\ 16)$ является оптимальным при $2{,}5 + 2t \geqslant 0$ и $-0{,}5 - 2t \geqslant 0$, т. е. при $-1{,}25 \leqslant t \leqslant 0{,}25$. Таким образом, если $t \in [-1{,}25;\ -0{,}25]$, то задача (74) — (76) имеет оптимальный план $X_1^* = (11;\ 1;\ 0;\ 0;\ 16)$, при котором $F_{\max} = 25 + 4t$.

Найдем теперь решение задачи при $t < -1{,}25$. В этом случае элемент, стоящий в 4-й строке столбца вектора P_3 табл. 2.36, отрицателен. Следовательно, записанный в таблице опорный план не является оптимальным. Переходим к новому опорному плану, для чего исключим из базиса вектор P_2 и введем в него вектор P_3 (табл. 2.37).

Таблица 2.37

i	Базис	$C_б$	P_0	2	$3+4t$	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_1	2	10	1	-1	0	1	0
2	P_5	0	16	0	0	0	1	1
3	P_3	0	2	0	2	1	-1	0
4			20	0	$-5-4t$	0	2	0

Полученный опорный план является оптимальным для любого t такого, что $-5 - 4t \geqslant 0$, т. е. для $t \leqslant -1{,}25$.

Следовательно, для $t \in (-\infty;\ -1{,}25]$ исходная задача имеет оптимальный план $X_2^* = (10;\ 0;\ 2;\ 0;\ 16)$, при котором $F_{\max} = 20$.

Итак, если $t \in (-\infty,\ -1{,}25]$, то задача (74) — (76) имеет оптимальный план $X_2^* = (10;\ 0;\ 2;\ 0;\ 16)$, а $F_{\max} = 20$; если $t \in [-1{,}25;\ -0{,}25]$, то $X_1^* = (11;\ 1;\ 0;\ 0;\ 16)$ — оптимальный план, а $F_{\max} = 25 + 4t$; если $t \in [-0{,}25,\ \infty)$, то $X_0^* = (3;\ 9;\ 0;\ 16;\ 0)$ — оптимальный план, а $F_{\max} = 33 + 36t$.

2.65. Предприятие для изготовления различных изделий A, B и C использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на производство единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.38. В ней же указана цена изделия каждого вида.

Таблица 2.38

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	B	C
I	18	15	12
II	6	4	8
III	5	3	3
Цена единицы продукции (руб)	9	10	16

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен). Однако производство ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем I вида в количестве 360 кг, II вида — в количестве 192 кг и III вида — в количестве 180 кг.

Найти план производства изделий, реализация которого обеспечивает максимальный выпуск продукции в стоимостном выражении. Одновременно с этим провести анализ утойчивости оптимального плана задачи при условиях возможного изменения цены единицы каждого из изделий.

Р е ш е н и е. Составим математическую модель задачи. Обозначим планируемый выпуск изделий вида A через x_1, изделий вида B — через x_2 и изделий вида C — через x_3. Тогда математическая постановка задачи состоит в определении максимального значения функции

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \tag{77}$$

при условиях

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leqslant 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leqslant 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leqslant 180, \end{cases} \tag{78}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \tag{79}$$

Найдем решение задачи (77) — (79) симплексным методом. Оно приведено в табл. 2.39 (подробное решение задачи приведено в § 1.4, см. задачу 1.41).

Т а б л и ц а 2.39

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	−1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	−1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	−1/6	−1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Из этой таблицы видно, что оптимальным планом производства изделий A, B и C является план, согласно которому производится 8 изделий вида B, 20 изделий вида C и не производятся изделия вида A. При этом плане общая стоимость изготовляемой продукции максимальна и равна 400 руб.

Установим теперь возможные границы изменения цен каждого из изделий, внутри которых найденный оптимальный план производства продукции не меняется. Начнем с изделия вида A. Предположим, что его цена c_1 равна не 9 руб., а $9+t_1$ руб., где t_1 — некоторый параметр (очевидно, можно считать $-9 < t_1 < \infty$). Тогда требуется найти такие значения параметра t_1, при которых найденный план $X^* = (0;\ 8;\ 20)$ реализует максимальное значение функции

$$F = (9+t_1)x_1 + 10x_2 + 16x_3$$

при условиях (78) и (79). Чтобы сделать это, будем считать $c_1 = 9+t_1$ и с учетом этого составим табл. 2.40, в которой первые три строки возьмем из табл. 2.39, а 4-ю строку вычислим по правилам, рассмотренным в § 1.4.

Таблица 2.40

i	Базис	$C_б$	P_0	$9+t_1$	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	−1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	−1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	−1/6	−1/8	1
4			400	$5-t_1$	0	0	2/9	5/3	0

Как видно из табл. 2.40, план $X^* = (0;\ 8;\ 20)$ является оптимальным для построенной задачи параметрического программирования при $5-t_1 \geqslant 0$, т. е. при $t_1 \leqslant 5$. Это означает, что если цена c_1 одного изделия вида A меньше или равна 14 руб., то задача (77) — (79) имеет оптимальный план $X^* = (0;\ 8;\ 20)$, т. е. предприятию нецелесообразно включать в план производства продукции выпуск изделий вида A при условии, что цена одного такого изделия не превышает 14 руб. При этом заметим, что, предполагая возможным изменение цены одного изделия A, мы считаем, что все остальные исходные данные задачи остаются неизменными.

Аналогично можно показать, что если цена c_2 одного изделия вида B изменяется от 8 до 20 руб., т. е. если $8 \leqslant c_2 \leqslant 20$, то оптимальным планом производства продукции является план, согласно которому изготовляется 8 изделий вида B и 20 изделий вида C. Отметим, что при изменении цены одного изделия вида B мы считаем постоянными все остальные исходные данные задачи. Одновременно с этим заметим, что хотя указанный план и остается оптимальным, значения целевой функции при разных значениях c_2 неодинаковы. Наконец, аналогично показывается, что если цена c_3 одного изделия вида C изменяется от 8 до 20 руб., т. е. $8 \leqslant c_3 \leqslant 20$, то оптимальным планом производства продукции также является план, согласно которому производится 8 изделий вида B и 20 изделий вида C.

Мы провели анализ чувствительности оптимального плана задачи (77) — (79) при возможном изменении цены каждого из изделий. Аналогично можно провести анализ чувствительности оптимального плана этой задачи при одновременном изменении значений нескольких коэффициентов целевой функции.

Решение задачи, правые части ограничений которой содержат параметр. Алгоритм решения задачи (60) — (62) подобен рассмотренному выше алгоритму решения задачи (57) — (59).

Полагая значение параметра t равным некоторому числу t_0, находим решение полученной задачи линейного программирования (60) — (62). При данном значении параметра t_0 либо определяем оптимальный план, либо устанавливаем неразрешимость задачи. В первом случае найденный план является оптимальным для любого $\underline{t} \leqslant t \leqslant \overline{t}$, где

$$\underline{t} = \begin{cases} \max\,(-q_i/p_i), & \text{если существуют } p_i > 0; \\ -\infty, & \text{если все } p_i \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\overline{t} = \begin{cases} \min\,(-q_i/p_i), & \text{если существуют } p_i < 0; \\ \infty, & \text{если все } p_i \geqslant 0, \end{cases}$$

и числа q_i и p_i определены компонентами оптимального плана и зависят от t_0:

$$x_i^* = q_i + t_0 p_i$$

Если при $t = t_0$ задача (60) — (62) неразрешима, то либо целевая функция задачи (60) не ограничена на множестве планов, либо система уравнений (61) не имеет неотрицательных решений. В первом случае задача неразрешима для всех $t \in [\alpha, \beta]$, а во втором случае определяем все значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для которых система уравнений (61) несовместна, и исключаем их из рассмотрения.

После определения промежутка, в котором задача (60) — (62) имеет один и тот же оптимальный план или неразрешима, выбираем новое значение параметра t, не принадлежащее найденному промежутку, и находим решение полученной задачи линейного программирования. При этом решение новой задачи ищем с помощью двойственного симплекс-метода. Продолжая итерационный процесс, после конечного числа шагов получаем решение задачи (60) — (62).

Итак, процесс нахождения решения задачи (60) — (62) включает следующие основные этапы:

1. Считая значение параметра t равным некоторому числу $t_0 \in [\alpha, \beta]$, находят оптимальный план или устанавливают неразрешимость полученной задачи линейного программирования.

2. Находят значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для которых задача (60) — (62) имеет один и тот же план или неразрешима. Эти значения параметра t исключают из рассмотрения.

3. Выбирают значение параметра t из оставшейся части промежутка $[\alpha, \beta]$ и устанавливают возможность определения нового оптимального плана. В случае существования оптимального плана находят его двойственным симплекс-методом.

4. Определяют множество значений параметра t, для которых задача имеет один и тот же новый оптимальный план или неразрешима. Вычисления проводят до тех пор, пока не будут исследованы все значения параметра $t \in [\alpha, \beta]$.

2.66. Для каждого значения параметра t $(-\infty < t < \infty)$ найти максимальное значение функции

$$F = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_5 \tag{80}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 - 6t, \end{cases} \tag{81}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geqslant 0. \tag{82}$$

Решение. Считая значение параметра t в системе уравнений (81) равным нулю, находим решение задачи (80) — (82) (табл. 2.41).

Таблица 2.41

i	Базис	$C_б$	P_0	3	−2	5	0	−4
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	5	$12+t$	1	1	1	0	0
2	P_4	0	$8+4t$	2	−1	0	1	0
3	P_5	−4	$10-6t$	−2	2	0	0	1
4			$20+29t$	10	−1	0	0	0
1	P_3	5	$7+4t$	2	0	1	0	−1/2
2	P_4	0	$13+t$	1	0	0	1	1/2
3	P_2	−2	$5-3t$	−1	1	0	0	1/2
4			$25+26t$	9	0	0	0	1/2

Как видно из табл. 2.41, $X_0^* = [0; 5-3t; 7+4t; 13+t; 0)$ при $t=0$ есть оптимальный план задачи. Очевидно, X_0^* является оптимальным планом и тогда, когда среди его компонент не окажется отрицательных чисел, т. е. при $5-3t \geqslant 0$; $7+4t \geqslant 0$; $13+t \geqslant 0$ или при $-7/4 \leqslant t \leqslant 5/3$. Таким образом, если $t \in [-7/4, 5/3]$, то $X_0^* = (0;\ 5-3t;\ 7+4t;\ 13+t;\ 0)$ — оптимальный план задачи (80) — (82), при котором $F_{\max} = 25+26t$.

Исследуем теперь, имеет ли задача оптимальные планы при $t > 5/3$. Если $t > 5/3$, то $5-3t < 0$ и, следовательно, $X = (0; 5-3t; 7+4t; 13+t; 0)$ не является планом задачи. Поэтому при $t > 5/3$ нужно перейти к новому плану, который был бы в то же время и оптимальным. Это можно сделать в том случае, когда в строке вектора P_2 имеются отрицательные числа x'_{2j}. В данном случае это условие выполняется. Поэтому переходим к новому опорному плану, для чего введем в базис вектор P_1 и исключим из него вектор P_2 (табл. 2.42).

Таблица 2.42

i	Базис	$C_б$	P_0	3	-2	5	0	-4
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	5	$17-2t$	0	2	1	0	1/2
2	P_4	0	$18-2t$	0	1	0	1	1
3	P_1	3	$-5+3t$	1	-1	0	0	$-1/2$
4			$70-t$	0	9	0	0	5

Как видно из табл. 2.42, $X_1^* = (-5+3t; 0; 17-2t; 18-2t; 0)$ — оптимальный план задачи для всех t, при которых $17-2t \geqslant 0$; $18-2t \geqslant 0$; $-5+3t \geqslant 0$, т. е. при $5/3 \leqslant t \leqslant 17/2$. Следовательно, если $t \in [5/3, 17/2]$, то $X_1^* = (-5+3t; 0; 17-2t; 18-2t; 0)$ является оптимальным планом исходной задачи, причем $F_{\max} = 70-t$.

Если $t > 17/2$, то $X_1 = (-5+3t; 0; 17-2t; 18-2t; 0)$ не является планом задачи, так как третья компонента $17-2t$ есть отрицательное число. Поскольку среди элементов 1-й строки табл. 2.42 нет отрицательных, при $t > 17/2$ исходная задача неразрешима.

Исследуем теперь разрешимость задачи при $t < -7/4$. В этом случае $X = (0; 5-3t; 7+4t; 13+t; 0)$ (см. табл. 2.41) не является планом задачи, так как третья компонента $7+4t$ есть отрицательное число. Чтобы при данном значении параметра найти оптимальный план (это можно сделать, так как в строке вектора P_3 стоит отрицательное число $-1/2$), нужно исключить из базиса вектор P_3 и ввести в базис вектор P_5 (табл. 2.43).

Таблица 2.43

i	Базис	$C_б$	P_0	3	-2	5	0	-4
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_5	-4	$-14-8t$	-4	0	-2	0	1
2	P_4	0	$20+5t$	3	0	1	1	0
3	P_2	-2	$12+t$	1	1	1	0	0
4			$32+30t$	11	0	1	0	0

Как видно из табл. 2.43, $X_2^*=(0;\ 12+t;\ 0;\ 20+5t;\ -14-8t)$ является оптимальным планом задачи для всех значений параметра t, при которых $-14-8t\geqslant 0$; $20+5t\geqslant 0$; $12+t\geqslant 0$, т. е. при $-4\leqslant t\leqslant -7/4$. Таким образом, если $-4\leqslant t\leqslant -7/4$, то задача (80)—(82) имеет оптимальный план $X_2^*=(0;\ 12+t;\ 0;\ 20+5t;\ -14-8t)$, при котором $F_{\max}=32+30t$.

Из табл. 2.43 также видно, что при $t<-4$ задача неразрешима, поскольку в строке вектора P_4 нет отрицательных элементов.

Итак, если $t\in(-\infty,\ -4)$, то задача не имеет оптимального плана; если $t\in[-4,\ -7/4]$, то $X_2^*=(0;\ 12+t;\ 0;\ 20+5t;\ -14-8t)$ — оптимальный план, а $F_{\max}=32+30t$; если $t\in(-7/4,\ 5/3]$, то $X_0^*=(0;\ 5-3t;\ 7+4t;\ 13+t;\ 0)$ — оптимальный план, а $F_{\max}=25+26t$; если $t\in[5/3,\ 17/2]$, то $X_1^*=(-5+3t;\ 0;\ 17-2t;\ 18-2t;\ 0)$ — оптимальный план, а $F_{\max}=70-t$; если $t\in[17/2,\ \infty)$, то задача неразрешима.

2.67. Для производства продукции трех видов A, B и C необходимы три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в объеме, соответственно не большем чем 180, 210 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции данного вида приведены в табл. 2.44.

Таблица 2.44

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	изделие A	изделие B	изделие C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (руб.)	10	14	12

Определить план производства продукции, обеспечивающий максимальный выпуск ее в стоимостном выражении, и провести анализ устойчивости оптимального плана относительно возможных изменений объемов каждого из используемых видов сырья.

Р е ш е н и е. Предположим, что изделий вида A производится x_1 единиц, изделий вида B — x_2 единиц и изделий вида C — x_3 единиц. Тогда для определения оптимального плана производства нужно решить задачу, состоящую в максимизации целевой функции

$$F=10x_1+14x_2+12x_3 \tag{83}$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+\ \ x_3\leqslant 180, \\ 3x_1+\ \ x_2+3x_3\leqslant 210, \\ \ \ x_1+2x_2+5x_3\leqslant 244, \end{cases} \tag{84}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0. \tag{85}$$

Решение задачи (83)—(85) симплексным методом приведено в табл. 2.45.

Т а б л и ц а 2.45

i	Базис	$C_б$	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	180	4	2	1	1	0	0
2	P_5	0	210	3	1	3	0	1	0
3	P_6	0	244	1	2	5	0	0	1
4			0	−10	−14	−12	0	0	0
1	P_2	14	90	2	1	1/2	1/2	0	0
2	P_5	0	120	1	0	5/2	−1/2	1	0
3	P_6	0	64	−3	0	4	−1	0	1
4			1260	18	0	−5	7	0	0
1	P_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	−1/8
2	P_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	−5/8
3	P_3	12	16	−3/4	0	1	−1/4	0	1/4
4			1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Из этой таблицы видно, что при оптимальном плане производства изделий должно быть изготовлено 82 изделия вида B и 16 изделий вида C. При данном плане общая стоимость изделий равна 1340 руб.

Проведем теперь анализ устойчивости найденного плана относительно возможных изменений сырья каждого вида. Начнем с сырья I вида. Предположим, что производство изделий ограничено не 180 кг сырья I вида, а $180+t_1$ кг, где t_1 — некоторый параметр, который в общем случае может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Таким образом, следует найти такие значения параметра $-\infty < t_1 < \infty$, при которых задача, состоящая в определении максимального значения функции

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \tag{86}$$

при условиях

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \leqslant 180 + t_1, \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 \leqslant 210, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leqslant 244, \end{cases} \tag{87}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0, \tag{88}$$

имеет оптимальный план $X^* = (0;\ 82;\ 16)$.

Таблица 2.46

i	Базис	$C_б$	P_0	10	14	12	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	14	b_2'	19/8	1	0	5/8	0	−1/8
2	P_5	0	b_5'	23/8	0	0	1/8	1	−5/8
3	P_3	12	b_3'	−3/4	0	1	−1/4	0	1/4
4			F_0'	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Найдем решение задачи параметрического программирования (86) — (88). При каждом значении параметра t_1 оптимальный план задачи (86) — (88) определяется из табл. 2.46, отличающейся от последней симплекс-таблицы (табл. 2.45) лишь элементами столбца вектора P_0, которые обозначим через b_2', b_5' и b_3'. Указанные числа представляют собой компоненты разложения вектора P_0 по векторам, образующим последний базис, т. е. по векторам P_2, P_5, P_3. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} b_2' \\ b_5' \\ \vdots \\ b_3' \end{pmatrix} = B^{-1}P_0,$$

где B^{-1} — матрица, обратная матрице B, составленной из первоначальных компонент векторов P_2, P_5 и P_3. Указанная матрица B^{-1} записана в симплекс-таблице (табл. 2.46) в столбцах векторов, образующих первоначальный единичный базис, т. е. в столбцах векторов P_4, P_5 и P_6. Таким образом,

$$P'_0=\begin{pmatrix} b'_2 \\ b'_5 \\ b'_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 1 & -5/8 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 180+t_1 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 82+(5/8)t_1 \\ 80+(1/8)t_1 \\ 16-(1/4)t_1 \end{pmatrix}.$$

Найденный вектор P_0 определяет оптимальный план $X=(0;\ 82+(5/8)t_1;\ 16-(1/4)t_1)$ задачи (86)—(88) для любого значения параметра t_1, при котором значения $82+(5/8)t_1$, $80+(1/8)t_1$ и $16-(1/4)t_1$ положительны. Вместе с тем X будет совпадать с оптимальным планом $X^*=(0;\ 82;\ 16)$ задачи (83)—(85) лишь при значении $t_1=0$. Это означает, что всякое, хотя бы самое незначительное, изменение объемов сырья I вида приведет к изменению оптимального плана задачи (83)—(85). Например, если имеющиеся в распоряжении предприятия объемы сырья I вида увеличить на 8 ед., то оптимальным планом производства продукции является план $X^*=(0;\ 82+(5/8)\cdot 8;\ 16-(1/4)\cdot 8)=(0;\ 87;\ 14)$, согласно которому изготовляется 87 изделий вида B и 14 изделий вида C. При данном плане производства продукции общая стоимость изготовляемых изделий составит 1386 руб. т. е. возрастет на 46 руб.

Проведя аналогичные рассуждения, можно показать, что если объемы сырья II вида, выделенные предприятию, уменьшить не более чем на 80 кг, то оптимальным планом производства продукции останется план, согласно которому следует изготовить 82 изделия вида B и 16 изделий вида C. Таким образом, оптимальный план задачи (83)—(85) оказывается устойчивым относительно изменений в указанных выше объемах сырья II вида.

Наконец, аналогично можно показать, что оптимальный план $X^*=(0;\ 82;\ 16)$ задачи (83)—(85) не устойчив по отношению к изменениям объемов сырья III вида.

Мы провели анализ чувствительности оптимального плана задачи (83)—(85) к изменению объемов каждого из видов сырья по отдельности. Аналогично можно провести анализ чувствительности оптимального плана этой задачи при одновременном изменении объемов сырья нескольких видов.

Решение задачи, целевая функция и правые части ограничений которой содержат параметр. Используя описанные выше алгоритмы решения задач параметрического программирования, можно найти решение задачи, в которой от параметра t линейно зависят как коэффициенты целевой функции, так и свободные члены системы уравнений.

2.68. Найти максимальное значение функции

$$F=(8-5t)x_1+(9-3t)x_2+(-3+5t)x_3-(2+4t)x_4$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1-\ x_2+x_3 \qquad = \ \ 24-12t, \\ -x_1+2x_2 \qquad +x_4=-18+10t, \\ x_1,\ x_2\geqslant 0,\ t\in(-\infty,\ +\infty). \end{cases}$$

Решение. Считая значение параметра t равным числу 2 (число 2 взято произвольно), находим симплексным методом решение полученной задачи линейного программирования (табл. 2.47).

Таблица 2.47

i	Базис	$C_б$	P_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	$-3+5t$	$24-12t$	1	-1	1	0
2	P_4	$-2-4t$	$-18+10t$	-1	2	0	1
3			$-36+208t-100t^2$	$14t-9$	$-10t-$ -10	0	0
1	P_3	$-3+5t$	$15-7t$	1/2	0	1	1/2
2	P_2	$9-3t$	$-9+5t$	$-1/2$	1	0	1/2
3			$-126+168t-50t^2$	$9t-14$	0	0	$5t+5$

Из табл. 2.47 видно, что если $t=2$, то $X_0^*=(0;\ -9+5t;\ 15-7t;\ 0)$ — оптимальный план задачи. Таким он является и для тех значений параметра t, при которых $9t-14\geqslant 0$ и $5t+5\geqslant 0$, а среди компонент вектора X_0^* нет отрицательных чисел. Эти неравенства выполняются при $t\geqslant 14/9$. Сначала такие значения параметра t и рассмотрим.

Найденный вектор X_0^* является оптимальным планом задачи при $15-7t\geqslant 0$ и $-9+5t\geqslant 0$, т. е. $9/5\leqslant t\leqslant 15/7$. Итак, если $9/5\leqslant t\leqslant 15/7$, то $X_0^*=(0;\ 15-7t;\ -9+5t;\ 0)$ — оптимальный план задачи, при котором $F_{\max}=126+168t-50t^2$.

Если $t<9/5$, то $-9+5t<0$ и вектор $X=(0;\ 15-7t;\ -9+5t;\ 0)$ не является планом задачи. Поэтому при $t<9/5$ следует перейти к новой симплекс-таблице, что можно сделать, так как в строке вектора P_2 (табл. 2.47) имеется отрицательное число $-1/2$. Рассматривая это число как разрешающий элемент, переходим к новой симплекс-таблице, для чего исключим из базиса вектор P_2 и введем вместо него вектор P_1 (табл. 2.48).

Таблица 2.48

i	Базис	$C_б$	P_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_3	$-3+5t$	$6-2t$	0	1	1	1
2	P_1	$8-5t$	$18-10t$	1	-2	0	-1
3			$126-134t+40t^2$	0	$-28+$ $+18t$	0	$14t-9$

Из табл. 2.48 видно, что вектор $X_1^*=(18-10t;\ 0;\ 6-2t;\ 0)$ есть оптимальный план задачи для всех значений параметра t (как отмечено выше, мы рассматриваем значения $t\geqslant 14/9$), при которых $6-2t\geqslant 0$ и $18-10t\geqslant 0$, т. е. $t\leqslant 9/5$. Следовательно, если $t\in[14/9, 9/5]$, то $X_1^*=(18-10t;\ 0;\ 6-2t;\ 0)$ является оптимальным планом задачи, при котором $F_{\max}=126-134t+40t^2$.

Рассмотрим теперь значения параметра $t>15/7$. При этих значениях вектор $X=(0;\ -9+5t;\ 15-7t;\ 0)$ уже не является оптимальным планом задачи, поскольку $15-7t<0$. Так как в строке вектора P_3 (табл. 2.48) нет отрицательных чисел, то при $t>15/7$ задача неразрешима.

Мы нашли решение задачи при изменении параметра t от $14/9$ до $+\infty$. Рассмотрим теперь значения параметра от $-\infty$ до $14/9$. Если $t<14/9$, то в последней строке табл. 2.48 имеется отрицательное число $18t-28$. Поэтому следует перейти к новому опорному плану, введя в базис вектор P_2 и исключив из него вектор P_3 (табл. 2.49).

Таблица 2.49

i	Базис	$C_б$	P_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				P_1	P_2	P_3	P_4
1	P_2	$9-3t$	$6-2t$	0	1	1	1
2	P_1	$8-5t$	$30-14t$	1	0	2	1
3			$294-298t+76t^2$	0	0	$28-18t$	$19-4t$

Из табл. 2.49 видно, что если $-\infty<t\leqslant 14/9$, то $X_2^*=(30-14t;\ 6-2t;\ 0;\ 0)$ является оптимальным планом задачи, причем $F_{\max}=294-298t+76t^2$.

Итак, при $t\in(-\infty, 14/9]$ задача имеет оптимальный план $X_2^*=(30-14t;\ 6-2t;\ 0;\ 0)$; при $t\in[14/9,\ 9/5]-X_1^*=(18-10t;\ 0;\ 6-2t;\ 0)$; при $t\in[9/5,\ 15/7]-X_0^*=(0;\ -9+5t;\ 15-7t;\ 0)$; при $t>15/7$ она неразрешима.

Считая, что $-\infty < t < \infty$, найдите решение задач параметрического программирования 2.69—2.74.

2.69. $F = -(1-t)x_1 + (4-t)x_2 - (2-t)x_3 + (2-t)x_4 - (3-2t)x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0.$$

2.70. $F = 6x_1 - (4+t)x_3 + (12-t)x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -1/2x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0.$$

2.71. $F = 2x_1 + 5x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 + 2t, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + t, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 8 - 3t, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0.$$

2.72. $F = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 - 2t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 + t, \\ 3x_1 + x_5 = 3 - t, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0.$$

2.73. $F = (2-3t)x_1 - 4tx_2 + (2+6t)x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + 8t, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -10 + 12t, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0.$$

2.74. $F = (2+t)x_1 - (3-t)x_2 + 3(2+4t)x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 + 6t, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 - 12t, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 8 + 9t, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0.$$

2.75. Для производства трех видов изделий предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода каждого вида сырья определяются матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предприятие может использовать сырья I вида не более 20 ед., II вида — не более 42 ед., III вида — не более 36 ед. Цена единицы продукции каждого вида линейно зависит от некоторого параметра t, и эта зависимость соответственно имеет вид $2+t$, $12-t$, $6+t$ $(0\leqslant t\leqslant 10)$. Для каждого значения параметра t $(0\leqslant t\leqslant 10)$ найдите такой план выпуска продукции, реализация которого обеспечивает максимальный выпуск изделий в стоимостном выражении.

2.76. Для производства трех видов изделий A, B и C предприятие использует четыре вида сырья. Нормы затрат сырья каждого вида на производство единицы продукции данного вида приведены в таблице. В ней же указана прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	B	C
I	2	3	—
II	—	4	6
III	5	5	2
IV	4	—	7
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	25	28	27

Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но для их производства предприятие может использовать сырья I вида не более 200 кг, II вида — не более 120 кг, III вида — не более 180 кг, IV вида — не более 138 кг.

Определите: а) план производства продукции, при котором общая прибыль предприятия от реализации всей продукции была бы наибольшей; б) устойчивость оптимального плана задачи относительно изменений прибыли от реализации единицы изделия данного вида; в) устойчивость оптимального плана задачи относительно изменения количества сырья каждого вида.

§ 2.4. ЗАДАЧИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Экономическая и геометрическая интерпретации задачи дробно-линейного программирования. Общая задача дробно-линейного программирования состоит в определении максимального значения функции

$$F=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j}=\frac{F_1}{F_2} \tag{89}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i=\overline{1, m}), \tag{90}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1, n}), \tag{91}$$

где c_j, d_j, b_i и a_{ij} — некоторые постоянные числа, $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j \geqslant 0$ $(j=\overline{1, n})$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$ в области неотрицательных решений системы линейных уравнений (90). При этом будем предполагать, что $\sum\limits_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$ (такое условие не нарушает общности задачи, поскольку в том случае, когда эта величина отрицательна, знак минус можно отнести к числителю).

Как и в случае основной задачи линейного программирования, свое максимальное значение целевая функция задачи (89) — (91) принимает в одной из вершин многогранника решений, определяемой системой ограничений (90) и (91) (естественно, при условии, что эта задача имеет оптимальный план). Если максимальное значение целевая функция задачи (89) принимает более чем в одной вершине многогранника решений, то она достигает его также во всякой точке, являющейся выпуклой комбинацией данных вершин.

Рассмотрим задачу, состоящую в определении максимального значения функции

$$F=\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \tag{92}$$

при условиях

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leqslant b_i \ (i=\overline{1, m}), \tag{93}$$

$$x_1, \ x_2 \geqslant 0. \tag{94}$$

Будем считать, что $d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0$.

Чтобы найти решение задачи (92) — (94), как и в § 1.3 при рассмотрении задачи (19) — (21), сначала находим многоугольник решений, определяемый ограничениями (93) и (94). Предполагая, что этот многоугольник не пуст, полагаем значение функции равным некоторому числу h, так что прямая

$$\frac{c_1x_1+c_2x_2}{d_1x_1+d_2x_2}=h, \tag{95}$$

проходящая через начало координат, имеет общие точки с многоугольником решений. Вращая построенную прямую (95) вокруг начала координат, либо определяем вершину (вершины), в которой функция (92) принимает максимальное значение, либо устанавливаем неограниченность функции на множестве планов задачи.

Итак, процесс нахождения решения задачи (92)—(94) включает следующие этапы:

1. В системе ограничений задачи заменяют знаки неравенств на знаки точных равенств и строят определяемые этими равенствами прямые.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи.

3. Находят многоугольник решений задачи.

4. Строят прямую (95), уравнение которой получается, если положить значение целевой функции (92) равным некоторому постоянному числу.

5. Определяют точку максимума или устанавливают неразрешимость задачи.

6. Находят значение целевой функции в точке максимума.

2.77. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на каждом из типов оборудования. Время обработки каждого из изделий на оборудовании данного типа приведено в табл. 2.50. В ней же указаны затраты, связанные с производством одного изделия каждого вида.

Таблица 2.50

Тип оборудования	Затраты времени (ч) на обработку одного изделия	
	A	B
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Затраты на производство одного изделия (руб)	2	3

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч. При этом оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Требуется определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

Р е ш е н и е. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B. Тогда общие затраты на их производство равны $2x_1+3x_2$ руб., а себестоимость одного изделия в рублях составит

$$F=\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2} \tag{96}$$

Затраты времени на обработку указанного количества изделий на каждом из типов оборудования соответственно составят $2x_1+8x_2$ часов, x_1+x_2 часов и $12x_1+3x_2$ часов. Так как оборудование I и III типов может быть занято обработкой изделий вида A и B не более 26 и 39 ч, а оборудование II типа — не менее 4 ч, то должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1+8x_2\leqslant 26, \\ x_1+\ x_2\geqslant 4, \\ 12x_1+3x_2\leqslant 39. \end{cases} \tag{97}$$

По своему экономическому смыслу переменные x_1 и x_2 могут принимать только лишь неотрицательные значения:

$$x_1,\ x_2\geqslant 0. \tag{98}$$

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в определении неотрицательного решения системы линейных неравенств (97), реализующего минимум функции (96). Чтобы найти решение задачи, прежде всего построим многоугольник решений. Как видно из рис. 2.8, им является треугольник BCD. Значит, функция (96) принимает минимальное значение в одной из точек: B, C или D. Чтобы определить, в какой именно, положим значение функции F равным некоторому числу, например 11/4. Тогда

$$\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=\frac{11}{4},$$

или

$$-3x_1+x_2=0. \tag{99}$$

Уравнение (99) определяет прямую, проходящую через начало координат. Координаты точек, принадлежащих этой прямой

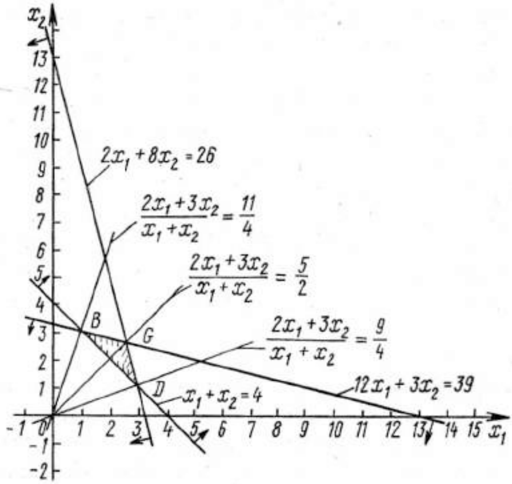


Рис. 2.8

и многоугольнику решений, являются планами задачи, при которых значение функции (96) равно 11/4. В данном случае к указанным точкам относится лишь одна точка B (1; 3). Ее координаты определяют план задачи, при котором значение функции равно 11/4.

Возьмем теперь $h=5/2$, т. е. положим

$$\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=\frac{5}{2},$$

или

$$-x_1+x_2=0. \qquad (100)$$

Уравнение (100), так же как и (99), определяет прямую, проходящую через начало координат. Ее можно рассматривать как прямую, полученную в результате вращения по часовой стрелке вокруг начала координат прямой (99). При этом координаты точек, принадлежащих прямой (100) и многоугольнику решений, являются планами задачи, при которых значение функции (96), равное 5/2, меньше, чем в точках прямой (99). Следовательно, если положить значение функции (96) равным некоторому числу h_0:

$$F=\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=h_0, \qquad (101)$$

а прямую (101), проходящую через начало координат, вращать в направлении движения часовой стрелки вокруг начала координат, то получим прямые

$$F=\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=h, \text{ где } h<h_0.$$

Найдем последнюю общую точку вращаемой прямой с многоугольником решений. Это точка D (3; 1) (рис. 2.8), в которой достигается минимум функции (96).

Таким образом, оптимальным планом производства продукции является план, согласно которому изготовляется три изделия вида A и одно изделие вида B. При таком плане себестоимость одного изделия является минимальной и равна $F_{\min}=\frac{2\cdot3+3\cdot1}{1+3}=\frac{9}{4}$.

При нахождении угловой точки многоугольника решений, в которой целевая функция задачи принимает наименьшее значение, мы полагали значение функции равным некоторым двум постоянным числам и установили направление вращения прямой, определяющее уменьшение значения функции. Это можно было сделать и по-другому. А именно: полагая значение функции F равным некоторому числу h, т. е.

$$\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=h, \tag{102}$$

и получив некоторую прямую, проходящую через начало координат и имеющую угловой коэффициент, зависящий от h, можно, используя производную, установить направление вращения прямой (102) при возрастании h.

Практически же дело обстоит гораздо проще. Найдя точки B (1; 3) и D (3; 1) (рис. 2.8), в которых функция (96) может принимать минимальное значение, вычислим ее значения в этих точках: $F(B)=11/4$, $F(D)=9/4$. Так как $F(B)>F(D)$, то можно утверждать, что в точке D целевая функция принимает минимальное значение. Одновременно с этим заметим, что в точке B функция F принимает максимальное значение.

Заканчивая рассмотрение нахождения решения задачи дробно-линейного программирования графическим методом, отметим, что при решении конкретных задач могут быть различные случаи.

1. Многогранник решений ограничен, максимум и минимум достигаются в его угловых точках (рис. 2.9).

2. Многогранник решений не ограничен, однако существуют угловые точки, в которых целевая функция задачи принимает соответственно максимальное и минимальное значения (рис. 2.10)

3. Многогранник решений не ограничен, и один из экстремумов достигается. Например, минимум достигается в одной из

Задача (105) — (108) является задачей линейного программирования, а следовательно, ее решение можно найти известными методами. Зная оптимальный план этой задачи, на основе соотношений (104) получаем оптимальный план исходной задачи (92) — (94).

Таким образом, процесс нахождения решения задачи дробно-линейного программирования включает следующие этапы:

1. Сводят задачу (92) — (94) к задаче линейного программирования (105) — (108).
2. Находят решение задачи (105) — (108).
3. Используя соотношения (104), определяют оптимальный план задачи (92) — (94) и находят максимальное значение функции (92).

2.84. Найти максимальное значение функции

$$F=\frac{2x_1+x_2}{x_1+x_2} \tag{109}$$

при условиях

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1+2x_2-x_3 & & & =11, \\ x_1-\ x_2 & +x_4 & & =8, \\ -x_1+3x_2 & & +x_5 & =9, \end{array}\right. \tag{110}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0. \tag{111}$$

Р е ш е н и е. Сведем данную задачу к задаче линейного программирования. Для этого обозначим $(x_1+x_2)^{-1}$ через y_0 и введем новые переменные $y_j=y_0x_j$ $(j=\overline{1,5})$. В результате приходим к следующей задаче: найти максимум функции

$$F=2y_1+y_2 \tag{112}$$

при условиях

$$\left\{\begin{array}{lllll} y_1+2y_2-y_3 & & & -11y_0 & =0, \\ y_1-\ y_2 & +y_4 & & -\ 8y_0 & =0, \\ -y_1+3y_2 & & +y_5 & -\ 9y_0 & =0, \end{array}\right. \tag{113}$$

$$y_1+\ y_2 \qquad =1,$$

$$y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_5\geqslant 0. \tag{114}$$

Задача (112) — (114) является задачей линейного программирования. Ее решение находим методом искусственного базиса (табл. 2.51).

Таблица 2.51

i	Базис	$C_б$	P_0	2	1	0	0	0	$-M$	$-M$	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_0
1	P_2	1	1/10	0	1	−8/30	−11/30	0			0
2	P_1	2	9/10	1	0	8/30	11/30	0			0
3	P_5	0	15/10	0	0	5/3	7/6	1			0
4	P_0	0	1/10	0	0	2/30	−1/30	0			1
5			19/10	0	0	8/30	11/30	0			0

Из табл. 2.51 видно, что оптимальным планом задачи (112) — (114) является $y_1^*=9/10$; $y_2^*=1/10$; $y_3^*=y_4^*=0$; $y_5^*=15/10$; $y_0^*=1/10$.

Учитывая, что $y_j=y_0x_j$, находим оптимальный план задачи (109) — (111): $X^*=(9;\ 1;\ 0;\ 15)$. При этом плане $F_{\max}=19/10$.

Найдите решение задач 2.85—2.89.

2.85. $F=\dfrac{-5x_1+2x_2}{3x_1+4x_2}\to\max;$

$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_3=16,\\ 2x_1+3x_2-x_4=12,\\ 3x_1-2x_2+x_5=18,\end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0.$$

2.86. $F=\dfrac{3x_1-x_2}{x_1+x_2}\to\max;$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5,\\ -x_1+3x_2+x_4=7,\\ 3x_1-x_2+x_5=11,\end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5\geqslant 0.$$

2.87. $F=\dfrac{8x_1+3x_2+2x_3+x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+3x_4\leqslant 300,\\ x_1+2x_3+x_4\leqslant 70,\\ x_1+2x_2+x_3\leqslant 340,\end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

2.88. $F=\dfrac{5x_1-x_2+8x_3+10x_4-5x_5+x_6}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_4+x_5-x_6=40,\\ -x_1+2x_2+x_3+2x_4+2x_6=20,\\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4+3x_5+x_6=30,\end{cases}$$
$$x_j\geqslant 0\ (j=\overline{1,6}).$$

2.89. $F = \dfrac{2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320, \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1, 6}).$$

§ 2.5. ЗАДАЧИ БЛОЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В практике решения конкретных экономических задач встречаются задачи, системы ограничений которых включают ограничения, содержащие все переменные (эти ограничения образуют так называемую блок-связку), и ограничения, содержащие часть их (эти ограничения образуют блоки). Схематически система ограничений таких задач с двумя блоками изображена на рис. 2.13. В общем случае число блоков может быть значительным, а задачи, имеющие блочную структуру, могут быть задачами как линейного, так и нелинейного программирования.

Рис. 2.13

Для решения задач линейного программирования с блочной структурой может быть использован так называемый м е т о д д е к о м п о з и ц и и Д а н ц и г а—В у л ф а[*)], позволяющий свести решение конкретной задачи, содержащей несколько блоков, к решению отдельных подзадач, определяемых ими и соответствующим образом связанных между собой. При этом число блоков определяет количество подзадач, решаемых на каждой из итераций при решении так называемой *главной задачи*. Построим последнюю для задачи, содержащей два блока и состоящей в общем виде в определении максимального значения функции

$$F\ c_1x_1 + \ldots + c_{n_1}x_{n_1} + c_{n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + c_nx_n \tag{115}$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n_1}x_{n_1} + a_{1,n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn_1}x_{n_1} + a_{k,n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n_1}x_{n_1} \qquad\qquad = b_{k+1}, \\ \ldots \end{cases} \tag{116}$$

*) Подробнее см.: Линейное и нелинейное программирование.— Киев: Вища школа, 1975.

$$\begin{cases} a_{l1}x_1 + \ldots + a_{ln_1}x_{n1} & & = b_l, \\ & \begin{cases} a_{l+1,n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{l+1,n}x_n = b_{l+1}, \\ \ldots \\ a_{m,n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{mn}x_n \qquad = b_m, \end{cases} \end{cases}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1, n}). \qquad (117)$$

Прежде чем записать главную задачу, введем обозначения:

$C^{(1)} = (c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_{n_1})\, C^{(2)} = (c_{n_1+1};\ c_{n_1+2};\ \ldots;\ c_n)$;

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n_1} \\ \ldots \\ a_{k1} \ldots a_{kn_1} \end{pmatrix};\ A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,n_1+1} \ldots a_{1n} \\ \ldots \\ a_{k,n_1+1} \ldots a_{kn} \end{pmatrix};\ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{k+1,1} \ldots a_{k+1,n_1} \\ \ldots \\ a_{l1} \ldots a_{ln_1} \end{pmatrix};\quad \bar{P}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{k+1} \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix};$$

$$\bar{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{l+1n_1+1} \ldots a_{l+1n} \\ \ldots \\ a_{mn_1+1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix};\quad \bar{P}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} b_{l+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (118)$$

Обозначим через D_1 и D_2 соответственно множества допустимых решений систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,n_1}x_{n_1} = b_{k+1}, \\ \ldots \\ \qquad a_{l1}x_1 + \ldots + a_{ln_1}x_{n_1} = b_l, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n_1} \geqslant 0;$$

$$\begin{cases} a_{l+1,n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{l+1,n}x_n = b_{l+1}, \\ \ldots \\ a_{m,n_1+1}x_{n_1+1} + \ldots + a_{mn}x_n \qquad = b_m. \end{cases}$$

$$x_{n_1+1},\ x_{n_2+1},\ \ldots,\ x_n \geqslant 0.$$

Пусть $X_j^{(1)}$ $(j = \overline{1, N_1^{(1)}})$ и $X_j^{(2)}$ $(j = \overline{1, N_1^{(2)}})$, $R_j^{(1)}$ $(j = \overline{N_1^{(1)} + 1, N^{(1)}})$ и $R_j^{(2)}$ $(j = \overline{N_1^{(2)} + 1, N^{(2)}})$ — вершины и направляющие векторы неограниченных ребер соответственно многогранников D_1 и D_2. Обозначим

$$P_j^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}X_j^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad j = \overline{1, N_1^{(1)}};\quad P_j^{(1)} = \begin{pmatrix} A^{(1)}R_j^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ j = \overline{N_1^{(1)} + 1, N^{(1)}};$$

$$P_j^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}X_j^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad j = \overline{1, N_1^{(2)}};\quad P_j^{(2)} = \begin{pmatrix} A^{(2)}R_j^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad j = \overline{N_1^{(2)} + 1, N_1^{(2)}}.$$

$$(119)$$

Далее,

$$\tilde{P}_0=\begin{pmatrix} P_0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \sigma_j^{(1)}=(C^{(1)},\ X_j^{(1)}),\ j=\overline{1, N_1^{(1)}};\ \sigma_j^{(1)}=(C^{(1)},\ R_j^{(1)}),\ j=$$

$$=\overline{N_1^{(1)}+1,\ N^{(1)}}; \tag{120}$$

$$\sigma_j^{(2)}=(C^{(2)},\ X_j^{(2)}),\ j=\overline{1, N_1^{(2)}};\ \sigma_j^{(2)}=(C^{(2)},\ R_j^{(2)}),\ j=\overline{N_1^{(2)}+1, N^{(2)}}.$$

С учетом введенных обозначений главная задача состоит в определении максимального значения функции

$$F=\sigma_1^{(1)}y_1^{(1)}+\ldots+\sigma_{N^{(1)}}^{(1)}y_{N^{(1)}}^{(1)}+\sigma_1^{(2)}y_1^{2}+\ldots+\sigma_{N^{(2)}}^{(2)}y_{N^{(2)}}^{(2)} \tag{121}$$

при условиях

$$y_1^{(1)}P_1^{(1)}+\ldots+y_{N(1)}^{(1)}P_{N^{(1)}}^{(1)}+y_1^{(2)}P_1^{(2)}+\ldots+y_{N^{(2)}}^{(2)}P_{N^{(2)}}^{(2)}=\tilde{P}_0 \tag{122}$$

$$y_j^{(1)}\geqslant 0,\ j=\overline{1,\ N^{(1)}};\ y_j^{(2)}\geqslant 0,\ j=\overline{1,\ N^{(2)}}. \tag{123}$$

Если $Y^*=(y_1^{*(1)},\ y_2^{*(1)},\ \ldots,\ y_k^{*(1)},\ y_1^{*(2)},\ y_2^{*(2)},\ \ldots,\ y_q^{*(2)})$ — оптимальный план главной задачи, $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, …, $P_k^{(1)}$ — соответствующие вершины многогранника D_1, а $P_1^{(2)}$, $P_2^{(2)}$, ..., $P_q^{(2)}$ — соответствующие направляющие векторы неограниченных ребер многогранника D_2, то оптимальное решение исходной задачи есть $X^*=(X_1^*;\ X_2^*)$, где

$$X_1^*=y_1^{*(1)}X_1^{(1)}+y_2^{*(1)}X_2^{(1)}+\ \ldots\ +y_kX_k^{(1)}=(x_1^*;\ x_2^*;\ \ldots;\ x_{n_1}^*)\ ; \tag{124}$$

$$X_2^*=y_1^{*(2)}R_1^{(2)}+y_2^{*(2)}R_2^{(2)}+\ldots+y_q^{*(2)}R_q^{(2)}=(x_{n_1+1}^*;\ x_{n_1+2}^*;\ \ldots;\ x_n^*). \tag{125}$$

В том случае, когда целевая функция главной задачи не ограничена на допустимом множестве ее решений, это же относится и к целевой функции исходной задачи.

2.90. Построить главную задачу для задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F=2x_1+3x_2-x_3-2x_4 \tag{126}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4\leqslant 17, \\ -3x_1+x_2\leqslant 9, \\ -4x_1-x_2\leqslant 8, \\ x_3+x_4\leqslant 22, \\ -2x_3+x_4\leqslant 13, \end{cases} \tag{127}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0. \tag{128}$$

Решение. Система ограничений сформулированной задачи имеет блок-связку, определяемую первым неравенством, и два блока, первый из которых определяется вторым и третьим неравенствами системы (127), а второй — четвертым и пятым неравенствами. Следовательно,

$$C^{(1)}=(2;\ 3),\ C^{(2)}=(-1;\ -2),\ A^{(1)}=(1;\ 1),\ A^{(2)}=(-2;\ 1),$$

$$P_0=(17),\ \tilde{A}^{(1)}=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ P_0^{(1)}=\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$P_0^{(2)}=\begin{matrix} 22 \\ 13 \end{matrix}.$$

Найдем вершины многоугольников решений D_1 и D_2, определяемых системами неравенств:

$$\begin{cases} -3x_1+x_2\leqslant 9, \\ 4x_1-x_2\leqslant 8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3+x_4\leqslant 22, \\ -2x_3+x_4\leqslant 13, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0, \qquad\qquad x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

В данном случае это легко сделать геометрически. Из рис. 2.14 следует, что $X_1^{(1)}=(0;\ 0)$; $X_2^{(1)}=(0;\ 9)$; $X_3^{(1)}=(17;\ 60)$; $X_4^{1}=(2;\ 0)$; $X_1^{(2)}=(0;\ 0)$; $X_2^{(2)}=(0;\ 13)$; $X_3^{(2)}=(3;\ 19)$; $X_4^{(2)}=$ $=(22;\ 0)$.

По формулам (119) и (120) получаем:

$$\sigma_1^{(1)}=(C^{(1)},\ X_1^{(1)})=((2;\ 3),\ (0;\ 0))=0;$$

$$\sigma_2^{(1)}=(C^{(1)},\ X_2^{(1)})=((2;\ 3),\ (0;\ 9))=27;$$

$$\sigma_3^{(1)}=(C^{(1)},\ X_3^{(1)})=((2;\ 3),\ (17;\ 60))=214;$$

$$\sigma_4^{(1)}=(C^{(1)},\ X_4^{1})=((2;\ 3),\ (2;\ 0))=4;$$

$$\sigma_1^{(2)}=(C^{(2)},\ X_1^{(2)})=((-1;\ -2),\ (0;\ 0))=0;$$

8*

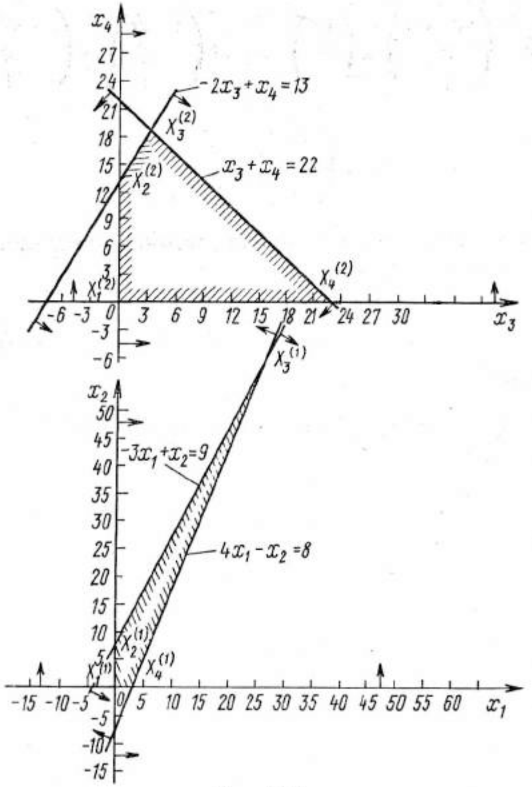


Рис. 2.14

$$\sigma_2^{(2)}=(C^{(2)},\ X_2^{(2)})=((-1;\ -2),\ (0;\ 13))=-26;$$

$$\sigma_3^{(2)}=(C^{(2)},\ X_3^{(2)})=((-1;\ -2),\ (3;\ 19))=-41;$$

$$\sigma_4^{(2)}=(C^{(2)},\ X_4^{(2)})=((-1;\ -2),\ (22;\ 0))=-22;$$

$$P_1^{(1)}=\begin{pmatrix} A^{(1)}X_1^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad P_2^{(1)}=\begin{pmatrix} A^{(1)}X_2^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_1^{(2)}=\begin{pmatrix} A^{(2)}X_1^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_2^{(2)}=\begin{pmatrix} A^{(2)}X_2^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_3^{(1)}=\begin{pmatrix} A^{(1)}X_3^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_4^1=\begin{pmatrix} A^{(1)}X_4^1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_3^{(2)}=\begin{pmatrix} A^{(2)}X_3^{(2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_4^{(2)}=\begin{pmatrix} A^{(2)}X_4^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -44 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_0=\begin{pmatrix} P_0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, главная задача состоит в определении максимального значения функции

$$F=27y_{21}^{(1)}+214y_3^{(1)}+4y_4^{(1)}-26y_{22}^{(2)}-41y_3^{(2)}-22y_4^{(2)} \tag{129}$$

при условиях

$$\begin{cases} 9y_2^{(1)}+77y_3^{(1)}+2y_4^{(1)}+13y_2^{(2)}+13y_3^{(2)}-44y_4^{(2)}\leqslant 17, \\ y_1^{(2)}+y_2^{(2)}+y_3^{(2)}+y_4^{(2)}=1, \\ y_1^{(2)}+y_2^{(2)}+y_3^{(2)}+y_4^{(2)}=1, \end{cases} \tag{130}$$

$$y_j^{(1)}\geqslant 0,\ y_j^{(2)}\geqslant 0\ (j=\overline{1,4}). \tag{131}$$

Запишем главную задачу (129) — (131) в форме основной задачи линейного программирования: найти максимальное значение функции

$$27y_2^{(1)}+214y_3^{(1)}+4y_4^{(1)}-26y_2^{(2)}-41y_3^{(2)}-22y_4^2 \tag{132}$$

при условиях

$$\begin{cases} 9y_2^{(1)}+77y_3^{(1)}+2y_4^{(1)}+13y_2^{(2)}+13y_3^{(2)}-44y_4^{(2)}+y_5=17, \\ y_1^{(1)}+y_2^{(1)}+y_3^{(1)}+y_4^{(1)}=1, \\ y_1^{(2)}+y_2^{(2)}+y_3^{(2)}+y_4^{(2)}=1, \end{cases} \tag{133}$$

$$y_j^{(1)}\geqslant 0,\ y_j^{(2)}\geqslant 0\ (j=\overline{1,4}),\ y_5\geqslant 0. \tag{134}$$

Если теперь сопоставить между собой задачи (126) — (128) и (129) — (131), то видим, что число ограничений-неравенств в первой задаче равно 5 и число переменных равно 4, а во второй эти числа соответственно равны 3 и 8. Таким образом, при переходе от задачи (126) — (128) к задаче (129) — (131) уменьшилось число ограничений, однако возросло число переменных. К тому же нам понадобилось определить все вершины многогранников решений D_1 и D_2, что не всегда возможно сделать так просто. Поэтому естественно возникает вопрос: стоит ли при нахождении решения задачи (126) — (128) переходить к определению оптимального плана задачи (129) — (131)? Положительный ответ на этот вопрос дает метод Данцига—Вулфа, позволяющий находить решение главной задачи (129)—(131), не зная при этом ни всех вершин многоугольников решений D_1 и D_2, ни их чисда́, а зная лишь какой-нибудь базис, определяющий план задачи (129)—(131). На этом методе и остановимся более подробно. А именно: используя его, рассмотрим нахождение решения главной задачи (121)—(123), построенной для задачи (115)—(117). В связи с этим отметим, что для начала итерационного процесса решения задачи (121)—(123) достаточно знать какой-нибудь базис, определяющий опорный план данной задачи. Этот базис можно либо непосредственно записать, либо определить его, например, используя метод искусственного базиса.

Итак, пусть известны базис, определяющий один из опорных планов главной задачи, и B^{-1} — матрица, обратная матрице, составленной из компонент базисных векторов. Для проверки данного опорного плана на оптимальность найдем вектор

$$\overline{\Omega}=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_{m+1},\ \lambda_{m+2})=\sigma_6 B^{-1}$$

и обозначим через Ω вектор, составленный из первых m компонент вектора $\overline{\Omega}$, т. е. $\Omega=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_m)$. После этого найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F_1^{(1)}=(C^{(1)}-\Omega A^{(1)},\ X^{(1)})\ \text{при условиях}\ A^{(1)}X^{(1)}=\widetilde{P}_0^{(1)},\ X^{(1)}\geqslant 0$$

и определяемой первым блоком исходной задачи (115)—(117) (подзадача 1). Если она имеет оптимальный план $X_s^{(1)}$ и $F_1^{(1)}(X_s^{(1)})=\lambda_{m+1}$; то находим решение подзадачи 2:

$$F_1^{(2)}=(C^{(2)}-\Omega A^{(2)},\ X^{(2)})\ \text{при условиях}\ A^{(2)}X^{(2)}=\widetilde{P}_0^{(2)},\ X^{(2)}\geqslant 0,$$

определяемой вторым блоком задачи (115)—(117). В том случае, если и эта задача имеет оптимальный план $X_s^{(2)}$ и $F_1^{(2)}\ (X_3^{(2)})=$ $=\lambda_{m+2}$, то исходный базис определяет оптимальный план главной задачи (121)—(123) и, таким образом, найдено ее решение, а следовательно, по формулам (125) и (126) можно определить оптимальный план исходной задачи (115)—(117).

В тех случаях, когда $F_1^{(1)}\ (X_s^{(1)})\neq\lambda_{m+1}$ или $F_1^{(2)}\ (X_s^{(2)})\neq\lambda_{m+2}$, исходный опорный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому базису, определяющему некоторый следующий опорный план главной задачи. Если при этом оказывается, что $F_1^{(1)}\ (X_s^{(1)})\neq\lambda_{m+1}$, то находить решение второй подзадачи не имеет смысла.

Итак, пусть, например, $F_1^{(1)}\ (X_s^{(1)})\neq\lambda_{m+1}$. Тогда следует перейти к новому базису, определяющему некоторый последующий опорный план главной задачи. Для этого нужно какой-нибудь вектор исключить из базиса и ввести вместо него новый вектор. Вектор, вводимый в базис, определяется наименьшим отрицательным числом из чисел $\lambda_{m+1}-(C^{(1)}\Omega A^{(1)}, X_s^{(1)})$, λ_1, λ_2, ..., ..., λ_m. Если таким числом является $\lambda_{m+1}-(C^{(1)}-\Omega A^{(1)}, X_s^{(1)})$, то в базис вводим вектор $P_s^{(1)}$. Если же это есть некоторое число λ_j, то в базис вводим вектор $P_j^{(1)}$, определяемый данным числом.

После нахождения вектора, вводимого в базис, определяем вектор, исключаемый из него. Для этого находим разложения векторов $P_s^{(1)}$ (или $P_j^{(1)}$) и P_0 (вектор, определяющий опорный план главной задачи) по векторам данного базиса и определяем минимум отношения компонент вектора P_0 к соответствующим положительным компонентам вектора $P_s^{(1)}$ в данном базисе. Наименьшее из этих отношений и определяет вектор, исключаемый из базиса. В результате получается новый базис, определяющий последующий опорный план главной задачи. Этот план проверяем на оптимальность, для чего строим соответствующую подзадачу (подзадачи) и находим решение. Данное решение позволяет сделать вывод, является ли соответствующий опорный план оптимальным или нет. Если он не оптимален, то по описанным выше правилам переходим к новому базису, определяющему некоторый последующий опорный план. При этом заметим, что в ходе итерационного процесса возможен случай, когда среди компонент разложения вектора $P_s^{(1)}$ по векторам данного базиса не имеется положительных. Это означает, что целевая функция главной задачи на множестве ее допустимых решений не ограничена, а следовательно, не ограничена и целевая функция исходной задачи.

В результате после конечного числа шагов либо устанавливаем неразрешимость, либо находим оптимальный план главной задачи, а следовательно, и решение исходной задачи.

Выше рассмотрено нахождение решения задачи линейного программирования с блочной структурой для случая двух блоков. Если число блоков больше двух и равно, например, k, то алгоритм решения такой задачи, по существу, отличается лишь тем, что теперь в общем случае на каждой итерации приходится решать не две подзадачи, а k подзадач. Однако если решение одной из подзадач показало, что данный базис не определяет оптимальный план главной задачи, то находить решение других подзадач не имеет смысла.

2.91. Найти решение задачи 2.90, состоящей в определении максимального значения функции

$$F=2x_1+3x_2-x_3-2x_4 \tag{135}$$

при условиях

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_1+x_2-2x_3+x_4\leqslant 17, \\
-3x_1+x_2 \leqslant 9, \\
4x_1-x_2 \leqslant 8, \\
x_3+x_4\leqslant 22, \\
-2x_3+x_4\leqslant 13,
\end{array}\right. \tag{136}
$$

$$
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0. \tag{137}
$$

Решение. Запишем исходные данные в матричном и векторном виде:

$$
C^{(1)}=(2;\ 3);\ C^{(2)}=(-1;\ -2);\ A^{(1)}=(1;\ 1);\ A^{(2)}=(-2;\ 1);\quad P_0=(17);
$$

$$
\tilde{A}^1=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix},\ \tilde{A}^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix};\ P_0^{(1)}=\begin{pmatrix}9\\ 8\end{pmatrix},\ P_0^{(2)}=\begin{pmatrix}22\\ 3\end{pmatrix}.
$$

Определим теперь базис главной задачи (эта задача была записана выше).

Так как блок-связка в системе ограничений (136) задачи (135) — (137) представляет собой неравенство вида «$\leqslant$», то такой же вид примет и первое ограничение в главной задаче. Следовательно, приводя главную задачу к задаче, записанной в форме основной задачи линейного программирования, добавляем к правой части первого ограничения дополнительную переменную, которую обозначим через y_5. Этой переменной соответствует единичный вектор $P_5=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Далее, из системы неравенств (136) задачи (135) — (137) видно, что многоугольники решений, определяемые соответственно первым и вторым блоками, имеют вершины $X_1^{(1)}=(0;\ 0)$ и $X_1^{(2)}=(0;\ 0)$. Этим вершинам соответствуют векторы

$$
P_1^1=\begin{pmatrix}A^1X_1^1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\ \text{и}\ P_1^2=\begin{pmatrix}A^2X_1^2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}
$$

Поскольку вектор свободных членов главной задачи

$$
\tilde{P}_0=\begin{pmatrix}P_0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\ 1\\ 1\end{pmatrix}
$$

не имеет отрицательных компонент, векторы P_5, $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$ образуют базис, определяющий опорный план главной задачи, в котором отличные от нуля компоненты таковы: $y_5=17$, $y_1^{(1)}=1$ и $y_1^{(2)}=1$.

Чтобы проверить, определяет ли найденный базис оптимальный план главной задачи, найдем максимальное значение функции $F_1^{(1)}=(C^{(1)}-\Omega A^{(1)},X^{(1)})$ при условиях $\widetilde{A}^{(1)}X^{(1)}=P_0^{(1)}$, $X^{(1)}\geqslant 0$.

В данном случае $B^{-1}=E$, поскольку матрица B состоит из компонент единичных векторов P_5, $P_1^{(1)}$ и $P_1^{(2)}$. Далее, $\sigma_5=0$, $\sigma_1^{(1)}=(C^{(1)}, X_1^{(1)})=((2;\ 3),\ (0;\ 0))=0$, $\sigma_1^{(2)}=(C^{(2)}, X_1^{(2)})=((-1,\ 3),$

$$(0,\ 0))=0;\ \overline{\Omega}=(0,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(0,\ 0,\ 0);\ \Omega=(0);\ \lambda_2=$$

$=\lambda_{m+1}=0$; $\lambda_3=\lambda_{m+2}=0$.

Составляем и решаем подзадачу 1:

$$F_1^{(1)}=(C^{(1)}-\Omega A^{(1)}, X^{(1)})=((2;\ 3)-0\ (1;\ 1),\ (x_1;\ x_2))=2x_1+3x_2\to\max;$$

$$\begin{cases}-3x_1+x_2\leqslant 9,\\ 4x_1-x_2\leqslant 8,\end{cases}\qquad x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

Оптимальным планом последней задачи является $X_3^{(1)}=(17;\ 60)$. При этом $F_1^{(1)}\ (X_3^{(1)})=214>\lambda_{m+1}=\lambda_2=0$. Значит, исходный базис, образованный векторами P_5, $P_1^{(1)}$ и $P_1^{(2)}$, определяет опорный план главной задачи, который не является оптимальным.

П е р в а я б о л ь ш а я и т е р а ц и я. Из чисел $\lambda_m-(C^{(1)}-\Omega A^{(1)},\ X_3^{(1)})$, λ_1, λ_2, ..., λ_m, т. е. в данном случае из чисел -214 и 0, наименьшим отрицательным является -214. Следовательно, в базис вводим вектор

$$P_3^{(1)}=\begin{pmatrix}A^{(1)}X_3^{(1)}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}77\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Для него $\sigma_3^{(1)}=(C^{(1)},\ X_3^{(1)})=((2;\ 3),\ (17;\ 60))=214$. Разложение вектора $P_3^{(1)}$, как и вектора $\widetilde{P}_0=\begin{pmatrix}17\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, по векторам исходного базиса совпадает с этими векторами. Поэтому для определения вектора, исключаемого из базиса, находим наименьшее из отношений компонент вектора $\widetilde{P}_0$ к положительным компонентам вектора $P_3^{(1)}$, т. е. $\min\ (17/77;\ 1/1)=17/77$. Таким образом, из базиса исключаем первый вектор, т. е. вектор P_5, и, следовательно, новый базис образуют векторы $P_3^{(1)}$, $P_1^{(1)}$ и $P_1^{(2)}$. Матрица, составленная из компонент этих векторов, такова:

$$B=\begin{pmatrix} 77 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим матрицу

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и определяем векторы $\overline{\Omega}$, Ω и $C^{(1)}-\Omega A^{(1)}$:

$$\overline{\Omega}=\sigma_6 B^{-1}=(\sigma_3^{(1)};\ \sigma_1^{(1)};\ \sigma_1^{(2)})\,B^{-1}=$$

$$=(214;\ 0;\ 0)\cdot\begin{pmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(214/77;\ 0;\ 0);$$

$$\Omega=(214/77);\ \lambda_2=\lambda_{m+1}=0;\ \lambda_3=\lambda_{m+2}=0;\ C^{(1)}-\Omega A^{(1)}=$$
$$=((2;\ 3)-(214/77)\cdot(1;\ 1))=(-60/77;\ 17/77).$$

Подзадача 1 имеет вид

$$F_2^{(1)}=-(60/77)x_1+(17/77)x_2\to\max;$$

$$\begin{cases} -3x_1+x_2\leqslant 9, \\ 4x_1-x_2\leqslant 8, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

Оптимальным планом последней задачи является $X_2^{(1)}=(0;\ 9)$. Так как $F_2^{(1)}(X_2^{(1)})=153/77>\lambda_2=0$, то рассматриваемый базис определяет опорный план главной задачи, не являющийся оптимальным.

Вторая большая итерация. Из чисел $\lambda_2-(C^{(1)}-\Omega A^{(1)},\ X_2^{(1)})$, λ_2, т. е. в данном случае из чисел $-153/77$ и 0, наименьшим отрицательным является $-153/77=\lambda_2-(C^{(1)}-\Omega A^{(1)},\ X_2^{(1)})$. Значит, в базис вводим вектор

$$P_2^{(1)}=\begin{pmatrix} A^{(1)}X_2^{(1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно $\sigma_2^{(1)}=(C^{(1)},\ X_2^{(1)})=((2;\ 3),\ (0;\ 9))=27$.

Чтобы определить вектор, исключаемый из базиса, разложим векторы $P_2^{(1)}$ и P_0 по векторам рассматриваемого базиса, т. е.

$$B^{-1}P_2^{(1)}=\begin{pmatrix} 1/77 & 0 & 0 \\ -1/77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9/77 \\ 68/77 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$B^{-1}P_0 = \begin{pmatrix} 1/77 & 0 & 0 & 17 \\ -1/77 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17/77 \\ 60/77 \\ 1 \end{pmatrix};$$

и найдем $\min(17/77:9/77;\ 60/77:68/77)=\min(17/9;\ 15/17)=$ $=15/17$. Следовательно, из базиса исключаем второй вектор, т. е. вектор $P_1^{(1)}$. Новый базис образуют векторы

$$P_3^{(1)}=\begin{pmatrix} 77 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_2^{(1)}=\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } P_1^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, составленная из компонент этих векторов, такова:

$$B=\begin{pmatrix} 77 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

обратная к ней имеет вид

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим векторы $\overline{\Omega}$, Ω и $C^{(1)}-\Omega A^{(1)}$:

$$\overline{\Omega}=(\sigma_3^{(1)};\ \sigma_2^{(1)};\ \sigma_1^{(2)})B^{-1}=(214;\ 27;\ 0)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 0 \\ -1/68 & 77/68 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(11/4;\ 9/4;\ 0);$$

$$\Omega=(9/4);\ \lambda_2=\lambda_{m+1}=9/4;\ \lambda_3=\lambda_{m+2}=0;$$

$$C^{(1)}-\Omega A^{(1)}=((2;\ 3)-(11/4)\ (1;\ 1))=(-3/4;\ 1/4).$$

Составляем и решаем подзадачу 1:

$$F_3^{(1)}=-(3/4)x_1+(1/4)x_2\to\max;$$

$$\begin{cases} -3x_1+x_2\leqslant 9, \\ 4x_1-x_2\leqslant 8 \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

Подзадача 1 имеет оптимальный план $X_2^{(1)}=(0;\ 9)$. При этом $F_3^{(1)}\ (X_2^{(1)})=9/4=\lambda_2$.

Составляем и решаем подзадачу 2:

$$F_1^{(2)}=(C^{(2)}-\Omega A^{(2)},\ X^{(2)})=((-1;\ -2)-(9/4)\,(-2;\ 1),\ (x_3;\ x_4))=$$
$$=(9/2)\,x_3-(13/4)\,x_4\to\max;$$
$$\begin{cases} x_3+x_4\leqslant 22,\\ -2x_3+x_4\leqslant 13,\end{cases}$$
$$x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

Подзадача 2 имеет оптимальный план $X_4^{(2)}=(22;\ 0)$. Так как $F_1^{(2)}\ (X_4^{(2)})=99>\lambda_3=0$, то рассматриваемый базис определяет опорный план главной задачи, не являющийся оптимальным.

Третья большая итерация. Из чисел $\lambda_3-(C^{(2)}-\Omega A^{(2)},\ X_4^2)=-99$, $\lambda_1=11/4$ наименьшее отрицательное есть -99. Поэтому в базис вводим вектор

$$P_4^{(2)}=\begin{pmatrix} A^{(2)}X_4^{(2)}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-44\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Соответственно $\sigma_4^{(2)}=(C^{(2)},\ X_4^{(2)})=((-1;\ -2),\ (22;\ 0))=-22$.

Чтобы определить вектор, выводимый из базиса, разложим векторы $P_4^{(2)}$ и $\widetilde{P_0}$ по векторам рассматриваемого базиса, т. е.

$$B^{-1}\widetilde{P_0}=\begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 0\\ -1/68 & 77/68 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/17\\ 15/17\\ 1\end{pmatrix};$$

$$B^{-1}P_4^{(2)}=\begin{pmatrix} 1/68 & 9/68 & 0\\ -1/68 & 77/68 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-44\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11/17\\ 11/17\\ 1\end{pmatrix},$$

и найдем $\min\ (15/17:11/17;\ 1/1)=1$. Таким образом, из базиса исключаем вектор P_1^2. Новый базис образуют векторы

$$P_3^{(1)}=\begin{pmatrix}77\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ P_2^{(1)}=\begin{pmatrix}9\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\text{ и } P_4^{(2)}=\begin{pmatrix}-44\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Матрица, обратная матрице, составленной из компонент векторов $P_3^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ и $P_4^{(2)}$, такова:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 11/17\\ -1/68 & 77/68 & -11/17\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Найдем векторы $\overline{\Omega}$, Ω, $C^{(1)}-\Omega A^{(1)}$ и $C^{(2)}-\Omega A^{(2)}$:

$$\overline{\Omega}=(\sigma_3^{(1)};\ \sigma_2^{(1)};\ \sigma_4^{(2)})\ B^{-1}=$$

$$= (214;\, 27;\, -22)\begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 11/17 \\ -1/68 & 77/68 & -11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (11/4;\ 9/4;\ 99);$$

$$\Omega = (11/4);\ \lambda_{m+1} = \lambda_2 = 9/4;\ \lambda_{m+2} = \lambda_3 = 99;$$

$$C^{(1)} - \Omega A^{(1)} = ((2;\ 3) - (11/4)\ (1;\ 1)) = (-3/4;\ 1/4);$$

$$C^{(2)} - \Omega A^{(2)} = ((-1;\ -2) - (11/4)\ (-2;\ 1)) = (9/2;\ -19/4).$$

Составляем и решаем подзадачу 1:

$$F_3^{(1)} = -(3/4)x_1 + (1/4)x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \leqslant 9, \\ 4x_1 - x_2 \leqslant 8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

Оптимальный план $X_2^{(1)} = (0;\ 9)$; при этом $F_3^{(1)}\ (X_2^{(1)}) = 9/4 = \lambda_2$.

Составляем и решаем подзадачу 2:

$$F_1^{(2)} = (9/2)x_3 - (19/4)x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \leqslant 22, \\ -2x_3 + x_4 \leqslant 13, \end{cases}$$

$$x_3,\ x_4 \geqslant 0.$$

Подзадача 2 имеет оптимальный план $X_4^{(2)} = (22;\ 0)$; при этом $F_1^{(2)}\ (X_4^{(2)}) = 99 = \lambda_3$.

Таким образом, определяемый рассматриваемым базисом опорный план является оптимальным. Для его нахождения разложим вектор $\widetilde{P}_0$ по векторам данного базиса:

$$B^{-1}\tilde{P}_0 = \begin{pmatrix} 1/68 & -9/68 & 11/17 \\ -1/68 & 77/68 & -11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/17 \\ 4/17 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, в оптимальном плане главной задачи отличные от нуля компоненты таковы: $y_3^{(1)} = 13/17$, $y_2^{(1)} = 4/17$ и $y_4^{(2)} = 1$.

Используя формулы (124) и (125), находим оптимальный план исходной задачи (135)—(137):

$$X_0^* = (X_1^*;\ X_2^*) = (y_2^{(1)}X_2^{(1)} + y_3^{(1)}X_3^{(1)};\ y_4^{(2)}X_4^{(2)}) =$$

$$= ((4/17)\cdot(0;\, 9) + (13/17)\cdot(17;\, 60);\, 1\cdot(22;\, 0) = (13;\, 48;\, 22;\, 0).$$

Максимальное значение целевой функции

$$F_{\max}=2\cdot 13+3\cdot 48-22=148.$$

В заключение отметим, что помимо метода Данцига—Вулфа существуют и другие методы, позволяющие сводить решение задачи большой размерности к решению ряда подзадач меньшей размерности.

Используя метод Данцига—Вулфа, найдите решение задач 2.92—2.98.

2.92. $3x_1-2x_2+3x_3+x_4\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_4\leqslant 18, \\ x_1+x_2\leqslant 9, \\ -3x_1+3x_2\leqslant 12, \\ 2x_3-3x_4\leqslant 12, \\ x_3+3x_4\leqslant 15, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

2.93. $2x_1+3x_2-2x_3-x_4\to\max;$

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4\leqslant 20, \\ x_1+x_2\leqslant 5, \\ x_1-x_2\leqslant 3, \\ 2x_3+x_4\leqslant 4, \\ -x_3+x_4\leqslant 2, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

2.94. $5x_1+4x_2\to\max;$

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 18, \\ 2x_1+x_2\leqslant 20, \\ -x_1+x_2\leqslant 9, \\ x_2\leqslant 10, \\ -3x_1+4x_2\geqslant 12, \\ x_2\geqslant 5, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

2.95. $5x_1+6x_2+4x_3+7x_4\to\max;$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3+3x_4\leqslant 150, \\ 4x_1+5x_2\leqslant 80, \\ 3x_1+2x_2\leqslant 60, \\ x_3+x_4\leqslant 90, \\ 2x_3+4x_4\leqslant 80, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

2.96. $F=x_1+2x_2-3x_3+5x_4\to\max;$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4\leqslant 24, \\ 2x_1+3x_2\leqslant 102, \\ x_1-2x_2\leqslant 16, \\ x_3+2x_4\leqslant 14, \\ x_3-2x_4\leqslant 18, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

2.97. $F=2x_1+5x_2-4x_3+2x_4\to\max;$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3-5x_4\leqslant 50, \\ 2x_1+x_2\leqslant 20, \\ x_1-3x_2\leqslant 27, \\ 2x_3+3x_4\leqslant 28, \\ -x_3+2x_4\leqslant 12, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0.$$

2.98. Для производства двух видов изделий на двух предприятиях отрасли может быть использовано 480 ед. сырья. Нормы затрат сырья на одно изделие соответственно равны 4 и 3 ед., а прибыль от реализации одного изделия соответственно равна 5 и 6 руб.

На каждом из предприятий сырье проходит последовательную обработку, причем используются два типа технологического оборудования. Затраты времени при обработке сырья на каждом из типов оборудования в каждом из предприятий приведены в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования на каждом из предприятий.

Тип оборудования	1-е предприятие		2-е предприятие		Общий фонд рабочего времени предприятия	
	Затраты времени на изготовление одного изделия					
	A	*B*	*A*	*B*	1	2
I	2	1	2	3	360	420
II	1	3	4	5	420	340

С учетом имеющегося сырья и возможностей использования предприятиями технологического оборудования определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить на каждом из предприятий, так чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

§ 2.6. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИГР И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Экономическая и геометрическая интерпретации задач теории игр. Если имеется несколько конфликтующих сторон (лиц), каждая из которых принимает некоторое решение, определяемое заданным набором правил, и каждому из лиц известно возможное конечное состояние конфликтной ситуации с заранее определенными для каждой из сторон платежами, то говорят, что имеет место *игра*. Задача теории игр состоит в выборе такой линии поведения данного игрока, отклонение от которой может лишь уменьшить его выигрыш.

Определение 2.5. Ситуация называется *конфликтной*, если в ней участвуют стороны, интересы которых полностью или частично противоположны.

Определение 2.6. *Игра* — это действительный или формальный конфликт, в котором имеется по крайней мере два участника (игрока), каждый из которых стремится к достижению собственных целей.

Определение 2.7. Допустимые действия каждого из игроков, направленные на достижение некоторой цели, называются *правилами игры*.

Определение 2.8. Количественная оценка результатов игры называется *платежом.*

Определение 2.9. Игра называется *парной,* если в ней участвуют только две стороны (два лица).

Определение 2.10. Парная игра называется *игрой с нулевой суммой,* если сумма платежей равна нулю, т. е. если проигрыш одного игрока равен выигрышу второго.

Парные игры с нулевой суммой и рассматриваются ниже.

Определение 2.11. Однозначное описание выбора игрока в каждой из возможных ситуаций, при которой он должен сделать личный ход, называется *стратегией* игрока.

Определение 2.12. Стратегия игрока называется *оптимальной,* если при многократном повторении игры она обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что то же самое, минимально возможный средний проигрыш).

Пусть имеется два игрока, один из которых может выбрать i-ю стратегию из m своих возможных стратегий $(i=\overline{1, m})$, а второй, не зная выбора первого, выбирает j-ю стратегию из n своих возможных стратегий $(j=\overline{1, n})$. В результате первый игрок выигрывает величину a_{ij}, а второй проигрывает эту величину.

Из чисел a_{ij} составим матрицу

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки матрицы A соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы — стратегиям второго. Эти стратегии называются *чистыми.*

Определение 2.13. Матрица A называется *платежной* (или *матрицей игры*).

Определение 2.14. Игру, определяемую матрицей A, имеющей m строк и n столбцов, называют *конечной игрой размерности* $m\times n$.

Определение 2.15. Число $\alpha=\max\limits_i (\min\limits_j a_{ij})$ называется *нижней ценой игры* или *максимином,* а соответствующая ему стратегия (строка) — *максиминной.*

Определение 2.16. Число $\beta=\min\limits_j (\max\limits_i a_{ij})$ называется *верхней ценой игры* или *минимаксом,* а соответствующая ему стратегия игрока (столбец) — *минимаксной.*

Теорема 2.3. *Нижняя цена игры всегда не превосходит верхней цены игры.*

Определение 2.17. Если $\alpha=\beta=v$, то число v называется *ценой игры.*

О п р е д е л е н и е 2.18. Игра, для которой $\alpha=\beta$, называется *игрой с седловой точкой.*

Для игры с седловой точкой нахождение решения состоит в выборе максиминной и минимаксной стратегий, которые являются оптимальными.

Если игра, заданная матрицей, не имеет седловой точки, то для нахождения ее решения используются смешанные стратегии.

О п р е д е л е н и е 2.19. Вектор, каждая из компонент которого показывает относительную частоту использования игроком соответствующей чистой стратегии, называется *смешанной стратегией* данного игрока.

Из данного определения непосредственно следует, что сумма компонент указанного вектора равна единице, а сами компоненты не отрицательны. Обычно смешанную стратегию первого игрока обозначают как вектор $U=(u_1, u_2, \dots, u_m)$, а второго игрока — как вектор $Z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$, где $u_i \geqslant 0$ $(i=\overline{1, m})$, $z_j \geqslant 0$ $(j=\overline{1, n})$, $\sum_{i=1}^{m} u_i=1$, $\sum_{j=1}^{n} z_j=1$.

Если U^* — оптимальная стратегия первого игрока, а Z^* — оптимальная стратегия второго игрока, то число

$$v=\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* z_j^*$$

является ценой игры.

Определение оптимальных стратегий и цены игры и составляет процесс нахождения решения игры.

Теорема 2.4. *Всякая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.*

Теорема 2.5. *Для того чтобы число v было ценой игры, а U^* и Z^* — оптимальными стратегиями, необходимо и достаточно выполнение неравенств*

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^* \geqslant v \ (j=\overline{1, n}) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j^* \leqslant v \ (i=\overline{1, m}).$$

Если теорема 2.4 дает ответ на вопрос о существовании решения игры, то следующая теорема дает ответ на вопрос, как найти это решение для игр 2×2, $2\times n$ и $n\times 2$, примеры которых приведены ниже.

Теорема 2.6. *Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную (в том числе и чистые стратегии).*

2.99. Найти решение игры, заданной матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, и дать геометрическую интерпретацию этого решения.

Решение. Прежде всего проверим наличие седловой точки в данной матрице. Для этого найдем минимальные элементы в каждой из строк (2 и 4) и максимальные элементы в каждом из столбцов (6 и 5). Значит, нижняя цена игры $\alpha = \max(2; 4) = 4$, а верхняя цена игры $\beta = \min(6; 5) = 5$. Так как $\alpha = 4 \neq \beta = 5$, то решением игры являются смешанные оптимальные стратегии, а цена игры v заключена в пределах $4 \leqslant v \leqslant 5$.

Предположим, что для игрока A стратегия задается вектором $U = (u_1;\ u_2)$. Тогда на основании теоремы 2.6 при применении игроком B чистой стратегии B_1 или B_2 игрок A получит средний выигрыш, равный цене игры, т. е.

$$2u_1^* + 6u_2^* = v \quad (\text{при стратегии } B_1),$$

$$5u_1^* + 4u_2^* = v \quad (\text{при стратегии } B_2).$$

Помимо двух записанных уравнений относительно u_1^* и u_2^* добавим уравнение, связывающее частоты u_1^* и u_2^*:

$$u_1^* + u_2^* = 1.$$

Решая полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными, находим $u_1^* = 2/5$; $u_2^* = 3/5$; $v = 22/5$.

Найдем теперь оптимальную стратегию для игрока B. Пусть стратегия для данного игрока задается вектором $Z = (z_1;\ z_2)$ Тогда

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = 22/5, \\ 6z_1^* + 4z_2^* = 22/5, \\ z_1^* + z_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, состоящую из каких-нибудь двух уравнений, взятых из последней системы, получим $z_1^* = 1/5$; $z_2^* = 4/5$. Следовательно, решением игры являются смешанные стратегии $U^* = (2/5; 3/5)$ и $Z^* = (1/5; 4/5)$, а цена игры $v = 22/5$.

Дадим теперь геометрическую интерпретацию решения данной игры. Для этого на плоскости uOz введем систему координат и на оси Ou отложим отрезок единичной длины A_1A_2, каждой точке которого поставим в соответствие некоторую смешанную стратегию $U = (u_1,\ u_2) = (u_1,\ 1 - u_1)$ (рис. 2.15). В частности, точке A_1 (0; 1) отвечает стратегия A_1, точке A_2 (1; 0) — стратегия A_2 и т. д.

В точках A_1 и A_2 восставим перпендикуляры и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью Oz) отложим выигрыш игрока A при стратегии A_1, а на втором — при стратегии A_2. Если игрок A применяет стратегию A_1, то его выигрыш при стратегии B_1 игрока B равен 2, а при стратегии B_2 он равен 5. Числам 2 и 5 на оси Oz соответствуют точки B_1 и B_2.

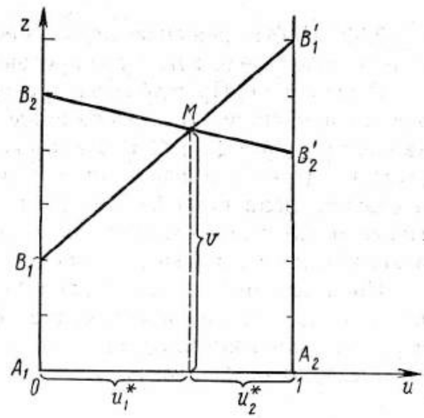


Рис. 2.15

Если же игрок A применяет стратегию A_2, то его выигрыш при стратегии B_1 игрока B равен 6, а при стратегии B_2 он равен 4. Эти два числа определяют две точки B_1' и B_2' на перпендикуляре, восставленном в точке A_2. Соединяя между собой точки B_1 и B_1', B_2 и B_2', получим две прямые, расстояние до которых от оси Ou определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Например, расстояние от любой точки отрезка B_1B_1' до оси Ou определяет средний выигрыш v_1 при любом сочетании стратегий A_1 и A_2 (с частотами u_1 и u_2) и стратегии B_1 игрока B. Это расстояние равно $2u_1+6u_2=v_1$. Аналогично, средний выигрыш при применении стратегии B_2 определяется ординатами точек, принадлежащих отрезку B_2B_2'.

Таким образом, ординаты точек, принадлежащих ломаной B_1MB_2', определяют минимальный выигрыш игрока A при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке M; следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $U^*=(u_1^*;\ u_2^*)$, а ее ордината равна цене игры v. Координаты точки M находим как координаты точки пересечения прямых B_1B_1' и B_2B_2'. Соответствующие три уравнения имеют вид

$$\begin{cases} 2u_1^*+6u_2^*=v, \\ 5u_1^*+4u_2^*=v, \\ u_1^*+\ u_2^*=1. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений, получаем $u_1^*=2/5$; $u_2^*=$ $=3/5$; $v=22/5$.

Аналогично находится оптимальная стратегия для игрока B.

Для ее определения имеем уравнения

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = 22/5, \\ \;\; z_1^* + \;\; z_2^* = 1, \end{cases}$$

или

$$z_1^* = 1/5;\; z_2^* = 4/5.$$

Следовательно, решением игры являются смешанные стратегии $U^* = (2/5; 3/5)$ и $Z^* = (1/5; 4/5)$, а цена игры $v = 22/5$. К такому выводу мы пришли и выше.

Обобщая изложенные выше результаты нахождения решения игры 2×2, можно указать основные этапы нахождения решения игры $2\times n$ или $n\times2$.

1. Строят прямые, соответствующие стратегиям второго (первого) игрока.
2. Определяют нижнюю (верхнюю) границу выигрыша.
3. Находят две стратегии второго (первого) игрока, которым соответствуют две прямые, пересекающиеся в точке с максимальной (минимальной) ординатой.
4. Определяют цену игры и оптимальные стратегии.

2.100. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. На рис. 2.16 прямые B_1B_1', B_2B_2' и B_3B_3' соответствуют стратегиям, а ломаная B_1KB_2' — нижней границе выигрыша игрока B. Игра имеет решение $U^* = (2/3; 1/3)$, $Z^* = (1/2; 1/2; 0)$, $v = 8$.

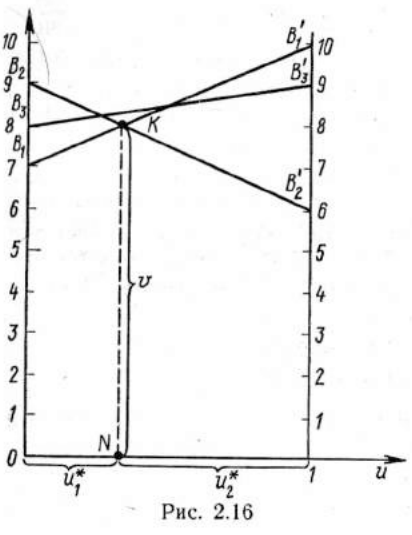


Рис. 2.16

2.101. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица имеет размерность 2×4. Строим прямые, соответствующие стратегиям игрока A (рис. 2.17). Ломаная A_1KA_4' соответствует верхней границе выигрыша игрока A, а отрезок

NK — цене игры. Решение игры таково: $U^*=(7/8;\ 0;\ 0;\ 1/8)$, $Z^*=(3/8;\ 5/8)$, $v=43/8$.

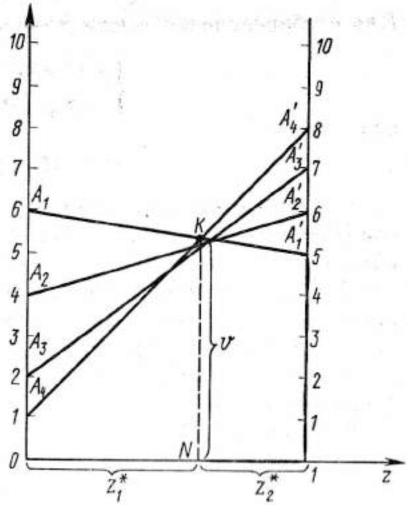


Рис. 2.17

2.102. Швейное предприятие планирует к массовому выпуску новую модель одежды. Спрос на эту модель не может быть точно определен. Однако можно предположить, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями (I, II, III). С учетом этих состояний анализируются три возможных варианта выпуска данной модели (A, $Б$, $В$). Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает в конечном счете различный эффект. Прибыль (тыс. руб.), которую получает предприятие при данном объеме выпуска модели и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей

$$\begin{array}{c} \\ A \\ Б \\ В \end{array}\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\ 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти объем выпуска модели одежды, обеспечивающий среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

Р е ш е н и е. Прежде всего проверим, имеет ли исходная матрица седловую точку. Для этого находим минимальные элементы в ее строках (22; 21; 20) и максимальные — в столбцах (22; 23; 24). Максимальным среди минимальных элементов строк является число $\alpha=22$, а минимальным среди максимальных элементов столбцов — число $\beta=22$. Таким образом, $\alpha=\beta=22$. Число 22 является ценой игры. Игра имеет седловую точку, соответствующую I варианту выпуска модели одежды. Объем выпуска модели, соответствующей данному варианту, обеспечивает прибыль в 22 тыс. руб. при любом состоянии спроса.

Используя геометрическую интерпретацию, найдите решение игр, определяемых следующими матрицами.

2.103. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

2.104. $A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

2.105. Обувная фабрика планирует выпуск двух моделей обуви A и B. Спрос на эти модели не определен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний (I и II). В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей $A=\begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}$. Найдите оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.

2. Сведение задач теории игр к задачам линейного программирования. Рассмотрим игру $m \times n$, определяемую матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 2.5, для оптимальной стратегии первого игрока $U^*=(u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ и цены игры v выполняется неравенство $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}u_i^* \geqslant v$ $(j=\overline{1,n})$. Предположим для определенности, что $v>0$. Это всегда может быть достигнуто благодаря тому, что прибавление ко всем элементам матрицы A одного и того же постоянного числа C не приводит к изменению оптимальных стратегий, а только лишь увеличивает цену игры на C.

Разделив теперь обе части последнего неравенства на v, получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\frac{u_i^*}{v} \geqslant 1 \quad (j=\overline{1,n}).$$

Положим $u_i^*/v=y_i^*$, тогда

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* \geqslant 1 \ (j=\overline{1,n});\ y_i^* \geqslant 0 \ (i=\overline{1,m}).$$

Используя введенное обозначение, перепишем условие $\sum\limits_{i=1}^{m} u_i^*=1$ в виде $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^*=1/v$.

Так как первый игрок стремится получить максимальный выигрыш, то он должен обеспечить минимум величине $1/v$. С учетом этого, определение оптимальной стратегии первого игрока сводится к нахождению минимального значения функции $F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$ при условиях $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 1$ $(j=\overline{1,n})$; $y_i \geqslant 0$ $(i=\overline{1,m})$.

Аналогичные рассуждения показывают, что определение оптимальной стратегии второго игрока сводится к нахождению максимального значения функции $F=\sum_{j=1}^{n} x_j$ при условиях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant 1$ $(i=\overline{1, m})$; $x_j \geqslant 0$ $(j=\overline{1,n})$. Здесь $x_j = z_j/v$.

Таким образом, чтобы найти решение данной игры, определяемой матрицей A, нужно составить следующую пару двойственных задач и найти их решение.

Прямая задача: найти максимальное значение функции $F = \sum_{j=1}^{n} x_j$ при условиях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant 1$ $(i=\overline{1, m})$; $x_j \geqslant 0$ $(j=\overline{1, n})$.

Двойственная задача: найти минимальное значение функции $F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$ при условиях $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant 1$ $(j=\overline{1,n})$; $y_i \geqslant 0$ $(i=\overline{1, m})$.

Используя решение пары двойственных задач, получаем формулы для определения стратегий и цены игры:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = v y_i^*; \quad z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = v x_j^*;$$

$$v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}; \quad (i=\overline{1, m};\ j=\overline{1, n}).$$

Итак, процесс нахождения решения игры с использованием методов линейного программирования включает следующие этапы:

1. Составляют пару двойственных задач линейного программирования, эквивалентных данной матричной игре.

2. Определяют оптимальные планы пары двойственных задач.

3. Используя соотношение между планами пары двойственных задач и оптимальными стратегиями и ценой игры, находят решение игры.

2.106. Найти решение игры, определяемой матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим двойственную пару задач линейного программирования: прямая задача: найти максимум функции $F=x_1+x_2+x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \leqslant 1, \\ x_1 \qquad +x_3 \leqslant 1, \\ 2x_1+x_2 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0;$$

двойственная задача: найти минимум функции $F^*=y_1+y_2+y_3$ при условиях

$$\begin{cases} y_1+y_2+2y_3 \geqslant 1, \\ 2y_1 \qquad + \ y_3 \geqslant 1, \\ \qquad\qquad y_2 \geqslant 1, \end{cases}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3 \geqslant 0.$$

Находим оптимальные планы прямой и двойственной задач (табл. 2.52).

Таблица 2.52

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_5	0	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
			0	−1	−1	−1	0	0	0
1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
			1	0	−1	0	0	1	0
1	P_2	1	1/2	1/2	1	0	1/2	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1/2	3/2	0	0	−1/2	0	1
			3/2	1/2	0	0	1/2	1	0

Из табл. 2.52 видно, что исходная задача имеет оптимальный план $X^*=(0;\ 1/2;\ 1)$, а двойственная задача — оптимальный план $Y^*=(1/2;\ 1;\ 0)$. Следовательно, цена игры $v=\dfrac{1}{1/2+1}=\dfrac{2}{3}$, а оптимальные стратегии игроков $U^*=(1/3;\ 2/3;\ 0)$; $Z^*=(0;\ 1/3;\ 2/3)$.

Выше было показано, что для всякой матричной игры можно записать симметричную пару двойственных задач. Справедливо и обратное: для всякой симметричной пары двойственных задач можно записать матричную игру.

Пусть задана симметричная пара двойственных задач: прямая задача: $F=CX$, $AX\leqslant B$, $X\geqslant 0$; двойственная задача: $F^*=BY$, $YA\geqslant C$, $Y\geqslant 0$. Тогда этой симметричной паре двойственных задач можно поставить в соответствие игру, определяемую матрицей

$$D=\begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^{\text{т}} & 0 & C^{\text{т}} \\ B^{\text{т}} & -C & 0 \end{pmatrix},$$

где индекс $^{\text{т}}$ означает операцию транспонирования.

Следует отметить, что если каждая матричная игра имеет оптимальные стратегии, то не всякая задача линейного программирования имеет решения.

2.107. Построить игру, определяемую следующей парой двойственных задач: прямая задача:

$$2x_1+3x_2\to\max;$$
$$\begin{cases} 2x_1+x_2\leqslant 10, \\ -x_1+3x_2\leqslant 12, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0;$$

двойственная задача:

$$10y_1+12y_2\to\min;$$
$$\begin{cases} 2y_1-y_2\geqslant 2, \\ y_1+3y_2\geqslant 3, \end{cases}$$
$$y_1,\ y_2\geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Здесь

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\ A^{\text{т}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$B^{\text{т}}=(10;\ 12);\ C=(2;\ 3),\ C^{\text{т}}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, исходной симметричной паре двойственных задач можно поставить в соответствие матричную игру, определяемую матрицей

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12 \\ -2 & +1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

В задачах 2.108—2.111 найдите решение игр, определяемых следующими матрицами:

2.108. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

2.109. $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$

2.110. $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

2.111. $A=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

В задачах 2.112 и 2.113 постройте для симметричных пар двойственных задач определяемые ими матричные игры.

2.112. $F=3x_1+4x_2+x_3\to\max;$ $\quad F'^*=12y_1+14y_2+14y_3\to\min;$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3\leqslant 12, \\ -x_1+x_2+x_3\leqslant 14, \\ 3x_1+4x_2-x_3\leqslant 16, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1-y_2+3y_3\geqslant 3, \\ 3y_1+y_2+4y_3\geqslant 4, \\ -4y_1+y_2-y_3\geqslant 1, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0; \qquad y_1,\ y_2,\ y_3\geqslant 0.$$

2.113. $F=5x_1+7x_2+8x_3\to\max;$ $\quad F'^*=18y_1+16y_2+24y_3\to\min;$

$$\begin{cases} x_1+x_2+5x_3\leqslant 18, \\ 3x_1+2x_2+x_3\leqslant 16, \\ 4y_1+3x_2+x_3\leqslant 24, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1+3y_2+4y_3\geqslant 5, \\ y_1+2y_2+3y_3\geqslant 7, \\ 5y_1+y_2+y_3\geqslant 8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0; \qquad y_1,\ y_2,\ y_3\geqslant 0.$$

ГЛАВА 3

ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 3.1. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} g_i\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \leqslant b_i\ (i=\overline{1,k}), \\ g_i\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = b_i\ (i=\overline{k+1,m}), \end{cases} \tag{2}$$

где f и g_i — некоторые известные функции n переменных, а b_i — заданные числа.

Здесь имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка $X^* = (x^*_1;\ x^*_2;\ ...;\ x^*_n)$, координаты которой удовлетворяют соотношениям (2) и такая, что для всякой другой точки $X = (x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n)$, удовлетворяющей условиям (2), выполняется неравенство $f\ (x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*) \geqslant f\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ $[f\ (x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*) \leqslant f\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)]$.

Если f и g_i — линейные функции, то задача (1), (2) является задачей линейного программирования.

Соотношения (2) образуют систему ограничений и включают в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

В евклидовом пространстве E_n система ограничений (2) определяет область допустимых решений задачи. В отличие от задачи линейного программирования она не всегда является выпуклой.

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи (1), (2) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня: $f\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = h$. Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри нее.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (1), (2) с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (2) (если она пуста, то задача не имеет решения).

2. Строят гиперповерхность $f(x_1, x_2, ..., x_n) = h$.

3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (1) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.

4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (1).

3.1. Найти максимальное значение функции

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \tag{3}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 24, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 24, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_2 \leqslant 4,$$

$$x_1, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{5}$$

Решение. Так как целевая функция (3) нелинейная, то задача (3) — (5) является задачей нелинейного программирования. Областью допустимых решений данной задачи является многоугольник $OABC$ (рис. 3.1). Следовательно, для нахождения ее решения нужно определить такую точку многоугольника $OABC$, в которой функция (3) принимает максимальное значение. Построим линию уровня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$, где h — некоторая постоянная, и исследуем ее поведение при различных значениях h. При каждом значении h получаем параболу, которая тем выше отдалена от оси Ox_1, чем больше значение h (рис. 3.1). Значит, функция F принимает максимальное значение в точке касания одной из парабол с границей многоугольника $OABC$. В данном случае это точка D (рис. 3.1), в которой линия уровня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13$ касается стороны AB многоугольника $OABC$. Координаты точки D можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases} \tag{6}$$

Решая эту систему, получим $x_1^* = 3$; $x_2^* = 4$. Итак, $F_{\max} = 13$ при $X^* = (3;\ 4)$.

Как видим, в задаче (3) — (5) точка максимального значения целевой функции не является вершиной многоугольника решений. Поэтому процедура перебора вершин, которая использо-

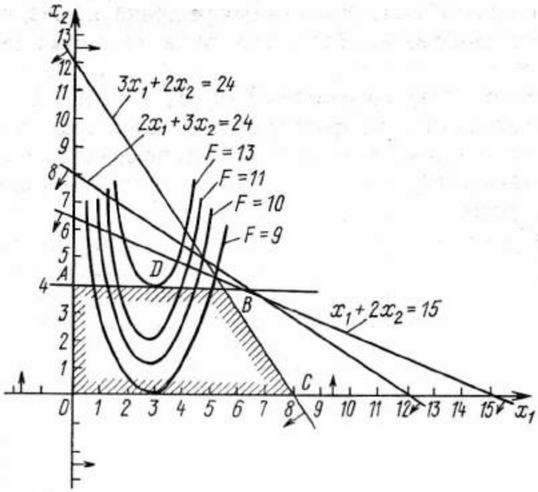


Рис. 3.1

валась при решении задач линейного программирования, неприменима для решения данной задачи.

3.2. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$F=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 \tag{7}$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\geqslant 7, \\ 10x_1-\ x_2\leqslant 8, \\ -18x_1+4x_2\leqslant 12, \end{cases} \tag{8}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0. \tag{9}$$

Решение. Областью допустимых решений задачи (7) — (9) является треугольник ABC (рис. 3.2). Полагая значение целевой функции (7) равным некоторому числу h, получаем линии уровня, а именно окружности $(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=h$ с центром E (3; 4) и радиусом $\sqrt{h}$. С увеличением (уменьшением) числа h значения функции F соответственно увеличиваются (уменьшаются).

Проводя из точки E окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке D, в которой окружность касается области решений. Для определения координат этой точки воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $10x_1-x_2=8$ и касательной к окружности

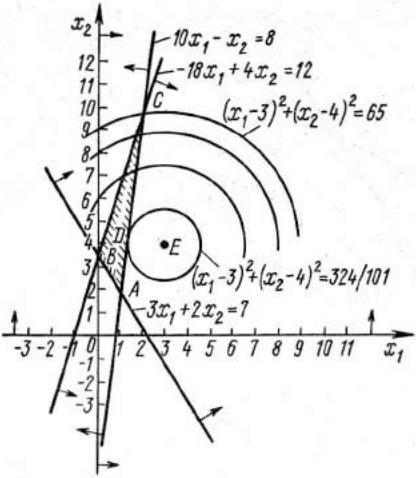


Рис. 3.2

в точке D. Из уравнения прямой $x_2 = 10x_1 - 8$ видим, что ее угловой коэффициент в точке D равен 10. Угловой же коэффициент касательной к окружности в точке D определим как значение производной функции x_2 от переменной x_1 в этой точке. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1 и дифференцируя уравнение окружности, получим

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0,$$

откуда

$$x_2' = -(x_1 - 2)/(x_2 - 4).$$

Приравнивая найденное выражение числу 10, получаем одно из уравнений для определения координат точки E. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка E, имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43, \\ 10x_1 - x_2 \quad = 8, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 123/101$; $x_2^* = 422/101$. Таким образом, $F_{\min} = (123/101 - 3)^2 + (422/101 - 4)^2 = 324/101$.

Как видно из рис. 3.2, целевая функция принимает максимальное значение в точке C (2; 12). Ее координаты определены путем решения системы уравнений прямых, на пересечении которых находится точка C. Таким образом, максимальное значение функции $F_{\max} = 65$.

3.3. Найти максимальное и минимальное значения функции

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \tag{10}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leqslant 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \end{cases} \tag{11}$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0. \tag{12}$$

Р е ш е н и е. Областью допустимых решений исходной задачи является многоугольник $ABCDE$ (рис. 3.3), а линиями уровня —

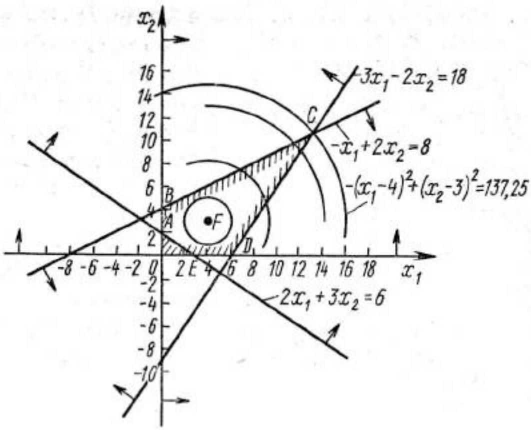


Рис. 3.3

окружности $(x_1-4)^2+(x_2-3)^2=h$ с центром E (4; 3) и радиусом $R=\sqrt{h}$.

Из рис. 3.3 видно, что целевая функция принимает минимальное значение в точке F (4; 3), а максимальное — в точке C (13; 10,5). Следовательно, $F_{\min}=0$ и $F_{\max}=137{,}25$.

3.4. Найти максимальное значение функции

$$F=3x_1+4x_2 \tag{13}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\leqslant 25, \\ x_1x_2 \geqslant 4, \end{cases} \tag{14}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0. \tag{15}$$

Решение. Область решений задачи (13)—(15) изображена на рис. 3.4. На этом рисунке построены две линии уровня, представляющие собой прямые. Из рис. 3.4 видно, что максимальное значение целевая функция задачи принимает в точке E, в которой прямая касается окружности $x_1^2+x_2^2=25$. Для определения координат точки E воспользуемся равенством угловых коэффициентов прямой $3x_1+4x_2=h$ (где h — некоторая постоянная) и касательной к окружности в точке E. Рассматривая x_2 как неявную функцию переменной x_1, почленно дифференцируем уравнение окружности $x_1^2+x_2^2=25$ и получим

$$2x_1+2x_2x_2'=0, \text{ или } x_2'=-x_1/x_2.$$

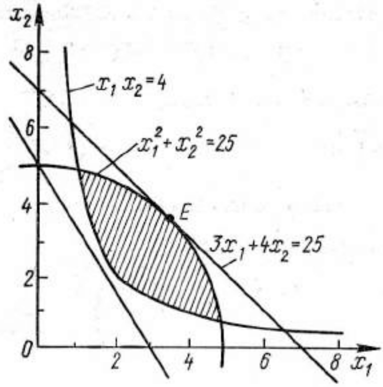


Рис. 3.4

Приравнивая найденное выражение числу $k=-3/4$, получаем одно из уравнений для определения координат точки E. В качестве второго уравнения возьмем уравнение окружности. Таким образом, для определения координат точки E имеем систему

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2=0, \\ x_1^2+x_2^2=25, \end{cases}$$

откуда $x_1^*=4$; $x_2^*=3$. Значит, $F_{\max}=3^2+4^2=25$.

Решите задачи нелинейного программирования 3.5—3.8.

3.5. Найти максимальное значение функции $F=x_1x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2\geqslant 12, \\ 2x_1+3x_2\leqslant 24, \\ -3x_1+4x_2\leqslant 12, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

3.6. Найти минимальное значение функции $F=9\,(x_1-5)^2+4\,(x_2-6)^2$ при условиях

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\geqslant 12, \\ x_1-x_2\leqslant 6, \\ x_2\leqslant 4, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

3.7. Найти максимальное значение функции $F=4x_1+3x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2-2x_1+x_2^2-2x_2-34\leqslant 0, \\ x_1\geqslant 1, \\ x_2\geqslant 1. \end{cases}$$

3.8. Найти максимальное значение функции $F=x_1x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2-14\geqslant 0, \\ 2x_1+x_2\leqslant 10, \\ x_1,\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

Составьте математические модели задач 3.9—3.11.

3.9. На развитие предприятий отрасли на планируемый год выделено 220 млн. руб. Эти средства могут быть распределены между тремя предприятиями. Каждый вариант распределения обеспечивает к концу года определенный доход отрасли. Учитывая возможные варианты распределения капитальных вложений между предприятиями и получаемый при этом доход, определить такой вариант распределения капиталовложений, при котором доход отрасли является максимальным.

Предприятие	Размер капиталовложений (млн. руб.)	Доход (тыс. руб.)	Размер капиталовложений (млн. руб.)	Доход (тыс. руб.)	Размер капиталовложений (млн. руб.)	Доход (тыс. руб.)
I	От 10 до 30	14,3	От 30 до 60	16,2	60 и более	17,2
II	От 10 до 40	13,5	От 40 до 70	17,8	70 и более	18,3
III	От 10 до 50	18,4	От 50 до 60	19,3	60 и более	19,4

3.10. Между n предприятиями отрасли необходимо распределить выпуск некоторой однородной продукции. Затраты, связанные с производством x_i $(i=\overline{1, n})$ единиц продукции на j-м предприятии, зависят от объема производства и определяются функциями $f_j(x_i)$. Зная, что продукции должно быть изготовлено не менее b единиц, составить такой план производства продукции предприятиями отрасли, при котором общие затраты, связанные с ее производством, минимальны.

3.11. В m пунктах отправления сосредоточена однородная продукция в количествах, равных $a_1, ..., a_m$ единиц. Эту продукцию нужно перевезти в n пунктов назначения в объемах, равных $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц. Цены, связанные с перевозкой единицы продукции, зависят от объемов перевозимой продукции и определяются функциями $f_{ij}(x_{ij})$, где x_{ij} $(i=\overline{1, m};\ j=\overline{1, n})$ — количество единиц продукции, перевозимой из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения. Определить, сколько единиц продукции из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения следует доставить, чтобы вся продукция была перевезена в пункты назначения в необходимых объемах при минимальной общей стоимости перевозок.

§ 3.2. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования (1), (2), предполагая, что система ограничений (2) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных и $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными

$$f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \to \max\ (\min); \tag{16}$$

$$g_i\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = b_i\ (i=\overline{1, m}). \tag{17}$$

В курсе математического анализа задачу (16), (17) называют задачей на условный экстремум или классической задачей оптимизации.

Чтобы найти решение этой задачи, вводят набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, называемых *множителями Лагранжа*, составляют функцию Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) =$$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)], \qquad (18)$$

находят частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ $(j=\overline{1, n})$ и $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ $(i=\overline{1, m})$ и рассматривают систему $n+m$ уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \ (j=\overline{1, n}); \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \ (i=\overline{1, m}) \end{cases} \qquad (19)$$

с $n+m$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Всякое решение системы уравнений (19) определяет точку $X=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, в которой может иметь место экстремум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Следовательно, решив систему уравнений (19), получают все точки, в которых функция (16) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как и в случае безусловного экстремума.

Таким образом, определение экстремальных точек задачи (16), (17) методом множителей Лагранжа включает следующие этапы:

1. Составляют функцию Лагранжа.

2. Находят частные производные от функции Лагранжа по переменным x_j и λ_i и приравнивают их нулю.

3. Решая систему уравнений (19), находят точки, в которых целевая функция задачи может иметь экстремум.

3. Среди точек, подозрительных на экстремум, находят такие, в которых достигается экстремум, и вычисляют значения функции (16) в этих точках.

3.12. По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий I способом затраты равны $4x_1+x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий II способом они составляют $8x_2+x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий каждым из способов следует изготовить, так чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Р е ш е н и е. Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции

$$f=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2 \qquad (20)$$

при условиях

$$x_1+x_2=180, \qquad (21)$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0. \qquad (22)$$

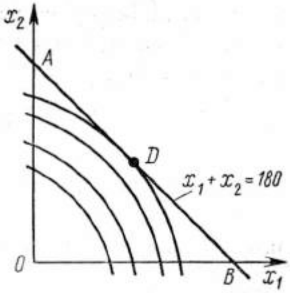


Рис. 3.5

Сначала найдем решение задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Областью допустимых решений исходной задачи является отрезок прямой AB (рис. 3.5), а линиями уровня — окружности с центром в точке $E\ (-2;\ -4)$.

Проводя из точки E окружности разных радиусов, видим, что минимальное значение целевая функция принимает в точке D. Чтобы найти координаты этой точки, воспользуемся тем, что угловой коэффициент к окружности $4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2=C$ в точке D совпадает с угловым коэффициентом прямой $x_1+x_2=180$ и, следовательно, равен -1. Рассматривая x_2 как неявную функцию от x_1 и дифференцируя уравнение окружности, имеем

$$4+2x_1+8x_2'+2x_2x_2'=0, \text{ или } x_2'=-(2+x_1)/(4+x_2).$$

Приравнивая полученное выражение числу -1, получаем одно из уравнений для определения координат точки D. Присоединяя к нему уравнение прямой, на которой лежит точка D, имеем систему

$$\begin{cases} x_1-x_2=2, \\ x_1+x_2=180, \end{cases}$$

откуда $x_1^*=91$; $x_2^*=89$. Это означает, что если предприятие изготовит 91 изделие I технологическим способом и 89 изделий II способом, то общие затраты будут минимальными и составят 17 278 руб.

Решим теперь задачу, используя метод множителей Лагранжа. Найдем минимальное значение функции (20) при условии (21), т. е. без учета требования неотрицательности переменных. Для этого составим функцию Лагранжа

$$F\ (x_1,\ x_2,\ \lambda)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2+\lambda\ (180-x_1-x_2),$$

вычислим ее частные производные по x_1, x_2, λ и приравняем их нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=4+2x_1-\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=8+2x_2-\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=180-x_1-x_2=0. \end{cases}$$

Перенося в правые части первых двух уравнений λ и приравнивая их левые части, получим

$$4+2x_1=8+2x_2, \text{ или } x_1-x_2=2.$$

Решая последнее уравнение совместно с уравнением $x_1+x_2=$ $=180$, находим $x_1^*=91$ и $x_2^*=89$, т. е. получили координаты точки D, удовлетворяющей условиям (22). Эта точка является подозрительной на экстремум. Используя вторые частные производные, можно показать, что в точке D функция f имеет условный минимум. Этот результат и был получен выше.

Следует отметить, что такой же результат мы получим и в том случае, если исследование на условный экстремум функции f сведем к исследованию на безусловный экстремум функции f_1, полученной из f в результате ее преобразований. А именно: если из уравнения связи (21) найдем $x_2=180-x_1$ и подставим это выражение в (20), то получим функцию одной переменной x_1:

$$f_1=4x_1+x_1^2+8(180-x_1)+(180-x_1)^2.$$

Найдем стационарную точку этой функции из уравнения $\dfrac{df_1}{dx_1}=$ $=4+2x_1-8-2(180-x_1)=0$, или $4x_1-364=0$, откуда $x_1^*=91$; $x_2^*=89$. Так же как и выше, устанавливаем, что в данной точке функция f имеет минимальное значение.

3.13. Найти точки экстремума функции $f=x_1^2+x_2^2$ при условии $x_1+x_2=5$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$F(x_1,\ x_2\ \lambda)=x_1^2+x_2^2+\lambda(5-x_1-x_2),$$

найдем ее частные производные по x_1, x_2 и λ приравняем их нулю. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}=2x_1-\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2-\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1+x_2-5=0. \end{cases} \qquad (23)$$

Из первого и второго уравнений имеем $x_1-x_2=0$. Решая это уравнение совместно с третьим из системы (23), находим $x_1=5/2$; $x_2=5/2$. Таким образом, в точке (5/2; 5/2) данная функция может иметь условный экстремум. Чтобы определить, достигается ли в этой точке условный экстремум, нужно провести дополнительные исследования. В частности, используя вторые частные производные, можно показать, что в этой точке функция имеет условный минимум и $F_{\min}=25/2$.

Метод множителей Лагранжа можно применять и в том случае, когда условия связи представляют собой неравенства. Так, если требуется найти экстремум функции $z=f(X)$ при условии $g(X)\leqslant b$, то сначала следует найти точки безусловного экстремума функции $z=f(X)$ из уравнений $\frac{\partial f}{\partial x_k}=0$ $(k=\overline{1, n})$, затем среди этих точек отобрать те, координаты которых удовлетворяют условию связи $g(X)<b$, и, наконец, определить точки, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_k}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_k}=0 \quad (k=\overline{1, n}), \\ g(X)=b. \end{cases}$$

Точки, найденные в результате решения этой системы, вместе с точками, определенными на первом этапе и удовлетворяющими условию $g(X)<b$, подлежат дальнейшему исследованию, как и при нахождении безусловного экстремума.

Найти условные экстремумы функций в задачах 3.14—3.18.

3.14. $f=x_1^2+x_2^2+x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ 2x_1-3x_2=12. \end{cases}$$

3.15. $f=x_1x_2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1x_2+x_2x_3=12, \\ 2x_1-x_2=8. \end{cases}$$

3.16. $f=x_1x_2+x_2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2=4, \\ x_2+x_3=4. \end{cases}$$

3.17. $f=3x_1^2+2x_1+2x_2^2+4x_2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1^2+2x_2^2=19, \\ x_1+2x_2x_3=11. \end{cases}$$

3.18. $f=x_1x_2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=8. \end{cases}$$

3.19. Найдите максимальное значение функции $f=x_1^2x_2^3x_3^4$ при условии $x_1+x_2+x_3=18$.

3.20. На двух предприятиях отрасли необходимо изготовить 200 изделий некоторой продукции. Затраты, связанные с производством x_1 изделий на I предприятии, равны $4x_1^2$ руб., а затраты, обусловленные изготовлением x_2 изделий на II предприятии, составляют $20x_2+6x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий на каждом из предприятий следует произвести, чтобы общие затраты, обусловленные изготовлением необходимой продукции, были минимальными.

3.21. Изготовление некоторой продукции в производственном объединении можно осуществить двумя технологическими способами. При I способе изготовление x_1 изделий требует затрат, равных $a_0+a_1x_1+a_2x_1^2$ руб., а при II способе затраты на изготовление x_2 изделий составляют $b_0+b_1x_2+b_2x_2^2$ руб. (a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 и b_2 — некоторые положительные числа). Составить план производства продукции, согласно которому должно быть произведено d изделий при наименьших общих затратах.

§ 3.3. ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу нелинейного программирования:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max, \tag{24}$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant b_i \ (i=\overline{1, m}), \tag{25}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1, n}), \tag{26}$$

где f и g_i — некоторые функции n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Для решения сформулированной задачи в такой общей постановке не существует универсальных методов. Однако для отдельных классов задач, в которых сделаны дополнительные ограничения относительно свойств функций f и g_i, разработаны эффективные методы их решения. В частности, ряд таких методов имеется для решения задач нелинейного программирования (24) — (26) при условии, что f — вогнутая (выпуклая) функция и область допустимых решений, определяемая ограничениями (25) и (26),— выпуклая.

Определение 3.1. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная на выпуклом множестве X, называется *выпуклой*, если для любых двух точек X_1 и X_2 из X и любого $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ выполняется соотношение

$$f[\lambda X_2+(1-\lambda)X_1] \leqslant \lambda f(X_2)+(1-\lambda)f(X_1). \tag{27}$$

Определение 3.2. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданная на выпуклом множестве X, называется *вогнутой*, если для любых двух точек X_1, X_2 из X и любого $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ выполняется соотношение

$$f[\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1] \geqslant \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1). \tag{28}$$

Определение 3.3. Говорят, что множество допустимых решений задачи (24)—(26) удовлетворяет *условию регулярности*, если существует по крайней мере одна точка X_i, принадлежащая области допустимых решений такая, что $g_i(X_i) < b_i$ $(i = \overline{1, m})$.

Определение 3.4. Задача (24)—(26) называется *задачей выпуклого программирования*, если функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является вогнутой (выпуклой), а функции $g_i(X)$ $(i = \overline{1, m})$ — выпуклыми.

Теорема 3.1. *Любой локальный максимум (минимум) задачи выпуклого программирования является глобальным максимумом (минимумом).*

Определение 3.5. *Функцией Лагранжа* задачи выпуклого программирования (24)—(26) называется функция

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i [b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)], \tag{29}$$

где $y_1, y_2, ..., y_m$ — множители Лагранжа.

Определение 3.6. Точка $(X_0; Y_0) = (x_1^0; x_2^0; ..., x_n^0; y_1^0; y_2^0; ...; y_m^0)$ называется *седловой точкой функции Лагранжа*, если

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \leqslant L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \leqslant L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1, y_2, ..., y_m)$$

для всех $x_j \geqslant 0$ $(j = \overline{1, n})$ и $y_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, m})$.

Теорема 3.2 (теорема Куна—Таккера). *Для задачи выпуклого программирования (24)—(26), множество допустимых решений которой обладает свойством регулярности, $X_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ является оптимальным планом тогда и только тогда, когда существует такой вектор $Y_0 = (y_1^0; y_2^0; ...; y_m^0)$ $(y_i^0 \geqslant 0,$ $i = \overline{1, m})$, что $(X_0; Y_0)$ — седловая точка функции Лагранжа.*

Если предположить, что целевая функция f и функция g_i непрерывно дифференцируемы, то теорема Куна—Таккера может быть дополнена аналитическими выражениями, определяющими необходимые и достаточные условия того, чтобы точка $(X_0; Y_0)$

была седловой точкой функции Лагранжа, т. е. являлась решением задачи выпуклого программирования. Эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} \leqslant 0 \quad (j=\overline{1, n}); & (30) \\ x_j^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0 \quad (j=\overline{1, n}); & (31) \\ x_j^0 \geqslant 0 \quad (j=\overline{1, n}); & (32) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} \geqslant 0 \quad (i=\overline{1, m}); & (33) \\ y_i^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0 \quad (i=\overline{1, m}); & (34) \\ y_i^0 \geqslant 0 \quad (i=\overline{1, m}), & (35) \end{cases}$$

где $\dfrac{\partial L_0}{\partial x_j}$ и $\dfrac{\partial L_0}{\partial y_i}$ — значения соответствующих частных производных функции Лагранжа, вычисленных в седловой точке. Всем отмеченным выше требованиям, позволяющим записать необходимые и достаточные условия для седловой точки $(X_0; Y_0)$ функции Лагранжа в виде выражений (30) — (35), удовлетворяет сформулированная ниже задача квадратичного программирования. Прежде чем сформулировать эту задачу, дадим некоторые определения.

Определение 3.7. *Квадратичной формой* относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется числовая функция от этих переменных, имеющая вид

$$F = c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \ldots + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j.$$

Определение 3.8. Квадратичная форма F называется *положительно(отрицательно)-определенной*, если $F(X) > 0$ $[F(X) > 0]$ для всех значений переменных $X=(x_1; x_2; ...; x_n)$, кроме $X=0$.

Определение 3.9. Квадратичная форма F называется *положительно(отрицательно)-полуопределенной*, если $F(X) \geqslant 0$ $[F(X) \leqslant 0]$ для любого набора значений переменных $X=(x_1; x_2; ...; x_n)$ и, кроме того, существует такой набор переменных $X'=(x'_1; x'_2; ...; x'_n)$, где не все значения переменных одновременно равны нулю, что $F(X')=0$.

Теорема 3.3. *Квадратичная форма является выпуклой функцией, если она положительно-полуопределенная, и вогнутой функцией, если она отрицательно-полуопределенная.*

Определение 3.10. Задача, состоящая в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j \tag{36}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \ (i=\overline{1, m}), \tag{37}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1, n}), \tag{38}$$

где $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j$ — отрицательно (положительно)-полуопределенная квадратичная форма, называется *задачей квадратичного программирования.*

Для сформулированной задачи квадратичного программирования функция Лагранжа запишется в виде

$$L = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j + y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right).$$

Если функция L имеет седловую точку $(X_0; Y_0) = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0; y_1^0; y_2^0; \ldots; y_m^0)$, то в этой точке выполняются соотношения (30) — (35). Вводя теперь дополнительные переменные v_j $(j=\overline{1, n})$ и w_i $(i=\overline{1, m})$, обращающие неравенства (30) и (33) в равенства, перепишем выражения (30) — (35), записанные для задачи квадратичного программирования, следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} + v_j = 0 \ (j=\overline{1, n}); & (39) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} - w_i = 0 \ (i=\overline{1, m}); & (40) \\ x_j^0 v_j = 0 \quad (j=\overline{1, n}); & (41) \\ y_i^0 w_i = 0 \quad (i=\overline{1, m}); & (42) \end{cases}$$

$$x_j^0 \geqslant 0, \ v_j \geqslant 0, \ y_j^0 \geqslant 0, \ w_j \geqslant 0 \ (j=\overline{1, n}; \ i=\overline{1, m}). \tag{43}$$

Таким образом, чтобы найти решение задачи квадратичного программирования (36) — (38), нужно определить неотрицательное решение систем линейных уравнений (39) и (40), удовлетворяющее условиям (41) и (42). Это решение можно найти с помощью метода искусственного базиса, примененного для нахождения максимального значения функции $F=-\sum_i My_i$ при условиях (39), (40), (43) с учетом (41) и (42). Здесь y_i — искусственные переменные, введенные в уравнения (39) и (40).

Используя метод искусственного базиса и дополнительно учитывая условия (41) и (42), после конечного числа шагов либо установим неразрешимость, либо получим оптимальный план исходной задачи.

Итак, процесс нахождения решения задачи квадратичного программирования (36)—(38) включает следующие этапы:

1. Составляют функцию Лагранжа.
2. Записывают в виде выражений (39)—(43) необходимые и достаточные условия существования седловой точки для функции Лагранжа.
3. Используя метод искусственного базиса, либо устанавливают отсутствие седловой точки для функции Лагранжа, либо находят ее координаты.
4. Записывают оптимальное решение исходной задачи и находят значение целевой функции.

3.22. Найти максимальное значение функции

$$f=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2 \tag{44}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 8, \\ 2x_1-x_2\leqslant 12, \end{cases} \tag{45}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0. \tag{46}$$

Решение. Функция f является вогнутой, так как представляет собой сумму линейной функции $f_1=2x_1+4x_2$ (которую можно рассматривать как вогнутую) и квадратичной формы $f_2=-x_1^2-2x_2^2$, которая является отрицательно-определенной и, следовательно, также вогнутой. Система ограничений задачи включает только лишь линейные неравенства. Следовательно, можно воспользоваться теоремой Куна—Таккера. Составим функцию Лагранжа

$$L=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2+y_1(8-x_1-2x_2)+y_2(12-2x_1+x_2)$$

и запишем в виде выражений (39)—(43) необходимые и достаточные условия существования седловой точки построенной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2-2x_1-y_1-2y_2 \leqslant 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4-4x_2-2y_1+y_2 \leqslant 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 8-x_1-2x_2 \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = 12-2x_1+x_2 \geqslant 0; \end{cases} \tag{47}$$

$$\begin{cases} x_1\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2-2x_1-y_1-2y_2)=0, \\ x_2\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4-4x_2-2y_1+y_2)=0, \\ y_1\dfrac{\partial L}{\partial y_1} = y_1(8-x_1-2x_2)=0, \\ y_2\dfrac{\partial L}{\partial y_2} = y_2(12-2x_1+x_2)=0, \end{cases} \tag{48}$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \geqslant 0. \tag{49}$$

Систему линейных неравенств (47) перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} 2x_1+\ \ y_1+2y_2 \geqslant 2, \\ 4x_2+2y_1-\ \ y_2 \geqslant 4, \\ \qquad x_1+2x_2 \leqslant 8, \\ \qquad 2x_1-\ \ x_2 \leqslant 12. \end{cases} \tag{50}$$

Вводя теперь дополнительные неотрицательные переменные v_1, v_2, w_1 и w_2, обращающие неравенства (47) в равенства, получим

$$\begin{cases} 2x_1+\ \ y_1+2y_2-v_1 = 2, \\ 4x_2+2y_1-\ \ y_2-v_2 = 4, \\ \qquad x_1+2x_2+w_1 = 8, \\ \qquad 2x_1-\ \ x_2+w_2 = 12, \end{cases} \tag{51}$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ v_1,\ v_2,\ w_1,\ w_2 \geqslant 0. \tag{52}$$

Учитывая равенства (51), можно записать:

$$v_1x_1=0,\ v_2x_2=0,\ w_1y_1=0,\ w_2y_2=0. \tag{53}$$

Если теперь найти базисное решение системы линейных уравнений (51) с учетом выполнения равенств (53), то будет получена седловая точка функции Лагранжа для исходной задачи, т. е. определено оптимальное решение.

Для нахождения базисного решения системы линейных уравнений (51) воспользуемся методом искусственного базиса. В первое и второе уравнения системы (51) соответственно добавим дополнительную неотрицательную переменную z_1 и z_2 и рассмотрим задачу линейного программирования, состоящую в определении максимального значения функции

$$\overline{F} = -Mz_1 - Mz_2 \tag{54}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + \ y_1 + 2y_2 - v_1 + z_1 = 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - \ y_2 - v_2 + z_2 = 4, \\ \qquad x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ \qquad 2x_1 - \ x_2 + w_2 = 12, \end{cases} \tag{55}$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ v_1,\ v_2,\ w_1,\ w_2,\ z_1,\ z_2 \geqslant 0. \tag{56}$$

В результате решения задачи (54) — (56) [отметим, что при этом решении учитываются условия (53)] находим допустимое базисное решение системы линейных уравнений (55) (табл. 3.1):

Таблица 3.1

i	Базис	$C_б$	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				P_{x_1}	P_{x_2}	P_{λ_1}	P_{λ_2}	P_{v_1}	P_{v_2}	P_{w_1}	P_{w_2}	P_{y_1}	P_{y_2}
1	P_{y_1}	$-M$	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	P_{y_2}	$-M$	4	0	4	2	-1	0	-1	0	0	0	1
3	P_{w_1}	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	P_{w_2}	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			-6	-2	-4	-3	-1	1	1	0	0	0	0
1	P_{y_1}	$-M$	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	P_{x_2}	0	1	0	1	1/2	$-1/4$	0	$-1/4$	0	0	0	1/4
3	P_{w_1}	0	6	1	0	-1	1/2	0	1/2	1	0	0	$-1/2$
4	P_{w_2}	0	13	2	0	1/2	$-1/4$	0	$-1/4$	0	1	0	1/4
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			-2	-2	0	-1	-2	1	0	0	0	0	1
1	P_{x_1}	0	1	1	0	1/2	1	$-1/2$	0	0	0	1/2	0
2	P_{x_2}	0	1	0	1					0	0		
3	P_{w_1}	0	5	0	0					1	0		
4	P_{w_2}	0	11	0	0					0	1		
5			0	0	0					0	0		

$$x_1^0=1;\ x_2^0=1;\ w_1=5;\ w_2=11;\ y_1^0=y_2^0=v_1=v_2=0.$$

Так как $x_1^0 v_1=0$; $x_2^0 v_2=0$; $y_1^0 w_1=0$; $y_2^0 w_2=0$, то $(X_0;\ Y_0)=(1;\ 1;\ 0;\ 0)$ является седловой точкой функции Лагранжа для исходной задачи. Следовательно, $X^*=(1;\ 1)$ — оптимальный план исходной задачи и $f_{\max}=3$.

Решите задачи выпуклого программирования 3.23—3.26.

3.23. Найти максимальное значение функции $f=x_1+4x_2+x_1x_2-2x_1^2-2x_2^2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 12, \\ 3x_1+\ x_2\leqslant 15, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

3.24. Найти максимальное значение функции $f=-x_1^2-x_2^2+x_1+8x_2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 7, \\ \qquad x_2\leqslant 5, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

3.25. Найти максимальное значение функции $f=-2x_1+8x_2-x_1^2-x_2^2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 12, \\ -x_1+\ x_2\geqslant -8, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2\geqslant 0.$$

3.26. Найти максимальное значение функции $f=-x_1^2-x_2^2-2x_3^2+2x_2+3x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ x_3\leqslant 18, \\ \qquad x_2\leqslant 12, \\ x_1\quad +2x_3\leqslant 14, \end{cases}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$$

§ 3.4. ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ

Используя градиентные методы, можно найти решение любой задачи нелинейного программирования. Однако в общем случае применение этих методов позволяет найти точку локального экстремума. Поэтому более целесообразно использовать градиентные методы для нахождения решения задач выпуклого программирования, в которых всякий локальный экстремум является одновременно и глобальным. Процесс нахождения решения задачи с помощью градиентных методов состоит в том, что начиная с некоторой точки $X^{(k)}$ осуществляется последовательный переход к некоторым другим точкам до тех пор, пока не выявляется приемлемое решение исходной задачи. При этом градиентные методы могут быть подразделены на две группы.

К первой группе относятся методы, при использовании которых исследуемые точки не выходят за пределы области допустимых решений задачи. Наиболее распространенным из таких методов является метод Франка—Вулфа.

Ко второй группе относятся методы, при использовании которых исследуемые точки могут как принадлежать, так и не принадлежать области допустимых решений. Однако в результате реализации итерационного процесса находится точка области допустимых решений, определяющая приемлемое решение. Из таких методов наиболее часто используется метод штрафных функций или метод Эрроу—Гурвица.

При нахождении решения задач градиентными методами, в том числе и названными, итерационный процесс осуществляется до того момента, пока градиент функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в очередной точке $X^{(k+1)}$ не станет равным нулю или же пока $|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})| < \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, характеризующее точность полученного решения.

Остановимся более подробно на методах Франка—Вулфа, штрафных функций и Эрроу—Гурвица.

1. Метод Франка—Вулфа. Пусть требуется найти максимальное значение вогнутой функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{57}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i=\overline{1, m}), \tag{58}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1, n}). \tag{59}$$

Характерной особенностью этой задачи является то, что ее система ограничений содержит только линейные неравенства. Эта особенность является основой для замены в окрестности исследуемой точки нелинейной целевой функции линейной, благодаря чему решение исходной задачи сводится к последовательному решению задач линейного программирования.

Процесс нахождения решения задачи начинают с определения точки, принадлежащей области допустимых решений задачи. Пусть это точка $X^{(k)}$, тогда в этой точке вычисляют градиент функции (57)

$$\nabla f(X^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1};\ \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2};\ \dots;\ \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n} \right)$$

и строят линейную функцию

$$F = \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(X^{(k)})}{\partial x_n} x_n. \qquad (60)$$

Затем находят максимальное значение этой функции при ограничениях (58) и (59). Пусть решение данной задачи определяется точкой $Z^{(k)}$. Тогда за новое допустимое решение исходной задачи принимают координаты точки $X^{(k+1)}$:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k \left(Z^{(k)} - X^{(k)}\right), \qquad (61)$$

где λ_k — некоторое число, называемое шагом вычислений и заключенное между нулем и единицей ($0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$). Это число λ_k берут произвольно или определяют таким образом, чтобы значение функции в точке $X^{(k+1)}$ $f(X^{(k+1)})$, зависящее от λ_k, было максимальным. Для этого необходимо найти решение уравнения $\frac{df}{d\lambda_k} = 0$ и выбрать его наименьший корень. Если его значение больше единицы, то следует положить $\lambda_k = 1$. После определения числа λ_k находят координаты точки $X^{(k+1)}$, вычисляют значение целевой функции в ней и выясняют необходимость перехода к новой точке $X^{(k+2)}$. Если такая необходимость имеется, то вычисляют в точке $X^{(k+1)}$ градиент целевой функции, переходят к соответствующей задаче линейного программирования и находят ее решение. Определяют координаты точки $X^{(k+2)}$ и исследуют необходимость проведения дальнейших вычислений. После конечного числа шагов получают с необходимой точностью решение исходной задачи.

Итак, процесс нахождения решения задачи (57) — (59) методом Франка—Вулфа включает следующие этапы:

1. Определяют исходное допустимое решение задачи.
2. Находят градиент функции (57) в точке допустимого решения.
3. Строят функцию (60) и находят ее максимальное значение при условиях (58) и (59).
4. Определяют шаг вычислений.
5. По формулам (61) находят компоненты нового допустимого решения.
6. Проверяют необходимость перехода к последующему допустимому решению. В случае необходимости переходят к этапу

2, в противном случае найдено приемлемое решение исходной задачи.

3.27. Методом Франка—Вулфа найти решение задачи 3.22, состоящей в определении максимального значения функции

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \tag{62}$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 12, \end{cases} \tag{63}$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0. \tag{64}$$

Решение. Найдем градиент функции

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (2 - 2x_1;\ 4 - 4x_2)$$

и в качестве исходного допустимого решения задачи возьмем точку $X^{(0)} = (0;\ 0)$, а в качестве критерия оценки качества получаемого решения — неравенство $|\ f\ (x^{(k+1)}) - f\ (x^{(k)})| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 0{,}01$.

I итерация. В точке $X^{(0)}$ градиент $\nabla f\ (X^{(0)}) = (2;\ 4)$. Находим максимум функции

$$F_1 = 2x_1 + 4x_2 \tag{65}$$

при условиях (63) и (64)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 12, \end{cases} \tag{66}$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0. \tag{67}$$

Задача (65)—(67) имеет оптимальный план $Z^{(0)} = (0;\ 4)$.

Найдем новое допустимое решение исходной задачи по формуле (61):

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda_1\ (Z^{(0)} - X^{(0)}),\ \text{где}\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1. \tag{68}$$

Подставив вместо $X^{(0)}$ и $Z^{(0)}$ их значения, получим

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0 + \lambda_1 \cdot 0, \\ x_2^{(1)} = 0 + \lambda_1 \cdot 4. \end{cases} \tag{69}$$

Определим теперь число λ_1. Подставив в равенство (62) вместо x_1 и x_2 их значения в соответствии с соотношениями (69)

$$f(\lambda_1)=16\lambda_1-32\lambda_1^2,$$

найдем производную этой функции по λ_1 и приравняем ее нулю: $f'(\lambda_1)=16-64\lambda=0$. Решая это уравнение, получим $\lambda_1=1/4=0{,}25$. Поскольку найденное значение λ_1 заключено между 0 и 1, принимаем его за величину шага. Таким образом, $X^{(1)}=(0;\ 1)$, $f(X^{(1)})=2$, $f(X^{(1)})-f(X^{(0)})=2>\varepsilon=0{,}01$.

II итерация. Градиент целевой функции исходной задачи в точке $X^{(1)}$ есть $\nabla f(X^{(1)})=(2;\ 0)$. Находим максимум функции $F_2=2x_1$ при условиях (63) и (64). Решением является $Z^{(1)}=(6,4;\ 0,8)$.

Определяем теперь $X^{(2)}=X^{(1)}+\lambda_2(Z^{(1)}-X^{(1)})$. Последнее равенство перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^2=6{,}4\lambda_2, \\ x_2^{(2)}=1-0{,}2\lambda_2. \end{cases} \tag{70}$$

Подставляя теперь в функцию (62) вместо x_1 и x_2 их значения в соответствии с соотношениями (70), получаем

$$f(\lambda_2)=2+12{,}8\lambda_2-41{,}76\lambda_2^2,$$

откуда $f'(\lambda_2)=12{,}8-83{,}52\lambda_2$. Приравнивая $f'(\lambda_2)$ нулю и решая полученное уравнение, находим $\lambda_2\approx0{,}15$. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=0{,}96, \\ x_2^{(2)}=0{,}97, \end{cases}$$

т. е. $X^{(2)}=(0{,}96;\ 0{,}97)$, $f(X^{(2)})=2{,}9966$, $f(X^{(2)})-f(X^{(1)})=2{,}9966-2=0{,}9966>\varepsilon=0{,}01$.

III итерация. Градиент функции f в точке $X^{(2)}$ есть $\nabla f(X^{(2)})=(0{,}08;\ 0{,}12)$. Находим максимум функции $F_3=0{,}08x_1+0{,}12x_2$ при условиях (63) и (64). Решением является $Z^{(2)}=(6;\ 0)$.

Определяем $X^{(3)}=X^{(2)}+\lambda_3(Z^{(2)}-X^{(2)})$. Имеем

$$\begin{cases} x_1^{(3)}=0{,}96+\lambda_3(6-0{,}96)=0{,}96+5{,}04\lambda_3, \\ x_2^{(3)}=0{,}97+\lambda_3(0-0{,}97)=0{,}97-0{,}97\lambda_3; \end{cases}$$

$$f(\lambda_3)=2{,}9384+0{,}4032\lambda_3-27{,}3416\lambda_3^2,$$
$$f'(\lambda_3)=0{,}4032-54{,}6832\lambda_3.$$

Решая уравнение $f'(\lambda_3)=0$, находим $\lambda_3 \approx 0{,}007$. Следовательно, $X^{(3)}=(0{,}99528;\ 0{,}96321)$, $f(X^{(3)})=2{,}99957$, $f\ (X)^{(3)}-$ $-f\ (X^{(2)})=2{,}99957-2{,}9966=0{,}00297<\varepsilon=0{,}01$.

Таким образом, $X^{(3)}=(0{,}99528;\ 0{,}96321)$ является искомым решением исходной задачи. Данная точка $X^{(3)}$ находится достаточно близко к точке максимального значения целевой функции $X^*=(1;\ 1)$, найденной при решении этой задачи в § 3.3. Задав меньшую величину ε, можно было, совершив дополнительные приближения, еще ближе подойти к точке максимального значения целевой функции.

2. Метод штрафных функций. Рассмотрим задачу определения максимального значения вогнутой функции $f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ при условиях $g_i\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \leqslant b_i\ \ (i=\overline{1,m})$, $x_j \geqslant 0\ \ (j=\overline{1,n})$, где $g_i\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — выпуклые функции.

Вместо того чтобы непосредственно решать эту задачу, находят максимальное значение функции $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=$ $=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)+H(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, являющейся суммой целевой функции задачи, и некоторой функции $H(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, определяемой системой ограничений и называемой *штрафной функцией*. Штрафную функцию можно построить различными способами. Однако наиболее часто она имеет вид

$$H(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\ g_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$

где

$$\alpha_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\begin{cases} 0, \text{ если } b_i-g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0, \\ \alpha_i, \text{ если } b_i-g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)<0. \end{cases} \tag{71}$$

а $\alpha_i>0$ — некоторые постоянные числа, представляющие собой весовые коэффициенты.

Используя штрафную функцию, последовательно переходят от одной точки к другой до тех пор, пока не получат приемлемое решение. При этом координаты последующей точки находят по формуле

$$x_j^{(k+1)}=\max\left\{0;\ x_j^k+\left[\frac{\partial f\ (X^{(k)})}{\partial X_j}+\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\,\frac{\partial g_i\ (X^{(k)})}{\partial X_j}\right]\right\}. \tag{72}$$

Из последнего соотношения следует, что если предыдущая точка находится в области допустимых решений исходной задачи, то второе слагаемое в квадратных скобках равно нулю и переход к последующей точке определяется только градиентом целевой функции. Если же указанная точка не принадлежит области допустимых решений, то за счет данного слагаемого на последующих итерациях достигается возвращение в область допустимых решений. При этом чем меньше α_i, тем быстрее находится приемлемое решение, однако точность определения его снижается. Поэтому итерационный процесс обычно начинают при сравнительно малых значениях α_i и, продолжая его, эти значения постепенно увеличивают.

Итак, процесс нахождения решения задачи выпуклого программирования методом штрафных функций включает следующие этапы:

1. Определяют исходное допустимое решение.
2. Выбирают шаг вычислений.
3. Находят по всем переменным частные производные от целевой функции и функций, определяющих область допустимых решений задачи.
4. По формуле (72) находят координаты точки, определяющей возможное новое решение задачи.
5. Проверяют, удовлетворяют ли координаты найденной точки системе ограничений задачи. Если нет, то переходят к следующему этапу. Если координаты найденной точки определяют допустимое решение задачи, то исследуют необходимость перехода к последующему допустимому решению. В случае такой необходимости переходят к этапу 2, в противном случае найдено приемлемое решение исходной задачи.
6. Устанавливают значения весовых коэффициентов и переходят к этапу 4.

3.28. Найти максимальное значение функции

$$f = -x_1^2 - x_2^2 \tag{73}$$

при условиях

$$(x_1-7)^2+(x_2-7)^2 \leqslant 18, \tag{74}$$

$$x_1;\ x_2 \geqslant 0. \tag{75}$$

Р е ш е н и е. Целевая функция данной задачи представляет собой отрицательно-определенную квадратичную форму и, значит, вогнута. В то же время область допустимых решений задачи, определяемая ограничениями (74) и (75), — выпуклая. Следовательно, задача (73) — (75) является задачей выпуклого программирования. Для нахождения ее решения применим метод штрафных функций. Прежде чем это сделать, построим область допустимых решений задачи (рис. 3.6) и линии уровня, определяемые целевой функцией (73). Этими линиями служат окружности с центром в точке (0; 0). Точка касания одной из этих окружностей с областью допустимых решений и является искомой точкой максимального значения целевой функции.

Положим $X^0=(6,\ 7)$. Возьмем $\lambda=0,\ 1$, обозначим через $g(x_1, x_2)=18-(x_1-7)^2-(x_2-7)^2$ и определим частные производ-

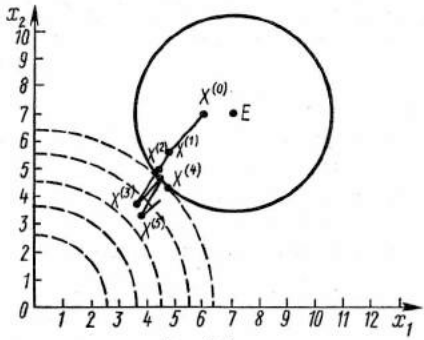


Рис.3.6

ные от функций $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$ по переменным x_1 и x_2:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1 + 14;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2;$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2 + 14.$$

Теперь, используя формулу **(72)**, приступаем к построению последовательности точек, одна из которых определит приемлемое решение.

I итерация. Так как точка $X^0 = (6, 7)$ принадлежит области допустимых решений задачи, то второе слагаемое в квадратных скобках формулы (72) равно нулю. Значит, координаты следующей точки X^1 вычисляем по формулам

$$x_1^{(1)} = \max\left\{0;\ x_1^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}\right\} = \max\{0;\ 0{,}1\cdot(-2)\cdot 6\} = 4{,}8;$$

$$x_2^{(1)} = \max\left\{0;\ x_2^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right\} = \max\{0; .7 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 7\} = 5{,}6.$$

Проверим теперь, принадлежит ли эта точка области допустимых решений задачи. Для этого найдем $g(X^1) = 18 - 4{,}84 - 1{,}96 = 11{,}2$. Так как $g(X^1) > 0$, то X^1 принадлежит области допустимых решений. В этой точке $f(X^1) = -54{,}4$.

II итерация. Находим

$x_1^{(2)} = \max\{0;\ 0{,}48 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 4{,}8\} = 3{,}84;$

$x_2^{(2)} = \max\{0;\ 0{,}56 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 5{,}6\} = 4{,}48;$

$g(X^2) = 18 - 9{,}9856 - 6{,}3504 = 1{,}664 > 0;\ f(X^2) = -34{,}816.$

III итерация. Находим

$x_1^{(3)} = \max\{0;\ 0{,}384 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 3{,}84\} = 3{,}072;$

$x_2^{(3)} = \max\{0;\ 0,\ 4{,}48 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 4{,}48\} = 3{,}584;$

$g(X^{(3)}) = 18 - 15{,}429184 - 11{,}669056 \approx -9{,}0981.$

IV итерация. Точка $X^{(3)}$ не принадлежит области допустимых решений задачи. Следовательно,

$$x_1^{(4)} = \max\left\{0;\ x_1^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_1}\right]\right\} =$$

$$= \max\{0;\ 3{,}072 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}072 + \alpha[(-2)\cdot 3{,}072 + 14)]\} =$$
$$= \max\{0;\ 2{,}4576 + \alpha\cdot 0{,}7856\};$$

$$x_2^{(4)} = \max\left\{0;\ x_2^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2} + \alpha\,\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\right\} =$$

$$= \max\{0;\ 3{,}584 + 0{,}1[(-2)\cdot 3{,}584 + \alpha((-2)\cdot 3{,}584 + 14)]\} =$$
$$= \max\{0;\ 2{,}8672 + \alpha\cdot 0{,}6832\}.$$

Здесь возникает вопрос о выборе числа α. Наиболее целесообразно взять его так, чтобы точка $X^{(4)}$ не слишком далеко удалялась от границы области допустимых решений и вместе с тем принадлежала этой области. Этим требованиям удовлетворяет, в частности, $\alpha = 1{,}9$. При данном значении получаем

$$x_1^{(4)} = \max\{0;\ 2{,}4576 + 1{,}9\cdot 0{,}7856\} \approx 3{,}950;$$
$$x_2^{(4)} = \max\{0;\ 2{,}8672 + 1{,}9\cdot 0{,}6832\} \approx 4{,}165;$$
$$g(X^{(4)}) = 18 - 9{,}3025 - 8{,}037225 \approx 0{,}660;\ f(X^{(4)}) \approx -32{,}950.$$

V итерация Имеем

$$x_1^{(5)} = \max\{0;\ 3{,}950 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 3{,}950\} = 3{,}16;$$
$$x_2^{(5)} = \max\{0;\ 4{,}165 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 4{,}165\} = 3{,}332;$$
$$g(X^{(5)}) = 18 - 14{,}7456 - 13{,}454224 \approx -10{,}2.$$

VI итерация. Находим

$$x_1^{(6)} = \max\{0;\ 3{,}16 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}16 + 1{,}9\cdot((-2)\cdot 3{,}16 + 14)]\} \approx 3{,}987;$$
$$x_2^{(6)} = \max\{0;\ 3{,}332 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}332 + 1{,}9\cdot((-2)\cdot 3{,}332 + 14)]\} \approx$$
$$\approx 4{,}059;$$
$$g(X^{(6)}) = 18 - 9{,}078169 - 8{,}649481 \approx 0{,}272;\ f(X^{(6)}) \approx -32{,}372.$$

VII итерация. Находим

$$x_1^{(7)} = \max\{0;\ 3{,}987 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 3{,}987\} \approx 3{,}189;$$
$$x_2^{(7)} = \max\{0;\ 4{,}059 + 0{,}1\cdot(-2)\cdot 4{,}059\} \approx 3{,}247;$$
$$g(X^{(7)}) = 18 - 10{,}169721 - 10{,}543009 \approx -2{,}713.$$

VIII итерация. Имеем

$$x_1^{(8)} = \max\{0;\ 3{,}189 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}189 + 1{,}9\cdot((-2)\cdot 3{,}189 + 14)]\} \approx$$
$$\approx 3{,}999;$$
$$x_2^{(8)} = \max\{0;\ 3{,}247 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}247 + 1{,}9\cdot((-2)\cdot 3{,}247 + 14)]\} \approx$$
$$\approx 4{,}027;$$
$$g(X^{(8)}) = 18 - 9{,}006001 - 8{,}856576 \approx 0{,}137;\ f(X^{(8)}) = -32{,}185.$$

IX итерация. Находим

$$x_1^{(9)} = \max\{0;\ 3{,}999 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}99]\} \approx 3{,}199;$$
$$x_2^{(9)} = \max\{0;\ 4{,}024 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 4{,}024]\} \approx 3{,}219;$$
$$g(X^{(9)}) = 18 - 14{,}447601 - 14{,}295961 \approx -10{,}744.$$

X итерация. Имеем

$$x_1^{(10)} = \max\{0;\ 3{,}199 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}199 + 1{,}9\cdot((-2)\cdot 3{,}199 + 14)]\} \approx$$
$$\approx 4{,}004;$$
$$x_2^{(10)} = \max\{0;\ 3{,}219 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}219 + 1{,}9\cdot((-2)\cdot 3{,}219 + 14)]\} \approx$$
$$\approx 4{,}012;$$
$$g(X^{(10)}) = 18 - 8{,}976016 - 8{,}928144 \approx 0{,}096;\ f(X^{(10)}) \approx -32{,}128.$$

XI итерация. Находим

$$x_1^{(11)} = \max\{0;\ 4{,}004 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 4{,}004]\} \approx 3{,}203;$$

$$x_2^{(11)} = \max\{0;\ 4{,}012 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}012]\} \approx 3{,}210;$$
$$g(X^{(11)}) = 18 - 14{,}417209 - 14{,}3641 \approx -10{,}781.$$

XII итерация. Имеем

$$x_1^{(12)} = \max\{0;\ 3{,}203 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}203 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}203 + 14)]\} \approx \approx 4{,}005;$$
$$x_2^{(12)} = \max\{0;\ 3{,}210 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}210 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}210 + 14)]\} \approx \approx 4{,}008;$$
$$g(X^{(12)}) \approx -32{,}104.$$

Сравнивая значения целевой функции, найденные в точках, полученных после X и XII итераций, видим, что они с точностью до 10^{-1} совпадают. Это говорит о близости точки, найденной на последней итерации, к точке максимального значения целевой функции. Такой же вывод можно сделать, если исследовать векторы-градиенты функций $f(X)$ и $g(X)$ в точке $X^{(12)}$. В этой точке

$$\nabla f(X^{(12)}) = (-8{,}01;\ -8{,}016),\ \ \nabla g(X^{(12)}) = (5{,}99;\ 5{,}984).$$

Вычислим отношения одноименных координат векторов: $-8{,}01/5{,}99 \approx -1{,}337$; $-8{,}016/5{,}984 \approx -1{,}339$. Как видно, они почти равны между собой. Это означает, что векторы $\nabla f(X^{(12)})$ и $\nabla g(X^{(12)})$ практически коллинеарны. Так как к тому же точка $X^{(12)}$ находится вблизи границы области допустимых решений (поскольку $g(X^{(12)}) \approx 0{,}078$), то $x_1^* = 4{,}005$ и $x_2^* = 4{,}012$ можно считать приемлемым решением задачи. Это решение при необходимости можно уточнить дальнейшими шагами до полной коллинеарности градиентов целевой и ограничительной функций.

Последовательность точек, получаемых во время нахождения решения задачи, наглядно иллюстрируется рис. 3.6.

3. Метод Эрроу — Гурвица. При нахождении решения задач нелинейного программирования методом штрафных функций мы выбирали значения α_i произвольно, что приводило к значительным колебаниям удаленности определяемых точек от области допустимых решений. Этот недостаток устраняется при решении задачи методом Эрроу — Гурвица, согласно которому на очередном шаге числа $\alpha_i^{(k)}$ вычисляют по формуле

$$\alpha_i^{(k)} = \max\{0;\ \alpha_i^{(k-1)} - \lambda g_i(X^{(k)})\}\ (i = \overline{1, m}). \tag{76}$$

В качестве начальных значений $\alpha_i^{(0)}$ берут произвольные неотрицательные числа.

3.29. Используя метод Эрроу — Гурвица, найти решение задачи 3.27, состоящей в определении максимального значения функции

$$f = -x_1^2 - x_2^2 \tag{77}$$

при условиях

$$18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \geqslant 0, \tag{78}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0. \tag{79}$$

Р е ш е н и е. Как следует из решения задачи 3.27, при нахождении решения данной задачи методом Эрроу — Гурвица первые три итерации при одинаковых значениях $\lambda=0,1$ в обоих случаях совпадают. Это объясняется тем, что каждая из последовательно получаемых точек принадлежит области допустимых решений, а поэтому $\alpha_i^{(k)}=0$ $(k=\overline{1,3})$ независимо от того, находится ли оно по формуле (71) или (76).

IV и т е р а ц и я. Так как $g(X^{(3)})<0$, то координаты следующей точки $X^{(4)}$ находим по формуле (72):

$$x_1^{(4)}=\max\left\{0;\ x_1^{(3)}+\lambda\left[\ \frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1}+\alpha^{(4)}\,\frac{\partial g(X^{(3)})^3)}{\partial x_1}\ \right]\right\}=$$

$$=\max\{0;\ 3{,}072+0{,}1[(-2)\cdot 3{,}072+\alpha^4((-2)\cdot 3{,}072+14)\};$$

$$x_2^{(4)}=\max\left\{0;\ x_2^{(3)}+\lambda\left[\ \frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2}+\alpha^4\,\frac{\partial g(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\right\}=$$

$$=\max\{0;\ 3{,}584+0{,}1[(-2)\cdot 3{,}584+\alpha^{(4)}(-2)\cdot 3{,}584+14)]\}.$$

Число $\alpha^{(4)}$ найдем по формуле (76):

$$\alpha^{(4)}=\max\{0;\ \alpha^{(3)}-0{,}1g(X^{(3)})\}=\max\{0;\ 0-0{,}1(-9{,}0981)\}\approx 0{,}91.$$

Таким образом, $x_1^{(4)}\approx 3{,}172$; $x_2^{(4)}\approx 3{,}489$; $g(X^{(4)})\approx -8{,}981$.

V и т е р а ц и я. Найденная точка $X^{(4)}=(3{,}172;\ 3{,}489)$ не принадлежит области допустимых решений исходной задачи. Поэтому для отыскания координат следующей точки также используем формулу (72). Однако прежде чем ее применить, по формуле (76) находим

$$\alpha^{(5)}=\max\{0;\ 0{,}91-0{,}1(-8{,}981)\}\approx 1{,}81.$$

Значит,

$$x_1^{(5)}=\max\{0;\ 3{,}172+0{,}1[(-2)\cdot 3{,}172+1{,}81((-2)\cdot 3{,}172+14]\}\approx$$
$$\approx 3{,}923;$$

$$x_2^{(5)}=\max\{0;\ 3{,}489+0{,}1[(-2)\cdot 3{,}489+1{,}81((-2)\cdot 3{,}489+14)]\}\approx$$
$$\approx 4{,}062;$$
$$g(X^{(5)})\approx -0{,}1.$$

VI и т е р а ц и я. Имеем

$$\alpha^{(6)}=\max\{0;\ 1{,}81-0{,}1(-0{,}1)\}\approx 1{,}82;$$
$$x_1^{(6)}=\max\{0;\ 3{,}923+0{,}1[(-2)\cdot 3{,}923+1{,}82((-2)\cdot 3{,}923+14)]\}\approx$$
$$\approx 4{,}258;$$
$$x_2^{(6)}=\max\{0;\ 4{,}062+0{,}1[(-2)\cdot 4{,}062+1{,}82((-2)\cdot 4{,}062+14)]\}\approx$$
$$\approx 4{,}319;$$

$$g\,(X^{(6)})\approx 1{,}294;\ f\,(X^{(6)})\approx -36{,}784.$$

VII итерация. Находим

$$x_1^{(7)}=\max\{0;\ 4{,}258+0{,}1\,[(-2)\cdot 4{,}258]\}\approx 3{,}406;$$

$$x_2^{(7)}=\max\{0;\ 4{,}319+0{,}1\,[(-2)\cdot 4{,}319]\}\approx 3{,}455;$$

$$g(X^{(7)})\approx -7{,}484.$$

VIII итерация. Имеем

$$\alpha^{(8)}=\max\{0;\ 1{,}82-0{,}1\,(-7{,}484)\}\approx 2{,}57;$$

$$x_1^{(8)}=\max\{0;\ 3{,}406+0{,}1\,[(-2)\cdot 3{,}406+2{,}57\,((-2)\cdot 3{,}406+14)]\}\approx$$
$$\approx 4{,}572;$$

$$x_2^{(8)}=\max\{0;\ 3{,}455+0{,}1\,[(-2)\cdot 3{,}455+2{,}57\,[(-2)\cdot 3{,}455+14)]\}\approx$$
$$\approx 4{,}586;$$

$$g(X^{(8)})\approx 6{,}278;\ f(X^{(8)})\approx -41{,}935.$$

IX итерация. Находим

$$x_1^{(9)}=\max\{0;\ 4{,}572+0{,}1\,[(-2)\cdot 4{,}572]\}\approx 3{,}658;$$
$$x_2^{(9)}=\max\{0;\ 4{,}586+0{,}1\,[(-2)\cdot 4{,}586]\}\approx 3{,}669;$$

$$g(X^{(9)})\approx 4{,}265.$$

X итерация. Имеем

$$\alpha^{(10)}=\max\{0;\ 2{,}57-0{,}1\,(-4{,}265))\}\approx 3{,}0;$$

$$x_1^{(10)}=\max\{0;\ 3{,}658+0{,}1\,(-2)\cdot 3{,}658+3{,}0\,((-2)\cdot 3{,}658+14)]\}\approx$$
$$\approx 4{,}931;$$

$$x_2^{(10)}=\max\{0;\ 3{,}669+0{,}1[(-2)\cdot 3{,}669+3{,}0((-2)\cdot 3{,}669+14)]\}\approx$$
$$\approx 4{,}934$$

$$g(X^{(10)})\approx 9{,}451.$$

XI итерация. Находим

$$x_1^{(11)}=\max\{0;\ 4{,}931+0{,}1\,[(-2)\cdot 4{,}931]\}\approx 3{,}945;$$
$$x_2^{(11)}=\max\{0;\ 4{,}934+0{,}1\,[(-2)\cdot 4{,}934]\}\approx 3{,}947;$$

$$g(X^{(11)})\approx -0{,}654.$$

XII итерация. Имеем

$$\alpha^{(12)}=\max\{0;\ 3{,}0-0{,}1(-0{,}654)\}\approx 3{,}06;$$

$$x_1^{(12)}=\max\{0;\ 3{,}945+0{,}1[(-2)\cdot 3{,}945+3{,}06((-2)\cdot 3{,}945+14)]\}\approx$$
$$\approx 5{,}026;$$

$$x_2^{(12)}=\max\{0;\ 3{,}947+0{,}1\,[(-2)\cdot 3{,}947+3{,}06((-2)\cdot 3{,}947+14)]\}\approx$$
$$\approx 5{,}026;$$

$$g(X^{(12)})\approx 10{,}207;\ f(X^{(12)})\approx -50{,}521.$$

XIII итерация. Находим

$$x_1^{(13)}=\max\{0;\ 5{,}026+0{,}1\,[(-2)\cdot 5{,}026]\}\approx 4{,}021;$$

$$x_2^{(13)}=\max\{0;\ 5{,}026+0{,}1\,[(-2)\cdot 5{,}026]\}\approx 4{,}021;$$

$$g(X^{(13)})\approx 0{,}251;\ f(X^{(13)})\approx -32{,}337.$$

Полученное на данной итерации решение $x_1^*=4{,}021$ и $x_2^*=4{,}021$ можно считать приемлемым. Это решение при необходимости следует улучшить, продолжив итерационный процесс до получения результата требуемой точности.

В заключение отметим, что решение сложных задач нелинейного программирования градиентными методами связано с большим объемом вычислений и целесообразно только с использованием ЭВМ.

Используя метод Франка — Вульфа, решите задачи 3.30 и 3.31.

3.30. Найти максимальное значение функции $f=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+2x_2\leqslant 8, \\ 2x_1-x_2\leqslant 12, \\ x_1,\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

В качестве начальной точки взять $X^{(0)}=(2;\ 2)$.

3.31. Найти максимальное значение функции $f=6x_2+6x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\leqslant 6, \\ 2x_1+x_2+x_3\leqslant 6, \\ x_3\leqslant 3, \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0. \end{cases}$$

В качестве начальной точки взять $X^{(0)}=(0,\ 0,\ 0)$, а в качестве показателя, определяющего возможность завершения итерационного процесса,— неравенство $f(X^{(k+1)})-f(X^{(k)})<\varepsilon$, где $\varepsilon=0{,}01$.

Используя метод штрафных функций и метод Эрроу — Гурвица, решите задачи 3.32—3.34.

3.32. Найти максимальное значение функции $f=-x_1^2-x_2^2$ при условиях $(x_1-5)^2+(x_2-5)^2\leqslant 8,\ x_1,\ x_2\geqslant 0$.

3.33. Найти максимальное значение функции $f=4x_1+10x_2-x_1^2-x_2^2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+x_2\leqslant 4, \\ x_2\leqslant 2, \\ x_1,\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

3.34. Найти максимальное значение функции $f=-x_1^2-x_2^2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+0{,}5x_2\geqslant 1, \\ x_1+0{,}5x_2\leqslant 4, \\ x_1+x_2\leqslant 6, \\ x_1,\ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

§ 3.5. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим задачу нелинейного программирования, в которой целевая функция и функции в системе ограничений являются сепарабельными.

Определение 3.11. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *сепарабельной*, если она может быть представлена в виде суммы функций, каждая из которых является функцией одной переменной, т. е. если

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j).$$

Если целевая функция и функции в системе ограничений задачи нелинейного программирования являются сепарабельными, то приближенное решение такой задачи можно найти с использованием метода кусочно-линейной аппроксимации. Однако его применение в общем случае позволяет получить приближенный локальный экстремум. Поэтому рассмотрим использование метода кусочно-линейной аппроксимации для решения задачи выпуклого программирования.

1. Метод кусочно-линейной аппроксимации. Пусть требуется определить максимальное значение вогнутой функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{80}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \leqslant b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{81}$$

$$x_j \geqslant 0 \ (j = \overline{1, n}). \tag{82}$$

Чтобы найти решение задачи (80) — (82), заменим функции $f_j(x_j)$ и $g_{ij}(x_j)$ кусочно-линейными функциями $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ и перейдем от задачи (80) — (82) к задаче, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j(x_j) \tag{83}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(x_j) \leqslant b_i \quad (i = \overline{1, m}), \tag{84}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{85}$$

В задаче (83) — (85) пока не определен вид функций. Чтобы сделать это, будем считать, что переменная x_j может принимать значения из промежутка $[0, \alpha_j]$ (α_j — максимальное значение переменной x_j). Разобьем промежуток $[0; \alpha_j]$ на r_j промежутков с помощью r_j+1 точек так, что $x_{0j}=0$, $x_{r_j j}=\alpha_j$. Тогда функции $\hat{f}_j(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ можно записать в виде

$$\hat{f}_j(x_j)=\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} f_{kj}; \quad \hat{g}_{ij}(x_j)=\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} g_{kij}, \tag{86}$$

где

$$f_{kj}=f_j(x_k); \quad g_{kij}=g_{ij}(x_k) \quad (i=\overline{1, m}); \tag{87}$$

$$x_j=\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj} x_{kj}.$$

$\sum\limits_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj}=1$, $\lambda_{kj}\geqslant 0$ для всех k и j, причем для данного x_j не более двух чисел λ_{kj} могут быть положительными и должны быть соседними.

Подставляя теперь в равенства (83) и (84) выражения функций $\hat{f}(x_j)$ и $\hat{g}_{ij}(x_j)$ в соответствии с формулами (86), приходим к следующей задаче:

Найти максимальное значение функции

$$\hat{F}=\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} f_{kj} \lambda_{kj} \tag{88}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{r_j} g_{kij} \lambda_{kj} \leqslant b_i \quad (i=\overline{1, m}); \tag{89}$$

$$\sum_{k=0}^{r_j} \lambda_{kj}=1 \quad (j=\overline{1, n}); \tag{90}$$

$$\lambda_{kj}\geqslant 0 \text{ для всех } k \text{ и } j. \tag{91}$$

Полученная задача отличается от обычной задачи линейного программирования тем, что наложено дополнительное ограничение на переменную λ_{kj}, состоящее в том, чтобы для каждого j не более двух λ_{kj} были положительными и эти положительные λ_{kj} были соседними. Выполнение этих условий может быть соблюдено при решении задачи (88) — (91) симплексным методом за счет соответствующего выбора базиса, определяющего как каждый опорный, так и оптимальный план данной задачи. При этом в общем случае точность полученного решения зависит от принятого шага разбиения промежутка $[0, \alpha_j]$. Чем меньше шаг, тем более точным является полученное решение.

Таким образом, процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования методом кусочно-линейной аппроксимации включает следующие этапы:

1. Каждую из сепарабельных функций заменяют кусочно-линейной функцией.
2. Строят задачу линейного программирования (88) — (91).
3. С помощью симплексного метода находят решение задачи (88) — (91).
4. Определяют оптимальный план задачи (80) — (82) и находят значение целевой функции при этом плане.

3.35. Используя метод кусочно-линейной аппроксимации, найти максимальное значение функции $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 - 9$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 24, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 24, \\ x_2 \leqslant 4, \end{cases}$$

$$x_1, \; x_2 \geqslant 0.$$

Решение. В данном случае целевую функцию F можно представить как сумму двух функций $f_1(x_1) = -x_1^2 + 6x_1 - 9$ и $f_2(x_2) = x_2$, каждая из которых есть функция одной переменной. Следовательно, функция F является сепарабельной. Кроме того, она является вогнутой (как сумма двух вогнутых функций), а область допустимых решений — выпуклой. Значит, используя метод кусочно-линейной аппроксимации, можно найти приближенно глобальный максимум целевой функции.

Здесь нелинейной функцией является только целевая функция. Значит, кусочно-линейной функцией следует заменить только ее. При этом так как функция $f_2(x_2)$ линейная, то аппроксимировать будем функцию $f_1(x_1)$.

На рис. 3.1, где построена область допустимых решений задачи, видно, что переменная x_1 может принимать значения в промежутке $[0; 8]$. Разобьем этот промежуток на восемь частей точками $x_{01} = 0$, $x_{11} = 1$, $x_{21} = 2$, $x_{31} = 3$, $x_{41} = 4$, $x_{51} = 5$, $x_{61} = 6$, $x_{71} = 7$, $x_{81} = 8$. Вычислим теперь значения функции $f_1(x_1)$ в этих точках (табл. 3.2).

Таблица 3.2

x_{k1}	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x_{k1})$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25

Используя формулы (86) и (87), находим

$$\hat{f}_1(x_1) = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81},$$

$$x_1 = 0\cdot\lambda_{01} + 1\lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81}.$$

Подставляя найденные выражения $f_1(x_1)$ и x_1 в исходные данные, получим:

$$\widehat{F} = -9\lambda_{01} - 4\lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{41} - 4\lambda_{51} - 9\lambda_{61} - 16\lambda_{71} - 25\lambda_{81} + x_2 \to \max,$$

$$2\lambda_{11} + 4\lambda_{21} + 6\lambda_{31} + 8\lambda_{41} + 10\lambda_{51} + 12\lambda_{61} + 14\lambda_{71} + 16\lambda_{81} + 3x_2 + x_3 = 24,$$

$$\lambda_{11} + 2\lambda_{21} + 3\lambda_{31} + 4\lambda_{41} + 5\lambda_{51} + 6\lambda_{61} + 7\lambda_{71} + 8\lambda_{81} + 2x_2 + x_4 = 15,$$

$$3\lambda_{11} + 6\lambda_{21} + 9\lambda_{31} + 12\lambda_{41} + 15\lambda_{51} + 18\lambda_{61} + 21\lambda_{71} + 24\lambda_{81} + 2x_2 + x_5 = 24,$$

$$x_2 + x_6 = 4, \quad \lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1,$$

$$x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geqslant 0. \quad \lambda_k \geqslant 0 \quad (k = \overline{1,8}).$$

Для полученной задачи пять векторов P_{01}, P_3, P_4, P_5 и P_6 являются единичными. Значит, ее решение может быть найдено симплексным методом. Определяем его (табл. 3.3).

Таблица 3.3

i	Базис	$C_б$	P_0	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25	1	0	0	0	0
				P_{01}	P_{11}	P_{21}	P_{31}	P_{41}	P_{51}	P_{61}	P_{71}	P_{81}	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	24	0	2	4	6	8	10	12	14	16	3	1	0	0	0
2	P_4	0	15	0	1	2	3	4	5	6	7	8	2	0	1	0	0
3	P_5	0	24	0	3	6	9	12	15	18	21	24	2	0	0	1	0
4	P_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{01}	-9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			-9	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16	-1	0	0	0	0
1	P_3	0	18	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	3	-1	0	0	0
2	P_4	0	12	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	2	0	1	0	0
3	P_5	0	15	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	2	0	0	1	0
4	P_6	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			0	9	4	1	0	1	4	9	2	25	-1	0	0	0	0

Продолжение табл. 3.3

i	Базис	$C_б$	P_0	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9	−16	−25	1	0	0	0	0
				P_{01}	P_{11}	P_{21}	P_{31}	P_{41}	P_{51}	P_{61}	P_{71}	P_{81}	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	0	6	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10	0	1	0	0	−3
2	P_4	0	4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	0	0	1	0	−2
3	P_5	0	7	−9	−6	−3	0	3	6	9	12	15	0	0	0	1	−2
4	P_2	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
5	P_{31}	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
6			4	9	4	1	0	1	4	9	2	25	0	0	0	0	1

По найденным в табл. 3.3 значениям λ_{k1} находим $x_1^* = 3$. Далее, из табл. 3.3 видим, что $x_2^* = 4$. Значит, $X^* = (3;\ 4)$ является приближенным оптимальным решением, которое случайно совпало с точным решением. При данном решении $F_{\max} = 4$.

2. Использование ППП ЛП АСУ для решения задачи нелинейного программирования. Используя ППП ЛП АСУ, можно решить любую задачу нелинейного программирования, целевая функция и система ограничений которой содержат сепарабельные функции. Для ее решения применяется дельта-метод кусочно-линейной аппроксимации. Его применение позволяет находить приближенное решение задач нелинейного программирования при 16 000 ограничений (при любом числе переменных) на машинах с оперативной памятью 1024 Кбайт.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования с использованием ППП ЛП АСУ включает те же основные этапы, что и процесс нахождения решения задачи линейного программирования с применением данного пакета. Вместе с тем имеются определенные различия как в записи исходных данных задачи на бланке, так и в управляющей программе решения задачи, которая содержит еще один оператор XSETLB.

Основная особенность записи исходных данных задачи нелинейного программирования состоит в том, что по каждому набору вспомогательных переменных вводятся маркеры начала и конца набора переменных.

Каждый набор переменных имеет свое имя. Это имя записывается в поле 2, в поле 3 помещается ключевое слово 'MARKER', а в поле 5— ключевое слово начала набора 'SEPORG'. Если при этом наборы вспомогательных переменных идут один за другим, то имя конца набора может быть одним и тем же.

Заметим, что, прежде чем приступить к записи исходных данных данной задачи, нужно определенным образом подготовить их к этому на бланке. Такая подготовка связана с заменой сепарабельных функций задачи на кусочно-линейные, о чем подробно сказано выше.

3.36. Используя ППП ЛП АСУ, найти решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции $F=x_1-x_1^2+x_2$ при условиях $g(x_1, x_2)=x_1^2+2x_1+3x_2^2\leqslant 3$, x_1; $x_2\geqslant 0$.

Решение. Целевая функция $F(x_1, x_2)$ исходной задачи и функция $g(x_1, x_2)$ в системе ограничений являются сепарабельными, поскольку $f(x_1, x_2)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$ и $g(x_1, x_2)=g_1(x_1)+g_2(x_2)$, где $f_1(x_1)=x_1-x_1^2$, $f_2(x_2)=x_2$, $g_1(x_1)=x_1^2+2x_1$ и $g_2(x_2)=3x_2^2$.

Далее, целевая функция задачи вогнута, а область допустимых решений выпукла, так как функции $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ вогнутые, а функции $g_1(x_1)$ и $g_2(x_2)$ выпуклые. Следовательно, решая задачу методом линейной аппроксимации, определим глобальный максимум целевой функции. Решение начнем со сведения исходной задачи к задаче линейного программирования. Для этого промежуток $[0, 1]$ изменения переменных x_j $(j=1, 2)$ разобьем на пять равных частей и составим табл. 3.4 и 3.5.

Таблица 3.4

№ п/п	$x^{н}_{1k}$	$x^{к}_{1k}$	$d_{1k}=x^{к}_{1k}-x^{н}_{1k}$	$f^{н}_{1k}$	$f^{к}_{1k}$	$F_{1k}=f^{к}_{1k}-f^{н}_{1k}$
1	0	0,2	0,2	0	0,16	0,16
2	0,2	0,4	0,2	0,16	0,24	0,08
3	0,4	0,6	0,2	0,24	0,24	0
4	0,6	0,8	0,2	0,24	0,16	—0,08
5	0,8	1,0	0,2	0,16	0	—0,16

Таблица 3.5

№ п/п	$x^{н}_{2k}$	$x^{к}_{2k}$	$d_{2k}=x^{к}_{2k}-x^{н}_{2k}$	$g^{н}_{1k}$	$g^{к}_{1k}$	$g_{1k}=g^{к}_{1k}-g^{н}_{1k}$	$g^{н}_{2k}$	$g^{к}_{2k}$	$g_{2k}=g^{к}_{2k}-g^{н}_{2kn}$
1	0	0,2	0,2	0	0,44	0,44	0	0,12	0,12
2	0,2	0,4	0,2	0,44	0,96	0,52	0,12	0,48	0,36
3	0,4	0,6	0,2	0,96	1,56	0,60	0,48	1,08	0,60
4	0,6	0,8	0,2	1,56	2,24	0,68	1,08	1,92	0,84
5	0,8	1,0	0,2	2,24	3,0	0,76	1,92	3,00	1,08

Вводя теперь вспомогательные переменные x_{1j} и x_{2j} $(j=\overline{1,5})$, получаем:

$$x_1=0+0{,}2x_{11}+0{,}2x_{12}+0{,}2x_{13}+0{,}2x_{14}+0{,}2x_{15},$$

$$x_2=0+0{,}2x_{21}+0{,}2x_{22}+0{,}2x_{23}+0{,}2x_{24}+0{,}2x_{25},$$

$$\hat{f}_1(x_1)=0+0{,}16x_{11}+0{,}08x_{12}+0\cdot x_{13}-0{,}08x_{14}-0{,}16x_{15},$$

$$\hat{f}_2(x_2)=0+0{,}2x_{21}+0{,}2x_{22}+0{,}2x_{23}+0{,}2x_{24}+0{,}2x_{25},$$

$$\hat{g}_1(x_1)=0+0{,}44x_{11}+0{,}52x_{12}+0{,}60x_{13}+0{,}68x_{14}+0{,}76x_{15},$$
$$\hat{g}_2(x_2)=0+0{,}12x_{21}+0{,}36x_{22}+0{,}60x_{23}+0{,}84x_{24}+1{,}08x_{25}.$$

Подставляем теперь вместо $\hat{f}_1(x_1)$, $\hat{f}_2(x_2)$, $\hat{g}_1(x_1)$ и $\hat{g}_2(x_2)$ их выражения в целевую функцию и систему ограничений задачи. К полученной новой целевой функции и системе ограничений добавляем уравнения сеток. В результате получаем следующую задачу линейного программирования: найти максимальное значение функции

$$\widehat{F}=0{,}16x_{11}+0{,}08x_{12}-0{,}08x_{14}-0{,}16x_{15}+x_2. \tag{92}$$

при условиях

$$\begin{cases} 0{,}44x_{11}+0{,}52x_{12}+0{,}60x_{13}+0{,}68x_{14}+0{,}76x_{15}+0{,}12x_{21}+ \\ \quad +0{,}36x_{22}+0{,}60x_{23}+0{,}84x_{24}+1{,}08x_{25}\leqslant 3, \\ 0{,}2x_{11}+0{,}2x_{12}+0{,}2x_{13}+0{,}2x_{14}+0{,}2x_{15}-x_1=0, \\ 0{,}2x_{21}+0{,}2x_{22}+0{,}2x_{23}+0{,}2x_{24}+0{,}2x_{25}-x_2=0, \end{cases} \tag{93}$$

$$0\leqslant x_{kj}\leqslant 1 \ (k=1,2;\ j=\overline{1,5}). \tag{94}$$

Теперь в соответствии с требованиями ППП ЛП АСУ целевой функции, переменным задачи и ограничениям (93) присваиваем имена. Целевой функции присваиваем имя ФУНКЦИЯ,

Таблица 3.6

Строчные переменные	Столбцовые переменные							
	ПЕРХ1	ПЕРХ2	X11	X12	X13	X14	X15	X21
ФУНКЦИЯ		1	0,16	0,08		−0,08	−0,16	
РЕС			0,44	0,52	0,60	0,68	0,76	0,12
СЕТКА1	−1		0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	
СЕТКА2		−1						0,2
Нижняя граница	—	—	0	0	0	0	0	0
Верхняя граница	—	—	1	1	1	1	1	1

Продолжение табл. 3.6

Строчные переменные	Столбцовые переменные				Нижняя граница	Верхняя граница
	X22	X23	X24	X25		
ФУНКЦИЯ					—	—
РЕС	0,36	0,60	0,84	1,08	0	3
СЕТКА 1					—	—
СЕТКА 2	0,2	0,2	0,2	0,2	—	—
Нижняя граница	0	0	0	0	—	—
Верхняя граница	1	1	1	1	—	—

переменным x_1 и x_2 — имена ПЕРХ1 и ПЕРХ2, переменным x_{ki} — имена ХKJ, неравенству системы (93) — имя РЕС и уравнениям системы (93) — имена СЕТКА1 и СЕТКА2.

С учетом введенных имен целевая функция и система ограничений записываются в виде следующей системы уравнений:

ФУНКЦИЯ = 0,16X11 + 0,08X12 − 0,08X14 − 0,16X15 + ПЕРХ2
РЕС = 0,44X11 + 0,52X12 + 0,60X13 + 0,68X14 + 0,76X15 +
+ 0,12X21 + 0,36X22 + 0,60X23 + 0,84X24 + 1,08X25
СЕТКА1 = 0,2X11 + 0,2X12 + 0,2X13 + 0,2X14 + 0,2X15 −
− ПЕРХ1
СЕТКА2 = 0,2X21 + 0,2X22 + 0,2X23 + 0,2X24 + 0,2X25 − ПЕРХ2

Уравнение пакета, значения правых частей ограничений (строчные переменные) и граничные условия на столбцовые переменные сводим в табл. 3.6.

Используя табл. 3.6, записываем исходные данные на бланке для последующей перфорации (рис. 3.7). Как видно из рис. 3.7,

Таблица 3.7

СЕКЦИЯ 1 — СТРОКИ

Номер	Строка	Тип	Решение	Дополнительная переменная	Нижняя граница	Верхняя граница	Оценка строки
1	ФУНКЦИЯ	BS	1.07852	1.07852 —	Нет	Нет	1.00000
2	РЕС	UL	3.00000	.	»	3.00000	.18519 —
3	СЕТКА1	EQ	.	.	.	.	.
4	СЕТКА2	EQ	.	.	.	.	1.00000

СЕКЦИЯ 2 — СТОЛБЦЫ

Номер	Столбец	Тип	Решение	Коэффициенты целевой функции	Нижняя граница	Верхняя граница	Оценка столбца
5	ПЕРХ1	BS	.20000	.	.	Нет	.
6	ПЕРХ2	BS	.91852	1.00000	.	Нет	.
7	X11	UL	1.00000	.16000	.	1.00000	.07852
8	X12	LL	.	.08000	.	1.00000	.01630 —
9	X13	LL	.	.	.	1.00000	.11111 —
10	X14	LL	.	.08000 —	.	1.00000	.20593 —
11	X15	LL	.	.16000 —	.	1.00000	.30074 —
12	X21	UL	1.00000	.	.	1.00000	.17778
13	X22	UL	1.00000	.	.	1.00000	.13333
14	X23	UL	1.00000	.	.	1.00000	.08889
15	X24	UL	1.00000	.	.	1.00000	.04444
16	X25	BS	.59259	.	.	1.00000	.

```
1        10        20        30        40        50        60
NAME          ПРИМЕР
ROWS
 N  ФУНКЦИЯ
 L  РЕС
 E  СЕТКА1
 E  СЕТКА2
COLUMNS
    ПЕРХ1     СЕТКА1       -1.0
    ПЕРХ2     ФУНКЦИЯ       1.0        СЕТКА2       -1.0
    НМ1       'MARKER'                 'SEPORG'
    X11       ФУНКЦИЯ       0.16       РЕС           0.44
    X11       СЕТКА1        0.20
    X12       ФУНКЦИЯ       0.08       РЕС           0.52
    X12       СЕТКА1        0.20
    X13       РЕС           0.60       СЕТКА1        0.20
    X14       ФУНКЦИЯ      -0.08       РЕС           0.68
    X14       СЕТКА1        0.20
    X15       ФУНКЦИЯ      -0.16       РЕС           0.76
    X15       СЕТКА1        0.20
    НМ2       'MARKER'                 'SEPORG'
    X21       РЕС           0.12       СЕТКА2        0.2
    X22       РЕС           0.36       СЕТКА2        0.2
    X23       РЕС           0.60       СЕТКА2        0.2
    X24       РЕС           0.84       СЕТКА2        0.2
    X25       РЕС           1.08       СЕТКА2        0.2
    НМ3       'MARKER'                 'SEPEND'
RHS
    ССЧ       РЕС           3.0
BOUNDS
 UP GR        X11           1.0
 UP GR        X12           1.0
 UP GR        X13           1.0
 UP GR        X14           1.0
 UP GR        X15           1.0
 UP GR        X21           1.0
 UP GR        X22           1.0
 UP GR        X23           1.0
 UP GR        X24           1.0
 UP GR        X25           1.0
ENDATA
/*
```

Рис. 3.7

запись исходных данных рассматриваемой задачи отличается от записи исходных данных такой же задачи линейного программирования тем, что в секции COLUMNS каждый набор вспомогательных переменных начинается специальными маркерами.

Первому набору дополнительных переменных присвоено имя НМ1, второму набору дополнительных переменных — имя НМ2, а концу наборов переменных — имя НМ3.

```
1       10       20       30       40       50       60
        PROGRAM
        INITIALZ
        MOVE(XDATA,'ПРИМЕР')
        MOVE(XPBNAME,'PRIMER')
        CONVERT('SUMMARY')
        BCDOUT
        XSETLB=-1
        SETUP('BOUND','GR','MAX')
        MOVE(XOBJ,'ФУНКЦИЯ')
        MOVE(XRHS,'ССЧ')
        XGUARDPF=1
        XSETLB=1
        SETUP('BOUND','GR','MAX')
        PRIMAL
        SOLUTION
        EXIT
        PEND
*
```

Рис. 3.8

После записи исходных данных задачи на бланке определяем управляющую программу (рис. 3.8) и проводим решение задачи. Это решение выдается в виде отчетов, которые полностью идентичны выходным отчетам, получаемым при решении задачи линейного программирования.

В табл. 3.7 приведен отчет о решении задачи. Из этой таблицы видно, что $X^* = (0{,}20000;\ 0{,}91852)$ является приближенным решением исходной задачи. При этом решении значение функции $F\max = 1{,}07852$.

ГЛАВА IV

ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 4.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

В рассмотренных выше задачах линейного и нелинейного программирования мы находили их решение как бы в один этап или за один шаг. Такие задачи получили название одноэтапных или одношаговых.

В отличие от этих задач задачи динамического программирования являются многоэтапными или многошаговыми. Иными словами, нахождение решения конкретных задач методами динамического программирования включает несколько этапов или шагов, на каждом из которых определяется решение некоторой частной задачи, обусловленной исходной. Поэтому термин «динамическое программирование» не столько определяет особый тип задач, сколько характеризует методы нахождения решения отдельных классов задач математического программирования, которые могут относиться к задачам как линейного, так и нелинейного программирования. Несмотря на это, целесообразно дать общую постановку задачи динамического программирования и определить единый подход к ее решению.

Предположим, что данная физическая система S находится в некотором начальном состоянии $S_0 \in \bar{S}_0$ и является управляемой. Таким образом, благодаря осуществлению некоторого управления U указанная система переходит из начального состояния S_0 в конечное состояние $S_{\text{кон}} \in \bar{S}_R$. При этом качество каждого из реализуемых управлений U характеризуется соответствующим значением функции $W(U)$. Задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений U найти такое U^*, при котором функция $W(U)$ принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение $W(U^*)$. Сформулированная задача и является общей задачей динамического программирования.

Дадим геометрическую интерпретацию этой задачи. Предположим, что состояние системы характеризуется некоторой точкой S на плоскости x_1Ox_2 (рис. 4.1) и эта точка благодаря осуществляемому управлению ее движением перемещается вдоль линии, изображенной на рис. 4.1, из области возможных начальных состояний $\tilde{S}_0$ в область допустимых конечных состояний $\tilde{S}_R$. Каждому управлению U движением точки, т. е. каждой траектории движения точки, поставим в соответствие значение некоторой функции $W(U)$ (например, длину пути, пройденного точкой под воздействием данного управления). Тогда задача состоит в том,

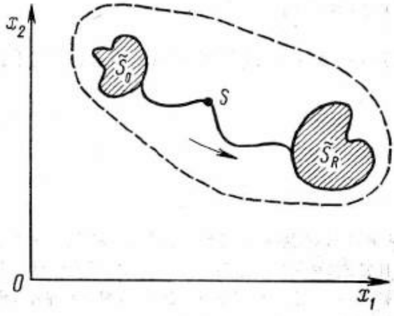


Рис. 4.1

чтобы из всех допустимых траекторий движения точки S найти такую, которая получается в результате реализации управления U^*, обеспечивающего экстремальное значение функции $W(U^*)$. К определению такой «траектории» сводится и задача динамического программирования в случае, когда допустимые состояния системы S определяются точками n-мерного пространства.

Экономическую интерпретацию общей задачи динамического программирования рассмотрим на конкретных примерах.

4.1. В распоряжение министерства, в подчинении которого находится k предприятий, выделены средства в размере K тыс. руб. для использования их на развитие предприятий в течение m лет. Эти средства в начале каждого хозяйственного года (т. е. в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_m$) распределяются между предприятиями. Одновременно с этим между предприятиями распределяется полученная ими за прошедший год прибыль. Таким образом, в начале каждого i-го года рассматриваемого периода j-е предприятие получает в свое распоряжение $x_i^{(j)}$ тыс. руб. Задача состоит в определении таких значений $x_i^{(j)}$, т. е. в нахождении таких распределений выделенных средств между предприятиями и получаемой ими прибыли, при которых за m лет обеспечивается получение максимальной прибыли всеми предприятиями.

Сформулировать поставленную задачу в терминах общей задачи динамического программирования.

Решение. Предполагая, что j-му предприятию на i-й год выделяется $x_i^{(j)}$ тыс. руб., будем рассматривать данное распределение средств как реализацию некоторого управления u_i. Таким образом, управление u_i состоит в том, что на i-м шаге первому предприятию выделяется $x_i^{(1)}$ тыс. руб., второму $x_i^{(2)}$ тыс. руб. и т. д. Совокупность чисел $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(k)}$ определяет всю совокупность управлений $u_1, u_2, ..., u_m$ на m шагах распределения средств как m точек в k-мерном пространстве.

В качестве критерия оценки качества выбранного распределения средств, т. е. реализуемых управлений, взята суммарная прибыль за m лет, которая зависит от всей совокупности управлений: $W = W(u_1, u_2, ..., u_m)$.

Следовательно, задача состоит в выборе таких управлений u_i^*, т. е. в таком распределении средств, при котором функция W принимает максимальное значение.

Как видно, сформулированная задача является многоэтапной. Эта многоэтапность определяется ее условиями, которыми предусмотрено принятие определенных решений в начале каждого года рассматриваемого периода времени. Вместе с тем в целом ряде других задач динамического программирования такая многоэтапность непосредственно не следует из их условий. Однако в целях нахождения решения такие задачи целесообразно рассматривать как многоэтапные. Приведем пример подобной задачи и дадим ее формулировку в терминах общей задачи динамического программирования.

4.2. Для увеличения объемов выпуска пользующейся повышенным спросом продукции, изготовляемой предприятиями, выделены капиталовложения в объеме S тыс. руб. Использование i-м предприятием x_i тыс. руб. из указанных средств обеспечивает прирост выпуска продукции, определяемый значением нелинейной функции $f_i(x_i)$.

Найти распределение капиталовложений между предприятиями, обеспечивающее максимальное увеличение выпуска продукции.

Решение. Математическая постановка задачи состоит в определении наибольшего значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S, \tag{2}$$

$$x_i \geqslant 0 \quad (i = \overline{1, n}). \tag{3}$$

Сформулированная задача является задачей нелинейного программирования. В том случае, когда $f_i(x_i)$ — выпуклые (или вогнутые) функции, ее решение можно найти, например, методом множителей Лагранжа. Если же функции $f_i(x_i)$ не являются таковыми, то известные методы нахождения решения задач нелинейного программирования не позволяют определить глобальный максимум функции (1). Тогда решение задачи (1) — (3) можно найти с помощью динамического программирования. Для этого исходную задачу нужно рассмотреть как многоэтапную или многошаговую. Вместо того чтобы рассматривать допустимые варианты распределения капиталовложений между n предприятиями и оценивать их эффективность, будем исследовать эффективность вложения средств на одном предприятии, на двух предприятиях и т. д., наконец, на n предприятиях. Таким образом, получим n этапов, на каждом из которых состояние системы (в качестве которой выступают предприятия) описывается объемом средств, подлежащих освоению k предприятиями ($k=\overline{1,n}$). Решения об объемах капиталовложений, выделяемых k-му предприятию ($k=\overline{1,n}$), и являются управлениями. Задача состоит в выборе таких управлений, при которых функция (1) принимает наибольшее значение.

Сформулируйте задачи 4.3—4.8 в терминах общей задачи динамического программирования.

4.3. В состав производственного объединения входят два предприятия, связанные между собой кооперированными поставками. Вкладывая дополнительные средства в целях развития этих предприятий, можно улучшить технико-экономические показатели деятельности производственного объединения в целом, обеспечив тем самым получение дополнительной прибыли. Величина этой прибыли зависит от того, сколько выделяется средств каждому предприятию и как эти средства используются.

Считая, что на развитие i-го предприятия в начале k-го года выделяется $a_i^{(k)}$ тыс. руб., найти такой вариант распределения средств между предприятиями в течение N лет, при котором обеспечивается получение за данный период времени максимальной прибыли.

4.4. В производственном объединении в начале каждого года полностью распределяется между входящими в его состав m предприятиями созданный в объединении централизованный фонд развития производства. При этом благодаря выделению из этого фонда i-му предприятию x_i тыс. руб. обеспечивается получение дополнительной прибыли, равной $f_i(x_i)$ тыс. руб. К началу планового периода, состоящего из N лет, централизованному фонду развития производства выделено A тыс. руб. В каждый последующий год этот фонд формируется за счет отчислений в него от полученной прибыли. Эти отчисления для i-го предприятия составляют $\varphi_i(x_i)$ тыс. руб.

Найти такой вариант распределения централизованного фонда развития производства между предприятиями объединения, при котором общая прибыль, полученная за N лет, является максимальной.

4.5. Для осуществления своей эффективной деятельности производственные объединения и предприятия должны периодически проводить замену используемого ими оборудования. При этой замене учитываются производительность используемого оборудования (т. е. объем выпуска на нем продукции в течение единицы времени), затраты, связанные с содержанием и ремонтом оборудования, стоимость приобретаемого и заменяемого оборудования. Предположим, что к началу планируемого периода на предприятии установлено новое оборудование, позволяющее за τ-й год выпустить готовой продукции на сумму $R(\tau)$ руб., а ежегодные затраты, связанные с содержанием и ремонтом оборудования, равны $Z(\tau)$ руб. В τ-й год оборудование может быть продано за $S(\tau)$ руб. и куплено новое за P_τ руб. С учетом всех этих факторов найти оптимальный план замены оборудования, т. е. план, обеспечивающий максимальную прибыль от замены оборудования в течение N лет.

4.6. Детали n видов могут обрабатываться на двух станках. Время обработки i-й детали $(i=\overline{1,n})$ на первом станке равно a_i минут, а время обработки той же детали на втором станке равно b_i минут. Очередность обработки деталей одна и та же: сначала деталь обрабатывается на первом станке, а затем на втором. Требуется выбрать такую последовательность обработки деталей, при которой время изготовления всех деталей является минимальным.

4.7. В склад емкостью W м^3 требуется поместить n различных типов оборудования. Объем одной единицы i-го типа оборудования $(i=\overline{1,n})$ равен V_i м^3, а стоимость единицы данного типа оборудования равна C_i руб. Определить, сколько оборудования каждого типа следует поместить в склад так, чтобы общая стоимость складированного оборудования была максимальной.

4.8. Производственные объединения (предприятия), выпускающие товары народного потребления, изготовляют их отдельными партиями. Чем больше размер этих партий, тем это более выгодно для производственных объединений. Поэтому каждое объединение заинтересовано в отдельные месяцы выпускать больше изделий, чем это нужно для удовлетворения спроса, а излишки хранить на складе для их реализации в последующие месяцы. Однако хранение изделий на складе сопряжено с соответствующими затратами.

Будем считать, что предприятие стремится найти оптимальный план производства продукции в течение N месяцев, в каждом из которых необходимо a_i $(i=\overline{1,N})$ единиц продукции. Запасы к началу планируемого периода равны b изделиям, а в каждом из планируемых месяцев предприятие может изготовить не более чем d_i единиц продукции. Одновременно на складе может храниться не более чем A изделий. Затраты, связанные с производством a_j $(j=\overline{1,k})$ изделий, составляют c_j руб., а затраты, обусловленные хранением в течение месяца одного изделия, составляют β руб. Определить такой план выпуска продукции, при котором общая сумма затрат на производство и хранение ее была бы минимальной, а спрос на необходимые изделия был бы удовлетворен своевременно и полностью.

§ 4.2. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В предыдущем параграфе была дана постановка общей задачи динамического программирования и приведены ее геометрическая и экономическая интерпретации. Рассмотрим теперь в общем виде решение этой задачи. Для этого введем некоторые обозначения и сделаем необходимые для дальнейших изложений предположения.

Будем считать, что состояние рассматриваемой системы S на K-м шаге $(k=\overline{1,n})$ определяется совокупностью чисел $X^{(k)}=(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, которые получены в результате реализации управления u_k, обеспечившего переход системы S из состояния $X^{(k-1)}$ в состояние $X^{(k)}$. При этом будем предполагать, что состояние $X^{(k)}$, в которое перешла система S, зависит от данного состояния $X^{(k-1)}$ и выбранного управления u_k и не зависит от того, каким образом система S пришла в состояние $X^{(k-1)}$.

Далее, будем считать, что если в результате реализации k-го шага обеспечен определенный доход или выигрыш, также зависящий от исходного состояния системы $X^{(k-1)}$ и выбранного управления u_k и равный $W_k(X^{(k-1)}, u_k)$, то общий доход или выигрыш за n шагов составляет

$$F=\sum_{k=1}^{n} W_k(X^{(k-1)}, u_k). \tag{4}$$

Таким образом, мы сформулировали два условия, которым должна удовлетворять рассматриваемая задача динамического программирования. Первое условие обычно называют *условием отсутствия последействия,* а второе — *условием аддитивности* целевой функции задачи.

Выполнение для задачи динамического программирования первого условия позволяет сформулировать для нее принцип оптимальности Беллмана. Прежде чем сделать это, дадим определение *оптимальной стратегии управления*. Под такой стратегией будем понимать совокупность управлений $U^*=(u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*)$, в результате реализации которых система S за n шагов переходит из начального состояния $X^{(0)}$ в конечное $X^{(k)}$ и при этом функция (4) принимает наибольшее значение.

П р и н ц и п о п т и м а л ь н о с т и. *Каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным.*

Отсюда следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n-м шаге, затем на двух последних шагах, затем на трех последних шагах и т. д., вплоть до первого шага. Таким образом, решение рассматриваемой задачи динамического программирования целесообразно начинать с определения оптимального решения на последнем, n-м шаге. Для того чтобы найти это решение, очевидно, нужно сделать различные предположения о том, как мог окончиться предпоследний шаг, и с учетом этого выбрать управление u_n^0, обеспечивающее максимальное значение функции $W_n(X^{(n-1)}, u_n)$. Такое управление u_n^0, выбранное при определенных предположениях о том, как окончился предыдущий шаг, называется *условно оптимальным управлением*. Следовательно, принцип оптимальности требует находить на каждом шаге условно оптимальное управление для любого из возможных исходов предшествующего шага.

Чтобы это можно было осуществить практически, необходимо дать математическую формулировку принципа оптимальности. Для этого введем некоторые дополнительные обозначения. Обозначим через $F_n(X^0)$ максимальный доход, получаемый за n шагов при переходе системы S из начального состояния $X^{(0)}$ в конечное состояние $X^{(n)}$ при реализации оптимальной стратегии управления $U=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, а через $F_{n-k}(X^{(k)})$ — максимальный доход, получаемый при переходе из любого состояния $X^{(k)}$ в конечное состояние $X^{(n)}$ при оптимальной стратегии управления на оставшихся $n-k$ шагах. Тогда

$$F_n(X^0)=\max_{u_{k+i}}[W_1(X^{(0)}, u_1)+\ldots+W_n(X^{(n-1)}, u_n)]; \tag{5}$$

$$F_{n-k}(X^{(k)})=\max_{u_{k+1}}[W_{k+1}(X^{(k)}, u_{k+1})+F_{n-k-1}(X^{(k+1)})](k=\overline{0,n-1}). \tag{6}$$

Последнее выражение представляет собой математическую запись принципа оптимальности и носит название *основного функционального уравнения* Беллмана или рекуррентного соотношения. Используя данное уравнение, находим решение рассматриваемой задачи динамического программирования. Остановимся на этом более подробно.

Полагая $k=n-1$ в рекуррентном соотношении (6), получаем следующее функциональное уравнение:

$$F_1(X^{(n-1)})=\max_{u_n}[W_n(X^{(n-1)}, u_n)+F_0(X^{(n)})]. \tag{7}$$

В этом уравнении $F_0(X^{(n)})$ будем считать известным. Используя теперь уравнение (7) и рассматривая всевозможные допустимые состояния системы S на $(n-1)$-м шаге $X_1^{(n-1)}, X_2^{(n-1)}, \ldots, X_m^{(n-1)}, \ldots$, находим условные оптимальные решения

$$u_n^0(x_1^{(n-1)}),\ u_n^0(x_2^{(n-1)}),\ \ldots,\ u_n^0(x_m^{(n-1)}),\ \ldots$$

и соответствующие значения функции (7)

$$F_1^0(X_1^{(n-1)}),\ F_1^0(X_2^{(n-1)}),\ \ldots,\ F_1^0(X_m^{(n-1)}),\ \ldots .$$

Таким образом, на n-м шаге находим условно оптимальное управление при любом допустимом состоянии системы S после $(n-1)$-го шага. Иными словами, в каком бы состоянии система ни оказалась после $(n-1)$-го шага, нам уже известно, какое следует принять решение на n-м шаге. Известно также и соответствующее значение функции (7).

Переходим теперь к рассмотрению функционального уравнения при $k=n-2$:

$$F_2(X^{(n-1)})=\max_{u_{n-1}} [W_{n-1}(X^{(n-2)}, u_{n-1})+F_1(X^{(n-1)})]. \qquad (8)$$

Для того чтобы найти значения F_2 для всех допустимых значений $X^{(n-2)}$, очевидно, необходимо знать $W_{n-1}(X^{(n-2)}, u_{n-1})$ и $F_1(X^{(n-1)})$. Что касается значений $F_1(X^{(n-1)})$, то мы их уже определили. Поэтому нужно произвести вычисления для $W_{n-1}(X^{(n-2)}, u_{n-1})$ при некотором наборе допустимых значений $X^{(n-2)}$ и соответствующих управлений u_{n-1}. Эти вычисления позволят определить условно оптимальное управление u^0_{n-1} для каждого $X^{(n-2)}$. Каждое из таких управлений совместно с уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивает максимальное значение дохода на двух последних шагах.

Последовательно осуществляя описанный выше итерационный процесс, дойдем, наконец, до первого шага. На этом шаге нам известно, в каком состоянии может находиться система. Поэтому уже не требуется делать предположений о допустимых состояниях системы, а остается лишь только выбрать управление, которое является наилучшим с учетом условно оптимальных управлений, уже принятых на всех последующих шагах.

Таким образом, в результате последовательного прохождения всех этапов от конца к началу определяем максимальное значение выигрыша за n шагов и для каждого из них находим условно оптимальное управление.

Чтобы найти оптимальную стратегию управления, т. е. определить искомое решение задачи, нужно теперь пройти всю последовательность шагов, только на этот раз от начала к концу. А именно: на первом шаге в качестве оптимального управления u_1^* возьмем найденное условно оптимальное управление u_1^0. На втором шаге найдем состояние X_1^*, в которое переводит систему управление u_1^*. Это состояние определяет найденное условно оптимальное управление u_2^0, которое теперь будем считать оптимальным. Зная u_2^*, находим X_2^*, а значит, определяем u_3^* и т. д. В результате этого находим решение задачи, т. е. максимально возможный доход и оптимальную стратегию управления U^*, включающую оптимальные управления на отдельных шагах: $U^*=(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$.

Итак, мы рассмотрели в общем виде нахождение решения задачи динамического программирования. Из изложенного видно, что этот процесс является довольно громоздким. Поэтому ниже рассмотрено нахождение решения самых простых задач, допускающих постановку в терминах общей задачи динамического программирования. Вместе с тем отметим, что использование ЭВМ позволяет находить на основе описанного выше подхода решение и более сложных практических задач.

Используя методы динамического программирования, найдем решение для частных случаев задачи 4.5 об использовании оборудования и задачи 4.2 о распределении ресурсов.

4.9. К началу текущей пятилетки на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его использования предприятием, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

	Время τ, в течение которого используется оборудование (лет)					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции $R(\tau)$ в стоимостном выражении (тыс. руб.)	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты $Z(\tau)$, связанные с содержанием и ремонтом оборудования (тыс. руб.)	20	25	30	35	45	55

Зная, что затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, идентичного с установленным, составляют 40 тыс. руб., а заменяемое оборудование списывается, составить такой план замены оборудования в течение пятилетки, при котором общая прибыль за данный период времени максимальна.

Решение. Эту задачу можно рассматривать как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы S выступает оборудование. Состояния этой системы определяются фактическим временем использования оборудования (его возрастом) τ, т. е. описываются единственным параметром τ.

В качестве управлений выступают решения о замене и сохранении оборудования, принимаемые в начале каждого года. Обозначим через u_1 решение о сохранении оборудования, а через u_2 — решение о замене оборудования. Тогда задача состоит в нахождении такой стратегии управления, определяемой решениями, принимаемыми к началу каждого года, при которой общая прибыль предприятия за пятилетку является максимальной.

Таким образом, мы сформулировали исходную задачу в терминах задачи динамического программирования. Эта задача обладает свойствами аддитивности и отсутствия последействия. Следовательно, ее решение можно найти с помощью описанного выше алгоритма решения задачи динамического программирования, реализуемого в два этапа. На первом этапе при движении от начала 5-го года пятилетки к началу 1-го года для каждого допустимого состояния оборудования найдем условное оптимальное управление (решение), а на втором этапе при движении от начала 1-го года пятилетки к началу 5-го года из условных оптимальных решений для каждого года составим оптимальный план замены оборудования на пятилетку.

Для определения условных оптимальных решений сначала необходимо составить функциональное уравнение Беллмана.

Так как мы предположили, что к началу k-го года $(k=\overline{1,5})$ может приниматься только одно из двух решений — заменять или не заменять оборудование, то прибыль предприятия за k-й год составит

$$F_k(\tau^{(k)},\ u_k)_k=\begin{cases} R(\tau^{(k)})-Z(\tau^{(k)}) \text{ при } u_1, \\ R(\tau^{(k)}=0)-Z(\tau^{(k)}=0)-C_n \text{ при } u_2, \end{cases}$$

где $\tau^{(k)}$ — возраст оборудования к началу k-го года $(k=\overline{1,5})$; u_k — управление, реализуемое к началу k-го года; C_n — стоимость нового оборудования.

Таким образом, в данном случае уравнение Беллмана имеет вид

$$F_k(\tau^{(k)})=\max_{\tau}\begin{cases} R(\tau^{(k)})-Z(\tau^{(k)})+F_{k+1}(\tau^{(k+1)}), \\ R(\tau^{(k)}=0)-Z(\tau^{(k)}=0)-C_n+F_{k+1}(\tau^{(k)}=1). \end{cases} \tag{9}$$

Используя теперь уравнение (9), приступаем к нахождению решения исходной задачи. Это решение начинаем с определения условно оптимального управления (решения) для последнего (5-го) года пятилетки, в связи с чем находим множество допустимых состояний оборудования к началу данного года пятилетки. Так как к началу пятилетки имеется новое оборудование $(\tau^{(1)}=0)$, то возраст оборудования к началу 5-го года может составлять 1, 2, 3 и 4 года. Поэтому допустимые состояния системы на данный период времени таковы: $\tau_1^{(5)}=1$; $\tau_2^{(5)}=2$; $\tau_3^{(5)}=3$; $\tau_4^{(5)}=4$. Для каждого из этих состояний найдем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_5(\tau^{(5)})$. Используя уравнение (9) и соотношение $F_6(\tau^{(k+1)})=0$ (так как рассматривается последний год расчетного периода), получаем

$$F_5(\tau^{(5)})=\max\begin{cases} R(\tau^{(5)})-Z(\tau^{(5)}), \\ R(\tau^{(5)}=0)-Z(\tau^{(5)}=0)-C_n. \end{cases} \tag{10}$$

Подставляя теперь в формулу (10) вместо $\tau^{(5)}$ его значение, равное 1, и учитывая данные табл. 4.1, находим

$$F_5(\tau_1^{(5)})=\max\left\{\begin{array}{l} R(\tau^{(5)}=1)-Z(\tau^{(5)}=1) \\ R(\tau^{(5)}=0)-Z(\tau^{(5)}=0)-C_n \end{array}\right\}=$$

$$=\max\left\{\begin{array}{l} 75-25 \\ 80-20-40 \end{array}\right\}=50,\ u^0=u_1.$$

Значит, условно оптимальное решение в данном случае есть u_1.

Проведем аналогичные вычисления для других допустимых состояний оборудования к началу 5-го года пятилетки:

$$F_5(\tau_2^{(5)})=\max\left\{\begin{array}{l} 65-30 \\ 80-20-40 \end{array}\right\}=35,\ u^0=u_1;$$

$$F_5(\tau_3^{(5)})=\max\left\{\begin{array}{l} 60-35 \\ 80-20-40 \end{array}\right\}=25,\ u^0=u_1;$$

$$F_5(\tau_4^{(5)})=\max\left\{\begin{array}{l} 60-45 \\ 80-20-40 \end{array}\right\}=20,\ u^0=u_2.$$

Полученные результаты вычислений сводим в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Возраст оборудования $\tau^{(5)}$ (лет)	Значения функции $F_5(\tau^{(5)})$ (тыс. руб.)	Условно оптимальное решение $\bar{u}^0$
1	50	u_1
2	35	u_1
3	25	u_1
4	20	u_2

Рассмотрим теперь возможные состояния оборудования к началу 4-года пятилетки. Очевидно, допустимыми состояниями являются $\tau_1^{(4)}=1$, $\tau_2^{(4)}=2$ и $\tau_3^{(4)}=3$. Для каждого из них определяем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_4(\tau^{(4)})$. Для этого используем уравнение (9) и данные табл. 4.1 и 4.2. Так, в частности, для $\tau_1^{(4)}=1$ имеем

$$F_4(\tau_1^{(4)})=\max\left\{\begin{array}{l} R(\tau^{(4)}=1)-Z(\tau^{(4)}=1)+F_5(\tau^{(5)}=2) \\ R(\tau^{(4)}=0)-Z(\tau^{(4)}=0)-C_n+F_5(\tau^{(5)}=1) \end{array}\right\}$$

$$=\max\left\{\begin{array}{l} 75-25+35 \\ 80-20-40+50 \end{array}\right\}=85,\ u^0=u_1.$$

Аналогично находим

$$F_4(\tau_2^{(4)}) = \max \begin{Bmatrix} 65 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70, \ u^0 = u_2;$$

$$F_4(\tau_3^{(4)}) = \max \begin{Bmatrix} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70, \ u^0 = u_2.$$

Полученные результаты вычислений записываем в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Возраст оборудования $\tau^{(4)}$ (лет)	Значения функции $F_4(\tau^{(4)})$ (тыс. руб.)	Условно оптимальное решение u^0
1	85	u_1
2	70	u_2
3	70	u_2

Определим теперь условно оптимальное решение для каждого из допустимых состояний оборудования к началу 3-го года пятилетки. Очевидно, такими состояниями являются $\tau_1^{(3)} = 1$, $\tau_2^{(3)} = 2$. В соответствии с уравнением (9) имеем

$$F_3(\tau_1^{(3)}) = \max \begin{Bmatrix} R(\tau^{(3)} = 1) - Z(\tau^{(3)} = 1) + F_4(\tau^{(4)} = 2) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{Bmatrix};$$

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max \begin{Bmatrix} R(\tau^{(3)} = 2) - Z(\tau^{(3)} = 2) + F_4(\tau^{(4)} = 3) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{Bmatrix}.$$

Используя данные табл. 4.1 и 4.3, получаем

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max \begin{Bmatrix} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} = 120, \ u^0 = u_1;$$

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max \begin{Bmatrix} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} = 105, \ u^0 = u_2.$$

Из последнего выражения видно, что если к началу 3-го года пятилетки возраст оборудования составляет два года, то независимо от того, будет ли принято решение u_1 или u_2, величина прибыли окажется одной и той же. Это означает, что в качестве условно оптимального решения можно взять любое, например u_2. Полученные значения для $F_3(\tau^{(3)})$ и соответствующие условно оптимальные решения записываем в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Возраст оборудования $\tau^{(3)}$ (лет)	Значения функции $F_3(\tau^{(3)})$ (тыс. руб.)	Условно оптимальное решение u^0
1	120	u_1
2	105	u_2

Наконец, рассмотрим допустимые состояния оборудования к началу 2-го года пятилетки. Очевидно, на данный момент времени возраст оборудования может быть равен только лишь одному году. Поэтому предстоит сравнить лишь два возможных решения: сохранить оборудование или произвести замену. Анализ такого сравнения характеризуется данными табл. 4.5.

Таблица 4.5

Возраст оборудования $\tau^{(2)}$ (лет)	Значения функции $F_2(\tau^{(2)})$ (тыс. руб.)	Условно оптимальное решение u^0
1	155	u_1

Согласно условию, к началу пятилетки установлено новое оборудование ($\tau_1^{(1)}=0$). Поэтому проблемы выбора между сохранением и заменой оборудования не существует: оборудование следует сохранить. Значит, условно оптимальным решением является u_1, а значение функции

$$F_1(\tau_1^{(1)})=R(\tau_2^{(1)}=0)-Z(\tau_1^{(1)}=0)+F_2(\tau^{(1)}=1)=80-20+155=$$
$$=215.$$

Таким образом, максимальная прибыль предприятия может быть равной 215 тыс. руб. Она соответствует оптимальному плану замены оборудования, который получается на основе данных табл. 4.5, 4.4, 4.3 и 4.2, т. е. в результате реализации второго этапа вычислительного процесса, состоящего в прохождении всех рассмотренных шагов с начала 1-го до начала 5-го года пятилетки. Для 1-го года пятилетки решение единственно — следует сохранить оборудование. Значит, возраст оборудования к началу 2-го года пятилетки равен одному году. Тогда в соответствии с данными табл. 4.5 оптимальным решением для 2-го года пятилетки является решение о сохранении оборудования. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования к началу 3-го года пятилетки становится равным двум годам. При таком возрасте (см. табл. 4.4) оборудование в 3-м году пятилетки следует заменить. После замены оборудования его возраст к началу 4-го года пятилетки составит один год. Как видно из табл. 4.3, при таком возрасте оборудования его менять не следует. Поэтому возраст оборудования к началу 5-го года пятилетки составит два года, т. е. менять оборудование нецелесообразно (табл. 4.2).

Итак, получается следующий оптимальный план замены оборудования (табл. 4.6).

Таблица 4.6

	Годы пятилетки				
	1	2	3	4	5
Оптимальное решение	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование	Произвести замену оборудования	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование

4.10. Найти решение задачи 4.2, если $S=700$ тыс. руб., $n=3$, а значения X_i и $f_i(X_i)$ приведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Объем капиталовложений X_i (тыс. руб.)	Прирост выпуска продукции $f_i(X_i)$ в зависимости от объема капиталовложений (тыс. руб.)		
	предприятие 1	предприятие 2	предприятие 3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Решение. Для решения данной задачи динамического программирования следует составить рекуррентное соотношение Беллмана. В рассматриваемом случае это соотношение приводит к следующим функциональным уравнениям:

$$\varphi_1(X)=\max_{0\leqslant X_1\leqslant X}\{f_1(X_1)\};$$

$$\varphi_2(X)=\max_{0\leqslant X_2\leqslant X}\{f_2(X_2)+\varphi_1(X-X_2)\}; \qquad (11)$$

. . . .

$$\varphi_{n-1}(X)=\max_{0\leqslant X_{n-1}\leqslant X}\{f_{n-1}(X_{n-1})+\varphi_{n-2}(X-X_{n-1})\}$$

Здесь функции $\varphi_i(X)\,(i=\overline{1,\ n-1})$ определяют максимальный прирост выпуска продукции при соответствующих распределениях X тыс. руб. капиталовложений между i предприятиями. Поэтому значение функции $\varphi_n(X)$ вычисляется лишь для одного значения $X=S$, так как объем капиталовложений, выделяемых для всех n предприятий, равен S тыс. руб.

Используя теперь рекуррентные соотношения (11) и исходные данные табл. 4.7, приступаем к нахождению решения задачи, т. е. к определению сначала условно оптимальных, а затем и оптимальных распределений капиталовложений между предприятиями.

Начинаем с определения условно оптимальных капиталовложений, выделяемых для развития первого предприятия. Для этого находим значения $\varphi_1(X)$ для каждого X, принимающего значения 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 и 700.

Пусть $X=0$; тогда $\varphi_1(0)=0$. Возьмем теперь $X=100$. Тогда, используя табл. 4.7, получаем

$$\varphi_1(100)=\max\left\{\begin{matrix} 0 \\ \boxed{30} \end{matrix}\right\}=30,\ X_1^0=100.$$

Здесь первая строка соответствует решению $X_1=0$, а вторая строка — решению $X_1=100$. Так как при первом решении прирост выпуска продукции не обеспечивается, а при втором равен 30 тыс. руб., то условно оптимальным решением является $X_1^0=100$.

Аналогично находим условно оптимальные решения для других значений X:

$$\varphi_1(200)=\max\left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \\ \boxed{50} \end{matrix}\right\}=50,\ X_1^0=200;$$

$$\varphi_1(300)=\max\left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ \boxed{90} \end{matrix}\right\}=90,\ X_1^0=300;$$

$$\varphi_1(400)=\max\left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ \boxed{110} \end{matrix}\right\}=110,\ X_1^0=400;$$

$$\varphi_1(500) = \max \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ \boxed{170} \end{Bmatrix} = 170, \ X_1^0 = 500;$$

$$\varphi_1(600) = \max \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ \boxed{180} \end{Bmatrix} = 180, \ X_1^0 = 600;$$

$$\varphi_1(700) = \max \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ 210 \end{Bmatrix} = 210, \ X_1^0 = 700.$$

Результаты вычислений и полученные соответствующие условно оптимальные решения записываем в табл. 4.8.

Таблица 4.8

Объем капиталовложений X, выделяемых первому предприятию (тыс. руб.)	Максимальный прирост $\varphi_i(X)$ выпуска продукции (тыс. руб.)	Условно оптимальный объем капиталовложений X_1^0, выделяемых первому предприятию (тыс. руб.)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300

Объем капиталовложений X, выделяемых первому предприятию (тыс. руб.)	Максимальный прирост $\varphi_1(X)$ выпуска продукции (тыс. руб.)	Условно оптимальный объем капиталовложений X_1^0, выделяемых первому предприятию (тыс. руб.)
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Используя теперь данные табл. 4.8 и 4.7, определим условно оптимальные объемы капиталовложений, выделяемых второму предприятию. Найдем

$$\varphi_2(X) = \max_{0 \leqslant X_2 \leqslant X} \{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\}$$

для каждого из допустимых значений X, равных 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 и 700:

$$\varphi_2(0) = 0, \qquad X_2^0 = 0;$$

$$\varphi_2(100) = \max\begin{Bmatrix} 0+30 \\ \boxed{50+0} \end{Bmatrix} = 50, \quad X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(200) = \max\begin{Bmatrix} 0+50 \\ \boxed{50+30} \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 80, \quad X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(300) = \max\begin{Bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ \boxed{80+30} \\ 90+0 \end{Bmatrix} = 110, \quad X_2^0 = 200;$$

$$\varphi_2(400) = \max\begin{Bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ \boxed{150+0} \end{Bmatrix} = 150, \quad X_2^0 = 400;$$

$$\varphi_2(500) = \max \begin{Bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ \boxed{190+0} \end{Bmatrix} = 190, \quad X_2^0 = 500;$$

$$\varphi_2(600) = \max \begin{Bmatrix} 0+180 \\ \boxed{50+170} \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{Bmatrix} = 220, \qquad X_2^0 = 100,$$

$$\varphi_2(700) = \max \begin{Bmatrix} 0+210 \\ 50+180 \\ \boxed{80+170} \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 190+50 \\ 210+30 \\ 220+0 \end{Bmatrix} = 250, \qquad X_2^0 = 200.$$

Полученные результаты и найденные условно оптимальные объемы капиталовложений, выделяемых второму предприятию, записываем в табл. 4.9.

Таблица 4.9

Объем капиталовложений X, выделяемых двум предприятиям (тыс. руб.)	Максимальный прирост $\varphi_2(X)$ выпуска продукции (тыс. руб.)	Условно оптимальный объем капиталовложений X_2^0, выделяемых второму предприятию (тыс. руб.)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200

Объем капиталовложений X, выделяемых двум предприятиям (тыс. руб.)	Максимальный прирост $\varphi_2(X)$ выпуска продукции (тыс. руб.)	Условно оптимальный объем капиталовложений X_2^0, выделяемых второму предприятию (тыс. руб.)
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Переходим теперь к нахождению значений

$$\varphi_3(X) = \max_{0 \leqslant X_3 \leqslant X} \{f_3(X_3) + \varphi_2(X - X_3)\},$$

используя для этого соответствующие данные табл. 4.9 и 4.7.

Так как в данном случае число предприятий равно 3, то проводим вычисление лишь для одного значения $X = 700$:

$$\varphi_3(700) = \left\{ \begin{array}{r} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 110+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ \boxed{220+50} \\ 240+0 \end{array} \right\} = 270, \ \ X_3^0 = 600.$$

Следовательно, максимальный прирост выпуска продукции составляет 270 тыс. руб. Это имеет место тогда, когда третьему предприятию выделяется 600 тыс. руб., а первому и второму предприятиям — 100 тыс. руб. Тогда, как видно из табл. 4.9, второму предприятию следует выделить 100 тыс. руб.

Итак, мы получили оптимальный план распределения капиталовложений между предприятиями, согласно которому обеспечивается максимальный прирост выпуска продукции.

Используя методы динамического программирования, решите задачи 4.11—4.14.

4.11. Составить оптимальный план замены оборудования в условиях задачи 4.9 при исходных данных о производительности оборудования и ежегодных затратах на его содержание, приведенных в таблице. Кроме того, известно, что к началу рассматриваемого периода установлено новое оборудование, использованное оборудование списывается, а стоимость нового оборудования равна 10 тыс. руб.

	Возраст оборудования τ (лет)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Годовой выпуск продукции $R(\tau)$ на оборудовании возраста τ лет (тыс. руб.)	25	24	24	23	23	23	22	22	21	20
Ежегодные затраты на содержание и ремонт оборудования $Z(\tau)$ (тыс. руб.)	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

4.12. Составить оптимальный план распределения капиталовложений между четырьмя предприятиями в условиях задачи 4.2 при исходных данных относительно X_i и $f_i(X_i)$, приведенных в таблице, а также с учетом того, что $S=100$ тыс. руб.

Объем капиталовложений X_i (тыс. руб.)	Прирост выпуска продукции $f_i(x_i)$ в зависимости от объема капиталовложений (тыс. руб.)			
	предприятие 1	предприятие 2	предприятие 3	предприятие 4
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

4.13. Найдите оптимальный план загрузки склада в условиях задачи 4.7 при $W=90$ м^3, $V_1=24$ м^3, $V_2=19$ м^3, $V_3=16$ м^3, $C_1=960$ руб., $C_2=500$ руб., $C_3=250$ руб.

4.14. Найти оптимальный план производства продукции предприятием в течение четырех месяцев в условиях задачи 4.8, если потребности в каждом из месяцев соответственно составляют 2000, 3000, 3000 и 2000 изделий, а запасы к началу планируемого периода равны 2000 изделий. Следует учитывать, что предприятие в каждом из месяцев может производить не более 4000 изделий. Одновременно оно может хранить также не более 4000 изделий. Затраты, связанные с производством 1000, 2000, 3000 и 4000 изделий, составляют соответственно 13, 15, 17 и 19 руб., а затраты, обусловленные хранением 1000 изделий, равны 1 руб.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.32. $F_{max}=14$ при $x_1^*=14$, $x_2^*=0$. **1.33.** $F_{max}=12$ при $x_1^*=4{,}8$, $x_2^*=3{,}6$. **1.34.** $F_{min}=-11$ при $x_1^*=10$, $x_2^*=9$. **1.35.** $F_{max}=22$ при $X^*=(2;\ 6;\ 33;\ 0;\ 0)$. **1.36.** $F_{max}=-20/3$ при $X^*=(4/3;\ 0;\ 0;\ 1/3;\ 13/3)$. **1.37.** $F_{max}=1940$ при $x_1^*=102$; $x_2^*=166$. **1.38.** $F_{max}=276$ при $x_1^*=12$; $x_2^*=6$. **1.39.** $F_{min}=100$ при $x_1^*=3$; $x_2^*=4$. **1.40.** $F_{max}=1056$ при $x_1^*=57$; $x_2^*=12$. **1.49.** $F_{max}=66$ при $X^*=(18;\ 0;\ 6;\ 66;\ 0;\ 0)$. **1.50.** $F_{max}=282/11$ при $X^*=(6/11;\ 90/11;\ 0;\ 0;\ 254/11;\ 0)$. **1.51.** $F_{max}=39$ при $X^*=(23;\ 4;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0)$. **1.52.** $F_{max}=226/11$ при $X^*=(10/11;\ 72/11;\ 0;\ 0;\ 0;\ 456/11)$. **1.53.** $F_{max}=28$ при $X^*=(0,\ 76;\ 0;\ 66;\ 14;\ 0)$. **1.54.** $F_{max}=7{,}2$ при $X^*=(2{,}8;\ 2{,}4;\ 0{,}4)$. **1.55.** $F_{max}=159$ при $X^*=(0;\ 0;\ 6;\ 28;\ 3)$. **1.56.** $F_{max}=3920$ при $X^*=(0;\ 0;\ 0;\ 80;\ 0;\ 440)$. **1.57.** $F_{max}=3420$ при $X^*=(0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 60;\ 420)$. **1.58.** $F_{max}=190$ при $X^*=(6;\ 0;\ 10;\ 8;\ 0;\ 0)$. **1.59.** $F_{max}=492$ при $X^*=(24;\ 18;\ 0)$. **1.60.** Минимальная стоимость перевозок равна 5840 руб. при условии, что из первого пункта отправления в первый пункт назначения перевозится 260 т груза, во второй пункт назначения — 140 т, в третий пункт назначения — 20 т груза; из второго пункта отправления во второй пункт назначения перевозится 380 т груза и из третьего пункта отправления в третий пункт назначения перевозится 400 т груза. **1.61.** $F_{max}=162\,000$ при $X^*=(100;\ 0;\ 1200)$. **1.62.** $F_{max}=2115$ при $X^*=(95;\ 210;\ 0;\ 0)$. **1.63.** $F_{max}=965$ при $X^*=(70;\ 135;\ 0;\ 0)$. **1.64.** На 1-й линии суда III типа используются 250 сут, на 2-й линии суда I типа — 300 сут, II типа — 46 сут и III типа — 50 сут, на 3-й линии суда II типа заняты в течение 254 сут. **1.68.** $F_{max}=935$ при $X^*=(0;\ 125;\ 0;\ 80)$. **1.69.** $F_{max}=16{,}8$ при $X^*=(3{,}6;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0{,}3)$. **1.70.** $F_{max}=-15$ при $X^*=(0;\ 0;\ 6;\ 0;\ 1{,}5;\ 0)$. **1.71.** $F_{min}=-192$ при $X^*=(0;\ 0;\ 0;\ 48;\ 0;\ 0)$. **1.72.** $F_{max}=4900$ при $x_{14}^*=80$; $x_{21}^*=50$; $x_{23}^*=70$; $x_{31}^*=30$; $x_{32}^*=110$; $x_{41}^*=10$; $x_{45}^*=150$. **1.73.** $F_{min}=7210$ при $x_{11}^*=80$; $x_{13}^*=130$; $x_{16}^*=30$; $x_{24}^*=170$; $x_{25}^*=190$; $x_{32}^*=100$; $x_{36}^*=80$; $x_{42}^*=120$; $x_{51}^*=150$. **1.74.** $F_{min}=0{,}565947$ при $X^*=(0;\ 0;\ 0;\ 0{,}03335;\ 0;\ 0{,}90513;\ 0)$. **1.75.** $F_{max}=1495$ при $X^*=(10;\ 33;\ 45)$. **1.76.** $F_{max}=1939{,}428\,571$ при $X^*=(1200;\ 624,\ 28\,571;\ 0;\ 0)$. **1.92.** $F_{min}=20$ при $y_1^*=4$; $y_2^*=2$. **1.93.** $F_{min}=29$ при $y_1^*=12$; $y_2^*=1$. **1.94.** $F_{min}=66$ при $Y^*=(719;\ 0;\ 13/9)$. **1.95.** $F_{min}=21$ при $Y^*=(0;\ 0;\ 7/5)$. **1.96.** $F_{min}=226/11$ при $Y^*=(7/11;\ 1/11;\ 0)$. **1.97.** $F_{min}=28$ при $Y^*=(0;\ 1;\ 0)$. **1.98.** $F_{min}=492$ при $Y^*=(29/10;\ 0;\ 3/5;\ 0)$. **1.99.** $F_{min}=162\,000$ при $Y^*=(27/2;\ 0;\ 45)$. **1.100.** $F_{min}=186$ при $Y^*=(8/5;\ 9/5;\ 0)$. **1.101.** $F_{min}=965$ при $Y^*=(0;\ 13/2;\ 3/2)$. **1.102.** $F_{min}=2115$ при $Y^*=(0;\ 3/2;\ 9/4)$. **1.103.** а) $Y^*=(2/9;\ 5/3;\ 0)$; б) $288<b_1<520$; $96\leqslant b_2\leqslant 240$; $b_3>84$; в) $\triangle F_{max}=20/3$; $\triangle F_{2\,max}=200/3$; $\triangle F_{3\,max}=0$; $\triangle F_{max}=220/3$. **1.104.** а) $Y^*=(23/4;$

0; 5/4); б) $48{,}8 < b_1 < 244$; $b_2 > 130$; $180 > b_3 > 372$; в) $\triangle F_{1\,max} = -230$; $\triangle F_{2\,max} = 0$; $\triangle F_{3\,max} = 200$; $\triangle F_{max} = -30$; г) целесообразно; д) $X^* = (0;\ 58;\ 24)$, $y^* = (23/4;\ 0;\ 5/4)$. **1.107.** $F_{max} = -29/2$ при $X^* = (3;\ 0;\ 0;\ 1/2)$. **1.108.** $F_{min} = 52$ при $X^* = (8;\ 2;\ 0;\ 0)$. **1.109.** $F_{min} = 12$ при $X^* = (2;\ 0;\ 0;\ 5)$. **1.110.** $F_{max} = -75$ при $X^* = (3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 9;\ 0)$. **1.111.** $F_{max} = 11$ при $X^* = (0;\ 3;\ 10;\ 0;\ 19)$. **1.112.** $F_{max} = 48$ при $X^* = (4;\ 0;\ 4;\ 0;\ 26)$. **1.113.** $F_{max} = 126$ при $X^* = (0;\ 12;\ 0;\ 6)$. **1.114.** $F_{min} = 186$ при $X^* = (0;\ 8;\ 9)$. **1.115.** $F_{min} = 26$ при $X^* = (0;\ 0;\ 0;\ 6{,}5)$. **1.116.** $F_{min} = 550$ при $X^* = (10,\ 0;\ 20;\ 10;\ 0;\ 0)$. **1.117.** $F_{min} = 305{,}6$ при $X^* = (30;\ 0;\ 44;\ 0;\ 20;\ 25;\ 0)$.

Глава 2

2.20. $F_{min} = 500$ при $X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 30 & 40 & 0 & 80 \end{pmatrix}$.

2.21. $F_{min} = 140$ при $X^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.22. $F_{min} = 2240$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 120 & 60 & 0 \\ 110 & 90 & 0 & 20 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$.

2.23. $F_{min} = 780$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.24. $F_{min} = 720$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 70 \\ 10 & 50 & 40 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.25. $F_{min} = 800$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 35 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 125 \end{pmatrix}$.

2.26. $F_{min} = 665$ при $X^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$.

2.27. $F_{\min}=1280$ при $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$.

2.28. $F_{\min}=1675$ при $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 \\ 125 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$.

2.31. $F_{\min}=1480$ при $X^*=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 130 & 80 \\ 70 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 90 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.32. $F_{\min}=1050$ при $X^*=\begin{pmatrix} 80 & 0 & 40 & 60 & 0 \\ 0 & 20 & 80 & 30 & 50 \\ 0 & 60 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.33. $F_{\min}=1920$ при $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 140 & 0 \\ 90 & 110 & 100 & 0 & 60 \\ 0 & 10 & 130 & 40 & 0 \end{pmatrix}$.

2.34. $F_{\min}=1040$ при $X^*=\begin{pmatrix} 0 & 60 & 60 & 0 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 10 & 100 & 20 \end{pmatrix}$.

2.37. На I участке следует засеять 180 га пшеницей и 420 га просом, на II участке — 70 га кукурузой и 110 га ячменем, на III участке — 220 га кукурузой. При этом максимальный сбор зерна равен 22 150 ц. **2.38.** На 1-м филиале изготовляется 4-й вид изделий, на втором — 1-й, на третьем — 3-й и на четвертом — 2-й. **2.39.** Первый завод ежедневно изготовляет 170 т колбасных изделий 1-го вида и 150 т изделий 2-го вида, второй завод — 280 т 1-го вида, третий завод — 220 т 2-го вида и 50 т 3-го вида, четвертый завод — 350 т 3-го вида. **2.42.** $F_{\max}=19$ при $X^*=(0;\ 19)$. **2.43.** $F_{\min}=52$ при $X^*=(2;\ 6)$. **2.44.** $F_{\max}=7$ при $X^*=(3;\ 1;\ 2;\ 3;\ 3)$. **2.52.** $F_{\max}=84$ при $X^*=(12;\ 0;\ 2;\ 108;\ 9)$. **2.53.** $F_{\max}=140$ при $X^*=(0;\ 5;\ 0;\ 10;\ 0;\ 10;\ 0)$. **2.54.** $F_{\max}=1322{,}4$ при $X^*=(10;\ 0;\ 6;\ 0)$. **2.55.** $F_{\max}=7$ при $X^*=(1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$. **2.56.** $F_{\max}=3{,}5$ при $x^*_{11}=x^*_{22}=x^*_{34}=x^*_{43}=1$. **2.57.** $F_{\max}=32{,}7$ при $X^*=(0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 8;\ 1;\ 0;\ 0)$. **2.58.** $F_{\min}=542$ при $X^*=(10;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 1;\ 47;\ 0;\ 3;\ 42;\ 0;\ 4)$. **2.60.** $F_{\max}=744-48t$ при $X^*=(28;\ 0;\ 0;\ 48;\ 38)$, если $t\in(-\infty,\ 7]$; $F_{\max}=352+8t$ при $X^*=(0;\ 0;\ 28;\ 20;\ 24)$, если $t\in[7,\ 8]$; $F_{\max}=416/3+(104/3)t$ при $X^*=(0;\ 20/3;\ 104/3;\ 0;\ 32/3)$; если $t\in[8,\ \infty)$. **2.61.** $F_{\max}=-30-10t$ при $X^*=(0;\ 10;\ 32;\ 0;\ 4)$, если $t\in(-\infty,\ -5{,}5]$; $F_{\max}=25$ при $X^*=(5;\ 0;\ 7;\ 0;\ 9)$; если $t\in[-5{,}5;\ -1{,}5]$; $F_{\max}=40+10t$ при $X^*=(0;\ 0;\ 12;\ 10;\ 24)$, если $t\in[-1{,}5,\ \infty)$. **2.69.** $F_{\max}=6-2t$ при $X^*=(0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0)$, если $t\in(-\infty,$

$-1/2]$; $F_{max}=19/3-(4/3)t$ при $X^*=(1/3;\ 5/3;\ 0;\ 0;\ 0)$, если $t\in[-1/2,\ 7/4]$; $F_{max}=-17+12t$ при $X^*=(2;\ 0;\ 0;\ 0;\ 5)$, если $t\in[7/4,\ \infty)$. **2.70.** $F_{max}=744-48t$ при $X^*=(28;\ 0;\ 0;\ 48;\ 38)$, если $t\in(-\infty,\ 9]$; $F_{max}=312$ при $X^*=(52;\ 24;\ 0;\ 0;\ 2)$, если $t\in(9,\ \infty)$. **2.71.** $F_{max}=198-19t$ при $X^*=(14-2t;\ 34-3t;\ 58-2t;\ 0;\ 0)$, если $t\in(-\infty,\ 7]$; задача неразрешима, если $t\in(7,\ \infty)$. **2.72.** $F_{max}=1-2t$ при $X^*=(0;\ -2-t;\ 3-t;\ 0;\ 3-t)$, если $t\in(\infty,\ -2]$; $F_{max}=-1-3t$ при $X^*=(0;\ 0;\ 1-2t;\ 2+t;\ 3-t)$, если $t\in[-2,\ 1/2]$; задача неразрешима, если $t\in(1/2,\ \infty)$. **2.73.** Задача неразрешима, если $t\in(-\infty,\ -1/14)$; $F_{max}=2+14t+108t^2$ при $X^*=(0;\ 5-6t;\ 17-6t;\ 1+14t;\ 0)$, если $t\in[-1/4;\ 5/6]$; $F_{max}=12+52t+48t^2$ при $X^*=(0;\ 0;\ 12;\ 6+8t;\ -10+12t)$, если $t\in[5/6,\ \infty)$. **2.74.** Задача неразрешима, если $t\in(-\infty,\ -2/3)$; $F_{max}=32+82t+42t^2$ при $X^*=(4+6t;\ 0;\ 0;\ 13-6t;\ 4+3t)$, если $t\in[-2/3,\ -4/11]$; $F_{max}=48+150t+108t^2$ при $X^*=(0;\ 0;\ 4+6t;\ 9-12t;\ 8+9t)$, если $t\in[-4/11,\ -3/13]$; $F_{max}=54+185t+147t^2$ при $X^*=(0;\ 2+3t;\ 0;\ 3-21t;\ 10+12t)$, если $t\in(-3/13,\ 1/7]$; $F_{max}=57+177t+56t^2$ при $X^*=(0;\ 3-4t;\ -2+14t;\ 0;\ 11+5t)$, если $t\in 1/7;\ 3/4]$; $F_{max}=84+201t-24t^2$ при $X^*=(-9+12t;\ 0;\ 13-6t;\ 0;\ 17-3t)$, если $t\in(3/4;\ 13/6]$; задача неразрешима, если $t\in(13/6;\infty)$. **2.75.** $F_{max}=240-20t$ при $X^*=(0;\ 20;\ 0)$, если $t\in[0;\ 5]$; $F_{max}=40+20t$ при $X^*=(20;\ 0;\ 0)$, если $t\in[5;\ 10]$. **2.76.** а) $F_{max}=1115$ при $X^*=(17;\ 15;\ 10)$; б) $150/11\leqslant c_1\leqslant 1296/35$, $109/3\leqslant c_2\leqslant 335/27$; $29/2\leqslant c_3\leqslant 921/20$; в) $b_1\geqslant 121$, $b_2=120$, $b_3=180$, $b_4\doteq 138$. **2.78.** $F_{max}=2$ при $X^*=(6;\ 1)$. **2.79.** $F_{min}=-2/13$ при $X^*=(4;\ 6)$. **2.80.** $F_{max}=27/7$ при $X^*=(5;\ 2/3;\ 0;\ 19;\ 0)$. **2.85.** $F_{max}=1/2$ при $X^*=(0;\ 4;\ 0;\ 0;\ 26)$. **2.86.** $F_{max}=2{,}2$ при $X^*=(4;\ 1;\ 0;\ 8;\ 0)$. **2.87.** $F_{max}=8$ при $X^*=(70;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$. **2.88.** $F_{max}=489/62$ при $X^*=(6{,}8;\ 0;\ 9{,}2;\ 8{,}8;\ 0;\ 0)$. **2.82.** $F_{max}=98/13$ при $X^*=(0;\ 0;\ 0;\ 80;\ 0;\ 440)$. **2.92.** $F_{max}=39{,}5$ при $X^*=(3{,}5;\ 0;\ 9;\ 2)$. **2.93.** $F_{max}=15$ при $X^*=(0;\ 5;\ 0;\ 0)$. **2.94.** $F_{max}=65$ при $X^*=(5;\ 10)$. **2.95.** $F_{max}=260$ при $X^*=(20;\ 0;\ 40;\ 0)$. **2.96.** $F_{max}=87$ при $X^*=(34;\ 9;\ 0;\ 7)$. **2.97.** $F_{max}\approx 112$ при $X^*=(0;\ 20;\ 0;\ 6)$. **2.98.** $F_{max}=960$ при $X^*=(0;\ 140;\ 0;\ 20)$. **2.103.** $U^*=(1/2;\ 1/2)$; $Z^*=(0;\ 0;\ 0;\ 3/4;\ 1/4)$; $v=9/2$. **2.104.** $U^*=(1/3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 2/3)$; $Z^*=(2/3;\ 1/3)$; $v=5$. **2.105.** В общем объеме выпускаемой продукции $\approx 53\ \%$ составляют изделия A и $\approx 47\ \%$ — изделия B. **2.108.** $U^*=(3/5;\ 2/5)$; $Z^*=(1/5;\ 0;\ 4/5)$; $v=23/5$. **2.109.** $U^*=(0;\ 1/3;\ 0;\ 2/3)$; $Z^*=(2/3;\ 1/3)$; $v=7$. **2.110.** $U^*=(0;\ 0;\ 1)$; $Z^*=(0;\ 1;\ 0)$; $v=7$. **2.111.** $U^*=(1/2;\ 1/2;\ 0)$; $Z^*=(3/4;\ 0;\ 0;\ 1/4)$; $v=13/2$.

Глава 3

3.5. $F_{max}=24$ при $X^*=(6;\ 4)$. **3.6.** $F_{min}=16$ при $X^*=(5;\ 4)$. **3.7.** $F_{max}=37$ при $X^*=(5{,}8;\ 4{,}6)$. **3.8.** $F_{max}=12{,}5$ при $X^*=(2{,}5;\ 5)$. **3.14.** $f_{min}=16\frac{53}{64}$ при $X^*=(3\frac{3}{8};\ -1\frac{3}{4};\ 2\frac{3}{8})$. **3.15.** $f_{min}=-56/27$ при $X^*=(-1/3;\ -26/3;\ -28/39)$, $f_{max}=72$ при $X^*=(3;\ -2;\ -12)$. **3.16.** $f_{max}=8$ при $X^*=(2;\ 2;\ 2)$. **3.17.** $f_{min}=43$ при $X_1^*=(-1;\ 3;\ 2)$, $X_2^*=(-1;\ -3;\ -2)$. **3.18.** $f_{min}=4$ при $X_1^*=(2;\ 2;\ 1)$, $X_2^*=(2;\ 1;\ 2)$ и $X_3^*=(1;\ 2;\ 2)$; $f_{max}=112/27$ при $X_1^*=(4/3;\ 4/3;\ 7/3)$, $X_2^*=(4/3;\ 7/3;\ 4/3)$ и $X_3^*=(7/3;\ 4/3;\ 4/3)$. **3.19.** $X^*=(4;\ 6;\ 8)$. **3.20.** $x_1^*=121$;

$x_2^* = 79$. **3.21.** $x_1^* = \frac{b_2}{a_2 + b_2} d + \frac{b_1 - a_1}{2(a_2 + b_1)}$; $x_2^* = \frac{a^2}{a_2 + b_2} \quad \frac{b_1 - a_1}{2(a_2 + b_2)}$. **3.23.** $f_{\min} = 38/15$ при $x_1^* = 8/15$, $x_2^* = 17/15$. **3.24.** $f_{\max} = 65/4$ при $x_1^* = 1/2$, $x_2^* = 4$. **3.25.** $f_{\max} = 16$ при $x_1^* = 0$, $x_2^* = 4$. **3.26.** $f_{\max} = 17/8$ при $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3 = 3/4$. **3.30.** $f_{\max} = 3$ при $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$. **3.31.** $f_{\max} = 16{,}2$ при $X^* = (0;\ 1{,}8;\ 2{,}4)$. **3.32.** Итерационный процесс сходится к точке $X/(3;\ 3)$. **3.33.** Итерационный процесс сходится к точке $X = (2;\ 2)$. **3.34.** Итерационный процесс сходится к точке $X = (0{,}8;\ 0{,}4)$.

Глава 4

4.11. Оборудование следует заменить к началу 3-го и к началу 6-го года. **4.12.** Предприятиям 3 и 4 следует выделить по 40 тыс. руб., а предприятию 2—20 тыс. руб. **4.13.** В склад следует поместить по три единицы оборудования I и III типов. **4.14.** Предприятию следует изготовить во 2-м и 3-м месяце по 4000 изделий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И. Л., Ворончук И. С. Задачи нелинейного и динамического программирования.— Рига: Изд-во ЛГУ, 1983.

2. Ашманов С. А. Линейное программирование.— М.: Наука, 1981.

3. Балашевич В. А. Математические методы в управлении производством.— Минск: Вышэйшая школа, 1976.

4. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования.— М.: Наука, 1965.

5. Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования.— М.: Наука, 1964.

6. Вентцель Е. С. Исследование операций.— М.: Советское радио, 1972.

7. Вильямс Н. Н. Параметрическое программирование в экономике.— М.: Статистика, 1976.

8. Виславский М. Н. Линейная алгебра и линейное программирование.— Минск: Вышэйшая школа, 1966.

9. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения).— М.: Физматгиз, 1961.

10. Гольштейн Е. Г., Юдин Ю. Б. Новые направления в линейном программировании.— М.: Советское радио, 1966.

11. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа.— М.: Наука, 1969.

12. Гуревич Т. Ф., Лущук В. О. Сборник задач по математическому программированию.— М.: Колос, 1977.

13. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и приложения.— М.: Прогресс, 1966.

14. Зайченко Ю. П. Исследование операций.— Киев: Вища школа, 1975.

15. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование.— М.: Наука, 1967.

16. Калихман И. Л. Линейная алгебра и программирование.— М.: Высшая школа, 1967.

17. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию.— М.: Высшая школа, 1975.

18. Калихман И. Л., Войтенко М. А. Динамическое программирование в примерах и задачах.— М.: Высшая школа, 1973.

19. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Математическое оптимальное программирование в экономике.— М.: Знание, 1968.

20. Капустин В. Ф. Практические занятия по курсу математического программирования.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.

21. Карандаев И. С. Решение двойственных задач в оптимальном планировании.— М.: Статистика, 1976.

22. Карманов В. Г. Математическое программирование.— М.: Наука, 1975.

23. Карпелевич Ф. М., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования.— М.: Наука, 1967.

24. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование.— М.: Высшая школа, 1980.

25. Линейное и нелинейное программирование.— Киев: Вища школа, 1975.
26. Нит И. В. Линейное программирование.— М.: Изд-во МГУ, 1978.
27. Пакет прикладных программ «Линейное программирование в АСУ» (ППП ЛП АСУ). Описание применения.— Калинин: Изд-во НПО Центрпрограммсистем, 1978.
28. Пакет прикладных программ «Линейное программирование в АСУ» (ППП ЛП АСУ). Контрольный пример.— Калинин: Изд-во НПО Центрпрограммсистем, 1978.
29. Полунин И. Ф. Курс математического программирования.— Минск: Вышэйшая школа, 1975.
30. Применение пакетов прикладных программ по экономико-математическим методам в АСУ/Под ред. Б. Я. Курицкого.— М.: Статистика, 1980.
31. Сокуренко Ю. А. Пакет прикладных программ — линейное программирование в АСУ (ППП ЛП АСУ).— Л.: ЛИМТУ, 1979.
32. Терехов Л. Л. Экономико-математические методы.— М.: Статистика, 1972.
33. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование.— М.: Мир, 1967.
34. Щедрин Н. И., Кархов А. Н. Математические методы программирования в экономике.— М.: Статистика, 1974.
35. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. К. Линейное программирование. Теория и конечные методы.— М.: Физматгиз, 1963.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Иван Людвигович Акулич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Зав. редакцией Е. С. Гридасова. Редактор А. М. Суходский. Мл. редакторы С. А. Доровских, Н. П. Майкова. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 5851

Изд. № ФМ-845. Сдано в набор 17.01.86. Подп. в печать 14.10.86. Формат 84 × 108/32. Бум. кн.-жур. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 16,8 усл. печ. л. 16,8 усл. кр.-отт. 16,53 уч.-изд. л. Тираж 55 000 экз. Зак. № 227.
Цена 85 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.