$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1 \text{ при } i=j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$$

Сборник задач по линейной алгебре

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}\,'_1 &= \vec{e}_1, \\ \vec{e}\,'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3, \\ \vec{e}\,'_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3. \end{aligned}\right\}$$

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}.$$

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических специальностей высших учебных заведений

Минск
«Вышэйшая школа»
1980

ББК 22.13я73
С23
УДК 512.8 (076)

Рецензенты: кафедра высшей математики Киевского политехнического института (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. *Ф. П. Яремчук*), *В. В. Пугин*, зав. кафедрой высшей математики Могилевского машиностроительного института, канд. физ.-мат. наук.

С23 **Сборник** задач по линейной алгебре: [Учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов]/Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейнман.— Мн.: Выш. школа. 1980.— 192 с. с ил.

В пер.: 50 коп.

Изложен материал по следующим разделам линейной алгебры: матрицы, определители, системы линейных уравнений, линейные пространства и линейные преобразования, квадратичные формы, применение матриц в теории дифференциальных уравнений. В каждом разделе даются краткие сведения по теории, решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения.

Для студентов всех специальностей технических вузов.

$С \frac{20203-025}{М304(05)-80}$ 22—80 1702030000

ББК 22.13я73
517.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время математические методы находят широкое применение в самых различных областях науки и техники. Это предъявляет повышенные требования к математической подготовке инженеров. Весьма актуальными для современного инженера являются вопросы линейной алгебры. В ныне действующей программе по высшей математике для технических вузов раздел линейной алгебры занимает значительное место.

Данное учебное пособие, предназначенное для студентов всех специальностей технических вузов, содержит краткие сведения по теории и задачи по всем вопросам раздела «Линейная алгебра», предусмотренным программой курса «Высшая математика» для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

В учебном пособии шесть глав: «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Линейные пространства», «Линейные отображения», «Квадратичные формы», «Применение матриц к теории дифференциальных уравнений». Краткие теоретические сведения иллюстрируются решениями типовых задач. Дано достаточное количество задач для домашних заданий, проведения практических занятий и контрольных работ. Все задачи, предназначенные для самостоятельного решения, снабжены ответами. Для удобства читателя в начале книги помещен перечень обозначений, которые используются в дальнейшем.

Авторы выражают искреннюю благодарность коллективу кафедры высшей математики Киевского ордена Ленина политехнического института и лично заведующему кафедрой доценту *Ф. П. Яремчуку* за ценные замечания и пожелания, которые способствовали улучшению книги. Авторы также благодарят заведующего кафедрой высшей математики Могилевского машиностроительного института доцента *В. В. Пугина*, сделавшего ряд ценных замечаний при рецензировании пособия. *К. Ф. Беганской, Н. В. Мадорской, Н. Ф. Юранову* и *В. Н. Юранову* авторы выражают благодарность за помощь, оказанную при оформлении рукописи.

Все отзывы и пожелания просим высылать по адресу: 220048, Минск, Парковая магистраль, 11, Дом книги, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\in$ — знак принадлежности.

$\forall$ — для любых.

$\exists$ — существует.

$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел.

$\mathbf{Q}$ — множество всех рациональных чисел.

$\bar{z}$ — число, сопряженное с данным числом z.

V_n — линейное пространство размерности n.

$\mathbf{R}$ — линейное вещественное пространство вещественных чисел.

$\mathbf{C}$ — линейное вещественное (комплексное) пространство комплексных чисел.

$\mathbf{R}_n(x)$ — линейное вещественное пространство, элементами которого являются число 0 и многочлены с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не превышает n.

$\mathbf{C}_n(x)$ — линейное вещественное (комплексное) пространство, элементами которого являются число 0 и многочлены с комплексными коэффициентами, степень каждого из которых не превышает n.

M_3 (M_2) — линейное вещественное пространство свободных векторов, рассматриваемых в аналитической геометрии в пространстве (на плоскости).

$\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{C}^n$) — линейное вещественное (комплексное) пространство, элементами которого являются всевозможные упорядоченные n-ки вещественных (комплексных) чисел. Внутренняя и внешняя операции определены следующим образом: $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)+(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)=(\alpha_1+\beta_1; \alpha_2+\beta_2; \ldots; \alpha_n+\beta_n)$; $\lambda(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)=(\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2; \ldots; \lambda\alpha_n)$. Пространство $\mathbf{R}^n$ будем называть *арифметическим*.

$\mathbf{R}_{m\times n}$ — линейное вещественное пространство вещественных числовых матриц размеров $m\times n$.

$\mathbf{C}_{m\times n}$ — линейное вещественное (комплексное) пространство комплексных матриц размеров $m\times n$.

$\mathbf{F}_{[a;\,b]}$ ($\mathbf{F}_{]a;\,b[}$) — линейное вещественное пространство всех вещественных функций, заданных на $[a; b]$ ($]a; b[$).

$C^k_{[a;\,b]}$ ($C^k_{]a;\,b[}$) — линейное вещественное пространство всех вещественных функций, имеющих непрерывную производную k-го порядка на $[a; b]$ ($]a; b[$).

$N(A)$ — линейное вещественное пространство решений линейной системы $AX=O$, где $A=A_{m\times n}$, $X=X_{n\times 1}$ (аннулируемое простран-

ство матрицы A). В технической литературе это пространство называют *нулевым пространством матрицы* A.

$<\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n>$ — линейное вещественное пространство, элементами которого являются $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{x}_i$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\vec{x}_i \in V$, где V — линейное вещественное пространство. Это пространство будем называть *пространством, натянутым на векторы* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r \in V$, или *линейной оболочкой системы векторов* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_2 \in V$.

$\mathcal{E}_n$ — евклидово пространство размерности n.

$\mathcal{E}_3(\mathcal{E}_2)$ — евклидово пространство свободных векторов, рассматриваемых в аналитической геометрии в пространстве (на плоскости).

$\mathcal{E}^n$ — евклидово пространство, элементами которого являются всевозможные упорядоченные n-ки вещественных чисел. Операция скалярного умножения определена следующим образом: $((\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n), (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$.

$L[a; b]$ — евклидово пространство вещественных функций, непрерывных на $[a; b]$. Операция скалярного умножения введена следующим образом: $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$.

U^n — унитарное пространство, элементами которого являются всевозможные n-ки комплексных чисел. Операция скалярного умножения определена следующим образом: $((\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n), (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n}$.

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Основные определения. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Многочлены от матриц

Матрицей размеров m на n или $m \times n$-матрицей называется прямоугольная таблица

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}, \end{matrix}$$

составленная из mn элементов некоторого множества.

Будем пользоваться следующими обозначениями матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A_{m \times n}, \quad A, \quad (a_{ij}).$$

Элементами матрицы называются элементы множества, из которых она составлена.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ составляют i-ю строку, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ — j-й столбец матрицы; a_{ij} — элемент матрицы, который находится в i-й строке и j-м столбце.

Строки и столбцы матрицы называют ее *рядами*. Под двумя параллельными рядами будем понимать две строки или два столбца матрицы.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m=n$), называется *квадратной. Порядком квадратной матрицы* называется число ее строк (или столбцов).

В квадратной матрице

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ составляют *главную диагональ*.

Матрица, элементами которой являются числа, называется *числовой*. Пока мы будем рассматривать только числовые матрицы, называя их просто матрицами.

Две матрицы называются *равными*, если они одинаковых размеров и элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю. Нулевую матрицу будем обозначать буквой O.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие не на главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Единичную матрицу будем обозначать буквой E.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, *транспонированной данной*. Матрицу, транспонированную матрице A, будем обозначать A^T.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой (разностью) двух матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij})$, $(i=1, 2, \ldots$ $\ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$. Сумма (разность) матриц A и B обозначается $A+B$ $(A-B)$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ *на число* α (или числа α на матрицу $A_{m\times n}$) называется матрица $B_{m\times n}$ такая, что $b_{ij}=\alpha a_{ij}$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$. Произведение матрицы A на число α обозначается $A\alpha$ или αA.

Матрицу $(-1)A$ будем называть матрицей, *противоположной* A, и обозначать $-A$.

Произведение матрицы A на матрицу B вводится только в том случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т. е. если A — матрица размеров $m\times n$, а B — размеров $n\times k$.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ *на матрицу* $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$ такая, что

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}.$$

Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

Из определения следует, что элемент матрицы AB, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Заметим, что если матрицу A можно умножить на матрицу B, то отсюда не следует, что B можно умножить на A.

Целой положительной степенью A^k $(k>1)$ *квадратной матрицы* называется произведение k матриц, каждая из которых равна A. *Нулевой степенью квадратной матрицы* A называется единичная матрица E того же порядка, что и A, т. е. $A^0=E$. Первой степенью матрицы A называется сама матрица A, следовательно, $A^1=A$.

Пусть дан многочлен

$$P(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_k$$

и квадратная матрица A. Выражение

$$P(A)=a_0A^k+a_1A^{k-1}+\ldots+a_kE$$

называется *многочленом от матрицы* A. Если $P(A)$ — нулевая матрица, то A называется *корнем многочлена*.

Пример 1.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}.$$

Выяснить, существуют ли произведения AB и BA, и, если существуют, то найти их.

Решение. Произведение AB не существует, так как число столбцов матрицы A не равно числу строк матрицы B.

Произведение BA существует и

$$BA=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -1\\ 3 & 0\\ -5 & 2\end{bmatrix}.$$

Пример 2. Найти $f(A)$, если $f(x)=2x^3-3x+5$,

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Решение. Подставляя в $f(x)$ вместо x матрицу A и учитывая, что $5=5x^0$, получим

$$f(A)=2A^3-3A+5E=$$

$$=2\begin{bmatrix}11 & 38\\ 57 & 106\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 76\\ 114 & 212\end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix}-3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & 70\\ 105 & 205\end{bmatrix}.$$

Задачи

1. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Найти: а) $3A-2B-C$; б) $2A+4B-3C$.

2. Найти матрицу, транспонированную матрице A:

$$\text{а) } A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 7\\ 0 & 9 & 10\end{bmatrix};\quad \text{б) } A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 5 & 4\end{bmatrix}.$$

3. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & 4\\ -5 & -6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 5 & -6\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}.$$

Найти: а) $3A+B^T$; б) $2A^T+3B$.

4. Для каких матриц $A=A_{m\times n}$ существует $A+A^T$?

5. Найти $3A+2E$, где

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix};$$

E — единичная матрица третьего порядка.

6. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию: а) $3A+2X=E$, где

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 6\\ 4 & 3 & -8\\ 2 & -2 & 5\end{bmatrix};$$

E — единичная матрица третьего порядка; б) $2A-3X=$ $=B$, где

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & 3\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}-5 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

7. Известно, что $A_{3\times 4}B_{4\times 5}=C_{m\times n}$. Найти m и n.

8. Известно, что $A_{2\times 3}B_{m\times n}=C_{2\times 6}$. Найти m и n.

9. Известно, что $A_{2\times m}B_{n\times 3}=A_{2\times 3}$. Найти m и n.

10. Даны матрицы $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 1}$, $C_{3\times 3}$. Существуют ли произведения: а) AB; б) BA; в) AC; г) CA; д) ABC; е) ACB; ж) CB; з) CBA?

В задачах 11—19 найти произведения матриц:

11. $\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 5\\ -1 & 6\end{bmatrix}$. **12.** $\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -6 & 7\end{bmatrix}$.

13. $\begin{bmatrix}1 & -4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$. **14.** $\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4 & 0\\ 5 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

16. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

17. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

20. Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

а) Найти $B = AD$ и $C = DA$; б) указать условия, при которых $AD = DA$.

21. Даны матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найти элемент матрицы AB, стоящий в четвертой строке и втором столбце.

22. Проверить, имеет ли место равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

23. Показать, что если A и B перестановочны, то: а) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$; б) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

24. Даны матрицы

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad BA^T=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Найти $(AB)^T$.

25. Даны матрицы

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 5 \end{bmatrix},\quad A^TB=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Найти $(BA)^T$.

26. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^2$.

27. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$.

28. $\begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}^3$.

29. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^3$.

В задачах 30, 31 для данных A и $f(x)$ найти $f(A)$.

30. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $f(x)=2x^2+3x-4$.

31. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x)=x^5+2x^4-x^3+5x^2+8$.

32. Доказать, что матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

является корнем многочлена $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

33. Доказать, что матрица

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

является корнем многочлена $f(x)=x^3-3x^2+4$.

34. Дано

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix},\ f(x)=x^3-x^2+5x+4,\ \varphi(x)=x^2-2x+1.$$

Найти $2f(A)-3\varphi(A)$.

35. Дано

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ f(x)=x^2-2x+1,\ \varphi(x)=3x+5.$$

Найти $f(A)-2\varphi(A)$.

36. Найти $(f(A))^2$, если

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix},\ f(x)=x+1.$$

1.2. Блочные матрицы. Матрицы Жордана

Разобьем матрицу A горизонтальными и вертикальными прямыми на несколько матриц. Полученные матрицы называются *блоками (клетками) матрицы* A. В технической литературе иногда блоки называют *субматрицами*. Используя блоки, на которые разбита матрица, можно записать ее в виде матрицы, элементами которой являются блоки. В этом случае говорят, что матрица записана в виде *блочной*.

Например, разобьем данную матрицу A на блоки следующим образом:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{array}\right].$$

Тогда матрица A запишется в виде блочной

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ D & F\end{bmatrix},$$

где

$$B=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}a_{14}\\ a_{24}\end{bmatrix};$$

$$D=[a_{31}\ \ a_{32}\ \ a_{33}];\ F=[a_{34}].$$

Эту же матрицу можно представить в виде блочной и другим образом. Например,

$$A=[G\ \ H],$$

где

$$G=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix};\ H=\begin{bmatrix}a_{13} & a_{14}\\ a_{23} & a_{24}\\ a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами и умножение матриц можно свести к соответствующим операциям над блочными матрицами.

Например, пусть существует произведение AB, где A и B — матрицы. Если A и B можно записать в виде блочных

$$A=[A_1A_2],\quad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

так, что A_1B_1, A_2B_2 существуют, то

$$AB=[A_1B_1+A_2B_2].$$

Пример. Даны

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 8 & -12 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти AB.

Решение. Представим A и B в виде блочных следующим образом

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & -12 \end{bmatrix};\quad A_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix};\quad A_3=\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix};$$

$$A_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\quad B_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\quad B_2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1B_1+A_2B_2 \\ A_3B_1+A_4B_2 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$A_4=0,\quad B_1=0,\quad A_2B_2=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},$$

то

$$AB=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица порядка m вида

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{bmatrix},$$

где α — любое число, называется *жордановой клеткой* порядка m соответственно верхнего или нижнего вида и обозначается $J_m(\alpha)$.

Заметим, что при $m=1$ жорданова клетка имеет вид

$$J_1(\alpha)=[\alpha].$$

Матрицей Жордана называется матрица вида

$$\begin{bmatrix} J_{m_1}(\alpha_1) & O & \dots & O \\ O & J_{m_2}(\alpha_2) & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & J_{m_k}(\alpha_k) \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

где $J_{m_i}(\alpha_i)$ $(i=1, 2, \dots, k)$ — жордановы клетки верхнего (нижнего) вида, а O — нулевые матрицы соответствующих размеров. Матрица Жордана (1.1) обозначается

$$[J_{m_1}(\alpha_1), J_{m_2}(\alpha_2), \dots, J_{m_k}(\alpha_k)]. \tag{1.2}$$

Задачи

В задачах 37—40 найти произведение матриц с помощью разбиения их на блоки:

37. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

38. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$

39. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

40. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 15 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

В задачах 41—44 записать в виде матрицы жорданову клетку:

41. $J_2(3)$. **42.** $J_4(1)$. **43.** $J_1(4)$. **44.** $J_5(-2)$.

В задачах 45—54 выяснить, является ли жордановой каждая из следующих матриц, и если является, то записать ее в виде (1.2):

45. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **46.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

47. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **48.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

49. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. **50.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

51. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. **52.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

53. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. **54.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

В задачах 55, 56 найти произведение матриц:

55. $[J_2(2), J_3(1)]\,[J_2(1), J_3(2)]$.

56. $[J_2(1), J_1(2)]\,[J_2(3), J_1(3)]$.

1.3. Определители

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратной матрицы. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

есть числовая матрица. *Определитель (детерминант) матрицы* A — это число, которое ставится в соответствие данной матрице и обозначается

$$\det A,\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По определению,

$$\det A=\begin{cases} a_{11} & \text{при } n=1; \\ \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} & \text{при } n>1, \end{cases}$$

где M_{1j} — определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

Согласно определению,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}a_{22}+(-1)^{1+2}a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+$$

$$+(-)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Пусть дана матрица размеров $m\times n$. Выберем в ней произвольно s строк и s столбцов ($1\leqslant s\leqslant\min(m, n)$, где $\min(m, n)$ — меньшее из чисел m и n). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется *минором порядка s* данной матрицы и обозначается M.

Пусть дана квадратная матрица порядка n и ее минор M порядка s. Минором M', *дополнительным к минору* M, называется определитель матрицы, оставшейся после вычеркивания тех s строк и s столбцов данной матрицы, которые входят в минор M.

Заметим, что дополнительным к минору M' будет минор M.

Алгебраическим дополнением минора называется дополнительный к нему минор, умноженный на $(-1)^{\sigma}$, где σ — сумма номеров строк и столбцов данной матрицы, которые входят в рассматриваемый минор.

Каждый элемент a_{ij} матрицы n-го порядка является минором 1-го порядка. Дополнительный минор является определителем порядка $(n-1)$. Этот дополнительный минор будем называть *минором элемента* a_{ij} и обозначать M_{ij}. Произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ является алгебраическим дополнением элемента a_{ij} и обозначается A_{ij}.

Теорема о разложении определителя по элементам ряда. *Определитель матрицы равен сумме произведений элементов некоторого ряда на алгебраические дополнения этих элементов.*

Теорема Лапласа. *Определитель матрицы порядка n равен сумме произведений всевозможных миноров k-го порядка ($k<n$), которые можно составить из произвольно выбранных k параллельных рядов, на алгебраические дополнения этих миноров.*

2 Зак. 353

Теорема. *Определитель матрицы произведения двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц.*

При вычислении определителей могут быть использованы свойства определителей, теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца, теорема Лапласа, метод приведения к треугольному виду, метод опорного элемента и др.

Метод вычисления определителя путем *приведения к треугольному виду* заключается в том, что, используя свойства определителей, данный определитель приводят к виду

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

который называется *треугольным.* Очевидно, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}.$$

Метод опорного элемента состоит в последовательном применении формулы, выражающей определитель порядка n через определитель порядка $(n-1)$, элементами которого являются определители второго порядка.

Если элемент данного определителя, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, то эта формула имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}. \quad (1.3)$$

Элемент a_{11} в этом случае называется *опорным.* В качестве опорного можно взять любой отличный от нуля элемент данного определителя.

Пример 1. Дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Найти алгебраические дополнения элементов второго столбца.

Решение.

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=13;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=-14;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=10.$$

Пример 2. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Найти алгебраическое дополнение к минору M, стоящему на пересечении первой и третьей строк с третьим и четвертым столбцами.

Решение. Вычеркнем из данной матрицы первую и третью строки, третий и четвертый столбцы. Минор

$$M'=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

является дополнительным минором к минору M. Алгебраическим дополнением к минору M будет

$$(-1)^{1+3+3+4}M'=-\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-4.$$

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

преобразовав его так, чтобы два элемента некоторого ряда равнялись нулю, и разлагая полученный определитель по элементам этого ряда.

Решение. Используя свойства определителей, преобразуем данный определитель следующим образом: к первой строке прибавим вторую, а к третьей — вторую, умноженную на 2. Получим

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель по элементам первого столбца, имеем

$$\Delta = -1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -2.$$

Пример 4. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix},$$

применяя теорему Лапласа.

Решение. Используя третий и четвертый столбцы данного определителя, по теореме Лапласа имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}(-1)^{2+4+3+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -21.$$

Пример 5. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

приведя его к треугольному виду.

Решение. Прибавив ко второй строке первую и к третьей строке — первую, умноженную на (—2), получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе к третьей строке прибавим вторую, умноженную на (—2), и к четвертой строке — вторую, умноженную на (—1). Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавив к четвертой строке этого определителя третью строку, умноженную на (—2), получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, данный определитель приведен к треугольному виду, и, следовательно,

$$\Delta = 1\cdot 2\cdot(-2)\cdot 15 = -60.$$

Пример 6. Вычислить определитель Δ, данный в предыдущем примере, методом опорного элемента.

Решение. По формуле (1.3) имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{1^{4-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Применяя еще раз формулу (1.3), получим

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2^{3-2}}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & -14 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}=-60.$$

Задачи

В задачах 57—62 вычислить указанные определители:

57. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. **58.** $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.

59. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$. **60.** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

61. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. **62.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

63. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найти: а) минор M, стоящий на пересечении первой, второй и четвертой строк, второго, четвертого и пятого столбцов; б) минор, дополнительный к минору M; в) алгебраическое дополнение к минору M.

64. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти: а) минор M, стоящий на пересечении первой, второй и четвертой строк, первого, третьего и четвертого столбцов; б) минор, дополнительный к минору M; в) алгебраическое дополнение к минору M.

65. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Найти алгебраические дополнения элементов третьей строки.

В задачах 66—73 вычислить указанные определители, пользуясь их свойствами:

66. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -8 & 1 \\ 3 & 15 & 18 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 13 & 39 & 1 \end{vmatrix}$. **67.** $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

68. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 9 \\ 13 & -1 & 17 & 4 \end{vmatrix}$. **69.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -15 \end{vmatrix}$.

70. $\begin{vmatrix} 378 & 253 & 127 \\ 377 & 252 & 126 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$. **71.** $\begin{vmatrix} 2789 & 3453 \\ 2790 & 3454 \end{vmatrix}$.

72. $\begin{vmatrix} 181 & 281 \\ 217 & 317 \end{vmatrix}$. **73.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

В задачах 74—77 вычислить определители, используя теорему о разложении определителя по элементам ряда:

74. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. 75. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

76. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 77. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

В задачах 78—80 вычислить определители, используя их свойства и теорему о разложении определителя по элементам ряда:

78. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -15 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. 79. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 3 & -7 \\ 13 & 7 & 4 & -14 \\ 25 & 13 & 7 & -21 \end{vmatrix}$.

80. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$.

1.4. Ранг матрицы

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Если все миноры матрицы равны нулю, то ранг матрицы считается равным нулю.

Ранг матрицы A будем обозначать r или r_A.

Очевидно, что если в матрице A имеется отличный от нуля минор порядка k, а все миноры порядка $k+1$ либо равны нулю, либо не существуют, то $r_A=k$.

Если ранг квадратной матрицы A порядка n равен r, то $n-r$ называют *дефектом матрицы* A. Если A — невырожденная ($\det A \neq 0$), то $r=n$ и дефект матрицы A равен нулю.

Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие:

1) умножение некоторого ряда матрицы на число, отличное от нуля; *

2) прибавление к одному ряду матрицы другого, параллельного ему ряда, умноженного на произвольное число;

3) перестановку местами двух параллельных рядов матрицы.

Если матрица B получена из матрицы A некоторым элементарным преобразованием, а матрица C в свою очередь получена из матрицы B также элементарным преобразованием, то говорят, что матрица C получена из матрицы A последовательным применением этих преобразований.

Если матрица B получена из матрицы A путем элементарного преобразования, то будем писать $A \to B$.

Теорема 1. *Ранг матрицы, полученной из данной элементарными преобразованиями, равен рангу данной матрицы.*

Теорема 2. *Если матрицу A умножить слева или справа на невырожденную матрицу B, то ранг полученной матрицы равен рангу матрицы A.*

Базисным минором матрицы назовем отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Для ненулевой матрицы существует базисный минор (вообще говоря, не единственный).

Пусть для данной матрицы выбран базисный минор. Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются *базисными*.

Если в матрице некоторый ряд может быть представлен в виде суммы других параллельных ему рядов, умноженных соответственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то говорят, что данный ряд является *линейной комбинацией* указанных рядов.

Будем говорить, что l параллельных рядов матрицы *линейно-зависимы*, если хотя бы один из этих рядов является линейной комбинацией остальных. В противном случае параллельные ряды называются *линейно-независимыми*.

Теорема (о базисном миноре). *1. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов). 2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно-независимы.*

Следствие 1. Всякий не базисный ряд матрицы является линейной комбинацией всех параллельных ему рядов этой матрицы.

Следствие 2. Максимальное число линейно-независимых параллельных рядов матрицы равно рангу матрицы.

Следствие 3 (критерий равенства нулю определителя). Для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы некоторый его ряд был линейной комбинацией других параллельных ему рядов.

При вычислении ранга матрицы могут быть использованы элементарные преобразования, метод приведения матрицы к трапециевидной форме, метод окаймляющих миноров и др.

Метод приведения к трапециевидной форме заключается в том, что при помощи элементарных преобразований матриц данная матрица приводится к виду

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1r} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2r} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{rr} & \ldots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

где $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ отличны от нуля. Ранг матрицы B, а следовательно, и ранг данной матрицы равен r, где r — число строк матрицы B, в каждой из которых хотя бы один элемент отличен от нуля.

Минор порядка $k+1$, содержащий в себе минор M порядка k_1, называется *окаймляющим минор* M.

Метод окаймляющих миноров основан на том, что ранг данной матрицы равен порядку такого минора этой матрицы, который отличен от нуля, а все окаймляющие его миноры равны нулю.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & -3 & 21 \\ 4 & 8 & 6 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Решение. Так как среди миноров второго порядка данной матрицы есть отличные от нуля, например минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

а все миноры третьего порядка равны нулю (в этих минорах имеются пропорциональные строки), то $r_A=2$.

Пример 2. Найти ранг и дефект матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 18 \\ 4 & 8 & 12 & 24 \\ -1 & -2 & -1 & -4 \\ 6 & 12 & 18 & 36 \end{bmatrix}.$$

Решение. Для вычисления ранга воспользуемся методом окаймляющих миноров. Среди миноров первого порядка есть отличный от нуля, например 3. Среди окаймляющих его миноров есть отличный от нуля, например

$$M_1=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Среди миноров, окаймляющих M_1, есть отличный от нуля, например

$$M_2=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Так как единственный минор, окаймляющий минор M_2, равен нулю, то $r_A=3$.

Дефект матрицы A равен 1.

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу к трапециевидной форме. Прибавив ко второй строке первую, умноженную на -2, к третьей —

первую, умноженную на -3, к четвертой — первую, умноженную на -1, получим

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Прибавив к третьей строке вторую, умноженную на -1, и поменяв местами в полученной матрице третью и четвертую строки, имеем

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица является трапециевидной ранга 3. Следовательно, $r_A = 3$.

Задачи

В задачах 81—88 найти ранг матрицы и указать один из базисных миноров:

81. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. **82.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$.

83. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. **84.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

85. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{bmatrix}$. **86.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

87. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$. **88.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

В задачах 89—92 найти ранг и дефект матрицы:

89. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. **90.** $\begin{bmatrix} -1 & 10 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$.

91. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 8 & -5 \end{bmatrix}$. **92.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

93. При каких значениях α ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & \alpha & 6 \end{bmatrix}$$

равен 2?

94. При каких значениях α ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & 16 & 24 \\ \alpha & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

равен 3?

95. При каких значениях α ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

равен: а) 1; б) 2; в) 3?

96. При каких значениях α дефект матрицы

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

равен 1?

В задачах 97—100 проверить справедливость неравенств $r_{AB} \leqslant r_A$, $r_{AB} \leqslant r_B$:

97. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

98. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

99. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

100. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1.5. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* квадратной матрице A, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Теорема 1. *Для того чтобы матрица, обратная матрице A, существовала, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.*

Теорема 2. *Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица.*

Матрицу, обратную матрице $A=(a_{ij})$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$, можно найти по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Матрица, обратная матрице A, может быть найдена с помощью элементарных преобразований следующим образом. Пусть (с помощью элементарных преобразований только над строками) матрица

$$|\, A \mid E \,|,$$

где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A, приведена к виду

$$[\, E \mid B \,].$$

Тогда $A^{-1}=B$.

Пример. Выяснить, существует ли матрица, обратная матрице

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

и если существует, то найти ее.

Решение. Так как $\det A=-6\neq 0$, то матрица A невырожденная и A^{-1} существует.

Способ 1. Найдем A^{-1} по формуле (1.4). Алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=-6,\ A_{12}=-2,\ A_{13}=0,$$
$$A_{21}=3,\ A_{22}=2,\ A_{23}=-3,$$
$$A_{31}=0,\ A_{32}=-2,\ A_{33}=0.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Способ 2. Найдем A^{-1} с помощью элементарных преобразований над строками матрицы

$$C=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Прибавив к третьей строке первую, получим

$$C \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Поменяем местами вторую и третью строки. Тогда

$$C \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Прибавив ко второй строке третью, умноженную на —1, получим

$$C \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Умножив вторую строку на 1/3, а третью — на 1/2, имеем

$$C \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right].$$

Вычтем из первой строки третью. Тогда

$$C \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right]$$

и

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = -1/6 \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задачи

В задачах 101—112 найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

101. $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. **102.** $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

103. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. **104.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

105. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$. **106.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

107. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. **108.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

109. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **110.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

111. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **112.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

113. Доказать, что матрицы $A+E$ и $E-A$ невырожденные и взаимно-обратные, если $A^2=O$.

114. Доказать, что матрицы $A+E$ и A^2+E-A невырожденные и взаимно-обратные, если $A^3=O$.

115. Пусть A — квадратная матрица и $A^2-A+E=O$. Доказать, что A — невырожденная, и найти A^{-1}.

116. Известно, что A — невырожденная, B — ненулевая, доказать, что AB — ненулевая.

117. Доказать, что если A, B, C — невырожденные матрицы, то ABC и $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ взаимно-обратные.

В задачах 118—122 найти матрицу X из уравнений:

118. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

119. $X \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

120. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

121. $AX+B=C$, где

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

122. $XA-2B=C$, где

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&0&6\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&5\\-1&-2&1\end{bmatrix}.$$

В задачах 123—127 определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной:

123. $\begin{bmatrix}2&-\lambda&3\\-2&1&-3\\2&7&5\end{bmatrix}.$ **124.** $\begin{bmatrix}\lambda-2&2&3\\0&\lambda-2&2\\0&0&7\end{bmatrix}.$

125. $\begin{bmatrix}0&\lambda&0\\\lambda&0&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}.$ **126.** $\begin{bmatrix}1&\lambda-5&2\\0&1&4\\\lambda&0&0\end{bmatrix}.$

127. $\begin{bmatrix}1&\lambda&4\\0&1&5\\1&1+\lambda&9\end{bmatrix}.$

Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение невырожденных систем линейных уравнений

Система m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *линейной*, если она имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=h_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=h_2; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=h_m, \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

где a_{ij}, h_i $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$ — числа, причем для каждого i имеется хотя бы одно a_{ij}, отличное от нуля.

Матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

называется *матрицей системы*, а матрица

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}h_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}h_m \end{bmatrix},$$

которая получается из матрицы A приписыванием столбца из свободных членов,— *расширенной матрицей системы.*

Систему (2.1) можно записать в матричном виде

$$AX=H,$$

где A имеет вид (2.2);

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\quad H=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Систему (2.1) можно записать также в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1+\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2+\ldots+\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}.$$

Упорядоченная система чисел $(c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_n)$ называется *решением системы* (2.1), если каждое из уравнений (2.1) обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Матрица

$$C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

называется *вектор-решением* данной системы. Матрица C удовлетворяет уравнению $AX=H$.

Система называется *совместной*, если существует хотя бы одно решение этой системы. В противном случае система называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение. Система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной*.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=h_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=h_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=h_n. \end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

Матрица A такой системы является квадратной матрицей порядка n. Определитель этой матрицы

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы* (2.4).

Если определитель системы отличен от нуля, то она называется *невырожденной*, в противном случае система называется *вырожденной*.

Невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (2.5)$$

где Δ_j — определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом из свободных членов системы.

Формулы (2.5) могут быть записаны в матричном виде следующим образом:

$$X=A^{-1}H, \qquad (2.6)$$

где X и H — матрицы-столбцы, имеющие вид (2.3), A^{-1} — матрица, обратная матрице системы.

Метод нахождения решения системы с использованием формулы (2.6) назовем *матричным*.

Пример 1. Записать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_4 &= 5; \\ x_1 + 4x_3 - x_4 &= 0; \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -1 \end{aligned}\right\}$$

в матричном виде.

Решение. Для данной системы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, в матричном виде система запишется так:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Выяснить, является ли система

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -2; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

невырожденной, и если является, то решить ее по формулам Крамера (2.5).

Решение. Так как определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0,$$

то система является невырожденной.

Для того чтобы воспользоваться формулами Крамера (2.5), находим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 36;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Подставляя в (2.5) значения Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, имеем: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Пример 3. Решить матричным методом систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_2 - x_1 \quad &= 8; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 2; \\ -2x_1 - x_2 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Для данной системы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = -1/5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

По формуле (2.6)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 0 & -2/5 \\ 2/5 & 0 & -1/5 \\ 1/5 & 1 & 7/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Задачи

В задачах 128—133 записать в матричной форме каждую из указанных систем линейных уравнений:

128. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 1; \\ 7x_1 + x_3 + 2x_4 &= 2; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

129. $$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -1; \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 2; \\ x_2 - x_4 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

130. $$\left.\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 0; \\ x_1 + 2x_4 + 3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

131. $$\left.\begin{aligned} -2x_1 &= 7; \\ x_1 + 2x_2 &= 5; \\ 3x_1 - 4x_2 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

132. $$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 0; \\ 3x_3 - x_1 &= 2; \\ x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

133. $$\left.\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 1 &= 0; \\ 2x_2 - 2x_1 - 3x_3 &= 0; \\ 4x_1 + x_3 - 5 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

В задачах 134—139 перейти от матричной записи систем к обычной.

134. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

135. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}.$

136. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

137. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$

138. $E_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = O.$

139. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$

В задачах 140—147 решить по формулам Крамера каждую из указанных систем:

140. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+1&=0; \\ 3x_1+4x_2+1&=0. \end{aligned}\right\}$

141. $\left.\begin{aligned} 7x_1-2x_2&=8; \\ 5x_1+3x_2&=19. \end{aligned}\right\}$

142. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3&=4; \\ x_1+x_2+3x_3&=5; \\ 3x_1-4x_2+x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

143. $\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-x_3&=-1; \\ 2x_1+4x_2+3x_3&=3; \\ 3x_1-2x_2+5x_3&=13. \end{aligned}\right\}$

144. $\left.\begin{aligned} 3x_1+4x_2-x_4&=1; \\ 2x_1+x_3&=1; \\ 4x_2+x_3-x_4&=-3; \\ 2x_1-x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

145. $\left.\begin{aligned} 3x_1+x_3&=-3; \\ x_2+x_4&=4; \\ x_1+x_2+x_3+x_4&=3; \\ x_3+x_4&=1. \end{aligned}\right\}$

146. $\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3&=0; \\ 3x_1-2x_2-x_3&=5; \\ x_1+x_2+x_3&=6. \end{aligned}\right\}$

147. $\left.\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=6; \\ 2x_1+3x_2-4x_3&=21; \\ 7x_1-x_2-3x_3&=6. \end{aligned}\right\}$

В задачах 148—151 каждую из указанных систем решить матричным способом:

148. $$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2&=h_1;\\ x_1+2x_2-x_3&=h_2;\\ x_2+x_3&=h_3,\end{aligned}\right\}$$

где: а) $h_1=-1$, $h_2=-2$, $h_3=-2$; б) $h_1=0$, $h_2=-2$, $h_3=-5$; в) $h_1=0$, $h_2=1$, $h_3=0$.

149. $$\left.\begin{aligned} 4x_1+2x_2-x_3&=h_1;\\ x_1+2x_2+x_3&=h_2;\\ x_2-x_3&=h_3,\end{aligned}\right\}$$

где: а) $h_1=0$, $h_2=1$, $h_3=-3$; б) $h_1=12$, $h_2=7$, $h_3=-1$; в) $h_1=h_2=14$, $h=7$.

150. $$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_3+3x_4&=h_1;\\ 2x_2-x_1-x_3-2x_4&=h_2;\\ x_1-x_2+4x_4&=h_3;\\ x_1+2x_2+x_3+3x_4&=h_4,\end{aligned}\right\}$$

где: а) $h_1=0$, $h_2=h_3=2$, $h_4=3$; б) $h_1=0$, $h_2=h_3=-3$, $h_4=-6$; в) $h_1=-5$, $h_2=8$, $h_3=-9$, $h_4=-2$.

151. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=h_1;\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4&=h_2;\\ 2x_2-x_1+3x_4&=h_3;\\ 3x_1+x_2+x_3-x_4&=h_4,\end{aligned}\right\}$$

где: а) $h_1=0$, $h_2=-2$, $h_3=8$, $h_4=-2$; б) $h_1=-3$, $h_2=-4$, $h_3=-1$, $h_4=-5$; в) $h_1=3$, $h_2=7$, $h_3=-2$, $h_4=7$.

2.2. Решение произвольных систем

Теорема Кронекера — Капелли. *Для совместности системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы.*

Базисными неизвестными совместной системы назовем те, коэффициенты при которых образуют базисный минор матрицы системы; остальные неизвестные назовем *свободными*.

Решение системы линейных уравнений производится следующим образом.

1. Находим r_A — ранг матрицы системы и $r_{\tilde{A}}$ — ранг расширенной матрицы. Если $r_A \neq r_{\tilde{A}}$, то система несовместна.

2. Если $r_A = r_{\tilde{A}} = r$, то выделяем базисный минор и базисные неизвестные.

3. Данную систему заменяем равносильной, состоящей из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

4. Если $r = n$, т. е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Если $r < n$, т. е. число базисных неизвестных меньше числа неизвестных системы, то из системы, полученной в пункте 3, находим выражение базисных неизвестных через свободные, используя, например, формулы Крамера. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим бесконечно много решений исходной системы.

Пример. Решить систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+4x_3&=1;\\ 3x_1-x_2+x_3&=2;\\ 5x_1+2x_2+5x_3&=3;\\ x_1-4x_2-3x_3&=1. \end{aligned}\right\}$$

Решение. 1. Находим ранги матриц

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 2 & 5\\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 2\\ 5 & 2 & 5 & 3\\ 1 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получим $r_A = r_{\tilde{A}} = r = 2$. Следовательно, система совместна.

2. В качестве базисного минора можно взять, например, минор

$$M=\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Тогда базисными неизвестными будут x_1 и x_2.

3. Данная система равносильна системе

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+4x_3&=1;\\ 3x_1-x_2+x_3&=2. \end{aligned}\right\}$$

4. В данном случае $r<n$. Запишем последнюю систему в виде

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2&=1-4x_3;\\ 3x_1-x_2&=2-x_3. \end{aligned}\right\}$$

По формулам Крамера находим

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1-4x_3 & 3\\ 2-x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{7x_3-7}{-11};$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-4x_3 \\ 3 & 2-x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{10x_3+1}{-11}.$$

Следовательно, множество решений имеет вид

$$\left\{\left(\frac{7-7c}{11}, \frac{10c+1}{11}, c\right)\middle| \forall c\in\mathbf{R}\right\}.$$

Задачи

В задачах 152—165 исследовать каждую из указанных систем и в случае совместности решить ее.

152. $\left.\begin{aligned} 6x_1+3x_2+4x_3&=3; \\ 3x_1-x_2+2x_3&=5. \end{aligned}\right\}$ **153.** $\left.\begin{aligned} x_1-x_2-x_3+1&=0; \\ 2x_1+x_2-x_3-5&=0. \end{aligned}\right\}$

154. $\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3-2x_4&=1; \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4&=-2. \end{aligned}\right\}$

155. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3-x_4+4&=0; \\ x_2-x_3+x_4+6&=0. \end{aligned}\right\}$

156. $\left.\begin{aligned} x_1-x_2&=3; \\ 2x_1+4x_2&=12; \\ 7x_1-5x_2&=23. \end{aligned}\right\}$ **157.** $\left.\begin{aligned} 3x_1+4x_2-x_3&=7; \\ x_1+2x_2-3x_3&=0; \\ 7x_1+10x_2-5x_3&=2. \end{aligned}\right\}$

158. $\left.\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3+x_4&=1; \\ x_1-2x_2-x_4&=-2. \end{aligned}\right\}$ **159.** $\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2-x_3&=2; \\ 3x_1+4x_2+x_3&=7; \\ 7x_1-2x_2+x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

160. $\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2-3x_3&=-3; \\ x_1+2x_2+4x_3&=9; \\ 2x_1+7x_2-x_3&=0; \\ 3x_1+8x_2-x_3&=1. \end{aligned}\right\}$ **161.** $\left.\begin{aligned} 5x_1+8x_2+3x_3&=11; \\ x_1+3x_2+2x_3&=5; \\ 3x_1+2x_2-x_3&=1; \\ x_1+x_2&=1. \end{aligned}\right\}$

162. $\left.\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3+2x_4&=2; \\ 3x_1-2x_2-x_3-x_4&=-1; \\ 5x_1-3x_2-4x_3-2x_4&=-4; \\ 7x_1-4x_2-7x_3-5x_4&=-7. \end{aligned}\right\}$

163. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+x_4&=2;\\ 7x_1-2x_2+x_4&=3;\\ 3x_1+x_2+x_3-2x_4&=7;\\ 3x_1-8x_2+2x_3-x_4&=5.\end{aligned}\right\}$ **164.** $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2&=-1;\\ 3x_1+4x_2&=-1;\\ 7x_1-x_2&=6;\\ 5x_1+3x_2&=2.\end{aligned}\right\}$

165. $\left.\begin{aligned} 3x_1-2x_2-3x_3&=5;\\ x_1-3x_2+4x_3&=1;\\ 7x_1-7x_2-2x_3&=0.\end{aligned}\right\}$

2.3. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободный член в каждом уравнении равен нулю. Однородная система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=0;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Заметим, что однородная система линейных уравнений является частным случаем системы (2.1). Система (2.7) всегда совместна, так как ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Очевидно, что

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0 \tag{2.8}$$

удовлетворяет системе (2.7).

Решение (2.8) называется *нулевым* или *тривиальным*. Система (2.7), кроме тривиального, может иметь и другие решения (нетривиальные).

Однородная система имеет лишь тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r=n$). В частности, если число уравнений равно числу неизвестных ($m=n$), то для того, чтобы система имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был отличен от нуля.

В случае, когда система имеет бесконечно много решений, из всей их совокупности выделяют так называемую фундаментальную систему решений.

Фундаментальной системой решений системы однородных линейных уравнений называется совокупность максимального числа линейно-независимых вектор-решений.

Фундаментальная система решений существует тогда и только тогда, когда $r<n$, и может быть найдена следующим образом.

Выделяем базисные неизвестные. Не нарушая общности, можно считать базисными неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Выразим их через свободные. Получим

$$\left.\begin{aligned}x_1&=d_{11}x_{r+1}+\ldots+d_{1\ n-r}x_n,\\x_2&=d_{21}x_{r+1}+\ldots+d_{2\ n-r}x_n,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\x_r&=d_{r1}x_{r+1}+\ldots+d_{r\ n-r}x_n.\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

Возьмем $(n-r)^2$ произвольных чисел c_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, n-r)$ таких, что

$$\begin{vmatrix}c_{11} & \ldots & c_{1\ n-r}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n-r\ 1} & \ldots & c_{n-r\ n-r}\end{vmatrix}\neq 0.\tag{2.10}$$

В равенствах (2.9) будем придавать поочередно свободным неизвестным значения, равные соответственно элементам строк определителя (2.10). Полученная таким образом совокупность решений является фундаментальной системой решений. Заметим, что чаще всего определитель (2.10) берут в виде

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}.$$

Соответствующую фундаментальную систему решений в этом случае называют *нормированной.*

Пример. Дана система

$$\left.\begin{aligned}3x_1-x_2+2x_3+\ x_4&=0;\\x_1+x_2-4x_3+2x_4&=0.\end{aligned}\right\}$$

Найти: а) множество решений системы; б) нормированную фундаментальную систему решений.

Решение. а) Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно.

Ранг матрицы системы равен 2. В качестве базисного минора возьмем, например

$$M=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}.$$

Тогда базисными неизвестными будут x_1 и x_2. Запишем систему в виде

$$\left.\begin{aligned}3x_1-x_2&=-2x_3-\ x_4;\\x_1+x_2&=\ \ 4x_3-2x_4.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$x_1=\frac{2x_3-3x_4}{4};\quad x_2=\frac{14x_3-5x_4}{4}.$$

Следовательно, множество решений системы имеет вид

$$\left\{\left(\frac{2c_1-3c_2}{4};\ \frac{14c_1-5c_2}{4};\ c_1;\ c_2\right)\middle|\ \forall\, c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\right\}.\tag{2.11}$$

б) Положив в выражении (2.11) сначала $c_1=1$, $c_2=0$, а затем $c_1=0$, $c_2=1$, получим решения $(1/2;\ 7/2;\ 1;\ 0)$, $(-3/4;\ -5/4;\ 0;\ 1)$, образующие нормированную фундаментальную систему решений.

Задачи

В задачах 166—176 решить однородные системы уравнений:

166. $\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2+\ x_3&=0; \\ 5x_1+4x_2+3x_3&=0; \\ 4x_1+3x_2+2x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

167. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3&=0; \\ x_1-\ x_2+x_3&=0; \\ 5x_1+5x_2-x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

168. $\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2-8x_3+6x_4&=0; \\ x_1-\ x_2+4x_3-3x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

169. $\left.\begin{aligned} 2x_1-\ x_2+x_3&=0; \\ 4x_1-2x_2-x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

170. $\left.\begin{aligned} 2x_1-\ x_2+\ x_3-3x_4&=0; \\ 5x_1-4x_2-\ x_3-8x_4&=0; \\ x_1+\ x_2+2x_3-\ x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

171. $\left.\begin{aligned} 7x_1-4x_2-\ x_3&=0; \\ 3x_1-\ x_2-2x_3&=0; \\ x_1-2x_2+3x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

172. $\left.\begin{aligned} x_1+\ x_2-\ x_3-\ x_4&=0; \\ x_1-\ x_3-5x_4\qquad&=0; \\ x_1+2x_2-\ x_3-3x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

173. $\left.\begin{aligned} 3x_1+4x_2-3x_3&=0; \\ 2x_1-\ x_2+\ x_3&=0; \\ 5x_1+3x_2+3x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

174. $\left.\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3+\ x_4&=0; \\ 7x_1+5x_2-x_3+5x_4&=0; \\ 3x_1+\ x_2-x_3+2x_4&=0; \\ 5x_1+7x_2+x_3+4x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

175. $\left.\begin{aligned} 2x_1-\ x_2+\ x_3&=0; \\ 3x_1+2x_2-3x_3&=0; \\ x_1+3x_2-4x_3&=0; \\ 5x_1+\ x_2-2x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

176. $\left.\begin{aligned} x_1-\ 6x_2-2x_3+x_4+x_5+\ x_6&=0; \\ 3x_1-12x_2-6x_3+x_4+x_5+3x_6&=0; \\ x_1+\ 4x_2-\ x_4+x_5-x_6\qquad&=0; \\ 5x_2+\ \ x_3-\ x_4-x_6\qquad&=0; \\ 3x_2-\ \ x_4-\ x_5\qquad&=0. \end{aligned}\right\}$

В задачах 177—181 найти нормированную фундаментальную систему решений каждой из указанных систем:

177. $\left.\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3+\ x_4&=0; \\ x_1-x_2+5x_3+4x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

178. $\left.\begin{aligned} 3x_1-2x_2+x_3-x_4-\ x_5&=0; \\ 6x_1-4x_2-x_3+x_4-2x_5&=0. \end{aligned}\right\}$

179. $\left.\begin{aligned} x_1+\ x_2-3x_3\qquad&=0; \\ x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4&=0; \\ 2x_1+\ x_2-4x_3+\ x_4&=0; \\ x_1+2x_2-5x_3-\ x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

180. $\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2-\ x_3+\ x_4&=0;\\ x_1-x_2-\ x_3-2x_4&=0;\\ 5x_1-x_2-3x_3-2x_4&=0.\end{aligned}\right\}$

181. $\left.\begin{aligned} 2x_1+\ x_2-x_3+\ x_4&=0;\\ 4x_1+2x_2+x_3-3x_4&=0.\end{aligned}\right\}$

2.4. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса)

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса осуществляется по следующей схеме.

1. Выбираем одно из уравнений системы, в котором коэффициент при одном из неизвестных, например при x_1, отличен от нуля. Производя над уравнениями системы преобразования, которые приводят к равносильной системе, исключаем неизвестное из всех уравнений, кроме выбранного ранее. В этом заключается первый шаг метода Гаусса.

В результате первого шага может получиться такая система, о которой можно сразу сказать, что она несовместна, а следовательно, и данная система также несовместна.

Если полученная система состоит только из одного выбранного нами уравнения, то исходная система имеет одно решение или бесчисленное множество решений в зависимости от того, имеются ли свободные неизвестные. Во всех остальных случаях переходим ко второму шагу.

2. В системе, полученной в результате первого шага, выбираем одно из уравнений (отличное от выбранного в первом шаге), в котором коэффициент при другом неизвестном, например при x_2, отличен от нуля. Исключаем x_2 из всех уравнений, кроме двух выбранных.

Если это нужно, аналогично производим последующие шаги.

После нескольких шагов будет иметь место один из случаев:

а) получится явно несовместная система;

б) получится треугольная система, т. е. система вида

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=h_1;\\ b_{22}x_2+\ldots+b_{2n}x_n&=h_2^{(1)};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\\ c_{n-1\,n-1}x_{n-1}+c_{n-1\,n}x_n&=h_{n-1}^{(n-2)};\\ d_{nn}x_n&=h_n^{(n-1)},\end{aligned}\right\}\qquad(2.12)$$

где $a_{11}b_{22}\ldots c_{n-1\,n-1}d_{nn}\neq 0$.

Система (2.12), а следовательно, и исходная система имеет единственное решение. Так как $d_{nn}\neq 0$, то из последнего уравнения (2.12) x_n определяется единственным образом. Подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, получим единственное значение для x_{n-1}, так как $c_{n-1\,n-1}\neq 0$. Продолжая этот процесс, находим последовательно $x_{n-2}, \ldots, x_1$. Указанный способ нахождения неизвестных называется *обратным ходом метода Гаусса;*

в) получится трапециевидная система, т. е. система вида:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=h_1;\\ a_{22}x_2+\ldots+b_{2n}x_n&=h_2^{(1)};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\\ d_{pp}x_p+\ldots+d_{pn}x_n&=h_p^{(p-1)}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

где $p<n$, $a_{11}b_{22}\ldots d_{pp}\neq 0$.

В системе (2.13) число неизвестных больше числа уравнений. Так как $d_{pp}\neq 0$, то из последнего уравнения этой системы x_p единственным образом выражается через $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Осуществляя обратный ход, выразим единственным образом неизвестные x_{p-1}, $x_{p-2}, \ldots, x_1$ через $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$. Придавая последним произвольные значения $c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots, c_n$, получим бесконечно много решений системы (2.13), а следовательно, и данной системы.

Заметим, что при применении метода Гаусса на практике имеет смысл вместо преобразований системы производить соответствующие преобразования над строками расширенной матрицы системы, т. е. приводить расширенную матрицу системы к трапециевидной с помощью элементарных преобразований над строками.

Пример 1. Решить методом Гаусса систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2-4x_3+5x_4&=-13;\\ 4x_1-6x_2+x_3-x_4&=14;\\ 6x_1-9x_2+x_3+2x_4&=13;\\ 2x_1-3x_2-2x_3-4x_4&=9. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13\\ 4 & -6 & 1 & -1 & 14\\ 6 & -9 & 1 & 2 & 13\\ 2 & -3 & -2 & -4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Прибавив ко второй строке первую, умноженную на (-2), к третьей — первую, умноженную на (-3), к четвертой — первую, умноженную на (-1), получим

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13\\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40\\ 0 & 0 & 13 & -13 & 52\\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{bmatrix}.$$

Разделим третью строку на 13 и поменяем местами вторую и третью строки:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 9 & -11 & 40\\ 0 & 0 & 2 & -9 & 22 \end{bmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (-9), к четвертой — вторую, умноженную на (-2):

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 14 \end{bmatrix}.$$

Разделив вторую строку на (—2), а третью на (—7), имеем

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Этой матрице соответствует система

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2-4x_3+5x_4&=-13; \\ x_3-x_4&=4; \\ x_4&=-2; \\ x_4&=-2. \end{aligned}\right\}$$

Осуществляя обратный ход, находим: $x_4=-2$, $x_3=2$,

$$x_1=\frac{4x_3-5x_4+3x_2-13}{2}=\frac{3x_2+5}{2}.$$

Таким образом, множеством решений будет

$$\left\{\left(\frac{3c+5}{2};\ c;\ 2;\ -2\right)\middle|\ \forall c\in\mathbf{R}\right\}.$$

Пример 2. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+5x_3&=12; \\ x_1-4x_2+3x_3&=-22; \\ 3x_1-x_2-2x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поменяв местами первую и вторую строки, имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Прибавив ко второй строке первую, умноженную на (—2), а к третьей — первую, умноженную на (—3), получим

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 11 & -11 & 66 \end{bmatrix}.$$

Прибавив к третьей строке вторую, умноженную на (-1), получим

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{bmatrix}.$$

Этой матрице соответствует система

$$\left.\begin{aligned} x_1-4x_2+3x_3&=-22; \\ 11x_2-x_3&=56; \\ -10x_3&=10. \end{aligned}\right\}$$

Осуществляя обратный ход, находим: $x_3=-1$, $x_2=5$, $x_1=1$.

Задачи

В задачах 182—189 решить системы методом Гаусса:

182. $\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=6; \\ 2x_1+3x_2-x_3&=4; \\ 3x_1+x_2-4x_3&=0. \end{aligned}\right\}$

183. $\left.\begin{aligned} 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4&=1; \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4&=2; \\ 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4&=3. \end{aligned}\right\}$

184. $\left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2+5x_3&=11; \\ 3x_1-x_2+5x_3&=10; \\ x_1+2x_2-4x_3&=-7. \end{aligned}\right\}$

185. $\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3&=5; \\ x_1-3x_2+3x_3&=7; \\ 5x_1-3x_2+3x_3&=7. \end{aligned}\right\}$

186. $\left.\begin{aligned} 3x_1-2x_2+x_3-x_4&=0; \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4&=0; \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4&=0. \end{aligned}\right\}$

187. $\left.\begin{aligned} x_1+x_2-3x_4-4x_5&=0; \\ x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5&=1; \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4+3x_5&=0. \end{aligned}\right\}$

188. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2-5x_3+x_4-x_5&=0; \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+2x_5&=3; \\ 4x_1+7x_2+x_3+5x_4+3x_5&=1; \\ 5x_1+9x_2+4x_3+7x_4+5x_5&=8. \end{aligned}\right\}$

189. $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2-x_3+x_4+3&=0; \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4-8&=0; \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4-6&=0; \\ -x_1+2x_2+3x_3+5x_4-3&=0. \end{aligned}\right\}$

Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

3.1. Определение линейного пространства и подпространства

Рассмотрим непустое множество V элементов x, y, z, ... и $\mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел.

Пусть задан закон, в силу которого каждой паре x, y элементов множества V ставится в соответствие определенный элемент z этого же множества. В этом случае говорят, что на множестве задана *внутренняя операция*, или *операция сложения*; элемент z называют *суммой* и пишут $x+y=z$.

Кроме того, будем считать, что определена *внешняя операция*, или *операция умножения* элементов множества V на число, т. е. задан закон, в силу которого каждому элементу $x \in V$ и произвольному числу $\alpha \in \mathbf{R}$ ставится в соответствие определенный элемент $z \in V$. Будем называть z *произведением* числа α на элемент x и писать $\alpha x = z$ или $x\alpha = z$.

Предположим, что для введенных операций выполняются следующие аксиомы.

I. $x+y=y+x$, $\forall\, x,\ y \in V$.

II. $(x+y)+z=x+(y+z)=x+y+z$, $\forall\, x,\ y,\ z \in V$.

III. В множестве V существует элемент, который будем называть *нулевым* и обозначать 0, такой, что $x+0=x$, $\forall\, x \in V$.

IV. Для каждого элемента $x \in V$ существует элемент, который будем называть *противоположным элементу* x и обозначать $-x$, такой, что $x+(-x)=0$.

V. $1 \cdot x = x$, $\forall\, x \in V$.

VI. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ и $\forall\, x \in V$.

VII. $\alpha(x+y) = (\alpha x + \alpha y)$, $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$ и $\forall\, x,\ y \in V$.

VIII. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ и $\forall\, x \in V$.

Непустое множество V, в котором определены операции сложения (внутренняя операция) элементов множества и умножения (внешняя операция) элементов множества на произвольные числа из $\mathbf{R}$ и эти операции удовлетворяют указанным выше аксиомам I—VIII, называется *вещественным линейным* или *векторным пространством.*

Если множество образует линейное пространство, то элементы x, y, z, ... этого множества будем называть *элементами пространства* или *векторами* и обозначать $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, ...

Аналогично определяется *комплексное линейное пространство.* В этом случае вместо множества $\mathbf{R}$ берется множество всех комплексных чисел.

В дальнейшем будем часто употреблять термин «линейное пространство», опуская слова «вещественное» или «комплексное» в тех случаях, когда речь будет идти о свойствах, справедливых как для вещественных, так и для комплексных линейных пространств.

Множество V_1 элементов линейного пространства V называется *подпространством* пространства V, если выполняются следующие условия:

1) в множестве V_1 операции сложения элементов и умножения элемента на число определяются так же, как в множестве V;

2) если $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$, то $\vec{x}+\vec{y} \in V_1$;

3) если $\vec{x} \in V_1$, то $\alpha \vec{x} \in V_1$, где α — вещественное число, если V — вещественное пространство, и комплексное, если V — комплексное.

В задачах этой главы будем считать, что для элементов рассматриваемых множеств действия введены так, как это делается в соответствующих разделах математики (если нет специальных указаний).

Пример 1. Выяснить, является ли вещественным линейным пространством множество

$$\mathbf{R}_n(x) = \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \mid a_i \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}.$$

Решение. Элементами данного множества являются число 0 и многочлены от одной переменной x с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не превосходит заданного натурального числа n. При сложении таких многочленов и при умножении многочлена на вещественное число получаются многочлены с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не превосходит n, или число 0, т. е. элементы из $\mathbf{R}_n(x)$. Поэтому эти операции являются операциями на множестве $\mathbf{R}_n(x)$. Условия I—VIII выполняются. Действительно, указанные в I—VIII операции над многочленами сводятся к соответствующим операциям над коэффициентами этих многочленов, т. е. к соответствующим операциям над вещественными числами, для которых I—VIII, как известно, имеют место.

Пример 2. Выяснить, является ли вещественным линейным пространством множество

$$\{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \mid a_i \in \mathbf{R},\ a_0 \neq 0\}.$$

Решение. Элементами данного множества являются многочлены степени n с вещественными коэффициентами. Так как среди многочленов степени n с вещественными коэффициентами имеются такие, сумма которых является вещественным многочленом степени ниже n или нулем, то данное множество не является вещественным линейным пространством.

Пример 3. Выяснить, является ли подпространством пространства $\mathbf{R}_n(x)$ примера 1 множество

$$L = \{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n \mid b_i \in \mathbf{Z}\}.$$

Решение. Множество L не является подпространством пространства $\mathbf{R}_n(x)$, так как при умножении многочлена с целыми коэффициентами на вещественное число может получиться многочлен с дробными коэффициентами, а такой многочлен не является элементом множества L.

Пример 4. Выяснить, является ли подпространством пространства $\mathbf{R}_n(x)$ примера 1 множество

$$M_m=\{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m \mid b_i\in\mathbf{R}\},$$

где $m<n$.

Решение. Очевидно, $\mathbf{R}_n(x)\supset M_m$ и $\vec{x}_1+\vec{x}_2\in M_m$, $\lambda\vec{x}_1\in M_m$, $\forall\,\vec{x}_1, \vec{x}_2\in M_m$ и $\forall\,\lambda\in\mathbf{R}$.

Следовательно, M_m — подпространство пространства $\mathbf{R}_n(x)$.

Задачи

190. Является ли множество $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел: а) вещественным линейным пространством; б) комплексным линейным пространством?

191. Является ли множество $\mathbf{C}$ всех комплексных чисел: а) вещественным линейным пространством; б) комплексным линейным пространством?

192. Является ли множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел: а) вещественным линейным пространством; б) комплексным линейным пространством?

193. Является ли множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел: а) вещественным линейным пространством; б) комплексным линейным пространством?

194. Каким должно быть число a, чтобы множество, состоящее из одного этого числа, являлось вещественным линейным пространством?

195. Является ли комплексным линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной с комплексными коэффициентами: а) степени не выше n; б) степени n; в) степени выше n?

196. Является ли множество $\mathbf{R}_{m\times n}$ всех вещественных матриц размеров $m\times n$: а) вещественным линейным пространством; б) комплексным линейным пространством?

197. Является ли множество $\mathbf{C}_{m\times n}$ всех комплексных матриц размеров $m\times n$: а) вещественным линейным пространством; б) комплексным линейным пространством?

198. Является ли вещественным линейным пространством:

а) множество $\mathbf{F}_{]-\infty;\,+\infty[}$ всех вещественных функций, область определения которых — вся числовая прямая;

б) множество $\mathbf{F}_n$ всех числовых последовательностей (a_n), $a_n\in\mathbf{R}$;

в) множество всех связанных векторов единичной длины;

г) множество всех ограниченных на $[0; 1]$ функций с областью определения $[0; 1]$;

д) множество $C_{]-\infty; +\infty[}$ всех вещественных функций, непрерывных на $]-\infty; +\infty[$;

е) множество $C_{]-\infty; +\infty[}$ всех вещественных функций, имеющих непрерывную производную k-го порядка на $]-\infty; +\infty[$;

ж) множество $C^{\infty}_{]-\infty; +\infty[}$ всех вещественных функций, имеющих непрерывные производные сколь угодно высокого порядка на $]-\infty; +\infty[$;

з) множество всех вращений на плоскости вокруг точки O;

и) множество всех симметрий относительно плоскости Oxy;

к) множество $\mathbf{R}^n = \{\vec{x} = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) \mid \alpha_i \in \mathbf{R}\}$, если определить в $\mathbf{R}^n$ операции следующим образом: $\forall \vec{x} = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, $\vec{y} = (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n) \in \mathbf{R}^n$ и $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ $\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \ldots; \alpha_n + \beta_n)$, $\lambda \vec{x} = (\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2; \ldots; \lambda\alpha_n)$;

л) множество $N(A)$ решений системы линейных однородных уравнений $AX = O$;

м) множество всех вещественных функций, непрерывных во всех точках отрезка $[a; b]$ числовой оси, кроме точки $x_0 \in [a; b]$?

199. Пусть M — множество всех степенных рядов с одним и тем же радиусом сходимости R. При каком R это множество является вещественным линейным пространством?

200. Показать, что множество всех решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами является вещественным линейным пространством.

201. Пусть M — множество всех вещественных матриц вида $[a_1 a_2]$, в котором операция сложения определена обычным способом (как в матричном исчислении), а операция умножения на любое число α определяется равенством

$$\alpha[a_1 a_2] = [a_1 \alpha a_2].$$

Выяснить, является ли множество M вещественным линейным пространством.

202. Доказать, что множество $\left\{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{x}_i \mid \alpha_i \in \mathbf{R},\ \vec{x}_i \in V\right\}$ (V — вещественное линейное пространство) является вещественным линейным пространством. Это пространство называется натянутым на векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r \in V$.

В задачах 203—209 выяснить, является ли подмножество L элементов данного пространства его подпространством:

203. а) $L = \{a_0x^2 + a_1x + a_2 \mid a_i \in \mathbf{R},\ a_0 \neq 0\} \subset \mathbf{R}_5(x)$;

б) $L = \{a_0x^2 + a_1x + a_2 \mid a_i \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}_5(x)$.

204. а) $$L = \left\{\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} \middle| d_i \in \mathbf{R}\right\} \subset \mathbf{R}_{n\times n};$$

б) $$L = \left\{\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} d_i \in \mathbf{R}; \\ d_i \neq 0 \end{matrix}\right\} \subset \mathbf{R}_{n\times n};$$

в) $$L = \left\{\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} \middle| d_i \in \mathbf{R}\right\} \subset \mathbf{C}_{n\times n}.$$

205. а) $$L = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbf{R}\right\} \subset \mathbf{R}_{2\times 2};$$

б) $$L = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbf{R}\right\} \subset \mathbf{R}_{2\times 2};$$

в) $$L = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbf{R};\ bc \neq 0\right\} \subset \mathbf{R}_{2\times 2};$$

г) $$L = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbf{R}\right\} \subset \mathbf{C}_{2\times 2};$$

д) $$L = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbf{R}\right\} \subset \mathbf{R}_{2\times 2}.$$

206. а) $L=\{2n \mid n\in\mathbf{Z}\}\subset\mathbf{R}$;

б) $L=\{2n+1 \mid n\in\mathbf{Z}\}\subset\mathbf{R}$;

в) $L=\{a \mid a\in\mathbf{Z}\}\subset\mathbf{R}$;

207. а) $L=\{(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3) \mid \alpha_i\in\mathbf{R};\ \alpha_i>0\}\subset\mathbf{R}^3$;

б) $L=\{(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3) \mid \alpha_i\in\mathbf{R};\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0\}\subset\mathbf{R}^3$;

в) $L=\{(\alpha_1;\ 0;\ \alpha_3) \mid \alpha_i\in\mathbf{R}\}\subset\mathbf{R}^3$;

г) $L=\{(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3) \mid \alpha_i\in\mathbf{R};\ |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|\neq$ $\neq 0\}\subset\mathbf{R}^3$.

208. а) $L=\{\alpha+\ln(x^2+1) \mid \alpha\in\mathbf{R}\}\subset C_{]-\infty;\ +\infty[}$;

б) $L=\{\ln(x^2+1)^\alpha \mid \alpha\in\mathbf{R}\}\subset C_{]-\infty;\ +\infty[}$;

в) $L=\{f(x) \mid f(1)=2\}\subset C_{]-\infty;\ +\infty[}$;

г) $L=\{f(x) \mid f(3)=0\}\subset C_{]-\infty;\ +\infty[}$;

д) $L=C_{[a;\ b]}\subset\mathbf{F}_{[a;\ b]}$;

е) $L=C^{k+1}_{[a;\ b]}\subset C^{k}_{[a;\ b]}$;

ж) $L=\{f(x) \mid |f(x)|\leqslant 3\}\subset F_{[a;\ b]}$;

з) $L=\left\{f(x) \,\middle|\, \dfrac{df}{dx}=f^2\right\}\subset C^{1}_{]a;\ b]}$.

209. а) $L=\mathcal{E}_2\subset\mathcal{E}_3$;

б) $L=\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}_3$.

210. Дать геометрическую интерпретацию $N(A)$, считая всякий элемент $(x_1;\ x_2;\ x_3)\in N(A)$ радиус-вектором точки M, координаты которой в декартовой прямоугольной системе $Ox_1x_2x_3$ соответственно равны x_1, x_2, x_3.

В задачах 211—216 найти множество $N(A)$ решений системы линейных однородных уравнений $AX=O$ («нулевое» пространство матрицы A):

211. $A=[3\quad 4\quad -1]$.

212. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

213. $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

214. $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

215. $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

216. $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -9 & -6 & 3 \end{bmatrix}$.

В задачах 217—220 найти ненулевой вектор, который принадлежит $<\vec{x}_1, \vec{x}_2> \cap <\vec{x}_3, \vec{x}_4>$, где $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \in \mathbf{R}^3$.

217. $\vec{x}_1=(-1;\ 2;\ 0)$, $\vec{x}_2=(0;\ 1;\ -1)$, $\vec{x}_3=(2;\ 0;\ -1)$, $\vec{x}_4=(1;\ -1;\ 1)$.

218. $\vec{x}_1=(3;\ -1;\ 2)$, $\vec{x}_2=(0;\ 1;\ 3)$, $\vec{x}_3=(-1;\ 0;\ -2)$, $\vec{x}_4=(2;\ 3;\ 1)$.

219. $\vec{x}_1=(-1;\ 0;\ 2)$, $\vec{x}_2=(0;\ -1;\ 0)$, $\vec{x}_3=(1;\ 2;\ -1)$, $\vec{x}_4=(0;\ 1;\ 2)$.

220. $\vec{x}_1=(0;\ 1;\ 4)$, $\vec{x}_2=(-1;\ 2;\ 0)$, $\vec{x}_3=(1;\ 0;\ 1)$, $\vec{x}_4=(-1;\ -2;\ 1)$.

В задачах 221—224 показать, что $<\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k> = <\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_k>$, где $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathbf{R}^m$:

221. $\vec{x}_1=(3;\ -4;\ 2)$, $\vec{x}_2=(2;\ 3;\ -1)$, $\vec{y}_1=(0;\ -17;\ 7)$, $\vec{y}_2=(11;\ -9;\ 5)$.

222. $\vec{x}_1=(2;\ -1;\ 5)$, $\vec{x}_2=(-1;\ 4;\ 3)$, $\vec{y}_1=(1;\ 3;\ 8)$, $\vec{y}_2=(4;\ 5;\ 21)$.

223. $\vec{x}_1=(3;\ 0;\ -2)$, $\vec{x}_2=(0;\ 3;\ 1)$, $\vec{x}_3=(1;\ -2;\ 0)$, $\vec{y}_1=(2;\ 1;\ -1)$, $\vec{y}_2=(1;\ -1;\ -1)$, $\vec{y}_3=(5;\ 1;\ -3)$.

224. $\vec{x}_1=(2;\ 1;\ 4;\ -1)$, $\vec{x}_2=(-1;\ 2;\ -3;\ 5)$, $\vec{y}_1=(3;\ -1;\ 7;\ 4)$, $\vec{y}_2=(0;\ -5;\ 2;\ -9)$.

225. Дать геометрическую интерпретацию $<\vec{x}_1, \vec{x}_2>$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbf{R}^3$, считая $\forall \vec{x}=(\beta_1;\ \beta_2;\ \beta_3) \in <\vec{x}_1, \vec{x}_2>$ радиус-вектором точки M, координаты которой в декартовой прямоугольной системе $Oxyz$ соответственно равны β_1, β_2, β_3.

226. Дать геометрическую интерпретацию задач 217, 223. Решить их методами аналитической геометрии.

3.2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ — векторы (элементы) некоторого линейного пространства V. Вектор

$$\vec{y}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_r\vec{x}_r,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — числа (вещественные, если V — вещественное пространство, и комплексные, если V — комплексное), принадлежит также пространству V и называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — *коэффициентами* этой линейной комбинации. В этом случае также говорят, что вектор $\vec{y}$ линейно выражается через векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$.

Если все коэффициенты линейной комбинации векторов равны нулю, то такая комбинация называется *тривиальной* и представляет собой нулевой вектор.

Если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ отличен от нуля, то комбинация векторов называется *нетривиальной*.

Система векторов называется *линейно-независимой*, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов является нулевым вектором.

Система векторов называется *линейно-зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, которая является нулевым вектором.

Очевидно, что система, состоящая из одного вектора, линейно-зависима, если вектор нулевой, и линейно-независима, если вектор ненулевой.

Два вектора линейного пространства называются *коллинеарными*, если они линейно-зависимы, и *неколлинеарными*, если они линейно-независимы.

Три вектора линейного пространства называются *компланарными*, если они линейно-зависимы, и *некомпланарными*, если они линейно-независимы.

Теорема. *Для того чтобы векторы* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r$ $(r>1)$ *были линейно-зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.*

Пример. Дано пространство $R_3(x)$. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из следующих систем векторов: а) x, x^3; б) $1, x, x^2, x^3, x^3+2x^2+5x-1$.

Решение. а) Система векторов x, x^3 является линейно-независимой, так как при произвольных x $\alpha_1 x+\alpha_2 x^3=0$ только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=0$;

б) система векторов $1, x, x^2, x^3, x^3+2x^2+5x-1$ является линейно-зависимой, так как при произвольных x $\alpha_1\cdot 1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2+\alpha_4 x^3+$ $+\alpha_5(x^3+2x^2+5x-1)=0$ не только тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=$ $=\alpha_5=0$. Действительно, это равенство справедливо, например, при $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=5$, $\alpha_3=2$, $\alpha_4=1$, $\alpha_5=-1$.

Задачи

227. Доказать, что система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ некоторого линейного пространства является линейно-зависимой в каждом из следующих случаев: а) среди векторов системы имеется нулевой; б) среди векторов системы имеются два одинаковых.

228. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из систем векторов в пространстве $R_n(x)$: а) $2, x^2$; б) $x+1, x^2+2$; в) $x, 3x+1$; г) $1, x, 3x^2+4x+1$; д) $(x-1), (x-1)^2, (x-1)^3$.

229. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из систем векторов в пространстве $F_{]-\infty;\,+\infty[}$:

а) $\sin x$, $\cos x$; б) $\sin^2 x$, $\sin x$; в) e^t, e^{3t}; г) 1, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$; д) $\sin 2x$, $\sin 3x$; е) $\sin x$, $\sin^3 x$, $\sin 3x$; ж) $\operatorname{sh} x$, e^x, e^{-x}.

230. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из систем векторов в пространстве $\mathbf{R}^n$: а) (1; 0; 0; 0), (0; 1; 0; 0), (0; 0; a; 0), б) (1; 2; 3; 4), (0; 1; 2; 0), в) (—1; 2; 0; 0), (0; 0; —1; 2), г) (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), д) (1; —2), (—1; 2).

231. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из систем векторов в пространстве $\mathbf{R}_{n\times n}$:

а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

б) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

в) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 14 & 2 \end{bmatrix};$

г) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

д) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$

е) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

232. Выяснить, является ли линейно-независимой каждая из систем векторов в пространстве $\mathcal{E}_3$: а) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$; б) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$; в) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=7\vec{k}$; г) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$; д) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{d}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3.3. Размерность и базис линейного пространства. Координаты вектора

Пусть в линейном пространстве V выполняются следующие условия:

1) существуют n линейно-независимых векторов;
2) любая система $n+1$ векторов линейно-зависима.

Тогда число n называют *размерностью* пространства V.

Если пространство состоит из одного нулевого элемента, то его размерность будем считать равной нулю.

Размерность пространства V будем обозначать $\dim V$ (от французского слова dimension — размерность).

Пространство V размерности n будем называть *n-мерным.*

Базисом n-мерного пространства V называется любая упорядоченная система n линейно-независимых векторов этого пространства.

Если в пространстве V существует n линейно-независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ таких, что любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то пространство является n-мерным, а векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базисом.

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис линейного пространства, то для любого вектора $\vec{x}$ этого пространства существует единственная система чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такая, что

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n.$$

Это выражение будем называть *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *координатами* вектора в этом базисе.

Если вектор $\vec{x}$ имеет в некотором базисе координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то будем писать $\vec{x}\,(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$.

Линейные операции над векторами сводятся к соответствующим операциям над их координатами.

Пусть имеется система векторов

$$\begin{array}{l} \vec{x}_1(a_{11};\ a_{21};\ \ldots;\ a_{1n}); \\ \vec{x}_2(a_{12};\ a_{22};\ \ldots;\ a_{n2}); \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{x}_m(a_{1m};\ a_{2m};\ \ldots;\ a_{nm}) \end{array}$$

n-мерного линейного пространства, координаты которых даны в одном и том же базисе. Поставим в соответствие этой системе векторов матрицу

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

в j-м столбце которой стоят координаты вектора x_j.

Матрицу A будем называть *матрицей системы векторов* $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ в данном базисе.

Для того чтобы m векторов n-мерного линейного пространства были линейно-независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг r матрицы системы векторов был равен m.

Пример. Найти размерность и указать один из базисов линейного пространства решений системы:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_5 &= 0; \\ 4x_1 - 10x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Взяв в качестве базисных неизвестных x_4 и x_5, получим множество решений системы в виде

$$\{(c_1;\ c_2;\ c_3;\ 6c_1 - 15c_2 + 5c_3;\ 2c_1 - 5c_2 + 4c_3) \mid \forall\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\}.$$

Вектор-решения

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},\quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -15 \\ -5 \end{bmatrix},\quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

образуют нормированную фундаментальную систему решений.

Так как эти вектор-решения линейно-независимы и любое вектор-решение данной системы является линейной комбинацией вектор-решения фундаментальной системы, то размерность пространства решений равна 3, а вектор-решения C_1, C_2, C_3 образуют базис.

Задачи

В задачах 233—241 выяснить, какова размерность каждого из указанных линейных пространств, и указать один из базисов:

233. $\mathbf{R}_n(x)$. **234.** $\mathbf{C}_n(x)$. **235.** $\mathbf{R}$. **236.** $\mathbf{R}_{m\times n}$.

237. $\mathbf{R}^n$. **238.** $N(A)$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

239. $\mathcal{E}_2$. **240.** $\mathcal{E}_3$.

241. Линейное пространство всех решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.

242. Указать координаты каждого из данных векторов в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$: а) $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - \vec{e}_5$; б) $\vec{b} = \vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 - \vec{e}_4 + 5\vec{e}_5$; в) $\vec{c} = 7\vec{e}_1 + 3\vec{e}_4$; г) $\vec{d} = \vec{e}_2$.

243. Найти координаты вектора $(2;\ -1;\ 7;\ 10) \in \mathbf{R}^4$ в базисе: а) $(1; 0; 0; 0)$, $(0; 1; 0; 0)$, $(0; 0; 1; 0)$, $(0; 0; 0; 1)$; б) $(0; 0; 1; 0)$, $(0; 1; 0; 0)$, $(0; 0; 0; 1)$, $(1; 0; 0; 0)$.

244. Найти координаты каждого из указанных векторов пространства $\mathbf{R}_3(x)$ в базисе $1, x, x^2, x^3$: а) $4x^3 - x^2 + 5x + 4$; б) $2x - 1$; в) $(x+1)^3$.

245. Найти координаты каждого из указанных векторов пространства $\mathbf{R}_2(x)$ в базисе $1, (x+3), (x+3)^2$: а) $x^2 + 2x + 3$; б) $2x^2 - 5$; в) $3x + 7$.

246. Найти в базисе

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

координаты векторов пространства $\mathbf{R}_{2\times 2}$:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

В задачах 247—250 заданы координаты $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в некотором базисе. Найти координаты вектора $\vec{c}$ в этом же базисе:

247. $\vec{a}\ (2;\ 3;\ -1)$, $\vec{b}\ (0;\ 1;\ 2)$, $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

248. $\vec{a}\ (0;\ -5;\ 4;\ 1)$, $\vec{b}\ (7;\ 2;\ 0;\ -1)$, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

249. $\vec{a}\ (-1;\ 0)$, $\vec{b}\ (2;\ -3)$, $2\vec{a} + 3\vec{c} = \vec{b}$.

250. $\vec{a}\ (2;\ -1;\ 4)$, $\vec{b}\ (1;\ 0;\ -2)$, $5\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

251. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — базис: а) доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют базис; б) найти координаты вектора $\vec{c} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$.

252. Даны векторы $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{c} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$: а) доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис; б) найти координаты вектора $\vec{d} = \vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

253. Выяснить, являются ли векторы, заданные в некотором базисе, линейно-зависимыми: а) $\vec{a}_1(-1;\ 2;\ 0)$, $\vec{a}_2(3;\ 1;\ -1)$, $\vec{a}_3(4;\ 0;\ 2)$; б) $\vec{a}_1(4;\ 5;\ -3)$, $\vec{a}_2(0;\ 1;\ 1)$;

в) $\vec{a}_1(2;\ 1;\ -1)$, $\vec{a}_2(-6;\ 2;\ 0)$, $\vec{a}_3(2;\ -4;\ 2)$; г) $\vec{a}_1(1;\ -1;\ 0;\ 1)$, $\vec{a}_2(2;\ 3;\ -1;\ 0)$, $\vec{a}_3(4;\ 0;\ 0;\ -1)$.

В задачах 254—257 выяснить, является ли вектор $\vec{a}_4$ линейной комбинацией остальных векторов:

254. $\vec{a}_1(-2;1;0)$, $\vec{a}_2(3;-1;1)$, $\vec{a}_3(2;0;-2)$, $\vec{a}_4(1;1;1)$.

255. $\vec{a}_1(1;1;1)$, $\vec{a}_2(2;2;2)$, $\vec{a}_3(0;-1;1)$, $\vec{a}_4(2;-1;3)$.

256. $\vec{a}_1(2;-1;3)$, $\vec{a}_2(4;1;2)$, $\vec{a}_3(6;0;5)$, $\vec{a}_4(-2;-2;1)$.

257. $\vec{a}_1(2;4;3)$, $\vec{a}_2(1;-1;0)$, $\vec{a}_3(3;3;3)$, $\vec{a}_4(-1;2;0)$.

258. В некотором базисе даны векторы: а) $\vec{a}_1(2;\ 1)$, $\vec{a}_2(-1;3)$; б) $\vec{a}_1(2;\ 1)$, $\vec{a}_2(4;\ 2)$. Найти все значения λ, при которых вектор $\vec{b}(1;\ \lambda)$ в том же базисе линейно выражается через векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

В задачах 259—262 даны векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{b}$ в некотором базисе. Найти все значения λ, при которых вектор $\vec{b}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$:

259. $\vec{a}_1(1;\ 2;\ -1)$, $\vec{a}_2(-2;\ 1;\ 3)$, $\vec{a}_3(0;\ 1;\ -1)$, $\vec{b}(1;\ \lambda;\ 2)$.

260. $\vec{a}_1(1;\ -2;\ 3)$, $\vec{a}_2(0;\ -1;\ \lambda)$, $\vec{a}_3(1;\ 0;\ 1)$, $\vec{b}(3;\ -1;\ 2)$.

261. $\vec{a}_1(2;\ 3;\ 0)$, $\vec{a}_2(1;\ 36;\ 0)$, $\vec{a}_3(-1;\ 2;\ 0)$, $\vec{b}(0;\ \lambda;\ 5)$.

262. $\vec{a}_1(1;\ 2;\ 4)$, $\vec{a}_2(2;\ 1;\ 5)$, $\vec{a}_3(3;\ -1;\ 5)$, $\vec{b}(1;\ \lambda;\ \lambda)$.

3.4. Переход от одного базиса к другому

Пусть

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n, \tag{3.1}$$

$$\vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}',\ \ldots,\ \vec{e}_n{}' \tag{3.2}$$

есть два базиса линейного пространства V.

Матрицей перехода от базиса (3.1) к базису (3.2) называется матрица системы векторов $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, ..., $\vec{e}_n{}'$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$.

Матрица перехода от одного базиса к другому является невырожденной.

Если α_1, α_2, ..., α_n — координаты вектора $\vec{x}$ в базисе (3.1), а $\alpha_1{}'$, $\alpha_2{}'$, ..., $\alpha_n{}'$ — координаты этого же вектора в базисе (3.2), то имеет место формула преобразования координат вектора

$$X = TX', \tag{3.3}$$

где

$$X=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix};\quad X'=\begin{bmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{bmatrix};$$

T — матрица перехода от базиса (3.1) к базису (3.2).

Пример 1. Дана матрица

$$T=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$. Найти координаты вектора $\vec{a}=3\vec{e}_1-\vec{e}_2$ в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$.

Решение. Из формулы (3.3) получаем

$$X'=T^{-1}X.$$

Так как

$$T^{-1}=1/7\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix},$$

то

$$X'=1/7\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5/7\\ -11/7\end{bmatrix}.$$

Следовательно, координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$ будут 5/7, −11/7.

Пример 2. Вектор $\vec{a}$ (3; −1; 0) задан координатами в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$, если:

$$\vec{e}_1{}'=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+3\vec{e}_3;$$

$$\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_3;$$

$$\vec{e}_3{}'=2\vec{e}_3-\vec{e}_2.$$

Решение. Матрица

$$T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$.

Пусть α_1', α_2', α_3' — координаты $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$. По формуле (3.3)

$$\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \alpha_3'\end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \alpha_3'\end{bmatrix}=T^{-1}\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Так как

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

то

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix},$$

откуда $\alpha_1'=5$, $\alpha_2'=-7$, $\alpha_3'=-4$.

Задачи

263. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ к базису $\vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2$.

264. В пространстве $R_4(x)$ найти матрицу перехода от базиса $1, x, x^2, x^3$ к базису $1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3$.

265. В пространстве $\mathcal{E}_3$ найти матрицу перехода от базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ к базису $2\vec{i}, 3\vec{j}, -5\vec{k}$.

266. Какая из данных матриц может быть матрицей перехода от одного базиса к другому:

а) $T_1=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$; б) $T_2=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$?

267. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$. Найти координаты $\vec{e}_2{}'$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и координаты $\vec{e}_1$ в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$.

268. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ к базису $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}', \vec{e}_4{}'$. Найти координаты векторов $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}', \vec{e}_4{}'$.

В задачах 269, 270 найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$:

269. $\vec{e}_1{}'=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$; $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1-\vec{e}_2$.

270. $\vec{e}_1=2\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'$; $\vec{e}_2=\vec{e}_1{}'-3\vec{e}_2{}'$.

В задачах 271, 272 найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$:

271. $\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+3\vec{e}_2-4\vec{e}_3$; $\vec{e}_2{}'=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+5\vec{e}_3$; $\vec{e}_3{}'=4\vec{e}_1+5\vec{e}_2+3\vec{e}_3$.

272. $\vec{e}_1=\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'+3\vec{e}_3{}'$; $\vec{e}_2=2\vec{e}_1{}'-\vec{e}_2{}'+4\vec{e}_3{}'$; $\vec{e}_3=3\vec{e}_1{}'+5\vec{e}_3{}'$.

В задачах 273, 274 по координатам вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ найти его координаты в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$:

273. $\vec{x}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$; $\vec{e}_1{}'=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2$; $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$.

274. $\vec{x}=2\vec{e}_1-5\vec{e}_2$; $\vec{e}_1{}'=3\vec{e}_1-4\vec{e}_2$; $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1-\vec{e}_2$.

В задачах 275—277 по координатам вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ найти его координаты в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\ \vec{e}_3{}'$:

275. $\vec{x}\,(-1;\ 2;\ 7)$; $\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3$; $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$; $\vec{e}_3{}'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2-5\vec{e}_3$.

276. $\vec{x}\,(1;\ 2;\ 3)$; $\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$; $\vec{e}_2{}'=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$; $\vec{e}_3{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+5\vec{e}_3$.

277. $\vec{x}\,(3;\ 5;\ -1)$; $\vec{e}_1{}'=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$; $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_3$; $\vec{e}_3{}'=\vec{e}_2-\vec{e}_3$.

В задачах 278—281 показать, что данная система векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ образует базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

278. $\vec{a}_1(1;\ 2)$; $\vec{a}_2(-1;\ 4)$; $\vec{d}(3;\ -7)$.

279. $\vec{a}_1(2;\ -3)$; $\vec{a}_2(5;\ -6)$; $\vec{d}(3;\ -9)$.

280. $\vec{a}_1(1;\ 2;\ 3)$; $\vec{a}_2(-1;\ 4;\ 0)$; $\vec{a}_3(1;\ 0;\ 0)$; $\vec{d}(5;\ 2;\ -6)$.

281. $\vec{a}_1\,(0;\ -1;\ 4)$; $\vec{a}_2\,(3;\ 0;\ -1)$; $\vec{a}_3\,(2;\ 1;\ -2)$; $\vec{d}(-1;\ 0;\ 5)$.

В задачах 282—285 найти матрицу перехода от базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ к базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ по указанным разложениям этих векторов в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$:

282. $\vec{a}_1 = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$; $\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$; $\vec{b}_1 = -4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$; $\vec{b}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$.

283. $\vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$; $\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $\vec{b}_2 = 5\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2$.

284. $\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$; $\vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1$; $\vec{b}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$; $\vec{b}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$; $\vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

285. $\vec{a}_1 = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $\vec{a}_2 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$; $\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $\vec{b}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$; $\vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

3.5. Евклидово пространство

Рассмотрим линейное вещественное пространство V. Наряду с имеющимися в нем операциями (сложением векторов и умножением вектора на число) введем еще одну операцию следующим образом. Каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y}$ этого пространства поставим в соответствие вещественное число, обозначаемое $(\vec{x}, \vec{y})$, так, что $\forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ и $\forall\, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются следующие аксиомы.

I. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$.

II. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$.

III. $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$.

IV. $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0$, причем равенство имеет место только в том случае, когда $\vec{x} = \vec{0}$.

Введенную операцию назовем *скалярным умножением векторов*, а число $(\vec{x}, \vec{y})$ — *скалярным произведением*.

Скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{x})$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{x}$ и обозначается $\vec{x}^2$, т. е. $(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^{\,2}$.

Евклидовым пространством называется линейное вещественное пространство, в котором задана операция скалярного умножения векторов.

Если n-мерное линейное пространство — евклидово, то будем называть его *евклидовым n-мерным пространством*, а базис линейного пространства — *базисом евклидова пространства*.

Длиной (или *модулем*) вектора $\vec{x}$ евклидова пространства называется арифметическое значение квадратного корня из скалярного квадрата вектора $\vec{x}$.

Будем обозначать длину вектора $\vec{x}$ через $|\vec{x}|$. Таким образом,

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}. \tag{3.4}$$

Имеют место следующие свойства.

1. $|\vec{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$.
2. $|\lambda \vec{x}| = |\lambda| |\vec{x}|$, где $\lambda \in \mathbf{R}$.
3. $|(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant |\vec{x}| |\vec{y}|$ (неравенство Коши — Буняковского).
4. $|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (неравенство треугольника).

Угол φ, для которого

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{3.5}$$

назовем *углом между векторами* $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Матрицей Грама системы векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ называется матрица

$$\begin{bmatrix} (\vec{x}_1, \vec{x}_1) & (\vec{x}_1, \vec{x}_2) & \ldots & (\vec{x}_1, \vec{x}_n) \\ (\vec{x}_2, \vec{x}_1) & (\vec{x}_2, \vec{x}_2) & \ldots & (\vec{x}_2, \vec{x}_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\vec{x}_n, \vec{x}_1) & (\vec{x}_n, \vec{x}_2) & \ldots & (\vec{x}_n, \vec{x}_n) \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы называется *определителем Грама* системы векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ и обозначается $\Gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$.

Определитель Грама системы векторов является вещественным неотрицательным числом и обращается в нуль тогда и только тогда, когда система векторов линейно-зависима.

Пример 1. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^2$ паре векторов $\vec{x} = (x_1;\ x_2)$, $\vec{y} = (y_1;\ y_2)$ поставлено в соответствие число $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 x_2 y_1 y_2$.

Является ли данное пространство с введенной таким образом операцией евклидовым?

Решение. Проверим, является ли введенная операция скалярным произведением векторов $\vec{x}, \vec{y}$, т. е. выполняются ли условия I—IV.

Условие I справедливо, так как $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 x_2 y_1 y_2$, $(\vec{y}, \vec{x}) = y_1 y_2 x_1 x_2$.

Условие II не соблюдается, так как для трех векторов $\vec{x}, \vec{y}$, $\vec{z} = (z_1;\ z_2)$ имеем

$$(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) z_1 z_2,$$

$$(\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z}) = x_1 x_2 z_1 z_2 + y_1 y_2 z_1 z_2.$$

Очевидно, что $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) \neq (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$. Следовательно, данное пространство с введенной операцией не является евклидовым.

Пример 2. Пусть в пространстве $\mathbf{R}^2$ паре векторов $\vec{x}=(x_1;\ x_2)$, $\vec{y}=(y_1;\ y_2)$ поставлено в соответствие число $x_1y_1+x_2y_2$.

Выяснить, является ли данное пространство с введенной таким образом операцией евклидовым, и если является, то найти длину вектора $\vec{a}=(-3;\ 2)$, скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}=(0;\ 4)$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Проверим, является ли введенная операция скалярным произведением векторов. Условие I справедливо, так как

$$(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+x_2y_2,\quad (\vec{y},\vec{x})=y_1x_1+y_2x_2.$$

Условие II также выполняется. Действительно, для трех векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}=(z_1;\ z_2)$ имеем

$$(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=(x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2,$$

$$(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z})=(x_1z_1+x_2z_2)+(y_1z_1+y_2z_2)=$$
$$=(x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2.$$

Так как

$$(\lambda\vec{x},\vec{y})=\lambda x_1y_1+\lambda x_2y_2=\lambda(x_1y_1+x_2y_2)=\lambda(\vec{x},\vec{y}),$$

то условие III выполняется.

Условие IV также выполняется, так как

$$(\vec{x},\vec{x})=x_1^2+y_1^2\geqslant 0,$$

причем равенство имеет место только тогда, когда $x_1=x_2=0$, т. е. $\vec{x}=\vec{0}$.

Таким образом, введенная операция является скалярным произведением векторов, а рассматриваемое пространство — евклидовым.

Длину вектора $\vec{a}$ находим по формуле (3.4):

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}.$$

Скалярное произведение

$$(\vec{a},\vec{b})=(-3)\cdot 0+2\cdot 4=8.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находим по формуле (3.5):

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{8}{\sqrt{13}\cdot 4}=\frac{2}{\sqrt{13}};$$

$$\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

5 Зак. 553

Задачи

286. Является ли евклидовым пространство $\mathbf{R}^n$, если паре векторов $\vec{x}=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, $\vec{y}=(y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n)$ поставлено в соответствие число: а) $x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$; б) $(x_1+x_2+\ldots+x_n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)$?

287. Является ли евклидовым пространством множество всех функций вида $a_k \cos kx+b_k \sin kx$, где k — любое натуральное число; a_k, b_k — любые вещественные числа, если каждой паре функций $a_n \cos nx+b_n \sin nx$, $a_m \cos mx+b_m \sin mx$ поставлено в соответствие число

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(x)\,(a_n \cos nx+b_n \sin nx)\,(a_m \cos mx+b_m \sin mx)\,dx,$$

где $\rho(x)$ — фиксированная положительная непрерывная на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ функция?

288. Является ли евклидовым пространство $C_{[a;\ b]}$ $(a<b)$, если каждой паре функций $f(x)$, $g(x)$ этого пространства поставлено в соответствие число: а) $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$; б) $\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,dx$, где $\rho(x)$ — фиксированная положительная непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция?

289. Даны векторы евклидова пространства $\mathcal{E}^n$. Найти длины векторов, скалярное произведение векторов и угол между ними: а) $\vec{a}=(1;\ -2;\ 3)$, $\vec{b}=(3;\ 0;\ -4)$; б) $\vec{a}=(1;\ -3;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}=(0;\ 5;\ -12;\ 0)$; в) $\vec{a}=(4;\ -2;\ 1;\ 2)$, $\vec{b}=(1;\ 3;\ -5;\ -1)$; г) $\vec{a}=(1;\ 1;\ \ldots;\ 1)$, $\vec{b}=(\alpha;\ \alpha;\ \ldots;\ \alpha)$, если $\alpha\neq 0$.

290. В евклидовом пространстве, рассмотренном в задаче 287, положив $\rho(x)=1$, найти: а) длину вектора $\cos x+\sin x$; б) скалярное произведение векторов $\sin 2x$, $\sin 3x$; в) угол между векторами $\sin x$ и $\cos x$.

291. В евклидовом пространстве, рассмотренном в задаче 288, найти: а) длину вектора $f(x)=x$; б) скалярное произведение векторов $f(x)=x$, $g(x)=e^x$; в) угол между векторами $f(x)=1$, $g(x)=x$; д) записать неравенство Коши — Буняковского для функций $f(x)$, $g(x)$ этого пространства; д) записать неравенство треугольника.

3.6. Ортонормированный базис. Взаимные базисы

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ называется *ортогональной*, если эти векторы попарно ортогональны, т. е. $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0$ при $i \neq j$.

Вектор $\vec{x}$ называется *нормированным* или *единичным*, если $|\vec{x}| = 1$.

Если $\vec{x}$ — ненулевой вектор, то

$$\vec{x}^{\,0} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \tag{3.6}$$

а также

$$\vec{x}_1^{\,0} = \frac{\vec{x}}{-|\vec{x}|} \tag{3.7}$$

есть нормированные векторы.

Нахождение для данного вектора нормированного по формуле (3.6) или (3.7) называется *нормированием данного вектора*.

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ $(n \geqslant 2)$ называется *ортонормированной*, если она ортогональна, и каждый вектор является нормированным, т. е. если

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j; \\ 1 \text{ при } i = j, \end{cases} \quad \text{где } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ — ортогональная система ненулевых векторов, то система, полученная из данной нормированием каждого вектора, также является ортогональной.

Базис евклидова n-мерного пространства называется *ортонормированным*, если базисные векторы составляют ортонормированную систему.

Во всяком евклидовом n-мерном пространстве $(n \geqslant 2)$ существует ортонормированный базис.

Процесс построения по данному базису ортонормированного базиса называется *ортогонализацией* данного базиса.

Процесс ортогонализации можно произвести следующим образом.

1. По данному базису $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ находим ортогональный базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$, используя соотношения

$$\vec{f}_1 = \vec{g}_1, \; \vec{f}_k = \vec{g}_k + \lambda_1^{(k)} \vec{f}_1 + \lambda_2^{(k)} \vec{f}_2 + \ldots + \lambda_{k-1}^{(k)} \vec{f}_{k-1}, \; 1 < k \leqslant n, \tag{3.8}$$

где

$$\lambda_j^{(k)} = -\frac{(\vec{f}_j, \vec{g}_k)}{|\vec{f}_j|^2}, \; j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{3.9}$$

2. Нормируем каждый из полученных векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n$, т. е. находим векторы

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|}, \ldots, \vec{e}_n = \frac{\vec{f}_n}{|\vec{f}_n|}.$$

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ образуют ортонормированный базис.

Если векторы заданы координатами в ортонормированном базисе, то их скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат.

Замечание. Пусть

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n; \tag{3.10}$$

$$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}' \tag{3.11}$$

есть два ортогональных базиса, $T = (t_{ij})$ — матрица перехода от базиса (3.10) к базису (3.11), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\alpha_1{}', \alpha_2{}', \ldots, \alpha_n{}'$ — координаты вектора $\vec{x}$ соответственно в базисах (3.10) и (3.11). Тогда имеют место следующие соотношения

$$\alpha_i{}' = \frac{(\vec{x}, \vec{e}_i{}')}{(\vec{e}_i{}', \vec{e}_i{}')} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k t_{ki}}{\sum\limits_{k=1}^{n} t_{ki}^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Два базиса (3.10) и (3.11) евклидова пространства называются *взаимными*, если

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j{}') = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ при } i=j; \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \tag{3.12}$$

Символ δ_i^j называется *символом Кронекера.*

Если выполнено условие (3.12), то будем говорить, что базис (3.10) является взаимным для базиса (3.11), а базис (3.11) — взаимным для базиса (3.10).

В евклидовом пространстве для любого базиса существует единственный взаимный.

Пример 1. В евклидовом пространстве $\mathcal{E}^n$ дан базис $\vec{g}_1 = (3;\ 1;\ 2)$, $\vec{g}_2 = (1;\ 1;\ 1)$, $\vec{g}_3 = (0;\ 2;\ 3)$. По этому базису построить ортонормированный базис.

Решение. 1. По данному базису $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ найдем ортогональный базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, используя соотношения (3.8), (3.9). Имеем

$$\vec{f}_1 = \vec{g}_1 = (3;\ 1;\ 2), \quad \vec{f}_2 = \vec{g}_2 + \lambda_1^{(2)} \vec{f}_1,$$

где

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(\vec{f}_1, \vec{g}_2)}{|\vec{f}_1|^2} = -\frac{3}{7}.$$

Следовательно,

$$\vec{f}_2=(-2/7;\ 4/7;\ 1/7).$$

Вектор

$$\vec{f}_3=\vec{g}_3+\lambda_1^{(3)}\vec{f}_1+\lambda_2^{(3)}\vec{f}_2,$$

где

$$\lambda_1^{(3)}=-\frac{(\vec{f}_1,\ \vec{g}_3)}{|\vec{f}_1|^2}=-\frac{4}{7};\quad \lambda_2^{(3)}=-\frac{(\vec{f}_2,\ \vec{g}_3)}{|\vec{f}_2|^2}=-\frac{11}{3}.$$

Таким образом,

$$\vec{f}_3=(0;\ 2;\ 3)-4/7(3;\ 1;\ 2)-11/3(-2/7;\ 4/7;\ 1/7)=$$
$$=(-2/3;\ -2/3;\ 4/3).$$

Векторы

$$\vec{f}_1=(3;\ 1;\ 2),\ \vec{f}_2=(-2/7;\ 4/7;\ 1/7),\ \vec{f}_3=(-2/3;\ -2/3;\ 4/3)$$

образуют ортогональный базис.

2. Пронормируем базисные векторы, т. е. найдем векторы

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|},\ \vec{e}_2=\frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|},\ \vec{e}_3=\frac{\vec{f}_3}{|\vec{f}_3|}.$$

Так как

$$|\vec{f}_1|=\sqrt{14},\ |\vec{f}_2|=\sqrt{21}/7,\ |\vec{f}_3|=2\sqrt{6}/3,$$

то

$$\vec{e}_1=(3/\sqrt{14};\ 1/\sqrt{14};\ 2/\sqrt{14});\ \vec{e}_2=(-2/\sqrt{21};\ 4/\sqrt{21};\ 1/\sqrt{21});$$
$$\vec{e}_3=(-1/\sqrt{6};\ -1/\sqrt{6};\ 2/\sqrt{6}).$$

Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют ортонормированный базис.

Пример 2. В пространстве $\mathcal{E}^3$ найти взаимный базис для базиса $\vec{e}_1=(1;\ 1;\ 1)$, $\vec{e}_2=(0;\ 1;\ 1)$, $\vec{e}_3=(0;\ 0;\ 1)$.

Решение. Пусть $\vec{e}_1{}'=(\alpha_1;\ \beta_1;\ \gamma_1)$; $\vec{e}_2{}'=(\alpha_2;\ \beta_2;\ \gamma_2)$; $\vec{e}_3{}'=(\alpha_3;\ \beta_3;\ \gamma_3)$ — базис, взаимный для данного. Тогда, согласно (3.12) и учитывая, что

$$(\vec{e}_i{}',\ \vec{e}_j{}')=\alpha_i\alpha_j+\beta_i\beta_j+\gamma_i\gamma_j,$$

получаем систему

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+\beta_1+\gamma_1&=1;\\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2&=0;\\ \alpha_3+\beta_3+\gamma_3&=0;\\ \beta_1+\gamma_1&=0;\\ \beta_2+\gamma_2&=1;\\ \beta_3+\gamma_3&=0;\\ \gamma_1&=0;\\ \gamma_2&=0;\\ \gamma_3&=1,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\alpha_1=1,\ \beta_1=0,\ \gamma_1=0;$$
$$\alpha_2=-1,\ \beta_2=1,\ \gamma_2=0;$$
$$\alpha_3=0;\ \beta_3=-1,\ \gamma_3=1.$$

Таким образом, базис $\vec{e}_1{}'=(1;\ 0;\ 0)$; $\vec{e}_2{}'=(-1;\ 1;\ 0)$; $\vec{e}_3{}'=(0;\ -1;\ 1)$ является взаимным для данного.

Задачи

292. Выяснить, являются ли ортогональными в евклидовом пространстве $\mathcal{E}^2$ следующие системы векторов: а) (1; 0; 0), (0; 2; 3); б) (0; 1; 1), (0; —1; 3); в) (1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 3); г) (1; 1; 2), (—1; —1; 1), (2; 2; —2).

293. Установить, образует ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}^4$: а) (2; 0; 0; 0), (0; 3; 0; 0), (0; 0; 0; 5); б) (2; 0; 0; 0), (0; 3; 0; 0), (0; 0; 0; 5), (0; 0; —1; 0); в) (—1; 2; 0; 0), (2; —1; 1; 1), (—2; —1; 3; 0), (0; 1; 1; 1); г) (1/2; 1/2; 1/2; 1/2), (1/2; 1/2; —1/2; —1/2), (1/2; —1/2; 1/2; —1/2), (1/2; —1/2; —1/2; 1/2).

294. Даны векторы $\vec{x}_1=(1;\ 0;\ 0)$, $\vec{x}_2=(1;\ -3;\ 2)$, $\vec{x}_3=(0;\ -1;\ 0;\ 0)$, $\vec{x}_4=(12/13;\ 0;\ 5/13)$, $\vec{x}_5=(2;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1)$, $\vec{x}_6=(3/5;\ 4/5)$ в пространстве $\mathcal{E}^n$. Выяснить, какие из них являются нормированными.

295. Пронормировать следующие векторы, заданные координатами в ортонормированном базисе: а) (—1; 1; 1); б) (0; 2; 0; 3); в) (3; 0; 4); г) (12; 0; 0; 5).

296. Выяснить, какие из данных систем векторов являются ортогональными в евклидовом пространстве $L[-1;\ 1]$: а) x, x^2; б) x, x^3; в) 1, $\sin\pi x$, $\cos\pi x$, $\sin 2\pi x$, $\cos 2\pi x, \ldots, \sin n\pi x$, $\cos n\pi x$.

297. В евклидовом пространстве $L[-1;\ 1]$ пронормировать следующие векторы: а) x; б) x^2; в) $\sin x$.

298. В евклидовом пространстве $\mathcal{E}^3$ по данному базису построить ортонормированный: а) $\vec{g}_1=(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{g}_2=(0;2;0)$, $\vec{g}_3=(0;0;3)$; б) $\vec{g}_1=(1;0;0)$, $\vec{g}_2=(0;1;-1)$, $\vec{g}_3=(1;\ 1;\ 1)$.

299. В евклидовом пространстве $\mathcal{E}^4$ по данному базису построить ортонормированный: а) $\vec{g}_1=(1;\ 1;\ 0;\ 0)$, $\vec{g}_2=(0;\ 0;\ 1;\ 1)$, $\vec{g}_3=(1;\ 0;\ 1;\ 1)$, $\vec{g}_4=(0;\ 1;\ 0;\ -1)$;

б) $\vec{g}_1=(1;\ 0;\ 1;\ 2)$, $\vec{g}_2=(-1;\ 0;\ -1;\ 0)$, $\vec{g}_3=(0;\ 0;\ 2;\ 1)$, $\vec{g}_4=(0;\ 1;\ 1;\ 1)$.

300. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше первой, рассматриваемых на отрезке $[-1;\ 1]$ (операция скалярного умножения введена так, как в $L[-1;\ 1]$), по данному базису $\vec{g}_1=1$, $\vec{g}_2=x$ построить ортонормированный.

В задачах 301—303 проверить, что следующие системы векторов пространства $\mathcal{E}^4$ попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

301. $(1;\ -2;\ 0;\ 1)$, $(0;\ 1;\ 0;\ 2)$.

302. $(2;\ 2;\ 1;\ 0)$, $(2;\ -3;\ 2;\ 4)$.

303. $(3;\ -1;\ 1;\ 1)$, $(-1;\ -1;\ 1;\ 1)$.

304. Даны векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, образующие ортогональный базис. Найти $(\vec{x}, \vec{y})$ и $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$, если: а) $\vec{x}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2+4\vec{e}_3$, $\vec{y}=\vec{e}_1+\vec{e}_2-5\vec{e}_3$; $|\vec{e}_1|=1$, $|\vec{e}_2|=2$, $|\vec{e}_3|=2$; б) $\vec{x}=\vec{e}_1+4\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\vec{y}=\vec{e}_3-\vec{e}_1$; $|\vec{e}_1|=3$, $|\vec{e}_2|=2$, $|\vec{e}_3|=1$; в) $\vec{x}=4\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{y}=\vec{e}_1+3\vec{e}_3$; $|\vec{e}_1|=5$, $|\vec{e}_2|=1$, $|\vec{e}_3|=2$.

305. Даны векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5$, образующие ортонормированный базис. Найти $(\vec{x}, \vec{y})$ и $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$, если: а) $\vec{x}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_5$, $\vec{y}=3\vec{e}_2+\vec{e}_3-\vec{e}_4+2\vec{e}_5$; б) $\vec{x}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2-3\vec{e}_3$; $\vec{y}=\vec{e}_5-2\vec{e}_3$; в) $\vec{x}=5\vec{e}_1-3\vec{e}_2+4\vec{e}_4+\vec{e}_3$, $\vec{y}=2\vec{e}_2-\vec{e}_3+\vec{e}_4$.

306. Даны векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$, образующие ортогональный базис. Найти угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если: а) $\vec{x}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4$, $\vec{y}=\vec{e}_2+2\vec{e}_3-\vec{e}_4$; $|\vec{e}_1|=3$, $|\vec{e}_2|=2$, $|\vec{e}_3|=1$, $|\vec{e}_4|=2$; б) $\vec{x}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{y}=\vec{e}_2+\vec{e}_3-\vec{e}_4$; $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=3$, $|\vec{e}_3|=3$, $|\vec{e}_4|=\sqrt{2}$; в) $\vec{x}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3+\vec{e}_4$, $\vec{y}=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2-3\vec{e}_3+\vec{e}_4$; $|\vec{e}_1|=1$, $|\vec{e}_2|=2$, $|\vec{e}_3|=3$, $|\vec{e}_4|=1$; г) $\vec{x}=\vec{e}_1-\vec{e}_2-4\vec{e}_4$, $\vec{y}=\vec{e}_1+2\vec{e}_3+\vec{e}_4$; $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=3$, $|\vec{e}_3|=1$, $|\vec{e}_4|=1$.

307. Даны векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, образующие ортонормированный базис. Найти угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если: а) $\vec{x}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2+3\vec{e}_3$, $\vec{y}=\vec{e}_2-4\vec{e}_1$; б) $\vec{x}=3\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\vec{y}=4\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3$; в) $\vec{x}=5\vec{e}_1+\vec{e}_3$, $\vec{y}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

В задачах 308—310 по заданному в пространстве $\mathcal{E}^n$ базису найти взаимный:

308. $\vec{e}_1=(2; 3)$, $\vec{e}_2=(1; 1)$.

309. $\vec{e}_1=(2; 1; 0)$, $\vec{e}_2=(0; 2; -1)$, $\vec{e}_3=(1; 0; 1)$.

310. $\vec{e}_1=(0; 1; 1)$, $\vec{e}_2=(1; 1; 0)$, $\vec{e}_3=(1; 1; 1)$.

311. Доказать, что если базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — ортонормированный, то взаимный ему базис совпадает с данным.

3.7. Унитарные пространства

Пусть V — комплексное линейное пространство. Наряду с имеющимися в этом пространстве операциями (сложения векторов и умножения вектора на число) введем еще одну операцию следующим образом. Каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y}$ этого пространства поставим в соответствие комплексное число, обозначаемое $(\vec{x}, \vec{y})$, так что для $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ и $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ выполняются следующие условия (аксиомы).

I. $(\vec{x}, \vec{y})$ и $(\vec{y}, \vec{x})$ — сопряженные комплексные числа, т. е. $(\vec{x}, \vec{y})=\overline{(\vec{y}, \vec{x})}$.

II. $(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z})=(\vec{x}, \vec{z})+(\vec{y}, \vec{z})$.

III. $(\lambda\vec{x}, \vec{y})=\lambda(\vec{x}, \vec{y})$.

IV. $(\vec{x}, \vec{x})\geqslant 0$, причем равенство имеет место только в том случае, когда $\vec{x}=\vec{0}$.

Введенную операцию назовем *скалярным умножением* векторов в комплексном пространстве, а число $(\vec{x}, \vec{y})$ — *скалярным произведением*.

Унитарным называется линейное комплексное пространство, в котором задана операция скалярного умножения векторов.

Понятия *длины (модуля) вектора* и *ортогональности векторов* в унитарном пространстве вводятся так же, как соответствующие понятия в евклидовом пространстве, причем соответствующие обозначения сохраняются.

Пример 1. Пусть в пространстве $\mathbf{C}^2$ паре векторов $\vec{x}=(x_1; x_2)$, $\vec{y}=(y_1; y_2)$ поставлено в соответствие число $(\vec{x}, \vec{y})=x_1y_1+x_2y_2$. Является ли данное пространство с введенной таким образом операцией унитарным пространством?

Решение. Проверим, является ли введенная операция скалярным умножением векторов, т. е. выполняются ли условия I—IV. Условие I не соблюдается. Действительно,

$$(\vec{x}, \vec{y})=x_1y_1+x_2y_2,\ (\vec{y}, \vec{x})=y_1x_1+y_2x_2,\ \overline{(\vec{y}, \vec{x})}=$$
$$=\overline{y_1x_1+y_2x_2}=\overline{y_1x_1}+\overline{y_2x_2}=\bar{y}_1\bar{x}_1+\bar{y}_2\bar{x}_2.$$

Следовательно, $(\vec{x}, \vec{y})\neq\overline{(\vec{y}, \vec{x})}$ и рассматриваемое пространство не является унитарным.

Пример 2. Пусть в пространстве $\mathbf{C}^2$ паре векторов $\vec{x}=(x_1;\ x_2)$, $\vec{y}=(y_1;\ y_2)$ поставлено в соответствие число $x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2$. Выяснить, является ли данное пространство с введенной таким образом операцией унитарным и если является, то: а) найти длину вектора $\vec{a}=(2;\ 2-i)$; б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}=(3+i;\ 2)$.

Решение. Проверим, является ли введенная операция скалярным умножением векторов.

Условие I справедливо. Действительно,

$$(\vec{x}, \vec{y})=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2;\ (\vec{y}, \vec{x})=y_1\bar{x}_1+y_2\bar{x}_2;\ \overline{(\vec{y}, \vec{x})}=$$
$$=\overline{y_1\bar{x}_1+y_2\bar{x}_2}=\overline{y_1\bar{x}_1}+\overline{y_2\bar{x}_2}=\bar{y}_1x_1+\bar{y}_2x_2.$$

Следовательно, $(\vec{x}, \vec{y})=\overline{(\vec{y}, \vec{x})}$.

Условие II также выполняется. Действительно, для трех векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}=(z_1;\ z_2)$ имеем

$$(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z})=(x_1+y_1)\bar{z}_1+(x_2+y_2)\bar{z}_2,$$
$$(\vec{x}, \vec{z})+(\vec{y}, \vec{z})=x_1\bar{z}_1+x_2\bar{z}_2+y_1\bar{z}_1+y_2\bar{z}_2=$$
$$=(x_1+y_1)\bar{z}_1+(x_2+y_2)\bar{z}_2.$$

Следовательно, $(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z})=(\vec{x}, \vec{z})+(\vec{y}, \vec{z})$.

Так как

$$(\lambda\vec{x}, \vec{y})=\lambda x_1\bar{y}_1+\lambda x_2\bar{y}_2=\lambda(x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2)=\lambda(\vec{x}, \vec{y}),$$

то условие III выполняется.

Условие IV также выполняется, так как

$$(\vec{x}, \vec{x})=x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2=|x_1|^2+|x_2|^2\geqslant 0,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=0$, т. е. $\vec{x}=\vec{0}$.

Таким образом, введенная операция является скалярным умножением векторов, а рассматриваемое пространство — унитарным.

а) Так как, согласно определению скалярного произведения,

$$(\vec{a}, \vec{a})=\vec{a}^2=2\cdot 2+(2-i)(2+i)=9,$$

то $|\vec{a}|=3$.

б) Скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b})=2\overline{(3+i)}+(2-i)2=2(3-i)+4-2i=10-4i.$$

Задачи

312. Является ли унитарным комплексное линейное пространство $\mathbf{C}$, если каждой паре векторов $\vec{x}=\alpha_1+\beta_1 i$, $\vec{y}=\alpha_2+\beta_2 i$ поставлено в соответствие число

$$(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2+\beta_2 i)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i?$$

313. Является ли унитарным комплексное линейное пространство **C**, если каждой паре векторов $\vec{x}=\alpha_1+\beta_1 i$, $\vec{y}=\alpha_2+\beta_2 i$ поставлено в соответствие число

$$(\alpha_1+\beta_1 i)(\overline{\alpha_2+\beta_2 i})=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\,i?$$

314. В унитарном пространстве, рассмотренном в задаче 313, найти: а) длину вектора $2+3i$; б) длину вектора $\alpha-\beta i$; в) скалярное произведение векторов $2+3i$ и $4-5i$.

315. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис n-мерного комплексного пространства. Является ли данное пространство унитарным, если каждой паре векторов $\vec{x}=\alpha_1\vec{e}_1+\ldots+\alpha_n\vec{e}_n$, $y=\beta_1\vec{e}_1+\ldots+\beta_n\vec{e}_n$ этого пространства поставлено в соответствие число $(\vec{x}, \vec{y})=\alpha_1\overline{\beta}_1+\ldots+\alpha_n\overline{\beta}_n$.

316. Пусть в комплексном пространстве комплексных матриц размеров $1\times n$ паре векторов $\vec{x}=[x_1x_2\ldots x_n]$, $\vec{y}=[y_1y_2\ldots y_n]$ поставлено в соответствие число $x_1\overline{y}_1+x_2\overline{y}_2+\ldots+x_n\overline{y}_n$. Является ли данное пространство с введенной таким образом операцией унитарным?

317. В унитарном пространстве, рассмотренном в задаче 316, найти: а) длину вектора $[i\ i\ldots i]$; б) скалярное произведение векторов $[i\ i\ldots i]$, $[5i\ 5i\ldots 5i]$.

318. Выяснить, являются ли ортогональными в унитарном пространстве, рассмотренном в задаче 316 ($n=3$), следующие системы векторов: а) $[i\ 0\ 0]$, $[0\ 2-i\ 3]$; б) $[-4i\ 2i\ 3-i]$, $[3i\ 2\ -4]$; в) $[3i\ 2-i\ 4]$, $[3i\ i+2\ 1]$; г) $[-1\ 4+i\ 5+2i]$, $[-i\ 3\ 3i]$.

319. В унитарном пространстве, рассмотренном в задаче 316, по данному базису построить ортонормированный: а) $[1\ 1\ i]$, $[i\ 1\ 1]$, $[i\ i\ i]$; б) $[2i\ 2\ i]$, $[0\ i\ 3]$, $[0\ 0\ 5]$.

320. Даны векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(\vec{x}, \vec{y})$ и $|\vec{x}|$, $|\vec{y}|$, если: а) $\vec{x}=i\vec{e}_1-(2+i)\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{y}=(i-4)\vec{e}_1+\vec{e}_2-3\vec{e}_3$; $|\vec{e}_1|=1$, $|\vec{e}_2|=2$, $|\vec{e}_3|=3$; б) $\vec{x}=i\vec{e}_1-(2+i)\vec{e}_2-5i\vec{e}_3$, $\vec{y}=-i\vec{e}_1-(2-i)\vec{e}_2+3i\vec{e}_3$; $|\vec{e}_1|=1$, $|\vec{e}_2|=1$, $|\vec{e}_3|=1$.

Глава 4. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

4.1. Определение линейного отображения. Матрица отображения. Связь между координатами вектора и его образа

Пусть даны два линейных пространства V и W, размерности которых соответственно равны m и n. Будем говорить, что задано *отображение f пространства V в W*, или *оператор*, действующий из V в W, если $\forall \vec{x} \in V$ поставлен в соответствие единственный $\vec{y} \in W$, и писать f: $V \to W$.

Вектор $\vec{y}$ назовем *образом* вектора $\vec{x}$, а $\vec{x}$ — *прообразом* вектора $\vec{y}$. В этом случае будем говорить, что оператор f переводит вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$ и писать $\vec{y} = f(\vec{x})$.

Если пространство W совпадает с пространством V, то оператор f, действующий из V в V, называется *оператором пространства V*.

Отображение f: $V \to V$ называется *тождественным*, если $f(\vec{x}) = \vec{x}$ $\forall \vec{x} \in V$. Отображение называется *взаимно-однозначным (биективным)*, если каждый вектор имеет прообраз и притом единственный.

Взаимно-однозначное отображение f: $V \to V$ называется *преобразованием пространства*.

Ядром отображения f: $V \to V$ называется множество векторов, которые данным отображением переводятся в нулевой вектор. Ядро отображения будем обозначать $\operatorname{Ker} f$.

Образом отображения f: $V \to V$ называется множество векторов пространства V, каждый из которых является образом хотя бы одного вектора из V. Образ отображения f: $V \to V$ будем обозначать $\operatorname{Im} f$.

Отображение f: $V \to V$ называется *отображением на V (сюръекцией)*, если $\operatorname{Im} f = V$.

Отображение называется *линейным*, если для любых векторов пространства и произвольного числа λ (вещественного, если пространство вещественное, и комплексного, если оно комплексное) выполняются следующие условия:

$$f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2); \quad f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x}). \tag{4.1}$$

Пусть f — линейное отображение некоторого пространства, переводящее базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ в векторы $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$ такие, что

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1{}' &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n;\\
\vec{e}_2{}' &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vec{e}_n{}' &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n.
\end{aligned}$$

Матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей линейного отображения* в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, ранг r матрицы A — *рангом отображения* f, а $(n-r)$ — *дефектом* этого отображения.

Заметим, что в i-м столбце матрицы A стоят координаты вектора $\vec{e}_i{}'=f(\vec{e}_i)$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Если A — матрица линейного отображения f: $V\to V$, то $\dim(\operatorname{Im} f)=r_A$, а $\dim(\operatorname{Ker} f)=n-r_A$.

Пусть

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n,$$

f — линейное отображение с матрицей A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, а $\vec{y}=f(\vec{x})=y_1\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+\ldots+y_n\vec{e}_n$. Тогда имеет место соотношение

$$Y=AX, \tag{4.2}$$

где

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Формула (4.2) выражает зависимость между координатами вектора и его образа в данном базисе.

Пример 1. Координаты векторов $\vec{x}$, $f(\vec{x})$ и $\varphi(\vec{x})$ заданы в одном и том же базисе.

Выяснить, являются ли линейными следующие отображения: а) отображение f, переводящее любой вектор $\vec{x}_1(\alpha_1;\ \alpha_2)$ в вектор $f(\vec{x}_1)=\vec{y}_1(\alpha_1-2\alpha_2;\ 3\alpha_2-\alpha_1)$; б) отображение φ, переводящее любой вектор $\vec{x}_1(\alpha_1;\ \alpha_2)$ в вектор $\varphi(\vec{x}_1)=\vec{z}_1(2\alpha_1+\alpha_2;\ \alpha_2^2)$.

Решение. а) Чтобы выяснить, является ли данное отображение линейным, проверим, выполняются ли условия (4.1).

Пусть $\vec{x}_2(\beta_1;\ \beta_2)$ — любой вектор рассматриваемого пространства. Так как

$$\vec{x}_1+\vec{x}_2=\vec{x}\,(\alpha_1+\beta_1;\ \alpha_2+\beta_2);$$

$$f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\vec{y}\,(\alpha_1+\beta_1-2(\alpha_2+\beta_2);\ 3(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1));$$

$$f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)=\vec{z}\,(\alpha_1-2\alpha_2+\beta_1-2\beta_2;\ 3\alpha_2-\alpha_1+3\beta_2-\beta_1),$$

то

$$f(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=f(\vec{x}_1)+f(\vec{x}_2)$$

и первое условие (4.1) выполняется.

Второе условие (4.1) также выполняется. Действительно,

$$f(\lambda\vec{x})=\vec{u}\,(\lambda(\alpha_1-2\alpha_2);\ \lambda(3\alpha_2-\alpha_1))=\lambda\vec{u}\,(\alpha_1-2\alpha_2;\ 3\alpha_2-\alpha_1)=\lambda f(\vec{x}).$$

Следовательно, отображение f является линейным.

б) Для отображения φ имеем

$$\varphi(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\vec{v}\,(2(\alpha_1+\beta_1)+\alpha_2+\beta_2;\ (\alpha_2+\beta_2)^2);$$

$$\varphi(\vec{x}_1)+\varphi(\vec{x}_2)=\vec{w}\,(2\alpha_1+\alpha_2+2\beta_1+\beta_2;\ \alpha_2^2+\beta_2^2),$$

откуда следует, что $\varphi(\vec{x}_1+\vec{x}_2)\neq\varphi(\vec{x}_1)+\varphi(\vec{x}_2)$ и отображение φ не является линейным.

Пример 2. Для линейного отображения f предыдущего примера найти матрицу A отображения в том базисе, в котором заданы координаты векторов.

Решение. Обозначим через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ базис, в котором заданы координаты векторов. Для того чтобы найти матрицу A, найдем $f(\vec{e}_1)$ и $f(\vec{e}_2)$. Так как $\vec{e}_1(1;\ 0)$, $\vec{e}_2(0;\ 1)$, то $f(\vec{e}_1)=\vec{u}\,(1;\ -1)$, $f(\vec{e}_2)=\vec{v}\,(-2;\ 3)$.

Следовательно,

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}.$$

Пример 3. В базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ заданы вектор $\vec{x}\,(2;\ -1)$ и матрица $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -5 & 4\end{bmatrix}$. Найти координаты вектора $\vec{y}=f(\vec{x})$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

Решение. Обозначим искомые координаты через β_1 и β_2. Тогда по формуле (4.2) имеем

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\ -14\end{bmatrix},$$

откуда $\beta_1=-7$, $\beta_2=-14$.

Эту задачу можно решить, не применяя формулу (4.2). При этом поступаем следующим образом. Так как f — линейное отображение, то

$$\vec{y}=f(\vec{x})=f(2\vec{e}_1-\vec{e}_2)=2f(\vec{e}_1)-f(\vec{e}_2).$$

В силу определения матрицы отображения в данном базисе

$$f(\vec{e}_1)=-2\vec{e}_1-5\vec{e}_2;$$

$$f(\vec{e}_2)=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2.$$

Следовательно,

$$\vec{y}=2(-2\vec{e}_1-5\vec{e}_2)-(3\vec{e}_1+4\vec{e}_2)=-7\vec{e}_1-14\vec{e}_2.$$

Итак, искомые координаты: -7, -14.

Задачи

321. Является ли преобразованием каждое из отображений f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, заданное следующим образом $\forall\alpha\in\mathbf{R}$: а) $f(\alpha)=\alpha^4$; б) $f(\alpha)=12\alpha$; в) $f(\alpha)=e^\alpha$; г) $f(\alpha)=\alpha\sin\alpha$; д) $f(\alpha)=\alpha^2$; е) $f(\alpha)=\sin\alpha$; ж) $f(\alpha)=\alpha$; з) $f(\alpha)=a\alpha$, где a — фиксированное вещественное число; и) $f(\alpha)=\alpha+2$.

322. Какие из отображений, заданных в предыдущей задаче, являются отображениями «на» (сюръективными)?

323. Какие из отображений, заданных в задаче 321, являются линейными?

324. Найти ядро и образ отображения f: $V\to V$, если $\forall\vec{x}\in V$ $f(\vec{x})=\vec{o}$.

325. Найти ядро и образ тождественного отображения.

В задачах 326—331 выяснить, является ли линейным отображение f, переводящее всякий вектор $\vec{x}$ $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3)$ в вектор $\vec{y}$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор x:

326. $\vec{y}$ $(2\alpha_1-\alpha_2;\ \alpha_3-\alpha_2;\ \alpha_1)$.

327. $\vec{y}$ $(\alpha_1;\ \alpha_2+2;\ \alpha_3)$.

328. $\vec{y}$ $(\alpha_2+\alpha_3;\ 2\alpha_1+\alpha_2;\ 3\alpha_1-\alpha_2)$.

329. $\vec{y}$ $(\alpha_1^2;\ \alpha_2^2;\ \alpha_3^2)$.

330. $\vec{y}$ $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ 5)$.

331. $\vec{y}$ $(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+a_{13}\alpha_3;\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{23}\alpha_3;\ a_{31}\alpha_1+a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3)$, где a_{ij} — фиксированные вещественные числа, $i, j=1, 2, 3$.

В задачах 332—337 выяснить, являются ли линейными указанные отображения:

332. f: $\mathcal{E}_3\to\mathcal{E}_3$, если $\forall\vec{x}\in\mathcal{E}_3$ $f(\vec{x})=(\vec{a},\vec{x})\,\vec{a}$, где $\vec{a}$ — фиксированный вектор этого пространства.

333. f: $\mathcal{E}_3\to\mathcal{E}_3$, если $\forall\vec{x}\in\mathcal{E}_3$ $f(\vec{x})=[\vec{x},\vec{a}]$, где a — фиксированный вектор этого пространства.

334. f: $\mathbf{R}_n(x) \to \mathbf{R}_n(x)$, если $\forall P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ $f(P(x)) = P'(x)$.

335. f: $\mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2$, если $\forall r \in \mathcal{E}_2$: а) $f(\vec{r})$ — вектор, симметричный вектору $\vec{r}$ относительно оси Ox; б) $f(\vec{r}) = k\vec{r}$, где k — фиксированное вещественное число, отличное от нуля.

336. f: $V \to V$, если $\forall \vec{x} \in V$ $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

337. f: $\mathbf{R}_{n\times n} \to \mathbf{R}_{n\times n}$, если $\forall A \in \mathbf{R}_{n\times n}$: а) $f(A) = \alpha A$, где α — фиксированное вещественное число; б) $f(A) = AB$, где B — фиксированная квадратная матрица порядка n; в) $f(A) = BA$, где B — фиксированная квадратная матрица порядка n; г) $f(A) = A - 2B$, где B — фиксированная квадратная матрица порядка n.

В задачах 338—341 найти матрицу линейного отображения, переводящего $\forall \vec{x}\,(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3)$ в вектор $\vec{y}$, заданный координатами в том же базисе, что и вектор $\vec{x}$:

338. $\vec{y}\,(2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3;\ 3\alpha_1 - \alpha_3;\ \alpha_2)$.

339. $\vec{y}\,(\alpha_2 + 5\alpha_3;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;\ \alpha_1 - \alpha_2)$.

340. $\vec{y}\,(2\alpha_3;\ \alpha_1;\ \alpha_2)$.

341. $\vec{y}\,(0;\ \alpha_1 - \alpha_3;\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)$.

342. Найти матрицу линейного отображения f евклидова пространства, переводящего каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $f(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a})\,\vec{a}$, в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, если: а) $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$; б) $\vec{a} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; в) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3$.

343. Найти матрицу линейного отображения f евклидова пространства, переводящего каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $f(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{a})\,\vec{a}$, в ортогональном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, где $|\vec{e}_1| = \sqrt{2}$, $|\vec{e}_2| = 3$, $|\vec{e}_3| = 1$, если: а) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$; б) $\vec{a} = \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$; в) $\vec{a} = \vec{e}_3 - 2\vec{e}_1$.

344. Найти матрицу линейного отображения f: $\mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$, переводящего каждый вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y} = [\vec{x}, \vec{a}]$ в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, если: а) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; б) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; в) $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

4.2. Зависимость между матрицами одного и того же линейного отображения в различных базисах

Если

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n; \tag{4.3}$$

$$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}' \tag{4.4}$$

есть два базиса некоторого линейного пространства V и A — матрица линейного отображения f: $V \to V$ в базисе (4.3), то матрица B этого отображения в базисе (4.4) имеет вид

$$B = T^{-1}AT, \tag{4.5}$$

где T — матрица перехода от базиса (4.3) к базису (4.4).

Пример. Даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ и матрица

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

линейного отображения f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Найти матрицу B этого отображения в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$, если

$$\vec{e}_1{}' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2; \quad \vec{e}_2{}' = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2. \tag{4.6}$$

Решение. Матрица T перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

а обратная к ней матрица

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, по формуле (4.5)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -47 \\ 20 & -31 \end{bmatrix}.$$

Данную задачу можно решить и без использования формулы (4.5). Для того чтобы найти матрицу B, нужно найти координаты векторов $f(\vec{e}_1{}')$ и $f(\vec{e}_2{}')$ в базисе $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$, т. е. коэффициенты в разложении $f(\vec{e}_1{}')$ и $f(\vec{e}_2{}')$ по векторам $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$. Из определения линейного отображения следует

$$f(\vec{e}_1{}') = f(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 2f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2);$$

$$f(\vec{e}_2{}') = f(-3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = -3f(\vec{e}_1) + 2f(\vec{e}_2).$$

На основании определения матрицы отображения в данном базисе

$$f(\vec{e}_1) = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2;$$

$$f(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1.$$

Поэтому

$$f(\vec{e}_1{}') = 2(-\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) + 2\vec{e}_1 = 10\vec{e}_2;$$

$$f(\vec{e}_2{}') = -3(-\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) - 4\vec{e}_1 = -\vec{e}_1 - 15\vec{e}_2.$$

Выразив $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ из (4.6), получим

$$\vec{e}_1 = 2\vec{e}_1{}' + \vec{e}_2{}',$$

$$\vec{e}_2 = 3\vec{e}_1{}' + 2\vec{e}_2{}'.$$

Следовательно,

$$f(\vec{e}_1{}') = 10(3\vec{e}_1{}' + 2\vec{e}_2{}') = 30\vec{e}_1{}' + 20\vec{e}_2{}',$$

$$f(\vec{e}_2{}') = -(2\vec{e}_1{}' + \vec{e}_2{}') - 15(3\vec{e}_1{}' + 2\vec{e}_2{}') = -47\vec{e}_1{}' - 31\vec{e}_2{}',$$

значит, отображение f имеет в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$ матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 30 & -47 \\ 20 & -31 \end{bmatrix}.$$

Задачи

В задачах 345—355 даны два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$ линейного пространства и матрица A линейного отображения в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Найти матрицу этого отображения в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$:

345. $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

346. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_1$, $\vec{e}_2{}' = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$.

347. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1{}' = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

348. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2{}' &= 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \\ \vec{e}_3{}' &= -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3. \end{aligned}$

349. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1$, $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}_3{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{e}_4{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4$.

350. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1{}'=2\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}'=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}'=3\vec{e}_1+\vec{e}_3$.

351. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1=3\vec{e}_1{}'-\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_2=\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'$.

352. $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1=\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_2=2\vec{e}_1{}'$.

353. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1=\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2=3\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3=2\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'+2\vec{e}_3{}'$.

354. $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1=2\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'-\vec{e}_3{}'$, $\vec{e}_2=2\vec{e}_1{}'-\vec{e}_2{}'+2\vec{e}_3{}'$, $\vec{e}_3=3\vec{e}_1{}'+\vec{e}_3{}'$.

355. $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1=\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2=\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3=\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'+\vec{e}_3{}'$, $\vec{e}_4=\vec{e}_1{}'+\vec{e}_2{}'+\vec{e}_3{}'+\vec{e}_4{}'$.

356. В пространстве $\mathcal{E}_2$ дан базис $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$. Найти в этом базисе матрицу: а) преобразования симметрии относительно оси Ox; б) преобразования симметрии относительно оси Oy; в) отображения, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на ось Ox; г) отображения, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на ось Oy.

357. В пространстве $\mathcal{E}_3$ дан базис $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}$. Найти в этом базисе матрицу: а) отображения, переводящего всякий вектор $\vec{r}$ этого

пространства в вектор $k\vec{r}$, где $k \in \mathbf{R}$ и $k \neq 0$; б) отображения, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на плоскость Oxy; в) отображения, ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на плоскость Oyz; г) отображения, переводящего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства в вектор, симметричный вектору $\vec{r}$ относительно плоскости Oxz.

4.3. Операции над отображениями. Обратное отображение

Пусть f, g — отображения пространства $V \to V$. *Суммой отображений* f и g называется отображение h, такое, что

$$h(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \ \forall \vec{x} \in V.$$

Сумму отображений f и g будем обозначать $f+g$. Таким образом,

$$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}).$$

Произведением числа α *на отображение* f называется отображение h_1, такое, что

$$h_1(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}), \ \forall \vec{x} \in V.$$

Произведение числа α на отображение f будем обозначать αf. Таким образом,

$$(\alpha f)(\vec{x}) = \alpha(f(\vec{x})).$$

Произведением отображения f *на отображение* g называется отображение h_2, такое, что

$$h_2(\vec{x}) = g(f(\vec{x})), \ \forall \vec{x} \in V.$$

Произведение отображения f на отображение g будем обозначать $g \circ f$. Итак,

$$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})).$$

Произведение отображений иначе называют *композицией* отображений.

Отображение φ называется *обратным* данному отображению f, если $\varphi \circ f$ и $f \circ \varphi$ — тождественные отображения, т. е. $\forall \vec{x} \in V$

$$(f \circ \varphi)(\vec{x}) = (\varphi \circ f)(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Если f и g — линейные отображения $V \to V$, имеющие соответственно матрицы A и B в некотором базисе, то отображения $f+g$, λf, $f \circ g$, $g \circ f$ также являются линейными и имеют в том же базисе соответственно матрицы $A+B$, λA, AB, BA.

Линейное отображение называется *невырожденным*, если его матрица невырожденная. В противном случае отображение называется *вырожденным*.

Линейное отображение $f\colon V \to V$ является преобразованием тогда и только тогда, когда оно невырожденное.

Произведение конечного числа линейных преобразований есть также линейное преобразование.

Для данного линейного преобразования с матрицей A в некотором базисе существует единственное обратное преобразование, причем матрица обратного преобразования равна матрице A^{-1} в том же базисе.

Пример. Даны линейные отображения f, g и h соответственно с матрицами

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 1 & 0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}$$

в некотором базисе. Найти матрицу D отображения $(f+g)\circ h$.

Решение. Матрица D искомого отображения определяется равенством

$$D=(A+B)C=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -36\\ -4 & -18\end{bmatrix}.$$

Задачи

358. Даны линейные отображения f и g соответственно с матрицами

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

в некотором базисе. Найти в том же базисе матрицу отображения: а) $f+g$; б) $f-2g$; в) $3f+5g$; г) $2f-4g$; д) $f\circ g$; е) $g\circ f$.

359. Пусть отображение f в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix},$$

а отображение g в базисе $\vec{e}_1{}'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ — матрицу

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Найти матрицу отображения: а) $f+g$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$;

б) $f-2g$ в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$; в) $3f+5g$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$; г) $2f-4g$ в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$; д) $f\circ g$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$; е) $g\circ f$ в базисе $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$.

360. Пусть в пространстве $\mathcal{E}_2$ f — симметрия относительно оси Ox, R_0^α — поворот на угол α вокруг точки O, h — симметрия относительно оси Oy, φ — симметрия относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

1) По данному вектору $\vec{r}$ построить вектор: а) $\vec{r}_1=(f\circ g)(\vec{r})$; б) $\vec{r}_2=(g\circ f)(\vec{r})$; в) $\vec{r}_3=(f\circ h)(\vec{r})$; г) $\vec{r}_4=(h\circ f)(\vec{r})$; д) $\vec{r}_5=((f\circ g)\circ h)(\vec{r})$; е) $\vec{r}_6=(\varphi\circ h)(\vec{r})$; ж) $\vec{r}_7=(g\circ(\varphi\circ h))(\vec{r})$.

2) В базисе i, j найти матрицу отображения: а) $f\circ g$; б) $g\circ f$; в) $f\circ h$; г) $h\circ f$; д) $(f\circ g)\circ h$; е) $\varphi\circ h$; ж) $g\circ(\varphi\circ h)$.

361. Пусть в пространстве $\mathcal{E}_3$ f — симметрия относительно плоскости Oxy, h — отображение, ортогонально проектирующее всякий вектор на плоскость Oyz, g — отображение, переводящее всякий вектор $\vec{x}$ в вектор $k\vec{x}$, где $k\in\mathbf{R}$. В базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ найти матрицу отображения: а) $f\circ g$; б) $g\circ f$; в) $f\circ h$; г) $h\circ f$; д) $g\circ h$; е) $f\circ(g\circ f)$; ж) $(h\circ f)\circ g$.

362. Даны два линейных отображения f и g соответственно с матрицами

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}3&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&5&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

в некотором базисе. Найти матрицу отображения: а) $f\circ g$; б) $f\circ f$;

363. Пусть отображение f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет матрицу

$$A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix},$$

а отображение g в базисе $\vec{e}_1{}'=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}'=\vec{e}_1-\vec{e}_2$ — матрицу

$$B=\begin{bmatrix}3&-2\\1&0\end{bmatrix}.$$

Найти матрицу отображения: а) $f \circ g$ в базисе e_1, e_2; б) $g \circ f$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; в) $f \circ g$ в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$; г) $g \circ f$ в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$.

364. Пусть отображение f в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ имеет матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

а отображение g в базисе $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}' = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}' = \vec{e}_2 - \vec{e}_1$ — матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу отображения: а) $f \circ g$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$; б) $g \circ f$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$; в) $f \circ g$ в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$; г) $g \circ f$ в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$.

4.4. Характеристическое уравнение и собственные векторы линейного отображения

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

есть матрица линейного отображения в некотором базисе. Уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

называется *характеристическим уравнением* данного линейного отображения, а также матрицы A. Корни этого уравнения называются *характеристическими числами* данного отображения, а также матрицы A.

Матрица линейного отображения меняется при переходе от одного базиса к другому, а его характеристическое уравнение от выбора базиса не зависит.

Пример 1. Найти характеристическое уравнение и характеристические числа матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение данной матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 5\\ 0 & 2-\lambda & 4\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

или

$$-\lambda^3+4\lambda^2=0.$$

Решая это уравнение, находим характеристические числа: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=4$.

Пусть дано линейное отображение f, имеющее в некотором базисе матрицу A. Вектор $\vec{x}$ вещественного линейного пространства называется *собственным вектором* линейного отображения f этого пространства (матрицы A), если он ненулевой и существует вещественное число k такое, что $f(\vec{x})=k\vec{x}$ ($AX=kX$, где X — вектор-столбец из координат вектора $\vec{x}$ в данном базисе). При этом число k называется *собственным числом* вектора относительно отображения f, а также собственным числом отображения f (собственным числом матрицы A, соответствующим вектор-столбцу X).

Аналогично определяется собственный вектор и собственные числа линейного отображения комплексного пространства.

Собственные векторы отображения с попарно различными собственными числами линейно-независимы. Обратное утверждение, вообще говоря, не является справедливым, так как существуют линейно-независимые собственные векторы с одинаковыми собственными числами.

Собственными числами отображения могут быть только корни его характеристического уравнения, но не всякий корень характеристического уравнения является собственным числом отображения вещественного линейного пространства. В частности, комплексное характеристическое число не может быть собственным числом отображения вещественного пространства.

Собственное число называется *m-кратным*, если оно является m-кратным корнем характеристического уравнения, и *простым*, если оно является простым корнем характеристического уравнения.

Собственные векторы линейного отображения вещественного линейного пространства могут быть найдены следующим образом.

1. Выбираем в данном пространстве какой-либо базис.

2. Находим матрицу

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

данного отображения в выбранном базисе.

3. Находим характеристические числа отображения, т. е. корни уравнения

$$\det(A-\lambda E)=0.$$

4. Выделяем только те характеристические числа, которые являются собственными числами данного отображения, т. е. только вещественные корни характеристического уравнения. Если характеристических чисел нет, то нет и собственных векторов.

5. В системе

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-k)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0;\\ a_{21}x_1+(a_{22}-k)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0;\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+(a_{nn}-k)x_n=0\end{array}\right\} \qquad (4.7)$$

полагаем k равным одному из собственных чисел λ_i данного отображения и находим ненулевое решение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ этой системы.

6. Записываем вектор

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix},$$

который является собственным вектором данного отображения с собственным числом λ_i.

Так как при k, равном собственному числу, система (4.7) имеет бесконечное множество решений, то для данного отображения существует бесконечное множество собственных векторов с данным собственным числом.

Пример 2. Найти собственные векторы отображения f линейного пространства V, заданного матрицей

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

в некотором базисе, если: а) V — вещественное; б) V — комплексное.

Решение. а) Так как матрица отображения задана, то начинаем решение с пункта 3. Характеристическим уравнением данного отображения будет

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

или $\lambda^2+1=0$.

Корни этого уравнения $\lambda_{1,2}=\pm i$ — комплексные числа. Следовательно, отображение f вещественного пространства V собственных векторов не имеет.

б) В комплексном пространстве собственными числами отображения f являются $\lambda_{1,2}=\pm i$.

Найдем собственные векторы с собственным числом $\lambda=i$. Полагая в системе (4.7) $k=i$, получим

$$\left.\begin{array}{r}(1-i)x_1+2x_2=0;\\ -x_1+(-1-i)x_2=0.\end{array}\right\}$$

Решая эту систему, получим $x_2=\beta$, $x_1=-(1+i)\beta$, $\forall\ \beta\in C$.

Собственными векторами данного отображения в комплексном пространстве V с собственным числом i являются

$$\begin{bmatrix} -(1+i)\beta \\ \beta \end{bmatrix},\quad \forall\,\beta\in\mathbf{C},\ \beta\neq 0.$$

Найдем собственные векторы с собственным числом $(-i)$. Полагая в системе (4.7) $k=-i$, получим

$$\left.\begin{aligned} (1+i)x_1+2x_2&=0; \\ -x_1+(-1+i)x_2&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, имеем $x_2=\gamma$, $x_1=(-1+i)\gamma$, $\forall\,\gamma\in\mathbf{C}$. Следовательно, собственными векторами данного отображения комплексного пространства V с собственным числом $(-i)$ будут

$$\begin{bmatrix} (-1+i)\gamma \\ \gamma \end{bmatrix},\quad \forall\,\gamma\in\mathbf{C},\ \gamma\neq 0.$$

Пример 3. В некотором базисе дана матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

линейного отображения вещественного линейного пространства. Найти собственные векторы этого отображения.

Решение. Характеристическое уравнение данного отображения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 5 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

или

$$(1-\lambda)^2(-2-\lambda)=0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Так как все характеристические числа вещественные, то собственными числами являются: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Найдем собственные векторы с собственным числом $\lambda_1=-2$. В системе (4.7) полагаем $k=\lambda_1=-2$. Получим

$$\left.\begin{aligned} (1+2)x_1+x_2&=0; \\ (1+2)x_2&=0; \\ 5x_1+3x_2+(-2+2)x_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2&=0; \\ 3x_2&=0; \\ 5x_1+3x_2&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, имеем: $x_1=x_2=0$, $x_3=t$, $\forall\ t\in\mathbf{R}$.

Собственными векторами данного отображения с собственным числом -2 являются

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix},$$

где $t \neq 0$.

Найдем собственные векторы с собственным числом $\lambda=1$. В системе (4.7) полагаем $k=1$. Получим

$$\left.\begin{aligned} 0\cdot x_1+x_2+0\cdot x_3&=0; \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3&=0; \\ 5x_1+3x_2-3x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, имеем $x_1=3s$, $x_2=0$, $x_3=5s$, $\forall s \in \mathbf{R}$. Следовательно, собственными векторами данного отображения с собственным числом 1 являются

$$\begin{bmatrix} 3s \\ 0 \\ 5s \end{bmatrix},$$

где $s \neq 0$.

Задачи

365. В пространстве $\mathcal{E}_2$ задана декартова прямоугольная система координат Oxy. Найти характеристическое уравнение и характеристические числа отображения: а) ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ на ось Ox; б) ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ на ось Oy; в) симметрии относительно оси Oy.

366. В пространстве $\mathcal{E}_3$ задана декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. Найти характеристическое уравнение и характеристические числа отображения: а) переводящего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства в вектор $k\vec{r}$, где $k \in \mathbf{R}$ и $k \neq 0$; б) ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на плоскость Oxy; в) ортогонально проектирующего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства на плоскость Oyz; г) переводящего всякий вектор $\vec{r}$ этого пространства в вектор, симметричный вектору $\vec{r}$ относительно плоскости Oxz.

367. Найти характеристическое уравнение и характеристические числа линейного отображения f, если:

а) $f(\vec{e}_1)=2\vec{e}_1$; $f(\vec{e}_2)=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2$; $f(\vec{e}_3)=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2-6\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис пространства; б) $f(\vec{e}_1)=-\vec{e}_1$; $f(\vec{e}_2)=$ $=2\vec{e}_1+5\vec{e}_2$; $f(\vec{e}_3)=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+3\vec{e}_3+5\vec{e}_4$; $f(\vec{e}_4)=\vec{e}_1+7\vec{e}_2+$ $+4\vec{e}_3+6\vec{e}_4$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ — базис пространства; в) $f(\vec{e}_1)=2\vec{e}_1+2\vec{e}_3$; $f(\vec{e}_2)=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2$; $f(\vec{e}_3)=-2\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис пространства.

В задачах 368—371 в некотором базисе даны матрица A отображения f и векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$. Определить, какие из указанных векторов являются собственными векторами отображения f:

368. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

369. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

370. $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

371. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

372. Пусть $\vec{x}$ — собственный вектор линейных отображений f и φ соответственно с собственными числами λ_1 и λ_2: а) доказать, что $\vec{x}$ является собственным вектором отображения $f\circ\varphi$. Указать собственное число собственного вектора $\vec{x}$ отображения $f\circ\varphi$; б) доказать, что $\vec{x}$ является собственным вектором отображения $f+\varphi$. Указать собственное число собственного вектора $\vec{x}$ отображения $f+\varphi$.

373. Пусть $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — собственные векторы линейного отображения f соответственно с собственными числами λ_1 и λ_2. Является ли вектор $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ собственным вектором отображения f?

В задачах 374—383 найти собственные векторы линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей A:

374. $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$. **375.** $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

376. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. **377.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

378. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **379.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

380. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

381. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 2 & -4 & 7 & -4 \\ -1 & -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

382. $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **383.** $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

4.5. Приведение матрицы линейного отображения к диагональному виду

Пусть линейное отображение $f\colon V\to V$, где V — вещественное линейное пространство, имеет в некотором базисе матрицу A. Матрица A называется *приводимой к диагональному виду*, если существует невырожденная матрица T такая, что матрица $T^{-1}AT$ — диагональная. При этом говорят, что матрица T приводит матрицу A к диагональному виду.

Для того чтобы выяснить, приводится ли матрица A линейного отображения вещественного пространства к диагональному виду, можно поступать следующим образом. Найти все характеристические числа данной матрицы. Если хотя бы одно из них не является собственным, то матрица не приводится к диагональному виду. Если же все характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ являются собственными числами матрицы A и дефект матрицы $A-\lambda_i E$, $i=1, 2, \ldots, s$, равен кратности λ_i, то матрица A приводится к диагональному виду. (Если λ_i — характеристическое число кратности $m_i=1$, то дефект $A-\lambda_i E$ всегда равен единице.) Если указанные условия не соблюдаются, то матрица A к диагональному виду не приводится.

Если матрица A, являющаяся матрицей отображения f n-мерного пространства в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, приводится к диагональному виду, то матрица T, приводящая A к диагональному виду, имеет следующую структуру: ее элементами являются координаты линейно-независимых собственных векторов отображения f, в i-м столбце матрицы T расположены координаты i-го ($i=1, 2, \ldots, n$) собственного вектора матрицы A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Таким образом, вопрос об отыскании матрицы T сводится к вопросу об отыскании линейно-независимой системы собственных векторов отображения f.

Пример. Выяснить, приводится ли матрица

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

к диагональному виду, и если да, найти матрицу, приводящую матрицу A к диагональному виду.

Решение. Найдем характеристические числа матрицы A. Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-9$, их кратности соответственно равны $m_1=2$, $m_2=1$. Все корни являются собственными числами.

Ранг r_1 матрицы

$$A-\lambda_1 E=A-9E=\begin{bmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

равен 1, и дефект $n-r_1=3-1=2$ совпадает с кратностью корня $\lambda_1=9$.

Характеристическое число $\lambda_2=-9$ имеет кратность $m_2=1$. Следовательно, матрица A приводится к диагональному виду.

Найдем матрицу T, приводящую матрицу A к диагональному виду. Для этого определим собственные векторы матрицы.

Чтобы найти собственные векторы с собственным числом $\lambda_1=9$, решим систему

$$\left.\begin{aligned} -8\alpha_1-4\alpha_2-8\alpha_3=0; \\ -4\alpha_1-2\alpha_2-4\alpha_3=0; \\ -8\alpha_1-4\alpha_2-8\alpha_3=0. \end{aligned}\right\}$$

Ее решение можно записать в виде $\alpha_1=s_1$, $\alpha_2=-2s_1-2s_2$, $\alpha_3=s_3$, $\forall\, s_1,\ s_2\in\mathbf{R}$. Следовательно, векторы

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ -2s_1-2s_2 \\ s_2 \end{bmatrix},$$

где $|s_1|+|s_2|\neq 0$, являются собственными векторами матрицы A с собственным числом $\lambda_1=9$.

Чтобы найти собственные векторы с собственным числом $\lambda_2=-9$, решим систему

$$\left.\begin{aligned} 10\beta_1-4\beta_2-8\beta_3&=0;\\ -4\beta_1+16\beta_2-4\beta_3&=0;\\ -8\beta_1-4\beta_2+10\beta_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

Ее решение $\beta_1=2t$, $\beta_2=t$, $\beta_3=2t$, $\forall\, t\in\mathbf{R}$ и собственными являются векторы

$$\begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix},$$

где $t\neq 0$. Следовательно, матрица T, удовлетворяющая условию

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix},$$

имеет вид

$$T=\begin{bmatrix} c_1 & c_3 & 2t \\ -2c_1-2c_2 & -2c_3-2c_4 & t \\ c_2 & c_4 & 2t \end{bmatrix},$$

где $t,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4\in\mathrm{R}$, $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}\neq 0$, $t\neq 0$.

Задачи

В задачах 384—399 выяснить, приводится ли к диагональному виду каждая из указанных матриц в вещественном пространстве. В случае приводимости записать диагональный вид матрицы:

384. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **385.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

386. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. **387.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

388. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.
389. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

390. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
391. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

392. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
393. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$.

394. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
395. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

396. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.
397. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

398. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
399. $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 6 & 5 & 9 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix}$.

В задачах 400—411 в некотором базисе линейное отображение задано матрицей A. В вещественном линейном пространстве найти базис, в котором матрица отображения имеет диагональный вид:

400. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.
401. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

402. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.
403. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

404. $A=\begin{bmatrix} -10 & 54 & 36 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 18 & 11 \end{bmatrix}$. **405.** $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

406. $A=\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{bmatrix}$. **407.** $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

408. $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. **409.** $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

410. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

411. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 6 & 3 \\ -9 & -9 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

4.6. Ортогональные отображения. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду с помощью ортогональных отображений

Вещественная квадратная матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется *ортогональной*, если соответствующая ей система векторов $\vec{x}_1=(a_{11};\ a_{21};\ \dots;\ a_{n1}),\ \dots,\ \vec{x}_n=(a_{1n};\ a_{2n};\ \dots;\ a_{nn})$ ортонормированная. При этом предполагается, что векторы $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \dots,\ \vec{x}_n$ являются элементами евклидова пространства $\mathcal{E}^n$.

Критерии ортогональности матрицы A:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}=\begin{cases} 1 \text{ при } i=j; \\ 0 \text{ при } i\neq j. \end{cases}$

2) $AA^T=E$; 3) $A^TA=E$; 4) $A^T=A^{-1}$.

Если матрица A ортогональная, то A^{-1}, A^T — ортогональные матрицы и $\det A=\pm 1$.

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.

Линейное отображение евклидова пространства называется *ортогональным*, если в некотором ортонормированном базисе его матрица ортогональна.

Всякое ортогональное линейное отображение является линейным преобразованием.

Для всякого отображения с симметрической вещественной матрицей A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ существует ортогональная матрица C, приводящая матрицу A к диагональному виду. Матрица C имеет следующую структуру: ее элементами являются координаты линейно-независимых ортонормированных собственных векторов матрицы A, в i-м столбце матрицы C расположены координаты i-го ($i=1, 2, \ldots, n$) нормированного собственного вектора матрицы A в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. При отыскании матрицы C полезно знать, что собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Пример. В ортонормированном базисе отображение f имеет матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}.$$

Найти ортогональную матрицу C, приводящую A к диагональному виду.

Решение. Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$.

Чтобы найти собственный вектор с собственным числом $\lambda_1=1$, решим систему

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1+\sqrt{3}\alpha_2=0; \\ \sqrt{3}\alpha_1+3\alpha_2=0. \end{aligned}\right\}$$

Ее решение $\alpha_1=-\sqrt{3}c$, $\alpha_2=c$, $\forall c\in\mathbf{R}$. Следовательно, вектор

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{3}c \\ c \end{bmatrix},$$

где $c\neq 0$, является собственным вектором с собственным числом $\lambda_1=1$. Пронормировав его, получим

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти собственный вектор с собственным числом $\lambda_2=5$, решим систему

$$\left.\begin{aligned} -3\alpha_1+\sqrt{3}\,\alpha_2=0; \\ \sqrt{3}\,\alpha_1-\alpha_2=0. \end{aligned}\right\}$$

Ее решение $\alpha_1=t$, $\alpha_2=\sqrt{3}\,t$, $\forall t\in\mathbf{R}$. Следовательно вектор

$$\begin{bmatrix} t \\ \sqrt{3}\,t \end{bmatrix}$$

где $t\neq 0$ является собственным вектором с собственным числом $\lambda_2=5$. Пронормировав его, имеем

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, искомая матрица C имеет вид

$$C=\begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Задачи

В задачах 412—417 указать, является ли каждая из данных матриц ортогональной, и если является, то найти обратную;

412. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. **413.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

414. $\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{11}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{3}{\sqrt{11}} & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{11}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

415. $$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix},$$

416. $$\begin{bmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{4}{5} & \frac{12}{13} \\ \frac{3}{13} & 0 & -\frac{5}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

417. $$\begin{bmatrix} \frac{12}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{12}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{12}{13} \end{bmatrix}.$$

418. Выяснить, являются ли ортогональными следующие отображения пространства $\mathcal{E}_2$: а) симметрия относительно оси Ox; б) поворот на угол φ вокруг начала координат; в) композиция симметрии относительно оси Ox и поворота на угол φ вокруг начала координат; г) отображение, переводящее всякий вектор $\vec{r}$ в вектор $k\vec{r}$, где $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$.

В задачах 419—426 найти ортогональные матрицы, приводящие указанные симметрические матрицы к диагональному виду:

419. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.　　420. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

421. $\begin{bmatrix} 7 & 3\sqrt{5} \\ 3\sqrt{5} & 3 \end{bmatrix}$.　　422. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix}$.

423. $\begin{bmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$. **424.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$.

425. $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. **426.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

4.7. Понятие о тензоре

Если в выражении встретятся два одинаковых индекса, из которых один верхний, а другой нижний, то под этим выражением будем понимать суммирование по указанному индексу, принимающему значения 1, 2, ..., n. Например,

$$a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

$$a^i_i = a^1_1 + a^2_2 + \ldots + a^n_n;$$

$$a_i{}^j b_j c^i = a_i{}^1 b_1 c^i + a_i{}^2 b_2 c^i + \ldots + a_i{}^n b_n c^i =$$

$$= b_1 (a_1{}^1 c^1 + a_2{}^1 c^2 + \ldots + a^1_n c^n) +$$

$$+ b_2 (a_1{}^2 c^1 + a_2{}^2 c^2 + \ldots + a^2_n c^n) + \ldots +$$

$$+ b_n (a_1{}^n c^1 + a_2{}^n c^2 + \ldots + a^n_n c^n).$$

Индекс суммирования называется *немым*.

Пусть дано n-мерное линейное пространство V_n, в котором заданы два базиса

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n; \tag{4.8}$$

$$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}' \tag{4.9}$$

и $\vec{e}_i{}' = t_i{}^k \vec{e}_k$; $\vec{e}_i = g_i{}^k \vec{e}_k{}'$.

Тензором типа (p, q) называется геометрический или физический объект, который в каждом базисе линейного пространства определяется n^{p+q} числами $\alpha^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ так, что если числа $\alpha^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ соответствуют базису (4.8), а числа $\alpha^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{e_1 e_2 \ldots e_q}$ — базису (4.9), то

$$\alpha^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{e_1 e_2 \ldots e_q} = g^{k_1}_{i_1} \ldots g^{k_p}_{i_p} t^{j_1}_{e_1} \ldots t^{j_q}_{e_q} \alpha^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}, \tag{4.10}$$

В этой формуле множитель вида $g_i{}^k$ берется p раз, а множитель вида $t_e{}^j$ — q раз. Если $p=0$, то множителя вида $g_i{}^k$ не будет (аналогично, если $q=0$, то множителя вида t^j_e не будет).

Тензор типа (p, q) называется *тензором валентности* $p+q$, *p раз контравариантным и q раз ковариантным*, а числа $\alpha^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ — *координатами тензора* в соответствующем базисе.

Формулы (4.10) называются *формулами преобразования координат тензора при преобразовании базиса.*

Пример 1. Скаляр α является тензором нулевой валентности и имеет одну координату α в любом базисе.

Пример 2. Вектор $\vec{x} \in V_n$ — одновалентный тензор. Действительно, вектор $\vec{x}$ в любом базисе определяется совокупностью n чисел, которые при переходе к новому базису преобразуются по формулам (4.10) при $p+q=1$.

Пример 3. Покажем, что символ Кронекера, определяемый в базисе (4.8) совокупностью n^2 чисел

$$\delta_i{}^j = \begin{cases} 1 \text{ при } i=j; \\ 0 \text{ при } i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

можно рассматривать как двухвалентный тензор, один раз ковариантный и один раз контравариантный.

Пусть базис $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$ такой, что $\vec{e}_j{}' = t_j{}^l \vec{e}_l$; $\vec{e}_k = g^i_k \vec{e}_i{}'$. Тогда

$$g^i_k t_j{}^l \delta_l{}^k = g^i_k (t_j{}^1 \delta_1{}^k + t_j{}^2 \delta_2{}^k + \ldots + t_j{}^n \delta^k_n) = g_1{}^i (t_j{}^1 \delta_1{}^1 + t_j{}^2 \delta_2{}^1 +$$
$$+ \ldots + t_j{}^n \delta^1_n) + g_2{}^i (t_j{}^1 \delta_1{}^2 + t_j{}^2 \delta_2{}^2 + \ldots + t_j{}^n \delta^2_n) + \ldots + g^i_n (t_j{}^1 \delta_1{}^n +$$
$$+ t_j{}^2 \delta_2{}^n + \ldots + t_j{}^n \delta^n_n) = g_1{}^i t_j{}^1 + g_2{}^i t_j{}^2 + \ldots + g^i_n t_j{}^n =$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ при } i=j; \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

Следовательно, формулы (4.10) имеют место.

Задачи

В задачах 427—430 от сокращенной записи суммирования перейти к развернутой:

427. $x_i{}^j z_j{}^k$. **428.** $x_i{}^j y_j{}^k z^l_k$

429. $x_i{}^i$. **430.** $\alpha x_i{}^j y^l_k z_j{}^p$.

431. Доказать, что каждому линейному оператору, заданному в конечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ и действующему в то же пространство, можно поставить в соответствие некоторый тензор типа (1, 1).

432. Дан тензор с координатами $A_i{}^j$ в некотором базисе. Доказать, что объект с координатами $\alpha A_i{}^j$ в указанном базисе также является тензором.

433. Даны два тензора соответственно с координатами $A_i{}^j$ и $B_i{}^j$ в некотором базисе. Доказать, что объект, заданный координатами $A_i{}^j + B_i{}^j$ в указанном базисе, также является тензором.

Глава 5. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

5.1. Основные определения. Матричная запись квадратичной формы

Рассмотрим отображение, ставящее в соответствие вектору $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ n-мерного линейного пространства число $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определяемое по формуле

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{5.1}$$

где a_{ij} — некоторые числа, причем

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \neq 0.$$

Выражение (5.1) называется *квадратичной формой,* а a_{ij} — ее коэффициентами.

Без ограничения общности можно считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Симметрическую матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

составленную из коэффициентов квадратичной формы, будем называть *матрицей квадратичной формы.*

Квадратичная форма (5.1) может быть записана в виде

$$L = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X,$$

где $A = (a_{ij})$; $X^T = [x_1 x_2 \ldots x_n]$.

Выражение $X^T A X$ называется *матричной записью квадратичной формы* (5.1).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты вектора $\vec{x}$ линейного пространства V в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ — координаты $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$, а T — матрица перехода от первого базиса ко второму.

Если вектору $\vec{x}$ поставим в соответствие число $L_1(x_1', x_2', \ldots, x_n') = X'^T B X'$, где $B = T^T A T$, $X^T = [x_1' x_2' \ldots x_n']$, то $B^T = B$, $X^T A X = X'^T B X'$.

Квадратичная форма называется *вещественной,* если все ее коэффициенты — вещественные числа.

В дальнейшем будем рассматривать вещественные квадратичные формы и, кроме того, считать, что линейное пространство является вещественным.

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы. Квадратичная форма называется *невырожденной,* если ее матрица невырожденная.

Очевидно, что ранг невырожденной квадратичной формы равен числу переменных этой формы.

Пример 1. Найти матрицу и ранг каждой из квадратичных форм

$$L_1(x_1, x_2)=2x_1^2+3x_2^2-5x_1x_2;$$

$$L_2(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-x_3^2+2x_1x_2-3x_1x_3.$$

Решение. Матрицей квадратичной формы L_1 является матрица

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 2, следовательно, и ранг L_1 равен 2. Матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

является матрицей квадратичной формы L_2. Ранг L_2 равен 3.

Пример 2. Дана матрица

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3)$. Записать эту квадратичную форму в виде (5.1).

Решение. Так как $a_{11}=-1$, $a_{22}=2$, $a_{33}=-4$, $a_{12}=a_{21}=0$, $a_{13}=a_{31}=1$, $a_{23}=a_{32}=6$, то

$$L(x_1, x_2, x_3)=-x_1^2+2x_2^2-4x_3^2+2x_1x_3+12x_2x_3.$$

Задачи

В задачах 434—441 записать матрицу каждой из данных квадратичных форм:

434. $L(x_1, x_2)=x_1^2+2x_2^2-x_1x_2.$

435. $L(x_1, x_2)=2x_1^2-3x_2^2.$

436. $L(x_1, x_2)=x_1^2+2x_1x_2$.

437. $L(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

438. $L(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+4x_2^2-4x_3^2+5x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.

439. $L(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^2+2x_2^2-x_4^2+2x_2x_4$.

440. $L(x_1, x_2, x_3)=x_2^2+x_1x_3$.

441. $L(x_1, x_2, x_3, x_4)=2x_4^2-2x_1x_4+x_2x_3$.

В задачах 442—446 найти ранг каждой из данных квадратичных форм:

442. $L(x_1, x_2)=x_1^2$.

443. $L(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$.

444. $L(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_1x_3$.

445. $L(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$.

446. $L(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

В задачах 447—451 записать каждую из квадратичных форм в матричном виде:

447. $L(x_1, x_2)=2x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$.

448. $L(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+5x_2^2-x_3^2+2x_1x_2$.

449. $L(x_1, x_2, x_3)=4x_1^2-2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-3x_1x_3$.

450. $L(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^2+x_3^2+2x_1x_3+x_1x_4$.

451. $L(x_1, x_2, x_3)=x_2^2+x_1x_3$.

В задачах 452—457 записать квадратичную форму в виде (5.1) по заданной матрице:

452. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.   453. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

454. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.   455. $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

456. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & -8 \\ 2 & -3 & 7 & 1 \\ 5 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.   457. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 11 & 7 \\ 1 & 6 & -8 & 3 \\ 11 & -8 & 9 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 12 \end{bmatrix}$.

В задачах 458—460 записать матрицу каждой из данных квадратичных форм:

458. $[x_1x_2]\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$

459. $[x_1x_2x_3]\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 6\\ -7 & 1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$

460. $[x_1x_2x_3x_4]\begin{bmatrix}1 & -1 & 5 & 0\\ 2 & 8 & -14 & 3\\ 3 & -7 & 11 & 2\\ 4 & -1 & 4 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}.$

5.2. Критерии знакоопределенности квадратичных форм. Применение квадратичных форм к исследованию функций на экстремум

Совокупность значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовем *нулевой*, если $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ и *ненулевой*, если среди переменных есть хотя бы одна, отличная от нуля.

Очевидно, что для любой квадратичной формы $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеем $L(0, 0, \ldots, 0)=0$.

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно определенной*, если для любой ненулевой совокупности значений переменных $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ имеем $L(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)>0$, и *отрицательно определенной*, если $L(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)<0$.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными*.

Главными минорами квадратной матрицы

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

называются миноры

$$\Delta_1=a_{11};\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix};\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix};\ \ldots;$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

т. е. миноры, стоящие в верхнем левом углу матрицы A.

Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны.*

Критерий Сильвестра отрицательной определенности квадратичной формы. *Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка ее матрицы были положительны, а нечетного порядка — отрицательны.*

Пример 1. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

Решение. Матрица квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ее главные миноры

$$\Delta_1=2;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=2; \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

положительны. Следовательно, форма $L(x_1, x_2, x_3)$ является положительно определенной.

Рассмотрим применение критериев Сильвестра к исследованию на экстремум функции нескольких переменных.

Пусть функция $z=f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка и $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка этой функции. Чтобы исследовать стационарную точку, надо определить знак Δz в этой точке.

По формуле Тейлора имеем

$$\Delta z=\frac{dz}{1!}+\frac{d^2z}{2!}+R_2.$$

В стационарной точке $dz=0$ и

$$\Delta z=\frac{d^2z}{2!}+R_2.$$

Если $d^2z\neq0$ в точке M_0, то знак Δz определяется знаком d^2z. Дифференциал второго порядка

$$d^2z=a(\Delta x)^2+b(\Delta y)^2+2c\Delta x\Delta y,$$

где

$$a=\left(\frac{\partial^2z}{\partial x^2}\right)_{M_0};\ b=\left(\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\right)_{M_0};\ c=\left(\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right)_{M_0},$$

является квадратичной формой переменных Δx и Δy с матрицей

$$A=\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}.$$

Применяя критерий Сильвестра, имеем:

1) если $a>0$ и $\det A>0$, то $\Delta z>0$, и M_0 — точка минимума;
2) если $a<0$ и $\det A>0$, то $\Delta z<0$, и M_0 — точка максимума;
3) если $\det A<0$, со Δz в окрестности точки M_0 меняет знак, и в точке M_0 экстремума нет.

Заметим, что если $\det A=0$, то указанный метод к исследованию стационарной точки M_0 неприменим.

Аналогично проводится исследование стационарной точки функции $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n>2)$. В этом случае d^2z является квадратичной формой n переменных.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z=xy(3-xy)$.

Решение. Так как

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3y-2xy-y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=3x-x^2-2xy,$$

то стационарные точки находятся из системы

$$\left.\begin{aligned} y(3-2x-y)&=0; \\ x(3-x-2y)&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получим стационарные точки $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$, $M_3(0,3)$, $M_4(3,0)$.

Находим производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=-2x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=3-2x-2y.$$

Исследуем каждую стационарную точку.

В точке $M_1(0,0)$

$$a_1=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_1}=0; \quad b_1=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_1}=0; \quad c_1=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_1}=3.$$

Следовательно, $d^2z=6\Delta x\Delta y$. Матрица этой квадратичной формы

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как главные миноры этой матрицы равны 0 и -9, то A не является знакоопределенной, и в точке M_1 экстремума нет.

В точке $M_2(1,1)$

$$d^2z=-2(\Delta x)^2-2(\Delta y)^2-2\Delta x\Delta y.$$

Матрица этой квадратичной формы

$$A_2=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Главные миноры матрицы A_2 равны -2 и 3, следовательно, d^2z — отрицательно определенная квадратичная форма и M_2 — точка максимума; $z_{max}=1$.

Легко проверить, что в точках $M_3(0,3)$ и $M_4(3,0)$ экстремума нет.

Задачи

В задачах 461—464 исследовать на знакоопределенность каждую из данных квадратичных форм:

461. $x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$.
462. $2x_2^2-x_1^2-x_1x_3+2x_2x_3$.
463. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3$.
464. $3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$.

В задачах 465—467 исследовать, при каких значениях параметра λ является знакоопределенной каждая из данных квадратичных форм:

465. $\lambda x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$.
466. $2x_1^2+3x_2^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$.
467. $\lambda x_2^2-x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+10x_2x_3$.

В задачах 468—472 исследовать на экстремум каждую из данных функций:

468. $z=x^2+3xy$.
469. $z=2x^3-3y^3-6x+36y$.
470. $u=x^2y+yz-z$.
471. $u=x^2+y^2+z^2-2xyz$.
472. $u=x^3+y^3+z^3+3xyz$.

5.3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Пусть переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ получены из переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейным однородным отображением с матрицей B, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x_1&=b_{11}y_1+b_{12}y_2+\dots+b_{1n}y_n;\\ x_2&=b_{21}y_1+b_{22}y_2+\dots+b_{2n}y_n;\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n&=b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\dots+b_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

или в матричном виде $X=BY$.

Если в квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n)=X^TAX$$

вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ подставить их выражения через $y_1, y_2, \dots y_n$ из (5.2), то получим квадратичную форму $L_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$ с матрицей

$$C=B^TAB.$$

При этом говорят, что квадратичная форма $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ отображением (5.2) переводится в $L_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Квадратичная форма $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *конгруэнтной* квадратичной форме $L_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$, если существует линейное однородное преобразование, переводящее $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в $L_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Если $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конгруэнтна $L_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$, то пишут $L(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim L_1(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Квадратичная форма (5.1) называется *канонической* (иначе говоря, имеет *канонический вид*), если все $a_{ij}=0$ при $i \neq j$.

Каноническая форма называется *нормальной*, если каждый ее коэффициент, отличный от нуля, по абсолютной величине равен единице.

Нахождение по данной квадратичной форме конгруэнтной ей канонической квадратичной формы называется *приведением квадратичной формы к каноническому виду*.

Для всякой вещественной квадратичной формы существует бесконечное множество конгруэнтных ей канонических квадратичных форм. Все канонические формы, конгруэнтные данной, имеют:

1) одно и то же число нулевых коэффициентов;
2) одно и то же число положительных коэффициентов;
3) одно и то же число отрицательных коэффициентов;
4) одно и то же число отличных от нуля коэффициентов, равное рангу данной квадратичной формы.

Однако существует единственная (с точностью до обозначения переменных) нормальная каноническая форма, конгруэнтная данной. В множестве всех канонических форм, конгруэнтных данной, существует единственная (с точностью до обозначения переменных) каноническая форма $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2$, у которой α_i совпадают с характеристическими числами матрицы данной квадратичной формы.

Для всякой вещественной квадратичной формы существует ортогональное отображение, переводящее данную форму в конгруэнтную ей каноническую квадратичную форму. Это отображение имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

где C — ортогональная матрица, приводящая матрицу данной квадратичной формы $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к диагональному виду.

Другие преобразования, приводящие квадратичную форму к каноническому виду, могут быть найдены методом Якоби или Лагранжа.

Метод Якоби применим в случае, когда все главные миноры матрицы квадратичной формы отличны от нуля. Этот метод заключается в следующем. Пусть дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X.$$

Предположим, что главные миноры $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ матрицы A отличны от нуля. Тогда существует единственное невырожденное однородное преобразование переменных вида

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1+\alpha_{21}y_2+\alpha_{31}y_3+\ldots+\alpha_{n1}y_n;\\ x_2 &= \qquad\; y_2+\alpha_{32}y_3+\ldots+\alpha_{n2}y_n;\\ x_3 &= \qquad\qquad\quad\; y_3+\ldots+\alpha_{n3}y_n;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad y_n, \end{aligned}\right\}$$

приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j y_j^2, \tag{5.3}$$

где $\beta_1=\Delta_1$; $\beta_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$, $j=2, \ldots, n$.

Коэффициенты этого преобразования определяются по формуле

$$\alpha_{ji}=(-1)^{i+j}\frac{\Delta_{j-1i}}{\Delta_{j-1}}, \tag{5.3$'$}$$

где Δ_{j-1i} — минор матрицы A, расположенный на пересечении строк этой матрицы с номерами $1, 2, \ldots, j-1$ и столбцов с номерами $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j$.

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов.

Если одна из двух данных квадратичных форм $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)=X^TAX$, $L_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=X^TBX$ — знакоопределенная, то существует преобразование $X=SZ$, приводящее одновременно обе формы к каноническому виду. При этом если $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — знакоопределенная, то S может быть найдена следующим образом. Пусть $X=S_1Y$ — преобразование, приводящее форму L к нормальному каноническому виду, B_1 — матрица квадратичной формы L_2, полученной из L_1 преобразованием $X=S_1Y$, $Y=CZ$ — ортогональное преобразование, приводящее L_2 к каноническому виду. Тогда $S=S_1C$.

Пример 1. Дана квадратичная форма

$$L(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

Найти каноническую квадратичную форму, конгруэнтную данной, и преобразование, приводящее $L(x_1, x_2, x_3)$ к найденному каноническому виду.

Решение. *Способ 1.* Используем метод Якоби. Матрица данной квадратичной формы имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

а ее главные миноры $\Delta_1=2$, $\Delta_2=2$, $\Delta_3=1$. По формулам (5.3) имеем $\beta_1=2$, $\beta_2=1$, $\beta_3=\dfrac{1}{2}$.

Следовательно, преобразованием

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1+\alpha_{21}y_2+\alpha_{31}y_3; \\ x_2 &= \qquad\quad y_2+\alpha_{32}y_3; \\ x_3 &= \qquad\qquad\qquad y_3 \end{aligned}\right\}$$

данная квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$L_1(y_1, y_2, y_3)=2y_1^2+y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2.$$

Использовав формулы (5.3′), получим

$$\alpha_{21}=(-1)^3\frac{\Delta_{11}}{\Delta_1}=-\frac{-2}{2}=1;$$

$$\alpha_{31}=(-1)^4\frac{\Delta_{21}}{\Delta_2}=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}}{2}=-\frac{1}{2};$$

$$\alpha_{32}=(-1)^5\frac{\Delta_{22}}{\Delta_2}=\frac{-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}}{2}=0.$$

Таким образом, искомым преобразованием является

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1+y_2-\frac{1}{2}y_3; \\ x_2 &= y_2; \\ x_3 &= y_3. \end{aligned}\right\}$$

Способ 2. Используем метод Лагранжа. Так как среди коэффициентов a_{ii} имеются отличные от нуля, то приведение к каноническому виду можно осуществить следующим образом. Данную квадратичную форму представим в виде

$$L(x_1, x_2, x_3)=2(x_1^2-2x_1x_2+x_1x_3)+3x_2^2+x_3^2-2x_2x_3=$$

$$=2\left(x_1^2+x_1(x_3-2x_2)+\frac{1}{4}(x_3-2x_2)^2-\frac{1}{4}(x_3-2x_2)^2\right)+$$

$$+3x_2^2+x_3^2-2x_2x_3=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_3-x_2\right)^2-$$

$$-\frac{1}{2}(x_3^2-4x_2x_3+4x_2^2)+3x_2^2+x_3^2-2x_2x_3=$$

$$=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_3-x_2\right)^2+\frac{1}{2}x_3^2+x_2^2.$$

Невырожденное преобразование

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3; \\ y_2 &= x_2; \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}$$

приводит данную квадратичную форму к каноническому виду

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2.$$

Пример 2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$L(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к каноническому виду.

Решение. Матрица данной квадратичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическим уравнением матрицы A является уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$, имеют соответственно кратности $m_1 = 1$, $m_2 = 2$.

Координаты α_1, α_2, α_3 собственных вектор-столбцов X с собственным числом $\lambda_1 = -2$ находим из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0; \\ -\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0; \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, имеем $\alpha_1 = t$, $\alpha_2 = t$, $\alpha_3 = -2t$.

Таким образом, вектор-столбцы

$$X_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 2t \end{bmatrix}$$

при $\forall t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$ являются собственными вектор-столбцами матрицы A с собственным числом $\lambda_1 = -2$.

Пронормировав X_1, получим вектор

$$X_1^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Координаты β_1, β_2, β_3 собственных вектор-столбцов с собственным числом $\lambda_2=4$ находим из системы

$$\left.\begin{aligned} -\beta_1-\beta_2+2\beta_3=0; \\ -\beta_1-\beta_2+2\beta_3=0; \\ 2\beta_1+2\beta_2-4\beta_3=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, имеем: $\beta_1=2s$, $\beta_2=2p$, $\beta_3=s+p$. Таким образом, вектор-столбцы

$$\begin{bmatrix} 2s \\ 2p \\ s+p \end{bmatrix}$$

при $\forall\, s, p \in \mathbf{R}$, $|s|+|p|\neq 0$ являются собственными для матрицы A с собственным числом $\lambda_2=4$.

Положив, например, $s=1$, $p=0$, получим собственный вектор-столбец

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти собственный вектор-столбец X_3, ортогональный вектору X_2, определим s и p из условия ортогональности векторов X_2 и X_3, т. е.

$$4s+s+p=0,$$

откуда $p=-5s$. Положив $s=\frac{1}{2}$, $p=-\frac{5}{2}$, имеем

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Пронормировав векторы X_2 и X_3, получим

$$X_2^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

Искомым преобразованием является

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{30}} y_3; \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 - \frac{5}{\sqrt{30}} y_3; \\ x_3 &= -\frac{2}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2 - \frac{2}{\sqrt{30}} y_3. \end{aligned}\right\}$$

Пример 3. Убедиться в том, что одна из квадратичных форм

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2;$$

$$L_1(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

является знакоопределенной, и найти преобразование, одновременно приводящее эти формы к каноническому виду.

Решение. Квадратичная форма $L(x_1, x_2)$ является знакоопределенной, так как главные миноры матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

этой формы положительны.

Очевидно, что преобразование

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2; \\ x_2 &= y_2 \end{aligned}\right\}$$

приводит квадратичную форму

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$$

к нормальному каноническому виду. Следовательно,

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразование $X = S_1Y$ переводит форму $L_1(x_1, x_2)$ в форму

$$L_2(y_1, y_2) = Y^T S_1^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} S_1 Y = 2y_1y_2.$$

Таким образом,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ортогональное преобразование, приводящее $L_2(y_1, y_2)$ к каноническому виду, имеет матрицу

$$C = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Так как

$$S = S_1C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

то искомым преобразованием является

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{2}\,z_2; \\ x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} z_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} z_2. \end{aligned}\right\}$$

Задачи

В задачах 473—480 найти ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду каждую из квадратичных форм, и записать канонический вид квадратичной формы:

473. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$.

474. $5x_1^2 + 12x_1x_2$.

475. $7x_1^2 + 3x_2^2 + 6\sqrt{5}\,x_1x_2$.

476. $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4\sqrt{2}\,x_2x_3$.

477. $5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3$.

478. $4x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_1x_3$.

479. $5x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1x_3$.

480. а) $x_1^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 7x_2^2 - 8x_2x_3 + x_3^2$; б) $17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$.

481. Найти преобразование, приводящее одновременно данные пары квадратичных форм к каноническому виду: а) $L(x_1, x_2)=8x_1^2+4x_1x_2$, $L_1(x_1, x_2)=4x_1^2+2x_1x_2$;

б) $L(x_1, x_2)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$; $L_1(x_1, x_2)=2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+$ $+2x_1x_2$.

5.4. Применение квадратичных форм к упрощению уравнений фигур

I. Упрощение уравнений фигур второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости задана *прямоугольная декартова система координат (репер)* $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Если x, y — координаты произвольной точки на плоскости в данной системе координат, то, как известно, следующие уравнения определяют:

(I) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — *эллипс;*

(II) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — *точку;*

(III) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ — *пустое множество точек (мнимый эллипс);*

(IV) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$ — *гиперболы;*

(V) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — *пару пересекающихся прямых;*

(VI) $y^2=2px$ $(x^2=2py)$ — *параболу;*

(VII) $y^2=a^2$ $(x^2=a^2)$ — *пару параллельных прямых;*

(VIII) $y^2=0$ $(x^2=0)$ — *пару слившихся прямых;*

(IX) $y^2=-a^2$ $(x^2=-a^2)$ — *пустое множество точек.*

Уравнения (I)—(IX) называются *каноническими* уравнениями фигур второго порядка на плоскости.

Уравнения (I)—(III) определяют фигуру *эллиптического*, (IV), (V) — *гиперболического* и (VI)—(IX) — *параболического типов.*

Рассмотрим уравнение второй степени

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+gy+f=0, \tag{5.4}$$

где $|a|+|b|+|c|\neq 0$.

Множество точек плоскости, координаты x, y которых в системе $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ удовлетворяют уравнению (5.4), образует некоторую фигуру.

Уравнение (5.4) называется *общим уравнением* фигуры второго порядка на плоскости.

Сумма первых трех членов данного уравнения

$$ax^2+bxy+cy^2$$

является квадратичной формой двух переменных x, y и называется *квадратичной формой, соответствующей уравнению* (5.4).

Матрица этой формы имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}.$$

Если $\det A>0$, то уравнение (5.4) определяет фигуру эллиптического типа; если $\det A<0$ — гиперболического типа; если $\det A=0$ — параболического типа.

Существует такая система координат $(O'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$, что уравнение (5.4) в этой системе имеет один из видов (I)—(IX). Чтобы найти эту систему, поступаем следующим образом.

Находим ортогональное преобразование

$$\left.\begin{aligned} x&=t_{11}x'+t_{12}y'; \\ y&=t_{21}x'+t_{22}y', \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

приводящее квадратичную форму, соответствующую данному уравнению, к каноническому виду.

По этому преобразованию ортонормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы, соответствующей данному уравнению, имеют вид:

$$\vec{e}_1{}'=t_{11}\vec{e}_1+t_{21}\vec{e}_2;$$

$$\vec{e}_2{}'=t_{12}\vec{e}_1+t_{22}\vec{e}_2.$$

Находим уравнение

$$a_1x'^2+c_1y'^2+d_1x'+g_1y'+f=0 \tag{5.6}$$

данной фигуры в репере $(O; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$, которое получим, если в уравнение (5.4) вместо x, y подставим их значения из формул (5.5).

Приведя уравнение (5.6) к виду

$$a_1(x'-\alpha)^2+c_1(y'-\beta)^2=f_1$$

(путем дополнения членов, содержащих x'^2 и x', а также y'^2 и y' до полного квадрата), находим точку $O'(\alpha; \beta)$ в репере $(O; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$.

В репере $(O; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ уравнение данной фигуры имеет канонический вид.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение

$$17x^2+12xy+8y^2+20\sqrt{5}\,x+20=0$$

и построить фигуру, определяемую этим уравнением.

Решение. Квадратичная форма

$$L(x, y)=17x^2+12xy+8y^2,$$

соответствующая данному уравнению, имеет матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $L(x, y)$ к каноническому виду, найдем ортонормированные собственные вектор-столбцы матрицы A.

Корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

матрицы A будут $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 5$.

Сначала найдем нормированный собственный вектор-столбец матрицы A с собственным числом $\lambda_1 = 20$. Для этого составим систему

$$\left.\begin{aligned} -3u_1 + 6u_2 &= 0; \\ 6u_1 - 12u_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

из которой находим $u_1 = 2u_2$ и, следовательно, столбец

$$\begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix}, \ \forall t \in \mathbf{R}, \ t \neq 0,$$

является собственным столбцом матрицы A. Столбец

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

является нормированным собственным столбцом матрицы A.

Координаты v_1 и v_2 собственных вектор-столбцов матрицы A с собственным числом $\lambda_2 = 5$ находим из системы

$$\left.\begin{aligned} 12v_1 + 6v_2 &= 0; \\ 6v_1 + 3v_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, получаем $v_2 = -2v_1$ и, следовательно, столбец

$$\begin{bmatrix} s \\ -2s \end{bmatrix}, \ \forall s \in \mathbf{R}, \ s \neq 0,$$

является собственным вектор-столбцом матрицы A. Столбец

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

является нормированным собственным вектор-столбцом матрицы A.

Искомым ортогональным преобразованием является

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'; \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

Базисные векторы $\vec{e}_1{}'$ и $\vec{e}_2{}'$, получающиеся этим ортогональным преобразованием из базисных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, задаются формулами

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2; \\ \vec{e}_2{}' &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

Найдем уравнение данной фигуры в системе координат $(O;\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$. Для этого подставим в ее уравнение значения x, y из (5.7). Получим

$$20x'^2+5y'^2+40x'-20y'+20=0$$

или

$$4x'^2+y'^2+8x'-4y'+4=0,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{(x'+1)^2}{1}+\frac{(y'-2)^2}{4}=1.$$

Осуществляя параллельный перенос системы $(O;\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$ на вектор $\overrightarrow{OO'}=-\vec{e}_1{}'+2\vec{e}_2{}'$, получим систему $(O';\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$, в которой последнее уравнение, а следовательно, и данное принимает канонический вид

$$\frac{x''^2}{1}+\frac{y''^2}{4}=1. \qquad (5.9)$$

Таким образом, данное уравнение определяет эллипс.

Для того чтобы построить этот эллипс, нужно построить фигуру (5.9) в системе $O';\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$, которая получается из $(O;\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$ параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{OO'}=-\vec{e}_1{}'+2\vec{e}_2{}'$. При этом вместо векторов (5.8) можно строить векторы

$$\overrightarrow{OM_1{}'}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2;$$

$$\overrightarrow{OM_2{}'}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2.$$

На рис. 5.1 изображена кривая, определяемая данным уравнением.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение

$$5x^2+24xy-5y^2+6\sqrt{13}\,x+4\sqrt{13}\,y+13=0$$

и построить фигуру, определяемую этим уравнением.

Решение. Квадратичная форма

$$L(x, y)=5x^2+24xy-5y^2,$$

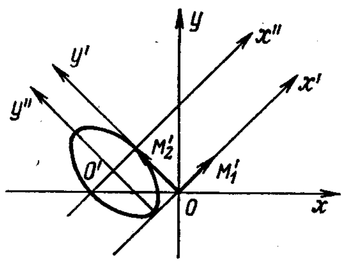

Рис. 5.1

соответствующая данному уравнению, имеет матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{bmatrix}.$$

Корнями ее характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 12 \\ 12 & -5-\lambda \end{vmatrix}=0$$

будут $\lambda_1=13$, $\lambda_2=-13$.

Для нахождения собственных вектор-столбцов матрицы A с собственным числом $\lambda_1=13$ составляем систему

$$\left.\begin{aligned} -8u_1+12u_2=0; \\ 12u_1-18u_2=0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $u_1=\dfrac{3}{2}u_2$.

Собственный столбец имеет вид

$$\begin{bmatrix} 3t \\ 2t \end{bmatrix}, \ \forall t\in\mathbf{R},\ t\neq 0.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

есть нормированный собственный столбец.

Координаты v_1 и v_2 собственных вектор-столбцов матрицы A с собственным числом $\lambda_2=-13$ находим из системы

$$\left.\begin{aligned} 18v_1+12v_2=0; \\ 12v_1+\ 8v_2=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее, получаем $v_1 = -\frac{2}{3} v_2$ и, следовательно,

$$\begin{bmatrix} -2s \\ 3s \end{bmatrix}, \ \forall s \in \mathbf{R}, \ s \neq 0,$$

является собственным вектор-столбцом матрицы A. Столбец

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

является нормированным собственным вектор-столбцом матрицы A.

Ортогональное преобразование

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3}{\sqrt{13}} x' - \frac{2}{\sqrt{13}} y'; \\ y &= \frac{2}{\sqrt{13}} x' + \frac{3}{\sqrt{13}} y' \end{aligned}\right\} \qquad (5.10)$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду. Оно переводит базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ в векторы

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{e}_2; \\ \vec{e}_2{}' &= -\frac{2}{\sqrt{13}} \vec{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{e}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

Найдем уравнение данной фигуры в системе координат $(O; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$. Подставив в данное уравнение значения x и y из (5.10), получим

$$13x'^2 - 13y'^2 + 26x' + 13 = 0$$

или

$$x'^2 - y'^2 + 2x' + 1 = 0,$$

что можно записать в виде

$$(x'+1)^2 - y'^2 = 0.$$

Осуществляя параллельный перенос системы $(O; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ на вектор $\overrightarrow{OO'} = -\vec{e}_1{}'$, получим систему $(O'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$, в которой уравнение данной фигуры имеет канонический вид:

$$x''^2 - y''^2 = 0.$$

Это уравнение, а следовательно, и данное определяет пару прямых

$$x''-y''=0;\ x''+y''=0.$$

Для того чтобы построить эти прямые, построим наряду с системой координат $(O;\ \vec{e}_1',\ \vec{e}_2)$ систему $(O';\ \vec{e}_1',\ \vec{e}_2')$, при этом вместо векторов (5.11) можно брать векторы

$$\overrightarrow{OM_1'}=\ \ 3\vec{e}_1+2\vec{e}_2;$$

$$\overrightarrow{OM_2'}=-2\vec{e}_1+3\vec{e}_2.$$

На рис. 5.2 изображена фигура, определяемая данным уравнением.

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение

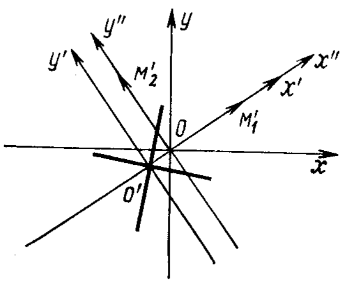

Рис. 5.2

$$16x^2-24xy+9y^2+25x-50y+50=0$$

и построить фигуру, определяемую этим уравнением на плоскости.

Решение. Квадратичная форма $L(x,\ y)=16x^2-24xy+9y^2$, соответствующая данному уравнению, имеет матрицу

$$A=\begin{bmatrix}16 & -12\\ -12 & 9\end{bmatrix}.$$

Корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}16-\lambda & -12\\ -12 & 9-\lambda\end{vmatrix}=0$$

будут $\lambda_1=0$, $\lambda_2=25$.

Собственные вектор-столбцы матрицы A с собственным числом $\lambda_1=0$ находим из системы

$$\left.\begin{aligned}16u_1-12u_2&=0;\\ -12u_1+\ 9u_2&=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}u_1&=3t;\\ u_2&=4t.\end{aligned}\right\}$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix}3t\\ 4t\end{bmatrix},\ \forall\, t\in\mathbf{R},\ t\neq 0,$$

является собственным вектор-столбцом матрицы A. Столбец

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

будет нормированным собственным столбцом матрицы A.

Координаты v_1 и v_2 собственных векторов-столбцов матрицы A с собственным числом $\lambda_2=25$ находятся из системы

$$\left.\begin{aligned} -9v_1-12v_2=0; \\ -12v_1-16v_2=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая ее, получим $v_1=-\frac{4}{3}v_2$, и, следовательно,

$$\begin{bmatrix} -4s \\ 3s \end{bmatrix}, \ \forall s\in\mathbf{R}, \ s\neq 0,$$

является собственным вектор-столбцом матрицы A. Столбец

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

будет нормированным вектор-столбцом матрицы A.

Ортогональное преобразование

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'; \\ y=\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y' \end{aligned}\right\} \qquad (5.12)$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду. Оно переводит базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ в векторы

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_1{}'= \frac{3}{5}\vec{e}_1+\frac{4}{5}\vec{e}_2; \\ \vec{e}_2{}'=-\frac{4}{5}\vec{e}_1+\frac{3}{5}\vec{e}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

Найдем уравнение данной фигуры в системе координат $(O;\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}')$. Подставив в ее уравнение значения x и y из (5.12), получим

$$25y'^2-25x'-50y'+50=0$$

или

$$y'^2-x'-2y'+2=0,$$

что можно записать в виде

$$(y'-1)^2=x'-1.$$

Осуществляя параллельный перенос системы $(O;\ \vec{e}_1',\ \vec{e}_2')$ на вектор $\overrightarrow{OO'}=\vec{e}_1'+\vec{e}_2'$, получим систему $(O';\ \vec{e}_1',\ \vec{e}_2')$, в которой уравнение данной фигуры имеет канонический вид

$$y''^2=x''.$$

Это уравнение, а следовательно, и данное определяет параболу. Для того чтобы построить параболу, построим наряду с системой координат $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ систему $(O';\ \vec{e}_1',\ \vec{e}_2')$. При этом вместо векторов (5.13) можно взять векторы

$$\overrightarrow{OM_1'}=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2;$$

$$\overrightarrow{OM_2'}=-4\vec{e}_1+3\vec{e}_2.$$

На рис. 5.3 изображена линия, определяемая данным уравнением.

II. Упрощение уравнений фигур второго порядка в пространстве

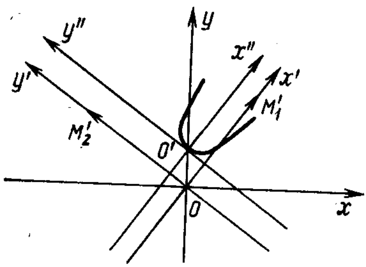

Рис. 5.3

Рассмотрим общее уравнение фигуры второго порядка

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+ +2a_{13}xz+2a_{23}yz+bx+dy+ +gz+f=0, \qquad (5.14)$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{ij}, $i, j=1, 2, 3$, отличен от нуля.

Сумма первых шести членов этого уравнения

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+ +2a_{13}xz+2a_{23}yz \qquad (5.15)$$

является квадратичной формой трех переменных x, y, z, и называется *квадратичной формой, соответствующей уравнению* (5.14). Ее матрица имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & \dots & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Известно, что существует ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму (5.15) к каноническому виду.

Упрощение уравнения (5.14) и построение фигуры, определяемой этим уравнением, производится способом, аналогичным способу, изложенному в пункте II.

Пример 4. Построить фигуру, заданную уравнением

$$9x^2+20y^2+20z^2-40yz-36x-4\sqrt{2}\,y+4\sqrt{2}\,z+4=0.$$

Решение. Квадратичная форма, соответствующая этому уравнению, имеет вид

$$9x^2+20y^2+20z^2-40yz,$$

а ее матрица

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20 \\ 0 & -20 & 20 \end{bmatrix}.$$

Характеристические числа этой матрицы $\lambda_1=9$, $\lambda_2=40$, $\lambda_3=0$; следовательно, канонический вид квадратичной формы

$$9x'^2+40y'^2.$$

Найдем ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму, соответствующую данному уравнению, к каноническому виду.

Собственные вектор-столбцы, соответствующие собственному числу $\lambda_1=9$, находим из системы

$$\left.\begin{array}{l} 0\cdot u+0\cdot v+0\cdot w=0; \\ 0\cdot u+11v-20w=0; \\ 0\cdot u-20v+11w=0, \end{array}\right\}$$

откуда собственный вектор-столбец имеет вид

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \forall t\in\mathbf{R},\ t\neq 0.$$

Чтобы найти собственные столбцы с собственным числом $\lambda_2=40$, составим систему

$$\left.\begin{array}{l} 31u+0\cdot v+0\cdot w=0; \\ 0\cdot u-20v-20w=0; \\ 0\cdot u-20v-20w=0, \end{array}\right\}$$

из которой находим, что

$$\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{bmatrix}, \ \forall s\in\mathbf{R},\ s\neq 0,$$

является искомым собственным столбцом.

Собственным столбцом матрицы A с собственным числом $\lambda_3=0$ будет столбец

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ r \end{bmatrix}, \ \forall r\in\mathbf{R},\ r\neq 0,$$

элементы которого найдены из системы

$$\left.\begin{aligned} 9u&=0;\\ 20v-20w&=0;\\ -20v+20w&=0. \end{aligned}\right\}$$

Пронормировав собственные столбцы, получим матрицу искомого преобразования

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Итак,

$$\left.\begin{aligned} x&=x';\\ y&=\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z';\\ z&=-\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{aligned}\right\} \qquad (5.16)$$

является ортогональным преобразованием, приводящим квадратичную форму, соответствующую данному уравнению, к каноническому виду.

Это преобразование переводит базисные векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ в векторы

$$\left.\begin{aligned} \vec{e_1}'&=\vec{e_1};\\ \vec{e_2}'&=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_3};\\ \vec{e_3}'&=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.17)$$

Найдем уравнение данной фигуры в системе координат $(O;\ \vec{e_1}',\ \vec{e_2}',\ \vec{e_3}')$. Подставив в ее уравнение значения x, y, z из (5.16), получим

$$9x'^2+40y'^2-36x'-8y'+4=0$$

или

$$\frac{(x'-2)^2}{3{,}6}+\frac{(y'-0{,}1)^2}{0{,}81}=1.$$

Осуществляя параллельный перенос системы $(O;\ \vec{e_1}',\ \vec{e}^{2\prime},\ \vec{e_2}')$ на вектор $\overrightarrow{OO'}=2\vec{e_1}'+0{,}1\vec{e_2}'$, получим систему $(O';\ \vec{e_1}',\ \vec{e_2}',\ \vec{e_3}')$, в которой уравнение данной фигуры имеет вид

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

где $a = \sqrt{3{,}6}$; $b = 0{,}9$. Это уравнение, а следовательно, и данное определяет эллиптический цилиндр с образующей, параллельной $\vec{e}_3{}'$.

Для того чтобы построить этот цилиндр, наряду с системой координат $(O;\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$, построим систему координат $(O';\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}',\ \vec{e}_3{}')$. При этом вместо векторов (5.17) можно брать векторы

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{e}_1;$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \vec{e}_2 - \vec{e}_3;$$

$$\overrightarrow{OM_3} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

На рис. 5.4 изображен цилиндр, определяемый данным уравнением.

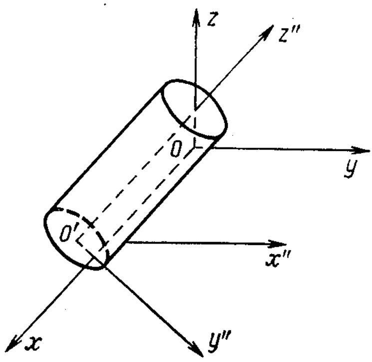

Рис. 5.4

Задачи

В задачах 482—489 построить на плоскости фигуру, определяемую каждым из данных уравнений, приводя предварительно уравнение к каноническому виду:

482. $2xy - 6x + 4y - 20 = 0.$

483. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$

484. $8y^2 + 6xy - 12x + 26y + 11 = 0.$

485. $48x^2 + 64xy + 32x + 16y + 5 = 0.$

486. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + 16 = 0.$

487. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0.$

488. $8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y + 41 = 0.$

489. $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y = 0.$

В задачах 490—492 построить в пространстве фигуру, определяемую каждым из данных уравнений, приведя предварительно уравнение к каноническому виду:

490. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0.$

491. $x^2 + y^2 - 3z^2 - 6yz - 6xz - 2xy + 2x + 2y + 4z = 0.$

492. $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0.$

Глава 6. ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Функциональные матрицы. Дифференцирование и интегрирование

Матрица, элементами которой являются функции, называется *функциональной*. Она имеет вид

$$F(t)=\begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{m1}(t) & f_{m2}(t) & \dots & f_{mn}(t) \end{bmatrix}, \qquad (6.1)$$

где $f_{ij}(t)$ —произвольные функции, определенные на некотором интервале $]a;\ b[$.

Функциональную матрицу (6.1) обозначают также

$$F(t)=(f_{ij}(t)),\ i=1,\ 2,\ \dots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножение матриц, транспонирование матрицы, нахождение обратной матрицы для функциональных матриц определяются так же, как и для числовых.

Пусть $f_{ij}(t)$ — дифференцируемые функции на интервале $]a;\ b[$. *Производной матрицы* $F(t)$ называется матрица, каждый элемент которой равен производной соответствующего элемента матрицы $F(t)$. Производную матрицы $F(t)$ будем обозначать: $F'(t), \dfrac{dF}{dt}$. Таким образом

$$\frac{dF}{dt}=(f'_{ij}(t)).$$

Имеют место следующие свойства.

1. Если C — числовая матрица, то $\dfrac{dC}{dt}=0$.

2. $\dfrac{d}{dt}(F_1(t)+F_2(t))=\dfrac{dF_1}{dt}+\dfrac{dF_2}{dt}$.

3. $\dfrac{d}{dt}(F_1(t)F_2(t))=\dfrac{dF_1}{dt}F_2(t)+F_1(t)\dfrac{dF_2}{dt}$.

4. $\dfrac{d}{dt}(CF(t))=C\dfrac{dF}{dt};\ \dfrac{d}{dt}(F(t)C)=\dfrac{dF}{dt}C$.

5. Если $F^{-1}(t)$ — матрица, обратная к матрице $F(t)$, то

$$\frac{dF^{-1}}{dt} = -F^{-1}(t)\frac{dF}{dt}F^{-1}(t).$$

Заметим, что для функциональной матрицы $F(t)$ обратная существует при тех значениях t, при которых $\det F(t) \neq 0$.

Неопределенным интегралом от функциональной матрицы $F(t)$ по переменной t называется функциональная матрица, каждый элемент которой является неопределенным интегралом по переменной t от соответствующего элемента матрицы $F(t)$.

Неопределенный интеграл от матрицы $F(t)$ будем обозначать $\int F(t)\,dt$. Таким образом,

$$\int F(t)\,dt = \left(\int f_{ij}(t)\,dt\right).$$

Аналогично вводится понятие *определенного интеграла* от функциональной матрицы

$$\int_a^b F(t)\,dt = \left(\int_a^b f_{ij}(t)\,dt\right).$$

Неопределенный и определенный интегралы от матриц обладают теми же свойствами, что и соответствующие интегралы от функций. При этом следует иметь в виду, что произведение матриц не обладает свойством коммутативности.

Пример 1. Найти $(F(t)C)'$, где

$$F(t) = \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Используя свойство 4, имеем

$$(F(t)C)' = F'(t)C = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ -\sin t & -\cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos t + \sin t \\ -2\sin t + \cos t \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Найти $\int_1^2 F(t)\,dt$, где $F(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & t \\ 1 & 2t \end{bmatrix}$.

Решение. Согласно определению, имеем

$$\int_1^2 F(t)\,dt = \left.\begin{bmatrix} t^3 & \frac{t^2}{2} \\ t & t^2 \end{bmatrix}\right|_1^2 = \begin{bmatrix} 7 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Задачи

В задачах 493—496 найти производные и неопределенные интегралы от матриц:

493. $\begin{bmatrix} t^2 & e^t & t+1 \\ \sin^3 t & 2 & t^3 \end{bmatrix}$. **494.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

495. $\begin{bmatrix} 2t & 3t \\ -t & 4t \end{bmatrix}$. **496.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t+2 & e^{3t} & t^2 \\ \cos 2t & \sin t & t+5 \end{bmatrix}$.

497. Найти

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} \cos t & 2\sin t \\ 1+\sin t & -\cos t \end{bmatrix} dt.$$

498. Найти

$$\int_2^3 \begin{bmatrix} t & t^2 & 1-t^2 \\ e^t & 2 & 1+t \\ t^2 & 1+t^2 & 1 \end{bmatrix} dt.$$

499. Найти $(F(t)A)'-(AF(t))'$, если

$$F(t)=\begin{bmatrix} t & -5 \\ -t & 3t \end{bmatrix}; \quad A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

500. Найти $\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t)A\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}} AF(t)\,dt$, если

$$F(t)=\begin{bmatrix} 3\cos 2t & \sin 2t \\ 1 & 2\sin t \end{bmatrix}; \quad A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

501. Доказать, что матрица

$$X=\begin{bmatrix} t & t^2 \\ 1 & t^3 \end{bmatrix}$$

удовлетворяет уравнению $AX'-Y=0$, где

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y=\begin{bmatrix} 2 & 4t-3t^2 \\ 3 & 6t \end{bmatrix}.$$

502. Доказать, что матрица

$$X=\begin{bmatrix} t^2+t+1 \\ t^2-t+2 \\ 2t^2+1 \end{bmatrix}$$

удовлетворяет уравнению $X'=AX$, где

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6.2. Приведение матрицы к жордановой форме

Если существует невырожденная матрица T такая, что $B=T^{-1}AT$ — жорданова, то матрица B называется *жордановой формой* матрицы A, матрица A называется *приводящейся к жордановой форме,* а T — *матрицей, приводящей матрицу A к жордановой форме.*

При этом если T — вещественная матрица, то будем говорить, что матрица A приводится к жордановой форме в вещественном пространстве, если же T — комплексная матрица, то в комплексном пространстве.

Всякая квадратная числовая матрица приводится в комплексном пространстве к жордановой форме, и эта форма единственная (с точностью до расположения блоков).

Вещественная квадратная матрица приводится в вещественном пространстве к жордановой форме тогда и только тогда, когда характеристический многочлен матрицы имеет только вещественные корни.

Замечание. Так как характеристические числа вещественной симметрической матрицы вещественны, то эта матрица приводится в вещественном пространстве к жордановой форме.

Существует несколько способов приведения матрицы к жордановой форме. Рассмотрим один из них, заключающийся в следующем.

1. Для данной матрицы A порядка n находим характеристическую матрицу $A-\lambda E$ и характеристические числа.

Пусть λ_i — характеристическое число кратности m_i.

2. Для каждого характеристического числа λ_i кратности m_i находим соответствующие ему жордановы клетки (их количество и размеры).

Число клеток Жордана, соответствующих собственному числу λ_i, равно максимальному числу линейно-независимых собственных векторов с собственным числом λ_i, т. е. равно $n-r_i$, где r_i — ранг матрицы $A-\lambda_i E$. При этом если $n-r_i=m_i$, то λ_i соответствует m_i клеток вида $J_1(\lambda_i)$; если $n-r_i<m_i$, то λ_i соответствует g_h клеток вида $J_h(\lambda_i)$, где

$$g_h=r_{(A-\lambda_i E)^{h-1}}-2r_{(A-\lambda_i E)^{h}}+r_{(A-\lambda_i E)^{h+1}}, \tag{6.2}$$

$$h=1, 2, \ldots, l; \quad \sum_{h=1}^{l} g_h h=m_i.$$

В частности, если λ_i — простой корень характеристического уравнения, то ему соответствует одна жорданова клетка $J_1(\lambda_i)$.

Пример 1. Выяснить, приводится ли матрица

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

к жордановой форме в вещественном пространстве.

Решение. 1. Характеристическое уравнение данной матрицы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}=0$$

или

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda=0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=2\pm i$.

Так как среди корней характеристического уравнения есть комплексные, то данная матрица в вещественном пространстве не приводится к жордановой форме.

2. Заметим, что в комплексном пространстве жорданова форма данной матрицы существует и имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Найти в комплексном пространстве жорданову форму матрицы

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Решение. 1. Характеристическая матрица для данной матрицы A имеет вид

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix},$$

а ее характеристическими числами являются $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$, кратности которых соответственно равны $m_1=1$ и $m_2=2$.

2. Так как $m_1=1$, то в искомой жордановой форме имеется одна клетка $J_1(2)$.

Найдем жордановы клетки, соответствующие характеристическому числу $\lambda_2=-2$.

Матрица

$$A+2E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

имеет ранг $r_2=2$. Так как $n-r_2=1$, то данному характеристическому числу соответствует одна жорданова клетка. Очевидно, что в данном случае эта клетка имеет вид $J_2(-2)$.

Жордановой формой матрицы A является

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что полученная жорданова форма является жордановой формой данной матрицы и в вещественном пространстве.

Пример 3. Найти жорданову форму матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. 1. Характеристическая матрица для данной имеет вид

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}.$$

Матрица A имеет одно характеристическое число $\lambda_1=1$ кратности $m_1=4$.

2. Матрица

$$A-E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

имеет ранг $r_1=2$. Так как $n-r_1=2$, то данному характеристическому числу соответствуют две клетки Жордана. Найдем число g_1 клеток $J_1(1)$. По формуле (6.2) имеем

$$g_1=r_{(A-E)^0}-2r_{A-E}+r_{(A-E)^2}.$$

Так как $r_{(A-E)^0}=4$, $r_{A-E}=2$, а ранг матрицы

$$(A-E)^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

равен 1, то $g_1=4-4+1=1$. Следовательно, в жордановой форме данной матрицы имеется одна клетка вида $J_1(1)$. Очевидно, что вторая клетка имеет вид $J_3(1)$.

Жордановой формой матрицы A является

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задачи

В задачах 503—509 выяснить, приводится ли к жордановой форме каждая из указанных матриц в вещественном пространстве:

503. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

504. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

505. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

506. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

507. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

508. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

509. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

В задачах 510—519 для каждой из данных матриц найти жорданову форму.

510. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

511. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

512. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

513. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

514. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

515. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

516. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. 517. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

518. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. 519. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6.3. Нахождение матрицы, приводящей данную матрицу к жордановой форме

Если матрица A порядка n приводится к диагональному виду $B=T^{-1}AT$, то столбцами матрицы T, приводящей данную матрицу к диагональному виду, являются координаты n линейно-независимых собственных векторов матрицы A.

Если жорданова форма матрицы A не является диагональной, то матрица T, приводящая матрицу A к жордановой форме, может быть найдена несколькими способами. Рассмотрим один из них.

Если f — линейное отображение, матрица которого в базисе

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \tag{6.3}$$

есть A, а

$$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}' — \tag{6.4}$$

базис, в котором отображение f имеет жорданову матрицу B, то приводящая матрица T есть матрица перехода от базиса (6.3) к базису (6.4), нахождение которой было рассмотрено ранее.

Следовательно, поступаем так.

1. Находим жорданову форму данной матрицы.

2. Находим координаты базисных векторов $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \ldots, \vec{e}_n{}'$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

3. Составляем матрицу T перехода от базиса (6.3) к базису (6.4).

Пример. Найти матрицу T, приводящую матрицу

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

к жордановой форме.

Решение. 1. Жордановой формой матрицы A является

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(см. пример 2 п. 6.2).

2. Из вида матрицы B следует, что

$$f(\vec{e}_1{}') = 2\vec{e}_1{}'; \tag{6.5}$$

$$f(\vec{e}_2{}') = -2\vec{e}_2{}'; \tag{6.6}$$

$$f(\vec{e}_3{}') = \vec{e}_2{}' - 2\vec{e}_3{}'. \tag{6.7}$$

Из (6.5) заключаем, что $\vec{e}_1{}'$ — собственный вектор матрицы A с собственным числом 2. Координаты x_1, x_2, x_3 собственного вектора $\vec{e}_1{}'$ в базисе (6.3) находим из системы

$$\left.\begin{aligned} -3x_1+0\cdot x_2+1x_3&=0;\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3&=0;\\ -1x_1+0\cdot x_2-5x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая систему, получим $x_1=0$, $x_2=k$, $x_3=0$, где $k\in\mathbf{R}$, $k\neq 0$.

Таким образом,

$$\vec{e}_1{}' = 0\cdot\vec{e}_1 + k\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3. \tag{6.8}$$

Из (6.6) следует, что $\vec{e}_2{}'$ — собственный вектор матрицы A с собственным числом -2. Его координаты y_1, y_2, y_3 в базисе (6.3) находим из системы

$$\left.\begin{aligned} y_1+0\cdot y_2+y_3&=0;\\ 0\cdot y_1+4y_2+0\cdot y_3&=0;\\ -y_1+0\cdot y_2-y_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

Решая систему, имеем: $y_1=-t$, $y_2=0$, $y_3=t$, где $t\in\mathbf{R}$, $t\neq 0$.

Таким образом,

$$\vec{e}_2{}' = -t\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + t\vec{e}_3. \tag{6.9}$$

Координаты z_1, z_2, z_3 вектора $\vec{e}_3$ в базисе (6.3) находим из соотношения (6.7), которое можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t\\ 0\\ t \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3 \end{bmatrix}$$

или

$$\left.\begin{aligned} -z_1+z_3&=-t-2z_1;\\ 2z_2&=-2z_2;\\ -z_1-3z_3&=t-2z_3. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, имеем: $z_2=0$, $z_3=s$, $z_1=-t-s$, где $s, t\in\mathbf{R}$, $|s|+|t|\neq 0$.

Таким образом,

$$\vec{e}_3{}' = (-t-s)\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + s\vec{e}_3. \tag{6.10}$$

Из (6.8) — (6.10) следует, что

$$T=\begin{bmatrix} 0 & -t & -t-s \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & s \end{bmatrix}.$$

Задачи

В задачах 520—529 найти матрицу T, приводящую данную матрицу к жордановой форме:

520. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

521. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

522. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

523. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

524. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

525. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

526. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

527. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

528. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

529. $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

6.4. Матричная экспонента

Пусть функция $f(x)$ задана в виде ряда, т. е.

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k+\ldots \qquad (6.11)$$

Тогда $f(A)$, где A — квадратная числовая матрица, определяется равенством

$$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\ldots+a_kA^k+\ldots \qquad (6.12)$$

Правая часть этого равенства представляет собой матрицу, каждый элемент которой является числовым рядом. Если все эти числовые ряды сходятся, то матричный ряд (6.12) называется *сходящимся*.

Имеют место следующие признаки сходимости матричных рядов.

1. Матричный ряд (6.12) сходится, если ряд (6.11) сходится при $x=\lambda_i$, где λ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ — характеристические числа матрицы A.

2. Для того чтобы матричный ряд (6.12) сходился, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $|\lambda_i|<R$, где λ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ — характеристические числа матрицы A, R — радиус сходимости ряда (6.11).

Экспонента e^A, где A — квадратная числовая матрица, определяется равенством

$$e^A=\exp A=E+A+\frac{1}{2!}A^2+\ldots+\frac{1}{k!}A^k+\ldots \tag{6.13}$$

Так как для ряда

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots$$

радиус сходимости $R=\infty$, то матричный ряд (6.13) сходится для любой квадратной матрицы A.

Укажем некоторые свойства матричной экспоненты.

1. Если $AB=BA$, то $e^Ae^B=e^Be^A=e^{A+B}$.

2. $e^{A^T}=(e^A)^T$.

3. $\det e^A=e^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}}$, где a_{ii} $(i=1, 2, \ldots, n)$ — диагональные элементы матрицы A.

4. $\det e^A\neq 0$ для любой матрицы A.

5. $(e^A)^{-1}=e^{-A}$.

6. $\dfrac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}$.

Укажем некоторые способы вычисления матричной экспоненты.

1. Пусть матрица A — жорданова. Тогда: а) если

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

то

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix};$$

б) если

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

то

$$e^{At}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где n — порядок матрицы A;

в) если

$$A=\begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_k}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

то

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{J_{m_1}(\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_{m_2}(\lambda_2)} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_{m_k}(\lambda_k)} \end{bmatrix}.$$

2. Пусть матрица A не является жордановой. Тогда e^{At} может быть найдена одним из следующих способов: а)

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}, \tag{6.14}$$

где J — жорданова форма матрицы A, а T — матрица, приводящая A к этой жордановой форме, т. е. $J=T^{-1}AT$;

б) пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — характеристические числа матрицы A, кратности которых соответственно равны $m_1, m_2, \dots, m_s$ $(m_1+m_2+\dots+m_s=n$, где n — порядок матрицы A). Тогда

$$e^{At}=e^{\lambda_1 t}(G_1+G_2t+\dots+G_{m_1}t^{m_1-1})+\dots+$$

$$+e^{\lambda_s t}(Q_1+Q_2t+\dots+Q_{m_s}t^{m_s-1}), \tag{6.15}$$

где $G_1, G_2, \dots, G_{m_1}, \dots, Q_1, Q_2, \dots, Q_{m_s}$ — матрицы порядка n. Для их нахождения составляем матричное равенство

$$f(A)=f(\lambda_1)G_1+f'(\lambda_1)G_2+\ldots+f^{(m_1-1)}(\lambda_1)G_{m_1}+$$

$$+\ldots+f(\lambda_s)Q_1+f'(\lambda_s)Q_2+\ldots+f^{(m_s-1)}(\lambda_s)Q_{m_s}.$$

Взяв в качестве $f(x)$ последовательно любые полиномы $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ соответственно степеней 0, 1, 2, ..., $n-1$, получим систему n матричных уравнений. Решая ее, находим матрицы G_1, G_2, ..., G_{m_1}, ..., Q_1, Q_2, ..., Q_{m_s} и, подставляя их в равенство (6.15), получаем e^{At}.

Заметим, что если характеристическое уравнение матрицы A имеет один корень λ_1 кратности n, то в качестве $f(x)$ берем последовательно полиномы 1, $x-\lambda_1$, $(x-\lambda_1)^2$, ..., $(x-\lambda_1)^{n-1}$.

Пример 1. Найти e^{At}, если

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Согласно пункту «а» способа 1,

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Найти e^{At}, если

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Согласно пункту «б» способа 1,

$$e^{At}=e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Найти e^{At}, если

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Согласно пункту «в» способа 1, имеем

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-5t} & te^{-5t} & \frac{t^2}{2}e^{-5t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-5t} & te^{-5t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Найти e^{At}, если

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Так как матрица A не является жордановой, то используем пункт «а» способа 2. Найдем жорданову форму матрицы A и матрицу, приводящую A к этой форме.

Жорданова форма для данной матрицы имеет вид

$$J=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

а матрицей, приводящей матрицу A к жордановой форме J, является

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{2t}; \quad T^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

то по формуле (6.14) имеем

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}=$$

$$=e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} & t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} & \frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} & \frac{t^3}{6} \\ -\frac{t^3}{6} & 1-\frac{t^3}{6} & t-\frac{t^3}{6} & \frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6} \\ -\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & 1-\frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2} \\ -t & -t & -t & 1-t \end{bmatrix}.$$

Решим эту же задачу, пользуясь пунктом «б» способа 2. Матрица A имеет единственное характеристическое число $\lambda=2$, кратность которого $m=4$. Следовательно, используя формулу (6.15), получаем

$$e^{At}=e^{2t}(G_1+G_2t+G_3t^2+G_4t^3). \qquad (6.16)$$

Для нахождения матриц G_1, G_2, G_3, G_4 составляем матричное равенство

$$f(A)=f(2)G_1+f'(2)G_2+f''(2)G_3+f'''(2)G_4.$$

При $f(x)=1$

$$E=G_1. \qquad (6.17)$$

При $f(x)=x-2$

$$A-2E=G_2. \qquad (6.18)$$

При $f(x)=(x-2)^2$ и $f(x)=(x-2)^3$ получаем соответственно уравнения

$$(A-2E)^2=2G_3; \qquad (6.19)$$

$$(A-2E)^3=6G_4. \qquad (6.20)$$

Из системы уравнений (6.17)—(6.20) получаем:

$$G_1=E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_2=A-2E=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$G_3=\frac{1}{2}(A-2E)^2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$G_4=\frac{1}{6}(A-2E)^3=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Подставляя найденные значения G_1, G_2, G_3, G_4 в равенство (6.16), находим

$$e^{At}=e^{2t}\begin{bmatrix}1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} & t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} & \frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6} & \frac{t^3}{6}\\ -\frac{t^3}{6} & 1-\frac{t^3}{6} & t-\frac{t^3}{6} & \frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\\ -\frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & 1-\frac{t^2}{2} & t-\frac{t^2}{2}\\ -t & -t & -t & 1-t\end{bmatrix}.$$

Задачи

В задачах 530—544 найти e^{At} для каждой из матриц:

530. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$. **531.** $A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

532. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$. **533.** $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

534. $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

535. $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

536. $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$. **537.** $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

538. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

539. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

540. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

541. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

542. $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

543. $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.

544. $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$.

6.5. Матричный способ решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему n линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n, \end{aligned}\right\}$$

где коэффициенты a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — постоянные.

Данную систему можно записать в матричном виде:

$$\frac{dX}{dt}=AX, \tag{6.21}$$

где

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Пусть вектор-столбцы

$$\bar{X}_1=\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}; \quad \bar{X}_2=\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}; \quad \dots \quad ; \quad \bar{X}_n=\begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (6.22)$$

где x_{ij} — функции от t, удовлетворяют матричному уравнению (6.21), т. е. являются его решениями.

Если $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ — линейно-независимы, т. е. матрица

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \qquad (6.23)$$

невырожденная, то говорят, что система векторов (6.22) образует *фундаментальную систему решений,* а матрица (6.23) называется *фундаментальной матрицей* системы (6.21).

Фундаментальная матрица (6.23) называется *нормированной* при $t=t_0$, если $\Phi(t_0)=E$.

Если $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы (6.21), то

$$X=\Phi(t)C,$$

где

$$C=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

$c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные, является общим решением системы (6.21).

Для системы (6.21) $\Phi(t)=e^{At}$ и общее решение системы имеет вид

$$X=e^{At}C. \qquad (6.24)$$

Методы отыскания e^{At} по заданной матрице A были рассмотрены.

Если матрица A не является жордановой, в частности — диагональной, то иногда удобно применить подстановку

$$X=TZ, \qquad (6.25)$$

где матрица T такова, что $T^{-1}AT=B$ — жорданова, в результате система (6.21) приведется к системе

$$\frac{dZ}{dt}=BZ. \qquad (6.26)$$

Пусть $Z=e^{Bt}C$ — общее решение системы (6.26). Тогда общее решение системы (6.21), согласно (6.25), имеет вид

$$X=Te^{Bt}C.$$

10 Зак. 553

В частности, если матрица

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

приводит матрицу A к диагональному виду

$$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

то общее решение системы (6.21) имеет вид

$$X=c_1\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t}+c_2\begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}+\ldots+c_n\begin{bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{bmatrix} e^{\lambda_n t}. \qquad (6.27)$$

Если матрица A приводится к диагональному виду в комплексном пространстве, то, чтобы выделить вещественное решение, надо поступить следующим образом. Если в формуле (6.27) λ_i и λ_j — пара сопряженных комплексных чисел, то надо выбрать комплексно-сопряженными числа t_{ki} и t_{kj}, а также c_i и c_j, где $i, j, k=1, 2, \ldots, n$; если λ_k — вещественное, то c_k надо выбрать вещественными.

Пример 1. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1+x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2+x_3; \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3+x_4; \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_4. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде

$$\frac{dX}{dt}=AX,$$

где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$e^{At}=e^t\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(см. п. 6.4), то, согласно формуле (6.24), общее решение данной системы имеет вид

$$X=e^t\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

или

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t\left(c_1+c_2t+c_3\frac{t^2}{2}+c_4\frac{t^3}{6}\right) \\ e^t\left(c_2+c_3t+c_4\frac{t_2}{2}\right) \\ e^t(c_3+c_4t) \\ e^tc_4 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$x_1=e^t\left(c_1+c_2t+\frac{c_3}{2}t^2+\frac{c_4}{6}t^3\right),$$

$$x_2=e^t\left(c_2+c_3t+\frac{c_4}{2}t^2\right),$$

$$x_3=e^t(c_3+c_4t),$$

$$x_4=c_4e^t.$$

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\frac{dX}{dt}=AX,$$

где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица A приводится к диагональной матрице

$$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix},$$

где

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, общее решение данной системы, согласно (6.27), имеет вид

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{9t}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}e^{9t}+c_3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-9t}$$

или

$$x_1=c_2e^{9t}+2c_3e^{-9t};$$
$$x_2=-2c_1e^{9t}-2c_2e^{9t}+c_3e^{-9t};$$
$$x_3=c_1e^{9t}+2c_3e^{-9t}.$$

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\frac{dX}{dt}=AX,$$

где

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Матрица A приводится к жордановой матрице

$$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

где

$$T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В данной системе сделаем подстановку $X=TZ$, где

$$Z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix};$$

$z_i=z_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$.

Получим

$$T\frac{dZ}{dt}=ATZ$$

или

$$\frac{dZ}{dt}=BZ, \tag{6.28}$$

где

$$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Общим решением системы (6.28) является

$$Z=e^{Bt}C=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{-2t}+c_3te^{-2t} \\ c_3e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Общим решением данной системы будет

$$X=TZ=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{-2t}+c_3te^{-2t} \\ c_3e^{-2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_2e^{-2t}+c_3(t+1)e^{-2t} \\ c_1e^{2t} \\ -c_2e^{-2t}-c_3te^{-2t} \end{bmatrix}$$

или

$$x_1=c_2e^{-2t}+c_3(t+1)e^{-2t};$$

$$x_2=c_1e^{2t};$$

$$x_3=-c_2e^{-2t}-c_3te^{-2t}.$$

Пример 4. Дана система

$$\frac{dX}{dt}=AX,$$

где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad X=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Найти общее решение и выделить вещественное решение системы.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

матрицы A имеет корни $\lambda_{1,2}=2\pm i$. Следовательно, матрица A приводится к диагональному виду в комплексном пространстве. Найдем собственные векторы матрицы A. Координаты собственных векторов с собственным числом $\lambda_1=2+i$ находим из системы

$$\left.\begin{aligned}(-1-i)\alpha_1+\alpha_2&=0;\\ -2\alpha_1+(1-i)\alpha_2&=0.\end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, имеем $\alpha_1=p$, $\alpha_2=(1+i)p$, $\forall p\in\mathbf{C}$. Следовательно, собственными векторами с собственным числом $\lambda_1=2+i$ являются

$$\begin{bmatrix}1\\ 1+i\end{bmatrix}p,\quad p\neq 0,\quad p\in\mathbf{C}.$$

Собственными векторами с собственным числом $\lambda_2=2-i$ будут

$$\begin{bmatrix}1\\ 1-i\end{bmatrix}s,\quad s\neq 0,\quad s\in\mathbf{C}.$$

Следовательно, матрица

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1+i & 1-i\end{bmatrix}$$

приводит матрицу A к диагональному виду.

Общее решение данной системы, согласно (6.27), имеет вид

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1-i\end{bmatrix}e^{(2+i)t}+c_2\begin{bmatrix}1\\ 1-i\end{bmatrix}e^{(2-i)t}$$

или

$$x_1=c_1e^{(2+i)t}+c_2e^{(2-i)t};$$

$$x_2=c_1(1+i)e^{(2+i)t}+c_2(1-i)e^{(2-i)t};$$

$$c_1,\ c_2\in\mathbf{C}.$$

Чтобы выделить вещественное решение, надо взять $c_{1,2}=A\pm Bi$, $A,\ B\in\mathbf{R}$. Тогда

$$x_1=(A+Bi)e^{(2+i)t}+(A-Bi)e^{(2-i)t};$$

$$x_2=(A+Bi)(1+i)e^{(2+i)t}+(A-Bi)(1-i)e^{(2-i)t}.$$

Используя формулы Эйлера, имеем

$$x_1=2e^{2t}(A\cos t-B\sin t);$$

$$x_2=2e^{2t}((A-B)\cos t-(A+B)\sin t).$$

Задачи

В задачах 545—559 решить системы $\dfrac{dX}{dt}=AX$, где X — вектор-столбец, A — данная матрица:

545. $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

546. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

547. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

548. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

549. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

550. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

551. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

552. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

553. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

554. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

555. $A=\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

556. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

557. $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

558. $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.

559. $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$.

6.6. Метод вариации решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему n линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+f_1(t); \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+f_2(t); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}a_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n+f_n(t), \end{aligned}\right\}$$

где коэффициенты a_{ij}, $i, j=1, 2, \ldots, n$ — постоянные.

Данную систему можно записать в виде

$$\frac{dX}{dt}=AX+F(t), \tag{6.29}$$

где

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix};\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ F(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему

$$\frac{dX}{dt}=AX, \tag{6.30}$$

которая называется линейной однородной системой, соответствующей данной линейной неоднородной системе (6.29).

Пусть

$$\bar{X}=\Phi(t)C$$

есть общее решение системы (6.30).

Общее решение X системы (6.29) может быть найдено в виде

$$X=\Phi(t)C(t), \tag{6.31}$$

где

$$C(t)=\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt. \tag{6.32}$$

Пример. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}&=3x_1-x_2+e^{3t}; \\ \frac{dx_2}{dt}&=5x_1-3x_2-e^{2t}. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Матричная запись этой системы имеет вид

$$\frac{dX}{dt}=AX+F(t),$$

где

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix};\quad F(t)=\begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix};\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Фундаментальная матрица $\Phi(t)$ однородной системы

$$\frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

соответствующей данной неоднородной системе, имеет вид

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & 5e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\Phi^{-1}(t)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix},$$

то по формуле (6.32) получаем

$$C(t)=\frac{1}{4}\int\begin{bmatrix} 5e^{-2t} & -e^{-2t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\begin{bmatrix} 5e^{t}+1 \\ -e^{5t}-e^{4t} \end{bmatrix}dt=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5e^{t}+t+c_1 \\ -\frac{1}{5}e^{5t}-\frac{1}{4}e^{4t}+c_2 \end{bmatrix}.$$

Подставляя найденное значение $C(t)$ в формулу (6.31), имеем

$$X=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ e^{2t} & 5e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5e^{t}+t+c_1 \\ -\frac{1}{5}e^{5t}-\frac{1}{4}e^{4t}+c_2 \end{bmatrix}$$

или

$$X=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+\frac{24}{5}e^{3t}+\left(t-\frac{1}{4}\right)e^{2t} \\ c_1e^{2t}+5c_2e^{-2t}+4e^{3t}+\left(t-\frac{5}{4}\right)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$x_1=\frac{1}{4}c_1e^{2t}+\frac{1}{4}c_2e^{-2t}+\frac{6}{5}e^{3t}+\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{16}\right)e^{2t};$$

$$x_2=\frac{1}{4}c_1e^{2t}+\frac{5}{4}c_2e^{-2t}+e^{3t}+\left(\frac{t}{4}-\frac{5}{16}\right)e^{2t}.$$

Задачи

В задачах 560—564 решить системы $\frac{dX}{dt}=AX+F(t)$, где X — вектор-столбец, A и $F(t)$ — данные матрицы:

560. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\quad F(t)=\begin{bmatrix} (1-2t^2)e^{2t} \\ (1-2t^2)e^{t} \end{bmatrix}$.

561. $A=\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$

562. $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F(t)=\begin{bmatrix} te^t \\ t^2e^t \\ t^3e^t \end{bmatrix}.$

563. $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad F(t)=\begin{bmatrix} e^{2t}\cos t \\ e^{2t}\sin t \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$

564. $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad F(t)=\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{5t} \\ 1 \end{bmatrix}.$

6.7. Признаки устойчивости и неустойчивости решений систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}=AX,$$

где A — числовая вещественная матрица второго порядка, а

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

Очевидно, что *точкой покоя* такой системы является начало координат. Если матрица A невырожденная, то начало координат является единственной точкой покоя, если вырожденная, то имеется бесконечно много точек покоя, и они составляют прямую.

Классификация точек покоя основана на расположении траекторий вблизи этих точек, которое зависит от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения матрицы A.

I. Если матрица системы невырожденная, то возможны следующие случаи.

Случай 1. λ_1, λ_2 — действительные числа, причем $\lambda_1\lambda_2>0$. Тогда точка покоя называется *узлом* (рис. 6.1—6.4).

Если λ_1 и λ_2 — отрицательные, то решение устойчиво (притом асимптотически) и узел называется *устойчивым* (рис. 6.1, 6.3).

Если λ_1 и λ_2 — положительные, то решение неустойчиво и узел называется *неустойчивым* (рис. 6.2, 6.4).

Случай 2. λ_1, λ_2 — вещественные числа, причем $\lambda_1\lambda_2<0$. Точка покоя такого типа называется *седлом* (рис. 6.5).

В этом случае решение *неустойчиво.*

Случай 3. $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$. Точка покоя называется *фокусом* (рис. 6.6, 6.7).

Если $\alpha<0$, то решение устойчиво и фокус называется *устойчивым* (асимптотически) (рис. 6.6).

Если $\alpha>0$, то решение неустойчиво и фокус называется *неустойчивым* (рис. 6.7).

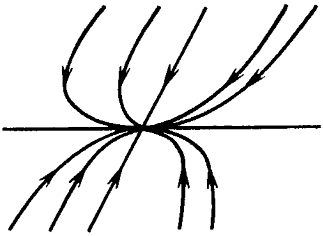

Рис. 6.1

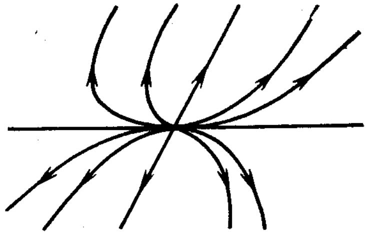

Рис. 6.2

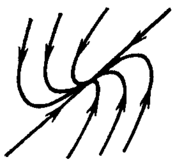

Рис. 6.3

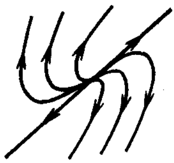

Рис. 6.4

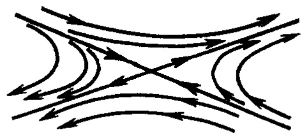

Рис. 6.5

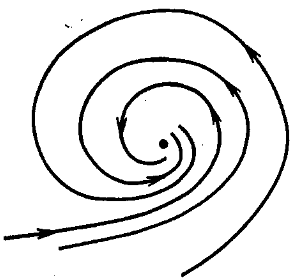

Рис. 6.6

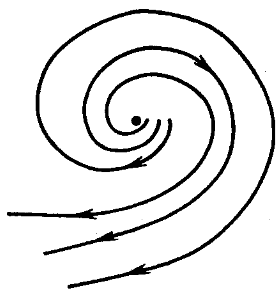

Рис. 6.7

Случай 4. $\lambda_{1,2}=\pm\beta i$, $\beta\neq0$. В этом случае точка покоя называется *центром* (рис. 6.8). Решение является устойчивым (не асимптотически).

II. Если матрица системы вырожденная, то возможны следующие случаи.

Случай 1. $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq 0$. Если $\lambda_2<0$, то все решения устойчивы (не асимптотически) (рис. 6.9, *а*). Если $\lambda_2>0$, то все решения неустойчивы (рис. 6.9, *б*).

Случай 2. $\lambda_1=\lambda_2=0$. Характер расположения траекторий вблизи точек покоя изображен на рис. 6.10. Все решения неустойчивы.

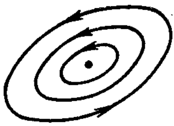

Рис. 6.8

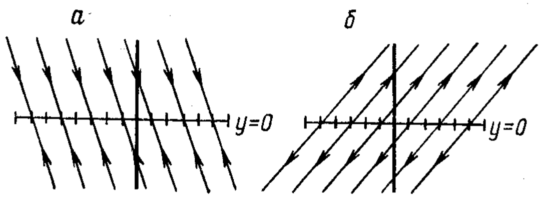

Рис. 6.9

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}=AX,$$

где A — числовая матрица n-го порядка, а

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

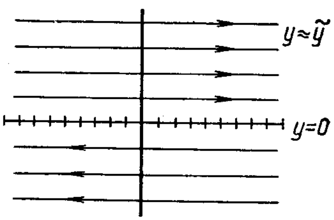

Рис. 6.10

При исследовании на устойчивость решений системы можно пользоваться следующими признаками.

1. Если все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные действительные части, то все решения системы асимптотически устойчивы.

Заметим, что необходимым условием отрицательности всех действительных частей характеристических чисел матрицы A с действительными элементами является положительность всех коэффициентов ее характеристического уравнения.

2. Если хотя бы одно характеристическое число матрицы A имеет положительную действительную часть, то все решения системы неустойчивы.

3. Если все характеристические числа матрицы A имеют неположительные действительные части, причем характеристическим числам, имеющим нулевые действительные части, в жордановой форме матрицы A соответствуют жордановы блоки размеров 1×1, то все решения являются устойчивыми.

Существуют критерии, позволяющие, не решая характеристического уравнения, установить знаки действительных частей характеристических чисел. Пусть

$$b_0\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\ldots+b_n=0 \tag{6.33}$$

есть характеристическое уравнение матрицы A.

Критерий Рауса — Гурвица. *Для того чтобы действительные части всех корней этого уравнения были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы*

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & b_{-3} & b_{-4} & \ldots & b_{-n+2} \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \ldots & b_{-n+4} \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots & b_{-n+6} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{2n-1} & b_{2n-2} & b_{2n-3} & b_{2n-4} & b_{2n-5} & b_{2n-6} & \ldots & b_n \end{bmatrix}.$$

были положительны. Числа b_k с индексами $k>n$ или $k<0$ заменяются нулями. По главной диагонали стоят соответственно числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Критерий Михайлова. Обозначим левую часть уравнения (6.33) через $F(\lambda)$, т. е.

$$F(\lambda)=b_0\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\ldots+b_{n-1}\lambda+b_n.$$

Положим в этом равенстве $\lambda=i\omega$. Отделив действительную и мнимую части, представим $F(i\omega)$ в виде

$$F(i\omega)=\varphi(\omega^2)+i\omega\psi(\omega^2).$$

Для того чтобы действительные части всех корней уравнения (6.33) *были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $b_nb_{n-1}>0$;

2) *все корни уравнений* $\varphi(\xi)=0$ *и* $\psi(\eta)=0$ *простые, положительные, и их можно занумеровать так, чтобы выполнялось условие* $\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2<\ldots$

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{6.34}$$

для которой точка $x_i\equiv0$ является точкой покоя. Будем предполагать, что $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируемы любое число раз в точке покоя. Тогда, разложив $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в ряд по формуле Тейлора в окрестности начала координат, запишем систему в виде

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{6.35}$$

где R_i — члены не ниже второго порядка малости относительно x_i.

Система

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{6.36}$$

называется *системой уравнений первого приближения* для системы (6.34).

При исследовании на устойчивость решений системы (6.34) по первому приближению можно пользоваться следующими признаками.

1. Если все характеристические числа матрицы $A=(a_{ij})$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, имеют отрицательные действительные части, то решения $x_i\equiv 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, систем (6.36) и (6.35) асимптотически устойчивы.

2. Если хотя бы одно характеристическое число матрицы A имеет положительную действительную часть, то нулевое решение системы (6.35) неустойчиво.

3. Если действительные части всех характеристических чисел матрицы A неположительны, причем действительная часть хотя бы одного характеристического числа равна нулю, то, вообще говоря, исследование на устойчивость по первому приближению неприменимо.

Пример 1. Определить тип точки покоя системы $\dfrac{dX}{dX}=AX$, где

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

матрицы системы имеет корни

$$\lambda_{1,2}=\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Так как $\alpha=\dfrac{3}{2}>0$, то точка покоя $(0,0)$ — неустойчивый фокус.

Пример 2. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dX}{dt}=AX,$$

где

$$A=\begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение матрицы системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

или

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 12-\lambda & 2 & 3 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Так как одно из характеристических чисел ($\lambda=3$) имеет положительную действительную часть, то все решения системы неустойчивы.

Пример 3. Исследовать на устойчивость решения системы

$$\frac{dX}{dt}=AX,$$

где

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}; \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение матрицы системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

или

$$\lambda^4+7\lambda^3+16\lambda^2+16\lambda+6=0.$$

Способ 1. Для исследования на устойчивость воспользуемся критерием Рауса — Гурвица. Составим матрицу

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Главные миноры этой матрицы:

$$7, \quad \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 16 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 16 & 16 & 7 \\ 0 & 6 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

положительны. Следовательно, все характеристические числа имеют отрицательную действительную часть и все решения системы асимптотически устойчивы.

Способ 2. Используем критерий Михайлова. Условие 1 выполнено, так как $b_n=6$, $b_{n-1}=16$. Проверим, выполняется ли условие 2. Так как

$$F(\lambda)=\lambda^4+7\lambda^3+16\lambda^2+16\lambda+6,$$

то

$$F(i\omega)=\omega^4-7i\omega^3-16\omega^2+16i\omega+6$$

или

$$F(i\omega)=\omega^4-16\omega^2+6+i\omega(-7\omega^2+16)=\varphi(\omega^2)+i\omega\psi(\omega^2),$$

где

$$\varphi(\omega^2)=(\omega^2)^2-16\omega^2+6;$$

$$\psi(\omega^2)=-7\omega^2+16.$$

Следовательно, $\varphi(\xi)=\xi^2-16\xi+6$, $\psi(\eta)=-7\eta+16$.

Решая уравнения $\varphi(\xi)=0$ и $\psi(\eta)=0$, получим $\xi_1=8-\sqrt{58}\approx$ $\approx 0{,}38$; $\xi_2=8+\sqrt{58}\approx 15{,}62$; $\eta_1=\dfrac{16}{7}\approx 2{,}23$. Условие 2 выполнено.

Таким образом, все характеристические числа имеют отрицательную действительную часть и все решения системы асимптотически устойчивы.

Пример 4. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x_1=0$, $x_2=0$ системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=e^{x_1+2x_2}-\cos 3x_1;\\ \frac{dx_2}{dt}&=\sqrt{4+8x_1}-2e^{x_2}.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Разложив правые части данных уравнений по формуле Тейлора в окрестности точки $x_1=0$, $x_2=0$, запишем систему в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_1+2x_2+R_1(x_1,\ x_2);\\ \frac{dx_2}{dt}&=2x_1-2x_2+R_2(x_1,\ x_2),\end{aligned}\right\}$$

где $R_1(x_1, x_2)$ и $R_2(x_1, x_2)$ — члены не ниже второго порядка малости относительно x_1 и x_2.

Система 1-го приближения имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_1+2x_2;\\ \frac{dx_2}{dt}&=2x_1-2x_2.\end{aligned}\right\}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda^2+\lambda-6=0$$

имеет один положительный корень и, следовательно, нулевое решение данной системы неустойчиво.

Задачи

В примерах 565—578 для системы $\frac{dX}{dt}=AX$, где $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, определить тип точек покоя:

565. $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **566.** $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

567. $A=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$. **568.** $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

569. $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. **570.** $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$.

571. $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$. **572.** $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

573. $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}$. **574.** $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

575. $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **576.** $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$.

577. $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. **578.** $A=\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$.

В задачах 579—590 исследовать на устойчивость решения системы линейных уравнений $\frac{dX}{dt}=AX$, где A — данная матрица; $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$:

579. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$. **580.** $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$.

581. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

582. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

583. $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

584. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

585. $\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$.

586. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

587. $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

588. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

589. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

590. $\begin{bmatrix} -7 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

В задачах 591—593 исследовать на устойчивость, используя метод Рауса — Гурвица или Михайлова, решения системы $\frac{dX}{dt} = AX$, где $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, A — данная матрица:

591. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

592. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

593. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

В задачах 594—597 исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x_1=x_2=0$ систем:

594. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=\sin 2x_1+x_2;\\ \frac{dx_2}{dt}&=\cos x_1-e^{x_2}.\end{aligned}\right\}$$

595. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=x_1^2-x_1+4x_2;\\ \frac{dx_2}{dt}&=3x_2^2-2x_1-2x_2.\end{aligned}\right\}$$

596. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=e^{x_1}-e^{2x_2};\\ \frac{dx_2}{dt}&=\sin x_1-\cos x_2+1.\end{aligned}\right\}$$

597. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=e^{-4x_1}-e^{2x_2};\\ \frac{dx_2}{dt}&=-\sin 2x_2;\\ \frac{dx_3}{dt}&=\sin(7x_1+3x_2)+3\sin x_3.\end{aligned}\right\}$$

6.8. Колебательные движения

Колебательными движениями механических систем называются такие движения, при которых точки системы перемещаются последовательно то в ту, то в другую сторону относительно их некоторого среднего положения.

К колебательным движениям относятся вибрации машин, их деталей, вибрации инженерных сооружений и их отдельных элементов, а также автомобилей, судов и т. д.

Колебательные процессы разнообразны по своей природе (механические, звуковые, электромагнитные и т. п.). Мы будем рассматривать только *механические колебания*. При изучении других колебаний можно пользоваться аналогичными методами.

Обобщенными координатами системы назовем независимые друг от друга величины, определяющие полностью и однозначно положение системы в любой выбранный момент времени.

Колебательные движения механических систем описываются, вообще говоря, системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат системы. (В технической литературе такие механические системы называют *системами с сосредоточенными параметрами.*) Если предположить, что колебания малы (т. е. в течение всего времени движения координаты и их производные малы), то, отбрасывая квадраты и более высокие степени координат и их производных, мы заменим нелинейную систему линейной. Решение многих технических задач сводится к решению линейных систем.

Закон, по которому совершаются малые свободные колебания системы с сосредоточенными параметрами, может быть найден следующим образом.

1. В качестве обобщенных координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выбирают отклонения существенных объектов рассматриваемой системы от некоторого устойчивого положения равновесия.

2. Находят кинетическую T и потенциальную U энергии системы в выбранных координатах. Каждая из них, как известно, является квадратичной формой.

3. Составляют матрицы M (матрица масс) и K (матрица жесткости) соответственно квадратичных форм T и U.

4. Находят собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы $M^{-1}K$ или собственные числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ матрицы $K^{-1}M$.

5. Определяют собственные частоты ω_i малых колебаний по формуле $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ или $\omega_i = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_i}}$.

6. Находят собственные векторы $\vec{a}_i$ матрицы $M^{-1}K$ или $K^{-1}M$ с собственными числами λ_i или μ_i, имеющие первую координату, равную 1.

7. Закон, по которому совершаются малые свободные колебания системы в случае, если ни одна из частот ω_i не равна нулю, определяется формулой

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i c_i \cos(\omega_i t + \alpha_i),$$

где α_i, c_i — произвольные постоянные, которые находятся из начальных условий.

8. Если заданы начальные условия

$$\vec{x}_0 = \vec{x}\,\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}; \quad \dot{\vec{x}}_0 = \dot{\vec{x}}\,\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \vdots \\ \dot{x}_2(0) \\ \dot{x}_n(0) \end{bmatrix},$$

то α_i, c_i могут быть найдены по формулам

$$c_i = \sqrt{y_i^2 + \frac{z_i^2}{\omega_i^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_i = -\frac{z_i}{y_i \omega_i}, \tag{6.37}$$

где

$$y_i = \frac{(\vec{x}_0, \vec{a}_i)}{|\vec{a}_i|^2}; \quad z_i = \frac{(\dot{\vec{x}}_0, \vec{a}_i)}{|\vec{a}_i|^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6.38}$$

где y_i, z_i — координаты соответственно векторов $\vec{x}_0$, $\dot{\vec{x}}_0$ в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Заметим, что координаты векторов a_i называются *коэффициентами распределения амплитуд*. Совокупность коэффициентов распределения для частоты ω_i иногда называют *формой собственного колебания*.

Пример. Два жестких стержня, каждый массой m и длиной l, соединены идеальным шарниром и подвешены на трех пружинах, жесткость каждой из которых равна c (см. 6.11). Определить закон, по которому совершаются малые свободные колебания данной системы при заданных начальных условиях

$$\vec{x}_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix};\quad \dot{\vec{x}}_0=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{m}\\[2mm] \dfrac{2}{m}\\[2mm] -\dfrac{1}{m}\end{bmatrix},$$

и формы собственных вертикальных колебаний в этой системе.

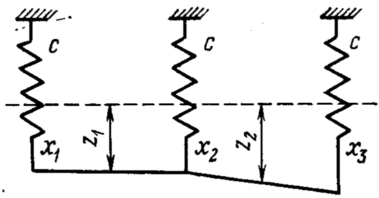

Рис. 6.11

Решение. 1. В качестве обобщенных координат x_1, x_2, x_3 выберем отклонения концов стержней от положения статического равновесия (вертикальные смещения концов стержней).

2. Кинетическая энергия T стержней состоит из энергии поступательного движения центров масс и энергии вращательного движения около осей, проходящих через центры масс. Обозначим соответственно через z_1, z_2 координаты центров масс стержней; через θ_1, θ_2 — углы поворота стержней; J_0 — момент инерции стержней относительно оси, проходящей через центр масс. Тогда

$$T=\frac{1}{2}m\dot{z}_1^2+\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{z}_2^2+\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}_2^2.$$

Выразим z_1, z_2, θ_1, θ_2 через обобщенные координаты x_1, x_2, x_3:

$$z_1=\frac{1}{2}(x_1+x_2);\quad \theta_1=\frac{1}{l}(x_1-x_2);$$

$$z_2=\frac{1}{2}(x_2+x_3);\quad \theta_2=\frac{1}{l}(x_2-x_3).$$

Формула (6.37) примет вид

$$T=\frac{1}{8}m(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2+\frac{1}{8}m(\dot{x}_2+\dot{x}_3)^2+\frac{J_0(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2}{2l^2}+$$
$$+\frac{J_0(\dot{x}_2-\dot{x}_3)^2}{2l^3}$$

или

$$T=\frac{m}{8}(\dot{x}_1^2+2\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2+2\dot{x}_1\dot{x}_2+2\dot{x}_2\dot{x}_3)+$$
$$+\frac{J_0}{2l^2}(\dot{x}_1^2+2\dot{x}_2+\dot{x}_3^2-2\dot{x}_1\dot{x}_2-2\dot{x}_2\dot{x}_3).$$

Учитывая, что $J_0=\dfrac{ml^2}{12}$, последнее равенство можно записать

$$T=\frac{m}{6}\dot{x}_1^2+\frac{m}{3}\dot{x}_2^2+\frac{m}{6}\dot{x}_3^2+\frac{m}{6}\dot{x}_1x_2+\frac{m}{6}\dot{x}_2\dot{x}_3.$$

Потенциальной энергией U является энергия деформированных пружин. Следовательно,

$$U=\frac{1}{2}cx_1^2+\frac{1}{2}cx_2^2+\frac{1}{2}cx_3^2.$$

3. Квадратичная форма T имеет матрицу

$$M=\frac{m}{12}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Квадратичная форма U имеет матрицу

$$K=\frac{c}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

4. Матрица

$$K^{-1}M=\frac{2}{c}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\frac{m}{12}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{m}{6c}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

имеет собственные числа

$$\mu_1=\frac{m}{3c};\quad \mu_2=\frac{m(3+\sqrt{3})}{6c};\quad \mu_3=\frac{m(3-\sqrt{3})}{6c}.$$

5. Собственными частотами являются

$$\omega_1=\sqrt{\frac{3c}{m}};\quad \omega_2=\sqrt{\frac{6c}{m(3+\sqrt{3})}};\quad \omega_3=\sqrt{\frac{6c}{m(3-\sqrt{3})}}.$$

6. Собственные векторы с собственным числом $\mu_1=\frac{m}{3c}$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix}.$$

Положив $t=1$, получим собственный вектор с первой координатой, равной 1, т. е. вектор

$$\vec{a}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Для собственных чисел μ_2 и μ_3 искомые собственные векторы имеют вид

$$\vec{a}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{a}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7. Закон, по которому совершаются малые свободные колебания данной системы, определяется равенством

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} c_1\cos\left(\sqrt{\frac{3c}{m}}\,t+\alpha_1\right)+$$

$$+\begin{bmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} c_2\cos\left(\sqrt{\frac{6c}{m(3+\sqrt{3})}}\,t+\alpha_2\right)+$$

$$+\begin{bmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} c_3\cos\left(\sqrt{\frac{6c}{m(3-\sqrt{3})}}\,t+\alpha_3\right).$$

8. По формулам (6.38) имеем:

$$y_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3);$$

$$z_1=\frac{(\dot{\vec{x}}_0,\ \vec{a}_1)}{|\vec{a}_1|^2}=\frac{-\frac{1}{m}+0+\frac{1}{m}}{|\vec{a}_1|^2}=0;$$

$$z_2=\frac{(\dot{\vec{x}}_0,\ \vec{a}_2)}{|\vec{a}_2|^2}=\frac{-\frac{1}{m}+\frac{2(1+\sqrt{3})}{m}-\frac{1}{m}}{1+(1+\sqrt{3})^2+1}=\frac{1}{m(1+\sqrt{3})};$$

$$z_3=\frac{(\vec{\dot{x}}_0,\ \vec{a}_3)}{|\vec{a}_3|^2}=\frac{-\dfrac{1}{m}+\dfrac{2(1-\sqrt{3})}{m}-\dfrac{1}{m}}{1+(1-\sqrt{3})^2+1}=\frac{1}{m(1-\sqrt{3})}.$$

Используя формулы (6.37), находим:

$$c_1=0;\quad c_2=\frac{0{,}3}{\sqrt{mc}};\quad c_3=\frac{0{,}58}{\sqrt{mc}};\quad \alpha_2=-\frac{\pi}{2};\quad \alpha_3=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}=\frac{0{,}3}{\sqrt{mc}}\begin{bmatrix}1\\ 2{,}73\\ 1\end{bmatrix}\cos\left(1{,}13\sqrt{\frac{c}{m}}-\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\begin{bmatrix}1\\ -0{,}73\\ 1\end{bmatrix}\frac{0{,}58}{\sqrt{mc}}\cos\left(2{,}17\sqrt{\frac{c}{m}}+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}1\\ 2{,}73\\ 1\end{bmatrix}\frac{0{,}3}{\sqrt{mc}}\sin\left(1{,}13\sqrt{\frac{c}{m}}\right)-$$

$$-\begin{bmatrix}1\\ -0{,}73\\ 1\end{bmatrix}\frac{0{,}58}{\sqrt{mc}}\sin\left(2{,}17\sqrt{\frac{c}{m}}\right).$$

Формой собственного колебания являются векторы (рис. 6.12)

$$\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}1\\ 2{,}73\\ 1\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}1\\ -0{,}73\\ 1\end{bmatrix}.$$

Задачи

598. На невесомой струне длиной $2l$ в середине находится груз массой m. К грузу на пружине жесткости c

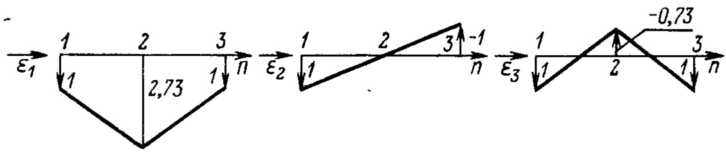

Рис. 6.12

подвешен груз такой же массы. Натяжение струны N. Определить собственные частоты и собственные векторы при условии, что параметры системы связаны равенством $2N = lc$. Колебания происходят в плоскости рисунка; нижняя масса движется только вертикально (рис. 6.13).

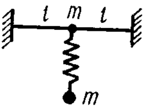

Рис. 6.13

Рис. 6.14

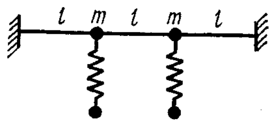

Рис. 6.15

599. На невесомой нити длиной $4l$ на равных расстояниях l расположены три точечных груза. Массы крайних грузов равны m, масса среднего $m\sqrt{3}$, натяжение нити N. Определить собственные частоты и собственные формы (рис. 6.14).

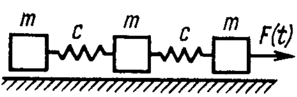

Рис. 6.16

Рис. 6.17

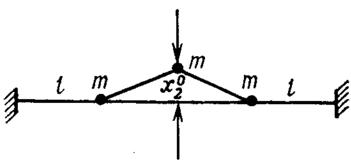

Рис. 6.18

600. На невесомой нити длиной $3l$ на расстояниях l от точек закрепления помещены два одинаковых груза массой m. К каждому из грузов на пружинах жесткости c подвешены такие же грузы. Найти собственные частоты и собственные векторы. Движение происходит в плоскости рисунка (рис. 6.15).

601. Три груза массой m каждый связаны одинаковыми пружинами, жесткость которых c. Грузы лежат на гладком столе. На крайний груз действует горизонтальная ударная сила импульса p. Найти закон колебания масс цепочки после действия силы (рис. 6.16).

602. Три груза массой m соединены пружинами, жесткость которых c, и подвешены вертикально в поле силы тяжести. Найти движение грузов после обрыва удерживающей нити (рис. 6.17).

603. Найти колебания, которые будут совершать в вертикальной плоскости три одинаковые бусинки, растянутые на невесомой нити, если в начальный момент отклонена от положения равновесия только средняя бусинка. Масса каждой бусинки m, расстояния между бусинками l, натяжение нити N. Начальная форма нити с бусинками показана на рис. 6.18.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1. а) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 5 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -10 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. **2.** а) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 9 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$. **3.** а) $\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 14 & 10 \\ -21 & -15 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1 & 21 & -28 \\ 10 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. **4.** $m=n$. **5.** $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 9 \\ 3 & 17 & 0 \\ 0 & 6 & 14 \end{bmatrix}$. **6.** а) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -9 \\ -6 & -4 & 12 \\ -3 & 3 & -14 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. **7.** $m=3$, $n=5$. **8.** $m=3$, $n=6$. **9.** $m=n$ — любое натуральное число. **10.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) да; ж) да; и) нет. **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 21 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$. **12.** $\begin{bmatrix} 6 & -18 & 21 \\ -2 & 6 & -7 \\ 4 & -12 & 14 \end{bmatrix}$. **13.** $[-18]$. **14.** $\begin{bmatrix} -6 & -7 \\ 15 & 11 \end{bmatrix}$. **15.** $\begin{bmatrix} 10 & -8 & -6 \\ 25 & 4 & -7 \\ -5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$. **16.** $\begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 \\ 12 & 15 & 0 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$. **18.** $\begin{bmatrix} 22 \\ 63 \end{bmatrix}$. **19.** $\begin{bmatrix} -11 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. **20.** а) $b_{ij}=a_{ij}d_j$, $c_{ij}=d_i a_{ij}$; б) либо A — нулевая, либо $d_1=d_2=\ldots=d_n$. **21.** -5. **22.** а) Да; б) нет. **24.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$. **25.** $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. **26.** $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$. **27.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **28.** $\begin{bmatrix} -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ -\cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \end{bmatrix}$. **29.** $\begin{bmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$. **30.** $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$. **31.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. **34.** $\begin{bmatrix} -18 & 40 \\ 0 & 62 \end{bmatrix}$. **35.** $\begin{bmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -20 \end{bmatrix}$. **36.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

37. $\begin{bmatrix} 8 & 19 & 1 & 2 & 7 \\ 14 & 16 & 4 & -5 & 5 \\ 19 & 29 & 2 & 3 & 21 \\ -1 & -11 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. **38.** $\begin{bmatrix} 11 & 7 & -2 \\ 11 & 1 & -3 \\ 11 & 16 & 0 \end{bmatrix}$. **39.** $\begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 20 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

40. $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 20 & 3 & 1 \\ 2 & 12 & 17 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 18 & 4 & 1 \\ 15 & 94 & 158 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. **41.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **42.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

43. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **44.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **45.** $(J_1(1),$ $J_1(-2),$ $J_1(3))$. **46.** Не является. **47.** $J_3(1)$. **48.** $(J_2(-2),$ $J_1(5))$. **49.** $(J_2(2),$ $J_3(3))$. **50.** $(J_1(1),$ $J_3(1),$ $J_1(1))$. **51.** $(J_1(2),$ $J_1(2),$ $J_1(-3),$ $J_1(5))$. **52.** Не является. **53.** $J_3(-3)$. **54.** Не является.

55. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **56.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. **57.** 11. **58.** -3.

59. [illegible]. **60.** -16. **61.** [illegible]. **62.** 10. **63.** а) -25; б) 5; в) 5. **64.** а) -21; б) 1; в) -1. **65.** $A_{31}=26$, $A_{32}=9$, $A_{33}=5$. **66.** 0. **67.** 0. **68.** 0. **69.** 0. **70.** 0. **71.** -664. **72.** -3600. **73.** 0. **74.** 80. **75.** 75. **76.** 102. **77.** -96. **78.** 320. **79.** 0. **80.** 319. **81.** 2. **82.** 1. **83.** 2. **84.** 2. **85.** 2. **86.** 3. **87.** 2. **88.** 5. **89.** $r=3$. **90.** $r=2$. **91.** $r=2$. **92.** $r=3$. **93.** $\alpha=2$. **94.** $\alpha\neq-\frac{1}{4}$.

95. а) $\alpha=-4$; б) $\alpha\neq-4$; в) ни при каких α. **96.** $\alpha=\frac{7}{9}$.

101. $\frac{1}{63}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$. **102.** $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. **103.** $\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

104. $\frac{1}{48}\begin{bmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. **105.** Не существует.

106. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$. **107.** $\frac{1}{67}\begin{bmatrix} 13 & -3 & -7 \\ 12 & 23 & 9 \\ -5 & -4 & 13 \end{bmatrix}$.

108. $-\frac{1}{29}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -35 \\ 3 & -5 & -6 \\ -7 & 2 & 14 \end{bmatrix}$. **109.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

110. Не существует. **111.** $A^{-1}=A$. **112.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

118. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 26 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$. **119.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$. **120.** $\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 15 & -13 \\ 45 & 11 \end{bmatrix}$.

121. $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10 & 57 \\ 12 & -14 \\ -8 & -40 \end{bmatrix}$. **122.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 12 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **123.** $\lambda \neq -1$.

124. $\lambda \neq 2$. **125.** $\lambda \neq 0$. **126.** $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 5{,}5$. **127.** Ни при каком λ.

Глава 2

128. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. **129.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\times$

$\times\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. **130.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

131. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. **132.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

133. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$. **134.** $\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2&=1; \\ x_1-x_2&=2. \end{aligned}\right\}$

135. $\left.\begin{aligned} x_1-x_2+x_3&=12; \\ x_1+x_2-x_3&=1. \end{aligned}\right\}$ **136.** $\left.\begin{aligned} x_1-x_3+x_5&=1; \\ x_2+x_3-x_4&=2; \\ x_2+2x_3-4x_4+x_5&=3. \end{aligned}\right\}$

137. $\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2&=0; \\ x_2+x_3&=1; \\ x_1+x_2-x_3&=5. \end{aligned}\right\}$ **138.** $\left.\begin{aligned} x_1&=0; \\ x_2&=0; \\ &\vdots \\ x_n&=0. \end{aligned}\right\}$ **139.** $\left.\begin{aligned} x_3&=3; \\ 2x_2+x_3&=4; \\ x_1-2x_2+x_3&=5. \end{aligned}\right\}$

140. $\{(1;\ -1)\}$. **141.** $\{(2;\ 3)\}$. **142.** $\{(1;\ 1;\ 1)\}$. **143.** $\{(2;\ -1;\ 1)\}$. **144.** $\{(1;\ 0;\ -1;\ 2)\}$. **145.** $\{(-1;\ 3;\ 0;\ 1)\}$. **146.** $\{(4;\ 5;\ -3)\}$. **147.** $\{(0;\ 3;\ -3)\}$. **148.** а) $\{(-1;\ -1;\ -1)\}$; б) $\{(-1;\ -2;\ -3)\}$; в) $\left\{\left(\frac{1}{7};\ \frac{2}{7};\ -\frac{2}{7}\right)\right\}$. **149.** а) $\{(1;\ -1;\ 2)\}$; б) $\{(3;\ 1;\ 2)\}$; в) $\{(0;\ 7;\ 0)\}$. **150.** а) $\{(-1;\ 1;\ -1;\ 1)\}$; б) $\{(2;\ -2;\ 2;\ -2)\}$; в) $\{(1;\ 2;\ -1;\ -2)\}$. **151.** а) $\{(0;\ 1;\ -1;\ 2)\}$; б) $\{(-1;\ -1;\ -1;\ 0)\}$; в) $\{(2;\ 0;\ 1;\ 0)\}$. **152.** $\left\{\left(c;\ -\frac{7}{5};\ \frac{18-15c}{10}\right)\middle|\ \forall c\in\mathbf{R}\right\}$.

153. $\left\{\left(\frac{4+2c}{3};\ \frac{7-c}{3};\ c\right)\middle|\ \forall c\in\mathbf{R}\right\}$. 154. $\{(-3c_1+6c_2+4;$ $2c_1-4c_2-3;\ c_1;\ c_2)\mid\forall c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\}$. 155. $\{(c_1;\ c_2;\ c_1+2c_2+5;$ $c_1+c_2-1)\mid\forall c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\}$. 156. $\{(4;\ 1)\}$. 157. Несовместна. 158. $\left\{\left(c_1;\ c_2;\ \frac{1}{2}(-2c_1+c_2-1);\ c_1-2c_2+2\right)\mid\forall c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\right\}$. 159. Несовместна. 160. $\{(1;\ 0;\ 2)\}$. 161. $\{(c-1;\ 2-c;\ c)\mid\forall c\in\mathbf{R}\}$. 162. $\{(5c-5;\ 7c-7;\ c;\ 0)\mid\forall c\in\mathbf{R}\}$. 163. Несовместна. 164. $\{(1;\ -1)\}$. 165. Несовместна. 166. $\{(c;\ -2c;\ c)\mid\forall c\in\mathbf{R}\}$. 167. $\{(0;\ 0;\ 0)\}$. 168. $\left\{\left(0;\ c_1;\ c_2;\ \frac{-c_1+4c_2}{3}\right.\middle|\ \forall c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\right\}$. 169. $\left\{\left(\frac{1}{2}c;\ c;\ 0\right)\mid\forall c\in\mathbf{R}\right\}$. 170. $\left\{\left(c;\ -\frac{1}{4}c;\ 0;\ \frac{3}{4}c\right)\mid\forall c\in\mathbf{R}\right\}$. 171. $\{(7c;\ 11c;\ 5c)\mid\forall c\in\mathbf{R}\}$. 172. $\left\{\left(c_1;\ c_2;\ c_1+\frac{5}{4}c_2;\ -\frac{1}{4}c_2\right)\middle|\ \forall c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\right\}$. 173. $\{(0;\ 0;\ 0)\}$. 174. $\left\{\left(c_1;\ c_2;\ \frac{c_1-5c_2}{3};\ -\frac{4}{3}(c_1+c_2)\right.\mid c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\right\}$. 175. $\left\{\left(\frac{1}{7}c;\ \frac{9}{7}c;\ c\right)\mid\forall c\in\mathbf{R}\right\}$. 176. $\{(c_1;\ c_2;\ c_3;\ c_1+2c_2-c_3;\ -c_1+c_2+c_3;\ -c_1+3c_2+2c_3)\mid\forall c_1,$ $c_2,\ c_3\in\mathbf{R}\}$. 177. $\left\{(-1;\ 4;\ 1;\ 0),\ \left(-\frac{5}{2};\ \frac{3}{2};\ 0;\ 1\right)\right\}$. 178. $\{(0;\ 1;$ $0;\ 0;\ -2),\ (0;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0),\ (1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 3)\}$. 179. $\{(1;\ 2;\ 1;\ 0),$ $(-1;\ 1;\ 0;\ 1)\}$. 180. $\{(1;\ 2;\ 1;\ 0),\ (-1;\ 1;\ 0;\ 1)\}$. 181. $\left\{\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 0;\ 0\right),\ \left(\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{5}{3};\ 1\right)\right\}$. 182. $\{(1;\ 1;\ 1)\}$. 183. $\{(-10c+10;$ $c;\ -16c+15;\ 4-5c)\mid\forall c\in\mathbf{R}\}$. 184. $\{(1;\ 2;\ 3)\}$. 185. Несовместна. 186. $\{(14c;\ 21c;\ c;\ c)\mid\forall c\in\mathbf{R}\}$. 187. $\left\{\left(\frac{3-2c_2}{10}-c_1;\ c_1;\ -\frac{1}{2}-4c_2;\ \frac{1-14c_2}{10};\ c_2\right)\middle|\ \forall c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\right\}$. 188. Несовместна. 189. $\{(1;\ -1;\ 2;\ 0)\}$.

Глава 3

190. а) Да; б) нет. **191.** а) Да; б) нет. **192.** а) Нет; б) нет. **193.** а) Нет; б) нет. **194.** $a=0$. **195.** а) Да; б) нет; в) нет. **196.** а) Да; б) нет. **197.** а) Да; б) да. **198.** а) Да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) да; ж) да; з) да; и) да; к) да; л) да; м) нет. **199.** $R=\infty$. **201.** Нет. **203.** а) Нет; б) да. **204.** а) Да; б) нет; в) нет. **205.** а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **206.** а) Нет; б) нет; в) нет. **207.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **208.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) да; ж) нет; з) нет. **209.** а) Да; б) да. **211.** $\left\{\left(\frac{4c_1-c_2}{3};\ c_1;\ c_2\right)\mid\forall c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\right\}$. **212.** $\{(17c;\ 9c;\ -7c)\mid\forall c\in\mathbf{R}\}$. **213.** $\{(c_1;\ 2c_1-3c_2;\ c_2)\mid\forall c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\}$.

214. $\{(0;\ 0;\ 0)\}$. 215. $\{(c;\ 2c;\ 4c)\,|\,\forall c\in\mathbf{R}\}$. 216. $\{(c_1;\ c_2;\ 3c_1+2c_2)\,|\,\forall c_1,\ c_2\in\mathbf{R}\}$. 217. $\{(-c;\ -3c;\ 5c)\,|\,\forall c\in\mathbf{R},\ c\neq 0\}$. 218. $\{(12c;\ -11c;\ 23c)\,|\,\forall c\in\mathbf{R},\ c\neq 0\}$. 219. $\{(2c;\ -3c;\ 4c)\,|\,\forall c\in\mathbf{R},\ c\neq 0\}$. 220. $\{(2c;\ -9c;\ 7c)\,|\,\forall c\in\mathbf{R},\ c\neq 0\}$. 228. а) Да; б) да; в) нет; г) да; д) да. 229. а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) нет; ж) нет. 230. а) Да, если $a\neq 0$; нет, если $a=0$; б) да; в) да; г) да; д) нет. 231. а) Да; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет. 232. а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) да. 233. $\dim \mathbf{R}_n(x)=n+1$; $1,\ x,\ \ldots,\ x^n$. 234. $\dim C_n(x)=n+1$; $1,\ x,\ \ldots,\ x^n$. 235. $\dim\mathbf{R}=1$; 1. 236. $\dim \mathbf{R}_{m\times n}=mn$; $\begin{bmatrix}1&0&.&.&.&0\\0&0&.&.&.&0\\.&.&.&.&.&.\\0&0&.&.&.&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1&.&.&.&0\\0&0&.&.&.&0\\.&.&.&.&.&.\\0&0&.&.&.&.\end{bmatrix}$, ..., $\begin{bmatrix}0&0&.&.&.&0\\0&0&.&.&.&0\\.&.&.&.&.&.\\0&0&.&.&.&1\end{bmatrix}$. 237. $\dim\mathbf{R}^n=n$; $(1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ $(0;\ 1;\ \ldots;\ 0)$, ..., $(0;\ 0;\ \ldots;\ 1)$. 238. $\dim \mathbf{N}(A)=2$; $(-1;\ 4;\ 1;\ 0)$, $\left(-\frac{5}{2};\ \frac{3}{2};\ 0;\ 1\right)$. 239. $\dim \mathscr{E}_2=2$; $\vec{i},\ \vec{j}$. 240. $\dim\mathscr{E}_3=3$; $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. 241. n; фундаментальная система решений. 242. а) $(3;\ 1;\ -4;\ 2;\ -1)$; б) $(0;\ 1;\ 8;\ -1;\ 5)$; в) $(7;\ 0;\ 0;\ 3;\ 0)$; г) $(0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0)$. 243. а) $(2;\ -1;\ 7;\ 10)$; б) $(7;\ -1;\ 2;\ 10)$. 244. а) $(4;\ 5;\ -1;\ 4)$; б) $(-1;\ 2;\ 0;\ 0)$; в) $(1;\ 3;\ 3;\ 1)$. 245. а) $(2;\ 0;\ 1)$; б) $(2;\ -4;\ -3)$; в) $(4;\ 3;\ 0)$. 246. а) $(-5;\ 2;\ 1;\ 3)$; б) $(4;\ 0;\ -2;\ 7)$. 247. $(6;\ 9;\ 4)$. 248. $(-7;\ -7;\ 4;\ 2)$. 249. $\left(\frac{4}{3};\ -1\right)$. 250. $(9;\ -5;\ 22)$. 251. б) $\left(\frac{11}{7};\ -\frac{1}{7}\right)$. 252. б) $(3;\ -1;\ 4)$. 253. а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. 254. Да. 255. Нет. 256. Да. 257. Нет. 258. а) При любом λ; б) $\lambda=\frac{1}{2}$. 259. При любом λ. 260. $\lambda\neq 1$. 261. Ни при каком λ. 262. Ни при каком λ. 263. $\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$. 264. $\begin{bmatrix}1&-2&4&-8\\0&1&-4&12\\0&0&1&-72\\0&0&0&1\end{bmatrix}$. 265. $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-5\end{bmatrix}$. 266. а) Нет; б) да. 267. $\vec{e}_2{}'(0;\ -1;\ 4)$, $\vec{e}_1\left(-1;\ -2;\ \frac{13}{6}\right)$. 268. $\vec{e}_3(-18;\ 72;\ -12;\ -10)$, $\vec{e}_4(42;\ 28;\ -8;\ 0)$. 269. $\begin{bmatrix}3&1\\-2&-1\end{bmatrix}$. 270. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3&1\\1&-2\end{bmatrix}$. 271. $\begin{bmatrix}1&2&4\\3&-1&5\\-4&5&3\end{bmatrix}$. 272. $\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-5&2&3\\-5&-4&3\\7&2&-3\end{bmatrix}$. 273. $\vec{x}\left(\frac{5}{2};\ -\frac{19}{2}\right)$. 274. $\vec{x}(1;\ 1)$.

275. $\vec{x}\left(\frac{17}{3};\quad -\frac{4}{3};\quad -\frac{16}{3}\right)$. **276.** $\vec{x}\left(-\frac{7}{2};\quad 2;\quad \frac{1}{2}\right)$.

277. $\vec{x}\left(-\frac{1}{5};\ \frac{17}{5};\ \frac{22}{5}\right)$. **278.** $\vec{d}\left(\frac{5}{6};\ -\frac{13}{6}\right)$. **279.** $\vec{d}(9;\ -3)$.

280. $\vec{d}\left(-2;\ \frac{3}{2};\ \frac{17}{2}\right)$. **281.** $\vec{d}\ \frac{7}{4};\ -\frac{6}{4};\ \frac{7}{4}\Big)$. **282.** $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

283. $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 20 \end{bmatrix}$; **284.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$. **285.** $\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 9 & 14 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & -12 & 6 \end{bmatrix}$.

286. а) Да; б) нет. **287.** Да. **288.** Да. **289.** а) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a},\ \vec{b}) = -9$, $\cos\varphi = \frac{-9}{5\sqrt{14}}$; б) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = 13$, $(\vec{a},\ \vec{b}) = -15$; $\cos\varphi = \frac{-15}{13\sqrt{14}}$; в) $|\vec{a}| = 5$. $|\vec{b}| = 6$, $(\vec{a},\ \vec{b}) = -9$, $\cos\varphi = -0{,}3$; г) $|\vec{a}| = \sqrt{n}$, $|\vec{b}| = |\alpha|\sqrt{n}$, $(\vec{a},\ \vec{b}) = \alpha n$, $\varphi = 0$, если $\alpha > 0$, $\varphi = \pi$, если $\alpha < 0$. **290.** а) $\sqrt{2\pi}$; б) 0; в) $\frac{\pi}{2}$.

291. а) $\sqrt{\frac{b^3 - a^3}{3}}$; б) $e^b(b-1) - e^a(a-1)$; в) $\arccos\left((a+b)\times\right.$ $\left.\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+ab+b^2}}\right)$; 2) $\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2\,dx}$;

д) $\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(x))^2\,dx} + \sqrt{\int_a^b (g(x))^2\,dx}$.

292. а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **293.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да.

294. $\vec{x}_1$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}_4$, $\vec{x}_6$. **295.** а) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \frac{1}{\sqrt{3}};\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ или $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\quad -\frac{1}{\sqrt{3}};\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; б) $\left(0;\quad \frac{2}{\sqrt{13}};\quad 0;\quad \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ или $\left(0;\ -\frac{2}{\sqrt{13}};\quad 0;\quad -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; в) $\left(\frac{3}{5};\quad 0;\ \frac{4}{5}\right)$ или $\left(-\frac{3}{5};\ 0;\right.$ $\left.-\frac{4}{5}\right)$; г) $\left(\frac{12}{13};\quad 0;\quad 0;\quad \frac{5}{13}\right)$ или $\left(-\frac{12}{13};\ 0;\ 0;\ -\frac{5}{13}\right)$.

296. а) Да; б) нет; в) да; г) да. **297.** а) $x\sqrt{1{,}5}$; б) $x^2\sqrt{2{,}5}$; в) $\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2-\sin 2}}$. **298.** а) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}};\quad \frac{2}{\sqrt{14}};\quad \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{35}};\right.$ $\left.\frac{5}{\sqrt{35}};\ -\frac{3}{\sqrt{35}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{10}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; б) $(1;\ 0;\ 0)$, $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\right.$ $\left.-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **299.** а) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ 0\right)$,

$\left(0;\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ 0\right)$, $\left(0;\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right.$ $\left.-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ 0;\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right.$ $\left.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$, $(0;\ 1;\ 0;\ 0)$. **300.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x\sqrt{1,5}$. **301.** Можно дополнить векторами $(-5;\ -2;\ 1;\ 1)$, $(5;\ 2;\ 30;\ -1)$. **302.** Можно дополнить векторами $(3;\ 2;\ 2;\ 2)$, $(-2;\ -8;\ 20;\ -15)$. **303.** Можно дополнить векторами $(0;\ 1;\ 1;\ 0)$, $(0;\ -1;\ 1;\ -2)$. **304.** а) $(\vec{x},\ \vec{y}) = -90$, $|\vec{x}| = 2\sqrt{26}$, $|\vec{y}| = \sqrt{105}$, б) $(\vec{x},\ \vec{y}) = -10$, $|\vec{x}| = \sqrt{74}$, $|\vec{y}| = \sqrt{10}$; в) $(\vec{x},\ \vec{y}) = 12$, $|\vec{x}| = 2\sqrt{5}$, $|\vec{y}| = \sqrt{61}$. **305.** а) $(\vec{x},\ \vec{y}) = -4$, $|\vec{x}| = \sqrt{6}$, $|\vec{y}| = \sqrt{15}$; б) $(\vec{x},\ \vec{y}) = 6$, $|\vec{x}| = \sqrt{22}$, $|\vec{y}| = \sqrt{5}$; в) $(\vec{x},\ \vec{y}) = 7$, $|\vec{x}| = \sqrt{51}$, $|\vec{y}| = \sqrt{6}$. **306.** а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\arccos\frac{69}{10\sqrt{51}}$; г) $\frac{\pi}{2}$. **307.** а) $\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{238}}\right)$; б) $\arccos\sqrt{\frac{5}{42}}$; в) $\arccos\sqrt{\frac{6}{13}}$. **308.** $(-1;\ 1)$, $(3;\ -2)$. **309.** $\left(\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right)$. **310.** $(-1;\ 1;\ 0)$, $(0;\ 1;\ -1)$, $(1;\ -1;\ 1)$. **312.** Нет. **313.** Да. **314.** а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; в) $-7 + 22i$. **315.** Да. **316.** Да. **317.** а) $\sqrt{n}$; б) $\sqrt{5n}$. **318.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **319.** а) $\left[\frac{(3i-1)\sqrt{6}}{12}\ \frac{\sqrt{6}}{6}\ \frac{(3-i)\sqrt{6}}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $\left[\frac{(i+1)\sqrt{6}}{16} - \frac{\sqrt{6}}{8}\ \frac{(i+1)\sqrt{6}}{16}\right]$; б) $\left[\frac{2i}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{i}{3}\right]$, $\left[0\ \frac{i}{\sqrt{5}}\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$, $\left[-\frac{\sqrt{5}}{3}\ -\frac{4\sqrt{5}i}{15}\ \frac{2\sqrt{5}}{15}\right]$. **320.** а) $(\vec{x},\ \vec{y}) = -34 - 8i$, $|\vec{x}| = \sqrt{30}$, $|\vec{y}| = \sqrt{102}$; б) $(\vec{x},\ \vec{y}) = -13 + 4i$, $|\vec{x}| = \sqrt{31}$, $|\vec{y}| = \sqrt{15}$.

Глава 4

321. а) Нет; б) да; в) да; г) нет; д) нет; е) нет; ж) да; з) да при $a \neq 0$; и) да. **322.** б), г), ж), з) при $a \neq 0$, и). **323.** б), ж), з) при $a \neq 0$. **324.** $\operatorname{Ker} f = V$, $\operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$. **325.** $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, $\operatorname{Im} f = V$. **326.** Да. **327.** Нет. **328.** Да. **329.** Нет. **330.** Нет. **331.** Да. **332.** Да. **333.** Да. **334.** Да. **335.** а) Да; б) да. **336.** Да. **337.** а) Да; б) да; в) да; г) нет.

338. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. 339. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 340. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

341. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. 342. а) $\begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 20 \\ 15 & 20 & 25 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 343 а) $\begin{bmatrix} 8 & -18 & -2 \\ -4 & 9 & 1 \\ -4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 27 & 9 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 344. а) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 345. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. 346. $\begin{bmatrix} -3 & 14 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$.

347. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$. 348. $\begin{bmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{bmatrix}$.

349. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. 350. $\begin{bmatrix} -2 & 11 & 7 \\ -4 & 14 & 8 \\ 5 & -15 & -8 \end{bmatrix}$. 351. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

352. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. 353. $\begin{bmatrix} -1 & 18 & -3 \\ -1 & 8 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \end{bmatrix}$. 354. $\begin{bmatrix} 3 & -10 & -8 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & -13 & -7 \end{bmatrix}$.

355. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. 356. а) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$;

в) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. 357. а) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

358. а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -1 \\ 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 24 \\ 10 & 12 & 8 \\ -9 & 2 & 25 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} -6 & 8 & -6 \\ -8 & 8 & -2 \\ 16 & -6 & 2 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} -6 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \\ -15 & 3 & 17 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 7 & -5 & 17 \\ 0 & 3 & 11 \\ 7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

359. а) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 19 & 10 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 13 & -5 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 8 & 13 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$. **360.** 2) а) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$;
б) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$;
е) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$. **361.** а) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$;
в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$;
ж) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$. **362.** а) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
363. а) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; в) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.
364. а) $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 5 & 13 & -2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$;
г) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **365.** а) $\lambda^2-\lambda=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$;
б) $\lambda^2-\lambda=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$. в) $\lambda^2-1=0$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$. **366.** а) $(\lambda-k)^3=0$, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=k$; б) $\lambda(\lambda-1)^2=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$; в) $\lambda(\lambda-1)^2=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=1$; г) $(\lambda+1)\times(\lambda-1)^2=0$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\lambda_3=1$. **367.** а) $(\lambda+6)(\lambda-2)\times(\lambda-3)=0$, $\lambda_1=-6$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$; б) $(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda^2-9\lambda-2)=0$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=5$, $\lambda_{3,4}=\frac{9\pm\sqrt{89}}{2}$; в) $\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=3\pm i\sqrt{3}$. **368.** $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$. **369.** $\vec{x}_1$, $\vec{x}_3$.
370. $\vec{x}_3$. **371.** $\vec{x}_2$. **373.** Да, если $\lambda_1=\lambda_2$. **374.** $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}s$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}t$, $\forall s, t\in\mathbf{R}$, $s\neq\mathbf{R}$, $s\neq 0$, $t\neq 0$. **375.** $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}s$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}t$, $\forall s, t\in\mathbf{R}$, $s\neq 0$, $t\neq 0$, **376.** $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}c$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}t$, $\begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}s$, $\forall c, t, s\in\mathbf{R}$, $c\neq 0$, $t\neq 0$, $s\neq 0$. **377.** $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}c$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}t$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}p$, $\forall c, t, p\in\mathbf{R}$. $c\neq 0$, $t=0$, $p=0$. **378.** $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}c$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}t$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}s$, $\forall c, t, s\in\mathbf{R}$,

$c \neq 0,\ t \neq 0,\ s \neq 0$. **379.** $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c,\ \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} t,\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s,\ \forall c, t, s \in \mathbf{R}$, $c \neq 0,\ t \neq 0,\ s \neq 0$. **380.** $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c,\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t,\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s,\ \forall c, t, s \in \mathbf{R}$, $c \neq 0,\ t \neq 0,\ s \neq 0$. **381.** $\begin{bmatrix} 40 \\ -1 \\ -8 \\ 9 \end{bmatrix} c,\ \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ -2(t+k) \\ k \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} s$, $\forall c, t, k, s \in \mathbf{R},\ c \neq 0,\ s \neq 0,\ |t|+|k| \neq 0$. **382.** $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} c$, $\begin{bmatrix} t \\ 2t \\ s \\ 0 \end{bmatrix}$, $\forall c, t, s \in \mathbf{R},\ c \neq 0,\ |t|+|s| \neq 0$. **383.** $\begin{bmatrix} t+s \\ t \\ s \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} c$, $\forall t, s, c \in \mathbf{R},\ c \neq 0,\ |t|+|s| \neq 0$. **384.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. **385.** Нет. **386.** Нет. **387.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. **388.** $\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. **389.** Нет. **390.** Нет. **391.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. **392.** Нет. **393.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. **394.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. **395.** Нет. **396.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9-\sqrt{89}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9+\sqrt{89}}{2} \end{bmatrix}$

с точностью до порядка диагональных элементов. 397. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. 398. Нет. 399. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ с точностью до порядка диагональных элементов. 400. $\vec{e}_1{}'=(-\vec{e}_1+\vec{e}_2)t$, $\vec{e}_2{}'=(\vec{e}_1+2\vec{e}_2)s$, $\forall\, t,\ s\in\mathbf{R}$, $t\neq 0$, $s\neq 0$. 401. $\vec{e}_1{}'=(\vec{e}_1-2\vec{e}_2)t$, $\vec{e}_2{}'=(\vec{e}_1+\vec{e}_2)s$, $\forall\, t,\ s\in\mathbf{R}$, $t\neq 0$, $s\neq 0$. 402. $\vec{e}_1{}'=(\vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_3)t$, $\vec{e}_2{}'=(2\vec{e}_1+\vec{e}_2-2\vec{e}_3)s$, $\vec{e}_3{}'=(2\vec{e}_1-2\vec{e}_2+\vec{e}_3)k$, $\forall\, t,\ s,\ k\in\mathbf{R}$, $t\neq 0$, $s\neq 0$, $k\neq 0$. 403. $\vec{e}_1{}'=(24\vec{e}_1-12\vec{e}_2+\vec{e}_3+9\vec{e}_4)s$, $\vec{e}_2{}'=(-2\vec{e}_2+9\vec{e}_3+\vec{e}_4)t$, $\vec{e}_3{}'=k\vec{e}_3$, $\vec{e}_4{}'=(\vec{e}_3+\vec{e}_4)p$, $\forall\, s,\ t,\ k,\ p\in\mathbf{R}$, $s\neq 0$, $t\neq 0$, $k\neq 0$, $p\neq 0$. 404. $\vec{e}_1{}'=(6s_1+4t_1)\vec{e}_1+s_1\vec{e}_2+t_1\vec{e}_3$, $\vec{e}_2{}'=(6s_2+4t_2)\vec{e}_1+s_2\vec{e}_2+t_2\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}'=3k\vec{e}_1+k\vec{e}_3$, $\forall\, s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2,\ k\in\mathbf{R}$, причем $\begin{vmatrix} 6s_1+4t_1 & s_1 & t_1 \\ 6s_2+4t_2 & s_2 & t_2 \\ 3k & 0 & k \end{vmatrix}\neq 0$. 405. $\vec{e}_1{}'=k(\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3)$, $\vec{e}_2{}'=(2t_1+3s_1)\vec{e}_1-2t_1\vec{e}_2-2s_1\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}'=(2t_2+3s_2)\vec{e}_1-2t_2\vec{e}_2-2s_2\vec{e}_3$, $\forall\, s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2,\ k\in\mathbf{R}$, причем $\begin{vmatrix} k & k & -k \\ 2t_1+3s_1 & -2t_1 & -2s_1 \\ 2t_2+3s_2 & -2t_2 & -2s_2 \end{vmatrix}\neq 0$. 406. $\vec{e}_1{}'=(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)k$, $\vec{e}_2{}'=s_1\vec{e}_1+t_1\vec{e}_2+3(t_1-s_1)\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}'=s_2\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2+3(t_2-s_2)\vec{e}_3$, $\forall\, k,\ s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2\in\mathbf{R}$, причем $\begin{vmatrix} k & k & k \\ s_1 & t_1 & 3(t_1-s_1) \\ s_2 & t_2 & 3(t_2-s_2) \end{vmatrix}\neq 0$. 407. $\vec{e}_1{}'=-t_1\vec{e}_1+t_1\vec{e}_2+s_1\vec{e}_3-s_1\vec{e}_4$, $\vec{e}_2{}'=-t_2\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2+s_2\vec{e}_3-s_2\vec{e}_4$, $\vec{e}_3{}'=k_1\vec{e}_1+k_1\vec{e}_2+p_1\vec{e}_3+p_1\vec{e}_4$, $\vec{e}_4{}'=k_2\vec{e}_1+k_2\vec{e}_2+p_2\vec{e}_3+p_2\vec{e}_4$, $\forall\, t_1,\ t_2,\ s_1,\ s_2,\ k_1,\ k_2,\ p_1,\ p_2\in\mathbf{R}$, причем $\begin{vmatrix} -t_1 & t_1 & s_1 & -s_1 \\ -t_2 & t_2 & s_2 & -s_2 \\ k_1 & k_1 & p_1 & p_1 \\ k_2 & k_2 & p_2 & p_2 \end{vmatrix}\neq 0$. 408. $\vec{e}_1{}'=(2\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3)s$, $\vec{e}_2{}'=(2\vec{e}_1-\vec{e}_2-2\vec{e}_3)t$, $\vec{e}_3{}'=(\vec{e}_1-2\vec{e}_2+2\vec{e}_3)k$, $\forall\, s,\ t,\ k\in\mathbf{R}$, причем $\begin{vmatrix} 2s & 2s & s \\ 2t & -t & -2t \\ k & -2k & 2k \end{vmatrix}\neq 0$. 409. $\vec{e}_1{}'=k\vec{e}_1-k\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}'=t_1\vec{e}_1+t_1\vec{e}_2+s_1\vec{e}_3$, $\vec{e}_3{}'=t_2\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2+s_2\vec{e}_3$, $\forall\, k,\ t_1,\ t_2,\ s_1,\ s_2\in\mathbf{R}$, причем $\begin{vmatrix} k & -k & 0 \\ t_1 & t_1 & s_1 \\ t_2 & t_2 & s_2 \end{vmatrix}\neq 0$. 410. $\vec{e}_1{}'=s_1\vec{e}_1+t_1\vec{e}_2+2k_1\vec{e}_3+k_1\vec{e}_4$, $\vec{e}_2{}'=s_2\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2+2k_2\vec{e}_3+k_2\vec{e}_4$, $\vec{e}_3{}'=s_3\vec{e}_1+t_1\vec{e}_2+2k_3\vec{e}_3+k_3\vec{e}_4$, $\vec{e}_4{}'=(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4)p$,

$\forall\, s_1,\ s_2,\ t_1,\ t_2,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ p \in \mathbf{R}$, причем $\begin{vmatrix} s_1 & t_1 & 2k_1 & k_1 \\ s_2 & t_2 & 2k_2 & k_2 \\ s_3 & t_3 & 2k_3 & k_3 \\ p & p & p & p \end{vmatrix} \neq 0.$

411. $\vec{e}_1{}' = t_1\vec{e}_1 + s_1\vec{e}_2 - (t_1+s_1)\vec{e}_3,\ \vec{e}_2{}' = t_2\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 - (t_2+s_2)\vec{e}_3,\ \vec{e}_3{}' = k_1\vec{e}_2 + p_1\vec{e}_3 - (3k_1+2p_1)\vec{e}_4,\ \vec{e}_4{}' = k_2\vec{e}_2 + p_2\vec{e}_3 - (3k_1+2p_2)\vec{e}_4,\ \forall\, k_1,\ k_2,\ t_1,\ t_2,\ s_1,\ s_2,\ p_1,\ p_2 \in \mathbf{R}$, причем $\begin{vmatrix} t_1 & s_1 & -(t_1+s_1) & 0 \\ t_2 & s_2 & -(t_2+s_2) & 0 \\ 0 & k_1 & p_1 & -(3k_1+2p_1) \\ 0 & k_2 & p_2 & -(3k_2+2p_1) \end{vmatrix} \neq 0.$

412. Нет. **413.** Нет. **414.** Да. **415.** Да. **416.** Нет. **417.** Да. **418.** а)—в) да; г) нет при $k \neq 4$, да при $k = \pm 1$. **419.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$

420. $\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}.$ **421.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{5}{14}} \\ \sqrt{\frac{5}{14}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}.$

422. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$ **423.** $\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}.$

424. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}.$ **425.** $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$

426. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$ **427.** $x_i^1 z_1^k + x_i^2 z_2^k + \ldots + x_i^n z_n^k$. **428.** $x_i^1 (y_1^1 z_1^l + y_1^2 z_2^l + \ldots + y_1^n z_n^l) + x_i^2 (y_2^1 z_1^l + y_2^2 z_2^l + \ldots + y_2^n z_n^l) + \ldots + x_i^n (y_n^1 z_1^l + y_n^2 z_2^l + \ldots + y_n^n z_n^l)$.
429. $x_1^1 + x_2^2 + \ldots + x_n^n$. **430.** $\alpha y_k^l (x_i^1 z_1^p + x_i^2 z_2^p + \ldots + x_i^n z_n^p)$.

Глава 5

434. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$. 435. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. 436. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

437. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 438. $\begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -4 \end{bmatrix}$. 439. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

440. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 442. 1. 443. 1. 444. 3. 445. 4. 446. 2.

447. $[x_1\ x_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. 448. $[x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

449. $[x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. 450. $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \times$

$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$. 451. $[x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

452. $2x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1x_2$. 453. $x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$. 454. $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_1x_3 + 6x_2x_3$. 455. $x_3^2 - 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 14x_2x_3$. 456. $2x_2^2 - x_1^2 + 7x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 10x_1x_4 - 6x_2x_3 - 16x_2x_4 + 2x_3x_4$. 457. $5x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_4^2 + 2x_1x_2 + 22x_1x_3 + 14x_1x_4 - 16x_2x_3 + 6x_2x_4 + 4x_3x_4$. 458. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -4 \end{bmatrix}$.

459. $\begin{bmatrix} -1 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 8 \end{bmatrix}$. 460. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 8 & -\frac{21}{2} & 1 \\ 4 & -\frac{21}{2} & 11 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -8 \end{bmatrix}$.

461. Положительно определенная. 462. Не является знакоопределенной. 463. Не является знакоопределенной. 464. Не является знакоопределенной. 465. Положительно определенная при $\lambda>4$, ни при каком λ не является отрицательно определенной. 466. Не является знакоопределенной ни при каком λ. 467. Не является знакоопределенной ни при каком λ. 468. Экстремума нет. 469. $M_1(-1;\ 2)$ — точка максимума, $z_{\max}=-5$, $M_2(1;\ -2)$ — точка минимума, $z_{\min}=-52$. 470. Экстремума нет. 471. $M(0;\ 0;\ 0)$ — точка минимума $u_{\min}=0$. 472. $(0;\ 0;\ 0)$ — точка минимума, $u_{\min}=0$. 473. $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_2$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2$; $3y_1^2-y_2$. 474. $x_1=\frac{3}{\sqrt{13}}y_1-\frac{2}{\sqrt{13}}y_2$, $x_2=\frac{2}{\sqrt{13}}y_1+\frac{3}{\sqrt{13}}y_2$; $9y_1^2-4y_2^2$.

475. $x_1=\frac{3}{\sqrt{14}}y_1+\sqrt{\frac{5}{14}}y_2$, $x_2=\sqrt{\frac{5}{14}}y_1-\frac{3}{\sqrt{14}}y_2$; $12y_1^2-2y_2^2$. 476. $x_1=y_1$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\sqrt{\frac{2}{3}}y_3$, $x_3=-\sqrt{\frac{2}{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{3}}y_3$; $2y_1^2+5y_2^2-y_3^2$. 477. $x_1=-\frac{5}{\sqrt{70}}y_2+\frac{3}{\sqrt{14}}y_3$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}y_1+\frac{6}{\sqrt{70}}y_2+\frac{2}{\sqrt{14}}y_3$, $x_3=-\frac{2}{\sqrt{5}}y_1+\frac{3}{\sqrt{70}}y_2+\frac{1}{\sqrt{14}}y_3$; $9y_1^2+14y_2^2$. 478. $x_1=\frac{2}{\sqrt{14}}y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_2-\frac{6}{\sqrt{70}}y_3$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{14}}y_1+\frac{2}{\sqrt{5}}y_2+\frac{3}{\sqrt{70}}y_3$, $x_3=\frac{3}{\sqrt{14}}y_1+\frac{5}{\sqrt{70}}y_3$; $14y_1^2$. 479. $x_1=\frac{2}{\sqrt{6}}y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}y_2$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{6}}y_1-\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$, $x_3=\frac{1}{\sqrt{6}}y_1+\frac{1}{\sqrt{3}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $6y_1^2+3y_2^2$.

480. а) $x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_2-\frac{4}{3\sqrt{5}}y_3$, $x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{\sqrt{5}}y_2-\frac{2}{\sqrt{5}}y_3$, $x_3=\frac{2}{3}y_1+\frac{\sqrt{5}}{3}y_3$; $9y_1^2+9y_2^2-9y_3^2$; б) $x_1=\frac{1}{\sqrt{5}}y_1+\frac{2}{\sqrt{5}}y_2$, $x_2=-\frac{2}{\sqrt{5}}y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_2$; $5y_1^2+20y_2^2$.

481. а) $x_1=\frac{\sqrt{2}}{4}(y_1-y_2)$, $x_2=\sqrt{2}y_2$; б) $x_1=\frac{\sqrt{5}}{5}(3y_2-y_1)$, $x_2=\frac{\sqrt{5}}{5}(2y_1-y_2)$.

493. $\begin{bmatrix} 2t & e^t & 1 \\ 3\sin^2 t\cos t & 0 & 3t^2 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} \frac{t^3}{3} & e^t & \frac{(t+1)^2}{2} \\ \frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t & 2t & \frac{t^4}{4} \end{bmatrix} + c$.

494. Нулевая матрица, $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix} t + C$. **495.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} t^2 & \frac{3}{2}t^2 \\ -\frac{t^2}{2} & 2t^2 \end{bmatrix} + C$. **496.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3e^{3t} & 2t \\ -2\sin 2t & \cos t & 1 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(t+2)^2 & \frac{1}{3}e^{3t} & \frac{1}{3}t^3 \\ \frac{1}{2}\sin 2t & -\cos t & \frac{(t+5)^2}{2} \end{bmatrix} + C$. **497.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{\pi}{2}+1 & -1 \end{bmatrix}$.

498. $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{19}{3} & -\frac{16}{3} \\ e^3 - e & 2 & \frac{7}{2} \\ \frac{19}{3} & \frac{22}{3} & 1 \end{bmatrix}$. **499.** $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$. **500.** $\begin{bmatrix} 1+\frac{\pi}{2} & 0 \\ \pi+2 & -\frac{\pi}{2}-1 \end{bmatrix}$.

503. Нет. **504.** Да. **505.** Нет. **506.** Да. **507.** Да. **508.** Да. **509.** Да. **510.** $J_2(2)$. **511.** $J_3(1)$. **512.** $(J_1(0), J_2(2))$. **513.** $J_3(1)$. **514.** $(J_2(1)), J_1(0), J_1(2))$. **515.** $(J_2(2), J_1(2))$. **516.** $J_4(3)$. **517.** $(J_3(1), J_1(1))$. **518.** $(J_2(1), J_2(2))$. **519.** $J_4(2)$. **520.** $\begin{bmatrix} t & -t-s \\ -t & s \end{bmatrix}$, $\forall t, s \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $s \neq 0$. **521.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{t}{6} \\ t & s & p \\ 0 & \frac{t}{2} & \frac{s}{2}+\frac{t}{12} \end{bmatrix}$, $\forall t, s, p \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$.

522. $\begin{bmatrix} 0 & 2s & s+p \\ t & -s & 2s-p \\ -t & s & p \end{bmatrix}$, $\forall t, s, p \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $s \neq 0$.

523. $\begin{bmatrix} t & s & t+p \\ t & s & p \\ 0 & t & s \end{bmatrix}$, $\forall t, s, p \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $s \neq 0$. **524.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & p & l \\ 0 & 0 & -p & l \\ t & s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\forall t, s, p, l \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $s \neq 0$, $p \neq 0$, $l \neq 0$. **525.** $\begin{bmatrix} 0 & t & l \\ s & p & q \\ -s & s-t-p & -l-q \end{bmatrix}$, $\forall t, s, p, q, l, \in \mathbf{R}$, $s \neq 0$, $t \neq 0$, $l \neq 0$.

526. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -t \\ 0 & t & -2t+s & 9t-2s+p \\ 0 & -t & t-s & -5t+s-p \\ t & s & p & l \end{bmatrix}$, $\forall\, t,\ s,\ p,\ l \in \mathbf{R},\quad t \neq 0.$

527. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & t & 2t+p & 0 \\ t & p & l & t \\ 4t & 7t+4p & q & m \end{bmatrix}$, $\forall\, t,\ p,\ l,\ q,\ m \in \mathbf{R},\ t \neq 0,\ m \neq 4t.$

528. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{t}{2} & 0 & 0 \\ t & -s & 0 & 0 \\ t & -\frac{t}{2} - s & 0 & \frac{p}{3} \\ t & s & p & l \end{bmatrix}$, $\forall\, t,\ s,\ p,\ l \in \mathbf{R},\ t \neq 0,\ p \neq 0.$

529. $\begin{bmatrix} t & t+s \\ t & s \end{bmatrix}$, $\forall\, t,\ s \in \mathbf{R},\ t \neq 0.$

530. $\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}.$

531. $\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$

532. $e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

533. $e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

534. $\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$

535. $\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$

536. $e^{2t} \begin{bmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{bmatrix}.$

537. $e^{t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t+3t^2 & 1 & 2t \\ 3t & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

538. $\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{4} + e^{2t}\left(\frac{5}{4} - \frac{t}{2}\right) & -\frac{5}{4} + e^{2t}\left(\frac{5}{4} - \frac{t}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{4} + e^{2t}\left(-\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right) & \frac{5}{4} + e^{2t}\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right) \end{bmatrix}.$

539. $e^{t} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{2}t^2 & t \\ \frac{1}{2}t^2 & 1 - \frac{1}{2}t^2 & t \\ t & t & 1 \end{bmatrix}.$

540. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$.

541. $e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t & t & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & t & 1-t \end{bmatrix}$.

542. $\begin{bmatrix} -e^{2t}+2e^{3t} & 2e^{2t}-2e^{3t} & -2e^{2t}+2e^{3t} \\ 5e^{2t}-5e^{3t} & -4e^{2t}+5e^{3t} & 5e^{2t}-5e^{3t} \\ 6e^{2t}-6e^{3t} & -6e^{2t}+6e^{3t} & 7e^{2t}-6e^{3t} \end{bmatrix}$.

543. $\begin{bmatrix} e^{2t} & 5e^{3t}-5e^{2t} & \frac{20}{9}e^{3t}-\frac{17}{8}e^{2t}-\frac{7}{72}e^{-6t} \\ 0 & e^{3t} & \frac{4}{9}e^{3t}-\frac{4}{9}e^{-6t} \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}$.

544. $\begin{bmatrix} -e^t+2e^{3t} & -2e^t+2e^{3t} & -3e^t+3e^{3t} \\ -2e^t+2e^{3t} & -e^t+2e^{3t} & -3e^t+3e^{3t} \\ 2e^t-2e^{3t} & 2e^t-2e^{3t} & 4e^t-3e^{3t} \end{bmatrix}$.

545. $x_1=e^{3t}\left(c_1+c_2t+\frac{1}{2}c_3t^2\right)$, $x_2=e^{3t}(c_2+c_3t)$, $x_3=c_3e^{3t}$.

546. $x_1=c_1e^t$, $x_2=c_2e^{2t}$, $x_3=c_3e^{3t}$. 547. $x_1=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$, $x_2=c_2e^{2t}$, $x_3=c_3e^{-t}+c_4te^t$, $x_4=c_4e^{-t}$. 548. $x_1=e^t(c_1+c_2t)$, $x_2=c_2e^t$, $x_3=e^{2t}(c_3+c_4t)$, $x_4=c_4e^{2t}$. 549. $x_1=e^{2t}((c_2-c_1)t+c_1)$, $x_2=e^{2t}((c_1+c_2)t+c_2)$. 550. $x_1=c_1e^t$, $x_2=e^t(3c_1t^2+(c_2+2c_3-c_1)t)$, $x_3=3c_1te^t$. 551. $x_1=e^{2t}(c_1+(c_2+c_3)t)$, $x_2=\frac{1}{2}c_1-\frac{1}{4}c_2-\frac{5}{4}c_3+$ $+e^{2t}\left(\frac{5}{4}c_3-\frac{1}{2}c_1+\frac{5}{4}c_2-\frac{1}{2}(c_2+c_3)t\right)$, $x_3=-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{4}c_2+$ $+\frac{5}{4}c_3+e^{2t}\left(\frac{1}{2}c_1-\frac{1}{4}c_2-\frac{1}{4}c_3+\frac{1}{2}(c_2+c_3)t\right)$. 552. $x_1=$ $=e^t\left(c_1+c_3t+\frac{1}{2}t^2(c_1-c_2)\right)$, $x_2=e^t\left(c_2+c_3t+\frac{1}{2}t^2(c_1-c_2)\right)$, $x_3=e^t(c_3+t(c_1+c_2))$. 553. $x_1=e^{2t}(c_1+t(c_1+c_2-c_3))$, $x_2=c_2e^{2t}$, $x_3=e^{2t}(c_3+t(c_1+c_2-c_3))$. 554. $x_1=c_1e^{4t}+c_2e^t$, $x_2=2c_1e^{4t}-$ $-c_2e^t$. 555. $x_1=c_1e^{5t}+2c_2e^{-4t}$, $x_2=c_1e^{5t}-c_2e^{-4t}$. 556. $x_1=$ $=\frac{1}{2}(c_1+c_2)+\frac{1}{2}e^{2t}(c_1+c_2)$, $x_2=\frac{1}{2}(c_2-c_1)+\frac{1}{2}e^{2t}(c_1+c_2)$, $x_3=e^t(c_3+c_4t)$, $x_4=c_4e^t$. 557. $x_1=e^{2t}(-c_1+2c_2-2c_3)+$ $+2e^{3t}(c_1-c_2+c_3)$, $x_2=e^{2t}(5c_1-4c_2+5c_3)-5e^{3t}(c_1-c_2+c_3)$, $x_3=e^{2t}(6c_1-6c_2+7c_3)-6e^{3t}(c_1-c_2+c_3)$. 558. $x_1=e^{2t}\Big(c_1-5c_2-$

$-\frac{17}{8}c_3\Big)+e^{3t}\left(5c_2+\frac{20}{9}c_3\right)-\frac{7}{72}c_3e^{-6t}$, $x_2=e^{3t}\left(c_2+\frac{4}{9}c_3\right)-$ $-\frac{4}{9}c_3e^{-6t}$, $x_3=c_3e^{-6t}$. **559.** $x_1=-e^t(c_1+2c_2+3c_3)+$ $+e^{3t}(2c_1+2c_2+3c_3)$, $x_2=-e^t(2c_1+c_2+3c_3)+c^{3t}(2c_1+2c_2+$ $+3c_3)$, $x_3=2e^t(c_1+c_2+2c_3)-e^{3t}(2c_1+2c_2+3c_3)$. **560.** $x_1=$ $=e^{2t}\left(-t^3-\frac{1}{2}t^2+(1-c_1+c_2)t+c_1+e^{-t}\right)$, $x_2=e^{2t}\Big(\frac{1}{2}t^2+$ $+(c_1+c_2)t+c_2+2te^{-t}(1+t)\Big)$. **561.** $x_1=-\frac{1}{6}\Big(c_1e^{-5t}+c_2e^t+$ $+\frac{6}{7}e^{2t}-e^t\Big)$, $x_2=c_2e^t+e^{2t}$. **562.** $x_1=e^t\left(\frac{1}{2}t^2+c_1\right)$, $x_2=$ $=e^t\,\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{2}t^3+3c_1t^2+(c_2-c_1+2c_3)t\Big)$, $x_3=e^t\Big(\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^3+$ $+3c_1t+c_3\Big)$. **563.** $x_1=\left(-\cos t-\frac{1}{2}t^2+(c_1+c_2-c_3)t+c_1\right)e^{2t}$, $x_2=(-\cos t+c_2)e^{2t}$, $x_3=\Big(-\cos t-\sin t-\frac{1}{2}t^2+(c_1+c_2-$ $-c_3+1)t+c_3\Big)e^{2t}$. **564.** $x_1=\frac{1}{6}\Big(3te^{2t}+\left(c_1+\frac{7}{4}\right)e^{2t}+3e^{5t}+$ $+c_2e^{3t}+c_3e^{6t}+\frac{2}{3}\Big)$, $x_2=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}e^{2t}-3e^{5t}+c_2e^{3t}-2c_3e^{6t}-\frac{1}{3}\right)$, $x_3=\frac{1}{6}\left(-3te^{2t}-\frac{7}{3}+\left(\frac{7}{4}-c_1\right)e^{2t}+c_2e^{3t}+3e^{5t}+c_3e^{6t}\right)$.

565. Неустойчивый фокус. **566.** Седло. Неустойчиво. **567.** Седло. Неустойчиво. **568.** Устойчивый узел. **569.** Неустойчивый фокус. **570.** Устойчивый фокус. **571.** Устойчивый узел. **572.** Центр. **573.** Центр. **574.** Неустойчивый узел. **575.** Неустойчиво. **576.** Устойчиво. **577.** Неустойчиво. **578.** Неустойчиво. **579.** Неустойчиво. **580.** Асимптотически устойчиво. **581.** Неустойчиво. **582.** Асимптотически устойчиво. **583.** Неустойчиво. **584.** Устойчиво. **585.** Устойчиво. **586.** Устойчиво. **587.** Неустойчиво. **588.** Устойчиво. **589.** Неустойчиво. **590.** Асимптотически устойчиво. **591.** Асимптотически устойчиво. **592.** Асимптотически устойчиво. **593.** Неустойчиво. **594.** Неустойчиво. **595.** Асимптотически устойчиво. **596.** Неустойчиво. **597.** Асимптотически устойчиво.

598. $\omega_1=n\sqrt{0{,}38}$, $\omega_2=n\sqrt{2{,}64}$, где $n=\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1{,}61\end{bmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{bmatrix}1\\-0{,}61\end{bmatrix}$. **599.** $\omega_1=n\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $\omega_2=n\sqrt{2}$, $\omega_3=$ $=n\sqrt{1+\sqrt{3}}$, где $n=\sqrt{\frac{N}{lm}}$; $\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1+\frac{1}{\sqrt{3}}\\1\end{bmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$,

$$\vec{a}_3=\begin{bmatrix}1\\1-\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}.$$ **600.** $\omega_1=\omega_0\sqrt{0,22}$, $\omega_2=\omega_0\sqrt{0,71}$, $\omega_3=\omega_0\sqrt{2,28}$, $\omega_4=\omega_0\sqrt{3}$, где $\omega_0^2=\frac{c}{m}=\frac{2F}{ml}$; F—натяжение нити;

$$\vec{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1,28\\1\\1,28\end{bmatrix};\quad \vec{a}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\2\end{bmatrix};\quad \vec{a}_3=\begin{bmatrix}1\\-0,78\\1\\-0,78\end{bmatrix};\quad \vec{a}_4=\begin{bmatrix}1\\-0,5\\-1\\0,5\end{bmatrix}$$

(нечетные координаты собственных векторов относятся к грузам нити, четные — к грузам на пружинах). **601.** $\omega_1=0$, $\omega_2=n$, $\omega_3=n\sqrt{3}$, где $n=\sqrt{\frac{c}{m}}$; $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{p}{3m}t-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\frac{p}{2n\omega_2}\sin\omega_2 t+\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\frac{p}{6m\omega_3}\sin\omega_3 t$. **602.** $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}l-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\frac{3g}{2n^2}\cos nt-\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\frac{g}{6n^2}\cos n\sqrt{3}t$, где l — длина недеформированных пружин; $n=\sqrt{\frac{c}{m}}$. **603.** $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}\frac{x_2^0}{2\sqrt{2}}\cos\omega_1 t-\begin{bmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}\times\frac{x_2^0}{2\sqrt{2}}\cos\omega_3 t$, где x_2^0 — начальное отклонение средней бусинки; $n^2=\frac{N}{ml}$; $\omega_1=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,n$; $\omega_3=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,n$; N — натяжение нити.

ЛИТЕРАТУРА

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука, 1971.

Блох Э. Х., Лошинский Л. И., Турин В. Я. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения.— М.: Высшая школа, 1971.

Воеводин В. В. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1974.

Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения.— М.: Наука, 1971.

Ефимов Н. В. Квадратичные формы и матрицы.— М.: Наука, 1971.

Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре.— М.: Наука, 1975.

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1974.

Мальцев А. И. Основы линейной алгебры.— М.: Наука, 1970.

Рублев А. Н. Линейная алгебра.— М.: Высшая школа, 1968.

Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / Г. И. Кручкович, Г. М. Мордасова, В. А. Подольский и др.— М.: Высшая школа, 1970.

Тышкевич Р. И., Феденко А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.— Минск: Вышэйшая школа, 1976.

Элементы линейной алгебры / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова, В. Б. Хейнман.— Минск: Вышэйшая школа, 1977.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Рогнеда Федоровна Апатенок,
Александра Матвеевна Маркина,
Наталья Васильевна Попова,
Валентина Борисовна Хейнман

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Редактор А. А. Белянкина. Обложка В. А. Точилина. Мл. редактор Т. С. Капелян. Худож. редактор Ю. С. Сергачев. Техн. редактор М. Н. Кислякова. Корректор Л. А. Косенкова.

ИБ № 901

Сдано в набор 13.09.79. Подписано в печать 17.01.80. Формат 84×108 1/32. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 9,8. Тираж 19 000 экз. Изд. № 78-793. Зак. 553. Цена 50 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Белорусской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, Парковая магистраль, 11. Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии, 220041, Минск, Ленинский пр., 79.