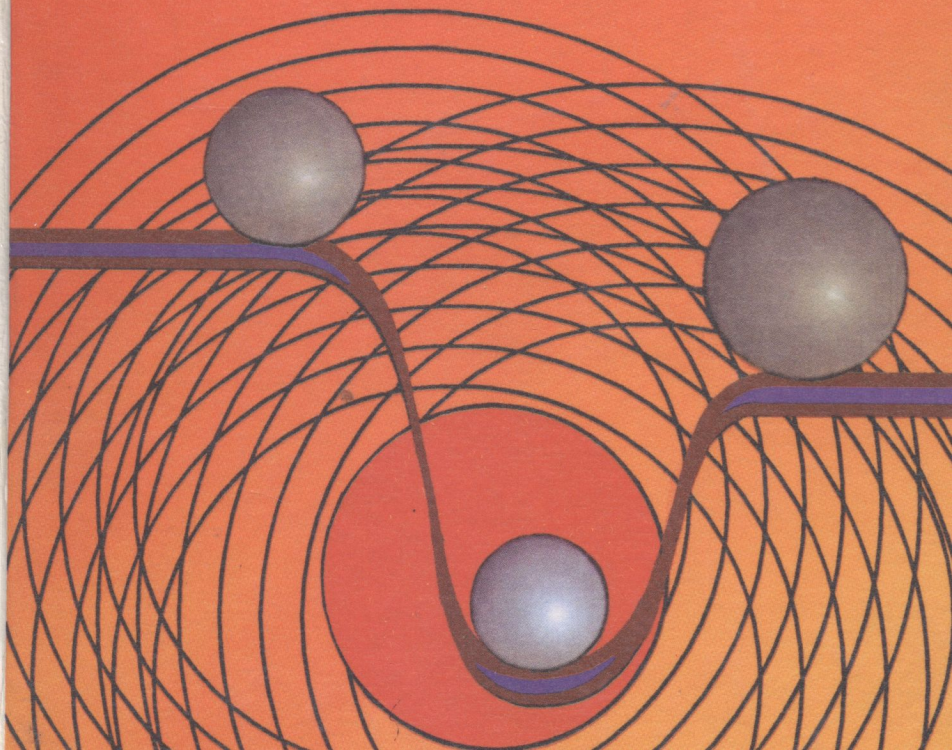


БЗ(045)  
3-14

# ЗАГАЛЬНІ ОСНОВИ ФІЗИКИ

Механіка

Термодинаміка  
та молекулярна  
фізика



І.Г. Богацька, Д.Б. Головка,  
А.А. Малярєнко, Ю.Л. Мєнтковський

# ЗАГАЛЬНІ ОСНОВИ ФІЗИКИ

У двох книгах

Книга 1

Механіка

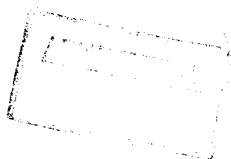
Термодинаміка  
та молекулярна  
фізика

За редакцією Д. Б. Головка,  
Ю. Л. Мєнтковського

*Допущено Міністерством освіти України*

Навчальний посібник для студентів  
технологічних спеціальностей  
вищих закладів освіти

КИЇВ  
"ЛИБІДЬ"  
1998



УДК 53 (075.8)

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. І. П. Дзюб,  
кандидати фіз.-мат. наук, доценти В. І. Клапченко, В. О. Клименко

Редакція літератури з природничих та технічних наук

Редактор *О. М. Миронець*

Навчальне видання

**Богацька Ірина** Георгіївна, **Головка Дмитро** Богданович,  
**Маляренко** Анатолій Андрійович, **Ментковський Юзеф** Леонович

## ЗАГАЛЬНІ ОСНОВИ ФІЗИКИ

У двох книгах

Книга 1

### Механіка. Термодинаміка та молекулярна фізика

За редакцією *Д. Б. Головка, Ю. Л. Ментковського*

Художник обкладинки *І. О. Шур*. Художній редактор *Т. О. Шур*  
Технічний редактор *І. М. Лукашенко*. Коректор *Т. В. Кацювенко*

Підп. до друку 01.12.97. Формат 84 × 108/32. Папір офсет. № 1. Гарн. Тип Таймс.  
Офсет. друк. Ум. друк. арк. 10,08. Ум. фарбовідб. 10,71.  
Обл.-вид. арк. 12, 7. Вид. № 3807. Зам. 7-3995

Оригінал-макет виготовлено Київським ПКБ АСУ, 252034 Київ, вул. Рейтарська, 86  
Видавництво "Либідь" при Київському університеті ім. Тараса Шевченка  
252001 Київ, Хрещатик, 10

Свідцтво про державну реєстрацію № 05591690 від 23.04.94  
АТ "ВІПОЛ", 252151 Київ, вул. Волинська, 60.

314 **Загальні основи фізики: У двох книгах. Кн. 1. Механіка. Термодинаміка та молекулярна фізика. Навч. посібник / І. Г. Богацька, Д. Б. Головка, А. А. Маляренко, Ю. Л. Ментковський; За ред. Д. Б. Головка, Ю. Л. Ментковського. — К.: Либідь, 1998. — 192 с.**

ISBN 966-06-0045-3 (кн.1)

ISBN 966-06-0044-5 (заг.)

398683

У посібнику викладено основні закони механіки, фундаментальні положення термодинаміки та молекулярної фізики, які потрібні для подальшого вивчення як власне фізики, так і суміжних з нею природничих і технічних наук.

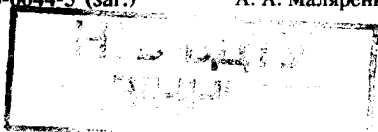
Для студентів технологічних спеціальностей вищих закладів освіти.

3 160400000-002  
1998

ББК 22.3я73+22.2я73

ISBN 966-06-0045-3 (кн.1)  
ISBN 966-06-0044-5 (заг.)

© І. Г. Богацька, Д. Б. Головка,  
А. А. Маляренко, Ю. Л. Ментковський, 1998



## ВСТУП

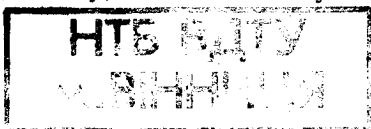
Фізика посідає чільне місце серед фундаментальних природничих наук, задовольняючи потребу людини пізнавати навколишній світ й утворюючи принципову основу для багатьох суміжних природничих і технічних наук.

Предмет і роль фізики кожен із нас у загальних рисах уявляє собі завдяки шкільному курсу. Проте таке уявлення далеко не вичерпує реальну наукову й культурну цінність фізики. Фізика вивчає, з одного боку, найбільш фундаментальні властивості матерії і закони її руху (еволюції) та взаємодії окремих її різновидів між собою, а з іншого — найбільш елементарні (первинні) властивості та закони матеріального світу. Фундаментальність законів фізики зумовлює універсальну її значущість у системі природничих і технічних наук. Елементарність цих законів дає аналітичний ключ для вивчення складних явищ і процесів шляхом розкладання їх на елементи.

Проте розкладання чогось складного на елементи не означає, звичайно, просте зведення його до цих елементів. Складне не міститься в простому, а лише розбивається на переплетені складові, утворюючи нову якість. Наприклад, розумова діяльність людини не зводиться до фізичних процесів у мозку, які її забезпечують хоча б тому, що продуктом цієї діяльності є думки та ідеї, тобто щось не матеріальне. Фізика ж має справу з матеріальними об'єктами та фізичними процесами в них. Але розкривши фізичні механізми мислення, фізика, звичайно, допоможе науці у вивченні інтелектуальної і психічної діяльності людини.

Отже, задачі фізики — специфічні й обмежені, хоча й дуже широкі та основоположні. Природно детально розглянути ті класи явищ, які фізика вивчає сьогодні. Щоправда поділ фізичних явищ на класи дещо умовний і не зовсім однозначний, оскільки різні явища можуть тісно переплітатися, потребуючи комплексного підходу. І все ж існують різноманітні за своєю природою явища, наприклад, зі своїми специфічними законами, які можна розбити на такі класи:

1) механічні явища (включаючи механіку суцільних середовищ, зокрема аеро- та гідродинаміку, а також механіку тіл змінної маси);



- 2) теплові (включаючи рівноважну та нерівноважну термодинаміку та фізичну кінетику);
- 3) електромагнітні (разом з основами хвильової оптики);
- 4) оптичні (також і спектроскопія);
- 5) гравітаційні;
- 6) фізика атомів і молекул (на базі квантових уявлень);
- 7) будова й властивості речовини (тверді тіла, рідини, гази, плазма, ядерна матерія; взаємодія випромінювань з речовиною);

8) фізика атомного ядра та елементарних частинок.

До зазначених умовних класів слід додати ще свого роду "стикові" розділи фізики, які визначають її суттєве проникнення в суміжні галузі наукових і технічних знань, з якими вона не має навіть чіткого розмежування. Це фізика металів, напівпровідників та діелектриків; астрофізика, біофізика, фізхімія; технічна термо- та електродинаміка тощо. Належать ці розділи водночас до власне фізики (як її спеціальні глави) і до матеріалознавства, астрономії, біології, хімії, відповідних технічних наук тощо (як їхня фізична основа).

Таке тісне переплетення суміжних наук відбиває невичерпну різноманітність матеріального світу й його єдність.

Очевидна з наведеного неосяжність фізики виключає фаховий універсалізм, вимагаючи концентрації зусиль кожного спеціаліста на обмеженому колі проблем. І все ж існують певні загальні принципи та закони, які стосуються буквально всіх розділів фізики, роблячи її єдиною наукою, і які належить знати не лише всім фізикам-професіоналам, а й усім представникам суміжних природничих і технічних наук.

Дати уявлення про такі універсальні закони фізики (або хоча б наблизити до їхнього усвідомлення) покликаний, з нашого погляду, сучасний курс загальної фізики.

Проте слід зважити, що не лише фізика розрослася в наш час в неосяжну науку. Стрімкого розвитку набули й інші галузі наукових і технічних знань. Тому, складаючи загальний курс фізики, треба сконцентрувати увагу не стільки на обсязі, скільки на *доборі* матеріалу, мінімально достатнього для подальшого (в разі потреби) вивчення як самої фізики, так і суміжних з нею природничих і технічних наук. Єдине застереження стосується того, щоб уникнути вузького прагматизму в складанні програм з фізики (до якого інколи закликають представники профільюючих кафедр, затиснені рамками обмеженого часу навчання). Вищий навчальний заклад не може забезпечити повної професійної підготовки майбутнього спеціаліста з цілої низки причин (обмежений час навчання, різноманітність й швидкозмінність конкретних технологій на підприємствах та ін.). Він може лише закласти фундамент загальної й професійної освіти.

Світова педагогічна думка щодо вищої освіти вже давно дійшла висновку (про який, на жаль, доводиться періодично нагадувати), що запас професійної "міцності" дають фахівцеві насамперед фундаментальні (до яких, зокрема, належить фізика), а також загальноінженерні та загальнотехнічні дисципліни, які змінюються й поновлюються повільніше ніж спеціальні й технологічні. Трудове й творче довголіття фахівцеві матиме лише тоді, коли він буде фундаментально освіченим, аби в разі потреби оперативно міняти навіть амплуа. Відомо, наприклад, в яку скруту свого часу потрапила всесвітньо відома оптична фірма "Цейс", коли спробувала вдосконалити оптичний мікроскоп, щоб побачити хоча б великі молекули. Не врахувавши явища дифракції, за якого в діапазоні видимого світла молекули побачити неможливо, фірма витратила багато марних зусиль. Цю проблему вирішують електронні мікроскопи, набагато складніші за оптичні й іншого принципу дії.

Прикладів можна було б навести багато. Всі вони свідчать проти вузько прагматичного підпорядкування фундаментальних дисциплін профілюючим. Отже, загальні курси фізики (якого завгодно обсягу) мають охоплювати всі основні розділи цієї науки, акцентуючи на тих, що вже сьогодні широко застосовуються. І тут знову виникає проблема ретельного добору матеріалу принципового значення без зайвої деталізації. Звичайно, не можна до певної міри не враховувати також загальнопрофілю "споживача": значне використання математичного апарата на технічних факультетах і менше — на медичних.

Пропонований посібник задумано як компактний курс з основ фізики для технічних вищих навчальних закладів, достатньо оснащений як математичним інструментарієм, так і провідними загальнофізичними ідеями, і має становити основу для самостійного поповнення науково-технічних знань фахівцем у подальшому.

Для самостійного розширення загальнофізичних знань треба насамперед звернути увагу на будову речовини (особливо кристалічних тіл, полімерів, рідин [36, 39]), елементи механіки суцільних середовищ (зокрема, пружні та в'язкопружні тіла, а також пружні хвилі [36, 39]), на загальні основи хвильової та геометричної оптики [22]. На базі знань, отриманих за допомогою пропонованого посібника, зазначені питання цілком доступні для самостійного засвоєння.

Треба звернути також особливу увагу початківця на необхідність ознайомлення з ключовими експериментами в фізиці [1, 20], які не наведено в посібнику, з метою якнайменше переривати логіку концептуальних побудов. У противному разі у початківця може скластися враження, що фізику можна побудувати методом майже незалежних від дослідів висновків. Це

було б грубою помилкою. Адже первинні істини в кожному розділі фізики мають суто дослідну основу й ні з яких апіорних теоретичних міркувань не випливають. Більше того, теоретичні схеми аналізу певної сукупності окремих дослідних фактів найчастіше неоднозначні. Лише порівняння наслідків з цих теоретичних схем з подальшими експериментами дають змогу вибрати серед кількох можливих теоретичних варіантів істинний (тобто такий, що дає можливість вірно наперед передбачити цілі класи (наприклад, теплові) закономірностей підтверджуваних а posteriori експериментально). Особливу увагу слід звернути на ключові експерименти, які підтверджують подвійну — корпускулярно-хвильову — природу мікрооб'єктів (фотоефект, ефект Комптона; досліди з дифракції електронів [16, 32]) як такі, що виводять науку далеко за межі наочного (розділ 5). Радимо неодмінно й безвідкладно розібратися з цим колом питань, без яких фізична освіта не буде ґрунтовною.

Розділ 1 написали І. Г. Богацька, Д. Б. Головка, Ю. Л. Ментковський, розділи 2, 3 — Д. Б. Головка, Ю. Л. Ментковський, 4, 5 — Д. Б. Головка, А. А. Маляренко, Ю. Л. Ментковський.

## Розділ 1

# МЕХАНІКА

---

Механіка вивчає найпростіші закони руху (розвитку) матерії: причини й характер просторових пересувань (переміщень) матеріальних тіл (чи їх частин) відносно одне одного, а також умови рівноваги (відносного спокою) таких тіл та їх частин.

Спеціальний і дуже розгалужений розділ механіки присвячено руху суцільних середовищ (гази, рідини; пружні та інші деформовні тіла; плазма).

Отже, механіка в широкому розумінні — наука невичерпна. Але майже жодного її розділу не можна зрозуміти без попереднього вивчення механіки найпростіших тіл: матеріальних точок та абсолютно твердих тіл — винятково важливі й плідні ідеалізації певних матеріальних об'єктів. Тому вивчення будь-якого послідовного курсу фізики починається з принципів основ механіки матеріальних точок і твердих тіл.

Дуже важливі закони й методи механіки матеріальних тіл відіграють також велику евристичну роль відносно інших розділів фізики, оскільки становлять найпростіше втілення багатьох загальнофізичних принципів і законів, з'ясування яких природно починати саме з механіки, де добре сполучаються формальна логіка і наочність. Якщо додати до сказаного, що механічний рух є елементом мало не всіх фізичних явищ макросвіту, то визначальна роль механіки в загальному курсі фізики стає очевидною. Звідси й важливість глибокого й вдумливого вивчення механіки в різних її аспектах.

Механіка матеріальних тіл поділяється на статику, кінематику й динаміку.

Статика визначає закони механічної рівноваги (тобто умови й закономірності відносного спокою тіл, що взаємодіють між собою). Елементи статyki, достатні для наших цілей, вивчають у межах шкільного курсу фізики. Тому обмежимося вказівкою, наприклад, на посібник [4], не обговорюючи тут самого предмета.

Кінематика вивчає способи математичного опису просторових рухів тіл безвідносно до факторів, що їх спричиняють або змінюють.



Динаміка пов'язує механічний рух з тими фізичними факторами, що його породжують або змінюють. Це — найбільш змістовний розділ механіки.

## Глава 1

### КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

#### § 1.1. Системи відліку. Траєкторія

*Матеріальною точкою* в механіці називають тіло, розмірами й формою якого можна знехтувати в умовах задачі, що розглядається. Те саме тіло в одних умовах можна розглядати як точкове, а в інших — як таке, що має форму й об'єм (з певним розподілом речовини в ньому). Так, планети на орбітах у механіці трактуються як точкові тіла, оскільки їхні лінійні розміри набагато менші за середні радіуси відповідних орбіт. Вивчаючи ж механічні процеси поблизу планет або на самих планетах, доводиться враховувати розміри, форму та розподіл речовини в межах цих планет.

Термін *матеріальна точка* нерідко замінюють на один з коротших: просто *точка* або *частинка*.

Системи відліку використовують для визначення відносного розташування та пересування тіл у просторі. Відповідаючи на запитання, "де" й "куди", завжди апелюють до предметів оточуючого середовища. У фізиці розміщення й рух тіл звичайно пов'язують з якимось фіксованим тілом із заданою на ньому системою координат<sup>1</sup> (рис. 1) та з годинником.

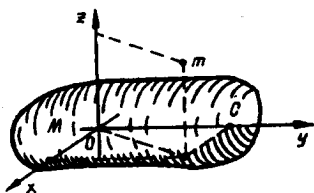


Рис. 1

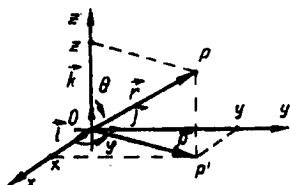


Рис. 2

Вибране тіло  $M$  називають *тілом відліку*. Разом із заданою на ньому системою координат та годинником воно становить *систему відліку*.

За основу в фізиці найчастіше беруть систему декартових

<sup>1</sup> Не вдаючись до детального опису запропонованих понять, ми врахуємо, що основні поняття фізики з елементарного курсу вже відомі.

координат (від якої в разі потреби переходять вже до інших). Декартова система складається з трьох взаємно перпендикулярних прямих (осей координат), що проходять через вибрану точку тіла відліку  $O$  (початок координат (див. рис. 1)). Напрямок осей координат задають їх орієнтацією на додатково вибрані точки в тілі відліку (якщо його за умов задачі можна вважати абсолютно твердим) або на інших достатньо віддалених тілах, які в заданих умовах можна вважати відносно нерухомими. В астрономії, наприклад, осі координат часто спрямовують на далекі зірки. Головними елементами системи відліку є тіло відліку та годинник. Роль системи координат допоміжна й слугує лише для фіксування відносного положення й пересування тіл у просторі. Системи координат можна добирати по-різному (про це мова буде йти далі). Основне тіло відліку звичайно вибирають так, щоб у розглядуваній задачі його можна було вважати умовно нерухомим. Тоді рух інших (рухомих) тіл відліку описують в основній (умовно нерухомій) системі відліку.

У декартовій системі координат відносно розміщення точки у просторі задається ортогональними її проєкціями  $\{x, y, z\}$  на осі координат (рис. 2).

Як видно з рисунка, замість декартових координат  $\{x, y, z\}$  місце точки  $P$  у просторі можна визначити за допомогою сферичних  $\{r, \theta, \varphi\}$  або циліндричних  $\{\rho, \varphi, z\}$  координат. Можливі й інші варіанти. Але завжди це буде три числа. У зв'язку з цим кажуть про три ступеня вільності, які має вільна<sup>1</sup> частинка (матеріальна точка). Накладаючи певні обмеження ("зв'язки") на можливі переміщення, можна зменшити кількість ступенів вільності частинки. Наприклад, з'єднавши частинку  $P$  з початком координат жорстким шарніром, що може вільно обертатися навколо точки  $O$  у будь-якому напрямі, ми відберемо у частинки один ступінь вільності (радіальний  $r = |\vec{r}| = \text{const}$ ), залишивши тільки два (кутові  $\varphi, \theta$ ). Взагалі, змусивши частинку рухатися строго по поверхні будь-якого тіла, ми залишаємо їй два ступеня вільності, оскільки поверхня має два виміри. Рух тіла строго вздовж кривої (наприклад, кульки вздовж жолоба) буде одновимірним (один ступінь вільності частинки). Якщо частинка жорстко закріплена в певній точці простору, то вона позбавлена всіх трьох ступенів вільності. Отже, ми з'ясували поняття про ступінь вільності частинки.

Найкомпактнішим визначенням місця частинки у просторі є визначення за допомогою радіуса-вектора  $\vec{r}$ , проведеного від початку координат  $O$  до точки розміщення частинки  $P$  (див. рис. 2). Оскільки декартові координатні  $\{x, y, z\}$  частинки чи-

<sup>1</sup> Тут вільна частинка — це така, рух якої ніякими просторовими перешкодами не обмежено.

сельно збігаються з проекціями вектора  $\vec{r}$  на осі координат, має місце розкладання

$$\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z, \quad (1.1)$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — одиничні вектори (орти) вздовж додаткових напрямів осей  $Ox, Oy, Oz$  відповідно. Довжина (модуль) кожного з ортів дорівнює  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ .

Наведемо співвідношення між декартовими, сферичними та циліндричними координатами (див. рис. 2):

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi; & r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}; \\ y = r \sin \theta \sin \varphi; & \varphi = \arctg y/x; \\ z = r \cos \theta; & \theta = \arccos \{z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\}. \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; & \rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = r \sin \theta; \\ y = \rho \sin \varphi; & \varphi = \arctg y/x; \\ z = z; & z = z. \end{cases} \quad (1.3)$$

*Траєкторія частинки* — це та крива, яку описує частинка під час руху відносно обраної системи відліку. Радіус-вектор частинки  $\vec{r}$  своїм кінцем "викреслює" траєкторію частинки у заданій системі відліку й становить функцію часу  $t$ . Координати частинки  $\{x, y, z\}$  як функції часу  $t$  також визначають траєкторію, задаючи параметричні рівняння. Згадані рівняння (у векторній та координатній формах) символічно записують таким чином:

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \quad x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \quad (1.4)$$

$$(0 \leq t < \infty).$$

Параметром рівнянь (1.4) слугує час  $t$  ( $0 \leq t < \infty$ ). Параметричні рівняння (1.4) визначають не лише форму траєкторії, а й швидкість руху частинки та її прискорення (див. § 1.2).

Траєкторія частинки може бути відома заздалегідь (рейковий транспорт; попередній розрахунок траєкторії, скажімо, ракети тощо). Іноді траєкторія практично "вимальовується" у просторі тілом, що рухається (треки частинок у камері Вільсона, сліди реактивних літаків у спокійному повітрі тощо). Якщо траєкторія задана якимсь чином, то слідкувати за рухом частинки вздовж неї можна за допомогою лише однієї скалярної величини (параметра), яка визначає положення частинки на заданій траєкторії. Досить зручно обрати за такий скалярний параметр довжину дуги  $s$ , описаної вздовж траєкторії  $L$  при заздалегідь заданому на ній початку відліку  $O$  і додатному напрямі (рис. 3). Це свого роду

координата (криволінійна), яка для рухомої частинки буде функцією часу

$$s = s(t). \quad (1.5)$$

Криволінійну координату  $s$  зручно використовувати також для "параметризації" траєкторії як кривої у просторі



Рис. 3

$$\vec{r} = \vec{r}(s); \quad x = x(s); \quad y = y(s); \quad z = z(s). \quad (1.6)$$

Таке визначення траєкторії має назву *натурального*. Очевидно, перехід від натурального визначення траєкторії (1.6) до її визначення у формі (1.4) можна здійснити за допомогою формул<sup>1</sup>

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t)); \quad x(t) = x(s(t)); \quad y(t) = y(s(t)); \quad z(t) = z(s(t)). \quad (1.7)$$

Коли задано траєкторію  $L$  (див. рис. 3) і довжину дуги<sup>2</sup> на ній  $s$  як функцію часу  $t$  (1.5), то кажуть, що задано рух частинки у натуральній формі, оскільки дуга  $s$  визначає місце частинки на відомій траєкторії  $L$ , а отже, й у просторі.

Кожен з наведених способів опису руху частинки у просторі (кінематичний (1.4) чи натуральний (1.5), (1.6)) має свої переваги й використовується при обчисленнях, які будуть розглядатися далі.

## § 1.2. Переміщення, швидкість, прискорення

*Переміщення* — це вектор, спрямований від початкового положення частинки  $A$  до певного кінцевого її положення  $B$  на траєкторії (рис. 4).

Переміщення

$$\Delta \vec{r} = \vec{AB} \quad (1.8)$$

можна розглядати як векторну різницю радіусів-векторів  $\vec{r}_B$  і  $\vec{r}_A$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A. \quad (1.9)$$

Повне переміщення  $\vec{AD}$  (рис. 5) є векторною сумою проміжних переміщень  $+\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  і  $\vec{CD}$ .

<sup>1</sup> Тильда ( $\sim$ ) під символами (1.6), (1.7) підкреслює те, що залежність  $\vec{r}$  (або  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) від  $t$  і  $s$  різна. Надалі тильду опустимо.

<sup>2</sup> Поняття "довжина дуги" вжито дещо умовно, оскільки  $s$  може мати додатне і від'ємне значення. Точніше було б "довжиною дуги" називати  $|s|$ .

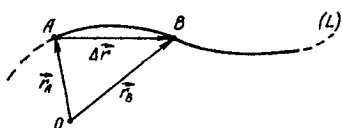


Рис. 4

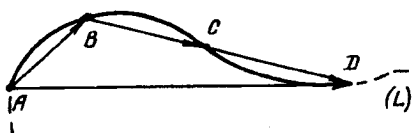


Рис. 5

При поетапному поділі траєкторії  $L$  (див. рис. 5) на дрібніші ділянки ламана відповідних переміщень все тісніше прилягатиме до траєкторії, зливаючись з нею у границі нескінченно малих проміжних переміщень. Це дає можливість визначити дві пов'язані між собою важливі характеристики руху частинки: швидкість уздовж траєкторії  $v$  (скаляр) і вектор швидкості  $\vec{v}$ .

Середню швидкість  $\langle v \rangle$  вздовж траєкторії за проміжок часу від  $t$  до  $t + \Delta t$  визначають приростом дуги  $s$  за проміжок, віднесений до значення даного проміжку:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (1.10)$$

Отже, ця швидкість чисельно дорівнює відстані <sup>1</sup>, яку в середньому додала частинка за одиницю часу на інтервалі від  $t$  до  $t + \Delta t$ .

Миттєва швидкість уздовж траєкторії  $v$  визначається як граничне значення середньої  $\langle v \rangle$ , коли  $\Delta t$  прямує до нуля

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle v \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.11)$$

Отже, миттєва швидкість уздовж траєкторії з математичного погляду — це похідна шляху  $s = s(t)$  за часом  $t$ . Вектор середньої швидкості за проміжок часу від  $t$  до  $t + \Delta t$  — це вектор  $\langle \vec{v} \rangle$ , що дорівнює відношенню переміщення  $\Delta \vec{r}$  за цей проміжок до величини проміжку  $\Delta t$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

Вектор миттєвої швидкості  $\vec{v}$  визначають як граничне значення вектора  $\langle \vec{v} \rangle$ , коли  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.13)$$

<sup>1</sup>  $\langle v \rangle$  може мати як додатне, так і від'ємне значення залежно від напрямку відносно заданого на траєкторії  $L$ .

Нижче покажемо, що вектор швидкості  $\vec{v}$  (1.13) за напрямом збігається з дотичною до траєкторії (рис. 6). Зв'язок між вектором швидкості  $\vec{v}$  і швидкістю вздовж траєкторії  $v$  визначається за формулами

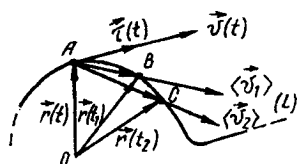


Рис 6

$$\vec{v}(t) = \vec{r}(t) |v(t)|; \quad |\vec{v}(t)| = |v(t)|, \quad (1.14)$$

де  $\vec{r}(t)$  — одиничний вектор (орт), дотичний до траєкторії (див. рис. 6),

$$\vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}}{ds}; \quad |\vec{r}| = 1. \quad (1.15)$$

Згідно з розкладом радіуса-вектора  $\vec{r}$  по базисних ортах вздовж координатних осей  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  та означенням швидкості  $\vec{v}$ , матимемо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z, \quad (1.13a)$$

де проекції швидкості на координатні осі визначаються за формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.136)$$

Доведемо формули (1.14), (1.15). Починаючи з геометричного аналізу формули (1.13) (див. рис. 6), вважатимемо, що  $\Delta t < 1$ , отже,

$$1/\Delta t > 1 \quad (1.16)$$

(оскільки йдеться про подальший граничний перехід при  $\Delta t \rightarrow 0$ ). У такому разі матимемо<sup>1</sup>

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} |\Delta \vec{r}| > |\Delta \vec{r}|. \quad (1.17)$$

Нерівність (1.17) враховано на рис. 6, де зображено моменти  $t_1$  і  $t_2$  граничного переходу ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) при умові, що  $\Delta t_1 = t_1 - t < \Delta t_2 = t_2 - t$ . Як видно з рисунка, у границі (коли  $\Delta t \rightarrow 0$ ) січні  $\langle \vec{v} \rangle$  прямують до дотичної  $\vec{v}(t)$ . Отже, вектор швидкості  $\vec{v}(t)$

<sup>1</sup> Зазначимо, що всі наведені нерівності — це нерівності за величиною; розмірності ж обох їх частин однакові. Точніше це мало б вигляд  $1/\Delta t [c^{-1}] > 1 [c^{-1}]$  і т. п.

справді дотичний до траєкторії у точці з радіусом-вектором  $\vec{r}(t)$  (див. рис. 6).

Очевидно, далі

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  приріст дуги  $\Delta s$  за величиною теж прямує до нуля ( $\Delta s \rightarrow 0$ ). Отже, границю (1.13) можна обчислити як добуток границь

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad (1.18)$$

тобто, зваживши на означення (1.11) та (1.15), можна остаточно одержати першу з формул (1.14).

Власне кажучи, тут відтворено відоме з математичного аналізу "правило ланцюга" для диференціювання складних функцій (1.18).

Нарешті, зазначимо, що при  $\Delta t \rightarrow 0$  довжини хорди  $|\Delta \vec{r}|$  і дуги  $\Delta s$  прямують до нуля, все менше відрізняючись одна від одної (див. рис. 6):  $|\Delta \vec{r}| / \Delta s \rightarrow 1$ . Тому дотичний вектор  $\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{ds}$  (1.15) є одиничним (тобто ортом). Формули (1.14) і (1.15) доведено повністю.

Векторами середнього та миттєвого прискорень будуть такі векторні величини: вектор середнього (за проміжок  $\Delta t$ ) прискорення  $\langle \vec{a} \rangle$ , який становить середню (на інтервалі  $t, t + \Delta t$ ) зміну вектора швидкості  $\vec{v}$  за одиницю часу, визначають як

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}, \quad (1.19)$$

а відповідний вектор миттєвого<sup>1</sup> прискорення, що дістають граничним переходом, коли  $\Delta t \rightarrow 0$ , як

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.20)$$

(Детально фізичний зміст векторів  $\langle \vec{a} \rangle$  та  $\vec{a}(t)$  рекомендуємо обміркувати самостійно й виконати відповідні геометричні побудови.) Ясно, що прискорення  $\vec{a}$  — це миттєва швидкість зміни швидкості  $\vec{v}$ , тобто відповідна зміна її за одиницю часу.

<sup>1</sup> Термін *миттєві* (стосовно швидкості та прискорення) для скорочення звичайно опускають.

Якщо врахувати визначення (1.13), то для прискорення (1.20) можна написати

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.21)$$

Згідно з розкладанням швидкості (1.13а) по координатних осях та означенням прискорення (1.20), матимемо розкладання прискорення:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z, \quad (1.20a)$$

де проекції прискорення на координатні осі визначаються як

$$a_\xi = \frac{dv_\xi}{dt} = \frac{d^2\xi}{dt^2} \quad (\xi = x; y; z). \quad (1.20б)$$

Прискорення  $\vec{a}(t)$  з (1.21) можна розкласти також на векторну суму тангенціального  $\vec{a}_\tau$  (дотичного до траєкторії) і нормального  $\vec{a}_n$  (перпендикулярного до траєкторії) доданків (рис. 7)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.22)$$

Перший доданок визначає зміну швидкості  $\vec{v}$  за величиною за одиницю часу; другий — зміну швидкості  $\vec{v}$  за напрямом за одиницю часу (див. рис. 7) і, отже, викривлення траєкторії.

Очевидно, за теоремою Піфагора

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2, \quad (1.23)$$

де  $a$ ,  $a_\tau$ ,  $a_n$  — модулі відповідних векторів<sup>1</sup>  $a = |\vec{a}|$ ;  $a_\tau = |\vec{a}_\tau|$ ;  $a_n = |\vec{a}_n|$ . Доведемо, що мають місце формули

$$\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \frac{dv}{dt}; \quad \vec{a}_n = \frac{\vec{n}^0}{\rho} v^2(t); \quad (1.24)$$

тут  $\vec{n}^0$  — орт, нормальний до траєкторії і спрямований у бік її повороту;  $\vec{\tau}$  — орт, дотичний до траєкторії (1.15);  $\rho$  — радіус кривини траєкторії [42]:

$$\rho = \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|^{-1}. \quad (1.25)$$

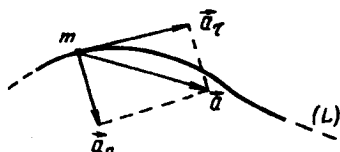


Рис. 7

<sup>1</sup> Для скорочення й надалі користуватимемося позначенням  $A = |\vec{A}|$  для будь-якого вектора  $\vec{A}$ .



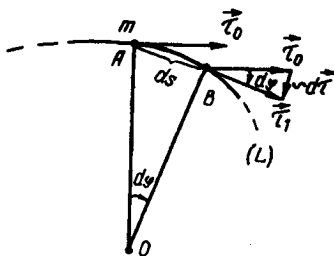


Рис. 8

Для попереднього з'ясування геометричного змісту радіуса кривини  $\rho$  звернемося до прикладу руху частинки вздовж плоскої траєкторії. Два близькі положення частинки (в момент  $t_0$  і  $t_1$ ) зображено на рис. 8.

Відрізки  $OA$  та  $OB$  перпендикулярні (нормальні) відповідно до  $\vec{v}_0$  і  $\vec{v}_1$ .

Як видно з рисунка (з урахуванням (1.15)),  $ds/\rho = |d\vec{v}|/v$ , де  $\rho = OA = OB$  — радіус кола, дотичного до траєкторії. Звідси й випливає (1.25). Загальне геометричне визначення  $\rho$  для просторової траєкторії можна знайти, наприклад, у праці [42]. Якщо тіло рухається по колу, то прискорення  $\vec{a}_n$  є доцентровим, а радіус кривини  $\rho$  збігається з радіусом згаданого кола  $R$ .

Обґрунтуємо (1.24), (1.25).

Наочну геометричну побудову, яка веде до розкладання (1.22), (1.23), можна знайти, наприклад, у праці [9]. Ми ж вдамося до більш інформативних аналітичних обчислень.

Співвідношення (1.24) доводяться за допомогою правил диференціювання добутку функцій (1.14) та ланцюгового<sup>1</sup>. Згідно з означенням (1.20) та формулою (1.14), матимемо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{v} + v \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.26)$$

Перший доданок з очевидністю є дотичним до траєкторії і показує зміну швидкості за одиницю часу. Отже,

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{v}; \quad |\vec{a}_t| = \left| \frac{dv}{dt} \right|. \quad (1.24a)$$

Покажемо, що другий доданок праворуч у формулі (1.26) нормальний до траєкторії і відповідає саме другому виразу в (1.24).

Справді, похідна вектора сталої довжини (орт  $\vec{v}(t)$  — саме є таким) за довільним скалярним параметром завжди нормальна до самого вектора. Це випливає безпосередньо з рис. 9: відкладений від фіксованої точки  $O$  вектор сталої довжини  $\vec{v}$  своїм кінцем завжди описує коло радіуса  $|\vec{v}| = \text{const}$  у процесі зміни  $t$ ,  $s$  чи будь-якого іншого параметра  $\xi$ .

<sup>1</sup>У векторному аналізі доведено, що згадані правила диференціювання формально однакові для векторних і скалярних функцій. Доведення труднощів не становить.

Оскільки при  $\Delta t \rightarrow 0$  кут  $\Delta\varphi$  (див. рис. 9) також прямує до нуля, то  $\lim \alpha = \pi/2$ , коли  $\Delta t$  (або будь-який еквівалентний приріст  $\Delta\xi$ ) прямує до нуля. Отже,

$$d\vec{r} / d\xi \perp \vec{r}. \quad (1.27)$$

Розглянемо  $d\vec{r}/dt$ . За ланцюговим правилом дістанемо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} v(t). \quad (1.28)$$

Ввівши орт

$$\vec{n}^0 = \frac{d\vec{r}}{ds} \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right|^{-1} \perp \vec{r} \quad (1.29)$$

та радіус кривини (1.25), для  $d\vec{r}/dt$  (1.28) матимемо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{n}^0}{\rho} v(t); \quad (1.30)$$

звідки для другого доданка формули (1.22) знайдемо

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{n}^0}{\rho} v^2(t) \perp \vec{r}, \quad (1.31)$$

чим і завершується доведення співвідношення (1.24).

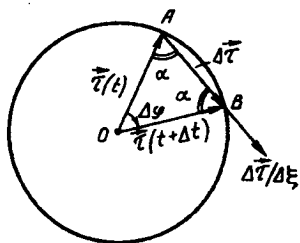


Рис. 9

### § 1.3. Відтворення траєкторії за заданим прискоренням частинки

Якщо відомо прискорення частинки як функція часу  $t$

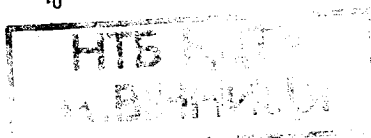
$$\vec{a} = \vec{a}(t), \quad (1.32)$$

то, користуючись визначеннями (1.20) і (1.13), неважко відтворити й рівняння траєкторії

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.33)$$

Справді, інтегруючи (1.20) від початкового моменту  $t_0$  до поточного  $t$ , дістаємо

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'. \quad (1.34)$$



Отже, знаючи прискорення (1.32) як функцію часу та початкову швидкість  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ , можна визначити швидкість  $\vec{v}(t)$  у будь-який момент часу  $t$  (1.34). Аналогічно, інтегруючи (1.13) від початкового моменту  $t_0$  до поточного  $t$ , знаходимо

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'. \quad (1.35)$$

Отже, рівняння траєкторії (1.35) визначається за прискоренням (1.32) в два етапи: спочатку за  $\vec{a}(t)$  та  $\vec{v}_0$  визначається швидкість  $\vec{v}(t)$  у довільний момент часу  $t$  (1.34), а далі за  $\vec{v}(t)$  та  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$  вже й сама траєкторія, точніше її рівняння (1.35).

#### § 1.4. Різні системи відліку. Перетворення координат

У різних системах відліку той самий рух може виглядати по-різному. Наприклад, валізка, падаючи вниз вертикально відносно залізничного вагона, описуватиме параболу відносно нерухомої станції на ділянці рівномірно прямолінійного руху потяга. Рухаючись рівномірно й прямолінійно вздовж радіуса диска  $D$  при рівномірному обертанні навколо певної осі, кулька описуватиме спіраль відносно паралельної дискові  $D$  площини  $P$ , до якої закріплено згадану вісь. Тобто рівномірно прямолінійний рух кульки відносно диска  $D$  виглядає криволінійним і, отже, прискореним відносно площини  $P$ . Приклади можна нескінченно продовжувати.

Якщо рух однієї системи відліку відносно іншої відомий, то, знаючи рух будь-якого тіла в одній з цих систем, можна визначити його і в іншій. При цьому прискорення тіл щодо двох систем відліку, які рухаються рівномірно й прямолінійно відносно одна одної, однакові. Якщо ж рух двох систем відліку однієї відносно одної прискорений, то прискорення будь-якого тіла відносно цих систем будуть різні. Ця обставина має виключно важливу роль у динаміці і тому її треба детально обговорити. Сутність проблеми розкривається на простому прикладі плоского руху частинки.

Нехай дві системи відліку  $K$  та  $K'$  рухаються одна відносно одної спочатку без обертання. Тоді можна без втрати фізичної загальності вважати координатні осі обох систем паралельними<sup>1</sup> (рис.10).

Нехай система  $K$  нерухома, а система  $K'$  рухається відносно  $K$  із заданою швидкістю

<sup>1</sup> Поворот координатних осей — це суто геометрична, а не фізична операція.

$$\vec{V} = d\vec{R}/dt. \quad (1.36)$$

Тут  $\vec{R}(t)$  — радіус-вектор початку координат  $O'$  рухомої системи відліку  $K'$  відносно нерухомої  $K$  (рис. 11). З рисунка випливає

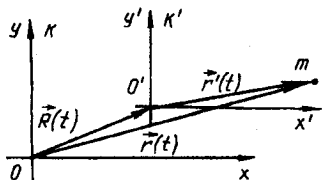


Рис. 10

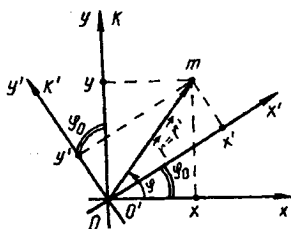


Рис. 11

ють прості зв'язки між радіусами-векторами ( $\vec{r}, \vec{r}'$ ), швидкостями ( $\vec{v}, \vec{v}'$ ) та прискореннями ( $\vec{a}, \vec{a}'$ ) відповідно в обох системах

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t); \quad \vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}'(t); \quad (1.37)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{A}(t) + \vec{a}'(t).$$

Позначення зрозумілі:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}; \quad (1.38)$$

$$\vec{A}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Вище ми вважали, що час в обох системах  $K$  і  $K'$  тече однаково, тобто

$$t = t'. \quad (1.39)$$

Якщо система  $K'$  рухається відносно  $K$  рівномірно і прямолінійно, тобто, якщо  $\vec{V}(t) = \vec{V}_0 = \text{const}$ , то відносне прискорення  $\vec{A}$  дорівнює нулю ( $\vec{A} = \vec{0}$ ), і тому прискорення в обох системах рівні

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (1.40)$$

Це, як побачимо далі, дуже важлива обставина, яку слід зафіксувати у пам'яті.

Згідно з рис. 10 в проєкціях на осі матимемо

$$x(t) = X(t) + x'(t); \quad y(t) = Y(t) + y'(t). \quad (1.37a)$$

Аналогічні формули для швидкостей і прискорень слід виписати самостійно. (Позначення зрозумілі.) Формули (1.37a) — це приклад так званого перетворення координат при переході від системи  $K$  до  $K'$ .

Нехай взаємний рух систем  $K$  і  $K'$  полягає лише у їх відносному обертанні. У цьому разі можна сумістити початки відліку обох систем  $O$  і  $O'$  в одній точці (див. рис. 11) — центрі відносного обертання. Оскільки радіуси-вектори  $\vec{r}$  і  $\vec{r}'$  зберігаються ( $\vec{r} = \vec{r}'$ ), то наслідки відносного обертання систем  $K$  і  $K'$  у векторній формі буде завуальовано. Тому зручно звернутися одразу до координатного опису руху частинки  $m$  в обох системах. Проектуючи кожен з рівних між собою радіусів-векторів ( $\vec{r}$  та  $\vec{r}'$ ) на свої осі координат, матимемо

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad (1.41)$$

$$x' = r \cos (\varphi - \varphi_0); \quad y' = r \sin (\varphi - \varphi_0). \quad (1.42)$$

Звідси, застосувавши тригонометричні формули додавання й порівнявши між собою (1.41) і (1.42), дістанемо

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \cos \varphi_0(t) + y(t) \sin \varphi_0(t); \\ y'(t) = -x(t) \sin \varphi_0(t) + y(t) \cos \varphi_0(t), \end{cases} \quad (1.43)$$

де  $\varphi_0(t)$  — кут повороту системи  $K'$  відносно системи  $K$ , який внаслідок обертання системи  $K'$  буде змінним.

Формули (1.43) — це ще один приклад перетворення координат при переході від однієї системи відліку до іншої.

Ясно, що у разі довільного відносного руху систем  $K$  і  $K'$  перетворення типу (1.43) і (1.37a) повинні комбінуватися між собою, але це не має принципового значення (хоч і дуже важливе при розв'язанні конкретних задач), як і узагальнення знайдених формул від плоского на просторовий (тривимірний) рух.

З формул (1.43) з очевидністю випливає, що навіть рівномірний прямолінійний рух відносно системи  $K$ , для якого

$$x = x_0 + v_x^0 t; \quad y = y_0 + v_y^0 t, \quad (1.44)$$

буде прискореним відносно системи  $K'$ , якщо кут  $\varphi_0(t)$  змінюється з часом, тобто, якщо  $K'$  обертається відносно  $K$ . Формаль-

но в цьому легко переконатися, обчисливши відповідні прискорення:  $a'_x = \frac{d^2x'}{dt^2}$ ;  $a'_y = \frac{d^2y'}{dt^2}$ .

Пропонуємо обчислення для вправи виконати самостійно.

### § 1.5. Перетворення Галілея

Особливу роль у механіці відіграють перетворення Галілея, що відповідають переходу від умовно нерухомої системи  $K$  до такої системи  $K'$ , яка рухається відносно  $K$  рівномірно й прямо- лінійно

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t. \quad (1.45)$$

Згідно з (1.37) матимемо

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}_0 - \vec{V}_0 t. \quad (1.46)$$

Не зменшуючи фізичної загальності, можна вважати, що в початковий момент часу ( $t = 0$ ) початки координат обох систем ( $K$  і  $K'$ ) збігалися:  $\vec{R}_0 = 0$ . Тоді зв'язок (1.46) набуває вигляду

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t. \quad (1.47)$$

Індекс 0 при сталій швидкості  $\vec{V}$  системи  $K'$  відкинуто. Перетворення (1.47) та обернене йому перетворення

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \quad (1.47a)$$

називають *перетвореннями Галілея*. До співвідношень (1.47), (1.47a) слід додати ще (1.39), яке означає, що час в обох системах  $K$  та  $K'$  однаковий. У теорії відносності таке твердження переглядається.

Як уже зазначалося, при переході від системи  $K$  до  $K'$  і назад (1.47), (1.47a) прискорення частинки не змінюється (1.40). Очевидно також, що формули (1.47), (1.47a) тотожні для плоских і тривимірних рухів.

### § 1.6. Кінематика обертального руху

Особливе місце в курсі загальної фізики відводиться руху частинки по колу з фіксованим центром обертання  $O$  (рис. 12), оскільки він в найпростішій і прозорішій формі демонструє фундаментальні закономірності обертального руху

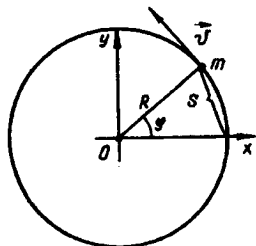


Рис. 12

навколо певної осі. Запропонуємо зручні кінематичні характеристики руху по колу. На рис. 12 зображено частинку  $m$ , що рухається навколо точки  $O$  по колу радіуса  $R$ . З геометрії відомо, що кут повороту  $\varphi$  й дуга  $s$  пов'язані між собою рівністю

$$s(t) = R\varphi(t). \quad (1.48)$$

Для швидкості вздовж кола  $v(t)$  і тангенціального прискорення  $a_t(t)$  дістанемо

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}; \quad a_t(t) = \frac{dv}{dt} = R \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (1.49)$$

Величини

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1.50)$$

називаються *кутовою швидкістю* та *кутовим прискоренням*.

Неважно за допомогою (1.24), (1.25) переконалися, що для руху по колу радіус кривини  $\rho$  збігається з радіусом кола  $R$ . І тому для нормального прискорення  $a_n$  дістаємо

$$a_n = \frac{v^2(t)}{R} = R\omega^2(t). \quad (1.51)$$

При цьому враховано співвідношення (1.49) та (1.50). Нормальне прискорення  $a_n$  у разі руху по колу називають ще *доцентровим*.

Рекомендуємо виконати (графічно й аналітично) побудови, що ведуть від (1.31) до (1.51).

## Глава 2

### ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

#### § 2.1. Сила й маса в механіці

В основу динаміки Ньютона покладено теорію руху матеріальної точки, до розгляду якої ми й переходимо.

Рух матеріальних тіл у просторі й часі визначається законами динаміки Ньютона<sup>1</sup>, сформульованими в XVII ст. До-

<sup>1</sup>Нагадаємо межі застосування динаміки Ньютона, відомі з елементарного курсу. Коли швидкість руху частинок можна порівняти зі швидкістю світла, механіка Ньютона поступається місцем механіці Ейнштейна — Ньютона (тобто релятивістській). Для частинок атомно-молекулярного та субатомного рівня класична (Ньютонова) механіка поступається місцем квантовій теорії.

свід свідчить, що характер руху кожного з взаємодіючих тіл визначається в механіці двома основними факторами: масою кожного тіла та силою, яка діє на нього з боку інших тіл та оточуючого середовища (загальніше: рух визначається розподілом мас і густиною сил з врахуванням об'ємності тіл).

*Маса й сила* — це первинні поняття динаміки, які не мають формальних визначень [4]. Описуються вони на основі інтуїтивних уявлень, узятих з повсякденного досвіду та спостережень, а їх зміст уточнюється шляхом визначення процедури реального їх вимірювання<sup>1</sup>.

Ситуація з первинними поняттями нагадує ситуацію з аксіомами: перші не мають формальних визначень, другі — формальних доведень.

Первинні (суб'єктивні) уявлення про силу виникають на підставі відчуття дії ваги тіл, мускульних зусиль, опору середовища тощо. Усі згадані фактори здатні викликати деформації або зміщення тіл, чи спричинити зміни у їх русі. За допомогою вимірювальних процедур уточнюють суб'єктивні уявлення про сили, здебільшого засновані на їх деформуєчій дії (динамометри) або на порівнянні їх з силою ваги (за допомогою важків через блок). Досить детально це питання висвітлено у праці [4].

Первинні (інтуїтивні) уявлення про масу не такі безпосередні, як про силу, проте також цілком чіткі. Справді, кожен з нас без остраху сприйме на себе футбольний м'яч, але неодмінно ухилиться від такої ж за розміром і швидкістю чавунної кулі, інстинктивно відчуваючи різницю наслідків дії цих двох предметів. З досвіду відомо, що порожнього візка легше зрушити з місця або пригальмувати, ніж добре навантаженого. Причому зусилля наші зростають із зростанням вантажу. Але все це якраз й означає, що повсякденна практика чітко формує нашу уяву про масивність тіл як характеристику їхньої стійкості відносно змін стану їх руху чи спокою під дією іззовні. Властивість тіл чинити опір зовнішній дії, зберігаючи свій стан руху або спокою, називають *інертністю тіл*. Інтуїтивно ясно, що ступінь інертності пов'язана з масивністю тіл. Науці лишається тільки знайти параметр, здатний характеризувати інертність (або масивність) тіл, і встановити метод його вимірювання.

У земних умовах масивне й важке настільки тісно асоціюються в нашій свідомості, що масу практично з самого початку визначали зважуванням. Тому доцільно обминути різні словесні примовки й з самого початку зважування на поверхні землі постулативно покласти в основу операціонального визначення

---

<sup>1</sup> Слід підкреслити слово *реального*, оскільки існують також уявні вимірювання та експерименти. Проте вони, по суті, є формою теоретичного аналізу (у вигляді уявного експерименту) і мають більш евристичне, ніж доказове значення.



маси<sup>1</sup>. Питання щодо адекватності такого визначення виходить за межі філософічних спекуляцій, і є виключно справою досвіду, що, зрештою, стосується не лише маси, а й будь-якого іншого концептуального поняття фізики. Всі такі поняття формуються за певних умов досвіду і тому мають, взагалі кажучи, обмежену область вірогідності, втрачаючи сенс або вимагаючи корегування за її межами. Так, поняття про температуру, запроваджене з досвіду для макротіл і середовищ, втрачає сенс для сукупності з кількох мікрочастинок і т. д.

Про подібні речі ще не раз йтиме мова далі щодо багатьох фізичних понять, концепцій та законів.

Завдяки закону збереження маси Ломоносова—Лавуаз'є, який було, до речі, встановлено також методом зважування речовин (перед і після хімічних реакцій), маса може бути не лише мірою інертності тіл, а й мірою кількості речовини в них. Інша справа, що ця міра кількості речовин виявилася не універсальною, і втрачає сенс в релятивістській механіці Ейнштейна. Але це з'ясувалося лише на початку ХХ ст. У межах механіки Ньютона, а також у хімії маса з великою точністю відіграє роль як міри інертності, так і кількості речовини.

Підсумовуючи сказане, можна постулювати, що маса будь-якого тіла  $m$  пропорційна силі ваги  $P$ , яка діє на тіло на поверхні землі (або поблизу),

$$m = kP. \quad (2.1)$$

Коефіцієнт пропорційності  $k$  та його залежність від різних фізичних факторів буде обговорено трохи пізніше. Спираючись навіть на (2.1), можна операціонально (зважуванням) довести основну властивість маси: її адитивність, яка означає, що загальна маса тіла (або системи тіл) дорівнює арифметичній сумі мас його (їх) частин.

Фізика — наука дослідна. Саме тому, коли спиратися на реальні лабораторні процедури вимірювання маси та сили, можна прийти до наведених вище операціональних їх визначень. Цілком правомірно сприйняти їх за вихідні в динаміці Ньютона.

За три століття свого існування постулати класичної (Ньютонової) механіки довели свою адекватність дійсності. Це стосується, звичайно, й постулатів про силу й масу<sup>2</sup>. Читач, можливо, звернув увагу на чисто *статичний* характер операціонального визначення сили й маси, тобто на те, що вони визначалися на базі законів *рівноваги*, пов'язаних з відносним спо-

<sup>1</sup> Силу ваги  $P = mg$ , що діє на тіло, будемо отожднювати з силою притягання тіла, яке вивчається, до землі на (або поблизу) її поверхні.

<sup>2</sup> Незалежно від прийнятого за основу операціонального методу визначення цих величин.

коєм тіл. На такій основі фактично встановлено всі постулати відносно сил і мас (правило паралелограма сил, адитивності мас та ін.). У динаміку вся аксіоматика про сили й маси переноситься із статички чисто *постулативно*. Вже тут закладено потенціальну обмеженість класичних концепцій про силу й масу, а з ними й обмеженість законів класичної механіки в цілому, яка може вимагати корекції при значних відхиленнях тіл від стану взаємного спокою. На щастя, така корекція виявилася необхідною лише за дуже великих відносних швидкостей  $v$  руху тіл, які можна порівняти зі швидкістю світла  $c$  ( $c=3 \cdot 10^8$  м/с).

Відхилення від законів класичної механіки Ньютона виявилося також у мікросвіті, де уявлення та постулати класичної механіки втрачають зміст. За великих швидкостей ( $v \sim c$ ) механіка Ньютона, як уже зазначалося, змінюється релятивістською механікою Ейнштейна—Ньютона, а у мікросвіті — квантовою механікою. Але в області своєї застосовності закони класичної механіки завжди відіграватимуть визначну роль і продовжуватимуть слугувати науці й техніці.

На жаль, межі застосовності тієї чи іншої концепції або теорії не можна передбачити заздалегідь. Вони встановлюються лише на базі нових відкриттів, нових теорій, які містять "старі" за певних асимптотичних умов і пов'язані, звичайно, з радикально новими концепціями, що виникли на основі аналізу принципово нових експериментальних даних.

*Асимптотичні умови* — це умови, яким повинні задовольняти певні параметри фізичної системи, щоб співвідношення нових теорій переходили у співвідношення старих. Наприклад, формули релятивістської механіки асимптотично переходять у формули класичної механіки, коли швидкість частинки  $v$  стає набагато меншою за швидкість світла:  $v \ll c$ .

Нові концепції народжуються в науці нелегко. Це буде показано при вивченні релятивістських та квантових законів.

А поки що розглянемо закони класичної механіки, спираючись на описані вище операціональні визначення сили й маси.

## § 2.2. Закони (постулати) Ньютона

Сформулюємо *перший закон* — *закон інерції*.

*Тіло зберігає стан спокою або рівномірного, прямолінійного руху доти, доки зовнішні дії (сили) не виведуть його з такого стану.*

Закон інерції — це далекоюсяжна екстраполяція спостережень та експериментів, які засвідчують, що сповільнення чи прискорення тіл (включаючи викривлення їх траєкторій) відбувається

тим повільніше, чим слабкішу дію (зокрема, опір) чинить на них оточення, тобто інші тіла, середовище та силові поля<sup>1</sup>.

Головна роль закону інерції полягає в тому, що він дає змогу постулювати існування так званих інерційних систем відліку, по відношенню до яких є справедливим другий (основний) закон динаміки Ньютона. Без вказівок щодо інерційності системи відліку основний закон Ньютона просто позбавляється фізичного змісту. Висловлюючись дещо тавтологічно, можна сказати, що *інерційною* називається система відліку, в якій виконується закон інерції. Така система може бути пов'язана з тілом відліку, дією оточення на яке за умов задачі, що вивчається, можна знехтувати. Проте тіл, повністю ізольованих від впливу оточення, не існує. Тому інерційні системи відліку — це абстракція, теоретична екстраполяція спостережень. На практиці, звичайно, можна запровадити цілу послідовність (ієрархію) інерційних систем. Перелік послідовності тіл відліку за зростанням "ступеня інерційності" дає змогу вже не тавтологічно, а конструктивно, хоч і наближено, визначити інерційні системи відліку й вказати умови, за яких таке визначення має сенс.

Розглянемо приклад послідовності (ієрархії) інерційних систем відліку [17]. Для широкого кола практично важливих задач за інерційну систему відліку може правити система, пов'язана з Землею<sup>2</sup>. Це справедливо відносно руху тіл поблизу або на самій поверхні Землі за проміжки часу, значно менші за добу, а точніше — доки можна знехтувати ефектами добового обертання Землі, або коли такі ефекти компенсуються (наприклад, реакціями зв'язків).

Більш досконалим наближенням до інерційної буде система, пов'язана з центром мас Землі як з матеріальною точкою, що рухається по геліоцентричній орбіті. Осі координат такої системи спрямовують, звичайно, на далекі зірки. Тут вірогідним буде проміжок часу, значно менший за рік, а не за добу. Ще досконаліше інерційними будуть системи відліку, пов'язані з Сонцем, центром галактики і т. д.

З'ясувавши ситуацію щодо закону інерції та ієрархії інерційних систем відліку, звернемося до формулювання другого закону Ньютона.

Другий закон Ньютона є основним законом динаміки. Введемо імпульс<sup>3</sup> частинки  $\vec{p}$  за формулою

<sup>1</sup> Ми виходимо з того, що основні фізичні поняття (зокрема, про поля) в певній мірі відомі з елементарного курсу.

<sup>2</sup> До речі, саме в земних умовах і вдалося встановити закон інерції.

<sup>3</sup> За старою термінологією імпульс — це "кількість руху" частинки. Цей точний термін поступився місцем більш короткому — імпульс.

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (2.2)$$

де  $m$  — маса частинки,  $\vec{v}$  — її швидкість відносно певної інерційної системи координат. Сформулюємо *другий закон Ньютона*.

*В інерційних системах відліку швидкість зміни імпульсу матеріальної точки  $d\vec{p}/dt$  прямо пропорційна рівнодійній сил, прикладених до точки, й спрямована в той самий бік*

$$d\vec{p}/dt = \vec{F} \quad (2.3)$$

(коефіцієнт пропорційності прийнято за одиницю, що є наслідком вибору системи одиниць і не має принципового значення).

При швидкостях  $v$ , значно менших за швидкість світла

$$v \ll c, \quad (2.4)$$

масу частинки  $m$  з високою точністю можна вважати сталою ( $m = \text{const}$ ). Тоді згідно з (2.2) і (2.3) дістанемо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.3a)$$

Це найпоширеніша в класичній механіці форма другого закону Ньютона. Згідно з тим, що  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ , а  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , перепишемо закон Ньютона (2.3) ще в двох популярних формах:

$$m\vec{a} = \vec{F}; \quad (2.3б)$$

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (2.3в)$$

Якщо закон (2.3б) записати у вигляді

$$\vec{a} = \vec{F}/m, \quad (2.5)$$

то відразу видно роль маси  $m$  як міри інертності: чим масивніше тіло (тобто чим більше його маса  $m$ ), тим більшу силу  $\vec{F}$  слід прикласти до тіла, щоб надати йому заданого прискорення  $\vec{a}$ , тобто тим важче змінити його швидкість  $\vec{v}$ .

Усі форми запису другого закону Ньютона (2.3), (2.3а) — (2.3в), (2.5) мають відповідне практичне застосування. Проте найглибше відбиває його фізичну суть форма (2.3), яку запропонував сам Ньютон. Цією формою підкреслюється, що сила  $\vec{F}$  змінює саме кількість руху тіла  $\vec{p}$ , пропорційну як швидкості  $\vec{v}$ , так і масі тіла ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ). У формі (2.3) другий закон виявився справедливим навіть в релятивістській області, коли  $v \sim c$ . Інакше лише визначається імпульс частинки

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (2.6)$$

Вираз (2.6) переходить у (2.2) при умові (2.4), коли квадратом відношення  $\beta = v/c$  можна знехтувати порівняно з одиницею під коренем виразу (2.6). Стала  $m$  у формулі (2.6) дістала в сучасній фізиці назву *маси спокою*.

Повертаючись до нерелятивістської області (2.4), уточнимо сформульоване вище визначення маси (2.1).

Як впливає з дослідів, відношення сили ваги заданого тіла  $P$  до прискорення його вільного падіння  $g$  поблизу земної поверхні не залежить від географічного місця вимірювань, і є величиною сталою,

$$m^* \equiv P/g = \text{const}. \quad (2.7)$$

Отже, параметр  $m^*$  може характеризувати тіло як таке. За відповідного вибору одиниць його природно ототожнити з масою  $m$ , визначеною постулативно за допомогою рівності (2.1),

$$m^* \equiv \frac{1}{g} = P. \quad (2.8)$$

Ясно, що таке ототожнення відповідає вибору коефіцієнта пропорційності  $k$  за формулою  $k = g^{-1}$ .

Зіставлення (2.8) з (2.5) свідчить про те, що (2.8) — це фактично окремий випадок другого закону Ньютона (2.5) для вільного падіння тіла під дією сили тяжіння поблизу земної поверхні. Проте визначення маси за формулою (2.8) не заводить до зачарованого кола, оскільки, по-перше, мова йде лише про один клас сил — сили тяжіння  $P$ , а закон Ньютона (2.3) — універсальний. По-друге, за допомогою (2.8) можна визначити лише маси еталонних тіл (важків). Маси всіх інших тіл тоді будуть визначатися порівнянням з еталонами за допомогою важільних терезів, що виключають потребу корегування та обертання на несферичність Землі<sup>1</sup>.

На закінчення зробимо ще кілька зауважень. Досить поширеним є погляд на закон (2.3) та його модифікації (2.3а)—(2.3в), (2.5) як на визначення сили  $\vec{F}$ . Але тоді він є не фундаментальним законом природи, а просто математичним визначенням сили  $\vec{F}$ . (Не допомагає тут навіть чисто словесне твердження про те, що наука має знаходити методи незалежного визначення різних сил  $\vec{F}$  (рис. 13) як функцій  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  і  $t$ . Таке твердження не є одно-

<sup>1</sup> Ще раз нагадуємо, що наш курс — це "друге коло" після елементарного курсу, що дозволяє спиратися на попередні знання.



Рис. 13

значно конструктивним.) Інша річ — це обговорена вище схема, за якою кожна з трьох величин —  $m$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{F}$  (закону (2.36)) має свою незалежну й універсальну методику вимірювання. У такому контексті наявність зв'язку (2.36) вже відображає фундаментальний закон механіки (за нерелятивістських швидкостей (2.4)). Зрозуміло, що не за всяких умов можна вимірювати всі три величини стандартно. Але це вже інша справа; тут вступає в силу проголошене ще Ньютоном наукове кредо про те, що "природа не розкошує надмірною різноманітністю причин". Вироблені за певних умов фундаментальні концепції і закони постулативно поширюються на всі явища даного класу, — доки вони не вступають у суперечність з дослідями і не вимагають свого перегляду. (Це вже справа практики.)

Третій закон Ньютона є законом дії та протидії.

*Будь-які два з тіл, що взаємодіють, діють одне на одне з рівними за значеннями й протилежно спрямованими силами.*

Якщо через  $\vec{F}_{ij}$  позначити силу дії тіла  $j$  на тіло  $i$ , то третій закон Ньютона матиме такий математичний вигляд:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.9)$$

(див. рис. 13 (а — відштовхування; б — притягання)). Для точкових тіл  $i$  та  $j$  обидві сили  $\vec{F}_{ij}$  діють вздовж лінії, що сполучає ці тіла.

Зазначимо, що третій закон Ньютона в формі (2.9) одночасно й точно виконується лише в межах наближення так званої близькодії, тобто коли можна знехтувати запізненням дистанційної дії тіл одне на одне через силові поля.

### § 2.3. Про повну систему постулатів класичної механіки

Відносно прості та очевидні сьогодні закони Ньютона не лежали на поверхні явищ у минулому. Наука йшла до них довгими шляхами пошуків (від античності аж до XVII ст.), поступово накопичуючи окремі закономірності, узагальнені врешті генієм Ньютона. За власним висловом Ньютона, він "стояв на плечах гігантів", серед яких особливе місце посідають Коперник, Галі-

лей, Кеплер, Гюйгенс. Надзвичайним спрощенням є апеляція до лабораторних експериментів, нібито здатних обґрунтувати механіку Ньютона. У кращому разі за допомогою таких дослідів можна лише якісно ілюструвати закони динаміки, оскільки точність їх надто невисока [32, т. 1, с. 40, 69] (важко, наприклад, точно врахувати тертя). Закони Ньютона — це не менш сміливе й далекосяжне для свого часу узагальнення накопичених за століття дослідів і спостережень, ніж, скажімо, квантова механіка чи теорія відносності в новітні часи [4]. Досить швидке визначення наукою законів класичної механіки фактично забезпечив їм сам Ньютон успішним поясненням законів небесної механіки (зокрема, законів Кеплера).

Отже, до наукового утвердження законів Ньютона спричинилося їх узгодження з грандіозними попередніми досягненнями небесної механіки (Коперник, Тихо Браге, Кеплер). Але таке узгодження було б неможливим, якби не було ще одного Ньютонового відкриття — закону всесвітнього тяжіння. І тут чітко виявилася діалектика наукового пізнання: закони Ньютона, строго кажучи, є необхідними для встановлення закону всесвітнього тяжіння на базі відкриттів Кеплера; без закону всесвітнього тяжіння дуже важко було б беззастережно підкріпити справедливість законів Ньютона. Тільки всі чотири закони Ньютона (три закони динаміки плюс закон всесвітнього тяжіння) становлять повну (замкнену) систему постулатів, достатню для опису руху небесних тіл з високою мірою узгодження з астрономічними спостереженнями.

Закон всесвітнього тяжіння відіграє вирішальну роль у науковому обґрунтуванні законів динаміки Ньютона. І тому саме він (а не лабораторні демонстрації) має розглядатися у комплексі з трьома законами динаміки Ньютона з метою обґрунтування їхньої адекватності природі.

Взагалі, три закони динаміки Ньютона, хоч і є суттєвою частиною класичної механіки, не становлять повної системи постулатів, які дають змогу реально описувати рух матеріальних тіл. Їх треба доповнювати постулатами відносно рівнодійної прикладених до кожного тіла сил, або якимись еквівалентними постулатами. І тут природа приготувала для нас велике розмаїття варіантів, які є однією з причин вічного розвитку механіки, вічного її вдосконалення й розширення. Застиглих розділів науки не існує.

## § 2.4. Імпульс сили, робота, потужність

Динамічний ефект, викликаний силою  $\vec{F}$ , залежить не лише від її величини та напрямку, але й від того, на якому проміжку

часу або шляху вона діяла. Ця очевидна обставина дає змогу запровадити міри тривалої дії сили: імпульс сили

$$\delta \vec{P} = \vec{F} dt \quad (2.10)$$

та роботу

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}. \quad (2.11)$$

Запис типу  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  символізує скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha,$$

де  $a$  і  $b$  — модулі векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$ ;  $\alpha$  — кут між цими векторами. Перша міра (векторна)  $\delta \vec{P}$  пов'язана з тривалістю дії сили в часі  $dt$ ; друга (скалярна)  $\delta A$  — з величиною і напрямом переміщення тіла у просторі  $d\vec{r}$ , на якому діяла сила  $\vec{F}$ .

Інтегральні міри типу (2.10) і (2.11), тобто результуючі за скінченний час  $\Delta t = t_2 - t_1$  та на скінченному переміщенні  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  відповідно, визначаються таким чином:

$$\vec{P}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt; \quad (2.10a)$$

$$A_{12} = \int_{(r_1 - r_2)} \vec{F}(\vec{r}, t) d\vec{r}. \quad (2.11a)$$

З визначення роботи  $\delta A$  випливає, що це — алгебраїчна величина (рис. 14); вона може бути як додатною, так і від'ємною, або ж нульовою. Як видно з рисунка, при гострому куті  $\alpha$  (рис. 14, а ( $\cos \alpha > 0$ )) робота буде додатною (сила при цьому прискорює частинку); при тупому (рис. 14, б ( $\cos \alpha < 0$ )) — від'ємною (сила гальмує частинку). Нарешті, при прямому куті (рис. 14, в ( $\cos \pi/2 = 0$ )), тобто коли сила  $F$  нормальна до переміщення  $d\vec{r}$  ( $\alpha = \pi/2$ ), — нульовою (швидкість частинки не змінюється).

Спираючись на другий (основний) закон Ньютона, можна довести, що:

1) імпульс сили  $\delta \vec{P}$  породжує приріст імпульсу частинки (2.2), причому

$$\delta \vec{P} = d\vec{p}; \quad (2.12)$$

аналогічно в інтегральній формі

$$\vec{P}_{12} = \Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1; \quad (2.12a)$$



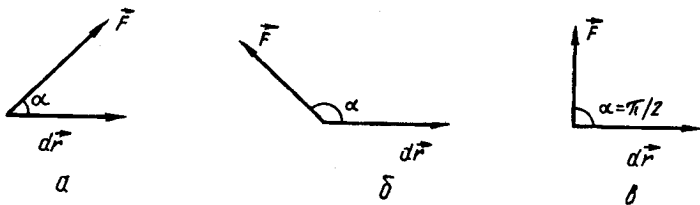


Рис. 14

2) робота  $\delta A$  спричиняє приріст кінетичної енергії частинки<sup>1</sup>

$K = mv^2/2$ , причому

$$\delta A = dk; \quad (2.13)$$

аналогічно в інтегральній формі

$$A_{12} = \Delta K = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (2.13a)$$

У формулах (2.12a) і (2.13a) індекси 1 і 2 відповідають початковому  $t_1$  і кінцевому  $t_2$  моментам часу.

Перед доведенням сформульованих вище тверджень звернемося до визначення потужності, тобто роботи сили за одиницю часу, яка є важливою мірою ефективності динамічної дії сил. За означенням потужність  $N$  сили  $\vec{F}$  дорівнює

$$N \equiv \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} = \frac{dK}{dt}. \quad (2.14)$$

Усі ланки ланцюжка рівностей (2.14) становлять практичний інтерес і використовуються при розв'язанні задач.

Доведемо твердження (2.12), (2.12a), (2.13), (2.13a).

Для доведення співвідношення (2.13) звернемося до другого закону Ньютона в формі (2.3). Домножуючи обидві частини рівності (2.3) та  $dt$  й враховуючи (2.10), безпосередньо знайдемо шуканий результат (2.12). Інтегруванням обох частин рівності (2.12) від  $t_1$  до  $t_2$  дістанемо відповідну формулу (2.12a).

Для доведення співвідношень (2.13), (2.13a) скористаємося другим законом Ньютона у формі (2.3a). Помножимо скалярно обидві частини рівності (2.3a) на  $d\vec{r}$ ; враховуючи, що

$$d\vec{r} = \vec{v}dt, \quad (2.15)$$

<sup>1</sup> У багатьох підручниках із загальної фізики кінетична енергія позначається буквою  $K$ ; у підручниках з теоретичної фізики —  $T$ .

матимемо

$$m\vec{v}d\vec{v} = \vec{F}d\vec{r} = \delta A. \quad (2.16)$$

Оскільки скалярний квадрат довільного вектора  $\vec{a}$  дорівнює квадрату його модуля  $a = |\vec{a}|$ , тобто  $\vec{a}^2 = a^2$ , то

$$2\vec{a}d\vec{a} = 2ada. \quad (2.17)$$

Тому ліву частину рівності (2.16) можна подати у вигляді

$$m\vec{v}d\vec{v} = mdv\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (2.18)$$

Звідси й випливає шукана формула (2.13).

Інтегруючи рівність (2.13) вздовж траєкторії частинки від точки 1 до 2, дістанемо інтегральну версію співвідношення (2.13), тобто (2.13а).

Отже, за допомогою другого закону Ньютона (2.3) і (2.3а) справді доведено співвідношення (2.12), (2.12а) та (2.13), (2.13а), які відіграють винятково важливу роль у теорії. З доведення випливає існування сил, які не виконують роботи, принаймні на певних ділянках шляху; вони нормальні до траєкторії на відповідних її ділянках (або на траєкторії у цілому). На кінетичну енергію частинки  $mv^2/2$  такі сили не впливають: змінюється лише її імпульс  $m\vec{v}$ . (Приклади будуть наведені далі.)

Розглянемо ще так званий закон еволюції<sup>1</sup> кінетичної енергії. Згідно з (2.13) та (2.14) дістанемо

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \vec{v} = N. \quad (2.136)$$

Це й є закон еволюції (зміни у часі) кінетичної енергії  $K$ . Він визначає швидкість зміни цієї енергії і в цьому розумінні є аналогом другого закону Ньютона (2.3), який задає швидкість зміни імпульсу  $\vec{p}$ .

## § 2.5. Момент імпульсу та закон його еволюції

Поряд з імпульсом  $\vec{p} = m\vec{v}$  та кінетичною енергією  $K = mv^2/2$  важливу роль у механіці відіграє момент імпульсу  $\vec{L}$ , що має векторний характер

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] \quad (2.19)$$

<sup>1</sup> Закони, що визначають швидкість зміни фізичних величин  $\Phi$  (тобто визначають  $d\Phi/dt$ ) через інші фізичні величини, а також саму  $\Phi$ , часто називають законами (або рівняннями) еволюції цих величин.

(квадратні дужки символізують векторний добуток радіуса-вектора  $\vec{r}$  частинки на її імпульс  $\vec{p}$ ). Введемо також момент сили  $\vec{M}$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]; \quad (2.20)$$

спираючись на другий закон Ньютона, покажемо, що швидкість зміни моменту імпульсу  $d\vec{L}/dt$  дорівнює моменту сили  $\vec{M}$ :

$$d\vec{L}/dt = \vec{M}. \quad (2.21)$$

Це й буде законом еволюції вектора  $\vec{L}$ . Перед доказом (2.21) зазначимо, що обидва моменти  $\vec{L}$  та  $\vec{M}$  — це відносні величини, прив'язані до певної точки простору  $O$ , від якої відкладено радіус-вектор  $\vec{r}$ . Точка прив'язки, звичайно, *спільна* для обох зазначених векторів, але *довільна*.

Закон еволюції моменту імпульсу  $\vec{L}$  має таку ж форму, як і закон еволюції самого імпульсу  $\vec{p}$  (2.3). Один переходить у другий при одночасній заміні двох величин:  $\vec{p} \leftrightarrow \vec{L}$  та  $\vec{F} \leftrightarrow \vec{M}$ . Ця обставина допомагає запам'ятати закон еволюції (2.21).

За визначенням векторного добутку момент імпульсу  $\vec{L}$  (2.19) є вектором, перпендикулярним до площини, визначеної двома векторами  $\vec{r}$  та  $\vec{p} = m\vec{v}$ ; за модулем же момент  $\vec{L}$  дорівнює площі побудованого на векторах  $\vec{r}$  та  $\vec{p}$  паралелограма (заштриховано на рис. 15).

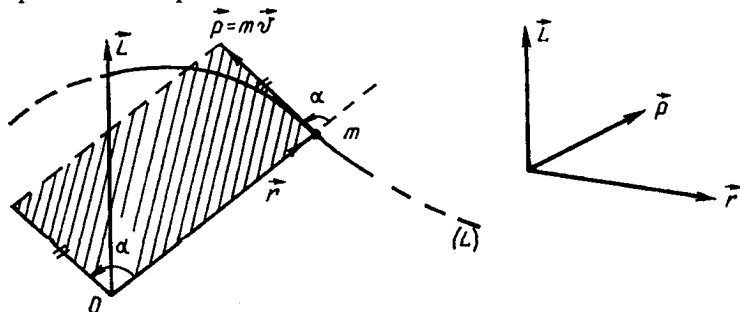


Рис. 15

Обґрунтуємо закон (2.21), спираючись на другий закон Ньютона (2.3). Найпростіше це робиться прямим диференціюванням рівності (2.19) за часом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]. \quad (2.22)$$

Перший доданок у правій частині рівності (2.22) — це векторний добуток двох колінеарних векторів:  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \uparrow \uparrow \vec{p} = m\vec{v}$ . Тому цей доданок дорівнює  $m [\vec{v}, \vec{v}] \equiv \vec{0}$ .

За другим законом Ньютона (2.3)  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ . Тому другий доданок у правій частині (2.22) дорівнює моменту сили  $\vec{M}$ . Отже, справді має місце закон еволюції вектора  $\vec{L}$ .

## § 2.6. Додатково про закон інерції та інерційні системи відліку

Згідно з другим законом Ньютона (2.3)  $d\vec{p}/dt = \vec{0}$  при умові, якщо рівнодійна сил, прикладених до матеріальної точки, дорівнює  $\vec{F} = \vec{0}$ . За такої умови імпульс частинки буде сталим  $\vec{p} = m\vec{v} = \text{const}$ . Тобто частинка буде рухатися рівномірно і прямолінійно зі швидкістю

$$\vec{v} = \vec{p}/m = \text{const}. \quad (2.23)$$

Такий рух є *інерційним*. Тому інколи стверджують, що закон інерції не є незалежним, а впливає з другого закону Ньютона. Це помилка, оскільки сам другий закон (2.3) точно виконується лише в інерційних системах відліку, існування яких слід постулювати *завдалегідь*. Умова ж (2.23) означає, що інерційних систем багато: кожна система, що рухається рівномірно й прямолінійно відносно інерційної, в свою чергу буде інерційною.

Як видно з гл. 1, прискорення частинок у двох системах відліку, які рухаються одна відносно одної зі сталою швидкістю будуть однакові:  $\vec{a} = \vec{a}'$ . Дві інерційні системи  $K$  і  $K'$  рухаються одна відносно одної саме зі сталою швидкістю. Причому перехід від однієї до іншої здійснюється за допомогою перетворень Галілея. Завдяки рівності прискорень закони Ньютона в обох інерційних системах  $K$  і  $K'$  мають однаковий вигляд:

$$m\vec{a} = \vec{F} = m\vec{a}'. \quad (2.24)$$

Тому кажуть, що перетворення Галілея залишають закони механіки інваріантними (незмінними).

За умовою (2.23) вільна частинка (умова "вільності" тут  $\vec{F} = \vec{0}$ ) зберігає сталими не лише імпульс  $\vec{p} = m\vec{v}$ , а й кінетичну енергію  $K$ :

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \text{const}. \quad (2.25)$$

Більше того, для неї сталим залишається також момент імпульсу  $\vec{L}$  (2.19), хоча її радіус-вектор  $\vec{r}$  змінна величина:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t. \quad (2.26)$$

Останнє пов'язане з тим, що при  $\vec{F} = \vec{0}$  і момент сили  $\vec{M} = \vec{0}$ . Звідки й випливає рівність

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = \overrightarrow{\text{const}}. \quad (2.27)$$

Безпосередньо це випливає також з (2.26):

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m\{[\vec{r}_0, \vec{v}] + [\vec{v}, \vec{v}]t\} = m[\vec{r}_0, \vec{v}] = \overrightarrow{\text{const}}.$$

Ця умова має дуже просте геометричне тлумачення (пропонуємо проаналізувати самостійно, зробивши відповідне креслення).

Забігаючи наперед, зазначимо, що  $\vec{p}$ ,  $\vec{L}$  і  $K$  — це адитивні фізичні величини: відповідні їм величини для системи частинок становлять прості суми таких величин для окремих частинок (векторні суми для  $\vec{p}$  та  $\vec{L}$  і скалярна сума для  $K$ ). За певних умов (див. гл. 3) ці сумарні величини зберігаються, чим і визначається їхня особлива роль у механіці.

## § 2.7. Деякі типи механічних сил.

### Рівняння руху та параметри стану в механіці

З елементарного курсу відомо, що в природі існують так звані *силові поля*. До них належать, наприклад, поля гравітаційних, електричних, міжмолекулярних, ядерних та інших сил. Для них характерним є те, що в кожній точці зайнятого полем простору в заданий момент часу  $t$  на дане тіло діє цілком певна сила  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ , що залежить лише від положення цього тіла щодо інших тіл, які створюють поле, в кожний момент часу  $t$ , тобто лише від координат даного тіла й часу:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t). \quad (2.28)$$

Так, рух Місяця відносно Землі визначається гравітаційним полем Землі (з певною поправкою на дію Сонця та інших планет). Сила дії Землі на Місяць залежить від їх взаємної відстані. Кожен з двох електричних зарядів знаходиться в полі сил, породжених іншим зарядом. Проте відомі випадки, коли сила, що діє на задану частинку, залежить не лише від положення її щодо інших (що мають бути джерелами поля), але й від швидкості або напряму руху даної частинки. Такі сили вже не утворюють силових полів.

Розглянемо кілька прикладів сил, що не утворюють полів.

**Сили сухого тертя.** У досить широкому інтервалі швидкостей вони часто залежать лише від напрямку руху частинки, намагаючись загальмувати його. Математично такі сили можна промодельовувати виразом

$$\vec{F} = -k(\vec{v}/v). \quad (2.29)$$

Тут  $\vec{v}$  — швидкість тіла;  $v$  — її модуль;  $k > 0$  — коефіцієнт тертя. (Дещо детальніше про це — в розділі про дисипативні сили.)

**Сили в'язкого тертя.** Гальмують рух тіла й часто допускають моделювання вигляду

$$\vec{F} = -\gamma\vec{v}, \quad \gamma > 0. \quad (2.29a)$$

Ці сили лінійно зростають зі зростанням швидкості тіла  $\vec{v}$ ,  $\gamma$  може залежати від  $\vec{r}$ .

Обидва типи сил (2.29), (2.29a) залежать від напрямку його руху (а у випадку (2.29a) й величини швидкості).

**Сили Лоренца.** В електричному й магнітному полях на заряджену частинку, що рухається, діє сила Лоренца

$$\vec{F}_л = q\vec{E} + q [\vec{v}, \vec{B}], \quad (2.30)$$

де  $q$  — електричний заряд рухомої частинки;  $\vec{v}$  — її швидкість;  $\vec{E}$  — напруженість електричного поля;  $\vec{B}$  — індукція магнітного поля. Дужки символізують векторний добуток  $\vec{v}$  на  $\vec{B}$ . Електричне й магнітне поля залежать, як правило, від координат і часу  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ ;  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ ; тому сила Лоренца  $\vec{F}_л$  залежить як від  $\vec{r}$ ,  $t$ , так і від  $\vec{v}$ . (У змінних електричному й магнітному полях вона може істотно залежати від часу  $t$ .)

Отже, сили, які діють на рухому частинку, можуть залежати від  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  та  $t$ :

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t). \quad (2.31)$$

Якщо залежність від  $\vec{v}$  відсутня, сили типу (2.31) утворюють силоне поле (2.28).

Підставляючи (2.31) в основний закон Ньютона (2.3в) і враховуючи, що  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , дістанемо

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left( \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right). \quad (2.32)$$

Можна твердити, що другий закон Ньютона у формі (2.32) становить векторне диференціальне рівняння другого порядку відносно  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Воно має назву *рівняння руху*. Розв'язавши це

диференціальне рівняння, знайдемо параметричне рівняння траєкторії частинки:  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Розв'язок рівняння (2.32) буде єдиним, якщо задано початкове положення тіла та його початкову швидкість

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0; \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0. \quad (2.33)$$

Отже, другий закон Ньютона — це рівняння руху. Якщо задано масу частинки  $m$  та "закон сил" (тобто функцію  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , а також початкові умови (2.33)), то рух частинки (тобто її траєкторія  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , швидкість  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  і прискорення  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ ) однозначно визначаються рівнянням (2.32). Зокрема, траєкторію частинки знаходять як функцію  $\vec{r}_0, \vec{v}_0, t$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t). \quad (2.34.)$$

Замість векторного рівняння (2.32) і векторних умов (2.33) рівняння руху можна записати в координатній формі, тобто відносно  $x(t), y(t), z(t)$ . Тоді замість (2.32) формально фігуруватиме система з трьох рівнянь; потроїться й число початкових умов

$$\begin{cases} x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0; \\ v_x(0) = v_x^0, v_y(0) = v_y^0, v_z(0) = v_z^0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Кожна координата фактично залежить від шести початкових параметрів  $\{x_0, y_0, z_0; v_x^0, v_y^0, v_z^0\}$  та часу  $t$ . Оскільки за початковий можна вибрати будь-який момент часу  $t = \tau$ , то, задавши шість параметрів  $\{x, y, z; v_x, v_y, v_z\}$  в довільний момент, за допомогою рівняння руху (2.32) (у координатному варіанті) можна визначити ці ж параметри в будь-який інший момент часу  $t \neq \tau$ . Тому параметри  $\{x, y, z; v_x, v_y, v_z\}$  дістали назву *параметрів стану частинки*. Стан частинки в класичній механіці визначається вказаними вище шістьма параметрами стану.

Кількість параметрів стану пояснюється тим, що система диференціальних рівнянь руху відносно трьох координат  $\{x, y, z\}$  має шостий порядок: другий по кожній з трьох координат ( $2 \times 3 = 6$ ). Замість координат і швидкостей за параметри стану можна обрати координати  $\{x, y, z\}$  та імпульси  $\{p_x, p_y, p_z\}$ , оскільки  $v_\xi = p_\xi / m$  ( $\xi = x, y, z$ ). Такий вибір параметрів стану має дещо фундаментальніший характер (але це питання виходить за межі загального курсу).

Розглянемо елементарний приклад щодо викладеного вище.

Нехай частинка рухається під дією сталої сили  $\vec{F} = \overrightarrow{\text{const}}$ . Тоді

рівняння руху (2.32) неважко двічі проінтегрувати безпосередньо у векторній формі. Після першого інтегрування дістанемо

$$v(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}_0 + Ft / m.$$

Друге інтегрування дає  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + Ft^2 / 2m$ . У повній відповідності з тим, про що йшлося раніше, стан частинки  $\{\vec{r}(t), \vec{v}(t)\}$  у довільний момент часу  $t$  при заданих  $m$  та  $\vec{F}$  справді повністю визначається початковим станом  $\{\vec{r}_0, \vec{v}_0\}$ .

## § 2.8. Потенціальні сили; закон збереження й перетворення енергії

Силове поле (2.28), що не залежить від часу

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}), \quad (2.36)$$

називають *статичним*. Серед статичних полів особлива роль належить так званим *потенціальним силовим полям*. Робота, виконувана силами таких полів над рухомою частинкою, не залежить від форми шляху (траєкторії), а лише від початкового й кінцевого положень частинки. Приклади таких полів наведено в елементарних курсах [4] і розглядатимуться нижче. Можна довести, що гравітаційні, електростатичні та інші поля є потенціальними (про що мова буде йти в подальших розділах курсу). Сприймаючи поки що на віру існування потенціальних полів, обговоримо численні наслідки незалежності роботи потенціальних сил від форми шляху.

Отже, нехай в статичному полі робота сил  $\vec{F}(\vec{r})$  не залежить від форми шляху, а лише від початкового й кінцевого положень частинки. У цьому випадку:

1. У кожній точці  $\{\vec{r}\}$  такого поля сил  $\vec{F}(\vec{r})$  частинці  $m$  можна приписати так звану потенціальну енергію  $\Pi(\vec{r})$ , яка чисельно дорівнює роботі сил поля при переміщенні частинки з даної точки поля  $\{\vec{r}\}$  у деяку фіксовану точку  $O$  по будь-якій траєкторії. Точку  $O$  називають точкою відліку енергії  $\Pi$ .

2. Якщо замінити точку відліку  $O$  на іншу  $O_1$ , то потенціальна енергія  $\Pi(\vec{r})$  зміниться лише на деяку константу  $C$

$$\Pi(\vec{r}) \rightarrow \Pi_1(\vec{r}) = \Pi(\vec{r}) + C. \quad (2.37)$$

3. Робота  $A_{12}$  сил поля при переміщенні частинки з точки  $1$  в  $2$  (рис. 16,а) по будь-якій траєкторії визначається різницею потенціальних енергій у цих точках

$$A_{12} = \int_{(1 \rightarrow 2)} \vec{F} d\vec{r} = \Pi(\vec{r}_1) - \Pi(\vec{r}_2). \quad (2.38)$$



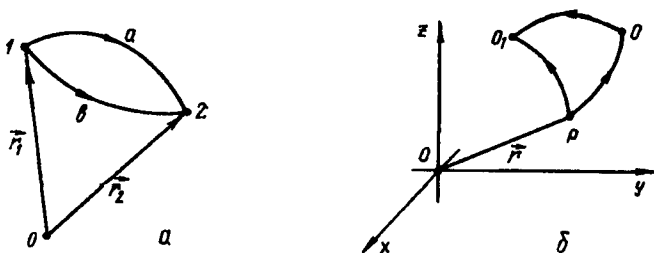


Рис. 16

Згідно з (2.37) замість  $\Pi(\vec{r})$  у (2.38) може фігурувати  $\Pi_1(\vec{r})$

$$A_{12} = \Pi_1(\vec{r}_1) - \Pi_1(\vec{r}_2). \quad (2.39)$$

4. Сила  $\vec{F}(\vec{r})$ , що діє на частинку  $m$  у точці  $\{\vec{r}\}$  поля, дорівнює градієнту потенціальної енергії  $\Pi(\vec{r})$ , взятому з протилежним знаком:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\Pi(\vec{r}), \quad (2.40)$$

або в координатній формі

$$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}. \quad (2.40a)$$

5. Повна енергія частинки  $W$ , яка дорівнює сумі кінетичної  $K = m\upsilon^2/2$  і потенціальної енергій  $\Pi(\vec{r})$ , зберігається:

$$W = K(\upsilon) + \Pi(\vec{r}) = \text{const}. \quad (2.41)$$

Інакше кажучи, зменшення кінетичної енергії  $-\Delta K$  веде до еквівалентного зростання потенціальної  $\Delta\Pi$ , і навпаки

$$-\Delta K = \Delta\Pi. \quad (2.41a)$$

Обґрунтуємо твердження 1—5, які зручно виконати під тими самими номерами.

1. Довільно фіксуємо у просторі точку відліку енергії  $O$  (див. рис. 16) й розглянемо роботу сил поля при переміщенні частинки  $m$  з точки  $P\{\vec{r}\}$  у точку відліку  $O$ . Ця робота  $A_{PO}$  за властивістю потенціальних сил залежить лише від початкової точки  $P\{\vec{r}\}$  (кінцева точка фіксована). Отже, робота  $A_{PO}$  — це функція радіуса-вектора  $\vec{r}$  точки  $P$ . Позначимо її через  $\Pi(\vec{r})$

$$\Pi(\vec{r}) \equiv A_{PO}. \quad (2.42)$$

Називається вона *потенціальною енергією* частинки. Такий

термін виправдовується не лише розмірністю  $\Pi(\vec{r})$  та законом збереження повної енергії (2.41), але й тим, що на шляху від  $O$  до  $P$  частинка сама тепер здатна виконати роботу  $A_{PO}$  (2.42).

Отже, твердження 1 доведено.

2. Змінивши точку відліку ( $O \rightarrow O_1$  (див. рис. 16)), можна аналогічно попередньому вдатися до нової потенціальної енергії за формулою

$$\Pi_1(\vec{r}) \equiv A_{PO_1}. \quad (2.42a)$$

Але оскільки робота в потенціальних полях сил не залежить від форми шляху, останній може бути таким, що йде через попередню точку відліку  $O$ :  $PO_1 \rightarrow PO + OO_1$ . Матимемо  $A_{PO_1} = A_{PO} + A_{OO_1}$ , або

$$\Pi_1(\vec{r}_1) = \Pi(\vec{r}_2) + A_{OO_1}. \quad (2.43)$$

$A_{OO_1}$  — стала величина, оскільки точки  $O$  і  $O_1$  фіксовані, а робота при переході між ними не залежить від форми шляху. Отже, (2.43) можна подати у вигляді (2.37). Доведено твердження 2.

3. Розглянемо роботу потенціальних сил над частинкою, що рухається з точки 1 у точку 2 довільним шляхом (рис. 17). Цей шлях можна провести, зокрема, через точку відліку  $O$ . Тоді дістанемо  $A_{12} = A_{10} + A_{02}$ . Але за означенням потенціальної енергії (2.42) матимемо

$$A_{12} = \Pi(\vec{r}_1) - \Pi(\vec{r}_2), \quad (2.44)$$

оскільки

$$A_{02} = -A_{20}. \quad (2.45)$$

Ясно, що рівність (2.44) доводить формулу (2.39), якщо справді виконується (2.45). Доведемо це.

У потенціальному полі сила  $\vec{F}(\vec{r})$  у кожній точці  $\{\vec{r}\}$  однозначна фіксована (за означенням потенціальних полів). Тому зміна напрямку руху спричинює зміну знака роботи. Це цілком очевидно для малих переміщень, оскільки з інверсії<sup>1</sup> переміщення  $d\vec{r} \rightarrow d\vec{r}' = -d\vec{r}$  впливає інверсія роботи

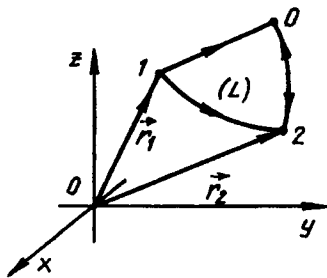


Рис. 17

<sup>1</sup> Інверсія тут — заміна знака.

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} \rightarrow \delta A' = \vec{F}(-d\vec{r}) = -\delta A. \quad (2.46)$$

А оскільки на елементарному переміщенні  $\delta A' = -\delta A$ , те саме буде мати місце й на скінченному (2.45). Цим завершено доведення твердження 3.

На відміну від приросту функції  $f(x)$

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$$

при переході від  $x_1$  до  $x_2$  ( $\Delta x = x_2 - x_1$ ) вираз  $f(x_1) - f(x_2) = -\Delta f$  називається зменшенням функції  $f(x)$ . Отже, можна стверджувати, що робота  $A_{12}$  виконується за рахунок зменшення потенціальної енергії

$$A_{12} = \Pi(\vec{r}_1) - \Pi(\vec{r}_2) = -\Delta\Pi. \quad (2.47)$$

4. Рівність (2.47) стосовно елементарної роботи  $\delta A = \vec{F}d\vec{r}$  набуває вигляду

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = -d\Pi. \quad (2.48)$$

Але скалярний добуток  $\vec{F}d\vec{r}$  можна переписати у вигляді

$$\vec{F}d\vec{r} = F_1 dl, \quad (2.49)$$

де  $dl = |d\vec{r}|$  і

$$F_1 = |\vec{F}| \cos \alpha \quad (2.50)$$

(рис. 18). Як видно з рисунка,  $F_1$  — це проекція сили  $\vec{F}$  на переміщення  $d\vec{r}$  (або з огляду на елементарність  $d\vec{r}$  — на дугу  $dl$  (2.50)). Отже, для проекції  $F_1$  за (2.48) дістанемо

$$F_1 = -\partial\Pi/\partial l. \quad (2.51)$$

Тут  $\partial\Pi/\partial l$  — похідна функції  $\Pi(\vec{r})$  за напрямом  $d\vec{r}$  ( $|d\vec{r}| = dl$ ). Обираючи по черзі переміщення, паралельне кожній з координатних осей ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ), згідно з (2.51) матимемо (2.40а), або у векторній формі

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z = -\vec{\nabla}\Pi,$$

де враховано відоме означення градієнта  $\vec{\nabla}\Pi$  в декартових координатах. Отже, твердження (2.40), (2.40а) також доведено.

5. Нарешті, переходимо до теоретичного підтвердження закону збереження (2.41) й перетворення (2.41а)

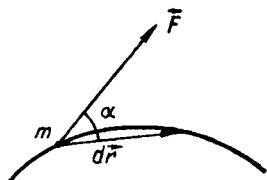


Рис. 18

енергії. Згідно з формулою (2.13а), робота  $A_{12}$  визначає приріст кінетичної енергії

$$A_{12} = \Delta K = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

З іншого боку, за (2.47) та сама робота  $A_{12}$  дорівнює зменшенню потенціальної енергії

$$A_{12} = -\Delta\Pi = \Pi(\vec{r}_1) - \Pi(\vec{r}_2).$$

Звідси

$$\Delta K = -\Delta\Pi \quad (2.52)$$

(перетворення енергії), або ж

$$\frac{mv_1^2}{2} + \Pi(\vec{r}_1) = \frac{mv_2^2}{2} + \Pi(\vec{r}_2) \quad (2.53)$$

(збереження енергії). Твердження 5 також доведено.

Кінетична енергія  $K = \frac{mv^2}{2}$  — це енергія руху й при  $v = 0$  вона дорівнює нулю. Потенціальна енергія  $\Pi(\vec{r})$  — це енергія розташування. (Не дорівнює нулю навіть у стані спокою, коли  $v = 0$ , за винятком окремих точок простору (зокрема точки відліку  $O$ , де вона за визначенням дорівнює нулю.)

Неоднозначність кінетичної та потенціальної енергій (перша залежить від вибору інерційної системи відліку, а друга — від точки її відліку  $O$  у просторі) не заважає їм бути фундаментальними фізичними величинами хоча б завдяки закону збереження енергії (2.53). До того ж неоднозначність потенціальної енергії така, що  $d\Pi$  або  $\Delta\Pi$  вже цілком однозначні. А саме  $d\Pi$  і  $\Delta\Pi$  пов'язані з роботою сил, що має вже *прямий фізичний зміст*. Отже, неоднозначність не істотна.

Додамо до сказаного, що закон збереження та перетворення енергії пронизує не лише механіку, але й всю фізику, збагачуючись новими видами енергії (які завжди пов'язані з тією чи іншою формою *роботи*).

## § 2.9. Інше доведення закону збереження енергії. Загальне визначення консервативних сил

Фундаментальність закону збереження й перетворення енергії вимагає, крім наведеного в § 2.7 доведення, побудувати ще й таке, яке допускає пряме узагальнення у разі систем з  $n$  матеріальних точок (див. гл. 3). Для цього за визначення потен-

ціальних сил візьмемо формулу (2.40) і запишемо другий закон Ньютона у формі

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\Pi(\vec{r}). \quad (2.54)$$

Домноживши скалярно обидві частини рівності (2.54) на швидкість  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ , дістаємо

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\Pi \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.55)$$

Перетворимо по черзі обидві частини (2.55): у лівій маємо

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \frac{dK}{dt}; \quad (2.56)$$

у правій

$$-\vec{\nabla}\Pi \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = - \left\{ \frac{\partial\Pi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Pi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Pi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right\} = - \frac{d\Pi}{dt}. \quad (2.56a)$$

Поєднуючи результати (2.55), (2.56), (2.56a), запишемо  $\frac{d}{dt} \{K + \Pi\} = 0$ . Звідси для повної енергії  $W$  знаходимо  $W = K + \Pi = \text{const}$ . А це й відтворює на новій основі закон збереження енергії (2.41).

Сили, перпендикулярні до траєкторії, не виконують роботи. До них належить, наприклад, магнітна компонента сили Лоренца (2.30):  $\vec{f}_m = q [\vec{v}, \vec{B}]$ . Справді, за визначенням векторного добутку  $\vec{v} \perp \vec{f}_m = q [\vec{v}, \vec{B}]$ , тобто  $\vec{f}_m$  — перпендикулярна до траєкторії. Звідси робота  $\delta a_m$  сили  $\vec{f}_m$  на переміщенні  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  дорівнює

$$\delta a_m = (q [\vec{v}, \vec{B}] \cdot \vec{v}) dt = 0. \quad (2.57)$$

Нехай електричне  $\vec{E}$  й магнітне  $\vec{B}$  поля — статичні, тобто не залежать від часу  $t$ . У курсі електростатики доводиться, що електростатична компонента сили Лоренца (2.30) потенціальна

$$\vec{f}_e = q\vec{E} = -\vec{\nabla}(q\varphi), \quad (2.58)$$

де  $\varphi$  — потенціал поля, а  $q\varphi = \Pi$  — потенціальна енергія заряду  $q$ . Тому робота  $\delta a_e$  електростатичної сили  $\vec{f}_e$  дорівнює  $\delta a_e = \vec{f}_e d\vec{r} = -d\Pi$ . Отже, повна робота  $\delta A$  сили Лоренца  $\vec{F}_L = \vec{f}_m + \vec{f}_e$

$$\delta A = \vec{F}_n d\vec{r} = \delta a_e = -d\Pi, \quad (2.59)$$

тобто зводиться до роботи електростатичної компоненти, що має потенціальний характер. Щоправда, в електродинаміці формула (2.59) неповна; змінне електростатичне поле має так звану вихрову складову (не потенціальну).

Розглядуваний приклад демонструє наявність у природі сил, що складаються з потенціальної та нормальної до траєкторії частин:  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Pi + \vec{F}_n (\vec{F}_n \perp \vec{v})$  — нормальна до траєкторії, а  $-\vec{\nabla}\Pi$  — потенціальна частина сили. За другим законом Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\Pi + \vec{F}_n. \quad (2.60)$$

Домножуючи скалярно обидві частини рівності (2.60) на  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ , дістанемо  $m\vec{v}d\vec{v} = -d\Pi$ . Звідси знаходимо  $d\{mv^2/2 + \Pi(\vec{r})\} = 0$  і

$$W = \frac{mv^2}{2} + \Pi(\vec{r}) = \text{const}. \quad (2.61)$$

Отже, не лише для випадку потенціальних сил типу (2.40), але й для сил типу (2.60) можна запропонувати повну енергію  $W$  (2.61), що зберігається. Тому сили типу (2.60) дістали назву *консервативних* ("консервують", зберігають енергію  $W$ ). Потенціальні сили типу (2.40) є окремим випадком консервативних сил (2.60) при умові, що  $\vec{F}_n \equiv \vec{0}$ .

Нормальні до траєкторії сили  $\vec{F}_n$ , не змінюючи енергії, впливають на зміну імпульсу частинки  $d\vec{p} = \{-\vec{\nabla}\Pi + \vec{F}_n\}dt$ , додатково викривляючи її траєкторію. У цьому й полягає їх вплив на рух.

## § 2.10. Дисипативні сили

Відомо, що існують сили, які перешкоджають механічному рухові, гальмують його. Приклади таких сил було розглянуто в § 2.6 (сили сухого (2.29) та в'язкого (2.29а) тертя). Вони спричиняють зменшення механічної енергії, її розсіювання (або дисипацію). Тому й називаються *дисипативними*<sup>1</sup>. Встановимо закон еволюції повної енергії  $W$  (2.61) при наявності дисипативних сил.

Нехай частинка  $m$  рухається під дією сил

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Pi - f(v)\vec{v}, \quad (2.62)$$

<sup>1</sup>Дисипативні сили найчастіше призводять до нагрівання тіл і переходу механічної енергії у теплову.

де  $f(v) > 0$  — певна скалярна функція. Якщо покласти  $f(v) = k/v$ , дістанемо сили сухого тертя (2.29); якщо ж за  $f(v)$  обрати константу ( $f(v) = \gamma$ ) — сили в'язкого тертя (2.29а). Отже, вважаємо, що на частинку діє суперпозиція потенціальних ( $-\vec{\nabla}\Pi$ ) і дисипативних ( $-f(v)\vec{v}$ ) сил. Для них другий закон Ньютона набуває вигляду

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\Pi - f(v)\vec{v}. \quad (2.63)$$

Домножуючи обидві частини рівності (2.63) скалярно на  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , матимемо (після нескладних обчислень)

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{mv^2}{2} + \Pi(\vec{r}) \right\} = -f(v)v^2.$$

Запровадивши повну енергію частинки  $W$  за формулою

$$W(\vec{r}, \vec{v}) \equiv \frac{mv^2}{2} + \Pi(\vec{r}), \quad (2.64)$$

дістанемо

$$\frac{dW}{dt} = -f(v)v^2 < 0. \quad (2.65)$$

Це й буде шуканим законом еволюції повної енергії частинки  $W$  (2.64) під дією дисипативних сил ( $-f(v)\vec{v}$ ). З нерівності (2.65) випливає, що такі сили спричинюють зменшення енергії частинки, оскільки робота  $\delta a$  таких сил від'ємна:

$$\delta a = -f(\vec{v})\vec{v} d\vec{r} = -f(\vec{v})v^2 dt < 0. \quad (2.66)$$

Зазначимо, нарешті, що сили типу в'язкого тертя (2.29а) відіграють важливу роль у теорії коливань, що затухають. Причому не лише в механіці. Їх формальним аналогом належить важлива роль у теорії електричних  $RLC$ -контурів. Про це детальніше буде йти мова далі.

## § 2.11. Частинка в полі центральних сил

Сила, що діє на Землю з боку Сонця, на всіх ділянках орбіти спрямована в одну точку — на Сонце. Сили такого типу (тобто такі, лінії дії яких у будь-якій точці зони їхньої дії проходять через одну точку — центр сил) називаються *центральними*. Центральні поля сил найчастіше потенціальні. Рух під дією таких сил має характерні особливості. Центральні сили теоретично важливі через велику поширеність.

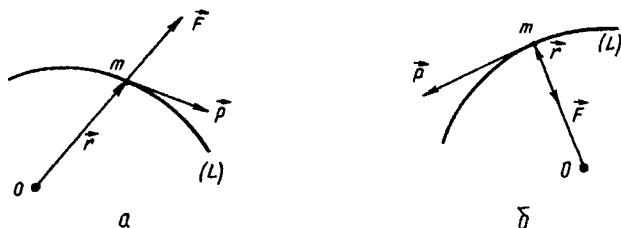


Рис.19

Якщо за початок координат  $O$  обрати силовий центр, то характерною ознакою центральної сили  $\vec{F}$  стане її паралельність або антипаралельність до радіуса-вектора  $\vec{r}$ :

$$\vec{F} \uparrow \uparrow \text{ або } \uparrow \downarrow \vec{r}. \quad (2.67)$$

Центральне відштовхування (а) та центральне притягання (б) показано на рис. 19. У системі відліку, початок координат якої вибрано у силовому центрі, сили типу (2.67) можна подати у вигляді<sup>1</sup>

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) (\vec{r}/r). \quad (2.68)$$

Тут, як завжди,  $r = |\vec{r}|$ , а  $f(r)$  — деяка скалярна функція (додатна для сил відштовхування й від'ємна для сил притягання). Відношення  $\vec{r}/r$  править за орт вздовж радіус-вектора.

Спираючись на визначення центральних сил, формалізоване рівністю (2.68), покажемо, що:

1) поле центральних сил типу (2.68) завжди потенціальне, причому потенціальна енергія дорівнює

$$\Pi(r) = \int_r^\infty f(r) dr; \quad (2.69)$$

2) момент імпульсу частинки  $L_0$  відносно силового центра зберігається завжди

$$\vec{L}_0 = [\vec{r}, \vec{p}] = \vec{\text{const}}; \quad (2.70)$$

3) рух частинки в центральному полі завжди плоский (орбіта знаходиться у площині, нормальній до моменту  $\vec{L}_0$  (2.70));

4) радіус-вектор частинки  $\vec{r}$  за довільні, рівні між собою проміжки часу zakresлює рівні площі (тобто секторіальна швидкість частинки стала).

<sup>1</sup> Якщо скалярна функція  $f(r)$  не залежить від кутів  $\theta$  і  $\varphi$ , то сила потенціальна (2.69).



Останнє твердження означає, що встановлений свого часу Кеплером для планетних орбіт закон сталої секторіальної швидкості є справедливим не лише в гравітаційному полі, але й в будь-якому іншому *центральному* полі.

Обґрунтуємо сформульовані вище твердження.

1. Довести потенціальний характер центральних сил, тобто формули (2.69), можна спираючись на незалежність роботи таких сил (2.68) від форми шляху. Згідно з формулою (2.17) матимемо

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = f(r) \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r} = f(r) dr. \quad (2.71)$$

Звідси випливає, що елементарна робота  $\delta A$  залежить не від напрямку руху, а лише від радіальної відстані, на яку частинка перемістилася відносно силового центра. Отже, при довільній траєкторії руху  $L$  між точками 1 і 2 матимемо

$$A_{12} = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr. \quad (2.72)$$

Обираючи точку відліку енергії на безмежності<sup>1</sup> ( $r_2 \rightarrow \infty$ ), для потенціальної енергії в точці  $\vec{r}$  за допомогою (2.72) дістанемо

$$\Pi(r) = \int_r^{\infty} f(r') dr'.$$

Потенціальний характер центральних сил (2.68), тобто формулу (2.69), доведено.

2. Запишемо закон еволюції моменту імпульсу  $\vec{L}_0$  (2.70). За загальною формулою (2.21) матимемо

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = \frac{f(r)}{r} [\vec{r}, \vec{r}] \equiv \vec{0}.$$

Звідси й випливає закон збереження вектора  $\vec{L}_0$ :  $\vec{L}_0 = \vec{\text{const}}$ . Закономірність (2.70) доведено.

3. Плоский характер траєкторії частинки в центральному полі сил також вже доведено, оскільки це випливає безпосередньо з (2.70). Справді, звернемося до рис. 20, а. Вектор  $\vec{L}_0$ , який зберігає свою довжину й напрям, за визначенням векторного добутку є перпендикулярним до площини, утвореної  $\vec{r}$  та  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Отже, площина побудована на цих векторах, не змінює своєї орієнтації у просторі, і рух тому є плоским.

<sup>1</sup> Якщо відповідна границя при  $r_2 \rightarrow \infty$  не існує, то довільно фіксується точка відліку  $r_2 = r_2^0$  (фікс).

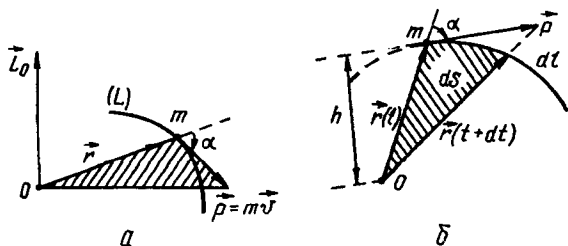


Рис. 20

4.3 (2.70) впливає, що й модуль вектора  $\vec{L}_0$  сталий:  $L_0 \equiv |\vec{L}_0| = \text{const}$ . Але, очевидно,

$$|\vec{L}_0| = mvr \sin \alpha. \quad (2.73)$$

Нехай за проміжок часу  $dt$  частинка  $m$  описала дугу  $dl$  (див. рис. 20, б), а її радіус-вектор закреслив сектор площею  $dS$ . Як видно з рисунка,

$$dS = \frac{1}{2} h dl = \frac{1}{2} r dl \sin \alpha. \quad (2.74)$$

Секторіальною швидкістю називається величина  $dS/dt$ . Але  $dl/dt = v$  — швидкість вздовж траєкторії. Тому

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} rv \sin \alpha. \quad (2.75)$$

Порівнюючи (2.74) і (2.75) та враховуючи (2.73), матимемо

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{L}_0| = \text{const}. \quad (2.76)$$

Твердження про сталість секторіальної швидкості доведено; отже, один із законів Кеплера розповсюджено на всі центральні поля сил.

## Глава 3

### ДИНАМІКА СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ

#### § 3.1. Закони еволюції та умови збереження імпульсу, моменту імпульсу та кінетичної енергії системи

Мова йтиме про систему точкових тіл (частинок). Розглянемо рух системи (рою) з  $n \geq 2$  частинок, що взаємодіють між собою і знаходяться у полі інших тіл (джерел поля). Дія на рій з

боку інших тіл (джерел) називається *зовнішньою*, а відповідні сили — *зовнішніми*. До зовнішніх сил відносять також сили опору тих об'єктів (зокрема, середовища), що безпосередньо оточують досліджуваній рій частинок. Такі сили здебільшого дисипативні, поля ж віддалених масивних і тому практично нерухомих тіл (джерел поля) — консервативні. Для спрощення дисипативні сили та сили іншої, неконсервативної природи не розглядатимемо.

Систему тіл називають *замкненою* (механічно), якщо на неї не діють зовнішні сили. Повністю замкнена система — це, звичайно, абстракція.

Нехай масами досліджуваної сукупності (рою) частинок будуть

$$m_1, m_2, \dots, m_n. \quad (3.1)$$

Для кожної частинки має місце другий закон Ньютона<sup>1</sup>

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n ' \vec{F}_{ij} + \vec{f}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.2)$$

де  $\vec{F}_{ij}$  — сила дії частинки  $j$  на частинку  $i$ ;  $\vec{f}_i$  — сила дії на  $i$ -ту частинку зовнішніх джерел поля. Для ілюстрації випишемо систему рівнянь (3.2) для трьох частинок

$$\begin{cases} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{f}_1; \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{f}_2; \\ m_3 \frac{d\vec{v}_3}{dt} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{f}_3 \end{cases} \quad (3.3)$$

(рис. 21). Ситуація на рисунку відповідає взаємному відштовхуванню частинок 1 та 2, взаємному притяганню частинок 2 та 3, 1 та 3; притяганню до віддаленого нерухомого центра частинок 1 та 3 і відштовхуванню від нього частинки 2.

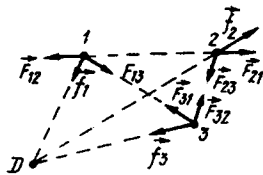


Рис. 21

За третім законом Ньютона для кожної пари ( $i$  та  $j$ ) частинок, що взаємодіють, дія дорівнює протидії:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \quad (3.4)$$

<sup>1</sup> Знак суми зі штрихом ( $\sum'$ ) означає, що в сумі немає доданка з  $j = i$  (самодії частинки).

Закон (3.4) виключно важливий. Саме він визначає характерні риси законів еволюції імпульсу  $\vec{p}$  та моменту імпульсу  $\vec{L}$  рою частинок (3.1) та умови їх збереження. (Ця проблема обговорюватиметься далі.) Сили  $\vec{F}_{ij}$  вважаємо

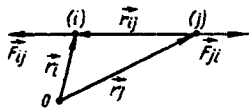


Рис. 22

центральноними (тобто такими, що діють вздовж лінії, яка з'єднує точкові тіла  $i$  та  $j$ ). Ситуація для сил відштовхування двох частинок ( $i$  та  $j$ ) зображена на рис. 22.

Природно обмежитися дуже поширеним випадком, коли сили між двома частинками залежать лише від відстані між ними, тобто  $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ . Саме це, наприклад, має місце в законах Кулона та всесвітнього тяжіння Ньютона, відомих з елементарного курсу фізики. Отже, сприймемо, що

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{ij}(r_{ij}). \quad (3.5)$$

Визначимо сумарні імпульс  $\vec{p}$ , кінетичну енергію  $K$  та момент імпульсу  $\vec{L}$  системи з  $n$  частинок (рою) за такими формулами:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i; \quad (3.6)$$

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2; \quad (3.7)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{p}_i]. \quad (3.8)$$

Усі три фізичні величини є адитивними за визначенням і відіграють у динаміці систем частинок таку ж фундаментальну роль, як і в динаміці однієї частинки.

Спираючись на систему рівнянь руху (3.2), що відображає другий закон Ньютона щодо сукупності з  $n$  частинок, а також на третій закон Ньютона (3.4), покажемо, що:

1. Закон еволюції повного імпульсу системи (3.6) визначається виключно зовнішніми силами  $\{f_i\}$ ; внутрішні сили  $\{\vec{F}_{ij}\}$  з нього випадають:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}, \quad (3.9)$$

де  $\vec{f}$  — векторна сума зовнішніх сил

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i. \quad (3.10)$$

Згідно із (3.9) та (3.10) при умові<sup>1</sup>

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \equiv \vec{0} \quad (3.11)$$

повний (сумарний) імпульс системи  $\vec{p}$  (3.6) зберігається:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \overline{\text{const}}. \quad (3.9a)$$

2. Закон еволюції моменту імпульсу системи  $\vec{L}$  визначається сумою моментів лише зовнішніх сил; внутрішні сили з даного закону випадають аналогічно до закону еволюції імпульсу системи (3.9). Отже,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (3.12)$$

де

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i, \vec{f}_i]. \quad (3.13)$$

Якщо, наприклад, зовнішні сили відсутні

$$\vec{f}_i \equiv \vec{0} \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (3.14)$$

то  $\vec{M} = \vec{0}$ , і тому повний (сумарний) момент імпульсу  $\vec{L}$  зберігається:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \overline{\text{const}}. \quad (3.12a)$$

Застосування наведених законів має велике значення, що буде показано згодом.

3. Закон еволюції кінетичної енергії  $K$  (3.7), на відміну від попередніх двох законів, визначається як зовнішніми, так і внутрішніми силами

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i + \frac{1}{2} \sum_{(i \neq j)} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}. \quad (3.15)$$

Тут  $\sum_{(i \neq j)}$  — подвійна сума (по  $i$  та  $j$  від 1 до  $n$  при додатковій умові, що  $i \neq j$ );  $\vec{v}_{ij}$  — відносна швидкість руху частинок  $i$  та  $j$ :

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j. \quad (3.16)$$

<sup>1</sup> Умова (3.11) для рою частинок виконується здебільшого тоді, коли всі зовнішні сили  $\vec{f}_i \equiv \vec{0}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Поява коефіцієнта  $1/2$  пояснюється тим, що в подвійній сумі кожна пара частинок ( $i$  та  $j$ ) врахована двічі.

Рекомендуємо розписати всі формули даного пункту явно (без знаків  $\Sigma$ ) для випадків  $n = 2$  та  $n = 3$ .

Перший доданок у формулі (3.15) — це сумарна потужність зовнішніх сил; другий — сумарна потужність внутрішніх сил. Отже, внутрішні сили також виконують роботу, перетворюючи кінетичну енергію у потенціальну (і навпаки), внаслідок чого сама лише кінетична енергія  $K$  не зберігається навіть при відсутності зовнішніх сил (3.14).

Доведемо наведені вище закони.

1. Для доведення закону (3.9) обчислимо швидкість зміни повного імпульсу системи  $\vec{p}$  (3.6):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}. \quad (3.17)$$

За другим законом Ньютона для рою частинок (3.2) матимемо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{(i \neq j)} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^n \vec{f}_i. \quad (3.18)$$

У подвійній сумі  $\sum_{(i \neq j)}$  кожній силі  $\vec{F}_{\alpha\beta}$  відповідає протилежна їй (за третім законом Ньютона) (3.4) сила  $\vec{F}_{\beta\alpha}$ :  $\vec{F}_{\beta\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\beta}$ . Тому подвійна сума

$$\sum_{(i \neq j)} \vec{F}_{ij} \equiv \vec{0} \quad (3.19)$$

(слід перевірити це спершу на прикладах при  $n = 2$  та  $n = 3$ ). Позначивши векторну суму зовнішніх сил  $\{\vec{f}_i\}$  через  $\vec{f}$ , дістанемо шуканий результат (3.9).

Якщо  $\vec{f} = \vec{0}$ , то виконується закон збереження повного імпульсу (3.9а).

2. Обчислимо тепер швидкість зміни повного моменту імпульсу  $\vec{L}$ . Не повторюючи в деталях відповідні розрахунки (див. доведення) формули (1.21), запишемо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right]. \quad (3.20)$$

Але  $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ , тому згідно з (3.2) можна (3.20) подати як

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{(i \neq j)} \left[ \vec{r}_i, \vec{F}_{ij} \right] + \sum_{i=1}^n \left[ \vec{r}_i, \vec{f}_i \right]. \quad (3.21)$$

Проте подвійна сума дорівнює нулю, оскільки попарно анулюються доданки вигляду

$$[\vec{r}_\alpha, \vec{F}_{\alpha\beta}] + [\vec{r}_\beta, \vec{F}_{\beta\alpha}] \equiv \vec{0}. \quad (3.22)$$

Останнє випливає з третього закону Ньютона (3.4), який дає змогу переписати ліву частину шуканої рівності (3.22):

$$[\vec{r}_\alpha, \vec{F}_{\alpha\beta}] - [\vec{r}_\beta, \vec{F}_{\alpha\beta}] = [\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta, \vec{F}_{\alpha\beta}]. \quad (3.23)$$

Вектор  $\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta$  сполучає частинки  $\alpha$  і  $\beta$  і тому колінеарний силі  $\vec{F}_{\alpha\beta}$  (див. рис. 22, де замість  $\alpha, \beta$  показано  $i, j$ ). Звідси й рівність (3.22).

Отже, еволюція вектора  $\vec{L}$  (3.21) справді визначається сумарним моментом самих лише зовнішніх сил, чим і доведені твердження (3.12), (3.13). Ясно, що, скажімо, у відсутності зовнішніх сил вектор  $\vec{L}$  зберігається.

3. Розглянемо встановлення закону еволюції для кінетичної енергії  $K$ . Враховуючи рівність  $\vec{v}_i^2 = v_i^2$ , матимемо

$$K = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\vec{v}_i^2}{2}.$$

Звідки

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}. \quad (3.24)$$

За допомогою рівнянь руху (3.2) знаходимо

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \vec{v}_i + \sum_{(i \neq j)} \vec{F}_{ij} \vec{v}_i. \quad (3.25)$$

Користуючись тим, що індекс підсумовування не впливає на результат, тобто  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_j$ , можемо стверджувати, що

$$\sum_{(i \neq j)} \vec{F}_{ij} \vec{v}_i = \sum_{(j \neq i)} \vec{F}_{ji} \vec{v}_j. \quad (3.26)$$

Звідси випливає

$$\sum_{(i \neq j)} \vec{F}_{ji} \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq j)} \{ \vec{F}_{ij} \vec{v}_i + \vec{F}_{ji} \vec{v}_j \}. \quad (3.27)$$

Але за третім законом Ньютона (3.4) праву частину рівності (3.27) можна подати у вигляді

$$\frac{1}{2} \sum_{(i \neq j)} \vec{F}_{ij} \{\vec{v}_i - \vec{v}_j\} = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq j)} \vec{F}_{ij} \vec{v}_{ij}, \quad (3.28)$$

де введено відносну швидкість (3.16). Цим фактично й завершується доведення закону еволюції (3.15).

### § 3.2. Закон руху центра мас

Центром мас системи частинок  $m_1, m_2, \dots, m_n$  називають точку в межах їх рою з радіусом-вектором

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (3.29)$$

де введено повну масу системи (рою)

$$M \equiv \sum_{i=1}^n m_i. \quad (3.30)$$

Неважко довести, що  $\vec{R}$  "дивиться" в деяку "порожню" точку простору всередині рою частинок, не збігаючись з радіусом-вектором жодної з них. Пропонуємо для одновимірного (вздовж прямої) руху двох частинок довести, що центр їх мас знаходиться десь посередині між частинками.

Спираючись на другий закон Ньютона (3.2), неважко довести, що для центра мас має місце закон руху

$$M (d\vec{V} / dt) = \vec{f}, \quad (3.31)$$

де  $\vec{V}$  — швидкість центра мас

$$\vec{V} = d\vec{R} / dt = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad (3.32)$$

а  $\vec{f}$  — векторна сума зовнішніх сил (3.10). Внутрішні сили  $\{\vec{F}_{ij}\}$  із закону руху центра мас випадають.

Отже, центр мас  $\vec{R}$  системи частинок  $m_1, m_2, \dots, m_n$  рухається так, як би рухалася одна частинка з масою  $M$  (що є повною масою рою) під дією векторної суми  $\vec{f}$  зовнішніх сил. Оскільки з (3.32) випливає, що повний імпульс системи  $\vec{p}$  дорівнює

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = M\vec{V}, \quad (3.33)$$

то закон руху центра мас є, по суті, рівнянням еволюції повного імпульсу системи  $\vec{p}$



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}. \quad (3.31a)$$

У відсутності зовнішніх сил повний імпульс зберігається:

$$\vec{p} = M\vec{V} = \text{const}. \quad (3.34)$$

Умова (3.34) надає закону збереження повного імпульсу (3.9а) лише нового вигляду. Проте таке формулювання відіграє, як побачимо, важливу роль, скажімо, в теорії твердого тіла.

Формули (3.31), (3.33) та (3.34) доводяться за допомогою рівнянь руху (3.2) безпосередньо. (Рекомендуємо довести це самостійно.)

Закони еволюції та збереження імпульсу і моменту імпульсу (зокрема, закон руху центра мас) разом із законом збереження енергії відіграють фундаментальну роль при розробці концепцій динаміки тіл змінної маси, суцільних середовищ та твердих тіл, про що частково йтиметься далі.

### § 3.3. Динаміка двох тіл. Зведена маса

Задача багатьох тіл ( $n \geq 2$ ), що базується на системі рівнянь руху (3.2), не має точного аналітичного розв'язку і її розв'язують наближено. Винятком є задача двох тіл ( $n = 2$ ), яку можна розв'язати точно й до кінця. Задача двох тіл (важлива сама по собі) використовується також у теорії багатьох ( $n > 2$ ) тіл, оскільки існує багато задач механіки, в яких можна відділити основне (головне) тіло, з яким усі інші взаємодіють значно сильніше, ніж між собою. Наприклад, планети значно сильніше притягуються до Сонця, ніж одна до одної. Такі задачі можна розв'язувати методом послідовних наближень, враховуючи спочатку лише взаємодію тіл з основним (головним) тілом, а вже потім підправляти розв'язок, враховуючи порівняно слабкі взаємодії решти тіл між собою. Для такої процедури розроблено спеціальні методи. Отже, задача двох тіл є також базовою для широкого кола задач багатьох ( $n > 2$ ) тіл. Коли б цього не було, навряд чи легко було б встановити закон всесвітнього тяжіння Ньютона, який порівняно просто випливає з законів Кеплера, справедливих саме для двох тіл (Сонце — планета, або Земля — Місяць тощо (див. нижче)). Звідси й зрозуміла виключна важливість задачі двох тіл в механіці.

Отже, розглянемо рух двох тіл, що взаємодіють між собою та із зовнішнім джерелом силового поля, і мають маси  $m_1$  і  $m_2$ . Рівняння руху (3.2) тоді набувають вигляду

$$\begin{cases} m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{f}_1; \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{f}_2. \end{cases} \quad (3.35)$$

Додамо до цього третій закон Ньютона  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Спираючись на другий і третій закони Ньютона, неважко довести, що:

1. Після відокремлення руху центра мас  $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  задачу двох тіл формально можна звести до задачі руху одного тіла із зведеною масою

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.36)$$

під дією деякої сили  $\vec{F}^*$ .

$$\vec{F}^* = \vec{F} + \frac{m_2\vec{f}_1 - m_1\vec{f}_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.37)$$

де

$$\vec{F} = \vec{F}_{12}. \quad (3.38)$$

2. У відсутності зовнішніх сил ( $\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \vec{0}$ ) сила  $\vec{F}^*$  збігається з силою взаємодії тіл  $\vec{F}$ .

3. Рух центра мас  $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  та відносний рух частинок, що визначається вектором  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , підпорядковані відповідно законам

$$M(d^2\vec{R}/dt^2) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2; \quad M = m_1 + m_2; \quad (3.39)$$

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{m_2\vec{f}_1 - m_1\vec{f}_2}{M} \quad (3.40)$$

( $\vec{v}$  — відносна швидкість частинок  $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ).

4. У відсутності зовнішніх сил центр мас рухається зі сталою швидкістю  $\vec{V} = d\vec{R}/dt = \text{const}$ , тобто за інерцією; відносний рух частинок визначається рівнянням

$$\mu(d\vec{v}/dt) = \vec{F}. \quad (3.40a)$$

Доведення перелічених вище тверджень нескладне. Справді, домножуючи перше рівняння системи (3.35) на  $1/m_1$ , а друге — на  $1/m_2$ , з урахуванням (3.38) дістанемо

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{1}{m_1} \{ \vec{F} + \vec{f}_1 \}; \quad \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{1}{m_2} \{ -\vec{F} + \vec{f}_2 \}. \quad (3.41)$$

Звідси для відносного прискорення  $\vec{a}$  неважко знайти

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F} + \frac{\vec{f}_1}{m_1} - \frac{\vec{f}_2}{m_2}.$$

А отже, має місце закон (3.40) (див. визначення зведеної маси  $\mu$  (3.36)).

Закон руху центра мас (3.39) доведення не вимагає, оскільки є окремим випадком закону (3.39), коли  $n = 2$  (якщо врахувати (3.32)). У відсутності зовнішніх сил центр мас з очевидністю рухається за інерцією (див. (3.39)), а закон відносного руху тіл (3.40) за формою має вигляд закону Ньютона для однієї частинки з масою  $\mu$  (3.36).

Усі сформульовані вище твердження 1 — 4 доведено.

Розглянемо два важливі спеціальні випадки:

1) частинки мають однакову масу

$$m_1 = m_2 = m; \quad (3.42)$$

2) маса однієї з частинок значно переважає масу іншої

$$m_1 \gg m_2 \text{ (або } m_2/m_1 \ll 1). \quad (3.43)$$

У (3.42) зведена  $\mu$  (3.36) та сумарна  $M$  (3.30) маси дорівнюють відповідно

$$\mu = m/2; \quad M = 2m. \quad (3.44)$$

У (3.43) ці ж маси

$$\mu = \frac{m_2}{1 + m_2/m_1} \approx m_2; \quad M = m_1(1 + m_2/m_1) \approx m_1. \quad (3.45)$$

Інакше кажучи, за умови (3.43) зведена маса  $\mu$  приблизно збігається з масою меншої<sup>1</sup> частинки  $m_2$ , а повна маса  $M$  — з масою більшої  $m_1$ . Щодо положення центра мас у просторі, то за умови (3.43) він практично збігається з положенням масивної частинки

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + (m_2/m_1)\vec{r}_2}{1 + m_2/m_1} \approx \vec{r}_1. \quad (3.46)$$

Розглянуте має велике значення при встановленні закону всесвітнього тяжіння Ньютона на основі законів Кеплера (див. далі).

<sup>1</sup> За масою.

### § 3.4. Закони Кеплера та закон всесвітнього тяжіння Ньютона

З погляду механіки сонячна система — це система багатьох тіл, серед яких є головне (центральне) тіло — Сонце, що має значно більшу масу, ніж планети. З огляду на дану обставину рух кожної планети у нульовому наближенні можна вивчати на базі динаміки двох тіл: Сонце — планета, а далі, коли треба, враховувати вплив на кожну планету всіх інших планет та їх супутників за методом послідовних наближень.

У нульовому наближенні задачею двох тіл можна вважати також систему Земля — Місяць, нехтуючи спершу навіть дією Сонця, хоч маса останнього значно переважає масу Землі<sup>2</sup>. Вирішальну роль тут відіграє вже відстань: Місяць значно ближче до Землі, ніж до Сонця, яке слабо впливає на відносний щодо Землі рух Місяця.

Якби підходи на базі теорії двох тіл не забезпечували задовільного узгодження теорії з астрономічними спостереженнями, навряд чи просто було б встановити закон всесвітнього тяжіння Ньютона за допомогою емпіричних законів Кеплера, оскільки вони (а також закон всесвітнього тяжіння) узгоджуються між собою саме в межах точності задачі двох тіл.

Нагадаємо закони Кеплера:

- 1) планети сонячної системи рухаються плоскими кривими — еліпсами, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце;
- 2) радіуси-вектори планет за довільні рівні проміжки часу закреслюють рівні площі;
- 3) квадрати періодів  $T$  обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей  $a$  відповідних еліпсів; інакше кажучи,

$$a^3/T^2 = C = \text{const.} \quad (3.47)$$

Спираючись на закони Кеплера та закони динаміки Ньютона, можна встановити закон всесвітнього тяжіння Ньютона, який (у скалярному варіанті) має вигляд

$$f(r) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.48)$$

де  $f(r)$  — абсолютне значення сили притягання (гравітаційної сили) між двома точковими тілами з масами  $m_1$  і  $m_2$ , що знаходяться на відстані  $r$  одне від одного;  $\gamma$  — *гравітаційна стала*.

<sup>1</sup> Кого не цікавить обґрунтування закону всесвітнього тяжіння на базі законів Ньютона та законів Кеплера, може не розглядати даний параграф; хоча...

<sup>2</sup> Мова йде про *відносний* рух Місяця навколо Землі.

При встановленні закону (3.48) за допомогою законів Кеплера та рівнянь динаміки Ньютона зазначимо, що:

1) орбіти більшості планет сонячної системи близькі до кола (тобто становлять еліпси з дуже малим ексцентриситетом);

2) відношення (3.47), тобто  $C = (a_3 / T)$  практично однакове (універсальне) для всіх планет сонячної системи;

3) аналогічні (тобто Кеплерові) закони дійсні також для супутників планет (де планета центральне тіло). Але константа  $C$  в законі (3.47) для кожної планети своя.

З 2) та 3) випливає істотний для подальшого висновок: *стала в законі (3.47) визначається фактично центральним (більш масивним) тілом системи* (рекомендуємо поміркувати над цим положенням).

Якщо досі розглядалася задача визначення траєкторії або інших характеристик руху тіл за заданими силами та масами частинок на базі законів Ньютона, то тепер поставлено зворотню задачу: за заданими масами тіл, характером траєкторії (еліпсом) та іншими характеристиками руху (тобто іншими законами Кеплера) визначити сили, що породжують такий рух.

Закони Кеплера стосуються систем двох небесних тіл. Тому й відтворення закону всесвітнього тяжіння природно шукати за допомогою задачі двох тіл.

Відносний рух планет у полі Сонця чи супутників у полі масивних тіл (планет) можна описати за допомогою закону Ньютона (3.40а):

$$\mu(d\vec{v}/dt) = -f(r)\frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.49)$$

Оскільки гравітаційні сили — сили притягання, функція  $f(r)$  має бути додатною:

$$f(r) > 0 \quad (3.50)$$

(центрально симетричний варіант обрано в зв'язку з аналізом першого й другого законів Кеплера). (Рекомендуємо поміркувати над цим.)

Очевидно, до множини розв'язків рівняння руху (3.49) входять такі, що відповідають коловим орбітам, для яких

$$|\vec{r}(t)| = r = \text{const}. \quad (3.51)$$

Цей інтуїтивно очевидний факт неважко й формально довести (див. нижче).

Згідно з другим законом Кеплера рух вздовж кола (3.51) повинен бути рівномірним:  $dv/dt = 0$ ; тоді прискорення буде чисто доцентровим

$$\vec{a} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{v^2}{r}. \quad (3.52)$$

Звідси за (3.49) дістанемо

$$\mu(v^2/r) = f(r). \quad (3.53)$$

Для рівномірного обертання по колу маємо

$$v = (2\pi r)/T, \quad (3.54)$$

де  $T$  — період обертання. Це дає можливість використати третій закон Кеплера (3.47), якому для колових орбіт (3.51) можна надати вигляду

$$r^3 / T^2 = C \text{ (const)}. \quad (3.55)$$

Принадібно неважко збагнути, що константа  $C$  для колових орбіт пропорційна добутковій секторіальній швидкості (див. (1.75)).  $dS/dt$  на лінійну  $v$ , тобто  $C = r^2/T^2 \sim r v^2 \sim v (dS/dt)$ , оскільки для колових орбіт  $\alpha = \pi/2$ .

Константа  $C$  має бути симетричною функцією мас обох точкових тіл, що взаємодіють, оскільки вони рівноправні:

$$C(m_1, m_2) = C(m_2, m_1). \quad (3.56)$$

Більше того, згідно з зауваженнями 2) та 3) до законів Кеплера, розглядувана константа повинна визначатися в основному масивнішим тілом. Найпростішою симетричною функцією, що відповідає даній вимозі, буде

$$C = k(m_1 + m_2) = km_1 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \approx km_1 \quad (m_1 \gg m_2). \quad (3.57)$$

Сприймемо простий варіант (3.57) як вірогідний постулат. Виправдати такий вибір можна лише за допомогою застосування шуканого закону всесвітнього тяжіння. На практиці вибір (3.57) повністю виправдовується.

Розкриваючи зведену масу  $\mu$  за формулою (3.36) і підставляючи відповідні збудутки наведених вище обчислень до формули (3.53), дістанемо

$$\frac{4\pi^2 k m_1 m_2}{r^2} = f(r). \quad (3.58)$$

Ввівши "гравітаційну сталу"  $\gamma = 4\pi^2 k$ , остаточно матимемо

$$f(r) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.59)$$

а це й є знаменитий закон *всесвітнього тяжіння* Ньютона (3.48).

Гравітаційна стала  $\gamma$  визначається не теоретично, а лише експериментально. За логікою наведеного вище виведення закону (3.59) із законів Кеплера стала  $\gamma$  повинна бути універсальною, що підтверджує практика. (Поміркуйте над цим.) Більше того, на базі трьох законів динаміки Ньютона, доповнених законом гравітації (3.59), теоретично відтворюються всі закони небесної механіки згідно з астрономічними даними. Теорія, зокрема, дала можливість *передбачити* існування далеких планет сонячної системи (Нептуна й Плутона) та вказати точне місце їх пошуку. Усе це доводить, що закони динаміки Ньютона, а також його закон гравітації (3.59) справді відображають дійсність.

Таким насправді є повне наукове обґрунтування законів механіки Ньютона, а не чисто ілюстративні за своєю суттю досліди в лабораторії. Таким воно фактично й було у працях Ньютона, хоча й інакше побудованим.

Насамкінець зазначимо, що маси планет значно менші за масу Сонця й тому для зведеної маси  $\mu$  за (3.45) можна написати

$$\mu \approx m_2, \quad (3.60)$$

де  $m_2$  — маса планети. Тому для будь-якої планети (й навіть будь-якого точкового тіла), що рухається в полі Сонця, другий закон Ньютона можна з великою точністю подати у вигляді  $m_2 d\vec{v}/dt = -f(r)\vec{r}/r$ . А якщо підставити сюди ще й (3.59), то

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.61)$$

( $M$  — маса Сонця). Власне кажучи, рівняння (3.61) визначає рух будь-якого точкового тіла в полі точкового джерела маси  $M$ . Як видно (3.61), прискорення  $d\vec{v}/dt$  порівняно малих тіл залежить не від маси останніх, а лише від маси джерела поля (масивного тіла); отже, в гравітаційному полі всі "малі" тіла рухаються з однаковими прискореннями.

Зазначимо, нарешті, що закон гравітації (3.59) було відтворено з законів Кеплера лише по колових орбітах. У свою чергу, разом із законами динаміки Ньютона закон гравітації (3.59) відтворює всі можливі види траєкторій небесних тіл (планет, комет тощо), причому не лише для точкових тіл, а й тіл з довільним розподілом мас. Тобто закон (3.59) дав незрівнянно більше науці, ніж "уз'яв" від неї. Це характерна риса фундаментальних законів.

Розглянемо формальне доведення існування колових орбіт серед множини розв'язків рівняння руху (3.49).

Відповідно до формул (1.26) та (1.21) прискорення  $\vec{a}$  можна розкласти на дотичне й нормальне:

$$\vec{a} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} + \frac{\vec{n}^0}{\rho} v^2. \quad (3.62)$$

Для колових траєкторій, очевидно, можна написати

$$dr/dt = 0; \quad dS = r d\varphi, \quad (3.63)$$

де  $d\varphi$  — відповідний елементарний кут повороту (зробіть рисунок). Очевидно також, що  $\vec{n}^0 = -\vec{r}/r$  і  $|d\vec{r}| = d\varphi$ , оскільки  $|\vec{r}| = r$ . Тому в разі колових орбіт для радіуса кривини (3.22) остаточно матимемо

$$\rho = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right|^{-1} = r. \quad (3.64)$$

І, отже, для  $\vec{a}$  (3.63) справедлива формула

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\tau} \frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.65)$$

Тому векторне рівняння (3.49) розпадається фактично на два числових:

$$dv/dt = 0; \quad \mu(v^2/r) = f(r) = \text{const} \quad (3.66)$$

(див. (3.53)). Суперечностей, як бачимо, немає.

Слід підкреслити лише, що утворення колових орбіт вимагає спеціального добору початкових умов. При радіусі орбіти ( $r = r_0$ ) початкова швидкість  $v_0$  підбирається з таких двох умов:

$$\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0; \quad v_0 = \left\{ \frac{r_0 f(r_0)}{\mu} \right\}^{1/2}.$$

Тоді й на весь подальший час руху виконуватимуться умови (3.66). Отже, припустимі теоретично строго колові орбіти нібито малоймовірні. Проте орбіти, що наближаються до колових, досить поширені у сонячній системі.

### § 3.5. Закон збереження та перетворення енергії системи частинок

Сили взаємодії між частинками системи  $\vec{F}_{ij}$  (3.2) мають здебільшого консервативний характер. Найчастіше в задачах фізики доводиться мати справу з центральними силами<sup>1</sup>, для яких справедливе таке формальне зображення:

<sup>1</sup> Нагадаємо, що центральними називають сили, що діють вздовж лінії, яка сполучає точкові частинки (див. рис. 22).



$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}) = f_{ij}(r_{ij}) \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}. \quad (3.67)$$

Тут

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{i}(x_i - x_j) + \vec{j}(y_i - y_j) + \vec{k}(z_i - z_j); \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|. \quad (3.68)$$

Згідно з доведеннями у § 1.10 центральні сили типу (3.67) завжди потенціальні, тобто завжди існують такі функції  $\Pi_{ij}(r_{ij})$  (потенціальні енергії взаємодії частинок  $i$  та  $j$ ), що

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i \Pi_{ij}(r_{ij}); \quad \Pi_{ij}(r_{ij}) = \int_{r_{ij}}^{\infty} f_{ij}(r) dr, \quad (3.69)$$

де  $\vec{\nabla}_i$  — оператор градієнта за координатами  $i$ -ї частинки  $\{x_i, y_i, z_i\}$  (див. (3.68)). Як приклад, можна взяти гравітаційні сили (3.59), (3.48). Для таких сил дістанемо

$$\Pi_{ij}(r_{ij}) = -\gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}};$$

й, отже,

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i \Pi_{ij}(r_{ij}) = -\gamma \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}.$$

Звертаючись до закону еволюції кінетичної енергії (3.15), з огляду на формули (3.69), маємо

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq j)} -\vec{\nabla}_i \Pi_{ij}(r_{ij}) \vec{v}_{ij} + \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \vec{v}_i. \quad (3.70)$$

Якщо зовнішні сили  $\{\vec{f}_i\}$  також потенціальні, тобто якщо

$$\vec{f}_i = -\vec{\nabla}_i u_i(\vec{r}_i), \quad (3.71)$$

то закон (3.70) набуває вигляду

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_{(i \neq j)} \vec{\nabla}_i \Pi_{ij}(r_{ij}) \vec{v}_{ij} - \sum_{i=1}^n \vec{\nabla}_i u_i(\vec{r}_i) \vec{v}_i. \quad (3.72)$$

Спираючись на (3.70), а далі на (3.72), можна стверджувати:

1) у разі (3.70), запровадивши власну енергію системи за формулою

$$W^0 = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{(i \neq j)} \Pi_{ij}(r_{ij}), \quad (3.73)$$

можна довести, що швидкість її зміни визначається потужністю зовнішніх сил

$$\frac{dW^0}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \vec{v}_i; \quad (3.74)$$

2) у разі (3.72), запровадивши повну енергію за формулою

$$W = W^0 + \sum_{i=1}^n u_i(\vec{r}_i), \quad (3.75)$$

можна довести, що вона зберігається:

$$\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow W = \text{const}. \quad (3.76)$$

Доведення тверджень (3.74) та (3.76) є безпосереднім. Розглянемо його.

Оскільки функції  $\Pi_{ij}(r_{ij})$  залежать від різниць координат  $\{x_i - x_j; y_i - y_j; z_i - z_j\}$  (2.68), то  $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial(x_i - x_j)}$ . Аналогічно за іншими змінними  $(y_i, z_i)$ . Тому за ланцюговим правилом (з урахуванням (3.16)) дістанемо

$$\vec{\nabla}_i \Pi_{ij}(r_{ij}) \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \{ \Pi_{ij}(r_{ij}) \}. \quad (3.77)$$

Використовуючи визначення кінетичної енергії системи  $K$  (3.7), за допомогою (3.70), (3.77) та (3.73) без особливих зусиль матимемо (3.74).

Додавши до наведених вище формул ще одну,

$$\vec{\nabla}_i u_i(\vec{r}_i) \vec{v}_i = \frac{du_i}{dt}, \quad (3.78)$$

легко здобудемо (3.76), що й вимагалось.

Очевидно, формулою (3.76) виражено закон збереження та перетворення механічної енергії для системи з  $n$  частинок, коли внутрішні та зовнішні сили потенціальні (3.69), (3.71). Як і у випадку однієї частинки, повна енергія системи  $W$  (3.75) скла-

дається з кінетичної  $K = \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 / 2$  та потенціальної

$$\Pi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \frac{1}{2} \sum_{(i \neq j)}^n \Pi_{ij}(r_{ij}) + \sum_{i=1}^n u_i(\vec{r}_i) \quad (3.79)$$

енергій. При відсутності зовнішніх сил  $\{\vec{f}_i \equiv \vec{0}\}$ , згідно з (3.74), зберігається також власна енергія системи частинок  $W^0$

$$\frac{dW^0}{dt} = 0 \Rightarrow W^0 = \text{const} . \quad (3.80)$$

Розпишемо власну енергію  $W^0$  для важливого випадку двох частинок:

$$W^0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \Pi_{12}(r_{12}) . \quad (3.81)$$

В теорії зіткнень (зокрема, в теорії прямого співудару кульок) розглядається закон збереження енергії в асимптотичному варіанті, тобто енергії  $W^0$  порівнюють до вступу частинок у взаємодію і після виходу із зони взаємодії (або до і після прямого співударяння). До вступу частинок у взаємодію і після виходу з неї потенціальна енергія взаємодії дорівнює<sup>1</sup>  $\Pi_{12} = 0$ . Тому асимптотично (тобто на достатньо великих відстанях між частинками) закон збереження енергії для двох частинок набуває вигляду

$$\frac{m_1 v_{i0}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2} = \frac{m_1 v_i^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} , \quad (3.82)$$

де  $\vec{v}_{i0}$  — швидкості до вступу частинок у взаємодію, а  $\vec{v}_i$  — після виходу з неї ( $i = 1, 2$ ). Разом із законом збереження імпульсу

$$m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (3.83)$$

асимптотичний закон (3.82) дає змогу визначити кінцеві швидкості частинок  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  за відомими їхніми початковими швидкостями  $\vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}$  та масами  $m_1, m_2$ . На базі сукупності рівнянь (3.82) і (3.83) можна розв'язувати, наприклад, задачі так званого пружного удару. (Рекомендується виконати відповідні обчислення.) Для непружного удару механічний закон (3.82) не діє, оскільки частина механічної енергії переходить у теплоту. Теорія пружного й непружного ударів розглядається майже в усіх вузівських і навіть шкільних підручниках фізики; вона нескладна й тому тут не обговорюється [4].

### § 3.6. Дві міри механічного руху

В § 3.1 доведено, що за відсутності зовнішніх сил сумарний імпульс  $\vec{p}$  системи частинок зберігається

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const} , \quad (3.84)$$

хоча може перерозподілятися між частинками

<sup>1</sup> Так визначають рівень відліку потенціальної енергії.

$$d\vec{p} = \sum_{i=1}^n d\vec{p}_i = \vec{0}. \quad (3.85)$$

Ця обставина й дає підставу розглядати імпульс частинки

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \quad (3.86)$$

як міру її механічного руху.

Імпульс  $\vec{p}_i$  як векторна величина є механічною мірою руху.

Внаслідок закону збереження енергії (3.76) можна запровадити ще одну міру механічного руху — кінетичну енергію частинки

$$K_i = (m_i v_i^2) / 2. \quad (3.87)$$

Проте кінетична енергія (3.86) не повинна зберігатися як така. В еквівалентних кількостях вона може передаватися іншим частинкам або переходити в їхню потенціальну енергію. Закон збереження та перетворення енергії є не тільки механічним. Якщо через  $U$  позначити сукупність немеханічних видів енергії, то закон збереження енергії набуде вигляду

$$K + \Pi + U = \text{const}, \quad (3.88)$$

і тому

$$dK = -d\Pi - dU. \quad (3.89)$$

Отже, кінетична енергія  $K$  є такою мірою механічного руху, яка служить *розмінним еквівалентом* при переході в інші (у тому числі немеханічні) види енергії.

Як більш універсальна міра, значення якої виходить за межі механіки, кінетична енергія є скаляром, а не вектором.

Існує, щоправда, ще одна міра механічного руху частинки — момент її імпульсу

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]. \quad (3.90)$$

Вона відіграє особливу роль у теорії обертального руху, про який мова попереду.

### § 3.7. Енергія частинки в полі гравітації. Потенціал поля

На прикладі руху частинки в гравітаційному полі обчислимо потенціальну й повну енергії частинки. За законом всесвітнього тяжіння Ньютона, записаним у векторній формі, тіло з масою  $M$  діє на тіло з масою  $m$  з силою

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.91)$$

Тут  $\vec{r}$  — радіус-вектор, проведений від частинки  $M$  до частинки  $m$ . (Частинки слід вважати точковими або ж однорідними кульками; в останньому випадку  $r$  — це відстань між центрами кульок.) Гравітаційні сили (3.91) мають центральний характер, причому за  $f(r)$  править функція  $f(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2}$ .

Згідно з § 2.10 центральні сили такого типу завжди потенціальні, причому

$$\Pi(r) = \int_r^{\infty} f(r') dr' . \quad (3.92)$$

Підставляючи  $f(r)$  у (3.92) й обчислюючи інтеграл, дістанемо для потенціальної енергії  $\Pi(r)$  частинки  $m$  у гравітаційному полі частинки  $M$  вираз

$$\Pi(r) = -\gamma(mM/r) . \quad (3.93)$$

Зручним у теорії є так званий потенціал гравітаційного поля  $G(r)$ :

$$G(r) = \frac{1}{m} \Pi(r) = -\gamma(M/r) . \quad (3.94)$$

Потенціал  $G(r)$  чисельно дорівнює потенціальній енергії частинки одиничної маси ( $m = 1$ ). Знаючи потенціал  $G(r)$ , можна визначити потенціальну енергію будь-якої частинки з масою  $m$ :

$$\vec{\Pi}(r) = \vec{m}G(r) . \quad (3.95)$$

Оскільки цей потенціал містить масу лише частинки — джерела поля  $M$ , то він і характеризує поле саме цієї частинки  $M$ . На відміну від потенціалу  $G(r)$  потенціальна енергія  $\Pi(r)$  містить маси обох частинок, і, отже, є фактично енергією їх взаємодії.

Повна енергія частинки з масою  $m$  у гравітаційному полі частинки з масою  $M$  дорівнює

$$W = \frac{mv^2}{2} + mG(r) = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} . \quad (3.96)$$

Отже, закон збереження енергії частинки  $m$  у гравітаційному полі частинки  $M$  набуває вигляду

$$W(r, v) = \frac{mv^2}{2} + mG(r) = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} = \text{const} . \quad (3.97)$$

Зрозуміло, що масу частинки  $M$  треба вважати значно більшою за масу частинки  $m$  ( $M \gg m$ ), щоб важку частинку можна було прийняти за нерухому.

Вважатимемо Землю точною кулею дуже великого (у порівнянні з частинкою біля її поверхні) радіуса. Частинку  $m$  візьмемо за точкову. Нехай Земля має радіус  $R$  і масу  $M$ , а частинка з масою  $m$  знаходиться на відстані  $r$  від центра Землі, причому

$$r = R + h; \quad h \ll R. \quad (3.98)$$

Тоді на частинку  $m$  з боку Землі діє сила притягання, що чисельно дорівнює

$$F = \gamma \frac{mM}{(R + h)^2} = \gamma \frac{mM}{R^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx \gamma \frac{mM}{R^2} = \text{const}. \quad (3.99)$$

Отже, поки висота частинки над Землею  $h$  значно менша за радіус Землі  $R$ , силу притягання частинки до Землі можна вважати сталою. За другим законом Ньютона  $F = mg$ . Тому за (3.99)

$$g = \gamma M / R^2 = \text{const}, \quad (3.100)$$

де  $g$  — прискорення вільного падіння тіл поблизу земної поверхні. Оскільки ж радіус Землі  $R$  дуже великий порівняно навіть з висотою хмарочоса  $h$ , прискорення  $g$  можна вважати сталим до досить значних висот.

Спираючись на закон збереження енергії (3.97) у полі сил гравітації, можна визначити так звані космічні швидкості (першу, другу, третю). (Питання невагомості та космічних швидкостей висвітлено у праці [4].)

## Глава 4

### ПОНЯТТЯ ПРО РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА. ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ

#### § 4.1. Основи динаміки обертального руху навколо нерухомої осі

У курсі загальної фізики вивчають лише ті елементи механіки об'ємних тіл, які з фізичного погляду мають принциповий характер. Що ж до загальної теорії руху твердого тіла, то вона математично дуже складна й є предметом теоретичної механіки, теорії пружності тощо.

Якщо за умов задачі деформацією<sup>1</sup> тіла під дією сил можна знехтувати, то користуються абстракцією абсолютно твердого тіла. Абсолютно тверде тіло формально характеризується тим,

<sup>1</sup> Умови деформовності тіл відносні й різні для різних тіл.

що відстані між довільними двома точками такого тіла залишаються незмінними під дією заданих сил. За таких умов не змінюються також кути між довільними прямими, що перетинаються в тілі й проходять через фіксовані в ньому точки; не змінюється і об'ємний розподіл в тілі мас.

Певне уявлення про особливості руху твердих тіл дає вивчення так званих плоских рухів, на яких ми й сконцентруємо свою увагу. *Плоским рухом* об'ємного тіла називають такий рух, коли траєкторії всіх точок тіла є плоскі криві, що весь час лежать у площинах, паралельних деякій фіксованій площині — "площині руху". Для вивчення особливостей плоского руху тіла досить розглянути рух певного його перерізу, паралельного згаданій площині руху.

Плоский рух завжди можна розбити на два елементи: поступальний та обертальний рухи.

*Поступальний* — такий рух, коли довільна пряма, що з'єднує дві фіксовані точки тіла, під час руху залишається паралельною своєму вихідному (початковому) положенню.

*Обертальний* — це рух, коли траєкторії всіх точок тіла, що здійснюють плоский рух, — концентричні кола у площинах, паралельних "площині руху" (див. вище).

Доведемо, що плоский рух дійсно розбивається на поступальний та обертальний; причому вісь обертання можна обрати довільно, не змінюючи кутової швидкості обертання.

Перерізи деякого тіла площиною руху у початковий  $t_0$  та кінцевий  $t$  моменти часу зображено на рис. 23.

Для визначення розташування та орієнтації тіла відносно площини руху в тілі фіксуються дві точки, сполучені відрізками прямої, що спершу займає положення  $A_0B_0$ , а через проміжок часу  $\Delta t = (t - t_0)$  —  $AB$ . Кінцевого положення  $AB$  тіло може досягти у два етапи, причому багатьма способами, два з яких зображено на рисунку: спочатку поступально у положення  $A'B$ , а після того — поворотом на кут  $\Delta\varphi$  навколо точки  $B$ ; або ж поступально у положення  $AB$ , а далі поворотом на той самий кут  $\Delta\varphi$  навколо точки  $A$ . (Можна було б спочатку пересунути тіло так, щоб наприкінці поступального етапу правильне кінцеве положення зайняла б якась середня точка  $C$  відрізка  $AB$ , а далі докрутити тіло на той самий кут  $\Delta\varphi$  навколо вже точки  $C$ . І так далі. Рекомендуємо зробити самостійно відповідне креслення.

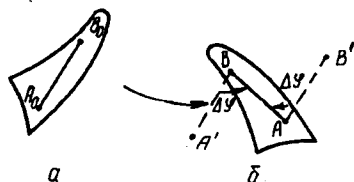


Рис. 23

Справжній рух міг бути одночас-

но поступально-обертальним, причому положення осі обертання можна обирати довільно, не змінюючи кутової швидкості обертання

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} . \quad (4.1)$$

Отже, доведено можливість розбити плоский рух на поступальний і обертальний (навколо довільної осі) із заданою кутовою швидкістю  $\omega$ .

Якщо рух не плоский, то його можна розбити на поступальний та обертальний одночасно навколо двох осей (або такої однієї миттєвої осі, яка весь час змінює свою орієнтацію у просторі). Це ускладнює математичний опис руху, але в принципі ситуація багато в чому аналогічна плоскому варіанту.

У курсі загальної фізики поступальний та обертальний рухи вивчаються здебільшого окремо; при цьому розглядається, як правило, обертальний рух навколо нерухомої осі. До вивчення такого руху й переходимо.

Обертальний рух навколо фіксованої у просторі осі досить чітко демонструє ряд важливих особливостей обертання, що мають принциповий і прикладний характер (зокрема, в теорії машин та механізмів, гіроскопів тощо).

Тіло, що може вільно обертатися навколо фіксованої осі  $AB$ , зображено на рис. 24. В основу теорії обертального руху навколо фіксованої осі можна покласти закон еволюції моменту імпульсу системи (див. (3.12)), що впливає з другого й третього законів Ньютона. Нагадаємо, що з закону еволюції моменту імпульсу вилучаються сили взаємодії між елементами системи (внутрішні сили). Отже, при складанні відповідних рівнянь їх можна не враховувати. Це твердження — одне з основних у динаміці обертального руху, що ґрунтується на постульованій аналогії між сукупністю елементарних частин маси  $dm$ , на які можна розбити об'ємне тіло, і системою точкових частинок, динаміку якої було розглянуто в попередній главі. Такий постулат і береться за основу, оскільки він підтвердився узгодженням усіх висновків з нього з експериментом.

Введемо деякі поняття, необхідні в теорії руху твердих тіл.

Перш за все, визначимо *густину речовини*  $\rho(\vec{r})$ . Виділимо в тілі деякий елементарний об'єм  $dV$  (див. рис. 24), що містить масу  $dm$ . *Густиною речовини* в точці з радіусом-вектором  $\vec{r}$  називають ліміт

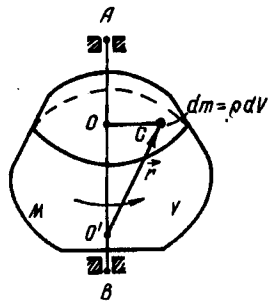


Рис. 24



$$\rho(\vec{r}) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV}. \quad (4.2)$$

(Елемент об'єму  $dV$  стягується до точки  $\{\vec{r}\}$ .) Якщо (4.2) — відома густина  $\rho(\vec{r})$ , то можна визначити масу елементарного  $dV$  і повного  $V$  об'ємів тіла. Відповідно матимемо

$$dm = \rho(\vec{r})dV; \quad M = \int_{(V)} dm = \int_{(V)} \rho(\vec{r})dV. \quad (4.3)$$

( $\int \dots dV$  — інтеграл (нескінченна сума безмежно малих доданків) по всьому об'єму тіла  $V$ ).

Оскільки на тіло можуть діяти зовнішні сили, прикладені не лише до його поверхні, але й до кожного внутрішнього елемента<sup>1</sup> його об'єму  $dV$ , слід запровадити так звану густину розподілених по об'єму зовнішніх сил  $\vec{f}(\vec{r})$  у кожній точці тіла. Об'ємна густина  $\vec{f}(\vec{r})$  розподілених сил визначається за формулою

$$\vec{f}(\vec{r}) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dV}, \quad (4.4)$$

де  $d\vec{F}$  — рівнодійна сил, прикладених до елемента маси  $dm$ , що міститься в об'ємі  $dV$ . З (4.4) випливають формули для елементарної  $d\vec{F}$  і повної  $\vec{F}$  рівнодійних розподілених (по об'єму тіла) сил при заданій їх густині  $\vec{f}(\vec{r})$

$$d\vec{F} = \vec{f}(\vec{r})dV; \quad \vec{F} = \int_{(V)} d\vec{F} = \int_{(V)} \vec{f}(\vec{r})dV. \quad (4.5)$$

Користуючись введеними величинами, сконструюємо елементарний  $d\vec{L}$  і повний  $\vec{L}$  моменти імпульсу тіла. Для елементарних імпульсу  $d\vec{p}$  і моменту імпульсу  $d\vec{L}$  маємо

$$d\vec{p} = dm\vec{v}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})dV; \quad (4.6)$$

$$d\vec{L} = [\vec{r}, d\vec{p}] = \rho(\vec{r}) [\vec{r}, \vec{v}(\vec{r})] dV, \quad (4.7)$$

де  $\vec{v}(\vec{r})$  — лінійна швидкість точки тіла (в межах об'єму  $dV$ ), що визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$ . Для повного моменту імпульсу  $\vec{L}$  матимемо

$$\vec{L} = \int_{(V)} d\vec{L} = \int_{(V)} \rho(\vec{r}) [\vec{r}, \vec{v}(\vec{r})] dV. \quad (4.8)$$

Аналогічно визначаються елементарний та повний моменти розподілених сил

<sup>1</sup> Гравітаційні або електростатичні сили тощо.

$$d\vec{M} = [\vec{r}, d\vec{F}] = [\vec{r}, \vec{f}(\vec{r})] dV; \quad (4.9)$$

$$\vec{M}_0 = \int_{(V)} d\vec{M} = \int_{(V)} [\vec{r}, \vec{f}(\vec{r})] dV. \quad (4.10)$$

Крім розподілених по об'єму, на тіло можуть діяти ще розподілені по його поверхні та сконцентровані в окремих її точках зовнішні сили. Не вдаючись до деталей, введемо сумарний момент таких сил  $\vec{M}_\Sigma$  ( $\Sigma$  — поверхня тіла). Тоді разом з (4.10) момент  $\vec{M}_\Sigma$  становитиме повний момент  $\vec{M}$  прикладених до тіла сил

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_\Sigma = \int_{(V)} [\vec{r}, \vec{f}(\vec{r})] dV + \vec{M}_\Sigma. \quad (4.11)$$

До складу  $\vec{M}$  (у разі потреби) слід включити також моменти реакцій накладених на тіло зв'язків (наприклад, реакцію підшипників, на яких закріплено вісь обертання (див. рис. 24)).

За аналогією з динамікою системи матеріальних точок постулюємо рівняння еволюції повного моменту імпульсу  $\vec{L}$  тіла у вигляді

$$d\vec{L} / dt = \vec{M}, \quad (4.12)$$

де  $\vec{L}$  та  $\vec{M}$  визначаються за формулами (4.8) та (4.11). (Як бачимо, (4.11) містить лише внески в  $\vec{M}$  від зовнішніх сил.) Рівняння (4.12) і буде основним у теорії обертального руху тіла навколо нерухомої осі. Воно перевірено практикою.

Для руху навколо фіксованої осі можна без особливих зусиль позбутися реакцій зв'язків (підшипників). Відповідні міркування наведемо нижче. З них впливатиме, що обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі може бути описаний одним скалярним рівнянням, що має вигляд

$$\frac{d}{dt} \{J\omega\} = M, \quad (4.13)$$

де  $J$  — момент інерції тіла;  $\omega$  — кутова швидкість обертання;  $M$  — крутильний момент зовнішніх сил.

Перш ніж довести закон (4.13), розшифруємо величини  $J$  та  $M$ . Елементарний  $dJ$  та повний  $J$  моменти інерції визначаються за формулами

$$dJ = r'^2 dm = r'^2 \rho(\vec{r}) dV; \quad J = \int_{(V)} r'^2 \rho(\vec{r}) dV \quad (4.14)$$

( $r'$  — відстань елемента маси  $dm$  від осі обертання  $r' \equiv OC$  (див. рис. 24)).

Для елементарного  $dM$  і повного  $M$  крутильного моментів маємо

$$dM = r' dF_t = f_t(\vec{r}') r' dV; \quad M = \int_{(V)} f_t(\vec{r}') r' dV, \quad (4.15)$$

де  $dF_t$  — проекція сили  $d\vec{F}$  (і відповідно її густини  $\vec{f}(\vec{r})$ ) на напрям обертання, тобто на вектор лінійної швидкості обертання  $\vec{v}(\vec{r})$  елемента<sup>1</sup>  $dm$ .

Обґрунтуємо основне рівняння (4.13) обертального руху тіл навколо нерухомої осі. Тіло з фіксованою віссю обертання має лише одну ступінь вільності — кут повороту  $\varphi$  навколо осі. Отже, взявши до уваги зв'язки (тобто підшипники), що обмежують рух, замість векторного рівняння (4.12) (трикомпонентного) можна перейти до скалярного (однокомпонентного).

Справді, скориставшись виділеним напрямом — віссю обертання  $AB$  — спроєкуємо обидві частини рівняння (4.12) на цей напрям, взятий за вісь  $O'z$ . Початок координат  $O'$  приймемо за точку прив'язки всіх величин, зокрема радіуса-вектора  $\vec{r} = O'\vec{C}$ . Елемент тіла  $dm$  з усіма допоміжними атрибутами зображено на рис. 25: сумарна зовнішня сила  $d\vec{F}$ , прикладена до  $dm$ , та її три складові (вздовж осі  $O'z$  ( $d\vec{F}_z$ ), радіуса  $\vec{r}' = O\vec{C}$  ( $d\vec{F}_r$ ) та дотичної до траєкторії ( $d\vec{F}_t$ )) (б — вигляд згори). Без особливих пояснень зрозуміло, що дія складових  $d\vec{F}_z$  та  $d\vec{F}_r$  компенсується реакцією зв'язків, оскільки вісь обертання  $AB$  жорстко фіксована підшипниками за умовою задачі.

Не компенсованою зв'язками є лише тангенціальна складова  $d\vec{F}_t$ , яка й спричиняє обертання тіла. Обертальний момент  $d\vec{M}_{O'}$ , що відповідає складовій сили  $d\vec{F}_t$ , дорівнює

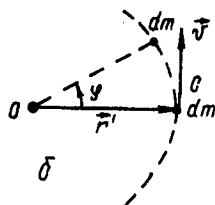
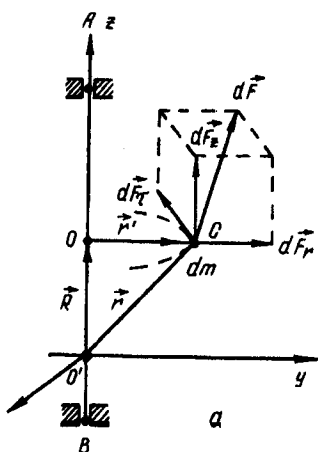


Рис. 25

<sup>1</sup> У формулі (4.15) для спрощення свідомо не дописано крутильний момент поверхневих сил (включаючи сконцентровані). Коли вони є, їх треба враховувати.

$$d\vec{M}_{06} = [\vec{r}, d\vec{F}_t] = [\vec{R}, d\vec{F}_t] + [\vec{r}', d\vec{F}_t]. \quad (4.16)$$

Як видно з рисунка, доданок  $[\vec{r}', d\vec{F}_t]$  складає прямий кут з віссю  $O'_z$  і тому його проекція на вісь дорівнює нулю. Другий доданок  $[\vec{R}, d\vec{F}_t]$  паралельний осі  $O'_z$  і тому

$$(d\vec{M}_{06})_z = [\vec{r}', d\vec{F}_t]_z = r' dF_t = r' f_t(\vec{r}) dV, \quad (4.17)$$

де  $dF_t$  та  $f_t(\vec{r})$  — проекції векторів  $d\vec{F}_t$  та  $\vec{f}_t(\vec{r})$  на дотичну до кола обертання елемента  $dm$ . Очевидно, за (4.12) матимемо

$$\frac{dL_z}{dt} = \int_{(V)} \vec{r} f_t(\vec{r}) dV + M_{\Sigma z} = M. \quad (4.18)$$

Але

$$L_z = \int_{(V)} dL_z = \int_{(V)} r' \vartheta(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV, \quad (4.19)$$

( $\vartheta(\vec{r})$  — лінійна швидкість обертання елемента маси  $dm$ ). Оскільки єдиною для тіла є кутова швидкість, а не лінійна, зручно перейти саме до кутової швидкості  $\omega = d\varphi/dt$ :

$$\vartheta(\vec{r}) = r' \omega. \quad (4.20)$$

Кутова швидкість  $\omega$  для абсолютно твердого тіла не залежить від координат. Тому за (4.19), (4.20)

$$L_z = J\omega, \quad (4.21)$$

де введено так званий момент інерції

$$J = \int_{(V)} r'^2 \rho(\vec{r}) dV. \quad (4.22)$$

Отже, основний закон обертального руху навколо фіксованої осі (4.13) доведено.

У виразі (4.13) основний закон має сенс не лише для зовсім твердого тіла, але й для такого, що може видовжуватися чи скорочуватися у радіальному напрямі. Це неважко встановити, ще раз переглянувши доведення основного закону (4.13). Якщо ж тіло дійсно абсолютно тверде, то  $J$  — стала величина ( $dJ/dt = 0$ ), і закон (4.13) набуде вигляду

$$J\varepsilon = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M. \quad (4.23)$$

Тут  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  — кутове прискорення.

Уважний аналіз спрощеного доведення закону (4.13), (4.23), що базується на безпосередньому використанні другого закону Ньютона ( $m\vec{a} = \vec{F}$ ) з додатковим урахуванням кінематики обертального руху, показує, що дане доведення є непослідовним і містить логічні неточності. Таке спрощення не можна визнати правомірним; подібні обчислення не можуть гарантувати правильного результату. Простота виявляється уявною. До того ж, наведене вище доведення рівняння (4.13) пов'язує закон еволюції моменту імпульсу системи частинок  $\vec{L}$  (див. (3.12)) з обертальним рухом. Фундаментальне значення даного факту розкриває загальна теорія руху твердого тіла і, зокрема, теорія гіроскопів. З цього приводу можна порекомендувати, наприклад, праці [10, 32, 42].

## § 4.2. Інерція та енергія обертання

Для стислості викладу назвемо проекцію моменту імпульсу  $L_z = J\omega$  на вісь обертання просто *моментом обертання*. Згідно з (4.13), (4.23) швидкість зміни моменту обертання  $dL_z/dt$  визначається обертальним моментом сили  $M$  (4.18). Якщо цей останній дорівнює нулю, то момент обертання зберігається:

$$J\omega = J_0\omega_0 = \text{const.} \quad (4.24)$$

У цьому виявляє себе *інерція* обертального руху: без зовнішніх впливів тіло, що обертається, буде обертатися вічно. Проте це не означає, що неодмінно зберігатиметься його кутова швидкість  $\omega$ , оскільки момент інерції  $J$  тіла, яке може видовжуватися у радіальному напрямку, може змінюватися. Зберігається саме добуток<sup>1</sup>  $J\omega$ . Якщо ж  $J = \text{const}$ , то й  $\omega = \text{const}$ .

Спираючись на закон (4.13), можна довести, що:

1) елементарна робота зовнішніх сил  $\delta A$  дорівнює добуткові їх обертального моменту  $M$  на кут повороту тіла  $d\varphi = \omega dt$ , тобто

$$\delta A = M d\varphi; \quad (4.25)$$

2) кінетична енергія  $K$  тіла, що обертається,

$$K = (J\omega^2) / 2, \quad (4.26)$$

причому

$$dK = \delta A. \quad (4.27)$$

Доведемо ці твердження.

Домножимо (4.13) на  $d\varphi = \omega dt$ . Дістанемо (при умові  $J = \text{const}$ ), що

$$J\omega d\omega = M d\varphi. \quad (4.28)$$

<sup>1</sup> У загальному випадку момент  $J$  може змінюватися внаслідок зміни форми, розмірів тіла або розподілу мас у ньому.

Для абсолютно твердого тіла, коли дійсно  $J = \text{const}$ , з (4.28) випливає

$$d\left\{\frac{J\omega^2}{2}\right\} = Md\varphi. \quad (4.29)$$

Залишилося ототожнити  $J\omega^2/2$  з кінетичною енергією  $K$  тіла, що обертається, а  $Md\varphi$  — з елементарною роботою  $\delta A$  зовнішніх сил. За допомогою (4.17) і (4.18) маємо

$$Md\varphi = \int_{(V)} dF_r ds, \quad (4.30)$$

де враховано, що  $ds = r'd\varphi$  — елемент дуги, описаної елементом маси  $dm$  при повороті тіла на кут  $d\varphi$ . Оскільки  $dF_r$  — проекція зовнішньої сили на напрям руху елемента<sup>1</sup>  $dm$ , на який вона діє, дійдемо висновку, що  $Md\varphi$  — дійсно елементарна робота зовнішніх сил, які діють на тіло:  $Md\varphi = \delta A$ .

Перейшовши до  $J\omega^2/2$ , відповідно до (4.22) матимемо

$$J\omega^2/2 = \int_{(V)} (dm v^2) / 2, \quad (4.31)$$

оскільки  $r'\omega = v$  — лінійна швидкість руху елемента маси  $dm$ . Отже, інтеграл (4.31) — це повна кінетична енергія  $K$  тіла, що обертається:  $K = J\omega^2/2 = \int_{(V)} (dmv^2)/2$ .

Усі твердження доведено.

Для одновимірного руху матеріальної точки на підставі порівняння другого закону Ньютона  $m(dv/dt) = F$  з основним законом обертального руху абсолютно твердого тіла навколо нерухомої осі (4.23)  $J(d\omega/dt) = M$ , а також порівнянь співвідношень, що випливають з наведених формул, можна встановити формальну тотожність між ними, корисну при розв'язуванні задач.

Розгляд прикладів розрахунку моменту інерції  $J$  не становить принципових проблем [9, 10, 36, 42].

<sup>1</sup> Інтеграл — сумарна робота над усіма фрагментами  $dm$  тіла.

## ЕЛЕМЕНТИ ДИНАМІКИ ТІЛ ЗМІННОЇ МАСИ. РЕАКТИВНИЙ РУХ

### § 5.1. Рівняння Мещерського

Теорія реактивного руху, що лежить а основі ракетобудування, літакобудування та ряду інших галузей техніки, ґрунтується на законах динаміки тіл змінної маси. Розглянемо лише принципові елементи динаміки тіл змінної маси, причому в умовах, коли розмірами розглядуваного тіла можна знехтувати. Отже, обговорюватимемо лише закони динаміки точкових тіл змінної маси. В основі її лежить рівняння Мещерського, що базується на законі збереження імпульсу системи та додаткових гіпотезах. Воно узагальнює закони Ньютона у разі, коли маса тіла залежить від часу  $t$ , і знайшло експериментальне підтвердження в тому, що технічні висновки, зроблені за його допомогою, узгоджуються з практикою. При сталій масі рівняння Мещерського повертає нас до рівнянь Ньютона.

Спіраючись на закон збереження імпульсу системи (що випливає з законів Ньютона), принцип незалежності дії сил та гіпотезу про контактну взаємодію (пояснення подамо далі), покажемо, що рух частинки змінної маси  $M = M(t)$  відбувається за законом (рівнянням) Мещерського

$$M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dM}{dt} (\vec{u} - \vec{v}), \quad (5.1)$$

де  $\vec{v}$  — швидкість<sup>1</sup> частинки змінної маси;  $\vec{u}$  — швидкість струменя маси, що відокремлюється від частинки (безпосередньо поблизу сопла витоків);  $\vec{F}$  — зовнішня сила, прикладена до частинки  $M(t)$ , що розглядається (наприклад, сила притягання до Землі).

Перед тим як перейти до міркувань, що ведуть до рівняння Мещерського (5.1), пояснимо наведені вище вихідні припущення. Почнемо з принципу незалежності дії сил.

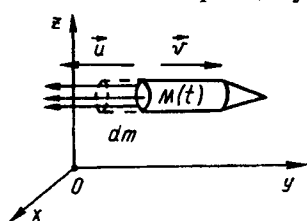


Рис. 26

За другим законом Ньютона ( $m\vec{a} = \vec{F}$ ) вектори прискорення  $\vec{a}$  й сили  $\vec{F}$  пропорційні між собою. Отже, сумарне прискорення  $\vec{a}$ , що виникає під дією векторної суми сил  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , дорівнює сумі прискорень

<sup>1</sup> Обидві швидкості  $\vec{v}$  та  $\vec{u}$  віднесено до нерухомої системи відліку (рис. 26).

$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$ , породжених окремими складовими  $\{\vec{F}_i\}$ :  $\vec{a}_i = \vec{F}_i/m$ .

Те саме стосується й зміни повного імпульсу  $\vec{p}$  системи<sup>1</sup>

$$\Delta \vec{p} = \sum_{i=1}^n \Delta \vec{p}_i, \quad (5.2)$$

де

$$\Delta \vec{p}_i = \vec{F}_i dt = \Delta \vec{P}_i. \quad (5.3)$$

Саме цей факт і названо *принципом незалежності дії сил*: ефект (результат дії) сумарної сили можна визначити, знайшовши результат дії окремих її складових й утворивши векторну суму результатів.

*Контактною* називають взаємодію тіл, яка має місце лише під час прямого їх контакту й зникає після виходу їх з останнього. Вважатимемо, що відокремлена від тіла за час  $dt$  маса  $dm$  взаємодіє з цим тілом лише в момент її витікання за межі тіла, тобто взаємодія тіла  $M(t)$  із струменем маси, що з нього витікає, буде *контактною*.

Отже, вважатимемо, що приріст імпульсу тіла змінної маси  $M(t)$ , що досліджується, відбувається під впливом двох незалежних факторів: контактної дії струменя маси, що витікає, і дії зовнішніх сил  $\vec{F}(t)$ .

Перейдемо до обґрунтування рівняння Мещерського (5.1).

Нехай за час  $dt$  потоком речовини, що залишає тіло, виноситься маса

$$dm = -dM(t). \quad (5.4)$$

Зосередимося спочатку на зміні швидкості руху ( $d\vec{v}_1$ ) тіла  $M(t)$ , яка відбувається під контактною дією маси  $dm$ , що витікає, а потім під дією зовнішньої сили  $\vec{F}-(d\vec{v}_2)$ . Внаслідок принципу незалежності дії сил сумарну зміну швидкості  $d\vec{v}$  знайдемо векторним додаванням парціальних змін

$$d\vec{v} = d\vec{v}_1 + d\vec{v}_2. \quad (5.5)$$

Постульований контактний характер взаємодії між  $M(t)$  і  $dm$  дає змогу для підрахунку  $d\vec{v}_1$  використати закон збереження імпульсу у формі, подібній до теорії пружного співудару двох тіл. Матимемо

<sup>1</sup> Тут індекс  $i$  визначає не частинки системи, а парціальні вклади від складових  $\vec{F}_i$  сили  $\vec{F}$ .



$$\{M(t) + dM\}(\vec{v} + d\vec{v}_1) + dm\vec{u} = M(t)\vec{v}. \quad (5.6)$$

Звідси, враховуючи (5.4) та нехтуючи членами другого порядку мализни<sup>1</sup>, дістанемо

$$d\vec{v}_1 = \frac{1}{M(t)} (\vec{u} - \vec{v}) dM. \quad (5.7)$$

Що ж до  $d\vec{v}_2$ , то справедливим буде твердження

$$d\vec{v}_2 = (\vec{F}(t)/M(t))dt. \quad (5.8)$$

Підсумовуючи прирости  $d\vec{v}_1$  та  $d\vec{v}_2$  й відносячи їх до одиниці часу, дістаємо

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{M(t)} \left\{ \vec{F}(t) + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt} \right\}, \quad (5.9)$$

звідки й випливає рівняння Мещерського (5.1). Коли маса не залежить від часу ( $M(t) = m = \text{const}$ ), рівняння Мещерського переходить у рівняння Ньютона  $m d\vec{v}/dt = \vec{F}$ , як і слід було чекати.

Подано рівняння Мещерського (5.1) ще в двох варіантах, зручних для різних задач.

Введемо відносну швидкість витікання маси

$$\vec{V} = \vec{u} - \vec{v}. \quad (5.10)$$

Вона визначає швидкість струменя речовини по відношенню до тіла  $M(t)$ , що розглядається (скажімо, ракети). Тоді можна записати

$$\frac{dM}{dt} (\vec{u} - \vec{v}) = \frac{dM}{dt} \vec{V} \equiv \vec{\Phi}. \quad (5.11)$$

Величина  $\vec{\Phi}$  дістала назву *реактивної сили*, що діє на тіло, крім зовнішньої сили  $\vec{F}$ . З формули (5.11) випливає, що реактивна сила  $\vec{\Phi}$  визначається зміною маси за одиницю часу  $dM/dt$  і відносною швидкістю струменя маси  $\vec{V}$ . Отже, рівнянню (5.1) можна надати вигляду

$$M(d\vec{v}/dt) = \vec{F} + \vec{\Phi}. \quad (5.12)$$

Перенесемо доданок  $(dM/dt)\vec{v}$  ліворуч у рівності (5.1). Дістанемо ще один варіант рівняння Мещерського

$$\frac{d}{dt} \{M(t)\vec{v}(t)\} = \vec{F} + \frac{dM}{dt} \vec{u}. \quad (5.13)$$

<sup>1</sup> Ці члени зникають при обчисленні парціального прискорення:  $\vec{a}_1 = d\vec{v}_1/dt$ .

Відносна швидкість витікання маси  $\vec{V}$  на значних ділянках шляху ракети чи реактивного літака може бути сталою величиною. Це спрощує розв'язання задач про рух літальних апаратів на базі рівняння Мещерського у формі (5.12) (Особливо, якщо задано швидкість втрати маси  $dM/dt$ .)

Два простих приклади застосування рівняння Мещерського (5.1) — дві задачі Ціолковського — можна знайти в працях [19, 42], а в скороченому вигляді — у § 5.2.

## § 5.2. Дві задачі Ціолковського

Для ілюстрації застосування рівняння Мещерського до розв'язання задач реактивного руху розглянемо одновимірний рух тіла в пустоті при відсутності зовнішніх сил ( $\vec{F} = \vec{0}$ ). Це й буде *перша задача Ціолковського*. У ній додатково сприймається, що витікання речовин відбувається зі сталою швидкістю ( $\vec{V} = \text{const}$ ) у бік, строго протилежний рухові тіла (тобто  $\vec{V} \uparrow \downarrow \vec{v}$ , де  $\vec{v}$  — швидкість тіла  $M(t)$ ). При таких умовах рівняння Мещерського (5.1) набуває скалярної форми

$$M(dv/dt) = -V \left( \frac{dM}{dt} \right). \quad (5.14)$$

Звідси

$$dv = -V \left( \frac{dM}{M} \right). \quad (5.15)$$

Нехай задано закон зміни маси

$$M = M_0 f(t), \quad (5.16)$$

де  $f(t)$  — відома безрозмірна функція часу, що задовольняє умову  $f(0) = 1$ . Інтегруючи (5.15), дістаємо

$$v = v_0 - V \ln f = v_0 + V \ln(M_0/M), \quad (5.17)$$

тут  $v_0$  — початкова швидкість ( $v_0 = v(0)$ ). Формула (5.17) вперше одержана Ціолковським і названа його ім'ям.

Нехай маса палива  $m$ , маса ракети без палива —  $M_p$ . Тоді початкова маса заправленої паливом ракети

$$M_0 = M_p + m. \quad (5.18)$$

Якщо початкова швидкість ракети  $v_0 = 0$ , то за формулою (5.17) після повного вигорання (і викиду) палива ракета матиме швидкість

$$v = V \ln \left( \frac{M_p + m}{M_p} \right). \quad (5.19)$$

Оскільки логарифм — це функція, що зростає досить повільно, для збільшення кінцевої швидкості  $v$  ракети вигідніше збільшувати швидкість витоку маси  $V$ , аніж саму масу палива  $m$ .

Для детальнішого обговорення першої задачі Ціолковського можна запропонувати [19].

Розглянемо другу задачу Ціолковського. Нехай точка змінної маси  $M(t)$  рухається вертикально вгору в однорідному полі сили тяжіння

$$P = -Mg, \quad (5.20)$$

а відносна швидкість витоку маси  $V$  — стала величина ( $V = \text{const}$ ). Тоді рівняння Мещерського (5.1) знову можна подати у скалярній формі

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg + V \frac{dM}{dt}, \quad (5.21)$$

або з урахуванням (5.16)

$$\frac{dv}{dt} = -g - V \frac{d}{dt} (\ln f(t)). \quad (5.22)$$

Звідси

$$\frac{d}{dt} \{v + V \ln f(t)\} = -g. \quad (5.23)$$

І остаточно

$$v = v_0 - gt + V \ln(M_0 / M). \quad (5.24)$$

Інтегруючи (5.24), дістанемо висоту підйому ракети  $h(t)$  над поверхнею Землі ( $h(0) = 0$ ) у вигляді

$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} - V \int_0^t \ln f(\tau) d\tau. \quad (5.25)$$

Нехай тепер маса заправленої ракети спадає за експоненційним законом

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad (\alpha > 0). \quad (5.26)$$

Тоді

$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{\alpha V}{2} t^2. \quad (5.27)$$

Якщо ж маса заправленої ракети спадає за лінійним законом

$$f(t) = 1 - \alpha t, \quad (5.28)$$

то

$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} + \frac{V}{\alpha} \{ (1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) + \alpha t \}. \quad (5.29)$$

У першому випадку (5.26) для максимальної висоти польоту, на якій  $v = 0$ , дістанемо

$$v_0 - gt_{\max} + \alpha V t_{\max} = 0. \quad (5.30)$$

Отже, підйом припиниться в момент часу

$$t_{\max} = v_0 / (g - \alpha V). \quad (5.31)$$

Вигляд форм для швидкості (5.24) і висоти (5.25) у разі (5.26) такий, ніби зменшилося земне прискорення  $g$  на величину  $\alpha V$ :

$$g \rightarrow g - \alpha V. \quad (5.32)$$

Це зменшення зумовлене реактивною тягою, створюваною за умов витоку (5.26). Детальніше дану задачу розглянуто в [19].

## Глава 6

### МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

#### § 6.1. Гармонічні коливання частинок

Колівальні й хвильові процеси дуже поширені в природі й техніці і тому розглядаються у багатьох розділах фізики та інших природничих і технічних наук. Незалежно від фізичної природи математичний опис коливань та хвиль багато у чому універсальний, однаковий для різноманітних фізичних процесів (механічних, електромагнітних тощо). Теоретичний перехід від колівально-хвильових явищ одної фізичної природи до іншої загалом зводиться часто лише до заміни позначень. Тому матеріал, що розглядається нижче, хоча й пов'язаний з механікою, становить більший науковий інтерес і потребує глибокого вивчення. Одночасно слід звернути увагу на математичну простоту трактування цілком реалістичних задач. Деякі початкові труднощі (пов'язані швидше з обсягом, ніж зі складністю матеріалу) окупаються науковою поширеністю методів опису колівальних процесів, які вивчаються не лише в фізиці, але й в багатьох інженерно-технічних дисциплінах (зокрема, в електро- і радіотехніці). Тому радимо не нехтувати математичними методами, що наведені нижче.

У даній главі розглянемо порівняно прості, але цілком реалістичні приклади вільних та вимушених коливань частинки з одним ступенем вільності (одновимірні коливання), що рухається під дією так званих квазіпружних сил у в'язкому середовищі. Змінивши лише позначення, з цієї теорії можна отримати готові формули для вільних і вимушених коливань в так званому *RLC*-контурі, що є важливим в електро- та радіотехніці й розглядатиметься також в розділі про електромагнітні явища.

Гармонічні (або синусоїдні) коливання частинок відбуваються під дією пружних або квазіпружних сил, типовим прикладом яких є сили Гука

$$F = -kx, \quad (6.1)$$

де  $F$  — сила, яка діє з боку деформованого стержня (або пружини) на тіло, що викликало (або передало) деформацію (наприклад, на кульку масою  $m$ , закріплену на кінці пружини);  $x$  — величина одноосового видовження (або стиснення) стержня ( $x = L - L_0$ ;  $L_0$  — довжина вільного, а  $L$  — довжина деформованого стержнів);  $k$  — коефіцієнт пружності стержня (пружини); знак "—" вказує на те, що сила  $F$  прагне повернути деформоване тіло до вихідного (не деформованого) стану.

Аналогічний характер мають сили, які діють на частинку в одновимірних потенціальних полях поблизу мінімуму потенціальної енергії  $U(x)$  (рис. 27). Сумістивши початок координат з точкою мінімуму потенціальної енергії ( $x = 0$ ), матимемо

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (6.2)$$

Звідси розкладання функції  $U(x)$  у ряд Тейлора поблизу точки  $x = 0$  (з точністю до членів другого порядку мализни за  $x$ ) матиме вигляд

$$U(x) = U(0) + \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots \quad (6.3)$$

Оскільки ж  $F = -dU/dx$ , то поблизу положення стійкої рівноваги ( $x = 0$ )

$$F \approx -kx, \quad (6.4)$$

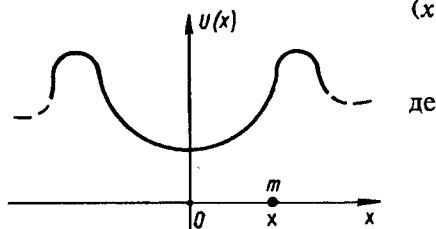


Рис. 27

$$k = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0}.$$

Формальна тотожність сил Гука з потенціальними силами

типу (6.4) очевидна. Звідси й назва сил цього типу — *квазіпружні* (ніби пружні).

За другим законом Ньютона для руху частинки з масою  $m$  під дією пружних (6.1) або квазіпружних (6.4) сил матиме місце рівняння руху

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}; \quad (6.5)$$

$\ddot{x}$  позначено другу похідну координати частинки  $x$  за часом  $t$ , тобто прискорення  $a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ . Таке позначення (точки над  $x$ ) похідних за часом зручне й типове у механіці, радіо- та електротехніці.

Неважко прямим підставленням показати, що загальним розв'язком рівняння руху<sup>1</sup> (6.5) буде функція

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.6)$$

де *циклічна частота*

$$\omega_0 = (k/m)^{1/2}; \quad (6.7)$$

тут  $A$  та  $\varphi_0$  — сталі, що визначаються вже не з рівняння (6.6), а за допомогою початкових умов

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (6.8)$$

При таких умовах для сталих інтегрування  $A$  та  $\varphi_0$  матимемо

$$A = x_0 / \sin \varphi_0; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \omega_0 x_0 / v_0.$$

З формули (6.6) видно, що пружні та квазіпружні сили (6.1), (6.4) призводять до гармонічних (синусоїдних) коливань з певною *амплітудою* (найбільшим відхиленням від положення рівноваги)  $A$  та *фазою* (що визначає стадію процесу)

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0; \quad (6.9)$$

$\varphi_0$  — *початкова фаза*  $\varphi(0) = \varphi_0$ .

Як видно з формули (6.7), *циклічна частота* коливань  $\omega_0$  зростає зі зростанням "пружності"  $k$  і зменшується зі зростанням маси частинки  $m$ . Це інтуїтивно зрозуміло. (Рекомендуємо поміркувати.)

Нагадаємо, що проміжок часу, протягом якого здійснюється один повний цикл коливань (тобто частинка перший раз повер-

<sup>1</sup> Однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

тається у вихідне (початкове) положення), називається *періодом коливань* і позначається  $T$ . Період визначається за умовою  $\omega_0 T = 2\pi$ . Звідки

$$T = 2\pi/\omega_0. \quad (6.10)$$

Частота ж коливань  $\nu = 1/T$  (тобто кількість повних коливань за одиницю часу) пов'язана з циклічною частотою такими співвідношеннями:

$$\nu = \omega_0/2\pi \text{ або } \omega_0 = 2\pi\nu. \quad (6.11)$$

Зваживши на (6.7), матимемо

$$T = 2\pi (m/k)^{1/2}; \quad \nu = \frac{1}{2\pi}(k/m)^{1/2}. \quad (6.12)$$

Для фази  $\varphi(t)$  корисно запам'ятати ще два зображення:

$$\varphi(t) = 2\pi\nu t + \varphi_0; \quad \varphi(t) = 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0. \quad (6.13)$$

## § 6.2. Вільні коливання, що згасають

Суто гармонічні коливання (6.6), що розглядалися у попередньому параграфі, це ідеалізація, оскільки крім пружних або квазіпружних (6.1), (6.4), на частинку можуть діяти ще додаткові сили (наприклад, опору). Ідеалізація (6.6) має сенс, коли дією додаткових сил до певного моменту можна знехтувати (див. нижче). У даному параграфі розглянемо типовий приклад коливань, що згасають внаслідок дії сил в'язкого тертя, які ведуть до дисипації механічної енергії. Отже, розглянемо рух у в'язкому середовищі частинки з масою  $m$  під дією пружних або квазіпружних сил та сил в'язкого тертя  $F_{\text{тер}}$ , пропорційних швидкості руху частинки:  $F_{\text{тер}} = -\gamma\dot{x}$  ( $\gamma$  — стала величина (коефіцієнт в'язкого тертя)). За другим законом Ньютона матимемо

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}. \quad (6.14)$$

Доведемо, що в такому разі виникають коливання, що нагадують гармонічні (6.6), але з амплітудою, яка спадає з часом.

Розв'язок рівняння (6.14) за певних умов (див. нижче) має вигляд

$$x(t) = Ge^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.15)$$

де  $G$  та  $\varphi_0$  — сталі інтегрування, які визначаються з початкових

умов типу (6.8) ( $G$  — початкова амплітуда;  $\varphi_0$  — початкова фаза коливань); циклічна частота

$$\omega = (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad (6.16)$$

причому  $\omega_0$ , як і раніше, визначається за формулою (6.7), а новий параметр  $\beta$  — за

$$\beta = \gamma/2m. \quad (6.17)$$

Розв'язок (6.15) не універсальний. Він має місце лише при умові

$$\omega_0^2 - \beta^2 > 0, \quad (6.18)$$

тобто коли  $\gamma < 4mk$ . Як видно з формули (6.15), при наявності сил в'язкого тертя (коли  $\beta \neq 0$  за (6.17)), амплітуда коливань

$$A(t) = Ge^{-\beta t} \quad (6.19)$$

залежить від часу  $t$ , монотонно спадаючи зі зростанням  $t$  та обертаючись на нуль, коли  $t \rightarrow \infty$ . Це й є типовим прикладом коливань, що затухають під дією дисипативних сил. Якщо такі сили достатньо великі, а саме, коли виконується протилежна (6.18) нерівність

$$\gamma^2 > 4mk, \quad (6.20)$$

то коливань просто не виникає — частинка повільно прямує до положення рівноваги, асимптотично наближаючись до нього (див. далі).

Детально обговоримо метод знаходження розв'язків рівняння (6.14), зважаючи на такі обставини: студенти першого курсу, яким адресовано курс механіки, здебільшого не володіють ще теорією диференціальних рівнянь, але виклад їх теорії стосовно задач, що розглядаються, не становить насправді принципових труднощів і цілком доступний початківцю; метод комплексної експоненти, що буде застосовано тут, найбільш адекватний для розгляду коливань та хвиль широкого класу й часто використовується в науково-технічній літературі [24, 29]. Отже, деякі початкові зусилля читача повністю окупаються науковою важливістю матеріалу. Необхідні відомості про комплексні числа та комплексну експоненту можна знайти у праці [33].

Наведемо важливі для подальшого властивості комплексної експоненти, строгий доказ яких можна знайти у згаданих вище літературних джерелах. (Прийнявши визначення (6.21), багато що можна перевірити й самостійно.)

За визначенням комплексна експонента задається формулою



$$\exp z \equiv e^z \equiv e^{\xi}(\cos \eta + i \sin \eta), \quad (6.21)$$

де  $z = \xi + i\eta$ ;  $i + \sqrt{-1}$ ;  $\xi, \eta$  — дійсні числа. Спираючись на властивості експоненти дійсного аргументу  $e^{\xi}$  та властивості  $\cos \eta$ ,  $\sin \eta$  й враховуючи, що  $i^2 = -1$ ;  $i^{-1} = -i$ , неважко довести, що

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad (6.22)$$

і якщо  $f(t) = e^{zt}$ , то

$$df/dt = zf(t). \quad (6.23)$$

З визначення (6.21) випливає, що комплексна експонента  $e^z$  — періодична функція з суто уявним періодом, який дорівнює  $2i\pi$ .

Перейдемо до розв'язку рівняння (6.14).

Оскільки рівняння (6.14) містить парну ( $\ddot{x}$ ) та непарну ( $\dot{x}$ ) похідні, його розв'язок не можна шукати у вигляді синуса (6.6) або косинуса. Проте з огляду на (6.23), можна шукати його у формі експоненти

$$x(t) = e^{\alpha t}, \quad (6.24)$$

де  $\alpha$  — комплексне число, яке слід визначити за допомогою рівняння (6.14). Згідно з (6.23) та (6.24)

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t); \quad \ddot{x}(t) = \alpha^2 x(t). \quad (6.25)$$

Підставляючи похідні (6.25) у рівняння (6.14), переписане в канонічному вигляді,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.26)$$

( $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ ;  $\beta = \gamma/2m$ ), і скорочуючи на  $x(t)$ , дістанемо так зване *характеристичне* рівняння

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \omega_0^2 = 0 \quad (6.27)$$

— алгебраїчне рівняння другого ступеня відносно  $\alpha$ . Воно має два розв'язки:

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad (6.28)$$

які породжують два лінійно незалежних розв'язки рівняння (6.14), (6.26):

$$x_1(t) = e^{\alpha_1 t}; \quad x_2(t) = e^{\alpha_2 t}. \quad (6.29)$$

Загальний розв'язок рівняння (6.26) дістаємо лінійним комбінуванням розв'язків (6.29)

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}. \quad (6.30)$$

Сталі  $A$  та  $B$  визначаються за початковими умовами (6.8). Це зробити неважко. Тому відповідні обчислення опускаємо.

При аналізі розв'язку (6.30) розрізнятимемо лише два випадки:

$$\beta^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \gamma^2 > 4mk; \quad (6.31)$$

$$\beta^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \gamma^2 < 4mk \quad (6.31a)$$

(див. (6.28)). Третій випадок ( $\beta^2 - \omega_0^2 = 0$ ) не розглядаємо, оскільки він є рідкісним за добором параметрів.

У першому випадку, коли коефіцієнт в'язкого тертя достатньо великий ( $\gamma > 2\sqrt{mk}$ ), коливань не виникає. Справді, за умови (6.31) обидва показники  $\alpha_1, \alpha_2$  — дійсні і від'ємні (рекомендуємо довести це):

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < 0. \quad (6.32)$$

Тому обидві експоненти  $e^{\alpha_1 t}$  і  $e^{\alpha_2 t}$  в (6.30) монотонно спадають з часом  $t$ , прямуючи до нуля, коли  $t \rightarrow \infty$ . Частинка асимптотично наближається до положення рівноваги ( $x = 0$ ) у в'язкому середовищі.

У випадку ж (6.31a), коли коефіцієнт в'язкого тертя  $\gamma$  не дуже великий ( $\gamma < 2\sqrt{mk}$ ), виникає коливальний процес, що поступово затухає. Справді, за умови (6.31a) вираз під коренем (6.28) буде від'ємним, а сам корінь стає уявним:

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2} \equiv i\omega. \quad (6.33)$$

Тут

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}; \quad i = \sqrt{-1}. \quad (6.34)$$

Для загального розв'язку (6.30) у такому разі дістаємо

$$x(t) = e^{-\beta t} \{Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}\}. \quad (6.35)$$

Зваживши на формулу, яка впливає з (6.21),

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad (6.36)$$

приходимо до

$$x(t) = e^{-\beta t} \{C \sin \omega t + D \cos \omega t\}, \quad (6.37)$$

в якому покладемо

$$C = i(A - B); \quad D = A + B. \quad (6.38)$$

Без детального обговорення вкажемо на те, що дійсні початкові умови (6.8) забезпечать дійсні значення для коефіцієнтів  $C$  та  $D$ , оскільки рівняння для їх визначення — лінійні (рекомендуємо перевірити). Вираз у дужках (6.37) означає суперпозицію

гармонічних коливань з різницею фаз у  $\pi/2$  ( $\sin \omega t$  та  $\cos \omega t$ ). Така сума, як неважко довести, тотожна виразу типу (6.6)

$$x(t) = Ge^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.39)$$

де

$$G = \sqrt{C^2 + D^2}; \quad \sin \varphi_0 = C/G; \quad \cos \varphi_0 = D/G. \quad (6.40)$$

Саме це й треба було довести.

Для характеристики темпу затухання введемо поняття *часу релаксації*

$$t_0 \equiv 1/\beta. \quad (6.41)$$

За час релаксації  $t_0$  амплітуда  $A(t)$  (6.19) спадає в  $e$  разів (за подвоєний час спадання амплітуди становитиме приблизно  $1/9$  від початкового значення). Якщо період коливань  $T = 2\pi/\omega$  значно менший, ніж за час релаксації  $t_0$ , тобто, якщо<sup>1</sup>

$$T \ll t_0 \Rightarrow \gamma^2 \ll mk \left\{ \pi^2 + \frac{1}{2} \right\}^{-1}, \quad (6.42)$$

то певну кількість коливань (на практиці буває велику) можна вважати такими, що не затухають. Саме в такому разі має сенс ідеалізована задача, що розглядається в § 6.1.

### § 6.3. Вимушені коливання. Резонанс

Важливу роль у науці відіграє теорія вимушених коливань, які виникають, коли на частинку (масою  $m$ ), крім квазіпружних сил ( $-kx$ ) та сил в'язкого тертя ( $-\gamma\dot{x}$ ), діють ще періодичні (синусоїдні) примусові сили. Розглянемо одразу два варіанти таких коливань, які дещо відрізняються один від одного з фізичного погляду, хоча майже тотожні математично. Нехай періодичну примусову силу  $f(t)$  задано в двох варіантах:

$$f(t) = f_0 \begin{cases} \sin \Omega t; \\ \cos \Omega t, \end{cases} \quad (6.43)$$

де  $f_0$  — амплітуда зовнішньої (примусової) сили;  $\Omega$  — циклічна частота її коливань.

За другим законом Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + f(t). \quad (6.44)$$

Це й є рівняння так званих *вимушених коливань* (сила, що змушує систему до стабільних коливань з частотою  $\Omega$  (див. нижче) — це  $f(t)$ ).

<sup>1</sup> Порівняйте умови (6.42) з (6.18), розписавши останні через  $\gamma$ ,  $m$ ,  $k$ .

Приймаючи для конкретності умови (6.18) (хоч це й не обов'язково робити), покажемо, що розв'язок рівняння (6.44) складається з двох частин

$$x(t) = x_0(t) + \tilde{x}(t), \quad (6.45)$$

де перша частина

$$x_0(t) = Ge^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (6.46)$$

— розв'язок однорідного<sup>1</sup> рівняння (6.14), який затухає зі зростанням  $t$ ; а друга

$$\tilde{x}(t) = A(\Omega) \begin{cases} \sin(\Omega t - \psi_0); \\ \cos(\Omega t - \psi_0) \end{cases} \quad (6.47)$$

— стабільний (що не затухає) частинний розв'язок рівняння (6.44), побудову якого розглянемо далі. Спочатку ж проаналізуємо (6.47).

Амплітуда  $A(\Omega)$  та початкова фаза  $-\psi_0$  визначаються за формулами

$$A(\Omega) = \frac{f}{m} \{\omega_0^2 - \beta^2\}^{-1/2}; \quad \text{tg } \psi_0 = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (6.48)$$

Коли час  $t$  значно (у два-три рази) перевищить час релаксації  $t \gg t_0 = 1/\beta$ , першим доданком  $x_0(t)$ , як правило, можна вже знехтувати, і для вимушених коливань буде справедлива формула

$$x(t) \approx \tilde{x}(t) = A(\Omega) \begin{cases} \sin(\Omega t - \psi_0); \\ \cos(\Omega t - \psi_0). \end{cases} \quad (6.49)$$

Це й є *стабільний* (що встановився після "розкачки") процес вимушених коливань. Він має кілька характерних рис:

1. Константи  $G$  та  $\varphi_0$  (6.46), які визначаються з початкових умов (6.8), не входять до складу стабільної частини розв'язку (6.47) (тобто для процесу, що встановився); отже, після виходу на стабільний режим з задачі практично випадають сталі  $G$  та  $\varphi_0$ : система "забуває" про свій початковий стан.

2. Частота  $\Omega$  вимушених коливань, що встановилися (6.49), збігається з частотою примусової періодичної сили  $f(t)$  і ніяк не пов'язана з іншими параметрами задачі, оскільки зумовлена саме силою  $f(t)$ .

3. Амплітуда  $A(\Omega)$  вимушених коливань залежить як від ча-

<sup>1</sup> Однорідні рівняння не мають так званих вільних членів, які не містили б шукану функцію  $x(t)$  та її похідні.

стоти  $\Omega$  періодичної сили  $f(t)$ , що їх породжує, так і від власної частоти  $\omega_0$  та інших параметрів системи. Дослідимо залежність амплітуди  $A(\Omega)$  від частоти примусової сили  $\Omega$  як довільного зовнішнього параметра при фіксованих власних параметрах системи  $m, k, \gamma$ :

1) розглянемо поведінку амплітуди  $A(\Omega)$  та початкової фази  $\psi_0$  при  $\Omega \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} A(\Omega) = f_0 / m\omega_0^2; \quad \lim_{\Omega \rightarrow 0} \psi_0 = 0. \quad (6.50)$$

У такій границі примусова сила  $f(t)$  перетворюється на

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} f(t) = f_0 \begin{cases} 0; \\ 1; \end{cases} \quad (6.51)$$

тобто зникає в першому і стає константою в другому випадку. Тому й стабільний розв'язок (6.47) або зникає (перший випадок), або становить просто зміщення положення рівноваги системи на константу (другий випадок)

$$\tilde{x}(t) = \frac{f_0}{m\omega_0^2} \begin{cases} 0; \\ 1; \end{cases} \quad (6.52)$$

2) вивчимо поведінку амплітуди  $A(\Omega)$  та початкової фази  $\psi_0$  у границі  $\Omega \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} A(\Omega) = 0; \quad \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \psi_0 = 2\pi. \quad (6.53)$$

Звідси випливає, що при надто високих частотах  $\Omega$  в обох варіантах вимушені коливання (6.49) не виникають

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) \equiv 0, \quad (6.54)$$

тобто система не встигає реагувати на дуже високу частоту зміни знака примусової сили  $f(t)$ ;

3) нарешті, з'ясуємо умови *резонансу*, тобто зростання до максимуму амплітуди вимушених коливань. Для цього обчислимо похідну амплітуди  $A(\Omega)$  за частотою  $\Omega$  й прирівняємо її нулеві:

$$\frac{dA}{d\Omega} = \frac{2f_0\Omega}{m} \{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2\}^{-3/2} \{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\beta^2\} = 0. \quad (6.55)$$

Неважко переконатися, що з трьох розв'язків рівняння (6.55)

два ( $\Omega_1 = 0$  та  $\Omega_2 \rightarrow \infty$ ) відповідають мінімумам, а третій — максимуму

$$\Omega_{\text{рез}} = \{\omega_0^2 - 2\beta^2\}^{1/2}. \quad (6.56)$$

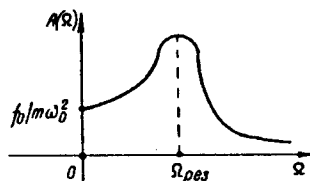


Рис. 28

Згідно з (6.49), (6.53) та (6.56) графік  $A(\Omega)$  як функції частоти  $\Omega$  наведено на рис. 28.

За резонансної частоти  $\Omega_{\text{рез}}$  амплітуда вимушених коливань  $A(\Omega)$  найбільша. Це завжди враховується, оскільки надмірно велика амплітуда вимушених коливань може спричинити, наприклад, руйнування системи. Явище зростання амплітуди до максимуму ( $\Omega \rightarrow \Omega_{\text{рез}}$ ) називається *резонансом*. Резонанс може бути не тільки шкідливим, але й корисним. Корисний він, наприклад, в радіотехніці, оскільки дає змогу виділити сигнал потрібної частоти.

Звернемося нарешті до обґрунтування формул (6.45) — (6.47). Перепишемо рівняння руху (6.44) в канонічній формі

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{1}{m}f(t). \quad (6.57)$$

Відомо (і це легко перевірити), що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (6.57) складається з суперпозиції загального розв'язку відповідного однорідного рівняння

$$\ddot{x}_0 + 2\beta\dot{x}_0 + \omega_0^2x_0 = 0 \quad (6.57a)$$

та частинного розв'язку  $\tilde{x}(t)$  вихідного неоднорідного рівняння (6.57). Але однорідне рівняння (6.57a) було вже розв'язано вище: воно збігається з рівнянням вільних коливань (6.26). В § 2.2 було доведено, що при  $\beta \neq 0$  вільні коливання згасають. Отже, вимушені коливання після релаксації перехідного процесу ("розкачки" (6.41)) описуються частинним розв'язком  $\tilde{x}(t)$  неоднорідного рівняння (6.57), який нам і залишилося строго побудувати. З цією метою вигідно (і це побачимо далі) об'єднати обидва варіанти (6.43) в один, запровадивши комплексну силу (див. (6.21)):

$$F(t) = f_0 \{\cos \Omega t + i \sin \Omega t\} = f_0 e^{i\Omega t}. \quad (6.58)$$

Записавши окремо рівняння (6.57) для першого й другого варіантів (6.43)

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos \Omega t; \\ \ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{f_0}{m} \sin \Omega t \end{cases} \quad (6.59)$$

і домноживши друге рівняння (6.59) на уявну одиницю  $i = \sqrt{-1}$ , почленно додамо обидва рівняння (6.59). Дістанемо (з урахуванням (6.58))

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = (f_0/m) e^{i\Omega t}. \quad (6.60)$$

Тут введено комплексну координату частинки  $z$  за формулою

$$z(t) = x(t) + iy(t). \quad (6.61)$$

Очевидно [16, 33], що

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t); \quad y(t) = \operatorname{Im} z(t). \quad (6.62)$$

З рівняння (6.60) випливає, що його розв'язок можна шукати у формі

$$z(t) = z_0 e^{i\Omega t}, \quad (6.63)$$

де  $z_0$  — стала комплексна амплітуда, що підлягає визначенню. Підставлення  $z(t)$  в (6.60) після скорочення на  $e^{i\Omega t}$  приводить до рівняння

$$z_0 \{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega\} = \frac{f_0}{m}. \quad (6.64)$$

Звідки

$$z_0 = \frac{f_0}{m} \{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega\}^{-1}. \quad (6.65)$$

Подамо комплексне число, що стоїть у фігурних дужках виразу (6.65), в експоненціальній формі [33]:

$$\{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega\} = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} e^{i\psi_0}, \quad (6.66)$$

де

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} \quad (6.66a)$$

— модуль комплексного числа, а  $\psi_0$  — його аргумент, що визначається за умовою

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (6.67)$$

Звідси для  $z(t)$  дістанемо

$$z(t) = \frac{f_0}{m\rho} e^{i(\Omega t - \psi_0)}. \quad (6.68)$$

Тепер розв'язки (6.43) знаходимо за допомогою формул (6.62)

$$y(t) = \frac{f_0}{m\rho} \sin(\Omega t - \psi_0); \quad (6.69)$$

$$x(t) = \frac{f_0}{m\rho} \cos(\Omega t - \psi_0), \quad (6.69a)$$

де  $\rho$  визначено рівністю (6.66a).

Цим і доведено справедливість твердження (6.47) (рекомендуємо перевірити). Радимо обов'язково засвоїти дії з комплексними числами, зокрема з комплексною експонентою [16, 33].

За подальшими відомостями про коливання й хвилі відсилаємо читача до джерел [24, 29].

#### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Що ви знаєте про системи відліку, зокрема інерціальні системи?

2. Прокоментуйте перетворення Галілея.

3. Розкажіть про силу й масу в механіці.

4. Сформулюйте й поясніть закони Ньютона.

5. Розкрийте суть таких понять, як імпульс сили, робота, потужність та визначіть їхню роль у механіці.

6. Розкажіть про консервативні, зокрема потенціальні сили.

7. Розкрийте суть та обґрунтуйте закони збереження імпульсу, енергії та моменту імпульсу.

8. Які особливості руху частинки під дією центральних сил ви знаєте?

9. Основні положення динаміки двох тіл та роль і значення цієї проблеми.

10. Сформулюйте й обґрунтуйте основне рівняння динаміки обертого руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

11. Як виглядає формула для роботи та кінетичної енергії в теорії обертого руху твердого тіла навколо нерухомої осі?

12. Запишіть і обґрунтуйте рівняння Мещерського.

13. Що ви знаєте про задачі Ціолковського?

14. Запишіть рівняння одновимірних механічних коливань, що затухають, та побудуйте його розв'язки.

15. Що ви знаєте про вимушені коливання та резонанс?



У цьому розділі коротко викладено основні положення термодинаміки в тому мінімальному обсязі, який потрібен для подальшого вивчення самої фізики та суміжних з нею природничих і технічних наук. Не уникаючи ґрунтового висвітлення концептуальних аспектів даного розділу фізики.

Для концентрації уваги на фундаментальних фізичних принципах термодинаміки без зайвих математичних ускладнень в основному розглядаються нерухомі аморфні, однорідні тіла (здебільшого рідини й газу). При цьому вважається, що в енергетичному балансі поверхневими ефектами можна знехтувати. Феноменологічна теорія не перемижується з її кількісною молекулярно-кінетичною інтерпретацією, оскільки остання досить насичена гіпотетичними та модельними елементами, реальне виправдання яких полягає в узгодженні здобутої за їх допомогою картини з перевіреними законами макроскопічної термодинаміки. Отже, феноменологічна термодинаміка первинна, а молекулярно-кінетична теорія вторинна, хоча вона й поглиблює термодинаміку та розкриває глибинні механізми процесів. Проте сказане не означає, що в рамках термодинаміки зовсім не слід апелювати до мікроструктури речовини та внутрішніх механізмів процесів. Про дискретну (корпускулярну) будову речовини та фізичну природу теплових явищ на якісному, не деталізованому рівні фізики здогадувалися дуже давно, спираючись на численні непрямі спостереження та досліді. Без загальних молекулярно-кінетичних уявлень, на нашу думку, неможливо виробити ясних і несуперечливих термодинамічних концепцій, оскільки обов'язково явно або неявно в підґрунті будуть фігурувати уявлення про будову речовини. Отже, вторинним є не загальні (якісні) молекулярно-кінетичні уявлення, а їх кількісне моделювання. Взагалі, оскільки макрофізика вивчає явища у межах прямої життєдіяльності людини, вона завжди первинна і слугує свого роду точкою "відліку", від котрої наука сягає як у глибини мікросвіту, так і в широчінь космосу.

Перед вивченням нового матеріалу рекомендуємо повторити елементарний курс термодинаміки та молекулярної фізики (тиск  $p$ , об'єм  $V$  і температура речовини  $T$ , елементарні методи

їх вимірювання; закон Паскаля, газові закони; термометричні та калориметричні закономірності (зокрема, рівняння теплового балансу з урахуванням процесів типу плавлення, кипіння тощо); поняття про термічний еквівалент роботи та механічний еквівалент теплоти, що лежать в основі закону збереження й перетворення енергії). Це виключно важливо, оскільки закон збереження й перетворення енергії лежить в основі першого принципу термодинаміки і є одним з вихідних її постулатів (на відміну від механіки, де цей фундаментальний закон впливає із законів Ньютона та існування консервативних сил). Отже, мова йде майже про всі вузлові моменти елементарного курсу термодинаміки та молекулярної фізики.

## **Глава 1**

### **ПЕРШИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ**

#### **§ 1.1. Предмет і методи термодинаміки**

*Термодинаміка* виникла спершу як вчення про взаємні перетворення теплоти й механічної роботи, пов'язані з тепловими машинами. Та поступово вона перетворилася на досить загальне вчення про закони взаємного перетворення різних видів енергії одна в одну різними шляхами, серед яких особливе місце посідає теплопередача. В термодинаміці обмін енергією через теплопередачу в певному розумінні протиставляється іншим видам енергообміну. Ця обставина зафіксована другим принципом термодинаміки, про який мова попереду.

Закони термодинаміки, як свідчить досвід, поширюються практично на всі макроскопічні процеси, які супроводжуються якимись тепловими ефектами. Тому поняття термодинаміки стосується не тільки власне фізики, але й хімії та інших природничих і технічних наук. Така універсальність має не лише плюси, але й мінуси: закони термодинаміки часом дуже загальні й абстрактні, потребують численних допоміжних припущень і співвідношень суто модельного характеру — причому не завжди послідовних (відповідно до великої різноманітності термодинамічних систем і пов'язаних з ними задач). Стають у пригоді інтуїтивні міркування, міркування за аналогією, модельні молекулярно-кінетичні побудови та ін.

#### **§ 1.2. Температура, кількість теплоти**

Кожна галузь фізики має свої вихідні концепції, а також первинні поняття, які, подібно до сили й маси в механіці, не мають формальних визначень, а запроваджуються описово на підставі узагальнення дослідів і спостережень та уточнюються

методиками вимірювання відповідних величин (*операційне визначення*). У термодинаміці до первинних понять належать *температура й кількість теплоти*.

Первинні (суб'єктивні) уявлення про температуру тіл виникають безпосередньо з повсякденного досвіду, з відчуття холоду й тепла; з очевидної можливості розташувати тіла послідовно за ступенем їх "нагрітості": холодне, тепле, тепліше, гаряче тощо. Навіть уже такі попередні уявлення про "ступінь нагрітості" тіл (тобто *температуру*) наштовхують на думку про можливість створення певної температурної шкали у вигляді монотонно зростаючої (в міру нагрівання) послідовності чисел, які за певними правилами можна зіставити тілам для характеристики їхньої температури (ступеня нагрітості). Залишається лише знайти об'єктивний спосіб утворення згаданої монотонної послідовності чисел — температурної шкали.

Давно виявлено багато матеріальних тіл, які при нагріванні збільшуються у розмірах (розширюються). Саме ця обставина, як відомо, й використовується для створення простих вимірювачів температури — термометрів, заснованих на розширенні тіл при нагріванні. Конструкція та методи градування найпростіших термометрів відомі з елементарного курсу фізики. (Рекомендуємо повторити, звернувши особливу увагу на встановлення опорних точок температурних шкал.) Звичайно, для температурної шкали можна використати не лише теплове розширення тіл, але й будь-яку іншу фізичну закономірність з монотонним зростанням відповідного параметра з температурою (принаймні в певному температурному інтервалі), наприклад, монотонне зростання з температурою питомого опору провідників тощо.

Температуру, як і відстань, час, енергію та деякі інші фізичні величини, можна відлічувати від довільно обраної "точки". Наприклад, за шкалою Цельсія нульове значення температури відповідає температурі, від якої при її зростанні починається танення льоду за нормального тиску.

Розробка прецизійної (високоточної) вимірювальної апаратури та методики вимірювання фізичних величин — це справа спеціальної науки — метрології. Цих проблем тут торкатися не будемо.

Більш складним первинним поняттям термодинаміки є *кількість теплоти*, до якого наука йшла значно довше. Це пояснюється, мабуть, тим, що безпосередньо відчувати кількість теплоти не можна. Це суто *концептуальне* поняття, яке формувалося не на базі якихось відчуттів, а чисто *аналітично*, спираючись на спостереження та експеримент. Наприклад, досвід свідчить, що чим повніше налито в посудину води, тим більше пального треба спалити, щоб довести воду від кімнатної температури до кипіння. З подібних спостережень і походить первин-

не уявлення про існування якоїсь кількісної характеристики витраченої чи споживаної теплоти. Слід нагадати, що рідину нагріває не лише джерело теплоти (скажімо, вогонь), але й занурене в неї гаряче тіло; причому температури рідини й цього тіла зрештою вирівнюються. Аналізуючи подібні явища та перебираючи їх варіанти, можна зробити висновок про існування рівнянь теплового балансу; при цьому було розроблено калориметричні методи кількісних досліджень теплових явищ (звертаємо увагу на ґрунтовну працю [44]). Калориметричні методи було покладено в основу операційного визначення кількості теплоти. Вони й дали змогу запровадити свого часу позасистемну одиницю її вимірювання (калорію).

Характерною особливістю калориметричних вимірювань та пов'язаних з ними рівнянь теплового балансу є статичність: вони сполучають початковий і фінальний стани системи, повністю обминаючи проміжні стани (тобто обминаючи перебіг процесу встановлення теплової рівноваги). Тому й введене за допомогою рівнянь теплового балансу поняття про кількість теплоти  $Q$  є статичним і нерідко сприймається на зразок чогось накопиченого в тілі (тобто подібно до кількості речовини тощо). Звідси й такі поняття, як *тепловміст*, *запас теплоти* та інші, які й досі побутують в літературі (особливо технічній). Точніше, мова повинна йти не про кількість теплоти, а про кількість *переданої* теплоти, оскільки з певністю можна казати лише про кількість теплоти, що перейшла від одного тіла до іншого, а не про якусь ніби накопичену в тілі й фіксовану в ньому кількість теплоти. *Теплообмін* — це, подібно до механічної роботи, форма *енергопередачі*. При обговоренні першого принципу термодинаміки це буде з'ясовано детальніше. Проте задовгий термін "кількість переданої теплоти" навіряд чи витіснить коли-небудь традиційний термін "кількість теплоти".

### § 1.3. Фізична інтерпретація теплових явищ

Довгий час в науці побутував погляд, що теплота пов'язана з наявністю в тілах спеціальної невагомої рідини — теплецю або флогістону, а теплообмін — з перетіканням теплецю від тіла до тіла, чим і пояснювали нагрівання одних і відповідне охолодження інших тіл, що знаходяться у тепловому контакті. Проте такі уявлення про природу теплоти не мали прямої дослідної основи й виявилися неспроможними несуперечливо пояснити ряд явищ, що спостерігаються. Відомо, наприклад, що при холодній обробці металу (свердлення, точіння, фрезерування тощо) для запобігання перегріву й псування деталей та інструменту весь час треба відводити теплоту. Причому теплота буде виділятися як завгодно довго — аж до припинення обробки деталі. При цьому нагрівається і деталь, і інструмент. З якого ж невичерпного джерела надходить теплець? І що при цьому охолоджується? Подібні та інші питання не знаходять відповіді в рамках теорії теплецю. Тому врешті взяв гору зовсім інший погляд на фізичну природу теплоти, одним із засновників якої був Михайло Ломоносов. Цей погляд був навіяний нагріванням тіл за допомогою тертя. Визнаючи правомірність та обґрунтова-

ність ідей про корпускулярну будову речовини, природно було нагрівання тіл пов'язати із зростанням інтенсивності руху корпускул (чи то внаслідок тертя одне об одне, чи то внаслідок прямої взаємодії приповерхневих корпускул контактуючих тіл на мікрорівні). Розробка цієї ідеї привела до несуперечливого пояснення всіх відомих дослідних фактів у галузі теплових (і не тільки теплових) явищ. Що остаточно й закріпилося в науці. На якісному рівні природно користуватися цим і в феноменологічній термодинаміці.

Досить довге існування в науці теорії теплецю не є, на нашу думку, дивним. Адже виникла вона задовго до відкриття закону збереження й перетворення енергії, а тим більше до розробки понять про енергетичні потоки. Разом з тим закони збереження маси та існування потоків речовини були усвідомлені наукою давно. Звідси логічно є спроба думачення теплоти та її потоків на зразок реальних уявлень про речовину.

Розглянемо детальніше молекулярно-кінетичні уявлення про теплоту. Передумовою до їх появи послужила корпускулярна теорія матерії, започаткована ще за античних часів, але після того надовго майже забута. На її користь свідчило чимало фактів ще до появи сучасних методів досліджень: випаровування, дифузія, закони хімічних перетворень і багато інших явищ. Тому з розвитком калориметрії та встановленням існування сталих термомеханічних еквівалентів (термічного еквівалента роботи та механічного еквівалента теплоти) енергетична природа теплоти стала очевидною, а інтерпретація нагрівання як зростання інтенсивності руху молекул — природною. Внаслідок відомих експериментальних і теоретичних досліджень (Дж. Джоуль, Р. Майєр, Г. Гельмгольц) було висунуто тезу про універсальність відомого з механіки закону збереження й перетворення енергії для всіх фізичних явищ, сформульованого у вигляді першого принципу термодинаміки. Після цього почався справді інтенсивний, систематичний і успішний її розвиток, який доповнювався розробкою молекулярно-кінетичної теорії речовини.

На сьогодні здобутки теоретичної і прикладної термодинаміки та молекулярно-кінетичної теорії грандіозні. Та розвиток цих розгалужених областей фізики продовжується.

#### § 1.4. Термодинамічні параметри та термічне рівняння стану

Обговорення цих питань зручно розпочати з аналізу відомого з елементарного курсу фізики рівняння Менделєєва—Клапейрона для ідеальних газів у стані *термодинамічної рівноваги*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Станом термодинамічної рівноваги називають такий стан системи, коли в ній припиняються всі макроскопічні процеси і параметри  $p$ ,  $V$ ,  $T$  зберігаються сталими.

$$pV = (m/\mu)RT, \quad (1.1)$$

де  $p$  — тиск газу;  $V$  — об'єм, який він займає;  $T$  — температура за шкалою Кельвіна;  $m$  — маса газу;  $\mu$  — його молярна маса;  $R$  — універсальна газова стала ( $R = 1,986$  кал/град =  $= 8,314$  Дж/град;  $T = 273,1^\circ + t$ ;  $t$  — температура за Цельсієм).

Усі достатньо розріджені гази незалежно від хімічної природи підпорядковані закону (1.1). Хімічна індивідуальність газу врахована лише молярною масою. Отже, для 1 моля ( $m = \mu$ ) будь-якого газу рівняння (1.1) набуває універсального вигляду:

$$pV = RT. \quad (1.1a)$$

Точність рівнянь (1.1), (1.1a) знижується зі зростанням тиску  $p$  або зниженням температури  $T$  (коли газ стає щільнішим), і врешті вони втрачають сенс.

Асимптотична<sup>1</sup> універсальність (1.1), (1.1a) відбиває фундаментальний характер абсолютної температури  $T$ , про що мова попереду (§ 3.5). Взагалі, ідеальні гази, закони яких ґрунтуються на асимптотичних точних співвідношеннях (1.1), мають велике значення у термодинаміці як пробний камінь численних загальних тверджень цієї науки. У цьому й полягає особлива роль теорії ідеальних газів. Розріджена (ідеальна) суміш газів підпорядкована закону парціальних тисків [5, 26]. (Рекомендуємо звернути увагу на цю літературу.)

Сукупність змінних величин  $\{m, p, V, T\}$ , як показує досвід, повністю характеризує рівноважний стан газу як цілого. Тому ці величини дістали назву *параметрів стану*. Здебільшого буває так, що маса газу  $m$  фіксована. Тоді про неї не згадують, оперуючи трьома параметрами стану  $\{p, V, T\}$ . З цих параметрів у рівновазі лише два незалежні; третій виражається через них за допомогою рівняння стану (1.1).

Відповідно до потреб розв'язуваної задачі добирають одну з трьох можливих незалежних пар параметрів:  $(p, V)$ ,  $(V, T)$ ,  $(p, T)$ . Досвід свідчить, що не лише стан ідеального газу, але й стан реального газу, рідини та будь-якого іншого аморфного однорідного тіла визначається сукупністю чотирьох параметрів  $m, p, V, T$ . Для кожного такого тіла в термодинамічній рівновазі існує своє рівняння стану у вигляді

$$f(m, p, V, T) = 0. \quad (1.2)$$

На жаль, явного виразу рівняння стану для абсолютної більшості тіл термодинаміка не знає. На практиці користуються

<sup>1</sup> *Асимптотична* — тобто така, що настає за нормальних умов після досягнення газом певної густини й зберігається при її зменшенні аж доки газ ще можна сприймати як єдине ціле.

різними моделями рівняння (1.2), отриманими на підставі спрощених міркувань, а також розрахованими, як правило, наближено на базі постулатів молекулярно-кінетичної теорії. Та вже сам факт існування функціонального зв'язку між параметрами стану (1.2), як побачимо далі, призводить до важливих для теорії і практики наслідків. Саме узгодження цих наслідків з експериментом реально підтверджує існування рівнянь стану (1.2) в умовах термодинамічної рівноваги.

В теорії користуються не лише неявною формою рівняння стану (1.2), але й розв'язаними щодо того чи іншого параметра його варіантами:

$$p = p(V, T); \quad T = T(V, p); \quad V = V(p, T). \quad (1.2a)$$

У разі ідеального газу формі (1.2) відповідає співвідношення

$$pV - (m/\mu)RT = 0, \quad (1.16)$$

а формам (1.2a) — співвідношення

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}; \quad T = \frac{\mu}{m} \frac{pV}{R}; \quad V = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{p}. \quad (1.1b)$$

Для попередньої ілюстрації ролі, яку відіграє в термодинаміці сам факт існування рівняння стану (1.2), встановимо за його допомогою взаємозв'язок між наведеними нижче фізичними величинами.

1. Залишаючи сталим тиск ( $p = \text{const}$ ) та зважаючи на теплове розширення тіл, введемо коефіцієнт об'ємного розширення

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (1.3)$$

(позначення відомі й зрозумілі).

2. Залишаючи сталою температуру ( $T = \text{const}$ ) та зважаючи на залежність об'єму  $V$  від тиску  $p$ , введемо модуль всебічного стиску  $K$  для пружних тіл за формулою

$$\frac{1}{K} \equiv \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (1.3a)$$

3. Залишаючи сталим об'єм ( $V = \text{const}$ ) та зважаючи на залежність тиску  $p$  від температури  $T$ , введемо термічний коефіцієнт тиску

$$\beta \equiv \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V. \quad (1.36)$$

Користуючись самим лише існуванням зв'язку між параметрами стану в рівновазі (1.2), (1.2a), встановимо відповідний зв'язок між введеними коефіцієнтами (1.3)–(1.3б). Візьмемо також до відома, що частинними похідними, через які визначено коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K$ , вичерпуються всі можливі їх варіанти, оскільки, наприклад,  $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 1 / \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p$ .

Перейдемо до встановлення зв'язку між  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K$ . Згідно з першою формулою (1.1в) рівняння стану (1.2a) маємо

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV.$$

Тому при  $p = \text{const}$  ( $\Rightarrow dp = 0$ ) дістанемо

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V / \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_T.$$

Отже, з огляду на визначення коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K$  (1.3) — (1.3б), можна записати

$$\alpha K = \beta p. \quad (1.4)$$

Ця формула пов'язує між собою механічні й термічні характеристики речовини, тобто важливі фізичні величини; причому зв'язок цей випливає з самого лише факту існування рівняння стану (1.2), (1.2a) без апеляції до його явного вигляду.

Уточнимо поняття *рівноважний стан* системи та умови переходу до нього, одночасно запровадивши поняття про *зовнішні й внутрішні* параметри.

Як зазначалося вище, термодинамічна рівновага характеризується тим, що всі параметри системи залишаються сталими:  $p = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$ ,  $T = \text{const}$ .

Розглянемо характерний приклад такої ситуації й наслідки різкого відхилення від неї. Нехай у прямому циліндрі під поршнем знаходиться газ (рис. 29:  $F$  — нормальна до поршня сила;  $S$  — площа поршня;  $V$  — об'єм газу). У рівновазі температура оточуючого середовища й стінок циліндра  $T_3$  збігається з температурою газу в циліндрі  $T_{\text{вн}}$ , зовнішній тиск  $p_3 = F/S$  — з внутрішнім тиском у газі  $p_{\text{вн}}$ . Що ж до об'єму  $V$ , то *зовнішнє й внутрішнє* його значення тривіально збігаються.

Якщо різко опускати чи піднімати поршень, то в циліндрі протягом цього процесу спостерігатимуться перепади тиску: під час

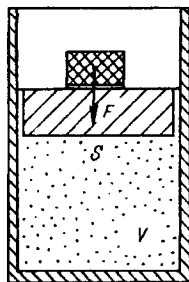


Рис. 29



різкого опускання тиск буде більшим біля поршня, під час різкого піднімання — біля дна циліндра. Отже, в циліндрі виникатиме градієнт внутрішнього тиску  $p_{\text{вн}}$ . Аналогічно різким підігрівом циліндра знизу можна викликати перепад температур у масі газу. Після припинення підігрівання перепади тиску й температури в газі через деякий час самочинно зникають і встановлюється термодинамічна рівновага, умовами якої для розглядуваних нами систем будуть: 1) зникнення градієнтів параметрів стану в об'ємі термодинамічної системи; 2) вирівнювання значень зовнішніх і внутрішніх параметрів:

$$p_{\text{вн}} = p_3 = \text{const}; V_{\text{вн}} = V_3 = \text{const}; T_{\text{вн}} = T_3 = \text{const}. \quad (1.5)$$

Поняття *зовнішні параметри* (яке ми детально не обговорювали) завжди впливає з конкретних умов задачі. Наприклад, під зовнішнім тиском  $p_3$  в жорсткій запаяній посудині слід розуміти не тиск оточуючого цю посудину середовища, а тиск стінок посудини на речовину всередині посудини, який за третім законом Ньютона завжди збігатиметься з тиском речовини на стінки посудини (1.5).

*Досвід свідчить, що за стабільних і однакових по всій периферії тіла значень зовнішніх параметрів тіло завжди приходить до рівноважного стану. Це твердження є одним з вихідних постулатів термодинаміки (поряд із відомими трьома її принципами).*

### **§ 1.5. Квазірівноважні (оборотні) процеси та їх графічне зображення. Циклічні процеси**

Якщо зовнішні умови (параметри  $p_3$ ,  $V_3$ ,  $T_3$ ) змінювати досить плавно (теоретично з нескінченно малою швидкістю), щоб система встигла адаптуватися до них, то її стан, змінюючись, проходить би через ланцюжок практично рівноважних станів. За таких умов у кожний момент часу з певною точністю буде виконуватися рівняння рівноважного стану (1.2). Тому достатньо повільні процеси, коли на кожному етапі можна знехтувати відхиленнями системи від рівноважного стану, називають *квазірівноважними*. Їх ще називають *оборотними*, оскільки, повільно змінюючи зовнішні умови у зворотному порядку, можна змусити систему пройти через попередній ланцюжок рівноважних станів у зворотному напрямі. Практика показує, що процес адаптації систем до зовнішніх умов може відбуватися досить швидко, і тому існує багато реальних процесів, тобто не таких уже й повільних з макроскопічного погляду, які можна вважати практично квазірівноважними (оборотними). Отже, теорія квазірівноважних процесів становить не лише теоретичний, але й практичний інтерес.

Важливу роль у термодинаміці відіграють процеси, виконувани за певних фіксованих умов: наприклад, так звані ізопроцеси — *ізотермічний* ( $T = T_0 = \text{const}$ ), *ізобарний* ( $p = p_0 = \text{const}$ ) та *ізохорний* ( $V = V_0 = \text{const}$ ). Існують також інші характерні умови (скажімо, *адиабатність*), про які мова попереду. Якщо такі процеси квазірівноважні (оборотні), то до рівняння стану (1.2) додається ще рівняння процесу, яке накладає додаткові умови на параметри стану. Виникає система з двох рівнянь:

$$\begin{cases} f(p, V, T) = 0; \\ \varphi(p, V, T) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

(перше — рівняння стану (1.2); друге — рівняння процесу). Тому з трьох параметрів стану  $\{p, V, T\}$  незалежним залишається лише один, який визначає хід процесу. Розглянемо характер ізопроцесів на прикладі ідеального газу.

1. За умов ізотермічності до рівняння газового стану (1.1) додається рівняння процесу  $T = T_0$ . Внаслідок цього виникає пряма залежність тиску  $p$  від об'єму  $V$  при сталій температурі, тобто так зване *рівняння ізотерми*, яке можна подати у трьох видах, що характеризують ізотерму ідеального газу:

$$pV = p_0V_0 = \frac{m}{\mu} RT_0 = \text{const}; \quad p = p_0 \frac{V_0}{V}; \quad V = V_0 \frac{p_0}{p} \quad (1.7)$$

(індекс 0 відповідає певним фіксованим (наприклад, початковим) значенням параметрів). Сукупність трьох еквівалентних співвідношень (1.7) всебічно описує гіперболу (рис. 30), асимптотами якої служать осі координат  $OV$  та  $Op$ . З першого співвідношення (1.7) ясно, що зі зростанням фіксованої температури  $T_0$  ізотерми ідеального газу "повзуть вгору".

2. За умов ізобарності до рівняння стану (1.1) додається рівняння процесу  $p = p_0$  й виникає пряма залежність об'єму  $V$  від температури  $T$ , виражена *рівнянням ізобари* ідеального газу

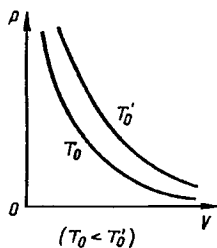


Рис. 30

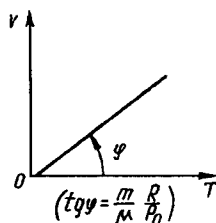


Рис. 31

$$V = \frac{m}{\mu} \frac{R}{p_0} T \sim T \quad (1.8)$$

(рис. 31). Отже, при  $p = \text{const}$

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = \text{const.} \quad (1.8a)$$

3. За умов ізохорності до рівняння стану (1.1) додається рівняння процесу  $V = V_0$  й виникає пряма залежність тиску  $p$  від температури  $T$ , виражена *рівнянням ізохори* ідеального газу

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{R}{V_0} T \sim T \quad (1.9)$$

(рис. 32). Отже, при  $V = \text{const}$  маємо

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{const.} \quad (1.9a)$$

Криві типу поданих на рис. 30—32 називають *діаграмами відповідних оборотних процесів*:  $p - V$ -діаграмою;  $V - T$ -діаграмою;  $p - T$ -діаграмою. Аналогічні за змістом діаграми можна накреслити для процесів з будь-якою речовиною, а не тільки з ідеальним газом. Конкретна форма діаграм визначається конкретними рівняннями стану (1.2) і процесу (1.6).

Якщо процес був таким, що система в фіналі повернулася до свого початкового стану, то його називають *циклічним*, або *круговим* процесом. Діаграми оборотних циклічних процесів — це замкнені криві. Схематичний приклад діаграми циклічного процесу подано на рис. 33 (стрілки показують напрям процесу).

Якщо на певному етапі процес був необоротним (наприклад, внаслідок виникнення градієнтів певних параметрів стану у ме-

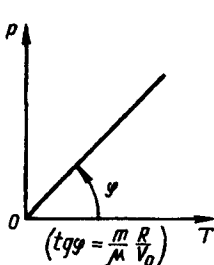


Рис. 32

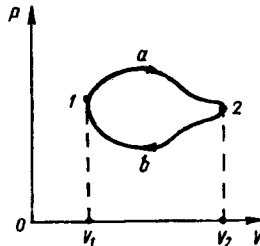


Рис. 33

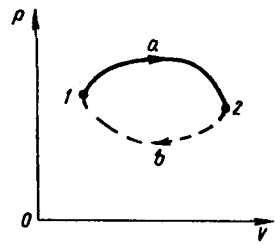


Рис. 34

жах системи), то його не можна зобразити якоюсь неперервною кривою. У цьому разі процес умовно подають штриховою кривою (рис. 34), фіксуючи тим самим тільки вихідний і кінцевий (рівноважний) стани, між якими виконувався необоротний процес.

### § 1.6. Робота на розширення тіл.

#### Передана теплота. Внутрішня енергія системи

Нехай у прямому циліндрі з площею поперечного перерізу  $S$  під поршнем, розташованим на висоті  $h$  від дна циліндра, знаходиться газ чи рідина, і нехай під дією іззовні поршень перемістився донизу на деяку відстань  $dh$ , стискаючи речовину в циліндрі (рис. 35). Тоді сила тиску  $F_n = p'S$  виконує роботу

$$\delta A' = -F_n dh = -p'S dh = -p'dV, \quad (1.10)$$

де  $F_n$  — модуль нормальної до площини поршня складової зовнішньої сили;  $p' = F_n/S$  — зовнішній тиск;  $dh$  — приріст висоти (при стиску він від'ємний:  $dh < 0$ );  $dV = Sdh$  — приріст об'єму. Отже,  $\delta A'$  — це робота, виконана силою зовнішнього тиску  $F_n$  над речовиною в циліндрі. За умови квазістатичності зовнішній тиск  $p'$  дорівнює внутрішньому  $p$  ( $p' = p$ ). У термодинаміці зручніше (і це буде ясно з подальшого) користуватися не роботою над системою  $\delta A'$ , а протилежною до неї за знаком роботою системи  $\delta A$  над зовнішніми тілами при її розширенні:

$$\delta A = -\delta A' = pdV. \quad (1.10a)$$

При стисковій роботі  $\delta A$  від'ємна, при розширенні — додатна.

Нехай тепер аморфне тіло займає об'єм довільної форми (рис. 36) і цей об'єм внаслідок розширення тіла дістав загальний

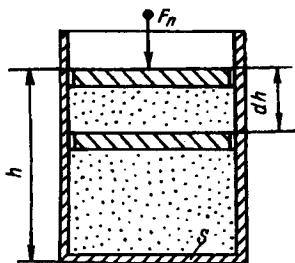


Рис. 35

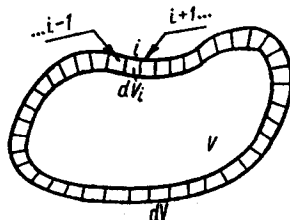


Рис. 36

приріст  $dV$ . Розіб'ємо приріст  $dV$  на достатньо велику кількість практично циліндричних частин (див. рис. 36)

$$dV = \sum_{i=1}^N dV_i. \quad (1.11)$$

Для кожної такої частини справедлива формула (1.10а)

$$\delta A_i = p dV_i \quad (1.12)$$

(тут тиск  $p$  не має індексу, оскільки розглядається ситуація, коли за законом Паскаля він скрізь однаковий, а в тілі не виникає напруження). Повна робота, виконана тілом, що розширюється, згідно з (1.11) і (1.12) дорівнює

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \delta A_i = p \sum_{i=1}^N dV_i = p dV. \quad (1.13)$$

Отже, в загальному випадку (див. рис. 36) залишається справедливою формула (1.10а), встановлена для прямого циліндра (див. рис. 35). Роботу при скінченному розширенні тіла від об'єму  $V_1$  до  $V_2$ , очевидно, можна визначити за формулою

$$A_{12} = \int_{(V_1 \rightarrow V_2)} p(V, T) dV. \quad (1.14)$$

Зокрема, при ізотермічному ( $T = \text{const}$ ) розширенні ідеального газу згідно з (1.14) і (1.7) матимемо

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (1.15)$$

За умови ізобарного ( $p = \text{const}$ ) розширення будь-якого тіла за (1.14) дістаємо

$$A_{12} = p(V_2 - V_1). \quad (1.16)$$

Згідно з (1.14) робота на  $p - V$ -діаграмі чисельно дорівнює площі, заштрихованій на рис. 37, а. Робота за оборотний цикл дорівнює, очевидно, площі, охопленій замкненою кривою (рис. 37, б).

Оскільки тіла при розширенні виконують роботу за формулами (1.13), (1.14) і переважна більшість тіл при нагріванні розширюється, нагрівання може призводити до механічної роботи. Саме це спостереження й наштовхнуло свого часу на думку про створення теплових машин. Механічна робота, в свою чергу, може призводити до нагрівання тіл (згадаймо роботу проти сил тертя). Отже, взаємозв'язок теплоти й роботи на якісному рівні був виявлений досить давно. Проте встановлення кількіс-

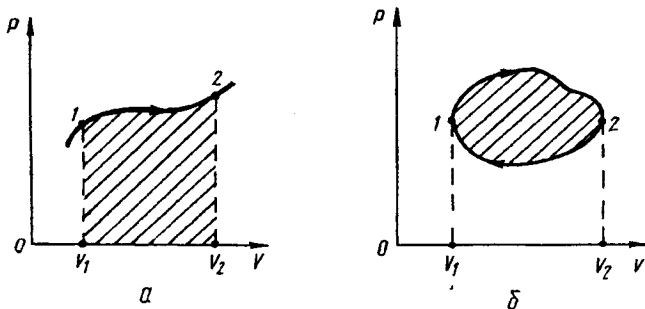


Рис. 37

них між ними співвідношень та осмислення глибинної суті їх відбулося лише в ХІХ ст. завдяки відомим працям Джоуля, Майєра, Гельмгольца. Експериментальною базою народжуваного в ті часи реалістичного вчення про природу теплоти були досліді Джоуля, який встановив існування *термомеханічних сталей: термічного еквівалента роботи й механічного еквівалента теплоти*, які свідчать про те, що робота й теплота переходять одна в одну завжди в еквівалентних кількостях і тому, зокрема, можуть вимірюватися в однакових одиницях. Праці Джоуля (а також Ленца) відіграли вирішальну роль ще й у вивченні теплової дії електричного струму. Після цього ідея узагальнення механічного закону збереження й перетворення енергії на всі види фізичних процесів цілком назріла. Вона й була висунута Майєром і розвинена Гельмгольцем.

Якщо додати до щойно сказаного здобутки науки щодо корпускулярної будови речовини та молекулярно-кінетичне тлумачення теплових явищ, то стануть природними далекосяжні міркування й висновки:

1. Завдяки постійному рухові та взаємодії корпускул (атомів і молекул), з яких складається будь-яка речовина, кожне тіло повинно мати свою внутрішню енергію  $U$ , яка може змінюватися лише під дією ззовні за рахунок виконуваної тілом або над тілом роботи, чи за рахунок одержаної або відданої ним теплоти<sup>1</sup>.

2. Макроскопічна робота (1.13), (1.14) пов'язана зі зміною розмірів системи як цілого й визначається приростом її об'єму  $V$ . Передача ж енергії шляхом безпосередньої взаємодії приповерхневих молекул контактуючих тіл, що не пов'язана зі зміною розмірів системи в цілому (1.13), (1.14), не враховується.

<sup>1</sup> Кількість теплоти слід вважати алгебраїчною величиною. Зручно (див. далі) вважати її додатною, коли вона надається тілу, і від'ємною — коли відбирається.

Енергопередачу на молекулярному рівні природно ототожнити з передачею теплоти. Така інтерпретація узгоджується з трактуванням нагрівання тіл тертям. Подібні міркування, висловлені або не висловлені явно, є певним підґрунтям (інколи не гласним) основних постулатів термодинаміки (зокрема, першого її принципу, про який мова попереду). Повне наукове виправдання такі міркування знайшли в узгодженні висновків молекулярно-кінетичної теорії із законами макроскопічної термодинаміки, а через неї (і не лише неї) і з експериментом.

Отже, природно припустити, що термодинамічні системи мають внутрішню енергію  $U$ , яка є функцією стану (точніше параметрів стану) системи і за рахунок якої системи можуть виконувати механічну роботу чи обмінюватися теплотою з матеріальним оточенням. Механічна робота виконується завдяки розширенню тіл в цілому і, отже, збільшенню середньої відстані між молекулами; теплопередача спричиняє пряму зміну інтенсивності хаотичного руху молекул взаємодіючих тіл, а з нею і зміну температури. Звичайно, подібні міркування не мають доказової сили. Це лише евристичні викладки, які стимулюють думку й вимагають ґрунтовної кількісної проробки й порівняння результатів з експериментом. Децю детальніше про це — в третьому розділі посібника.

Слід звернути особливу увагу на те, що робота (і не лише механічна [26]) пов'язана зі змінами *макроскопічних* параметрів системи, в той час як теплопередача відбувається фактично по мікроскопічних каналах і зумовлена суттєво хаотизованим рухом молекул та розпорощенням (дисипацією) енергії по незчисленних внутрішніх ступенях вільності<sup>1</sup>. Така відмінність є принциповою і характеризує особливу роль теплоти в термодинаміці.

На відміну від роботи, яка за умов всебічного розширення або стиску має загальну формулу визначення<sup>2</sup>, внутрішня енергія  $U$  і передана теплота  $\delta Q$  універсальних формул визначення не мають. У кожному конкретному випадку для них треба конструювати відповідні модельні вирази і перевіряти ступінь узгодження відповідних наслідків з експериментом. Та навіть не маючи конкретних виразів для  $U$  або  $\delta Q$ , багато що можна сказати щодо термодинамічних процесів на базі самої лише констатації існування зв'язку між внутрішньою енергією, роботою та переданою теплотою за першим принципом термодинаміки (див. § 1.7).

Хоч універсальної формули для  $\delta Q$  і не існує, але досить відома модельна формула все ж є. Стосується вона, щоправда, нерівноважних (необоротних) процесів, про які коротко сказано в § 3.4, 4.1 — 4.4. Ця досить вдала формула відома під назвою *закону Ньютона—Ріхмана*

$$\delta Q = \alpha (T_c - T)dt, \quad (1.17)$$

<sup>1</sup> Внутрішні ступені вільності — це сукупність тих ступенів вільності корпускул, які складають тіло, що не ведуть до переміщення у просторі тіла як цілого.

<sup>2</sup> Цілком однозначні формули визначення в термодинаміці мають усі макроскопічні види роботи [26].

де  $\delta Q$  — передана деякому тілу за час  $dt$  кількість теплоти;  $T$  — температура тіла;  $T_c$  — температура оточуючого середовища (термостата);  $\alpha$  — коефіцієнт теплопередачі в системі тіло — середовище. Згідно з (1.17) тепловий потік  $I_q$ , тобто кількість теплоти, переданої тілу за одиницю часу,

$$I_q = \frac{\delta Q}{dt} = \alpha(T_c - T). \quad (1.18)$$

Що ж до внутрішньої енергії  $U$ , то тут багато що не досліджено. З достатньою строгістю обґрунтована досі лише формула для внутрішньої енергії ідеального газу (§ 1.9). Для деяких інших термодинамічних систем вдається сконструювати більш або менш вдалі модельні або наближені<sup>1</sup> формули.

Наведемо ще кілька зауважень про параметри стану. Для розглядуваного тут класу систем таких параметрів три —  $p, V, T$ . Але це стосується лише стану рівноваги та квазірівноважних процесів. Для швидкоплинних процесів, коли система помітно відхиляється від стану рівноваги, параметри стану можуть перетворюватися на локальні (тобто різні в різних точках тіл). Отже, кількість їх значно збільшується. За дуже значних відхилень від стану рівноваги виникає потреба в істотному перегляді набору параметрів стану та запровадженні нових (наприклад, при переході від ламінарної течії рідини до турбулентної запроваджуються параметри, що характеризують вихори та розриви струменів і т. п.).

Загальна проблема достатнього вибору параметрів стану досить складна, залежить від постановки задачі й потребує досвіду. Існує лише деяка провідна ідея, найбільш вдало, з нашого погляду, висловлена М. Планком: "Стан матеріальної системи в певний момент часу — це сукупність усіх тих величин, миттєвими значеннями яких повністю визначається перебіг процесу у часі, що відбувається в системі" [31]. (Рекомендуємо проаналізувати сукупність параметрів стану в механіці (див. розділ 1).) В основному ми вивчаємо квазірівноважні процеси з невеликою кількістю параметрів стану.

## § 1.7. Перший принцип термодинаміки

В основі сучасної термодинаміки завдяки в основному дослідженням Джоуля, Майєра, Гельмгольца лежить перший принцип термодинаміки, за яким внутрішня енергія нерухомої системи  $U$  ніколи не змінюється сама по собі, а лише внаслідок виконуваної тілом (або над тілом) роботи та наданій тілу (або відібраній від нього) кількості теплоти

$$dU = \delta A' + \delta Q, \quad (1.19)$$

де  $dU$  — приріст (диференціал) внутрішньої енергії як функції стану системи;  $\delta A'$  та  $\delta Q$  — відповідно виконана над тілом елементарна робота та надана йому кількість теплоти. Закон (1.19) безпосередньо узагальнює відомий з механіки закон еволюції механічної енергії на всі процеси матеріального світу не-

<sup>1</sup> Наближені інколи вдається одержати на базі статистичної термодинаміки.



залежно від їх фізичної природи. Справді, якщо відповідний процес триває протягом часу  $dt$ , то якщо віднесемо баланс (1.19) до одиниці часу, дістанемо закон еволюції внутрішньої енергії  $U$  у вигляді

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\delta A'}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} \quad (1.19a)$$

(праворуч у цій формулі — сумарна потужність зовнішніх сил та джерел теплоти). (Порівняйте це з формулою (3.74) розділу 1.) Якщо ніякої дії над тілом не відбувалося, тобто якщо  $\delta A'/dt \equiv 0$  і  $\delta Q/dt \equiv 0$ , то  $dU/dt \equiv 0$  і, отже, внутрішня енергія  $U$  зберігається:  $U = \text{const}$ . (Нагадаємо, що тут вивчаються нерухомі тіла.)

На відміну від механіки (де закон збереження й перетворення енергії виводиться за допомогою первинних законів (постулатів) Ньютона та з урахуванням наявності в природі консервативних сил) перший принцип термодинаміки (1.19) формально не виводиться, а сам є *первинним постулатом* цієї науки. Тому слід було б певним чином чітко визначити внутрішню енергію (можливо, часто операційно). Спроби таких визначень робилися неодноразово. Проте аналіз навіть найкращих із них [31, 38] показує, що беззастережних варіантів визначення  $U$  досі не створено. Автори схильні вважати, що у рамках феноменологічного підходу такого визначення не існує. Найімовірніше це суто концептуальне поняття, запроваджене за аналогією з механіки та з дослідів Джоуля і мікроскопічної інтерпретації теплових явищ. Реальне виправдання концепції щодо існування внутрішньої енергії як функції стану системи полягає в узгодженні всіх наслідків цього з експериментом. Первинні істини в усіх галузях науки є дійсно первинними і марно шукати повних їх доведень; вони є узагальненням досвіду. Отже, закон (1.19) — це постулат.

Оскільки в термодинаміці теплота відіграє особливу роль (див. другий принцип термодинаміки), закон (1.19) зручно переписати у вигляді

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (1.20)$$

де використано зв'язок (1.10a). У формулі (1.20) перший принцип термодинаміки можна прочитати таким чином: *надана системі кількість теплоти  $\delta Q$ , взагалі кажучи, йде на приріст її внутрішньої енергії  $dU$  та виконання системою роботи  $\delta A$ <sup>1</sup>.*

<sup>1</sup> Формула (1.20) відповідає умові, коли надану тілу теплоту вважають додатною, а відібрану від тіла — від'ємною; виконану тілом роботу — додатною, а над тілом — від'ємною.

В інтегральній формі закон (1.20) набуває вигляду

$$Q = \Delta U + A; \quad (1.20a)$$

тут  $Q$  — загальна кількість наданої системі теплоти;  $\Delta U$  — повний приріст її внутрішньої енергії;  $A$  — сумарна робота, яку виконала система.

Твердження про те, що *внутрішня енергія  $U$  є однозначною функцією стану* (параметрів стану) відповідає ідеї про збереження енергії у замкненій (тобто ізольованій від будь-яких зовнішніх впливів) системі. Якщо б  $U$  не була однозначною функцією стану, то була б надія знайти спосіб, не змінюючи стану системи, отримати від неї роботу чи теплоту за рахунок різниці енергії того самого стану, тобто здобути роботу чи теплоту, нічого не змінивши. Досвід свідчить про *принципову неможливість* такого ефекту, тобто неможливість так званого *perpetuum mobile* першого роду: *вічного двигуна*, що виробляє енергію з нічого.

Оскільки за прийнятим у науці постулатом внутрішня енергія  $U$  є функцією стану системи, то за відомими теоремами математичного аналізу криволінійний інтеграл

$$\int_{(C)} dU = \Delta U = U_2 - U_1 \quad (1.21)$$

залежить не від *форми* кривої інтегрування (рис. 38,а), а лише від значень внутрішньої енергії  $U$  на початку  $U_1$  і в кінці шляху інтегрування  $U_2$ . Зокрема, для інтеграла по замкненому контуру, тобто по циклу (рис. 38,б), матимемо

$$\oint_{(L)} dU = U_0 - U_0 \equiv 0. \quad (1.21a)$$

Комбінуючи (1.21a) і (1.20), дістанемо для циклу (див. рис. 38,б)

$$\oint_{(L)} \delta Q = \oint_{(L)} \delta A. \quad (1.21б)$$

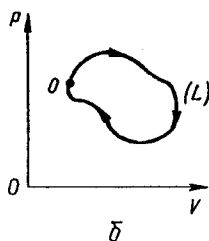
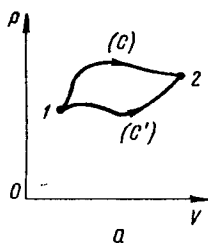


Рис. 38

Оскільки перший принцип термодинаміки (1.20), (1.21a) містить не саму внутрішню енергію  $U$ , а її диференціал  $dU$  (або приріст  $\Delta U$ ), достатньо визначити цю величину з точністю до константи у повній аналогії з механікою. У рівноважному стані та при квазірівноважних процесах внутрішня енергія розглядуваних тут систем буде функцією двох незалежних параметрів стану<sup>1</sup>

$$U = U(p, V); \quad U = U(V, T); \quad U = U(p, T). \quad (1.22)$$

Співвідношення (1.22) називають *калоричними рівняннями стану* (на відміну від *термічних* (1.2)).

Вибір будь-якого з трьох варіантів (1.22) диктується умовами задачі. Відповідно до цих трьох зображень можна утворити три зображення для  $dU$ :

$$dU = \begin{cases} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_p dV + \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)_V dp; \\ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT; \\ \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p dT. \end{cases} \quad (1.23)$$

Позначення, гадаємо, зрозумілі. Враховуючи вираз для роботи (1.13) систем розглядуваного типу, можна перший принцип (1.20) подати у вигляді

$$\delta Q = dU + p dV. \quad (1.24)$$

Тоді для квазірівноважних процесів матимемо три варіанти розшифрування (1.24) відповідно до варіантів для  $dU$  (1.23):

$$\delta Q = \begin{cases} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_p + p \right\} dV + \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)_V dp; \\ \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} dV + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT; \\ \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)_T + p \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \right\} dp + \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \right\} dT. \end{cases} \quad (1.25)$$

Усі три варіанти закону (1.25) корисні при розв'язуванні задач.

<sup>1</sup> Хоч за виглядом усі три варіанти (1.22) є різними функціями, їх позначають тією самою літерою  $U$ , розрізняючи за аргументами, які обрано за незалежні.

### § 1.8. Теплоємності системи за різних умов

Нехай внаслідок надання тілу теплоти  $\delta Q$  температура його підвищилася на  $dT$  градусів. Перераховану на один градус кількість теплоти називають *теплоємністю тіла*

$$C \equiv \frac{\delta Q}{dT}. \quad (1.26)$$

Отже, теплоємність тіла  $C$  чисельно дорівнює теплоті, потрібній для нагрівання його на один градус. Залежно від умов нагрівання теплоємності того самого тіла можуть бути різними. Так, теплоємність тіла за сталого тиску відрізняється від його теплоємності за сталого об'єму тощо. Для квазірівноважних процесів за допомогою другого та третього виразів (1.25) для теплоємності за сталого об'єму  $C_V$  і сталого тиску  $C_p$  дістанемо

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V; \quad C_p = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_p. \quad (1.26a)$$

Другий доданок у виразі для  $C_p$  репрезентує ту частину теплоємності, яка зумовлена виконаною тілом роботою. Вираз для  $C_V$  подібного доданку не містить, оскільки за сталого об'єму ( $dV = 0$ )  $\delta A = pdV = 0$ , тобто робота не виконується.

Між  $C_p$  і  $C_V$  існує зв'язок, який можна встановити за допомогою другого виразу співвідношення (1.25) переходом в ньому від пари параметрів  $V, T$  до пари  $p, T$ . Враховуючи, що

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT,$$

і підставивши цей вираз у другу формулу (1.25), за допомогою (1.26) дістанемо

$$C_p = \left( \frac{\delta Q}{\partial T} \right)_p = C_V + \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_p. \quad (1.26b)$$

Звідси випливає, що різниця між  $C_p$  і  $C_V$  обумовлена як залежністю внутрішньої енергії  $U$  від об'єму, так і роботою по розширенню тіла. Формула (1.26b) важлива з теоретичного погляду і з практичного, коли враховувати співвідношення

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V,$$

яке є наслідком другого принципу термодинаміки (див. § 2.5).

Враховуючи це співвідношення, а також формули (1.3) — (1.36) і (1.4), за (1.26а) дістанемо

$$C_p = C_V + T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = C_V + TV_p \alpha \beta =$$

$$(1.26в)$$

$$= C_V + TV\alpha^2 K.$$

Теплоємності тіл залежать, звичайно, від маси. *Характерними* для кожного тіла будуть *питома* та *молярна* теплоємності, тобто теплоємності, віднесені відповідно до одиниці маси і до 1 моля. Для однорідного тіла з масою  $m$  питома теплоємність

$$c = C/m. \quad (1.26г)$$

Поняття "теплоємність" виникло з потреб калориметрії і відіграло винятково важливу роль у виробленні понять і встановленні законів термодинаміки. Воно міцно закріпилося в науці, оскільки для багатьох тіл і середовищ теплоємності порівняно слабо залежать від температури й з успіхом моделюються константами на значних температурних інтервалах.

### § 1.9. Калоричне рівняння стану ідеального газу та його теплоємності

Нагадаємо, що *калоричним рівнянням стану* називають функціональну залежність внутрішньої енергії  $U$  від параметрів стану. Взнявши за незалежні параметри пару  $V, T$ , загальний вираз для калоричного рівняння стану символічно запишемо таким чином:

$$U = U(V, T). \quad (1.27)$$

Згідно з наслідками експериментів Джоуля (див. нижче) внутрішня енергія ідеального газу не залежить від об'єму  $V$ , а лише від температури  $T$ :

$$U = U(T). \quad (1.28)$$

З тієї самої серії дослідів Джоуля впливає також, що  $C_V$  ідеального газу дуже слабо залежить від температури. Цією залежністю можна знехтувати, вважаючи

$$C_V = \text{const.} \quad (1.29)$$

З (1.26) та (1.29) матимемо

$$U(T) = C_V T. \quad (1.30)$$

Довільну сталу тут не дописуємо, оскільки початковий рівень відліку енергії не має фізичного значення.

Враховуючи (1.30) та термічне рівняння стану (1.1), згідно з (1.266) знаходимо

$$C_p = C_V + (m/\mu)R, \quad (1.31)$$

або для 1 моля ( $m = \mu$ ) газу

$$C_p = C_V + R. \quad (1.32)$$

Звідси перший принцип (1.24) для ідеального газу набуває вигляду

$$\delta Q = C_V dT + p dV. \quad (1.33)$$

З формули (1.32) випливає, що  $C_p > C_V$ , оскільки  $R > 0$ . З фізичного погляду, це зрозуміло, оскільки за сталого тиску теплота зумовлює не лише підвищення температури газу, збільшуючи одночасно його внутрішню енергію (1.30), але й виконання ним роботи по розширенню

$$\delta A = p dV; \quad (1.34)$$

за сталого об'єму теплота зумовлює лише підвищення температури (тобто зростання внутрішньої енергії (1.30)).

Розглянемо схематично опис досліду Джоуля, який обгрунтовує твердження (1.28).

Всередину калориметра (рис. 39) вміщували посудину з двома відділами  $A$  та  $B$ , з'єднаними трубою з краном  $K$ , який міг перекривати доступ газу з  $A$  до  $B$ . Балон  $A$  наповнювали газом,  $B$  відкачували до вакууму. Після встановлення у калориметрі сталої температури (термодинамічної рівноваги) відкривався кран  $K$  і газ поширювався на обидва відділи посудини. Температура за показами зануреного у калориметр термометра змінювалася дуже мало (практично не змінювалася). Вважається, що якби газ був цілком ідеальним, то температура не змінювалася б зовсім (1.2). Усе це вказує на відсутність теплообміну між газом і калориметром ( $\delta Q \equiv 0$ ). Розширюючись у вакуум, газ не виконує і роботи ( $\delta A \equiv 0$ ). Тому за першим принципом термодинаміки (1.20a)

$$\Delta U \equiv 0 \Rightarrow U(T, V_1) = U(T, V_2). \quad (1.35)$$

Отже, внутрішня енергія ідеального газу  $U$  справді не залежить від об'єму. Твердження (1.28) доведено. Звідси за умови (1.29) має місце формула (1.30).

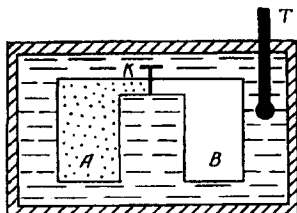


Рис. 39

Згідно зі співвідношенням (1.30) при ізотермічному розширенні ідеального газу від об'єму  $V_1$  до  $V_2$  за першим принципом термодинаміки (1.20a) матимемо  $Q = A$ . І тому за формулою (1.15) можемо записати

$$Q = A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (T = \text{const}) . \quad (1.36)$$

### § 1.10. Адіабатні процеси та робота при них. Адіабата ідеального газу

Якщо процес у системі відбувається за умов її термоізоляції, точніше, якщо надходженням теплоти до системи можна знехтувати, то такий процес називають *адіабатним*. Умовою ідеальної адіабатності буде

$$\delta Q \equiv 0 . \quad (1.37)$$

За такої умови перший принцип термодинаміки набуває вигляду

$$dU + \delta A \equiv 0 . \quad (1.38)$$

Робота, виконувана нерухомим, але деформовним тілом в адіабатному процесі, відбувається за рахунок зменшення його внутрішньої енергії

$$\delta A = -dU; \quad A_{12} = -\Delta U = U_1 - U_2 . \quad (1.39)$$

Строго адіабатні процеси — це абстракція. Але наближено вони цілком здійсненні й відбуваються в системах, вміщених в оболонку, яка погано проводить тепло і не пропускає теплового випромінювання. Адіабатними можуть бути також швидкоплинні процеси, за час яких істотний теплообмін системи з оточенням не встигає відбутися.

Спираючись на перший принцип термодинаміки, доведемо, що рівняння адіабати для 1 моля ідеального газу має вигляд

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma = \text{const} , \quad (1.40)$$

де

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} > 1 . \quad (1.41)$$

Справді, для адіабатного процесу з 1 молем ідеального газу згідно з (1.33) матимемо

$$C_V dT + pdV = 0. \quad (1.42)$$

За допомогою рівняння стану (1.1а) вилучимо з (1.42) температуру  $T$ :

$$dT = (pdV + Vdp)/R.$$

Отже, (1.41) можна переписати у формі

$$C_V(pdV + Vdp)/R + pdV = 0.$$

Звідси з урахуванням (1.32) та (1.41) неважко дістати

$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0.$$

Інтегрування отриманого рівняння дає  $\ln(pV^\gamma) = \text{const}$ , звідки й випливає шукане рівняння адиабати (1.40) для 1 моля ідеального газу. Враховуючи знов рівняння стану (1,1а), можна рівнянню адиабати (1.40) надати ще двох форм:

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const} \quad \text{та} \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (1.40a)$$

Співвідношення (1.40) та (1.40а) — це різні форми так званого *рівняння Пуассона*.

Повчальним (як буде видно з подальшого) є порівняння на  $p - V$ -діаграмі ізоТЕРМИ ( $pV = \text{const}$ ) і адиабати ( $pV^\gamma = \text{const}$ ) ідеального газу (рис. 40).

У точці перетину ( $V_0, p_0$ ) ізоТЕРМИ і адиабати перша спадає пологіше за другу. Це випливає з формул ізоТЕРМИ та адиабати:

$$p = p_0(V_0/V); \quad p = p_0(V_0/V)^\gamma. \quad (1.43)$$

Звідси, оскільки  $\gamma > 1$ , в області  $V < V_0$  адиабата йде вище за ізоТЕРМУ, а в області  $V > V_0$  — нижче за неї. Отже, в точці перетину адиабата справді спадає крутіше за ізоТЕРМУ. Це пояснюється просто: на відміну від ізоТЕРМІЧНОГО адиабатне розширення відбувається без притоку теплоти, що й зумовлює крутіше спадання тиску. Природно аналогічну до цього картину очікувати й від інших речовин, а не тільки від ідеального газу. Наслідки з такого припущення узгоджуються з експериментом.

На закінчення запишемо наслідки рівняння (1.42):

$$\delta A = pdV = -C_V dT; \quad A_{12} = C_V(T_1 - T_2). \quad (1.44)$$

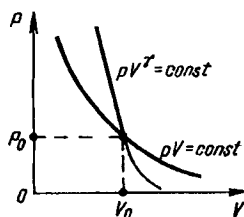


Рис. 40



## ДРУГИЙ ПРИНЦИП ТЕРМОДИНАМІКИ

### § 2.1. Напря́м теплових процесів та особлива роль теплоти

Введемо допоміжні поняття. Джерело теплоти, яке нагріває систему, називають *тепловим резервуаром* або *нагрівником*, а джерело, яке відбирає теплоту від системи (охолоджує її), — *холодильником*. Якщо теплоємності джерел теплоти великі порівнянно з теплоємністю системи, то температура джерел у процесі їх теплообміну з системою може практично не змінюватися. Ідеалізованим джерелам теплоти приписують нескінченну теплоємність і стали температуру. Такі джерела нерідко служать *термостатами*.

Як відомо, теплота завжди самочинно переходить лише від тіла з вищою температурою до тіла з нижчою, а не навпаки, хоча перший принцип термодинаміки зворотного процесу й не забороняє. Отже, першого принципу термодинаміки замало для побудови теорії теплових явищ.

Звичайно, можна змусити холодне тіло ще більше охолоджуватися, передаючи теплоту більш нагрітому: але саме цього можна досягти спеціальними засобами, а не *самочинною* теплопередачею теплоти від холодного тіла до гарячого. (Відомо ж, що холодильник, працюючи, споживає енергію, і без неї працювати не буде.)

Констатація дослідного факту про *самочинний перехід теплоти лише від тіла з вищою температурою до тіла з нижчою* і є найпростіша й найпрозоріша форма *другого принципу термодинаміки*.

Проте на практиці часто вигідніше користуватися іншим, менш наочним, але теоретично більш потужним формулюванням другого принципу, пристосованим до циклічних процесів, які відіграють винятково важливу роль у теорії теплових машин та інших пристроїв періодичної дії. Власне кажучи, існує кілька еквівалентних формулювань другого принципу [7, 26]. Ми подаємо його у формулюванні Кельвіна — Планка, зручного для розгляду саме циклічних процесів. *Не можна побудувати машину періодичної дії, уся діяльність якої зводилася б до підняття певного вантажу та відповідного охолодження теплового резервуара*.

Це конкретне й досконале для свого часу формулювання виражає загалом *неможливість циклічного процесу, єдиним результатом якого було б повне перетворення отриманої від одного нагрівника теплоти на роботу без будь-яких додаткових змін в оточуючому середовищі*.

Як одна з первинних істин (аксіом), другий принцип термодинаміки загалом не має формального доведення, а пояснюється на характерних прикладах.

Розглянемо одне евристичне міркування, спираючись на  $p - V$ -діаграму деякого оборотного циклічного процесу (рис. 41). Виграш у роботі  $A$ , яка чисельно дорівнює площі ( $A = S$ ) діаграми, отримано за рахунок того, що розширення  $1a2$

відбувалося за вищих значень тиску  $p$ , ніж стиснення  $2b1$ . Отже, і температура при розширенні  $1a2$  була вищою, ніж температура при стисненні  $2b1$ . Одержуючи теплоту (нагріваючись) від якогось нагрівника при розширенні, система повинна віддати частину цієї теплоти якомусь холодильнику (охолоджуватися) під час стиснення. У протилежному разі виграшу в роботі за цикл ( $A \neq 0$ ) не буде. Оскільки ж розглядуваний процес циклічний, то за цикл  $\Delta U = 0$ , і тому згідно з першим принципом термодинаміки (1.20a)

$$Q_n - Q_x = A > 0, \quad (2.1)$$

де  $Q_n$  — кількість теплоти, отриманої системою від нагрівника;  $Q_x$  — кількість теплоти, відданої системою холодильнику;  $A$  — виграш у роботі за цикл. (Звертаємо увагу, що у цьому разі зручно користуватися абсолютними значеннями теплот  $Q_n$ ,  $Q_x$ , відмовившись тимчасово від домовленості про знак теплоти як алгебраїчної величини.) Отже, приклад справді свідчить про те, що не можна усю теплоту, отриману від нагрівника  $Q_n$ , перетворити на роботу за цикл; частину її  $Q_x$  треба віддати холодильнику. Та в наведеному прикладі багато міркувань ідуть від інтуїції і не мають строго доказової сили. Другий принцип — це *постулат*. Прості, наочні й реальні приклади справедливості другого принципу в формулюванні Кельвіна — Планка подано у працях [26] (дослід Дарлінга), [21] (приклад Бернарді), [7] (машина з гарячим повітрям Стірлінга; парова машина) та ін.

На практиці важливо знати, яку частину одержаної від нагрівника теплоти  $Q_n$  можна перетворити на корисну роботу, та як і наскільки можна збільшити цю роботу. Розв'язання цього здавалося б суто практичного питання привело до наслідків принципового наукового значення. Ключовою тут виявилася теорема Карно, яку буде розглянуто в наступному параграфі.

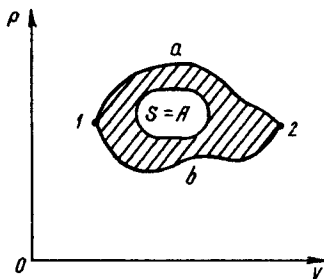


Рис. 41

За означенням, коефіцієнтом корисної дії (ККД) циклічної теплової машини називають величину

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{Q_X}{Q_H}. \quad (2.2)$$

## § 2.2. Коефіцієнт корисної дії оборотного циклу Карно. Теорема Карно

У зв'язку з неможливістю за другим принципом термодинаміки повного перетворення теплоти  $Q_H$ , отриманої від нагрівника, на корисну роботу  $A$  за цикл постає питання про можливу верхню межу ККД теплових машин. Ця межа існує й встановлюється теоремою Карно, доказом якої є аналіз так званого оборотного циклу Карно, до обговорення якого й переходимо.

Нехай у системі (робочому тілі) відбувається циклічний процес між двома тепловими резервуарами: нагрівником з температурою  $T_H$  і холодильником з температурою  $T_X$  ( $T_X < T_H$ ); і нехай цей процес складається з двох ізотерм і двох адіабат (рис. 42, 1—2—3—4—1; напрям процесу позначено стрілками).

На ділянці 1—2 внаслідок отриманої від нагрівника з температурою  $T = T_H = \text{const}$  кількості теплоти  $Q_H$  тіло ізотермічно розширяється від об'єму  $V_1$  до  $V_2$ . На ділянці 2—3 має місце адіабатне розширення від  $V_2$  до  $V_3$ ; на 3—4 тіло, віддаючи холодильнику кількість теплоти  $Q_X$ , ізотермічно ( $T = T_X = \text{const}$ ) стискується від  $V_3$  до  $V_4$ . І, врешті, цикл замикається адіабатним стисненням від  $V_4$  до  $V_1$  (ділянка 4—1). На цьому й закінчується цикл Карно.

Якщо за робоче тіло обрати ідеальний газ, то ККД за (2.2) неважко підрахувати. Справді, на ізотермічних ділянках завдяки (1.36) дістаємо

$$A_{12} = Q_H = \frac{m}{\mu} RT_H \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad A_{43} = Q_X = \frac{m}{\mu} RT_X \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (2.3)$$

Тому для ККД циклу Карно з ідеальним газом маємо

$$\eta = 1 - \frac{T_H}{T_X} \frac{\ln(V_2/V_1)}{\ln(V_3/V_4)}. \quad (2.4)$$

Оскільки ж  $V_2$  та  $V_3$ , а також  $V_4$  та  $V_1$  належать відповідно граничним точкам адіабат 2—3 і 4—1, то згідно з формулами Пуассона (1.40а) матимемо

$$T_H V_2^{\gamma-1} = T_X V_3^{\gamma-1} \quad \text{і} \quad T_H V_1^{\gamma-1} = T_X V_4^{\gamma-1}. \quad (2.5)$$

Поділивши почленно ліві й праві частини рівностей (2.5) одна на одну, легко дістанемо

$$V_2/V_1 = V_3/V_4. \quad (2.6)$$

Тому логарифми в (2.4) скорочуються, й для ККД циклу Карно остаточно маємо

$$\eta = 1 - Q_X/Q_H = 1 - T_X/T_H. \quad (2.7)$$

Отже, ККД оборотного циклу Карно з ідеальним газом  $\eta$  визначається відношенням абсолютних температур нагрівника і холодильника  $T_H/T_X$  і тільки ним.

Спираючись на другий принцип термодинаміки в формі Кельвіна — Планка, можна довести теорему Карно.

*З усіх машин, які працюють з тими самими холодильником і нагрівником, найбільший ККД мають оборотні машини, причому їх ККД не залежать від природи робочого тіла, збігаються між собою і дорівнюють*

$$\eta = 1 - T_X/T_H. \quad (2.7a)$$

Теорему Карно зручно довести в два етапи: переконатися, що ККД машини, яка виконує необоротний цикл Карно, не може перевищувати ККД машини оборотного циклу, й довести, що ККД всіх машин оборотного циклу Карно збігаються й дорівнюють (2.7), (2.7a).

Отже, нехай між нагрівником з температурою  $T_H$  і холодильником з температурою  $T_X$  працюють дві циклічні машини з ККД відповідно

$$\eta_1 = \frac{{}^1Q_H - {}^1Q_X}{{}^1Q_H} \quad \text{та} \quad \eta_2 = \frac{{}^2Q_H - {}^2Q_X}{{}^2Q_H}. \quad (2.8)$$

1. Доведемо, що у разі, коли перша машина оборотна, а друга ні, нерівність  $\eta_2 > \eta_1$  не здійсненна:

$$\eta_2 \nless \eta_1. \quad (2.9)$$

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що  $\eta_2 > \eta_1$ . Скориставшись з визначення ККД (2.2), маємо

$$A_i = \eta_i {}^iQ_H \quad (i = 1, 2). \quad (2.10)$$

Нехай машини працюють так, що кількість теплоти, що отримується у прямому (див. рис. 42) циклі Карно для них, збігається

$${}^1Q_H = {}^2Q_H \equiv Q_H. \quad (2.11)$$

Друга (необоротна) машина, працюючи в прямому циклі, нехай приводить у дію першу в оберненому циклі. Тоді в результаті такого комбінованого циклу за формулою (2.11) для загальної роботи матимемо

$$\Delta A = A_2 - A_1 = {}^1Q_x - {}^2Q_x. \quad (2.12)$$

З іншого боку, за (2.10), (2.12) та сама робота дорівнює

$$\Delta A = A_2 - A_1 = (\eta_2 - \eta_1)Q_H > 0, \quad (2.13)$$

тобто за умови  $\eta_2 > \eta_1$  вона додатна. Це значить, що теплоту  $\Delta Q = {}^1Q_x - {}^2Q_x$ , відібрану від одного джерела з температурою  $T_x$ , повністю перетворено на позитивну роботу  $\Delta A$  у циклічному процесі, що суперечить другому принципу термодинаміки. Отже, нерівність  $\eta_2 > \eta_1$  неможлива (2.9) і тому  $\eta_2 \leq \eta_1$ .

2. Припустимо тепер, що обидві машини оборотні. Тоді, помінявши їх місцями, аналогічно попереднім міркуванням можна довести, що одночасно повинні виконуватися дві нерівності:

$$\eta_2 \leq \eta_1 \text{ та } \eta_1 \leq \eta_2. \quad (2.14)$$

Останнє можливе лише у разі

$$\eta_1 = \eta_2. \quad (2.15)$$

Але для оборотного циклу Карно з ідеальним газом має місце формула (2.7). Вибираючи за першу машину з ідеальним газом, доводимо твердження, що усі оборотні машини незалежно від робочого тіла мають той самий ККД циклу Карно (2.7).

Теорему Карно повністю доведено.

Зважаючи на принципове значення теореми Карно, пропонуємо побудувати її доведення, прийнявши замість вихідної умови (2.11) іншу:

$${}^1Q_x = {}^2Q_x \equiv Q_x. \quad (2.11a)$$

Довести теорему Карно можна також спираючись на інший варіант формулювання другого закону термодинаміки: *не можна здійснити передачу теплоти від тіла з нижчою температурою до тіла з вищою температурою без будь-яких інших змін в цих тілах та оточуючому середовищі (тобто самочинно).*

Доведення можна виконати за допомогою двох циклічних машин, що виконують прямий і обернений цикл Карно, прийнявши замість умови (2.11) умову

$$A_1 = A_2 \equiv A. \quad (2.116)$$

Останнім доведенням другий принцип у формі Кельвіна—Планка зводиться до інтуїтивно очевидного і найпростішого.

### § 2.3. Ентропія як наслідок другого принципу термодинаміки

З формули (2.7) для циклу Карно випливає, що  $Q_x/Q_H = T_x/T_H$ , або

$$Q_H/T_H = Q_x/T_x. \quad (2.16)$$

Повертаючись до загального визначення теплоти як алгебраїчної величини (від якого ми тимчасово відмовилися), заміняємо  $Q_x \rightarrow -Q_x$ . Тоді (2.16) набуде вигляду

$$Q_H/T_H + Q_x/T_x = 0. \quad (2.16a)$$

Величина  $x \equiv Q/T$  дістала назву *зведеної теплоти*. Отже, сума зведених теплот циклу Карно (2.16a) дорівнює нулю. Це один з *найважливіших* наслідків теореми Карно.

Переглянувши знову міркування, викладені щодо теореми Карно, неважко переконатися, що для необоротних циклів Карно

$$Q_H/T_H + Q_x/T_x \leq 0. \quad (2.16b)$$

Узагальнення співвідношення (2.16a) на довільні оборотні кругові процеси має фундаментальне значення в термодинаміці й призводить до введення спеціальної функції стану — *ентропії* (за Клаузіусом), що відіграє ключову роль у термодинаміці та її узагальненнях на нерівноважні процеси і навіть значно ширше.

Розглянемо систему, що виконує довільний оборотний цикл (рис. 43). Площину  $p - V$  покриємо смугами ізотерм і адіабат (які йдуть крутіше за ізотерми і тому з необхідністю перетинають їх). Цикл, що розглядається, можна уявити собі як результуючий від нескінченно великої кількості циклів Карно з нескінченно вузькими адіабатно-ізотермічними петлями (смугами). Спільні ділянки кривих — меж суміжних смуг — система проходить двічі у взаємно протилежних напрямках, і тому їхні внески до результуючого процесу *компенсуються* (зазначені ділянки показано на рис. 43 штриховою лінією). Отже, згідно з загальними ідеями інтегрального числення, реальна діаграма

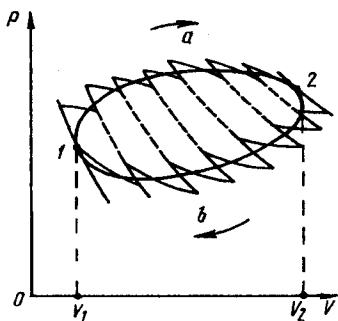


Рис. 43

циклу  $1a2b1$  спочатку апроксимуватися рімановою сумою вузьких смуг Карно, а далі ширина кожної елементарної смуги Карно можна написати рівність типу (2.16а)

$$\frac{\delta Q_a}{T_a} + \frac{\delta Q_b}{T_b} = 0. \quad (2.17)$$

У сумі по всіх смугах (коли ширина останніх прямує до нуля) дістанемо

$$\int_{(1a2)} \frac{\delta Q}{T} + \int_{(2b1)} \frac{\delta Q}{T} = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (2.18)$$

Символ  $\oint$ , як це прийнято в математиці, відповідає інтегралу по замкненому контуру ( $1a2b1$ ). Співвідношення (2.18) і становить шукане узагальнення формули (2.16а) на довільні оборотні процеси<sup>1</sup>.

Згідно з теоремами аналізу, якщо інтеграл по замкненому контуру дорівнює нулю, то вираз під інтегралом становить повний диференціал деякої функції параметрів інтегрування, які для оборотних процесів збігаються з незалежними параметрами стану. Позначимо згадану функцію через  $S = S(p, V)$ . Тоді можна стверджувати, що

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.19)$$

Функція  $S$  і дістала назву *ентропія*<sup>2</sup> (за Клаузіусом).

З (2.18) з урахуванням (2.19) випливає, що

$$\int_{(1a2)} \frac{\delta Q}{T} = - \int_{(2b1)} \frac{\delta Q}{T} = \int_{(1b2)} \frac{\delta Q}{T} = \int_{(1-2)} dS = S_2 - S_1, \quad (2.20)$$

де  $S_i$  — значення ентропії  $S$  у стані  $p_i, V_i$ :

$$S_i = S(p_i, V_i). \quad (2.21)$$

Якщо довільно фіксувати значення ентропії  $S$  у деякому початковому стані  $p_0, V_0$  (подібно до фіксації рівня відліку енергії),

<sup>1</sup> Детальніші міркування щодо переходу від (2.16а) до (2.18) можна знайти у праці [44].

<sup>2</sup> Термін *ентропія* походить від грецького слова *τροπε* — *перетворення*.

то за допомогою (2.20) ентропія може бути виражена з точністю до адитивної константи  $S_0$ :

$$S(p, V) = \int_{(p_0, V_0)}^{(p, V)} \frac{\delta Q}{T} + S_0. \quad (2.22)$$

З математичного погляду, існування функції (2.22) показує, що диференціальна 1-форма (один-форма)

$$\delta Q = dU + pdV, \quad (2.23)$$

яка виражає перший принцип термодинаміки, має обернену абсолютну температуру  $1/T$  за інтегрувальний множник

$$dS = \frac{1}{T} \{dU + pdV\}. \quad (2.24)$$

Тому, розглядаючи ентропію як функцію стану, зручно вибрати таку пару незалежних параметрів стану, яка містила б  $T$  (наприклад, пару  $T, V$ ). Тоді згідно з (2.24) матимемо

$$dS = \frac{1}{T} \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV \right\}. \quad (2.25)$$

Зокрема, для ідеального газу згідно з (1.30) дістанемо

$$dS = \frac{1}{T} \{C_V dT + pdV\}. \quad (2.26)$$

Взявши до уваги рівняння стану (1.1a), для 1 моля ідеального газу завдяки (2.26) знаходимо

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}. \quad (2.27)$$

Як бачимо, змінні  $T, V$  розділилися, і тому інтегрування (2.27) від стану  $V_0, T_0$  до  $V, T$  буде безпосереднім:

$$S(T, V) - S_0 = C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0}. \quad (2.28)$$

Отже, для ідеального газу в рівновазі ентропія  $S$  (з точністю до сталої  $S_0$ ) відома. Неважко довести, що ентропія довільної маси  $m$  ідеального газу пропорційна  $m$ :

$$S_m(T, V) - S_m^0 = \frac{m}{\mu} \left\{ C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} \right\}. \quad (2.28a)$$

Взагалі для однорідних систем (таких як тут розглядаються, коли можна знехтувати поверхневими ефектами порівняно з



об'ємними) ентропія пропорційна масі, і тому можна ввести *питому ентропію*

$$s(T, V) = \frac{1}{m} S(T, V) \quad (2.29)$$

як одну з *характеристичних функцій системи*.

На відміну від *інтенсивних величин* (типу тиску  $p$  і температури  $T$ ), які не залежать від кількості речовини, ентропія  $S$  разом із внутрішньою енергією  $U$  належать до множини *екстенсивних* (пропорційних масі) величин.

Фізичний сенс ентропії як функції стану в рамках феноменологічної термодинаміки не дуже виразний<sup>1</sup>. Глибина її суть розкривається пізніше — у статистичній фізиці та фізичній кінетиці. Про це мова попереду. Але дещо можна з'ясувати і в межах термодинаміки, полегшуючи сприйняття нової фізичної величини — ентропії (2.22).

Згідно з (2.22) ентропія  $S$  з точністю до константи  $S_0$  дорівнює сумі *зведених теплот*  $dx = \frac{\delta Q}{T} = \{dV + pdV\}/T$ . Що ж до константи  $S_0$ , то згідно з теоремою Нернста (яка виходить, як правило, за межі загальних курсів фізики), її також можна визначити, спираючись на граничне твердження

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T, V) = 0.$$

Саме це твердження й становить зміст теореми Нернста, яку називають ще *третьім принципом термодинаміки*. Та довільна константа  $S_0$  не стає на заваді в задачах, де достатньо знайти  $dS$  або  $\Delta S$ .

Для оборотних адіабатних процесів, які характеризуються відсутністю теплообміну системи з оточенням ( $\delta Q \equiv 0$ ), маємо

$$dS = 0 \Rightarrow S = \text{const}. \quad (2.30)$$

Тому ці процеси називаються ще *ізоентропійними*.

Зазначимо, нарешті, що будь-яку функцію параметрів стану, в свою чергу, можна обрати за параметр стану. При цьому вибір незалежних параметрів розширюється, що дає змогу добирати їх у кожній задачі найбільш раціонально. Серед корисних параметрів можна назвати п'ять:  $p$ ,  $V$ ,  $T$ ,  $U$ ,  $S$ . Для цієї п'ятірки існує три рівняння зв'язку, залишаючи незалежними два параметра з п'яти:

$$\begin{aligned} p &= p(V, T) \text{ — термічне рівняння стану;} \\ U &= U(V, T) \text{ — калоричне рівняння стану;} \\ S &= S(V, T) \text{ — ентропія як функція стану.} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Пропонуємо для вправи вивести рівняння адиабати ідеального газу (1.40), (1.40а) згідно з виразом для його ентропії (2.28) та умовою адіабатності (ізоентропійності  $dS \equiv 0$ ), а також зобразити цикл Карно на  $T-S$ -діаграмі. Існування спеціальної функції стану (ентропії), впливає, як бачимо, з другого прин-

<sup>1</sup> З цього приводу див. коментар у праці [35, с. 51].

ципу термодинаміки. Скориставшись з рівності (2.19) та першого принципу термодинаміки (1.24), для оборотних процесів матимемо

$$TdS = dU + pdV. \quad (2.32)$$

Це співвідношення втілює в собі наслідки одночасно першого й другого принципів термодинаміки і називається *рівнянням Гіббса*.

З введенням ентропії  $S$  з'являється універсальна формула для кількості теплоти  $\delta Q$ , переданої тілу в оборотному процесі:  $\delta Q = TdS$ , яка за своєю формою нагадує відповідну формулу для роботи  $\delta A = pdV$ . Та схожість ця чисто формальна, оскільки немає універсальної і незалежної від попереднього визначення  $\delta Q$  процедури експериментального вимірювання ентропії.

#### § 2.4. Про зростання ентропії у необоротних процесах

Квазістатичні (оборотні) процеси відбуваються внаслідок плавної (достатньо повільної) зміни зовнішніх параметрів (зовнішніх умов (17)): температури, тиску, об'єму тощо. До такої плавної зміни умов система адаптується майже синхронно.

Необоротні ж процеси можуть відбуватися як під дією досить різкої зміни зовнішніх факторів, так і чисто внутрішніх причин (наприклад, появи внутрішніх перепадів температур, тисків тощо). Такі (необоротні) процеси називають *природними*, бо вони відбуваються *самочинно*, внаслідок чого ентропія завжди зростає. Для ілюстрації цієї фундаментальної закономірності розглянемо типовий приклад природного (необоротного) процесу.

Нехай всередину адіабатної (теплонепроникної) оболонки вміщено й приведено у тепловий контакт два однорідних невеликих за розмірами тіла з різними температурами  $T_1, T_2 (T_1 > T_2)$  й достатньо високою теплопровідністю<sup>1</sup>. Тоді теплота від тіла 1 потече до тіла 2. Нехай за час  $dt$  перейшла таким чином кількість теплоти  $\delta Q$ . Тоді ентропії першого й другого тіл зміняться відповідно на

$$dS_1 = -(\delta Q/T_1); \quad dS_2 = \delta Q/T_2. \quad (2.33)$$

Сумарна зміна ентропії системи в цілому дорівнюватиме

<sup>1</sup> Малі розміри тіл, висока їхня теплопровідність та плоска границя між ними потрібні тут для того, щоб знехтувати перепадами температур, які виникають у межах кожного з двох тіл.

$$dS = dS_1 + dS_2 = \delta Q \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} > 0. \quad (2.34)$$

Нерівність (2.34) випливає з умови, що  $T_1 > T_2$ .

Отже, внутрішній (самочинний) теплообмін справді веде до зростання ентропії системи  $dS > 0$  (згідно (2.34)), яке буде продовжуватися до повного вирівнювання температур ( $T_1 \rightarrow T_2$ ). Зростання ентропії внаслідок *природних* (самочинних) процесів є *універсальною закономірністю природи*. Такі процеси завжди необоротні.

Якщо система описаного типу не ізольована адіабатно, то її ентропія буде змінюватися у зв'язку з припливом теплоти ззовні і внутрішнім теплообміном. Позначимо ці зміни відповідно через  $dS_e$  і  $dS_i$ <sup>1</sup>. Сумарна зміна ентропії становитиме

$$dS = dS_e + dS_i. \quad (2.35)$$

Для внутрішнього теплообміну справедливе твердження (2.34)

$$dS_i = \delta Q_i \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} > 0. \quad (2.36)$$

Віднесена до одиниці часу внутрішня частина приросту ентропії

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{\delta Q_i}{dt} \left\{ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right\} > 0 \quad (2.37)$$

дістала назву *виробництва (продукування) ентропії*. *Виробництво ентропії завжди додатне* (точніше, *невід'ємне*).

## § 2.5. Додатково про ентропію як функцію стану та про термодинамічну температуру<sup>2</sup>

За формулою (2.19) диференціал ентропії визначається елементарною зведеною теплотою

$$dS = \delta x = \frac{\delta Q}{T}; \quad (2.38)$$

$\delta Q$  — кількість теплоти, надана системі оборотним чином. Твердження (2.38) вимагає певного додаткового пояснення. Його слід розуміти аналогічно відомому твердженню про диференціал механічної енергії системи  $dE$ , який визначається роботою неконсервативних сил  $dE = \delta A$ .

<sup>1</sup>  $e$  — external;  $i$  — internal (англ.).

<sup>2</sup> Цей параграф при першому перегляді курсу можна опустити, повернувшись до нього наприкінці вивчення.

Ентропія  $S$  (як і механічна енергія  $E$ ) є функцією відповідних параметрів стану системи, в той час як зведена теплова  $\delta x = \delta Q/T$  (як і механічна робота  $\delta A$ ) — це не зв'язані зі станом системи фактори, а чисто зовнішні, які проте призводять до зміни внутрішнього стану системи. Ентропія  $S$  та її диференціал  $dS$ , як і енергія  $E$  в механіці, задається внутрішніми факторами

$$dS = \frac{1}{T} \{dU + pdV\} \quad (2.39)$$

і згідно з (2.39) визначається змінами внутрішньої енергії системи ( $dU/T$ ) та її об'єму ( $pdV/T$ ). Проте ці зміни зумовлені зовнішнім чинником  $\delta x = \delta Q/T$  і в сумі чисельно дорівнюють йому. Отже, якщо бути точним, то диференціал ентропії  $dS$  визначає лінійна диференціальна форма  $\frac{1}{T}\{dU + pdV\}$ , а не рівність (2.38), яка відображає лише закон природи, за яким диференціал (приріст)  $dS$  породжується й чисельно дорівнює отриманій системою зведеної теплоті  $\delta x = \delta Q/T$ . Рівності типу (2.38) не є *дефініціями* відповідних фізичних величин, а є *законами природи* й визначають лише ті кількісні зміни, які відбуваються з відповідними функціями стану системи під дією зовнішніх чинників. Досвід свідчить, що для початківця такі зауваження конче потрібні. (Рекомендуємо поміркувати над цим.)

Фундаментальні висновки з другого принципу термодинаміки суттєво ґрунтувалися на теоремі Карно, зокрема на формулі (2.7). Але абсолютну температуру  $T$  було запроваджено поки що за допомогою газових термометрів на основі законів ідеальних газів. Це, строго кажучи, обмежує всі попередні висновки певним температурним інтервалом. Тому не визначено, який зміст має інтегрувальний множник  $1/T$ , а з ним і ентропія  $S$  (2.24), (2.39) за межами відповідного температурного інтервалу, тобто, що слід розуміти під  $T$  за межами дії ідеальних газових законів. Для з'ясування цієї проблеми було аналітично введено так звану *термодинамічну температуру*, яка є узагальненням на довільні температурні інтервали абсолютної температури  $T$ , визначеної за допомогою газового термометра. Мова йтиме перш за все про принципову можливість такого узагальнення, а не про практичні методи визначення  $T$ .

Існує кілька еквівалентних підходів до її загального визначення. Відсилаючи до формально простих варіантів [5, 38, 44], детально обміркуємо більш фундаментальний, на наш погляд, підхід [7]. В основу його покладено універсальність ККД циклу Карно (2.15) для будь-якого робочого тіла, встановлену на бази

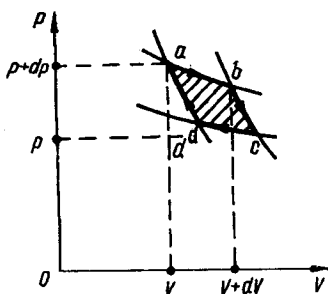


Рис. 44

другого принципу термодинаміки і ніяк не пов'язану із законами ідеальних газів та з формулою (2.7). Навпаки, термодинамічна температура  $T$  визначається так, щоб формула (2.7) не залежала від газових законів. Для цього використовується популярний у термодинаміці метод циклів. Розглянемо нескінченно малу "петлю" (цикл) Карно (рис. 44). Для формальної прив'язки термодинамічної

температури до шкали Кельвіна, побудованої на базі газових законів, перепишемо (2.7) у формі

$$\eta = A/Q = \Delta T/T, \quad (2.40)$$

де  $A = Q - Q'$  — робота за цикл Карно;  $Q, Q'$  — кількість теплоти, отриманої від нагрівника й відповідно відданої холодильнику;  $T$  — температура нагрівника;  $\Delta T$  — різниця температур нагрівника й холодильника. Для нескінченно малої "петлі" Карно (див. рис. 44) рівність (2.40) набирає вигляду

$$dT/T \equiv (\delta^2 A)/\delta Q \quad (2.40a)$$

( $\delta^2 A$  і  $\delta Q$  — малі величини другого (див. далі (2.41)) і першого (2.42) порядків мализни). Це диференціальне співвідношення ми й покладемо в основу термодинамічного визначення температури на довільних її інтервалах. Робота  $\delta^2 A$  за цикл чисельно дорівнює площі, охопленій "петлею" Карно, яка з точністю до малих вищого порядку дорівнює

$$\delta^2 A = dp dV = (\partial p / \partial T)_V dT dV. \quad (2.41)$$

Для отриманої від нагрівника кількості теплоти  $\delta Q$  згідно з (1.25a) маємо

$$\delta Q = \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} dV. \quad (2.42)$$

Тому із зазначеною вище точністю рівність (2.40a) набуває форми

$$\frac{dT}{T} = \left\{ \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT \right\} / \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\}. \quad (2.43)$$

Далі діятимемо за двома різними схемами. Перша — тривіальна й полягає в скороченні обох частин рівності (2.43) на безмежно малу величину  $dT$  та отриманні рівності

$$\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V / \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\}. \quad (2.43a)$$

(До неї ми ще повернемося.) Співвідношення (2.43a) можна розглядати як *функціональне рівняння* стосовно температури  $T$ , яке в принципі можна було б розв'язати, коли б були відомі термічне й калоричне рівняння стану (2.31). Та вже саме лише існування рівності (2.43a) науково значиме (див. далі формулу (2.51) та ін.).

Друга схема подальшої роботи із співвідношенням (2.43) зовсім інша. Насамперед зазначимо, що вихідна формула (2.40a) гарантує зростання  $T$  зі зростанням ступеня нагрівання тіла, оскільки  $dT > 0$ ; отже,  $T$  справді може бути мірою температури як ступеня "нагрітості" тіла. Природно припустити, що між термодинамічною температурою  $T$  і будь-якою з емпіричних температур  $t$  існує *взаємно однозначний зв'язок*

$$T = T(t); \quad t = t(T). \quad (2.44)$$

Враховуючи інваріантність форми першого диференціала

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT = \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_V dt$$

та вважаючи всі величини, які входять до (2.43), заданими функціями емпіричної температури  $t$ , перепишемо (2.43) у вигляді

$$\frac{dT}{T} = \left\{ \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_V dt \right\} / \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_t + p \right\}. \quad (2.43b)$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності вздовж певної ізобари<sup>1</sup>, дістанемо

$$\ln \frac{T}{T_0} = \int_{t_0}^t \left\{ \left( \frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_V d\tau \right\} / \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_\tau + p \right\}.$$

Звідки

$$T = T_0 e^{\int_{t_0}^t \left\{ \left( \frac{\partial p}{\partial \tau} \right)_V d\tau \right\} / \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_\tau + p \right\}} \quad (2.44a)$$

<sup>1</sup> Насправді права частина (2.44a) залежить лише від температури  $T$  [35]. Тому саме ізобару вибрати не обов'язково.

Початкову температуру  $T$ , яка відповідає емпіричній  $t_0$ , треба задати довільно. Це рівнозначно вибору одиниці вимірювання температури. Звичайно, мова тут йде швидше про доведення існування термодинамічної температури  $T$  (2.44), (2.44а), ніж про її *реальне* обчислення. Проте в принципі можна казати й про практичне обчислення  $T$  за даними експерименту, хоча це й не проста справа. З цією метою можна, наприклад, повернутися до рівності (2.43а), переписавши її таким чином:

$$T = \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right\} / \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V. \quad (2.43в)$$

З огляду на (1.25а) чисельник у цій формулі можна подати у вигляді

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p = \left( \frac{\delta Q}{\delta V} \right)_T, \quad (2.45)$$

де  $\left( \frac{\delta Q}{\delta V} \right)_T$  — перерахована на одиничний *приріст* об'єму  $dV$  кількість теплоти в елементарному процесі ізотермічного розширення робочого тіла. Що ж до знаменника (2.43в), то з урахуванням (1.3в) і (1.4)

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \beta p = \alpha K. \quad (2.46)$$

Отже, дістаємо пов'язану з експериментом розрахункову формулу

$$T = \left( \frac{\delta Q}{\delta V} \right)_T / \alpha K, \quad (2.47)$$

якою й можна скористатися на практиці; проте краще спиратися на існуючі непрямі методи визначення  $T$ . Вказаним вище й обмежимося.

Як і в разі з рівнянням стану (калоричним і термічним), вже сама *принципова можливість* визначення термодинамічної температури  $T$  (2.43а), (2.44), (2.47) відіграє велику роль: зокрема, дає змогу поширити визначення ентропії  $S$  (2.24) як функції стану системи на всі температурні інтервали.

Власне кажучи, відомо, що інтегрувальний множник лінійної диференціальної форми з двома незалежними параметрами (1.24) завжди існує (і не один). Наслідком другого принципу термодинаміки є лише той *принциповий* факт, що серед інтегру-

вальних множників 1-форми<sup>1</sup> (1.24) є обернена абсолютна температура  $1/T$ . Скориставшись з визначення термодинамічної температури за допомогою (2.40а) (звідки, зокрема, випливають (2.43), (2.43а), (2.43в)), покажемо, що  $1/T$  справді є інтегральним множником 1-форми (1.24) при всіх  $T$ . Для цього нагадаємо деякі математичні факти.

Для того щоб лінійна диференціальна форма (1-форма) вигляду

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (2.48)$$

була повним диференціалом  $dF$  деякої функції  $F(x, y)$ , необхідно й достатньо, щоб виконувалася умова [5, 40]

$$\partial M/\partial y = \partial N/\partial x. \quad (2.49)$$

Обираючи за незалежні зміни  $V$  і  $T$ , перепишемо 1-форму:

$$\delta Q = dU + p dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right\} dV. \quad (2.50)$$

Прямим обчисленням похідних можна довести, що за умови (2.43в), яка випливає з визначення термодинамічної температури (2.43а), має місце рівність

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial V} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \frac{1}{T} \right\} \right\rangle_T = \left\langle \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \right] \right\} \right\rangle_V, \quad (2.51)$$

яка втілює умови (2.40) для 1-форми:

$$dS = \frac{1}{T} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p \right] dV \right\} \quad (2.52)$$

і тим самим визначає ентропію  $S$  як функцію стану. Отже, (2.52) завжди є повним диференціалом, а  $S$  — функцією стану. (Рекомендуємо перевірити виконання (2.51) за умови (2.43в).) Цю останню умову зручно переписати у формі

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p, \quad (2.53)$$

якою часто користуються в термодинаміці. Співвідношення (2.53) можна розглядати також як зв'язок (у дифе-

<sup>1</sup> За новітньою термінологією лінійна диференціальна форма називається 1-формою. Для системи з багатьма ( $> 2$ ) незалежними параметрами ентропія запроваджується інакше (за принципом Каратеодорі [26]).



ренціальній формі) між термічним ( $U = U(V, T)$ ) і калоричним ( $p = p(V, T)$ ) рівняннями стану.

Для систем з багатьма параметрами стану (яких ми тут для простоти не розглядаємо) ентропія впроваджується за принципом Каратеодорі [26].

У рамках термодинаміки залишається дещо загадковим зміст винятково важливої характеристичної функції — ентропії  $S$ . Розшифровка глибинного змісту ентропії належить Больцману. На жаль, у межах загального курсу можливі лише певні загальні пояснення з цього приводу.

На основі аналізу властивостей ентропії  $S$  в термодинаміці та здобутків статистичного підходу до молекулярно-кінетичного пояснення термодинамічних процесів Больцман висунув гіпотезу про те, що ентропія  $S$  у загальному випадку повинна бути величиною, пропорційною логарифму так званої термодинамічної<sup>1</sup> ймовірності  $W$ :

$$S = k \ln W. \quad (a)$$

Тут  $k = R/N_A$  — стала Больцмана;  $N_A$  — число Авогадро.

Як усякий постулат, твердження (a) не має строгого формального й апріорного доведення. На його користь наперед можна висловити лише певні правдоподібні міркування. Істинність же його утверджується узгодженням усіх наслідків з експериментом.

Найвагомішими апріорними аргументами на користь гіпотези (a) є:

1) адитивність, що випливає з термодинамічного визначення ентропії рівноважних станів, тобто ентропія  $S$  системи, яку можна розбити на  $n$  частин, взаємодією між котрими можна знехтувати, становить суму ентропій цих частин:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n; \quad (б)$$

2) зростання ентропії, яке супроводжує самочинні (спонтанні) термодинамічні процеси,

$$\Delta S > 0; \quad (в)$$

зокрема, таким зростанням супроводжується релаксація систем до стану термодинамічної рівноваги.

Умови (б), (в) цілком забезпечуються формулою Больцмана (a). Справді:

1) теорема множення ймовірностей

$$W = W_1 \cdot W_2 \cdot \dots \cdot W_n \quad (г)$$

згідно з постулатом Больцмана забезпечує адитивність ентропії

$$S = k \{\ln W_1 + \ln W_2 + \dots + \ln W_n\} = S_1 + S_2 + \dots + S_n; \quad (д)$$

2) припускаючи, що рівновазі відповідає *найбільш ймовірний* стан, бачимо, що формула Больцмана (a) сприяє також зростанню ентропії в процесах релаксації систем до стану рівноваги (в).

Звичайно, перелічених властивостей Больцманової ентропії (a) замало для її визнання. Та за сучасною наукою узгодження постулату (a) з іншими теоретичними концепціями та з експериментом є забезпеченим. Взагалі кажучи, достатньою базою для утвердження постулату (a) були вже роботи самого Больцмана, а також Гіббса, Планка та інших учених. На жаль, поглиблене обговорення пов'язаних з (a) питань виходить за межі загальних курсів [35]. Тому обмежимося лише ще одним зауваженням та одним елементарним прикладом.

<sup>1</sup> Досить просте роз'яснення поняття *термодинамічна ймовірність*  $W$  та його схожість з *математичною ймовірністю*  $w$  і відмінність від неї можна знайти у праці [34]. Грубо кажучи,  $W$  становить число мікророзподілів частинок, які відповідають тому самому макростану системи.

Не спиняючись на питанні конструювання термодинамічної ймовірності  $W$  для тих чи інших систем, вкажемо, що максимізація виразу (а) з певним чином конкретизованими  $W_i$  призводить до рівноважних значень ентропії  $S$  як функції відповідних параметрів стану [35]. Цим зауваженням й закінчимо загальне обговорення формули (а).

Розглянемо елементарний приклад. Згідно з (2.27) ізотермічне ( $T = T_0 = \text{const}$ ) розширення ( $V_0 \rightarrow V$ ) моль ідеального газу призводить до приросту його ентропії  $\Delta S$

$$\Delta S = S - S_0 = R \ln \frac{V}{V_0} = k \ln \left( \frac{V}{V_0} \right)^{N_A}. \quad (e)$$

Але можна довести (див., наприклад, [34]), що вираз  $\left( \frac{V}{V_0} \right)^{N_A}$  збігається з відношенням відповідних термодинамічних ймовірностей у рівновазі

$$\frac{W}{W_0} = \left( \frac{V}{V_0} \right)^{N_A}. \quad (e)$$

Тому  $S - S_0 = k \{ \ln W - \ln W_0 \}$ . Ототожнюючи відповідні доданки ( $S = k \ln W$  і  $S_0 = k \ln W_0$ ), приходимо до формули Больцмана (а) в розглядуваному конкретному прикладі.

Постулат Больцмана (а) розкриває глибинну суть ентропії  $S$ , яка в межах термодинаміки була дещо загадковою. Стає цілком зрозумілим, зокрема, її зростання в процесах релаксації до стану рівноваги і т. д. Усе це детально обговорюється в межах курсів теоретичної фізики.

## § 2.6. Характеристичні функції

У короткому курсі загальних основ фізики немає змоги розглянути методи розв'язання різноманітних практичних і теоретичних проблем. Це є предметом вивчення спеціальних курсів (прикладного й теоретичного характеру). Основна ж мета короткого загального курсу — викладення *фундаментальних законів і вихідних концепцій*. Ї все ж варто хоча б побіжно згадати про так звані характеристичні функції, що відіграють важливу роль у розгорнутому вченні про теплоту.

Ентальпія  $H$ . Ентальпією, або тепловою функцією, називають функцію вигляду  $H \equiv U + pV$ .

За умови сталого тиску ( $p = \text{const}$ ) згідно з першим принципом термодинаміки (1.24) диференціал  $dH$  і приріст  $\Delta H$  ентальпії визначаються кількістю наданої системі теплоти:

$$dH = dU + pdV = \delta Q; \quad \Delta H = \Delta U + p\Delta V = Q.$$

Звідси й назва — *теплова функція*. Очевидно, що

$$C_p = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_p. \quad (2.54)$$

Вільна енергія  $F$ . Вільною енергією називають функцію вигляду

$$F = U - TS, \quad (2.55)$$

де  $S$  — ентропія системи. За умови сталої температури ( $T = \text{const}$ ) та з огляду на співвідношення (2.32) матимемо

$$dF = dU - TdS = dU - \delta Q = -pdV = -\delta A. \quad (2.56)$$

Отже, в ізотермічних процесах ( $T = \text{const}$ ) робота  $\delta A$  виконується системою за рахунок її вільної енергії  $F$ :

$$\delta A = -dF. \quad (2.56a)$$

Порівнюючи це з виразом для роботи  $\delta A$  (1.39) в адиабатному процесі ( $\delta Q \equiv 0$ , або  $S \equiv \text{const}$ )

$$\delta A = -dU, \quad (2.57)$$

бачимо, що в такому процесі робота  $\delta A$  виконується за рахунок внутрішньої енергії  $U$ . З рівності (2.56) випливає, що

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T. \quad (2.58)$$

Термодинамічний потенціал  $\Phi$ . Введемо функцію

$$\Phi \equiv U - TS + pV, \quad (2.59)$$

яку називають *термодинамічним потенціалом*. Він пов'язаний з ентальпією  $H$  та вільною енергією  $F$  співвідношеннями

$$\Phi = \begin{cases} H - TS; \\ F + pV. \end{cases} \quad (2.60)$$

Повний диференціал  $d\Phi$  згідно з (2.32) дорівнює

$$d\Phi = -SdT + Vdp. \quad (2.61)$$

Звідси

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p; \quad V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T. \quad (2.62)$$

Розглянуті вище та деякі інші характеристичні функції відіграють важливу роль у термодинаміці та її застосуваннях [5, 7, 26, 38]. Зокрема, вони важливі з погляду зіставлення феноменологічної термодинаміки з молекулярно-кінетичною теорією (точніше, статистичною фізикою).

## ФАЗОВІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

### § 3.1. Агрегатні стани речовини

Як відомо, одна й та сама речовина може перебувати в різних агрегатних станах. Наприклад, вода ( $H_2O$ ) може бути в твердому (лід), рідкому (вода) та газоподібному (водяна пара) станах. Різноманітність агрегатних станів досить велика і не зводиться лише до твердого, рідкого та газоподібного станів. Тіла також поділяються на аморфні, кристалічні (причому деякі з них мають різні кристалічні модифікації), рідини, гази, плазму, ядерну матерію та ін. Нарешті, тверді тіла можуть бути монокристалічними, або полікристалічними. (Повна розшифровка використаних термінів подана у праці [39].)

За достатньо низьких температур тіла, звичайно, перебувають у твердому стані. Підвищуючи температуру твердих тіл, можна довести їх до так званої точки плавлення<sup>1</sup> ( $T = T_{пл}$ ), після якої ( $T > T_{пл}$ ) тверді тіла переходять у рідкий стан. Нарешті, нагріваючи рідину, можна довести її до кипіння й переходу до газоподібного стану. Щоправда, існують тіла, які за певних умов переходять з твердого одразу до газоподібного стану, обминаючи рідкий (сублимація). Усе це ми побіжно нагадали з програми елементарного курсу фізики. (Рекомендуємо повторити цей розділ.) Гадаємо, що читачеві відомі також калориметричні особливості процесу плавлення та кипіння (зокрема, поняття про приховану теплоту цих процесів).

Різні агрегатні стани речовини називають ще її *фазами*. (Точніше й детальніше визначення фази подано, наприклад, у праці [39].) Цей термін, звичайно, використовується у випадках, коли у тепловому контакті в єдиній термодинамічній системі співіснують фрагменти речовини, які перебувають у різних агрегатних станах (наприклад, рівновага рідини зі своєю парою в замкненій посудині тощо). Отже, навіть однорідна за хімічним складом термодинамічна система може складатися з різних фаз речовини, що перебувають між собою в термодинамічній рівновазі. Змінюючи температуру або тиск у системі, можна змінювати й кількісні пропорції співіснуючих у рівновазі фаз речовини.

Переходи речовини з однієї фази до іншої називають *фазовими*. Підпорядковані вони певним термодинамічним законо-

---

<sup>1</sup> Не всі тіла мають фіксовані значення температури плавлення; вже бінарні сплави металів, наприклад, характеризуються цілим інтервалом температур твердо-рідкого стану. Тут розглядаються лише чисті метали (див. далі).

мірностям. Так, при переході від твердої до рідкої, а далі й до газоподібної фази стрибками змінюються деякі фізичні характеристики речовини (наприклад, густини рідини й рівноважної з нею пари, як правило, різні). Розглянемо лише деякі закономірності переходу рідини в пару й навпаки, а також деякі аспекти процесу тверднення кристалічних тіл, як приклади фазових переходів.

### § 3.2. Ізотерми реальних газів

Ізотерми реальних (тобто недостатньо розріджених) газів відрізняються від розглянутих нами в § 1.5. Сукупність ізотерм реальних газів та відповідних їм рідин схематично зображено на  $p - V$ -діаграмі (рис. 45); причому горизонтальні ділянки ізо-

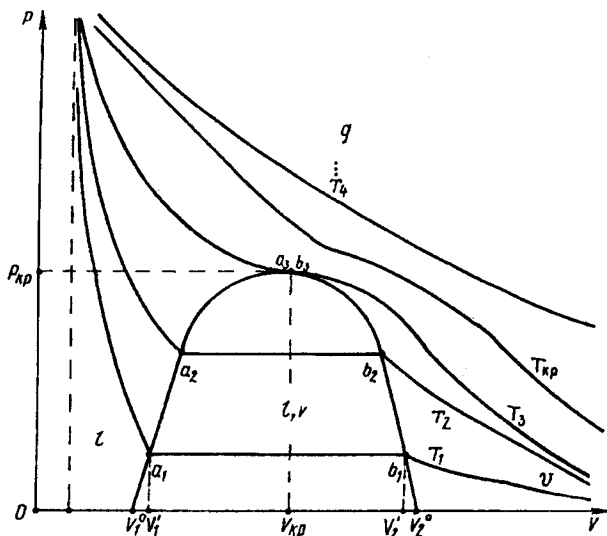


Рис. 45

терм ( $a_i, b_i$ ) відповідають співіснуванню в рівновазі рідини зі своєю парою, тобто співіснуванню двох фаз речовини — рідкої і газоподібної. Отже, точніше було б вести мову не про ізотерми реальних газів (див. рис. 45), а про такі ізотерми, що охоплюють і рідкий, і газоподібний стани речовини.

Як видно з рисунка, горизонтальні ділянки ( $a_i, b_i$ ) ізотерми мають лише до певної (критичної) температури  $T = T_{кр}$ . При підвищенні температури (яка для кожної ізотерми є фіксованою) ці ділянки звужуються, перетворюючись при  $T = T_{кр}$  на точку перегину ( $V_{кр}, p_{кр}$ ) з горизонтальною дотичною. З підви-

шенням температури ( $T > T_{кр}$ ) ізотерми стають дедалі гладкішими й нарешті переходять в ізотерми ідеальних газів (див. § 1.5). Розглянемо детальніше фізичну картину описаних вище ізотермічних процесів (див. рис. 45).

Нехай під поршнем у прямому циліндрі знаходяться в стані динамічної рівноваги при фіксованій температурі ( $T_i = \text{const}$ ) певна рідина зі своєю насиченою парою (рис. 46). За великих об'ємів  $V > V_n^i$  у циліндрі знаходиться лише пара. При квазірівноважному стиску (зменшення  $V$ ), починаючи з об'єму  $V = V_n^i$ , частина пари конденсується в рідину. При подальшому стиску маса рідини збільшується й відповідно зменшується маса пари. Нарешті, починаючи з об'єму  $V = V_l^i$ , у циліндрі вже буде сама рідина (пара повністю сконденсується). Дуже мала стисливість рідини спричинює дуже швидке зростання тиску зі зменшенням об'єму ( $V < V_l^i$ ). При розширенні системи процеси відбуватимуться в зворотному порядку. Як уже зазначалося, горизонтальні ділянки ізотерм ( $a_i, b_i$ ) звужуються при підвищенні температури. При досягненні критичного стану ( $V_{кр}, p_{кр}$ ) зникає різниця між парою і рідиною; речовина стає однорідною. Ізотерма, що проходить через точку ( $V_{кр}, p_{кр}$ ), називається *критичною*. Арка та критична ізотерма (див. рис. 45) ділять  $p$ — $V$ -площину на чотири частини: в області  $l$  речовина є рідиною (liquidus); в області  $v$  — парою (vapor); у межах області  $l, v$  пара й рідина співіснують у динамічній рівновазі; нарешті, в області  $g$  речовина знаходиться в газоподібному стані (gas). В області  $l, v$  тиск  $p$  та густини рідини  $\rho_l$  і пари  $\rho_g (= \rho_v)$  залежать лише від температури  $T\{p = p(T); \rho_l = \rho_l(T); \rho_g = \rho_g(T)\}$ . Це дає можливість на базі основних законів термодинаміки встановити так зване рівняння Клаузіуса—Клапейрона, яке визначає залежність тиску  $p$  насиченої пари від температури  $T$  при заданих густинах  $\rho_l, \rho_v$  та заданій прихованій теплоті пароутворення  $\lambda$ . Рівняння Клаузіуса—Клапейрона має вигляд

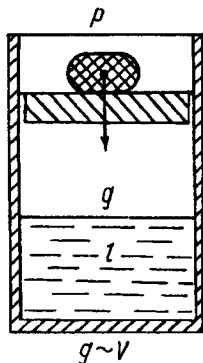


Рис. 46

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)}, \quad (3.1)$$

де  $p$  — тиск насиченої пари;  $\lambda$  — прихована теплота пароутворення;  $v_1, v_2$  — питомі об'єми рідини й відповідно пари (які є величинами, оберненими густинам:  $v_1 = \rho_l^{-1}$ ;  $v_2 = \rho_v^{-1}$ ).

Перш ніж доводити справедливість (3.1), зазначимо, що ціл-

ком аналогічне цьому рівнянню співвідношення можна встановити для випадку динамічної рівноваги між твердою й рідкою фазами однорідних кристалічних речовин [5].

Обґрунтуємо рівняння (3.1). Нехай  $m$ ,  $m_1$  та  $m_2$  — відповідно повна маса речовини та маси рідкої і газоподібної її фаз. Якщо ввести ще питомі значення внутрішніх енергій рідини й пари  $u_1$ ,  $u_2$ , то можна записати три рівності:

$$\begin{cases} m = m_1 + m_2; \\ U = m_1 u_1 + m_2 u_2; \\ V = m_1 v_1 + m_2 v_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Тут  $U$  і  $V$  — повна внутрішня енергія та повний об'єм системи.

Розглянемо ізотермічний процес перетворення рідини на пару, в результаті якого маса пари збільшується на  $dm$ ; об'єм системи змінюється на  $dV$ , а внутрішня її енергія — на  $dU$ . Згідно із (3.2) матимемо

$$\begin{aligned} V + dV &= (m_1 - dm)v_1(T) + (m_2 + dm)v_2(T) = \\ &= V + \{v_2(T) - v_1(T)\}dm, \end{aligned}$$

звідки

$$dV = \{v_2(T) - v_1(T)\}dm. \quad (3.3)$$

Аналогічно знаходимо

$$dU = \{u_2(T) - u_1(T)\}dm. \quad (3.4)$$

Тоді згідно з першим принципом термодинаміки

$$\delta Q = dU + pdV = \{u_2 - u_1 + p(v_2 - v_1)\}dm. \quad (3.5)$$

Для прихованої теплоти пароутворення  $\lambda \equiv \delta Q/dm$  дістаємо

$$\lambda = \frac{\delta Q}{dm} = u_2 - u_1 + p(v_2 - v_1). \quad (3.6)$$

Оскільки процес ізотермічний, то за допомогою (3.3), (3.4) знаходимо

$$\frac{dU}{dV} \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{u_2(T) - u_1(T)}{v_2(T) - v_1(T)}. \quad (3.7)$$

З урахуванням (3.6) формулу (3.7) можна переписати у вигляді

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = \frac{\lambda}{v_2 - v_1} - p. \quad (3.8)$$

Нарешті, згідно з (2.53), що є наслідком другого принципу

термодинаміки, приходимо до шуканого рівняння Клаузіуса—Клапейрона (3.1).

Щоб уявити собі характер залежності тиску  $p$  від температури  $T$ , уявімо, що питомий об'єм рідини  $v_1$  значно менший за питомий об'єм пари  $v_2$  ( $v_1 \ll v_2$ ). Це досить реалістичне припущення. Припустимо також, що  $\lambda = \text{const}$  в достатньо широкому інтервалі температур. Це свого роду усереднення. Нарешті, вважатимемо пару ідеальним газом. Це вже досить груба модель. Для 1 г ідеального газу матимемо  $pv_2 = (p/\mu)T$ . За цих припущень рівняння (3.1) набуває вигляду  $\frac{dp}{dT} = (\lambda\mu/RT^2) p$ , звідки

$$(d \ln p)/dT = \frac{\lambda\mu}{RT^2}. \text{ Отже, } \ln p = -\lambda\mu / RT + \ln p_0, \text{ тому } p = p_0 e^{-\frac{\lambda\mu}{RT}}.$$

Це груба оцінка залежності тиску насиченої пари від температури.

Численні й дуже важливі застосування законів термодинаміки можна знайти в рекомендованій літературі та в названих там джерелах. Ми ж зупинимось лише на двох моментах: розглянемо одне з найпопулярніших модельних рівнянь стану реальних газів — рівняння Ван-дер-Ваальса та кілька прикладів теоретичного трактування нерівноважних процесів на базі першого й другого принципів термодинаміки, яке дає змогу прослідкувати за розгортанням процесу у часі і тим самим зблизити теоретичний опис термодинамічних процесів з описом інших фізичних процесів (наприклад, механічних).

### § 3.3. Рівняння Ван-дер-Ваальса

Одним з найпопулярніших модельних рівнянь стану реальних газів є рівняння, запропоноване Ван-дер-Ваальсом (ВдВ). Для 1 моль газу воно має вигляд

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad (3.9)$$

яке переходить у рівняння Менделєєва—Клапейрона (МК), коли можна знехтувати величинами  $a/V^2$  та  $b$  порівняно з  $p$  та  $V$ . Міркування на користь рівняння (3.9) мають суто евристичний характер без строгої теоретичної бази. Згідно з ними константа  $b$  сумарно враховує власний об'єм молекул речовини, яку не можна стиснути в точку (тобто до нульового об'єму). Додаток до тиску  $a/V^2$  мотивується взаємним притяганням молекул, завдяки якому пограничні шари газу (на відміну від внутрішніх) знаходяться під додатковим (нескомпенсованим) силовим впливом, спрямованим в глиб маси газу. Цим і пояснюється додаток до тиску  $a/V^2$ . Він має бути пропорційним саме  $1/V^2$ ,



оскільки збільшення густини газу вдвоє повинно викликати збільшення додаткового тиску вчетверо, бо подвоюється концентрація взаємодіючих молекул як в глибині газу, так і в пограничному його шарі.

Не можна, звичайно, чекати, щоб такі грубі міркування приводили до справді точного рівняння стану. Але певні важливі риси реальних газів рівняння (3.9) все ж передає. Особливо якщо доповнити його деякими правилами користування, запропонованими Максвеллом [5, 38].

Схожість сукупності ізотерм реальних газів (див. рис. 46) з сукупністю модельних ізотерм ВдВ полягає в наявності в них критичної ізотерми та критичної точки ( $p_{кр}$ ,  $V_{кр}$ ,  $T_{кр}$ ) й в прямуванні обох сукупностей до ізотерм ідеальних газів зі зростанням  $T$  ( $T > T_{кр}$ ) (рис. 47). Суттєва ж відмінність полягає в наявності двох екстремумів (мінімуму й максимуму) в ізотермі ВдВ для  $T < T_{кр}$ . За правилом Максвелла горизонтальні частини реальних ізотерм треба проводити так, щоб площі, обмежені петлями типу  $(a_1cda_1)$  і  $(db_1ed)$ , збігалися [5, 38]. Цим штучно виправляються (під реальні) ізотерми ВдВ. Проте за певних умов [5] можуть мати фізичний сенс і фрагменти типу  $a_1c$  та  $b_1e$  ізотерм ВдВ. Перший ( $a_1c$ ) відповідає переохолодженій рідині, другий ( $b_1e$ ) — перегрітій парі. (Детальніше див., наприклад, у праці [44].)

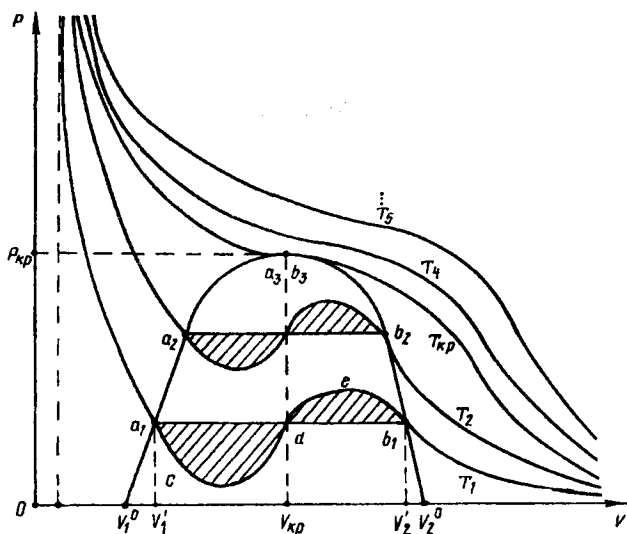


Рис. 47

### § 3.4. До теорії релаксації нерівноважних систем

Вивчаючи квазірівноважні процеси, майже ніколи не згадують про їхнє розгортання у часі. Цим термодинаміка оборотних процесів формально ніби контрастує з іншими розділами фізики, де таке розгортання лежить в основі теорії (другий закон Ньютона в механіці, рівняння Максвелла в електродинаміці, рівняння Шредингера в квантовій механіці тощо). Насправді ж ніякого контрасту немає. Просто квазірівноважні (оборотні) процеси пов'язані з плавною зміною зовнішніх умов (параметрів) і відбуваються практично без запізнення, тобто синхронно зі зміною цих зовнішніх умов. Отже, темп квазірівноважних процесів збігається з темпом зміни зовнішніх умов, тому спеціального розгляду не потребує.

По-іншому слід розглядати нерівноважні процеси. Вони можуть розгортатися у часі навіть за стабільних зовнішніх умов. Нехай, наприклад, у контакті з двома тепловими резервуарами з фіксованими температурами  $T_1 > T_2$  знаходиться металевий циліндр. Тоді в ньому виникає тепловий потік від резервуара 1 до 2, який через певний час релаксації перетворюється на стаціонарний, тобто матиме місце розгортання процесу у часі. Теорія подібних нерівноважних процесів зараз уже існує. Найбільш загальний її варіант розроблено в межах *термодинаміки нерівноважних процесів*, що як систематична теорія почала розвиватися десь з 30-х років ХХ ст. Проте вона досить складна і в загальних курсах не вивчається. Та деякі нерівноважні процеси все ж можна досить коректно і повно подати в межах загального курсу.

Розглянемо, наприклад, процес охолодження металевого розплаву невеликої маси, що знаходиться в тугоплавкій капсулі високої теплопровідності, при фіксованій температурі оточення  $T_c$ , нижчій за температуру плавлення даного металу  $T_{пл}$  ( $T_c < T_{пл}$ ). При високій теплопровідності металу та малій (за умовою) його масі перепадами температури в тілі розплаву<sup>1</sup> можна знехтувати й приписувати єдину температуру вилівка в цілому —  $T(t)$  в кожний момент часу  $t$ . Нехай початкова температура розплаву  $T_0$  вища за точку плавлення ( $T_0 > T_{пл}$ ); тому на початку процесу метал рідкий. Отже, в процесі охолодження відбувається фазовий перехід рідкого металу в твердий — тобто тверднення металу. Далі температура твердого металу знижуватиметься, доки не вирівняється з температурою оточуючого

<sup>1</sup> Оцінка різниці температур між центром і поверхнею алюмінієвої кулі діаметром 10 см дає 1 — 2 °С.

середовища (термостата)  $T_c$ ; виливок зрелаксує до термодинамічної рівноваги.

Опишемо цей процес математично, спираючись на перший і другий принципи термодинаміки.

Нехтуючи внеском до енергетичного балансу виливка від слабких порівняно з тепловими механічними ефектами, складемо рівняння теплового балансу, яке втілює перший принцип термодинаміки. Нехай виливок, що охолоджується, віддав термостату за час  $dt$  кількість теплоти  $\delta Q > 0$ . Ця кількість  $\delta Q$  породжується двома основними причинами: охолодженням металу, тобто зниженням його температури, і внутрішнім (прихованим) тепловиділенням у процесі фазового перетворення рідкого металу на твердий. Внаслідок маємо

$$\delta Q = \delta Q_c + \delta Q_L. \quad (3.10)$$

Тут

$$\delta Q_c = -CdT; \quad \delta Q_L = Ldm; \quad (3.11)$$

$C$  — теплоємність виливка;  $dT < 0$  — зниження його температури за час  $dt$ ;  $L$  — прихована теплота тверднення металу;  $dm > 0$  — приріст маси твердої фази за той самий час. Що ж до повної кількості відданої теплоти  $\delta Q$ , то її в такому разі з успіхом моделюють формулою Ньютона—Ріхмана (1.17)

$$\delta Q = f\{T(t) - T_c\}dt, \quad (3.12)$$

яка автоматично враховує другий принцип термодинаміки в його найпростішій формі: теплота самочинно переходить від тіл з вищою температурою до тіл з нижчою<sup>1</sup>.

Оскільки в фіналі  $T(t) \rightarrow T_c$ , то зручно ввести температуру  $\Delta T(t)$ , відрховану від температури термостата  $T_c$ :

$$\Delta T(t) \equiv T(t) - T_c. \quad (3.13)$$

Підсумовуючи всі результати (3.4) — (3.13) і відносячи тепловий баланс до одиниці часу, дістанемо диференціальне рівняння

$$C(t)\frac{d(\Delta T)}{dt} + f\Delta T(t) = L\frac{dm}{dt}. \quad (3.14)$$

Залишилося лише відповідним чином промоделювати теплоємність  $C(t)$ .

Позначимо повну масу виливка через  $m_0$ ; питому теплоємність рідкого і твердого (liquidus, solidus) металу — через  $c_l$  і  $c_s$ ;

<sup>1</sup> За додатний тут обрано напрям потоку теплоти від виливка до термостата.

масу твердої фази на момент часу  $t$  — через  $m(t)$ . Природно покласти

$$C(t) = m(t)c_s + (m_0 - m(t))c_l = c_l m_0 + \Delta c m(t), \quad (3.15)$$

де

$$\Delta c = c_s - c_l. \quad (3.16)$$

Навіть не збагачуючи теорію додатковими співвідношеннями, а обмежуючись лише рівнянням (3.14) та формулою (3.15), можна вже розв'язати дві взаємно обернені задачі: теоретично визначити хід кривої охолодження  $\Delta T(t)$  за відомим законом зростання маси твердої фази  $m(t)$ ; або теоретично визначити кінетику зростання твердої фази, тобто знайти  $m(t)$  за відомим ходом кривої охолодження  $\Delta T(t)$  (*термограми*, яка легко визначається експериментально).

Неважко за допомогою (3.14) і (3.15) переконатися, що обидві задачі розв'язуються за допомогою однотипних (еволюційних) рівнянь вигляду

$$\frac{dy}{dt} + L(t)y(t) = I(t), \quad (3.17)$$

доповнених початковою умовою

$$y(0) = y_0. \quad (3.18)$$

Справді, згідно з (3.14) для визначення  $y = \Delta T(t)$  за відомою  $m(t)$  слід покласти

$$L(t) = f/C(t); \quad I(t) = \frac{L}{C(t)} \frac{dm}{dt}. \quad (3.19)$$

Для визначення ж  $y = m(t)$  за  $\Delta T(t)$  згідно з (3.14) та (3.15) треба підставити

$$\begin{cases} L(t) = \frac{c_l - c_s}{L} \frac{d(\Delta T)}{dt}; \\ I(t) = \frac{1}{L} \left\{ f \Delta T(t) - c_l m_0 \frac{d(\Delta T)}{dt} \right\}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Перевірка (3.17), (3.19), (3.20) на основі (3.14) та (3.15) виконується шляхом простих алгебраїчних перетворень, які пропонуємо виконати самостійно.

Розв'язком граничної задачі (3.17), (3.18) буде функція вигляду

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^t L(\theta) d\theta} + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} L(\theta) d\theta} I(\tau) d\tau \quad (t \geq t_0), \quad (3.21)$$

у чому легко переконатися прямим підставленням  $y(t)$  у рівняння (3.17) та перевіркою початкової умови (3.18) при  $t_0 = 0$ .

Термограму  $T = T(t)$  (а за нею й  $\Delta T(t)$ ) неважко побудувати експериментально (для чого існують самописні установки), чого не можна сказати про  $m(t)$ . Тому практично цікавою є задача визначення кінетики зростання твердої фази  $m(t)$  за заданою термограмою  $T(t)$ . Але для підтвердження адекватності одержаних вище рівнянь важливо проаналізувати обернену задачу — визначення  $T(t)$  за даною в загальних рисах  $m(t)$ , оскільки характер термограм  $T = T(t)$  добре відомий. Згідно з (3.17), (3.18) матимемо

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 e^{-\int_0^t \frac{fd\theta}{C(\theta)}} + \int_0^t e^{-\int_{\tau}^t \frac{fd\theta}{C(\theta)}} \frac{L}{d(\tau)} \frac{dm}{d\tau} d\tau. \quad (3.22)$$

(Тут  $t_0 = 0$ .)

Для загального аналізу формули (3.22) не треба знати детального ходу функції  $m(t)$ . Досить врахувати лише певні беззастережні й загальні її властивості, що впливають з експерименту:

1) до певної температури, що відповідає моменту часу  $t = t_{кр}$ , метал залишається в рідкому стані й, отже,

$$\begin{cases} m(t) \equiv 0; \\ \frac{dm}{dt} \equiv 0, \text{ коли } t \leq t_{кр}; \end{cases} \quad (3.23)$$

2) починаючи з моменту  $t = t_{кр}$  метал починає тверднути й до певного моменту  $t = t_{ТВ}$  повністю твердне ( $m(t_{ТВ}) = m_0$ ). Отже,

$$\begin{cases} m(t) \equiv m_0; \\ \frac{dm}{dt} \equiv 0, \text{ коли } t \geq t_{ТВ}; \end{cases} \quad (3.23a)$$

3) протягом часу тверднення  $\Delta t = t_{ТВ} - t_{кр}$  функція  $m(t)$  монотонно зростає від нуля до  $m_0$ :

$$\begin{cases} 0 \leq m(t) \leq m_0; \\ \frac{dm}{dt} \geq 0, \text{ коли } t \in [t_{кр}, t_{ТВ}]. \end{cases} \quad (3.23б)$$

Відповідно до цього й аналізуватимемо формулу (3.22).

На першій стадії ( $t \leq t_{кр}$ ) згідно з (3.22), (3.23) матимемо

$$\Delta T(t) \equiv \Delta T_i(t) = \Delta T_0 e^{-\int_0^t \frac{fd\theta}{C(\theta)}}. \quad (3.24)$$

Аналогічно на останній стадії ( $t \geq t_{TB}$ ) за (3.22) та (3.23а) дістанемо

$$\Delta T(t) \equiv \Delta T_f(t) = \Delta \tilde{T}_0 e^{-\int_0^t \frac{fd\theta}{C(\theta)}} \quad (3.25)$$

де

$$\Delta \tilde{T}_0 \equiv \Delta T_0 + \int_{t_{кр}}^{t_{TB}} e^{\int_0^{\tau} \frac{fd\theta}{C(\theta)}} \frac{L}{C(\tau)} \frac{dm}{d\tau} d\tau > \Delta T_0. \quad (3.26)$$

Отже, на інтервалах  $t \leq t_{кр}$  і  $t \geq t_{TB}$  температура  $\Delta T(t)$ , відрахована від температури термостата  $T_0$ , монотонно спадає (3.24), (3.25), причому за аналогічними законами на обох інтервалах, і асимптотично (при  $t \rightarrow \infty$ ) прямує до нуля:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta T(t) = 0, \text{ тобто } T(t) \rightarrow T_c.$$

У період тверднення (кристалізації)  $t \in [t_{кр}, t_{TB}]$  до спадної частини  $\Delta T(t) = \Delta T_i(t)$  формули (3.24) додається така, що зростає:

$$\Delta T(t) = \Delta T_i(t) + \Delta T^{(1)}(t), \quad (3.27)$$

де зростаюча частина

$$\Delta T^{(1)}(t) = \int_{t_{кр}}^t e^{-\int_{\tau}^t \frac{fd\theta}{C(\theta)}} \frac{L}{C(\tau)} \frac{dm}{d\tau} d\tau. \quad (3.28)$$

Зростання  $\Delta T^{(1)}(t)$  у (3.28) без детального аналізу очевидне, оскільки  $\Delta T^{(1)}(t)$  більша за зростаючу величину

$$\Delta T^{(1)}(t) > e^{-\int_{t_{кр}}^{t_{TB}} \frac{fd\theta}{C(\theta)}} \int_{t_{кр}}^t \frac{L}{C(\tau)} \frac{dm}{d\tau} d\tau$$

$(t_{кр} \leq t \leq t_{TB}).$

Типовим для чисто-го металу є хід термограми  $\Delta T(t)$ , показаний на рис. 48 ( $\Delta T_{пл}$  — температура плавлення металу). Як видно з рисунка, має місце дуже короткочасне переохолодження розплаву, після якого внаслідок

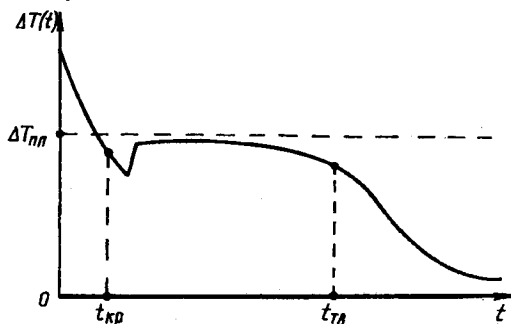


Рис. 48

прихованого тепловиділення, зумовленого фазовим переходом рідкого металу в твердий, температура швидко зростає й деякий час залишається майже стабільною, а після повного затвердіння металу знову спадає.

Кристалізація відбувається, як правило, дуже швидко. Тому на значному відрізку періоду кристалізації похідна  $dm/dt$  має істотний вплив. Цим і зумовлено зростання температури після короткого переохолодження (див. рис. 48).

Отже, розглянута вище теорія, що базується на першому й другому принципах термодинаміки, доповнених вірогідними модельними співвідношеннями (3.11), (3.12), (3.15), правильно передає хід нерівноважного процесу тверднення металевого розплаву та його релаксації до стану термодинамічної рівноваги. Причому охолодження розплаву описується на базі еволюційного рівняння типу (3.17) і дає розгортання процесу в часі, як і в інших фізичних теоріях. Щоправда, існує проблема визначення моментів часу  $t_{кр}$  і  $t_{гв}$  (яка в принципі вирішується, але тут ми її не обговорюємо).

Переконавшись у адекватності граничної задачі (3.17), (3.18) у варіанті (3.19) реальному процесу тверднення, можна з певністю покладатися на цю задачу у практично важливому варіанті (3.20) [8].

На закінчення ще раз покажемо (на цей раз на прикладі щойно розглянутої задачі), що нерівноважні процеси в замкнених системах супроводжуються зростанням ентропії.

Розглянемо систему, яка складається з виливка металу й термостата. Її можна розглядати як замкнену (тобто таку, що знаходиться поза термодинамічного впливу інших систем). Приріст ентропії розглядуваної системи  $dS$  складається з суми приростів ентропії виливка металу  $dS_M$  і термостата  $dS_T$ :  $dS = dS_M + dS_T$ . Віднісши цей приріст до одиниці часу й враховуючи, що  $dS_M = \frac{\delta Q}{T(t)}$ ,  $dS_T = \frac{\delta Q}{T_c}$ , дістанемо

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} \left\{ \frac{1}{T_c} - \frac{1}{T(t)} \right\}.$$

Користуючись формулою Ньютона—Ріхмана (3.12), остаточно знаходимо

$$\frac{dS}{dt} = f \frac{\{T(t) - T_c\}^2}{T_c - T(t)} \geq 0.$$

Звідси й випливає зростання ентропії системи *вильовок* — *термостат* у нерівноважному процесі тверднення металу, як і слід було чекати, згідно з постулатами термодинаміки.

## ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ

## § 4.1. Загальні зауваження

Явища переносу, які традиційно вивчаються в загальних курсах фізики, пов'язані з градієнтами певних параметрів стану і становлять серію порівняно простих прикладів нерівноважних процесів (дифузія, або перенос речовини, теплопровідність, або перенос енергії (теплоти), в'язкість, або перенос імпульсу), зумовлені градієнтами *концентрації* даної речовини в якомусь середовищі, *температури* та відповідно *швидкості* течії рідини чи газу. Існують також інші явища переносу (наприклад, електричного заряду — електричний струм, фільтраційні потоки тощо). Якщо умови, за яких відбуваються процеси переносу, такі, що ведуть до зменшення й врешті зникнення відповідних градієнтів, то в результаті переносу система релаксує до рівноваги. Приклад теплової релаксації було розглянуто в попередньому параграфі. Якщо ж тим чи іншим чином підтримувати відповідні градієнти, то процес теж буде підтримуватися. Наприклад, металевий циліндр, який розміщено між нагрівником і холодильником з фіксованими температурами, спричинює стабільний градієнт температури в металі, а з ним і стабільний потік теплоти. При сталій різниці потенціалів на кінцях провідника градієнт потенціалу стає стабільним як і струм у провідника. Слід додати, що існують і свого роду мішані потоки. Наприклад, внаслідок конвекції переноситься не лише маса, але й енергія (зокрема, тепла<sup>1</sup>) і т. д. Ми розглянемо лише три простих, але важливих явища переносу: дифузію, теплопровідність, в'язкість.

Математичний опис різних процесів переносу має багато спільного. Ці спільні риси в сукупності з принципом зростання ентропії нерівноважних замкнених систем і створили основу загального підходу до нерівноважних термодинамічних процесів, втіленого у нерівноважній термодинаміці. Та ця складна теорія в цілому досі не входить до загальної фізики.

Загальним для явищ переносу є, наприклад, поняття про густину потоку відповідної фізичної величини: *густиною потоку*  $\vec{j}$  певної фізичної величини називають нову векторну фізичну величину, модуль якої чисельно дорівнює кількості цієї величини, що проходить за одиницю часу через одиничну площадку, перпендикулярну до потоку даної величини. Все це повністю стане зрозумілим після розгляду конкретних явищ переносу.

<sup>1</sup> Тепловою інколи називають ту частину внутрішньої енергії  $U$ , яка визначається середньою *кінетичною* енергією молекул тіла при заданій температурі.



## § 4.2. Дифузія

*Дифузією* називають поступове проникнення однієї речовини у товщу іншої при їхньому контакті. Наприклад, крапля чорнила, обережно вичавлена з піпетки у воду, через деякий час рівномірно зафарбовує всю масу води. Це пояснюють проникненням молекул чорнила у простір між молекулами води, що продовжується аж до рівномірного розподілу молекул чорнила по всьому об'єму води. Дифузія має місце не лише у рідинах та газах, але й у будь-яких тілах (навіть твердих). Зрозуміло, що темпи дифузії одних речовин у товщу інших варіюються у дуже широких межах: порівняно швидка взаємна дифузія газів контрастує з дуже повільною взаємною дифузією твердих тіл, притиснених одне до одного шліфованими поверхнями.

Розглянемо деякі загальні закономірності дифузії на простому прикладі, коли одна речовина дифундує в іншу в заданому напрямі, який оберемо за напрям осі  $Ox$ . (В одновимірних задачах вводити вектори не треба.)

*Густиною дифузійного потоку*  $j(x, t)$  певної речовини в іншу в точці  $x$  у момент часу  $t$  називають кількість цієї речовини (за масою), яка проходить за одиницю часу через нормальну до потоку одиничну площадку.

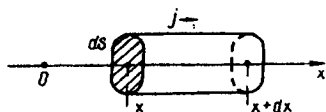


Рис. 49

Якщо вздовж напрямку дифузії виділити елементарний прямий циліндр з площею основи  $dS$  (рис. 49), то за час  $dt$  через ліву основу входить, а через праву

виходять  $j(x, t)dSdt$  та  $j(x + dx, t)dSdt$  речовини. Отже, у циліндрі за час  $dt$  накопичуються речовини, що дифундують:

$$dm^{(1)} = \{j(x, t) - j(x + dx, t)\}dSdt = -\frac{\partial j}{\partial x} dx dSdt.$$

Ця речовина може накопичуватися у циліндрі також за рахунок, наприклад, хімічних реакцій

$$dm^{(2)} = \sigma(x, t)dVdt, \quad (4.1)$$

де  $\sigma(x, t)$  — кількість речовини, яка продукується всередині *одиничного* об'єму за *одиницю* часу, тобто *питома продуктивність* даної речовини поблизу точки  $x$  у момент часу  $t$ . З урахуванням рівності  $dx dS = dV$  дістаємо

$$dm = dm^{(1)} + dm^{(2)} = \left\{ -\frac{\partial j}{\partial x} + \sigma \right\} dVdt. \quad (4.2)$$

Значення  $dm$  можна визначити також через локальний при-

ріст *парціальної густини*  $\rho(x, t)$  розглядуваної речовини  $d\rho$  за час  $dt$ :

$$dm = d\rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt. \quad (4.3)$$

Згідно з (4.2) і (4.3) остаточно матимемо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + \sigma. \quad (4.4)$$

З дослідів відомо, що для  $j(x, t)$  має місце закон Фіка

$$j(x, t) = -D \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (4.5)$$

де  $D$  — *коефіцієнт дифузії*. Поєднуючи цей емпіричний закон з рівнянням балансу речовини (4.4), дістанемо рівняння *одновимірної дифузії*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \sigma. \quad (4.6)$$

Якщо дифузія відбувається в *однорідному середовищі*, то її коефіцієнт  $D$  не залежить від координати, і тому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \sigma. \quad (4.7)$$

Це один з найпростіших варіантів рівняння *одновимірної дифузії*, який, проте, має велике практичне значення.

### § 4.3. Теплопровідність

Теплові потоки виникають внаслідок перепаду температур між різними областями тіла. Вважаючи, що такі перепади мають місце лише вздовж певного напрямку, прийнятого за вісь  $Ox$  (див. рис. 49), встановимо *одновимірне рівняння теплопровідності*.

Позначимо через  $j(x, t)$  густину теплового потоку в точці  $x$  в момент часу  $t$ . (Вона чисельно дорівнює кількості теплоти, яка проходить через нормальну до теплотопоку одиничну площадку за одиницю часу.) За допомогою обчислень (як це зроблено в § 4.2) дістанемо кількість теплоти, яка надходить до елементарного циліндру (див. рис. 49) через ліву й праву його основи:

$$\delta Q^{(1)} = -\frac{\partial j}{\partial x} dx dS dt. \quad (4.8)$$

Крім того, теплота може виділятися в циліндрі завдяки, наприк-

лад, прихованій теплоті фазових перетворень. Для цієї частини теплоти матимемо

$$\delta Q^{(2)} = \sigma(x, t) dV dt, \quad (4.9)$$

де  $\sigma(x, t)$  — кількість прихованої теплоти, що виділяється поблизу точки  $x$  за одиницю часу, перерахована на одиницю об'єму. Отже, в сумі матимемо

$$\delta Q = \delta Q^{(1)} + \delta Q^{(2)} = \left\{ -\frac{\partial j}{\partial x} + \sigma \right\} dV dt. \quad (4.10)$$

Цю кількість теплоти  $\delta Q$  можна обчислити також через питому теплоємність речовини  $c(t)$ . Кількість теплоти, що призвела до підвищення температури речовини в елементарному циліндрі (див. рис. 49) на  $dT$  градусів Кельвіна за час  $dt$ , дорівнює

$$\delta Q = \rho(x, t) c(x, t) \frac{\partial T}{\partial t} dV dt, \quad (4.11)$$

де  $\rho(x, t) = \frac{dm(x, t)}{dV}$  — густина речовини;  $c(x, t)$  — її питома теплоємність (обидві величини відносяться до точки  $x$  у момент часу  $t$ ). Поєднуючи (4.10) і (4.11), дістанемо одновимірне рівняння

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c} \frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\sigma(x, t)}{\rho c}. \quad (4.12)$$

Для густини теплового потоку  $j(x, t)$  за законом Фур'є маємо

$$j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (4.13)$$

тут  $\kappa$  — коефіцієнт теплопровідності. Закон Фур'є (4.13) добре узгоджується з експериментом. Комбінуючи (4.12) і (4.13), дістанемо рівняння рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\sigma(x, t)}{\rho c}. \quad (4.14)$$

В однорідному середовищі  $\kappa$  не залежить від координати, і рівняння (4.14) набуває вигляду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{\rho c}. \quad (4.15)$$

Величина  $\chi = \kappa / \rho c$  дістала назву *коефіцієнта температуропровідності*.

Звертаємо увагу на формальну тотожність рівнянь дифу-

зії (4.6), (4.7) і теплопровідності (4.14), (4.15). Вони належать до класу еволюційних рівнянь (що описують розвиток процесів у просторі й часі) і утворюють єдину математичну основу для теоретичного розгляду фізичних явищ типу, що вивчаються.

#### § 4.4. В'язкість

Розглянемо плоскопаралельний рух нестисливої рідини на ідеалізованому прикладі.

Нехай рідина заповнює правий півпростір, відмежований від лівого плоскою жорсткою оболонкою  $A$ , яка рухається зі швидкістю  $u(0,t)$  (рис. 50) вздовж площини  $yOz$  у напрямі осі  $Oz$ . Матеріал оболонки вважаємо абсолютно змочуваним даною рідиною і тому він захоплює з собою приповерхневий шар рідини, надаючи йому швидкості  $u(0,t)$ . Рух шар за шаром передається усій рідині, внаслідок чого виникає течія з градієнтом швидкості  $u(x,t)$  у напрямі осі  $Ox$ :

$$u = u(x,t); \quad \frac{\partial u}{\partial x} \leq 0.$$

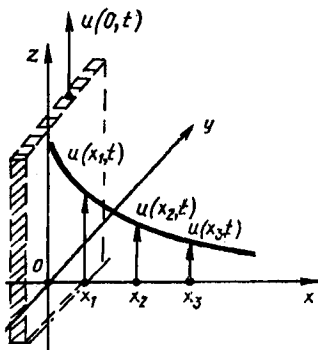


Рис. 50

Кожен елемент маси рідини  $\delta m$  за цих умов має імпульс

$$\delta P = \delta m u(x,t) = \rho(x,t) u(x,t) dV, \quad (4.16)$$

де  $\rho(x,t) = \delta m/dV = \text{const}$  — густина нестисливої рідини;  $dV = dx dy dz$  — об'єм елемента маси  $\delta m$ .

Імпульс  $\delta P$  елемента маси змінюється під дією двох факторів: перепаду тиску в напрямі осі  $Oz$  і перенесення імпульсу від шару до шару рідини в напрямі осі  $Ox$  (внаслідок взаємного "тертя" цих шарів). Спираючись на попередні параграфи, одночасно врахуємо обидва ці фактори:

$$d(\delta P) = d(\delta P_1 + \delta P_2) = - \left\{ \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial j}{\partial x} \right\} dV dt; \quad (4.17)$$

тут  $p(z,t)$  — тиск, розглядуваний як функція  $z$  і  $t$ ;  $j(x,t)$  — густина потоку імпульсу, тобто величина кількості руху, що передається від шару до шару рідини через одиничну площадку за одиницю часу. Враховуючи (4.16) та (4.17), матимемо

$$\frac{d(\delta P)}{dt dV} = \rho \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial j}{\partial x}. \quad (4.18)$$

Але за законом Ньютона—Пуазейля (добре узгоджуваного з експериментом) маємо

$$j(x,t) = -\eta \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}. \quad (4.19)$$

Коефіцієнт  $\eta$  називають *динамічною в'язкістю*. Для однорідної рідини  $\eta = \text{const}$ . Тому, запровадивши *кінематичну в'язкість*  $\nu = \eta/\rho$ , остаточно дістанемо<sup>1</sup>

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.20)$$

Розглянута ідеалізована задача добре передає основну суть справи. Проте реальна ситуація помітно складніша у математичному плані, оскільки тут у кожній точці є два виділені напрями, що задаються двома вектор-функціями  $\{\vec{u}, \vec{j}\}$ , і тому загальне рівняння переносу має *тензорний* характер (на відміну від спрощеного рівняння (4.20)).

Як бачимо, рівняння (4.20) за формою знов нагадує розглянуті раніше рівняння дифузії (4.7) і теплопровідності (4.15).

На даний час вчення про нерівноважні процеси з урахуванням законів нерівноважної термодинаміки та статистичної фізики вже досить розвинене, хоча не може вважатися завершеним навіть у принциповому плані. Це особливо стосується процесів, далеких від квазірівноважних, що мають нелінійний характер.

Повнопрофільний розгляд теорії нерівноважних процесів виходить далеко за межі загальної фізики.

#### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ Й ЗАВДАННЯ

1. *Визначте предмет і методи термодинаміки та молекулярної фізики.*

2. *Які параметри визначають рівноважний стан термодинамічної системи? Які процеси належать до квазірівноважних (оборотних); які — до циклічних?*

3. *Що таке термічне рівняння стану? Рівняння оборотного процесу? Наведіть приклади.*

4. *Сформулюйте й детально роз'ясніть перший принцип*

<sup>1</sup> У цій ідеалізованій задачі похідна  $\partial p/\partial z$  не повинна залежати від  $z$ :  $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \equiv 0$ .

термодинаміки; розкрийте фізичний зміст усіх фізичних величин, що входять до нього.

5. Визначте теплоємності тіл за різних умов; як пов'язані між собою  $c_p$  і  $c_v$  для ідеального газу?

6. Запишіть калоричне рівняння стану для ідеального газу.

7. Що таке адіабатний процес? Запишіть рівняння адіабати ідеального газу.

8. Що ви знаєте про напрям перебігу термодинамічних процесів?

9. Дайте відомі вам формулювання другого принципу термодинаміки.

10. ККД циклу Карно. Ентропія як функція стану і як наслідок теореми Карно.

11. Що можна сказати про зміну ентропії в необоротних процесах?

12. Термодинамічна температура як наслідок другого принципу термодинаміки.

13. Розкажіть про фазові перетворення речовини: про ізотерми реальних газів та їх співвідношення з ізотермами Ван-дер-Ваальса.

14. Що ви знаєте про явища переносу: про закони Фіка, Фур'є, Ньютона—Пуазейля?

15. Обґрунтуйте й запишіть рівняння теплопровідності.

Детальніше за термодинаміку сягає в глиб фізичних явищ молекулярно-кінетична теорія, моделюючи на більш або менш ґрунтовній основі перебіг фізичних процесів на атомно-молекулярному рівні й спираючись на динамічні та статистичні закономірності. Проте термодинамічний і молекулярно-кінетичний підходи швидше доповнюють ніж дублюють один одного, оскільки, по-перше, трактують явища з різних поглядів, а по-друге, лише лічені набори реалістичних задач припускають точне розв'язання в межах кожного з підходів. Переважна ж більшість практично важливих задач потребують спрощених (схематизованих) припущень, адекватність яких вимагає перехресної перевірки обома методами та узгодження з експериментом.

## Глава 1

### ПРО РІВНОВАЖНІ СТАТИСТИЧНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ В СИСТЕМАХ БАГАТЬОХ ЧАСТИНОК

#### § 1.1. Рівняння ідеального газу за Клаузіусом. Фізичний сенс тиску й абсолютної температури

Сучасна фізика має цілком ґрунтовні підстави<sup>1</sup> стверджувати, що всі матеріальні тіла й середовища — це величезна кількість мікрочастинок — атомів і молекул, — які весь час перебувають у зовні безладному, хаотичному русі. Грам-молекула будь-якої речовини складається з  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  молекул ( $N_A$  — число Авогадро). Отже, макротіла дійсно становлять величезні сукупності (рої) рухомих частинок. Постає природна проблема розшифровки й пояснення цілком детермінованої поведінки макротіл (зокрема, законів термодинаміки) згідно з законами поведінки величезних сукупностей мікрочастинок, що взаємодіють між собою і зовні хаотично рухаються. До проблем такого роду сучасна наука має два основні підходи. Перший

<sup>1</sup> Радимо звернутися до цікавих і повчальних сторінок з історії вчення про будову речовини [20, 35].

ґрунтується на використанні теорії ймовірностей і математичної статистики, доповнених динамічними законами руху мікрочастинок та певними гіпотезами про відповідні розподіли ймовірностей; другий (більш глибокий) — на вченні про взаємозв'язок порядку й безладдя, що становить основний предмет зовсім молоді науки — сінергетики і не входить поки що до загальних курсів фізики. Отже, тут традиційно спиратимемося на елементарну версію першого підходу.

Згідно з імовірнісними законами великих чисел достатньо великі сукупності випадкових подій за певних (досить широких) умов виявляють цілком чіткі закономірності. Тому природно було в основу виведення детермінантних законів термодинаміки на підставі уявлень про корпускулярну будову речовини та закони руху молекул покласти теорію ймовірностей і математичну статистику, доповнені вірогідними фізичними постулатами (див., наприклад, постулат про хаос, використаний для виведення розподілу Максвелла). Такий підхід дав змогу цілком переконливо пояснити велику сукупність законів, що керують поведінкою макротіл. Але, на жаль, відповідна теорія досить складна. Тому в загальному курсі згадані закони можна певним чином пояснити лише на основі елементарних молекулярно-кінетичних уявлень, що значною мірою ґрунтуються на інтуїтивних міркуваннях і максимально спрощених мікромоделях макротіл. Без подібних спрощених міркувань, проте, наука ніколи не обходиться. До таких міркувань і перейдемо.

Теоретичні будови природно розпочинати з розгляду ідеальних газів, які, як і в термодинаміці, є первинним пробним каменем теорії.

Розглянемо найпростішу модель, здатну імітувати властивості ідеальних газів.

1. Оскільки відомо, що внутрішня енергія  $U$  ідеальних (тобто досить розріджених) газів практично не залежить від об'єму, природно прийняти, що в середньому кожна з молекул переважну більшість часу перебуває у вільному русі й порівняно незначну частину часу знаходиться у зоні взаємодії з іншими молекулами.

2. Універсальний характер законів ідеальних газів (тобто однаковий для газів різної хімічної природи), дає змогу прослідкувати за їх виведенням на достатньо простому модельному прикладі: системі багатьох точкових частинок, що в основному вільно й хаотично рухаються. Загальний характер висновків від цього не повинен втрачатися.

3. Закони збереження енергії та імпульсу, а також зв'язок між енергією та імпульсом вільних частинок однакові за формою у квантовій та класичній механіці (читач має в це поки що повірити). Тому, маючи справу в подальшому із зазначеними



фізичними величинами, можна спиратися на закони досить наочної класичної механіки для системи точкових частинок.

4. Під *хаотичним рухом* великої сукупності вільних частинок будемо розуміти такий безладний їх рух, за якого усі напрями руху молекул цілком рівноправні й рівноможливі.

Отже, за модель ідеального газу візьмемо величезну сукупність класичних точкових частинок, що в основному вільно й хаотично рухаються в межах посудини з непроникними стінками і фіксованою місткістю  $V$ . Постає задача фізичної мікроінтерпретації таких макропараметрів стану газу, як місткість  $V$ , температура  $T$  і тиск  $p$ . Об'єм збігається з місткістю посудини, заповненої газом. В основному зрозуміло, чим обумовлено тиск газу. Його природно пов'язати з сумарним ефектом ударів молекул у стінки посудини (чи мембрану манометра). За законом Паскаля у рівноважному стані тиск на стінки посудини або на мембрану манометра у будь-якому місці зайнятого газом простору однаковий. Отже, зосередимося на тискові на стінки, який і розглянемо далі.

Дещо складніше з інтерпретацією температури. До неї веде низка міркувань, починаючи з обчислення тиску й закінчуючи далекосяжною гіпотезою, яку сформулюємо нижче.

Обчислимо тиск за Клаузіусом.

Розглянемо посудину кубічної форми (рис. 51) місткістю  $V$ , рівномірно заповнену 1 моль ідеального газу. Середня просторова концентрація молекул становитиме

$$n = N_A / V, \quad (1.1)$$

де  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$  — число Авогадро. На правій грані посудини виділимо площадку  $\Delta S$ . Удари молекул у стінки посудини вважатимемо абсолютно пружними. Позначимо через  $\vec{v}, \vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z$  се-

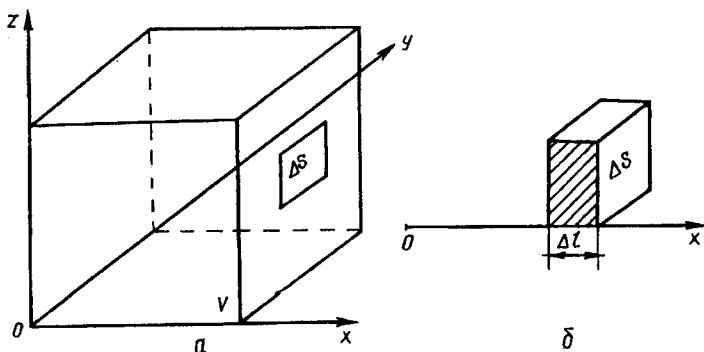


Рис. 51

редні квадратичні<sup>1</sup> (по всій сукупності молекул) значення швидкості  $v$  та відповідно її проєкцій  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  на осі координат (див. рис. 51). У середньому за час  $\Delta t$  усі молекули, що рухаються в бік площадки  $\Delta S$  і знаходяться від неї на відстані  $\Delta l = \bar{v}_x \Delta t$ , досягнуть цієї площадки й кожна з них надасть їй силового поштовху, нормальна складова якого визначається зміною  $x$ -проєкції імпульсу частинки

$$\Delta p_x = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x. \quad (1.2)$$

Всього в середньому за проміжок часу  $\Delta t$  на площадку  $\Delta S$  налітатиме така сукупність молекул  $\Delta N$ , яка міститься в об'ємі  $\Delta V = \Delta l \Delta S$  і згідно з (1.1) дорівнюватиме

$$\Delta N = \frac{n}{2} \Delta l \Delta S = \frac{N_A}{2V} \bar{v}_x \Delta t \Delta S. \quad (1.3)$$

Двійка в знаменнику з'явилася завдяки рівноправності напрямів руху (гіпотеза хаосу). Тому половина молекул має складову  $v_x$  швидкості, спрямовану праворуч ( $v_x \geq 0$ ), а половина — ліворуч ( $v_x \leq 0$ ). Отже, за час  $\Delta t$  сумарна  $x$ -складова переданого стінці імпульсу згідно з (1.2) і (1.3) дорівнює

$$\Delta P_x = \Delta p_x \Delta N = \frac{N_A}{V} m \bar{v}_x^2 \Delta t \Delta S. \quad (1.4)$$

Отже, сила тиску  $\Delta F_x$  на площадку  $\Delta S$  за другим законом Ньютона становить

$$\Delta F_x = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{N_A}{V} m \bar{v}_x^2 \Delta S,$$

а тиск

$$p = \frac{\Delta F_x}{\Delta S} = \frac{N_A}{V} m \langle v_x^2 \rangle. \quad (1.5)$$

Враховано, що  $\bar{v}_x^2 = \langle v_x^2 \rangle$ .

Згідно з гіпотезою про хаос усі напрями руху рівноправні й тому  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ . Отже,

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle. \quad (1.6)$$

<sup>1</sup>Середнім квадратичним значенням певної фізичної величини для сукупності з  $N_A$  молекул будемо називати число  $\bar{a} \equiv \sqrt{\langle a^2 \rangle}$ , де  $\langle a^2 \rangle = \frac{1}{N_A} \sum_{i=1}^{N_A} a_i^2$ . Просто середнє арифметичне значення будь-якої проєкції швидкості через хаос дорівнює нулю.

Звідси замість (1.5) можна записати  $p = \frac{2}{3} \frac{N_A}{V} \frac{m\langle v^2 \rangle}{2}$ , або

$$pV = \frac{2}{3} N_A \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle; \quad (1.7)$$

$K = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle$  — середнє значення кінетичної енергії молекули. Із порівняння (1.7) з рівнянням стану для 1 моля ідеального газу

$$pV = RT \quad (1.8)$$

видно, що для узгодження формул (1.7) і (1.8) слід ототожити їхні праві частини:

$$RT \equiv \frac{2}{3} N_A \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle, \quad (1.9)$$

що є, звичайно, вольовим актом, тобто *постулатом*, який, проте, не суперечить розробленим наукою якісним уявленням про природу теплоти (див. розділ 1) і тому є природним. Даний постулат конкретизує (уже на кількісному рівні) розроблені раніше уявлення про зв'язок температури  $T$  з інтенсивністю теплового (хаотичного) руху молекул. Саме згідно з постулатом (1.9) абсолютна температура газу  $T$  в стані термодинамічної рівноваги пропорціональна середній кінетичній енергії молекули газу:

$$T = \frac{2}{3} \frac{N_A}{R} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle. \quad (1.10)$$

Дещо уточнений (див. § 1.4) постулат (1.9) безумовно підтверджено узгодженням усіх наслідків з нього з експериментом. Тому його можна вважати добре обгрунтованим законом фізики. Ввівши сталу Больцмана

$$k = R/N_A, \quad (1.11)$$

перепишемо рівність (1.10) у вигляді

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (1.12)$$

Це найбільш популярна в науці форма запису співвідношення (1.9). Формула (1.12) має ключове значення в молекулярній фізиці. Сучасна статистична фізика (що є теоретичною основою термодинаміки) дає змогу використовувати співвідношення (1.12) не лише для ідеальних газів, а й для будь-яких макро-

скопічних тіл<sup>1</sup>. Отже, (1.12) практично є універсальним законом нерелятивістської термодинаміки.

Виведення формули (1.7) належить Клаузіусу [35].

Отже, розкрито глибинний фізичний зміст абсолютної температури  $T$  як значення пропорційного середній кінетичній енергії молекул у стані термодинамічної рівноваги.

Звичайно, проведені вище обчислення мають напівверистичний характер і потребують уточнень. Зокрема, це стосується проблеми реального, а не просто символічного визначення середніх значень фізичних величин (наприклад,  $\langle v^2 \rangle$ ) при термодинамічній рівновазі та питання щодо їх співвідношення з величинами, що спостерігаються при експерименті. Вперше цю проблему ґрунтовно розв'язав для ідеального газу Максвелл (див. § 1.3). У повному ж обсязі зазначене коло питань було з'ясовано Гіббсом. Та відповідна теорія виходить далеко за межі загальних курсів фізики.

## § 1.2. Обчислення ймовірностей та середніх значень фізичних величин

Обчислення середніх значень фізичних величин та їх аналіз — головне питання у статистичному підході до виведення законів макроскопічної (феноменологічної) термодинаміки з молекулярно-кінетичних уявлень про природу речовини. Тому для вивчення фізики необхідно мати елементарні відомості з теорії ймовірностей. Нижче коротко й на інтуїтивному рівні викладено необхідні елементи теорії ймовірностей.

Інтуїтивне визначення ймовірностей та середніх значень. Теорія ймовірностей виникла з потреб азартних ігор і довгий час не відповідала прийнятним в інших розділах математики стандартам строгості. Лише в ХХ ст. завдяки, зокрема, працям А. М. Колмогорова вона перетворилася на струнку й строгу математичну теорію. Та багато суттєвих результатів все ж було отримано на базі первісних, не дуже відшліфованих її положень і постулатів. Тому існує реальна можливість спрощеного й доступного для фізиків викладу ряду вихідних її положень на рівні, достатньому для грамотного використання теорії ймовірностей. Традиційно такий виклад супроводжується дуже вдалим прикладами з монетою та гральними кістками.

Неважко переконатися, що при достатньо одноманітній грі в орленку орел та решка чергуватимуться цілком випадково. Але при досить великому числі підкидань монети загальна кількість випадання орлів та решок буде приблизно однаковою: майже

<sup>1</sup>Щоправда, коефіцієнт  $3/2$  відноситься до тіл з одноатомних молекул і замінюється на інші для тіл із складніших молекул [34].

"фіфті-фіфті". Аналогічно при багатократному викиданні гральної кості кожна з її граней — від 1 до 6 — фігуруватиме приблизно однакове число разів. Ці приклади ілюструють можливість виникнення досить виразних закономірностей у безлічі випадкових, але однорідних подій. Подібних ситуацій на практиці виникає багато. Існує ще одна типова риса такого роду ситуацій, яку проілюструємо знову ж таки на прикладі монети. Замість багатократного підкидання однієї монети можна одночасно й одноманітно підкинути силу однакових монет. Результат буде тим самим: приблизно рівне число випадків появи орла та решки. Висновок, гадаємо, зрозумілий.

Спіраючись на розглянуті й засвоєні приклади, введемо кілька загальних понять, необхідних у теорії імовірностей. Нехай виконується  $N$  одноманітних і не залежних один від одного дослідів з набором можливих результатів  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n < N$ ). Припустимо, що  $N$  — це достатньо велике число ( $N \gg n$ ). Нехай у конкретній серії таких незалежних дослідів результат  $A_i$  випав  $\nu_i$  разів. Цю серію позначимо символом  $\{\nu_i\}_1^n$ . Очевидно,

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n \equiv N. \quad (1.13)$$

Частотою події  $A_i$  у даній серії дослідів називають відношення

$$f_i = \nu_i / N. \quad (1.14)$$

Згідно з (1.13)

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = \sum_{i=1}^n f_i \equiv 1. \quad (1.15)$$

Ця тотожність, очевидно, має місце для будь-якої серії з  $N$  дослідів. Нехай подібно до прикладів з монетами чи гральними кістками частоти  $f_i$  тяжіють до цілком певних значень  $w_i$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty}^{ac} f_i = w_i \quad (1.16)$$

( $N \xrightarrow{ac} \infty$  відображає так зване *асимптотичне* тяжіння чисел  $N$  до безмежності, тобто  $N$  прямує насправді не до безмежного, а просто до дуже великого значення. Надалі *ac* над стрілкою опускатимемо). Число  $w_i$  з (1.16) називають *імовірністю події*  $A_i$ . Згідно з (1.15), очевидно, маємо

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad (1.17)$$

причому значенню  $w_i = 0$  відповідає неймовірна подія, а  $w_i = 1$  — достовірна. З огляду на (1.15) і (1.16) матимемо

$$\sum_{i=1}^n w_i \equiv 1. \quad (1.18)$$

З наведеного вище ясно, як саме обчислювати частоти  $f_i$  в конкретних серіях  $\{v_i\}_1^n$  з  $N$  дослідів. Проте, незважаючи на нібито формальне визначення ймовірностей  $w_i$ , поки що не вказано конструктивного рецепту попереднього й реального їх розрахунку, без якого практична користь від формули (1.16) незначна: вона не має прогностичного значення, оскільки констатує лише факт існування певних імовірностей  $w_i$  для подій  $A_i$ , який до того ж встановлюється лише дослідним шляхом. Що ж до проблеми *априорного* розрахунку ймовірностей  $w_i$ , то це окрема задача, й здебільшого досить складна (див., наприклад, § 1.3). Проте трапляються й нескладні випадки (наприклад, рівнозначність обох сторін монети чи шести граней гральної кістки дає відповідно для них  $w_1 = w_2 = 1/2$  і  $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = 1/6$ ).

Середнім арифметичним значенням  $A_i$  в серії дослідів  $\{v_i\}_1^n$  називають число

$$\{A\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n v_i A_i = \sum_{i=1}^n f_i A_i, \quad (1.19)$$

а середнім статистичним значенням  $A_i$  — число

$$\langle A \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \{A\} = \sum_{i=1}^n w_i A_i. \quad (1.20)$$

**Імовірності складних подій.** Нехай нас влаштовує як результат  $A_\alpha$ , так і  $A_\beta$  ( $\alpha$  і  $\beta$  фіксовані). Тобто достатньо, щоб здійснилася хоча б одна з двох подій (така "подія" належить до розряду складних за принципом "або — або"). Очевидно, в серії  $\{v_i\}_1^n$  частота такої складної події становитиме суму відповідних частот

$$f(\alpha \text{ або } \beta) = \frac{v_\alpha + v_\beta}{N} = f_\alpha + f_\beta.$$

Звідси й аналогічна формула для ймовірностей:

$$w(\alpha \text{ або } \beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} (f_\alpha + f_\beta) = w_\alpha + w_\beta. \quad (1.21)$$

Такий результат, як неважко зрозуміти, переноситься й на випадок кількох ( $m \geq 2$ ) подій, які нас влаштовують:

$$w(\alpha \text{ або } \beta, \text{ або } \dots, \text{ або } \gamma) = w_\alpha + w_\beta + \dots + w_\gamma. \quad (1.22)$$

Отже, ймовірності незалежних одна від одної складних подій, що відбуваються за принципом "або — або", є сумою ймовірностей відповідних простих подій. Гадаємо, у детальнішому й точнішому вислові немає потреби.

Сформульоване твердження називають *теоремою додавання ймовірностей*.

Нехай треба, щоб за подією  $A_\alpha$  неодмінно йшла подія  $A_\beta$ , чи навпаки (тобто нас задовольнить лише така складна подія, яка відбувається за принципом "і — і"). Доведемо, що ймовірність такої складної події дорівнює добуткові ймовірностей відповідних простих подій:

$$w(\alpha \text{ і } \beta) = w_\alpha w_\beta. \quad (1.23)$$

Взагалі, коли треба знайти ймовірність неодмінного випадання кількох ( $m \geq 2$ ) конкретних подій, вона визначається добутком ймовірностей відповідних простих подій:

$$w(\alpha \text{ і } \beta, \text{ і } \dots, \text{ і } \gamma) = w_\alpha w_\beta \dots w_\gamma. \quad (1.24)$$

Це твердження має назву *теорема множення ймовірностей*. Доведемо його.

Розглянемо двокомпонентну фізичну величину  $B_{ij} = [A_i, A_j]$ , вважаючи рівнозначними пари  $[A_i, A_j]$  та  $[A_j, A_i]$ . Визначимо ймовірність випадання пари  $[A_i, A_j]$  за загальною схемою, викладеною вище. Але виконуватимемо тепер серії з  $N^2$  дослідів, вважаючи  $N$  (а з ним, зрозуміло, й  $N^2$ ) достатньо великими числами. Побудуємо процедуру, наприклад, таким чином. Після кожного дослідів щодо визначення першої компоненти  $A_i$  пари  $[A_i, A_j]$  виконуємо серію з  $N$  дослідів щодо визначення другої компоненти  $A_j$  пари  $[A_i, A_j]$ . Внаслідок цього буде виконано усі  $N^2$  дослідів. Оскільки  $N$  дуже велике, то відповідні частоти  $f_i$  та  $f_j$  майже дорівнюватимуть ймовірностям  $f_i \approx w_i$ ,  $f_j \approx w_j$ , тобто будуть практично фіксованими. Неважко збагнути, що частота появи конкретної пари  $[A_i, A_j]$  в серії з усіх  $N^2$  дослідів дорівнюватиме добуткові частот ( $\approx$  ймовірностей):  $f(\alpha \text{ та } \beta) = f_\alpha f_\beta \approx w_\alpha w_\beta$ .

Висновок зрозумілий: він збігається з твердженням (1.23). (Рекомендуємо обміркувати все в деталях.) Узагальнення на випадок (1.24) тривіальне.

Про розподіл ймовірностей для незалежних неперервних випадкових величин. Нехай випадкова<sup>1</sup> величина  $A$  набуває не дискретних, а неперервних значень на деякому інтервалі  $[a, b]$  зміни певного визначального параметра  $x: \{A(x)\}_a^b$ . При цьому нехай велика кількість дослідів веде до певної закономірності у

<sup>1</sup> Випадкова — це така величина, точне значення якої не прогнозується.

розподілі значень величини  $A$ . У такому разі запроваджується поняття про *розподіл* (або *густину*) *ймовірностей*  $w(x)$ . Розглянемо це питання.

Імовірність  $dP(x)$  знайти значення величини  $A$  в інтервалі між  $A(x)$  і  $A(x) + dA$ , який відповідає інтервалу визначального параметра  $[x, x + dx]$ , покладають пропорційною  $dx$ :

$$dP(x) = w(x)dx. \quad (1.25)$$

Практика показує, що така гіпотеза, як правило, відповідає дійсності. *Розподілом* (або *густиною*) *ймовірностей* називають у цьому разі значення  $w(x)$ , яке чисельно дорівнює ймовірності знайти значення  $A(x)$ , перерахованій на одиничний інтервал визначального параметра  $x$ :

$$w(x) = \frac{dP(x)}{dx}. \quad (1.26)$$

Для розподілу ймовірностей можна записати умову, аналогічну (1.18) для дискретних величин:

$$\int_a^b w(x)dx = 1. \quad (1.27)$$

Вона дістала назву умови *нормування* (на одиницю). За визначенням вважається також, що  $w(x) \geq 0$ .

Середні статистичні значення  $\langle A \rangle$  випадкових величин  $A$  обчислюються за формулою

$$\langle A \rangle = \int_a^b A(x)w(x)dx, \quad (1.28)$$

яка є аналогом формули (1.20) для дискретних величин. Межі інтегрування ( $a$  та  $b$ ) або одна з них можуть бути й нескінченними.

Для ймовірностей складних подій за принципами "або — або" чи "і — і" виконуються теореми додавання й відповідно множення ймовірностей, аналогічні (1.22), (1.24):

$$\begin{cases} dP(x \text{ або } y) = w(x)dx + w(y)dy; & (1.28a) \\ dP(x \text{ та } y) = w(x)w(y)dxdy. & (1.28b) \end{cases}$$

Детальні пояснення, гадаємо, тут зайві, а узагальнення на багатовимірні величини очевидні.



### § 1.3. Рівноважний розподіл молекул ідеального газу за швидкостями — розподіл Максвелла

Розподіл Максвелла є предтечею сучасної статистичної фізики, започаткованої Больцманом і перетвореної на систематичну науку Гіббсом. Статистична фізика успішно пояснює основні закони термодинаміки на основі молекулярно-кінетичних уявлень, закладаючи тим самим надійний фундамент під сучасну науку про будову речовини. Почалося все з розподілу Максвелла, що ґрунтується на дуже повчальних і винахідливих міркуваннях, які надихають на сміливий пошук розв'язування складних і принципових задач за умов, коли, здавалося б, немає за що зачепитися. Тому радимо неодмінно подолати певні труднощі й засвоїти хід міркувань, що ведуть до розподілу Максвелла. (Ми, на жаль, не маємо можливості продемонструвати практичну важливість розподілу Максвелла на численних прикладах його застосування. Проте вже вихідні міркування настільки *повчальні*, що загальні курси не можуть їх обминути.)

В основі міркувань, що ведуть до розподілу Максвелла, лежать фактично два блоки постулатів: про *хаос* й інтерпретацію *абсолютної температури*  $T$  (1.12) та про застосування статистичного підходу до розглядання систем великої кількості частинок, заснованого на теорії ймовірностей. Перший блок — це фізичні постулати, другий — математичні.

Дещо розгорнемо фізичні постулати. Термодинамічна рівновага за своєю глибинною суттю не статична, а динамічна. Молекули газу, стискаючись між собою, весь час обмінюються імпульсами й енергією, змінюючи свої швидкості. Оскільки, проте, однією з умов термодинамічної рівноваги є сталість температури, яка пов'язана із середньою швидкістю руху молекул рівністю (1.22), то природно припустити, що має місце принцип детальної рівноваги: скільки молекул, що мають швидкість в інтервалі  $\{\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}\}$ , вибуває із цього інтервалу за деякий достатньо малий час  $\Delta t$ , стільки ж приблизно до нього й прибуває за цей же час. Інакше кажучи, природно вважати, що в стані термодинамічної рівноваги має місце *стабільний* (незалежний від часу) *розподіл молекул за швидкостями*. Постає задача встановлення цього розподілу. Розглядаючи ідеальний газ (надалі говоритимемо просто газ) поза межами силових полів, вважатимемо всі напрями руху молекул рівноправними (власне гіпотеза хаосу).

Звертаючись до другого блоку постулатів, розподіл молекул за швидкостями розумітимемо в теоретико-ймовірнісному сенсі (див. § 1.2). Для знаходження розподілу молекул газу за швидкостями введемо "простір швидкостей" (рис. 52), відкладаючи на відповідних осях координат проекції швидкості  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$

певної виділеної молекули. Ймовірність знайти молекулу газу зі швидкістю, що потрапляє до паралелепіпеда у просторі швидкостей з місткістю  $dv_x dv_y dv_z$  в околі значення  $\vec{v}$  (див. рис. 52), позначимо через

$$dP(\vec{v}) \equiv w(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z. \quad (1.29)$$

Сказане означає, що проекції цієї швидкості одночасно знаходяться у межах інтервалів

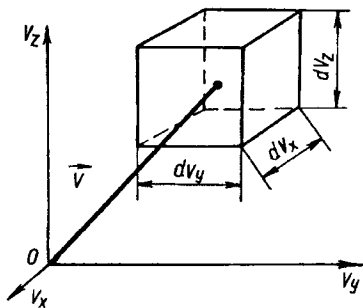


Рис. 52

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x; v_x + dv_x; \\ v_y; v_y + dv_y; \\ v_z; v_z + dv_z. \end{array} \right. \quad (1.30)$$

$$(1.30a)$$

$$(1.30b)$$

Функція  $w(\vec{v})$  і є шуканим розподілом за швидкостями. Знаючи її, можна визначити середні значення усіх фізичних величин, що залежать від швидкості. Для кінетичної енергії, наприклад, згідно з (1.28) та (1.29) матимемо

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \iiint_{(\infty)} \frac{mv^2}{2} w(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z. \quad (1.31)$$

Інтегрування веде́ться тут по всьому тривимірному простору швидкостей

$$-\infty < v_x; v_y; v_z < \infty. \quad (1.32)$$

Його треба виконати, враховуючи, з одного боку, що  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , а з іншого, що має місце умова нормування (1.27)

$$\iiint_{(\infty)} w(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = 1. \quad (1.33)$$

Нагадаємо, що запис  $w(\vec{v})$  — це скорочена форма запису  $w(v_x, v_y, v_z)$ .

Згідно з міркуваннями, що ґрунтуються на прийнятих вище постулатах, доведемо, що розподіл Максвелла  $w(\vec{v})$  має вигляд

$$w(\vec{v}) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (1.34)$$

й задовольняє умову (1.33).

Переходимо до викладу відповідних міркувань. Розглянемо, використовуючи (1.29), ймовірності того, що кожна з проєкцій  $v_x, v_y, v_z$  швидкості  $\vec{v}$  молекули потрапляє у відповідний інтервал (1.30)–(1.30б):

$$\begin{aligned} dP(v_x) &= \varphi(v_x)dv_x; & dP(v_y) &= \varphi(v_y)dv_y; \\ dP(v_z) &= \varphi(v_z)dv_z. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Однаковий розподіл  $\varphi(\dots)$  для всіх трьох проєкцій впливає з гіпотези про хаос (рівноправність усіх напрямів руху). Ця ж гіпотеза про хаос вимагає, щоб розподіли  $w(\dots)$  та  $\varphi(\dots)$  не змінювалися при заміні напрямів руху на протилежні:

$$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}, \quad v_\xi \rightarrow -v_\xi \quad (\xi = x; y; z). \quad (1.36)$$

Це означає, що  $w(\dots)$  і  $\varphi(\dots)$  мають залежати від модулей вектора швидкості та відповідно його проєкцій:

$$\begin{cases} |\vec{v}| \rightarrow v = |\vec{v}| = +\sqrt{v^2}; \\ v_\xi \rightarrow |v_\xi| = +\sqrt{v_\xi^2} \quad (\xi = x; y; z). \end{cases} \quad (1.36a)$$

Зважаючи на зв'язок модуля певної величини з її квадратом ( $|x| = +\sqrt{x^2}$ ), вважатимемо, що  $w(\dots)$  та  $\varphi(\dots)$  залежать від квадратів відповідних величин:

$$dP(\vec{v}) = w(v^2)dv_x dv_y dv_z; \quad (1.29a)$$

$$dP(v_\xi) = \varphi(v_\xi^2)dv_\xi \quad (\xi = x; y; z). \quad (1.35a)$$

(Тут збережено символи  $w$  та  $\varphi$ , хоча ми перейшли фактично від функцій швидкості та її проєкцій до функцій від їхніх квадратів, тобто до інших функцій.)

Розглядаючи ймовірність (1.29a) як ймовірність складної події за принципом "і — і", зобразимо її як добуток ймовірностей (1.35a) (див. (1.28б)). Скорочуючи на  $dv_x dv_y dv_z$ , дістаємо

$$w(v^2) = \varphi(v_x^2)\varphi(v_y^2)\varphi(v_z^2). \quad (1.37)$$

За теоремою Піфагора

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (1.38)$$

Якщо тимчасово покласти  $v^2 \equiv u$ ;  $v_x^2 \equiv \xi$ ;  $v_y^2 \equiv \eta$ ;  $v_z^2 \equiv \zeta$ , то (1.38) і відповідно (1.37) переписуться у вигляді

$$u = \xi + \eta + \zeta; \quad (1.38a)$$

$$w(\xi + \eta + \zeta) = \varphi(\xi)\varphi(\eta)\varphi(\zeta). \quad (1.37a)$$

Прямим підставленням у (1.37a) можна переконатися, що це функціональне рівняння задовольняється експонентами

$$w(u) = A^3 e^{\alpha u} = A^3 e^{\alpha v^2}; \quad (1.39)$$

$$\varphi(\xi) = A e^{\alpha \xi} = A e^{\alpha v_x^2}. \quad (1.39a)$$

І аналогічні вирази мають, звичайно, місце для  $\varphi(\eta)$ ,  $\varphi(\zeta)$ . Можна довести, що серед гладких функцій (а негладкі не мають фізичного виправдання) інших розв'язків рівняння (1.37a) немає. Отже, загальний вигляд розподілів  $w(\dots)$ ,  $\varphi(\dots)$  встановлено. Залишається визначити параметри  $A$  та  $\alpha$ .

З фізичних міркувань ясно, що параметр  $\alpha$  має бути від'ємним:

$$\alpha = -\beta \quad (\beta > 0). \quad (1.40)$$

У противному разі незалежно від температури газу імовірність знайти молекулу із заданою швидкістю необмежено зростала б із зростанням швидкості, перетворюючись на  $\infty$  у границі  $|\vec{v}|, |v_x| \rightarrow \infty$ . Це фізична нісенітниця, яка до того ж веде до неможливості задовольнити математичну умову нормування (1.33). Отже, має місце умова (1.40), і тому (1.39), (1.39a) слід переписати таким чином:

$$w(v^2) = A^3 e^{-\beta v^2}; \quad (1.41)$$

$$\varphi(v_x^2) = A e^{-\beta v_x^2} \quad (\beta > 0). \quad (1.41a)$$

Параметри  $A$  та  $\beta$  завдяки умові нормування типу (1.33) не є незалежними. Справді, вони пов'язані рівностями

$$A^3 \int_{(\infty)} \int \int e^{-\beta v^2} dv_x dv_y dv_z = 1; \quad (1.42)$$

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} dv_x = 1, \quad (1.42a)$$

еквівалентними між собою.

Користуючись простішою формулою (1.42a), дістанемо для  $A$  значення, виражене через  $\beta$ :

$$A = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} dv_x \right\}^{-1}. \quad (1.43)$$

Отже, залишилося визначити єдину константу  $\beta$ . Обчислення за (1.43) (див. додаток) дають

$$A = \sqrt{\beta/\pi}. \quad (1.44)$$

Тому для  $w(v^2)$  і  $\varphi(v_x^2)$  маємо

$$w(v^2) = (\beta/\pi)^{3/2} e^{-\beta v^2}; \quad (1.45)$$

$$\varphi(v_x^2) = (\beta/\pi)^{1/2} e^{-\beta v_x^2}. \quad (1.45a)$$

Єдину константу  $\beta$ , що залишилася невизначеною, знайдемо, користуючись формулою Клаузіуса (1.12). Для середнього значення кінетичної енергії за допомогою розподілу Максвелла (1.45) можемо записати вираз

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = (\beta/\pi)^{3/2} \int \int \int_{(-\infty)}^{+\infty} \frac{mv^2}{2} e^{-\beta v^2} dv_x dv_y dv_z. \quad (1.46)$$

Або, зважаючи на співвідношення (1.6), еквівалентний йому простіший вираз

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = 3(\beta/\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{mv_x^2}{2} e^{-\beta v_x^2} dv_x. \quad (1.46a)$$

Його й покладають, звичайно, в основу розрахунку. Треба фактично обчислити інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x = -\frac{d}{d\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} dv_x. \quad (1.47)$$

Але в додатку показано, що  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} dv_x = (\pi/\beta)^{1/2}$ . І тому за (1.47) знаходимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\beta v_x^2} dv_x = (\sqrt{\pi}/2) \beta^{-3/2}. \quad (1.48)$$

Скориставшись формулою Клаузіуса (1.12), за (1.46a), (1.48) неважко дістати

$$\beta = \frac{m}{2kT}. \quad (1.49)$$

Усі параметри розподілу Максвелла вже визначено й за допомогою (1.49), (1.45) приходимо до шуканої формули (1.34). Аналогічно для  $\varphi(v_x)$  матимемо

$$\varphi(v_x) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}. \quad (1.50)$$

Гадаємо, що повчальність міркувань, які ведуть до розподілу Максвелла, продемонстрована.

**§ 1.4. Співвідношення між середньою й найбільш імовірною швидкостями молекул та між середніми статистичними й вимірюваними величинами**

Як було з'ясовано в § 1.2 і 1.3, абсолютна температура  $T$  визначається середньостатистичним значенням кінетичної енергії молекули газу (1.12). З цієї формули випливає співвідношення для середнього квадрата швидкості

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2kT}{m}. \quad (1.51)$$

Порівняємо це значення зі значенням найбільш імовірного квадрата швидкості, який можна знайти, користуючись розподілом Максвелла (1.34). Оскільки напрям руху нас не цікавить, то, застосовуючи теорему додавання ймовірностей (1.28а), виконаємо інтегрування розподілу Максвелла по всіх напрямках руху молекул. Введемо у просторі швидкостей (див. рис. 52) сферичні координати. Тоді для елемента об'єму матимемо

$$dv_x dv_y dv_z = v^2 \sin \theta d\theta d\varphi dv. \quad (1.52)$$

(Зробіть замість рис. 52 детальний рисунок з позначенням кутів  $\theta$  і  $\varphi$ .) Звідси, інтегруючи по всіх напрямках ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ), дістанемо розподіл ймовірностей молекул за абсолютним значенням швидкості в інтервалі  $(v; v + dv)$ :

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi w(v^2) v^2 dv = \sqrt{2/\pi} \left( \frac{m}{kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \quad (1.53)$$

Графік функції

$$f(\xi) \equiv \xi e^{-\frac{m\xi}{2kT}} \quad (\xi = v^2) \quad (1.54)$$

зображено на рис. 53. Як видно з рисунка, розподіл (1.53) має максимум у деякій точці  $v = v_{\max}$ , яка відповідає найбільш імовірному квадрату швидкості  $\xi = v^2$ . Знаходимо цю точку за умовою

$$\frac{df}{d\xi} = \left\{ 1 - \frac{m\xi}{2kT} \right\} e^{-\frac{m\xi}{2kT}} = 0. \quad (1.55)$$

Саме максимуму, як не важко переконатися, відповідає значення

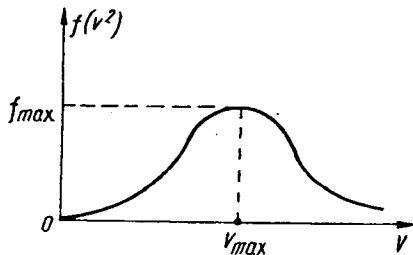


Рис. 53

$$\xi_{\max} = v_{\max}^2 = \frac{2kT}{m}. \quad (1.56)$$

Це й буде найімовірніше значення квадрата швидкості. Порівнюючи його з середнім значенням (1.51), дістанемо

$$\langle v^2 \rangle / v_{\max}^2 = 1,5. \quad (1.57)$$

Це означає, що за умов термодинамічної рівноваги кількість молекул зі швидкістю  $v > v_{\max}$  трохи більша за кількість зі швидкістю  $v < v_{\max}$ , і що переважна більшість молекул має швидкості, значення яких досить компактно групуються навколо максимально ймовірної  $v_{\max}$  при температурі  $T$  (див. рис. 53), оскільки середній квадрат швидкості  $\langle v^2 \rangle$  відрізняється від квадрата найбільш ймовірної швидкості  $v_{\max}^2$  лише в півтора раза, а лінійне відношення вказаних швидкостей

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} / v_{\max} \lesssim 1,23 \quad (1.58)$$

ще менше відрізняється від одиниці.

Саме компактне групування переважної більшості молекул за швидкостями навколо значення  $v = v_{\max}$  є тією причиною, що середні статистичні значення залежних від швидкості фізичних величин можна з успіхом зіставляти зі спостережуваними на експерименті їх значеннями. З цього приводу й кажуть про "фізичну репрезентативність середніх статистичних значень фізичних величин".

### § 1.5. Барометрична формула.

#### Розподіли Больцмана і Максвелла — Больцмана

У силових полях (наприклад, гравітаційному або електростатичному) просторовий розподіл молекул газу вже не буде рівномірним. Відомо, наприклад, що з висотою густина повітря зменшується. Взагалі фізичні властивості речовин залежать не лише від розподілу її частинок за швидкостями, але й від їхнього розподілу у просторі, обумовленому зовнішніми й внутрішніми силовими полями, тобто від характеру взаємодії частинок між собою та з зовнішніми тілами і полями. Для попереднього теоретичного з'ясування цього питання звернемося знову до ідеального газу, переписавши рівняння Менделєєва — Клапейрона у зручному для даного параграфу вигляді:

$$p = \frac{M}{V} \frac{RT}{\mu} = \rho \frac{RT}{\mu}, \quad (1.59)$$

де  $\rho = M/V$  — просторова густина газу ( $M$  — маса газу). Якщо

$N$  — загальна кількість молекул у місткості  $V$ ,  $N_A$  — число Авогадро, а  $m$  — маса окремої молекули, то згідно з (1.59) матимемо

$$p = nkT. \quad (1.60)$$

Тут враховано, що

$$k = R/N_A; \quad M = Nm; \quad \mu = N_A m, \quad (1.61)$$

й введено середню концентрацію молекул

$$n = N/V. \quad (1.62)$$

З (1.60), зокрема, випливає, що концентрація за сталої температури  $T$  пропорційна тиску  $p$ :

$$n = p/kT. \quad (1.63)$$

При виведенні так званої барометричної формули, яка встановлює залежність атмосферного тиску  $p$  (а з ним і концентрації молекул газу  $n$  за (1.63)) від висоти<sup>1</sup>, зазначимо, що в полі земного тяжіння концентрація молекул повітря, як свідчить досвід, змінюється з висотою досить повільно. Тому формула (1.63), строго справедлива для ідеальних газів поза силовими полями, залишається практично вірною і в полі земного тяжіння в межах шарів повітря значної товщини. (Для підтвердження цього зазначимо, що закон (1.63) було встановлено в лабораторних умовах у полі Землі.) Тим більше вона справедлива в межах тонких повітряних шарів. Цією обставиною ми й скористаємося при виведенні барометричної формули.

Позначимо атмосферний тиск на поверхні Землі ( $z = 0$ ) через  $p_0$ , а на висоті  $z > 0$  — через  $p$ . Нехай  $dp$  — зміна тиску, що відповідає зміні висоти на  $dz$  (рис. 54). Знаючи густину повітря  $\rho$  на висоті  $z$ , можемо визначити відповідну зміну тиску

$$dp = -\rho g dz. \quad (1.64)$$

Але якщо  $\rho = mn = mp/kT$ , то

$$dp = -\frac{mg}{kT} pdz. \quad (1.65)$$

Звідси дістанемо

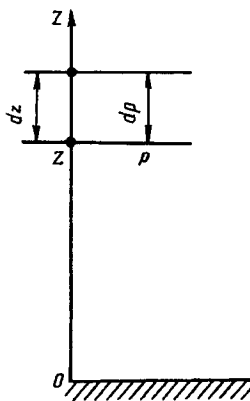


Рис. 54

<sup>1</sup> За певних спрощуючих умов, що буде розкрито нижче.



$$p = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} = p_0 e^{-\frac{\mu gz}{kT}}, \quad (1.66)$$

де  $p_0$  — тиск повітря на поверхні Землі. Це й буде шукана барометрична формула, справедлива щодо висот, в межах яких можна знехтувати перепадами температури з висотою. Враховуючи (1.63), можна аналогічну формулу записати й для зміни концентрації молекул  $n$  з висотою  $z$ :

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}; \quad (1.67)$$

тут  $n_0$  — приповерхнева концентрація молекул.

Значення  $U(z) = mgz$  становить потенціальну енергію молекули в полі земного тяжіння. Отже, формулу (1.67) можна переписати у вигляді

$$n = n_0 e^{-\frac{U(z)}{kT}}. \quad (1.68)$$

Природно прийняти, що розподіл імовірностей для знаходження молекули на висоті  $z$  пропорційний концентрації молекул (1.68).

Проведені обчислення можна узагальнити на випадок рівноважного просторового розподілу молекул газу у будь-яких потенціальних силових полях при заданій температурі  $T$  і встановити, що концентрація молекул у потенціальному силовому полі

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad (1.69)$$

як функція радіуса-вектора  $\vec{r}$  визначається формулою

$$n(\vec{r}) = n_0 e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}}, \quad (1.70)$$

де  $n_0$  — концентрація молекул на тій поверхні, де  $U(\vec{r}) = 0$ . Закон (1.70) дістав назву *формули Больцмана*. Відповідний просторовий розподіл імовірностей молекул природно вважати пропорційним концентрації  $n(\vec{r})$  за (1.71). Тому ймовірність  $dP(\vec{r})$  знайти молекулу газу в об'ємі

$$dV = dx dy dz \quad (1.71)$$

поблизу точки з радіусом-вектором  $\vec{r} \{x, y, z\}$  дорівнює

$$dP(\vec{r}) = (n_0/N) e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}} dV; \quad (1.72)$$

тут  $N$  — повне число молекул в зайнятому газом об'ємі  $V$ ;  $n_0$  — концентрація молекул в околі поверхні  $U(\vec{r}) = 0$ . Густина (розподіл) ймовірностей

$$w(\vec{r}) = \frac{dP(\vec{r})}{dV} = \frac{n_0}{N} e^{-\frac{U(\vec{r})}{kT}} \quad (1.73)$$

і має назву *розподіл Больцмана*.

Користуючись розподілами Максвелла (1.34) і Больцмана (1.73), за допомогою теореми множення ймовірностей (1.286) можна визначити комбінований розподіл молекул одночасно у просторі й за швидкостями, тобто розподіл імовірностей знайти молекулу в об'ємі  $dV = dxdydz$  біля точки  $\vec{r} = \{x, y, z\}$ , яка має швидкість у межах відповідного об'єму швидкостей  $dv_x dv_y dv_z$  поблизу значення  $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$

$$\frac{dP(\vec{r}, \vec{v})}{dxdydzdv_x dv_y dv_z} = w(v^2)w(\vec{r}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{n_0}{N} e^{-\frac{E(v^2, \vec{r})}{kT}}, \quad (1.74)$$

де  $E = \frac{mv^2}{2} + U(\vec{r})$  — повна енергія молекули газу. Формулу (1.74) називають *розподілом Максвелла — Больцмана*. Розподіл (1.74) дає змогу обчислювати середні значення фізичних величин, які залежать від координат  $\vec{r}$  та швидкостей  $\vec{v}$  і ототожнюються з тим, що спостерігаються експериментально в умовах термодинамічної рівноваги. Саме таким шляхом в межах статистичної фізики теоретично відтворюються відомі термодинамічні співвідношення й прогнозуються нові, які важко встановити експериментально. Теоретичне відтворення відомих співвідношень покликане обґрунтувати, з одного боку, методичку обчислень, а з іншого, — обрану фізичну мікромодель речовини. Після цього за обґрунтованою вже таким чином методикою і моделлю можна з великою мірою вірогідності братися за прогнозування нових фізичних співвідношень. Узгодження останніх співвідношень з подальшим практичним досвідом є остаточним критерієм істини. Весь сучасний науковий досвід підтверджує справедливість розподілу Максвелла — Больцмана (1.74) і встановлює межі його застосування. Щоправда, сміливі й прозорливі діячі світової науки збагнули правомірність імовірностно-статистичного підходу в фізиці задовго до повного його обґрунтування накресленим вище шляхом.

Узагальнюючи та поглиблюючи теоретичні міркування, що ведуть до розподілу Максвелла — Больцмана (1.74), американський фізик Гіббс [20, 35] встановив рівноважний розподіл імовірностей, що дає змогу обчислювати середні статистичні значення фізичних величин у стані рівноваги не лише для газів, але й для речовин в рідкому, твердому станах та в стані плазми. Але теорія Гіббса, на жаль, виходить далеко за межі загальних курсів фізики — це змістовний і дуже широкий розділ теоретичної фізики, без якої сучасна фізична наука просто немислима. Та, на жаль, констатацією даного факту ми змушені тут і обмежитися.

## ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ З МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНОГО ПОГЛЯДУ

### § 2.1. Якісна молекулярно-кінетична інтерпретація явищ переносу

У другому розділі було розглянуто елементарну феноменологічну теорію явищ переносу на прикладах дифузії, теплопровідності та в'язкості, які ґрунтувалися на емпіричних законах Фіка, Фур'є та Ньютона — Пуазейля відповідно. У цій главі дамо елементарну мікроінтерпретацію цих явищ і на прикладі теплопровідності виконаємо відповідні кількісні розрахунки оціночного характеру. Звертаємо увагу на слово *оціночного*, оскільки ґрунтовна теорія явищ переносу спирається на відповідні кінетичні рівняння, що виходять за межі загальних курсів. Проте без попередніх міркувань важко уявити собі реальні механізми процесів. Саме тому вони й становлять обов'язкову основу загальнофізичного розгляду явищ переносу (та й не тільки їх).

Інтуїтивно ясно, що будь-яка закономірна, організована поведінка систем з багатьох частинок, що утворюють макротіла, повинна бути пов'язана з якимись загальними рисами взаємодії цих частинок між собою та з оточуючим середовищем (наприклад, зі стінками посудин, що вміщують рідини чи гази). Це справедливо навіть для досить розріджених (ідеальних) газів, хоч вище приймалося, що їхні молекули майже не взаємодіють між собою. Але це "майже" означало лише, що переважну більшість часу молекули рухаються вільно, оскільки навіть хаотизація руху пов'язана з їх зіткненнями та обміном енергіями й імпульсами. Сказане означає, що певні загальні характеристики або параметри взаємодії молекул між собою та з матеріальним оточенням неодмінно повинні фігурувати в молекулярно-кінетичній теорії навіть розріджених газів, які є базою елементарного розгляду. Однією з найважливіших характеристик наявності взаємодії між молекулами навіть розріджених газів є так звана *середня довжина вільного пробігу*  $\bar{\lambda}$  в рідинах і газах. Для з'ясування її фізичного змісту вдамося до спрощеної моделі, за якої молекули речовини розглядаються як тверді кульки фіксованого радіуса  $r$ , що взаємодіють між собою лише шляхом прямих співударів. Середню відстань  $\bar{\lambda}$ , яку проходить рухома молекула між двома послідовними співударами, називають *середньою довжиною вільного пробігу* молекул ( $\bar{\lambda}$ ).

За порядком значення  $\bar{\lambda}$  можна оцінити таким чином. Нехай рух певної подумки виділеної молекули характеризується середньою швидкістю  $\bar{v}$ . Тоді за одиницю часу ( $\Delta t = 1$ ) вона

в середньому проходить відстань  $\bar{l}$ , яка чисельно дорівнює швидкості

$$\bar{l} = \bar{v}\Delta t = \bar{v}. \quad (2.1)$$

Вважатимемо зіткненням будь-який контакт виділеної молекули з іншими. Тоді вона стикається з тими молекулами, центри яких потрапляють всередину циліндра (взагалі кажучи, ламаного), радіус якого  $R$  дорівнює подвійному радіусу кульки-молекули  $R = 2r$  (рис. 55). І хоч рухома молекула рухається вздовж ламаної, змінюючи напрям руху внаслідок зіткнень, загальна середня довжина її шляху завдяки мализні  $R$  все одно практично визначається формулою (2.1). Тому за одиницю часу молекула в середньому здійснить стільки співударів  $\nu$ , скільки частинок зустрінеться за цей час на її шляху, тобто скільки їх знаходиться в циліндрі радіуса  $R = 2r$  заввишки  $\bar{l}$  за (2.1), а саме:

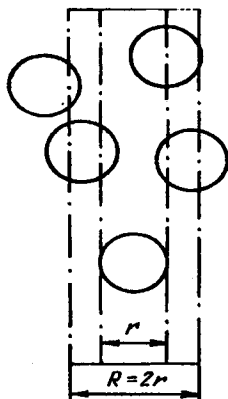


Рис. 55

$$\nu = \sigma \bar{v} n, \quad (2.2)$$

де  $n$  — концентрація молекул;  $\sigma = \pi R^2 = 4\pi r^2$  — площа поперечного перерізу згаданого циліндра, яку називають *площею поперечного перерізу розсіювання* молекул (або просто *поперечним перерізом розсіювання*). Згідно з (2.2) середній проміжок часу  $\Delta \bar{l}$  між співударами тоді дорівнює

$$\Delta \bar{l} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\sigma \bar{v} n}, \quad (2.3)$$

а середня довжина вільного пробігу

$$\bar{\lambda} = \bar{v} \Delta \bar{l} = \frac{1}{\sigma n}. \quad (2.4)$$

Зрозуміло, що ця формула визначає  $\bar{\lambda}$  лише за порядком величини, хоча б завдяки тому, що вихідна формула (2.2) строго справедлива лише при умові нерухомості молекул-мішеней. Насправді вони безладно рухаються, що збільшує частоту зіткнень  $\nu$ . Слід було б зважити ще на те, що молекули не є твердими кульками й починають взаємодіяти вже на певній відстані, більшій за їхні лінійні розміри. Ефективність такої взаємодії (тобто ступінь викривлення траєкторії виділеної молекули) повинна залежати від відносної швидкості молекул, що стикаються, або від кінетичної енергії їхнього відносного руху. Звідси

впливає залежність поперечного перерізу розсіювання  $\sigma$ , а з ним і  $\bar{\lambda}$  з (2.4) від середньої кінетичної енергії молекул, пропорційної температурі  $T$ . Всі згадані вище фактори можна певним чином врахувати. Проте досвід свідчить, що модельна формула (2.4) досить добре передає характер залежності  $\bar{\lambda}$  від  $\sigma$  та  $n$  [34]. Це один з повчальних прикладів успішного використання навіть досить грубих модельних уявлень, які вдало передають певні визначальні риси розглядуваних явищ.

Середня довжина вільного пробігу молекул  $\bar{\lambda}$  з (2.4) — це певне характерне значення, яке буде використано в наступному параграфі.

Перейдемо безпосередньо до якісної молекулярно-кінетичної інтерпретації явищ переносу.

**Дифузія та самодифузія.** Одне з найпростіших явищ переносу, пов'язане з нерівномірною просторовою концентрацією молекул однієї речовини в надрах іншої (дифузія), або просто нерівномірною просторовою концентрацією молекул одного сорту (самодифузія). Отже, дифузія (і самодифузія) пов'язана з переносом речовини (або ще кажуть маси). Тепловий хаотичний рух молекул призводить до поступового перемішування молекул аж до вирівнювання (за відсутності зовнішніх силових полів) їх просторової концентрації за об'ємом, що займає розглядувана система. Тому першопричиною дифузії (і самодифузії) є нерівномірний просторовий розподіл тієї чи іншої речовини в однорідному просторі чи середовищі, а її мікроскопічною рушійною силою — хаотичний тепловий рух молекул.

**Теплопровідність.** З макроскопічного погляду, як ми бачили, теплопровідність зумовлюється градієнтами (перепадами) температур. Але останні пов'язані з середньою кінетичною енергією молекул. Отже, шари речовини з різними температурами складаються з сукупностей молекул, що мають різні середні кінетичні енергії. Хаотичний тепловий рух спричинює перемішування молекул з різних шарів речовини, збільшуючи середню кінетичну енергію шарів з нижчою температурою і зменшуючи її в шарах з вищою температурою. Отже, відбуватиметься перенесення енергії від шарів з вищою температурою до шарів з нижчою. І теплопровідність, зумовлена цим процесом (що пов'язано з перепадами температур), здійснюється завдяки хаотичному тепловому рухові.

**В'язкість, або внутрішнє тертя.** В'язкість рідин та газів виявляється, наприклад, за умов, коли з тих чи інших причин на безладний тепловий рух накладається макроскопічно впорядкований рух різних шарів речовини один відносно іншого. При цьому повні середні швидкості молекул вже не дорівнюють нулю. Дорівнює нулю лише їхня середня хаотична складова.

При наявності градієнта впорядкованої складової швидкості різні шари речовини перебувають між собою у відносному русі. Хаотичний тепловий рух спричинює перемішування молекул з різних шарів, внаслідок чого спостерігатиметься тенденція до сповільнення більш швидких шарів і прискорення повільніших. З погляду механіки прискорення (сповільнення) руху матеріальних об'єктів породжується відповідними силами. Отже, між шарами речовини з різними значеннями впорядкованої компоненти швидкості ніби виникають свого роду *сили тертя*, що дістало назву *внутрішнього*. Ці "сили" й зумовлюють в'язкість рідин і газів. Яка ж фізична величина переноситься у даному випадку? Відбувається *перенос імпульсу* (кількості руху). Справді, у частинок з шарів речовини, що рухаються швидше сусідніх, більша впорядкована складова імпульсу. Отже, теплове перемішування частинок з відносно швидких шарів з частинками повільніших шарів веде до зміни середнього впорядкованого імпульсу частинок у цих шарах. Але за другим законом Ньютона швидкість зміни імпульсу (тобто його зміна за одиницю часу) дорівнює силі. У даному випадку ця сила виступає як сила внутрішнього тертя. Отже, це явище можна формально описати мовою законів Ньютона, пристосованих до руху суцільних середовищ. Як ми бачили, сила тертя зумовлена переносом імпульсу (при наявності градієнта швидкості) і здійснюється завдяки хаотичному тепловому рухові.

Проведене обговорення дає ключ до молекулярно-кінетичної інтерпретації не лише розглянутих, але й будь-якого іншого явища переносу.

Перейдемо від чисто якісних міркувань до кількісних оцінок і теоретичного обґрунтування емпіричних законів типу Фіка, Фур'є чи Ньютона — Пуазейля. Покажемо це на прикладі теплопровідності (переносу енергії) в газах, тобто на прикладі закону Фур'є.

## § 2.2. Теоретичне обґрунтування закону Фур'є

Нехай ідеальний газ знаходиться між нагрівником з температурою  $T_n$  і холодильником з температурою  $T_x$ , виконаними у формі плоских пластинок (рис. 5б). Вважатимемо, що  $T_n > T_x$ . Тоді в газі виникне градієнт температур, який спричинить тепловий потік (згори донизу). За сталих  $T_n$  і  $T_x$  цей потік буде стаціонарним, підпорядкованим, як відомо, закону Фур'є. Постає питання про молекулярно-кінетичне обґрунтування цього закону. Вище було з'ясовано, що теплопровідність зумовлена переносом кінетичної енергії. Отже, задача полягає в обчисленні відповідних енергетичних потоків.

Фіксуємо в товщі газу уявну площину  $S$ , паралельну площи-

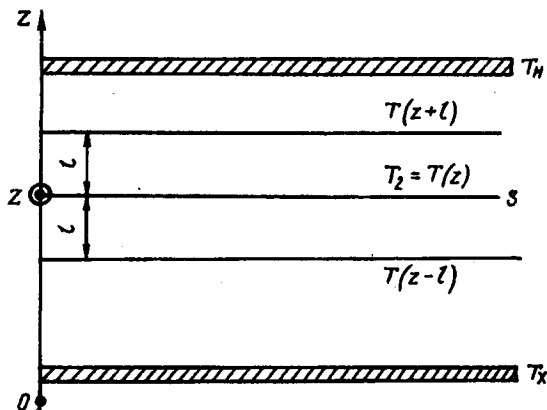


Рис. 56

нам нагрівника й холодильника (див. рис. 56). На малій відстані від цієї площини над і під нею виділимо ще дві площини, паралельні  $S$ . Якщо температуру площини  $S$  позначити через  $T_s = T(z)$ , то за умов мализни  $l$  температури на верхній і відповідно нижній площинах дорівнюватимуть

$$T(z \pm l) \approx T(z) \pm l \frac{dT(z)}{dz}. \quad (2.5)$$

Вибір параметра  $l$  буде обговорено далі.

Виділимо на площині  $S$  фрагмент, площа якого дорівнює  $\Delta s$ , і підрахуємо число молекул, що перетинають виділений фрагмент  $\Delta s$  за час  $\Delta t$  в обох напрямках. Якщо середня (квадратична) швидкість теплового руху молекул на рівні площини  $S$  дорівнює  $\bar{v}$ , то за час  $\Delta t$  в обох напрямках площинку  $\Delta s$  перетнуть по

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} n \Delta s \bar{v} \Delta t \quad (2.6)$$

молекул, де  $n$  — концентрація молекул на рівні площини  $S$ ; множники ж  $1/2$  та  $1/\sqrt{3}$  виникли відповідно через те, що в середньому половина молекул летить вгору, а половина — вниз, та через те, що

$$\bar{v}_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{v}. \quad (2.7)$$

Середня кінетична енергія  $\bar{E}_k$  кожної молекули ідеального газу на рівні верхньої площини згідно з (1.12) дорівнює

$$\bar{E}_k(z+l) = \frac{3}{2} k T(z+l) = \frac{3k}{2} \left\{ T(z) - \frac{dT}{dz} l \right\}, \quad (2.8)$$

а на рівні нижньої —

$$\bar{E}_k(z-l) = \frac{3k}{2} \left\{ T(z) - \frac{dT}{dz} l \right\}. \quad (2.8a)$$

Отже, з урахуванням (2.6) різниця між енергією, яку молекули внаслідок теплового руху переносять через  $\Delta s$  за час  $\Delta t$  згори вниз і знизу вгору, становить

$$N\Delta\bar{E}_k = N \left\{ \bar{E}_k(z+l) - \bar{E}_k(z-l) \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{dT}{dz} \ln\Delta s \bar{v} \Delta t. \quad (2.9)$$

Очевидно, сумарна густина потоку енергії (який тут спрямовано згори донизу) дорівнює

$$j_z = - \frac{N\Delta\bar{E}_k}{\Delta s \Delta t} = - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln\bar{v} \frac{dT}{dz} \quad (2.10)$$

(знак "—" зумовлено тут вибором напрямку осі  $Oz$  (див. рис. 56)).

Зіставляючи формулу (2.10) з емпіричним законом Фур'є, бачимо, що вони цілком узгоджуються між собою, причому коефіцієнт теплопровідності

$$\kappa = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln\bar{v}. \quad (2.11)$$

Отже, за допомогою молекулярно-кінетичних міркувань теоретично обгрунтовано емпіричний закон Фур'є і розкрито характер залежності коефіцієнта теплопровідності  $\kappa$  від концентрації молекул газу  $n$  та середньої швидкості теплового їхнього руху  $v$  на рівні площини  $S$ . Розшифровка феноменологічних коефіцієнтів типу  $\kappa$ , що в межах макротеорії визначаються лише експериментально, є типовим явищем для мікротеорій.

На закінчення слід уточнити вибір поки що невизначеного параметра  $l$ . Аналізуючи виконані вище обчислення, неважко уяснити, що параметр  $l$  — це певна ефективна довжина, на якій середню енергію молекул можна вважати незмінною. Ясно, що вона має бути порядку довжини вільного пробігу  $l \sim \bar{\lambda}$  за (2.4), яка є тут єдиною характерною фізичною величиною, що має розмірність довжини. Отже, остаточно можна записати:

$$l = \gamma \bar{\lambda} = \gamma / \sigma n, \quad (2.12)$$

де  $\gamma$  — безрозмірний параметр порядку одиниці. Тому (2.11) можна переписати таким чином:

$$\kappa = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \bar{\lambda} n \bar{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \frac{\bar{v}}{\sigma}. \quad (2.13)$$



Схожі за стилем міркування ведуть до елементарного молекулярно-кінетичного обґрунтування законів Фіка, Ньютона — Пуазейля та подібних їм емпіричних законів [2, 34, 39], а також до розшифровки та встановлення існуючого зв'язку між коефіцієнтами теплопровідності, дифузії, в'язкості.

Строге обґрунтування подібних законів, проте, повинно базуватися на відповідних кінетичних рівняннях або їх еквівалентах, яких в межах загального курсу фізики не торкаються.

#### **КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ**

*1. Виведіть рівняння стану ідеального газу за Клаузіусом. Розшифруйте фізичний смисл абсолютної температури.*

*2. Що ви знаєте про статистичні закономірності й закони великих чисел? Які міркування ведуть до розподілу Максвелла? Виведіть останній.*

*3. Встановіть співвідношення між середньою і найбільш імовірною швидкостями молекул ідеального газу в рівновазі. Які висновки з цього випливають?*

*4. Виведіть барометричну формулу. Розкажіть про розподіл Максвелла — Больцмана.*

*5. Що таке довжина вільного пробігу молекул? Розкажіть про явища переносу з молекулярно-кінетичного погляду. Обґрунтуйте закон Фур'є.*

*6. Розкажіть про статистичну інтерпретацію ентропії за Больцманом.*

## ДОДАТОК

### ОБЧИСЛЕННЯ ДЕЯКИХ ІНТЕГРАЛІВ, ЯКІ ВЕДУТЬ ДО РОЗПОДІЛУ МАКСВЕЛЛА

Для визначення константи  $A$  (1.43) треба обчислити інтеграл вигляду

$$I(\beta) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx \quad (\text{Д.1})$$

(для спрощення виконано перепозначення  $\sqrt{x} \rightarrow x$ ). Замість  $I(\beta)$  розглянемо квадрат цієї величини

$$I^2(\beta) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx \right] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta y^2} dy \right] = \iint_{(\infty)} e^{-\beta(x^2+y^2)} dx dy \quad (\text{Д.2})$$

(враховано незалежність визначеного інтеграла від позначення змінної інтегрування:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$ ).

Двократний інтеграл  $I^2(\beta)$  за (Д.2) можна розглядати як подвійний, взятий по всій площині  $xOy$  (рис. 57). Для його обчислення введемо полярні координати  $\rho$  та  $\varphi$ :

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad dx dy = \rho d\rho d\varphi. \quad (\text{Д.3})$$

Для  $I^2(\beta)$  дістанемо

$$I^2(\beta) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho e^{-\beta \rho^2} d\rho = \pi \int_0^{\infty} e^{-\beta \xi} d\xi \quad (\text{Д.4})$$

(виконано заміну  $\rho^2 = \xi$ ). Тепер вже легко знайдемо

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta \xi} d\xi = \beta^{-1}. \quad (\text{Д.5})$$

Підставивши (Д.5) в (Д.4) і здобувши квадратний корінь з  $I^2(\beta)$ , дістанемо

$$I(\beta) = \sqrt{\pi/\beta} \quad (\text{Д.6})$$

Звідси вже й випливає результат (1.44), який треба було довести.

Параметр  $\beta$  фактично обчислено в (1.47) — (1.49). Залишилося тільки вказати на те, що при цьому застосовано метод диференціювання за параметром, який є справедливим, коли таке диференціювання можна виносити за знак інтеграла; тут це безперечно можна зробити [40].

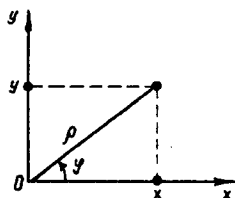


Рис. 57

## ПРО НАУКОВИЙ ДІАПАЗОН ТЕРМОДИНАМІКИ

Для звільнення провідних фізичних ідей термодинаміки від вуалюючих формальних ускладнень не можна на перших порах уникнути значного звуження діапазону цієї науки і, отже, суттєвого збіднення її змісту. Між тим, реальне уявлення про потужність термодинаміки та універсальність її методів бажано донести до широкого кола читачів. Звідси й потреба в додатковому розширенні хоча б вихідних її законів, коротко описаних в основному тексті посібника.

В основній частині посібника йшлося лише про всебічне розширення (стиснення) тіл, що виражається формулою

$$\delta A_p = p dV. \quad (Д.7)$$

Проте існує низка не менш практично важливих варіантів, які наводяться нижче. Нехай до складу термодинамічної системи входять провідник, що перебуває під напругою  $V$  і по якому тече струм силою  $I$ . Робота по перенесенню вздовж провідника електричного заряду  $dq = Idt$  дорівнює

$$\delta A_q = V dq. \quad (Д.8)$$

Вона повинна фігурувати в законі збереження й перетворення енергії (першому принципі термодинаміки).

Якщо система знаходиться під дією магнітного поля з напруженістю  $\vec{H}$ , то вона може намагнічуватися. Робота по намагнічуванню одиниці об'єму, як відомо, дорівнює

$$\delta A_H = -\vec{H} d\vec{B}, \quad (Д.9)$$

де  $\vec{B}$  — вектор магнітної індукції, який для однорідних ізотропних не феромагнітних середовищ пов'язаний з вектором  $\vec{H}$  рівністю

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (Д.10)$$

( $\mu$  — магнітна проникність речовини;  $\mu_0$  — магнітна стала; знак "—" у формулі (Д.9) фігурує, оскільки вона виражає роботу магнітного поля над системою, яка за термодинамічною угодою вважається від'ємною).

У разі, коли система становить діелектрик в електричному полі з напруженістю  $\vec{E}$ , виконується робота з поляризації одиниці об'єму діелектрика

$$\delta A_E = -\vec{E} d\vec{D}. \quad (Д.11)$$

Тут  $\vec{D}$  — вектор електричної індукції, пов'язаний з напруженістю електричного поля  $\vec{E}$  співвідношенням

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad (Д.12)$$

справедливим для ізотропних не сегнетоелектричних середовищ;  $\epsilon$  — діелектрична стала речовини;  $\epsilon_0$  — електрична стала.

У ситуації, коли розглядається, наприклад, рідина з розвиненою поверхнею, що може змінювати свою форму й розміри, слід враховувати роботу проти сил поверхневого натягу

$$\delta A_\sigma = -\sigma dS, \quad (Д.13)$$

де  $\sigma$  — поверхневий натяг;  $dS$  — збільшення площі поверхні.

Розглянемо ще випадок, коли виконується робота по одноосьовому розтягу (або стиску) пружного короткого стержня. Така робота, як відомо, дорівнює

$$\delta A' = -V\sigma d\varepsilon \quad (\text{Д.14})$$

( $V$  — об'єм стержня;  $\sigma$  — напруження в стержні, яке дорівнює силі  $F$ , прикладеній вздовж осі стержня, віднесеній до площі його поперечного перерізу  $S$  ( $\sigma = F/S$ );  $\varepsilon$  — відносне видовження стержня ( $\varepsilon = (l-l_0)/l_0$ ;  $l_0$  — початкова,  $l$  — поточна довжини стержня). За законом Гука має місце формула

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (\text{Д.15})$$

де  $E$  — модуль Юнга для стержня.

Якщо зважити на те, що скалярний добуток довільних двох векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  можна розписати у компонентах вздовж осей координат

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (\text{Д.16})$$

то одразу стане ясным, що всі види розглянутих вище робіт можна подати у вигляді суми

$$\delta A = \sum_{i=1}^n Y_i dx_i, \quad (\text{Д.17})$$

де значення  $Y_i$  уособлюють так звані "коефіцієнти роботи", а  $dx_i$  — прирости "координат" роботи  $x_i$ . Враховуючи вище викладене, слід узагальнити форму першого принципу термодинаміки і замість (1.24) з розділу 2 писати

$$\delta Q = dU + \sum_{i=1}^n Y_i dx_i. \quad (\text{Д.18})$$

Ясно, що в загальному випадку кількість параметрів стану системи більша за сукупність  $m, p, V, T$ . До цієї сукупності у відповідних випадках належить додати ще такі значення, як  $\vec{B}, \vec{D}, S, \varepsilon = (l-l_0)/l_0$  тощо.

Проте на виразі (Д.18) узагальнення першого принципу термодинаміки не закінчується, оскільки існують так звані *відкриті* системи, що можуть обмінюватися з зовнішнім середовищем не лише енергією, але й речовиною (наприклад, внаслідок випаровування рідини у простір або її конденсації з простору). У цьому разі внутрішня енергія системи  $U$  буде змінюватися не лише внаслідок зміни згаданих вище параметрів стану, але й внаслідок зміни складу речовини. Якщо до її складу входять компоненти, маси яких  $m_i$  можуть змінюватися, то, запровадивши так звані питомі хімічні потенціали  $\mu_i$ , можна перший принцип термодинаміки (Д.18) подати у вигляді

$$\delta Q = dU + \sum_{i=1}^n Y_i dx_i - \sum_{j=1}^N \mu_j dm_j. \quad (\text{Д.19})$$

Питомий хімічний потенціал компоненти з номером  $j$  ( $\mu_j$ ) чисельно дорівнює значенню енергії, яку приносить із собою в систему одиниця маси цієї компоненти. Проаналізуйте зміст і структуру формули (Д.19).

Звичайно, існують випадки, коли слід розглядати не лише внутрішній стан системи та його перетворення, але враховувати ще й рух системи в цілому, а також взаємозв'язок внутрішнього стану системи з її рухом як цілого. Тоді енергетичний баланс (Д.19) стає ще складнішим. Але потреба в такому ускладненні існує, й досить настійна, особливо при переході до теорії нерівноважних процесів.

Оскільки в загальному випадку, як ми бачили, незалежних параметрів стану більше двох (навіть у межах термодинаміки квазірівноважних процесів), слід видозмінити методику дослідження ентропії як функції стану порівняно з викладеним у посібнику. Треба звернутися до методу Каратеодорі, коротко окресленому, наприклад, у праці [26]. Рекомендуємо це зробити.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ (з коротким коментарем)

Рекомендовані нижче підручники доповнюють і поглиблюють викладений в посібнику матеріал, обмежуючись мінімумом джерел високого гатунку та залишаючи достатнє поле для самостійної діяльності студентів, оскільки робота у наукових та технічних бібліотеках забезпечує багатогранність, виробляє наполегливість та інтерес до книги, обов'язкові для творчого спеціаліста.

1. *Ансельм А. И.* Очерки развития физической теории в первой трети XX века. М.: Наука, 1986. 244 с.

2. *Астахов А. В.* Курс физики. I. Механика. Кинетическая теория материи. М.: Наука, 1977. 384 с.

3. *Астахов А. В., Широков Ю. М.* Курс физики. III. Квантовая физика. М.: Наука, 1983. 240 с.

Зроблено спробу переосмислення курсу загальної фізики з сучасних позицій. Посібник цікавий нетрадиційним підходом до матеріалу.

4. *Белоус М. В., Васковская В. Н., Воронецкая Л. В., Ментковский Ю. Л.* Физика (для подготовительных отделений). К.: Вища шк., 1990. 480 с.

Посібник є перехідним між шкільним та вузівським курсами; у вступі детально показано роль і місце фізики в системі природничих і технічних наук та в людській культурі взагалі. Має ряд методичних новинок.

5. *Беккер Р.* Теория теплоты. М.: Наука, 1974. 504 с.

Грунтовний підручник з основ термодинаміки, статистичної фізики та кінетики (включаючи теорію флуктуацій, броунівського руху та елементи нерівноважної термодинаміки).

6. *Борн М.* Атомная физика. М.: Мир, 1970. 484 с.

7. *Де Бур Я.* Введение в молекулярную физику и термодинамику. М.: Мир, 1962. 277 с.

8. *Бялик О. М., Ментковский Ю. Л.* Вопросы динамической теории затвердевания металлических отливок. К.: Вища шк., 1983. 111 с.

Розглянуто релаксацію термодинамічної системи до стану рівноваги на простому прикладі тверднення малих металевих виливок, який охоплює, зокрема, стадію фазового переходу від рідкого до твердого стану.

9. *Геворкян Р. Г., Шепель В. В.* Курс общей физики. М.: Наука, 1972. 599 с.

10. *Гернет М. М.* Курс теоретической механики. М.: Наука, 1981. 303 с.

Короткий і доступний курс, що, крім зв'язку з технічною механікою та елементами теорії машин та механізмів, містить елементи аналітичної динаміки, методи якої складають основу багатьох сучасних фізичних теорій.

11. *Гольдин Л. Л., Новикова Г. И.* Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988. 428 с.

Розширений (порівняно з багатьма іншими підручниками) та поглиблений курс з атомної фізики на сучасному рівні.

12. *Гольдфайн И. Л.* Векторный анализ и теория поля. М.: Наука, 1968. 128 с.

13. *Звелто О.* Принципы лазеров. М.: Мир, 1990. 558 с.

Виключно простий, ґрунтовний і досить повний підручник з фізики лазерів.

14. *Зильберман Г. Е.* Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1970. 384 с.

Нетрадиційний за формою та трактуванням матеріалу курс з широким тематичним охопленням при досить лаконічному викладі.

15. *Калашиников С. Г.* Электричество. М.: Наука, 1977. 591 с.

Досить повний, різноплановий курс електрики з усіма основними її законами; містить численні приклади застосувань (на рівні загального курсу фізики).

16. *Карташов А. П., Рождественский Б. Л.* Математический анализ. М.: Наука, 1984. 448 с.

Цікавий тим, що в курсі коротко й просто та водночас строго впроваджено комплексні числа, різні способи їхнього зображення та дії з ними.

17. *Кемпфер Ф.* Путь в современную физику. М.: Мир, 1972. 375 с.

На простій математичній основі зроблено досить вдालу спробу перебудувати курс фізики відповідно до сучасних вимог (зокрема, пояснюється ідея ієрархії інерційних систем відліку).

18. *Компанеев А. С.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1957. 563 с.

Відрізняється ясністю, простотою, детальними викладками на доступному рівні.

19. *Космодемьянский А. А.* Курс теоретической механики. М.: Наука, 1966. Ч. 2. 398 с.

Просто й детально розглянуто, зокрема, задачі Цюлковського з теорії реактивного руху.

20. *Кудрявцев П. С., Конфедератов И. Я.* История физики и техники. М.: Наука, 1960. 507 с.

21. *Кузовлев В. А.* Техническая термодинамика и основы теплопередачи. М.: Наука, 1973. 303 с.

Викладено термодинаміку газів та водяної пари; основи теплопередачі. Описано, зокрема, прилад Бернарді для ілюстрації другого принципу термодинаміки.

22. *Ландсберг Г. С.* Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.

23. *Логунов А. А.* К работам Анри Пуанкаре о динамике электронов. М.: Наука, 1988. 102 с.

Виконано детальний аналіз робіт А. Пуанкаре щодо динаміки електрона, з якого видно його тотожне Енштейновому трактування фізичного сенсу коваріантності рівнянь Максвелла відносно перетворень Лоренца (на 5 червня 1905 р.).

24. *Магнус К.* Колебания. М.: Мир, 1982. 303 с.

Доповнює й поглиблює підручник [29]; містить типові приклади нелінійних коливань, що набули великого значення в науці й техніці.

25. *Маркс Г.* Введение в квантовую механику. Будапешт: АН Венгрии, 1962. 360 с.

Досить повно та вельми доступно викладено основи квантової механіки. Не потребує знань з теорії операторів.

26. *Млодзєєвський А. Б.* Термодинаміка. К.: Рад. шк., 1954. 203 с.

Короткий, майстерний підручник з широким охопленням матеріалу й водночас ясним та лаконічним викладом. Наведено підхід Каратеодорі щодо запровадження ентропії, який часто обминають за браком місця, що робить теорію неповною.

27. *Монополь Дирака // Сб. статей.* М.: Мир, 1970. 332 с.

Повний огляд проблем з різних точок зору, що існували на час виходу збірника, щодо так званого відокремленого магнітного полюса — Монополя Дирака.

28. *Парсел Э.* Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1975. 440 с.

Автор — лауреат Нобелівської премії. Книга є другим томом знаменитого Берклеєвого курсу фізики (БКФ), розробленого комісією у складі визначних американських фізиків, як повний і сучасний курс для природничих і технічних вузів.

29. *Пейн Г.* Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1970. 389 с.

Досить повно й доступно викладено теорію коливань і хвиль, що відіграють важливу роль у багатьох розділах науки і техніки. Зокрема, просто й наочно впроваджено метод комплексної експоненти, що заслужено набув широкого наукового використання.

30. *Перкинс Д.* Введение в физику высоких энергий. М.: Энергоатомиздат, 1991. 428 с.

Доступно й на сучасному рівні викладено основні задачі сучасної фізики високих енергій. Корисний для спеціалістів у галузі атомної енергетики, які прагнуть мати фундаментальну підготовку.

31. *Планк М.* Принцип сохранения энергии. М.: Мир, 1938. 235 с.

Грунтовний аналіз становлення фундаментального фізичного принципу (зокрема, першого принципу термодинаміки). Доступний за викладом.

32. *Поль Р. В.* Механика, акустика, учение о теплоте. М.: Мир, 1979. 479 с. *Поль Р. В.* Учение об электричестве. 1962. 516 с. *Поль Р. В.* Оптика и атомная физика. 1966. 552 с.

Неперевершений і оригінальний курс загальної фізики щодо опису виразних демонстрацій з кожного її розділу. Витримав багато видань. Переконливо доведено неспроможність беззастережного лабораторного обґрунтування законів Ньютона. Лабораторні досліди скоріше ілюструють, ніж доводять закони Ньютона, які утвердилися в науці завдяки узгодженню з відомими законами небесної механіки. Дуже повчальний факт.

33. *Понтрягин Л. С.* Анализ бесконечно малых. М.: Наука, 1980. 256 с.

Дуже вдало й дохідливо викладено основи математичного аналізу одразу для функцій комплексної змінної, що відповідає сучасним математичним потребам в багатьох природничих і технічних науках.

34. *Радченко І. В.* Молекулярна фізика. Х.: Вид-во Харк. ун-ту, 1959. 538 с.

Достатньо повний і доступний курс молекулярної фізики з численними прикладами застосування. Детально обговорено поняття про термодинамічну ймовірність та її зв'язок з математичною, без чого важко зрозуміти постулат Больцмана про ентропію.

35. *Самойлович А. Г.* Термодинамика и статистическая физика. М.: Наука, 1955. 368 с.

Грунтовний, ясний, добре впорядкований і строгий курс. Детально й строго запроваджено термодинамічну температуру. Бездоганне поєднання теорії з експериментальними даними. Глибоко роз'яснено постулат Больцмана про ентропію.

36. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1977. 687 с. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Оптика. 1980. 751 с.

Повний, систематизований курс фізики. Зокрема, добре викладено динаміку твердого тіла, електрику та магнетизм; наведено багато прикладів застосування. Є доречні історичні вкраплення.

37. *Федорченко А.* Теоретична фізика. К.: Вища шк., 1992. Ч. 1. 535 с.

Досить детальний підручник з екскурсами до ідейних витоків науки (в сучасній інтерпретації).

38. *Ферми Э.* Термодинамика. Х.: Изд-во Харк. ун-ту, 1973. 136 с.

Добре скомпонований підручник з термодинаміки (з прикладами та порядками величин). Дохідливо впроваджено термодинамічну температуру.

39. *Физический энциклопедический словарь.* М.: Наука, 1984. 944 с.

40. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Наука, 1966. Т. 2. 800 с.

Один з найбільш повних посібників з класичного математичного аналізу.

41. *Хунд Ф.* История квантовой теории. К.: Наук. думка, 1980. 244 с.

42. *Шимкович А. А.* Механика. Минск: Вышейш. шк., 1969. 384 с.

43. *Шпольский Э. В.* Атомная физика: В 2 т. М.: Наука, 1984. Т. 1. 552 с.

Чудовий виклад основних законів сучасної атомної фізики.

44. *Эпштейн А. С.* Курс термодинамики. М.: Наука, 1948. 419 с.

Фундаментальний підручник з численними прикладами застосування термодинаміки, включаючи хімічну.

## **ЗМІСТ**

Вступ .....	3
<b>Розділ 1. МЕХАНІКА</b> .....	<b>7</b>
<i>Глава 1. Кінематика матеріальної точки</i> .....	<b>8</b>
§ 1.1. Системи відліку. Траєкторія .....	8
§ 1.2. Переміщення, швидкість, прискорення .....	11
§ 1.3. Відтворення траєкторії за заданим прискоренням частинки .....	17
§ 1.4. Різні системи відліку. Перетворення координат .....	18
§ 1.5. Перетворення Галілея .....	21
§ 1.6. Кінематика обертального руху .....	21
<i>Глава 2. Динаміка матеріальної точки</i> .....	<b>22</b>
§ 2.1. Сила й маса в механіці .....	22
§ 2.2. Закони (постулати) Ньютона .....	25
§ 2.3. Про повну систему постулатів класичної механіки .....	29
§ 2.4. Імпульс сили, робота, потужність .....	30
§ 2.5. Момент імпульсу та закон його еволюції .....	33
§ 2.6. Додатково про закон інерції та інерційні системи відліку .....	35
§ 2.7. Деякі типи механічних сил. Рівняння руху та параметри стану в механіці .....	36
§ 2.8. Потенціальні сили; закон збереження й перетворення енергії .....	39
§ 2.9. Інше доведення закону збереження енергії. Загальне визначення консервативних сил .....	43
§ 2.10. Дисипативні сили .....	45
§ 2.11. Частинка в полі центральних сил .....	46
<i>Глава 3. Динаміка системи матеріальних тіл</i> .....	<b>49</b>
§ 3.1. Закони еволюції та умови збереження імпульсу, моменту імпульсу та кінетичної енергії системи .....	49
§ 3.2. Закон руху центра мас .....	55
§ 3.3. Динаміка двох тіл. Зведена маса .....	56
§ 3.4. Закони Кеплера та закон всесвітнього тяжіння Ньютона .....	59
§ 3.5. Закон збереження та перетворення енергії системи частинок .....	63
§ 3.6. Дві міри механічного руху .....	66
§ 3.7. Енергія частинки в полі гравітації. Потенціал поля .....	67
<i>Глава 4. Поняття про рух твердого тіла. Обертальний рух</i> .....	<b>69</b>
§ 4.1. Основи динаміки обертального руху навколо нерухомої осі .....	69
§ 4.2. Інерція та енергія обертання .....	76
<i>Глава 5. Елементи динаміки тіл змінної маси. Реактивний рух</i> .....	<b>78</b>
§ 5.1. Рівняння Мещерського .....	78
§ 5.2. Дві задачі Ціолковського .....	81
<i>Глава 6. Механічні коливання</i> .....	<b>83</b>
§ 6.1. Гармонічні коливання частинок .....	83
§ 6.2. Вільні коливання, що затухають .....	86
§ 6.3. Вимушені коливання. Резонанс .....	90



<b>Розділ 2. ТЕРМОДИНАМІКА</b> . . . . .	96
<i>Глава 1. Перший принцип термодинаміки</i> . . . . .	97
§ 1.1. Предмет і методи термодинаміки . . . . .	97
§ 1.2. Температура, кількість теплоти . . . . .	99
§ 1.3. Фізична інтерпретація теплових явищ . . . . .	100
§ 1.4. Термодинамічні параметри та термічне рівняння стану . . . . .	104
§ 1.5. Квазірівноважні (оборотні) процеси та їх графічне зображення. Циклічні процеси . . . . .	107
§ 1.6. Робота на розширення тіл. Передана теплота. Внутрішня енергія системи . . . . .	111
§ 1.7. Перший принцип термодинаміки . . . . .	115
§ 1.8. Теплоємності системи за різних умов . . . . .	116
§ 1.9. Калоричне рівняння стану ідеального газу та його теплоємності . . . . .	118
§ 1.10. Адіабатні процеси та робота при них. Адіабата ідеального газу . . . . .	120
<i>Глава 2. Другий принцип термодинаміки</i> . . . . .	120
§ 2.1. Напрямок теплових процесів та особлива роль теплоти . . . . .	122
§ 2.2. Коефіцієнт корисної дії оборотного циклу Карно. Теорема Карно . . . . .	125
§ 2.3. Ентропія як наслідок другого принципу термодинаміки . . . . .	129
§ 2.4. Про зростання ентропії у необоротних процесах . . . . .	130
§ 2.5. Додатково про ентропію як функцію стану та про термодинамічну температуру . . . . .	137
§ 2.6. Характеристичні функції . . . . .	139
<i>Глава 3. Фазові перетворення</i> . . . . .	139
§ 3.1. Агрегатні стани речовини . . . . .	140
§ 3.2. Ізотерми реальних газів . . . . .	143
§ 3.3. Рівняння Ван-дер-Ваальса . . . . .	145
§ 3.4. До теорії релаксації нерівноважних систем . . . . .	151
<i>Глава 4. Явища переносу</i> . . . . .	151
§ 4.1. Загальні зауваження . . . . .	152
§ 4.2. Дифузія . . . . .	153
§ 4.3. Теплопровідність . . . . .	155
§ 4.4. В'язкість . . . . .	158
<b>Розділ 3. ЗАГАЛЬНІ ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ</b> . . . . .	158
<i>Глава 1. Про рівноважні статистичні закономірності в системах багатьох частинок</i> . . . . .	158
§ 1.1. Рівняння ідеального газу за Клаузіусом. Фізичний сенс тиску й абсолютної температури . . . . .	163
§ 1.2. Обчислення ймовірностей та середніх значень фізичних величин . . . . .	168
§ 1.3. Рівноважний розподіл молекул ідеального газу за швидкостями — розподіл Максвелла . . . . .	173
§ 1.4. Співвідношення між середньою й найбільш ймовірною швидкостями молекул та між середніми статистичними й вимірюваними величинами . . . . .	174
§ 1.5. Барометрична формула. Розподіли Больцмана і Максвелла—Больцмана . . . . .	178
<i>Глава 2. Явища переносу з молекулярно-кінетичного погляду</i> . . . . .	178
§ 2.1. Якісна молекулярно-кінетична інтерпретація явищ переносу . . . . .	181
§ 2.2. Теоретичне обґрунтування закону Фур'є . . . . .	185
Додаток . . . . .	188
Список рекомендованої літератури . . . . .	188