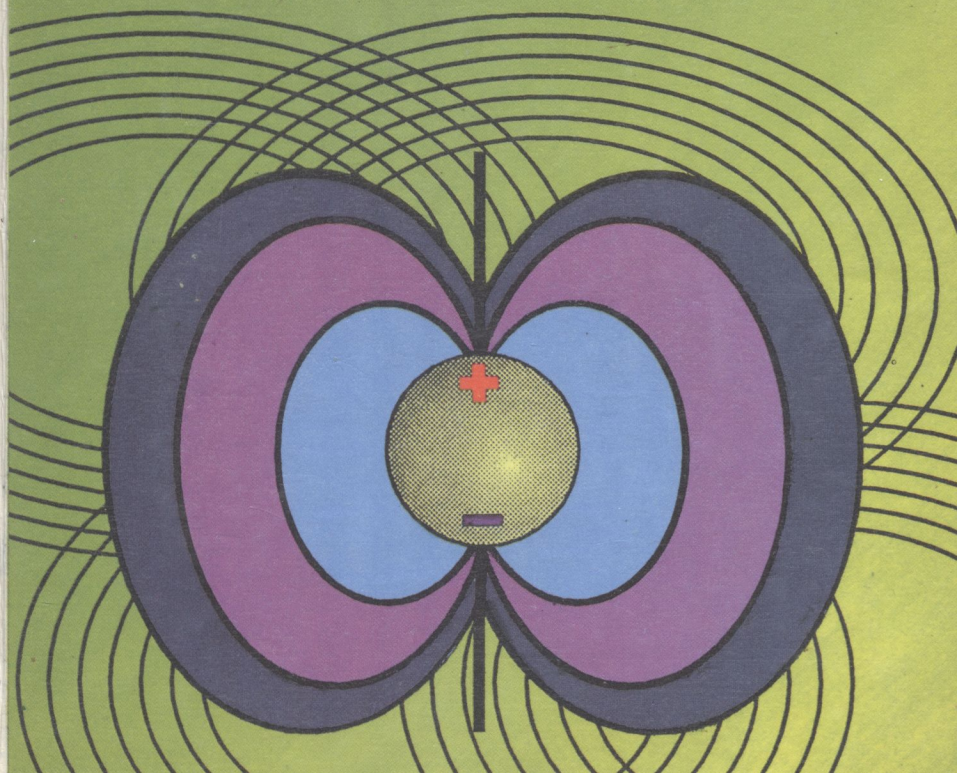


53(075)
3 14

ЗАГАЛЬНІ ОСНОВИ ФІЗИКИ

Електродинаміка
Атомна
та субатомна
фізика



І.Г. Богацька, Д.Б. Головка,
А.А. Малярєнко, Ю.Л. Мєнтковський

ЗАГАЛЬНІ ОСНОВИ ФІЗИКИ

У двох книгах

Книга 2

Електродинаміка

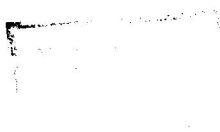
Атомна
та субатомна
фізика

За редакцією Д. Б. Головка,
Ю. Л. Мєнтковського

Допущено Міністерством освіти України

Навчальний посібник для студентів
технологічних спеціальностей
вищих закладів освіти

КИЇВ
“ЛИБІДЬ”
1998



*Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. І. П. Дзюб,
кандидати фіз.-мат. наук, доценти В. І. Кляченко, В. О. Клименко*

Редакція літератури з природничих та технічних наук

Редактор *О. М. Миронець*

398686

3 14 Загальні основи фізики: У двох книгах. Кн. 2. Електро-
динаміка. Атомна та субатомна фізика: Навч. посібник /
І. Г. Богацька, Д. Б. Головка, А. А. Маляренко,
Ю. Л. Ментковський; За ред. Д. Б. Головка, Ю. Л. Мент-
ковського. — К.: Либідь, 1998. — 224 с.

ISBN 966-06-0046-1 (кн. 2)

ISBN 966-06-0044-5 (заг.)

У посібнику викладено основні закони електрики та магнетизму. На основі рівнянь Максвелла обґрунтовується існування електромагнітних хвиль, з'ясовується електромагнітна природа світла. Подано основи спеціальної теорії відносності Ейнштейна.

Викладено основи атомної та субатомної фізики. Увагу приділено одновимірним квантовомеханічним моделям з прямокутними потенціальними бар'єрами та ямами, виведено формулу Планка за Ейнштейном, що розкриває роль вимушеного випромінювання.

Для студентів технологічних спеціальностей вищих закладів освіти.

3 160400000-003
1998

ББК 22.3я73+22.313я73+22.36я73

ISBN 966-06-0046-1 (кн. 2)
ISBN 966-06-0044-5 (заг.)

© І. Г. Богацька, Д. Б. Головка,
А. А. Маляренко,
Ю. Л. Ментковський, 1998

Електродинаміка вивчає електричні та магнітні явища (як такі та в їх взаємозв'язку), а також взаємодію електричних і магнітних полів з речовиною. Це винятково важливий розділ фізики, оскільки електромагнітні явища пронизують мало не всі сфери сучасного суспільного буття: енергетику, транспорт, промисловість, зв'язок, науку, техніку, мистецтво, побут та ін.

Проте вивчення цього розділу фізики у повному обсязі пов'язане, на жаль, із значними труднощами, оскільки електромагнітні явища не завжди достатньо наочні, а їхня теорія спирається на досить складний математичний апарат. З метою полегшення засвоєння математичного апарату електродинаміки без надмірних спрощень автори визнали за доцільне використати гідродинамічну інтерпретацію ряду понять векторного аналізу як таку, що відіграє в теорії векторних полів роль, аналогічну геометричній інтерпретації математичного аналізу.

Зазначимо, що, на відміну від механіки, яка розвивається дедуктивно, на основі трьох фундаментальних законів Ньютона, розвиток загальної електродинаміки відбувається індуктивно — від часткових до загальних закономірностей. Інакше фундаментальні її закони, виражені рівняннями Максвелла, навряд чи були б зрозумілими початківцю. Але це означає, що вивчення електромагнітних явищ на базі фундаментальних законів електродинаміки — рівнянь Максвелла — практично повністю переноситься до спецкурсів. У загальному ж курсі викладається ланцюжок закономірностей, який веде до рівнянь Максвелла з паралельним вивченням тих явищ, що не вимагають апеляції до фундаментальних рівнянь.

Прагнучи побудувати короткий, але замкнений курс, автори розглядають лише ті закономірності, які безпосередньо ведуть до рівнянь Максвелла, відступаючи від такого задуму лише для констатації принципово важливих часткових закономірностей. Тому для суттєвого розширення своїх

знань щодо часткових закономірностей електродинаміки можна порадити звернутися до підручників [14, 15, 28, 36]. Доцільно також, з погляду авторів, перед ознайомленням з даним посібником поновити свої знання з елементарного курсу електрики та магнетизму.

Зважаючи на складність рівнянь Максвелла, студентам слід звернути увагу на те, що ці рівняння відіграли й відіграють фундаментальну роль не лише у електродинаміці. Їхнє значення набагато ширше. Досить нагадати, що один з найважливіших здобутків фізики ХХ ст. — спеціальна теорія відносності Ейнштейна-Пуанкаре — виник фактично з аналізу рівнянь Максвелла у їх застосуванні до теорії рухомих середовищ. Не менш важливу роль відіграли рівняння Максвелла також у квантовій фізиці, зокрема у квантовій електродинаміці, як прообраз теорії так званих *калібрувальних полів*, що лежать в основі сучасної теорії елементарних частинок. Отже, опанування рівнянь Максвелла сьогодні просто необхідне кожному творчому фахівцеві, принаймні в галузі природничих і технічних наук. Саме тому авторами й було обрано зазначений принцип добору матеріалу: найбільш прямолінійно до рівнянь Максвелла та фундаментальних наслідків з них (для власне електродинаміки та хвильової оптики), обминаючи багато, навіть важливих, але часткових закономірностей. Гадаємо, в такому короткому курсі це виправдано.

Глава 1

ЕЛЕКТРИКА ЯК ПОЛЬОВА ТЕОРІЯ. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

§ 1.1. Електричні заряди, поля, струми

З елементарного курсу фізики відомо, що матеріальні тіла можна наелектризувати (або зарядити), тобто привести до такого стану, коли вони починають чинити дистанційну силову дію на інші тіла. Наелектризувати пару різнорідних тіл можна, наприклад, тертям їх одне об одне або іншим шляхом [15, 32]. Наелектризовані (заряджені) тіла можуть взаємно притягатися або відштовхуватися і в цьому розумінні поділяються на два (і лише два) класи: “позитивно” і “негативно” заряджених тіл. Одноіменно заряджені тіла взаємно відштовхуються, різноіменно — притягуються (Дюфе, 1733 р.). *Позитивним* називатимемо електричний заряд, що виникає на склі, потертому шкірою. Шкіра при

цьому виявляється зарядженою негативно. Взагалі, в кожній парі тіл, що електризуються взаємним тертям, одне буде зарядженим позитивно, друге — негативно.

Електризація тіл може бути локальною. Наприклад, шматочки паперу притягує не весь пластмасовий гребінець, а лише та його частина, якою розчісувалося волосся. Проте зона локальної електризації заряду може спонтанно (само по собі) розширятися, причому з різною швидкістю для різних тіл. Тому можна говорити про більшу або меншу *електропровідність* тіл.

Перші уявлення про електропровідність тіл (тобто здатність “проводити електрику”) виникли на початку XVIII ст., коли англійський вчений Стефан Грей приблизно в 1730 р. виявив, що “стан електризації” передається від одного тіла до іншого вздовж каната, підвішеного на шовкових нитках, на відстань до кількох сотень метрів. Дослідження, викликані такими спостереженнями, призвели до первісного поділу тіл на *провідники* та *ізолятори* (діелектрики). І хоча сучасний поділ матеріалів на провідники, напівпровідники та діелектрики здійснюється за цілою низкою ознак, головною для нас тут є можливість класифікувати тіла за здатністю ліпше або гірше проводити електрику. За цією ознакою матеріальні тіла можна розмістити в певний ряд, на одному кінці якого будуть провідники, на другому — ізолятори. Так, металеві стерженьки проводять електрику практично миттєво, дерев’яні — набагато повільніше, ебонітові — ще повільніше, нарешті, зовсім погано проводить електрику янтар (бурштин) (практично не проводить зовсім і може слугувати добрим ізолятором) [32].

Існування двох видів електричного заряду та здатність тіл різною мірою проводити електрику припускає інтерпретацію, яка наводиться нижче і давно вважається в науці остаточно встановленою. Розглянемо основні моменти вказаної інтерпретації.

До складу матеріальних тіл входять два види носіїв електрики (зарядів), які в звичайному стані перемішані в однакових концентраціях, нейтралізуючи один одного. За сучасними науковими уявленнями атоми складаються з заряджених частинок. Тертям різнорідних тіл одне об одне (або якимось інакше) можна порушити баланс позитивних і негативних зарядів у тілах: на одному з них виникає надлишок позитивних зарядів, на другому — негативних. У порушенні балансу концентрацій різноіменних зарядів і полягає суть електризації тіл.

Зважаючи на корпускулярну будову речовини, природно припустити, що елементарними носіями електрики в тілах є також певні корпускули. Сучасній науці вони давно вже відомі — це в основному електрони та іони, знайомі з елементарного курсу фізики та хімії.

Електропровідність різного ступеня природно інтерпретувати як результат впорядкованих потоків (або дифузії) елементарних носіїв електрики в тілах; причому інтенсивність їх залежить від потужності впорядкованого переміщення згаданих носіїв. Давно встановлено наукою, що в металах, наприклад, існують колективізовані електрони, які досить легко можуть переміщатися в тілі металів. Тому метали є добрими провідниками. У діелектриках електрони досить міцно зв'язані зі своїми атомами й молекулами і тому викликати впорядковане їх переміщення важко.

Детальніше заглиблюватися тут у будову речовини та в механізми електропровідності немає потреби¹. Феноменологічна теорія тут цього не вимагає. Тому можна перейти безпосередньо до кількісних характеристик, що визначають електричні заряди й струми.

Електричний заряд. Закон Кулона. Електричний заряд — це одне з первинних понять електродинаміки й тому формального визначення не має. Вводяться такі поняття описово й уточнюються операційно. Але на практиці справа вирішувалася дещо не прямо.

Поняття про електричний *заряд*, *струм* або *поле* (які людина прямо не сприймає) формувалися спочатку концептуально на основі аналізу їхньої дії. Спостереження показали, що *електризація* тіл може бути більшою або меншою, як і сила їхньої електричної взаємодії. Отже, поняття “електричний заряд” було введено у зв'язку з необхідністю, з одного боку, охарактеризувати ступінь наелектризованості тіл, а з іншого — визначити силу їхньої взаємодії. Рівноправність тіл, що електрично взаємодіють, диктувала при цьому симетричне входження зарядів у формулу для сили їхньої взаємодії подібно до симетричного входження мас у закон всесвітнього тяжіння Ньютона. Звідси й добуток зарядів у законі Кулона, відомому з елементарного курсу.

¹ Корисно усвідомити, на якому мінімумі фактів базуються ті чи інші висновки. Тому деталізація структур і механізмів доцільна там, де в ній виникає потреба.

Нагадаємо, що в основі електростатики (тобто вчення про дію нерухомих зарядів) лежить закон Кулона (1785 р.) для двох точкових зарядів¹ у вакуумі:

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^2} \vec{r}, \quad (1.1)$$

де \vec{F} — сила, з якою заряд Q діє на заряд q (рис. 1; заряди вважаються одноіменними); \vec{r} — радіус-вектор, спрямований від Q до q ; k — сталий коефіцієнт пропорційності, що визначається вибором одиниць.



Рис. 1

Оскільки вектор $\vec{n} = \vec{r}/r$ одиничний ($|\vec{n}| = 1$), то в скалярній формі закон Кулона можна переписати таким чином:

$$F = k \frac{|Qq|}{r^2} \quad (1.1a)$$

($F = |\vec{F}|$). Формули (1.1), (1.1a) справді визначають закон природи, якщо задано незалежні способи визначення всіх фізичних величин, що входять до нього: сили \vec{F} , зарядів Q , q та відстані r . Щодо відстані r і сили \vec{F} , то крутильні терези Кулона (відомі з елементарного курсу фізики) дають можливість незалежного їх визначення. Що ж до зарядів Q або q , то за часів Кулона незалежного способу їх визначення не було. Тому для встановлення пропорційності сили F кожному із зарядів Q та q Кулону довелося скористатися з гіпотези про те, що в результаті дотику однакових бузинових кульок, одна з яких заряджена, а друга — ні, заряд розподілиться між ними порівну. Володіючи ж способом передбачуваного поділу заряду, можна вже встановити й зазначену вище пропорційність йому сили F (1.1a). Отже, закон Кулона (1.1), (1.1a) не був свого часу суто експериментальним, а містив елементи гіпотетичного (що не є особливістю лише даного закону, й це буде видно далі). Остаточне утвердження побічних законів у науці відбувається внаслідок узгодження всіх результатів з подальшими експериментами.

Закон Кулона багатократно перевірявся багатьма методами [15]; й справа тут не лише в незалежному визначенні заряду. Як буде видно далі, критичною для всієї електро-

¹ Точковими у фізиці називають матеріальні об'єкти, розмірами яких можна знехтувати в рамках розглядуваної задачі.

динаміки є наявність саме r^2 в знаменнику закону Кулона (1.1a). Коли б насправді показник степеня в знаменнику хоч трохи (на ϵ) відрізнявся від двійки ($2 \rightarrow 2 \pm \epsilon$), багато що в теорії електрики змінилося б (див. далі).

Маючи перед очима готовий закон Кулона (1.1), (1.1a), можна постфактум запропонувати методику незалежного визначення заряду (у рамках електростатики) та ще раз ґрунтовно перевірити пропорційність йому сили Кулона. З цією метою треба лише виробити надійний спосіб виготовлення якогось стандартного сталонного заряду й вимірювати всі інші заряди, наприклад у вакуумі, як відносні (до сталонного). (Пропонуємо самостійно обміркувати й описати таку процедуру й порівняти її з описаною у праці [15].)

У системі СІ [15] сила \vec{F} виражається в ньютонах, відстань r — у метрах, заряди Q, q — в кулонах.

Отже, всі величини, що входять до закону Кулона (1.1), визначаються незалежно одна від одної. Тому коефіцієнт пропорційності k виявляється в СІ розмірним [15]. Далі буде видно, що його зручно подати у вигляді

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1.2)$$

Величина $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ дістала назву *електричної сталі*.

Електричне поле. Принцип суперпозицій. Оскільки електричні заряди взаємодіють на відстані (тобто без дотику один до одного), природно припустити, що їхня взаємодія відбувається за допомогою особливого виду матерії, яка називається *електричним полем*. Подальший розвиток науки про електричні та магнітні явища повністю підтвердив первинну *фізичну концепцію* про поле як вид матерії, виявивши, що електричне (а також магнітне) поле може бути носієм і переносником енергії. Нижче це буде продемонстровано.

Електричне поле безпосередньо відчутти не можна, тому його описують у термінах тієї дії, яку воно чинить на електричні заряди. За відсутності зарядів електричного поля немає. Отже, заряди природно вважати *джерелами поля*, тобто об'єктами, що породжують поле. Для вивчення поля використовують так звані *пробні заряди*. Це — позитивні точкові заряди (малі величини аби зворотною дією не викликати перерозподіл зарядів — джерел).

Вважаючи заряд q в законі Кулона (1.1) пробним, а Q — джерелом поля й утворивши відношення

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.3)$$

бачимо, що вектор \vec{E} в кожній точці простору \vec{r} повністю визначається зарядом-джерелом поля Q і, в свою чергу, за (1.3) визначає дію поля на довільний точковий заряд \tilde{q} :

$$\vec{F}' = \tilde{q} \vec{E},$$

де вектор \vec{E} — характеристика електричного поля, створеного зарядом-джерелом Q . Він дістав назву *напруженості поля*. *Напруженість* поля — це його силова характеристика. Оскільки заряд-джерело Q вважається *нерухомим*¹, поле \vec{E} (1.3) називають *електростатичним*. Взагалі, електростатичними називають поля довільної системи нерухомих зарядів.

Формула (1.3) виражає закон Кулона (1.1) у термінах напруженості поля \vec{E} . Хоч би яким був заряд-джерело поля Q (точковим чи не-точковим), досвід свідчить про те, що відношення сили \vec{F} , з якою він діє на достатньо малий пробний заряд q

$$\vec{E} = \vec{F}/q, \quad (1.3a)$$

не залежить від пробного заряду й тому завжди може характеризувати поле заряду-джерела. Малим, як уже зазначалося, добирають пробний заряд, аби він своєю зворотною дією (за третім законом Ньютона) суттєво не перерозподіляв у просторі заряди-джерела, спотворюючи тим самим досліджуване поле. Отже, напруженість поля \vec{E} (1.3a) є *універсальною* характеристикою електростатичного поля, створюваного довільним зарядженням тілом. За величиною напруженість поля \vec{E} дорівнює силі, що діє на одиничний пробний заряд.

З досвіду випливає *принцип суперпозицій*, який полягає в тому, що сумарна напруженість поля \vec{E} кількох зарядів-джерел $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$ дорівнює векторній сумі напруженостей $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_m\}$ полів, створюваних кожним джерелом окремо:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_m. \quad (1.4)$$

Принцип суперпозицій не є тривіальним перефразуванням відомого з механіки векторного додавання сил. Це свідчить про те, що електричні поля окремих зарядів,

¹ Закон Кулона (1.1) встановлено для нерухомих зарядів.

накладаючись, *не створюють* одне одного, а просто векторно додаються. Отже, це важливий закон Природи.

Неважко переконатися на підставі визначення напруженості поля, закону Кулона та принципу суперпозицій, що напруженість поля системи *точкових зарядів* $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$ визначається за формулою

$$\vec{E} = k \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}, \quad (1.5)$$

де \vec{r}_i — радіус-вектор, проведений від i -го заряду-джерела Q_i до точки поля A (рис. 2); $r_i = |\vec{r}_i|$.

Розглянемо поле системи компактно розташованих точкових зарядів на значній відстані від центра O зазначеної системи (рис. 3). Як видно з рисунка, $\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{r}'_i$; причому за умовою $|\vec{r}'_i| \ll |\vec{r}|$. Тому наближено в формулі (1.5) можна усі радіуси-вектори \vec{r}_i (та їхні модулі r_i) замінити на \vec{r} :

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

У результаті за (1.5) для сумарного поля системи зарядів на значній від них відстані дістанемо

$$\vec{E} \approx k \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.6)$$

де

$$Q = \sum_{i=1}^m Q_i; \quad (1.7)$$

тобто, як і слід було чекати, компактна система зарядів на значній відстані r від неї може розглядатися як точковий заряд Q , що дорівнює алгебраїчній сумі усіх зарядів системи.

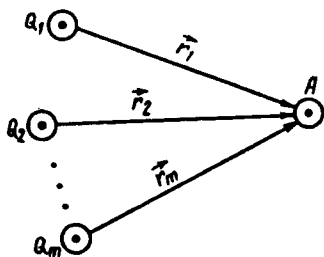


Рис. 2

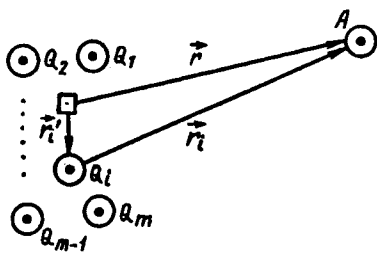


Рис. 3

3 (1.3), (1.5), (1.6) впливає, що заряди-джерела Q_i визначають силову дію поля на заданій відстані від системи зарядів. Крім того, завдяки (1.6) та (1.7) заряд може бути мірою кількості електрики. Власне кажучи, що інтерпретацію заряду фактично використав ще Кулон. Пригадаємо, що така сама подвійна роль завдяки закону всесвітнього тяжіння Ньютона (див. розділ I) належить і масі. Пізніше побачимо, що аналогія між масою і зарядом полягає ще й в існуванні закону збереження для обох цих фізичних величин. Але маса — це додатна величина, в той час, як електричні заряди можуть бути додатними і від'ємними і завдяки цьому *екранувати* (компенсувати) один одного. Компенсація має місце, коли заряди різних знаків перемішані в однакових просторових концентраціях і сумарний заряд Q (1.7) дорівнює нулю.

Зважаючи на зазначену вище подвійну трактовку електричного заряду, можна підійти до операційного визначення його величини як міри *кількості електрики*, спираючись на встановлені Фарадеєм закони електролізу [15]. Вони відомі з елементарного курсу. (Рекомендуємо повторити, звертаючи особливу увагу на *електролітичне* визначення одиниці кількості електрики — кулон). Інше визначення цієї одиниці подано у праці [32].

Електричний струм. Здатність електрики переміщатися в тілах впливала ще із спостережень Стефана Грея (1730 р.). Звідси й походить врешті первинна концепція про електричний струм як потік електричних зарядів — *носіїв струму*. Це означає (з сучасного погляду), що елементарні носії електрики в тілах — це електрони або іони, — крім хаотичного теплового руху, можуть брати участь ще й у *впорядкованому* русі, утворюючи *електричний струм*. Цей впорядкований рух може мати дифузійний характер (згадайте сутність дифузії. (див. розділ 2)) або бути викликаний електричними полями тощо. Електричний струм має певні визначальні характеристики: *сила* й *густина струму*.

У макроскопічній (феноменологічній) електродинаміці електричний струм з успіхом моделюється на зразок потоку суцільної “рідини”. Причини цього ті ж самі, що й в механіці суцільних середовищ (хоч, строго кажучи, таких середовищ насправді не існує, оскільки будь-яка речовина має корпускулярну природу). Отже, електричний струм розглядатимемо на зразок потоку рідини.

Нехай на хаотичний тепловий рух елементарних носіїв електрики з тієї чи іншої причини накладається впорядкований дрейф цих носіїв зі швидкістю \vec{v} (яка подібно до швидкості течії рідини може бути функцією координат і часу $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$). На поверхні, яку перетинає електричний струм (тобто потік носіїв заряду), виділимо певний фрагмент ΔS . Силою струму через виділений фрагмент поверхні ΔS називають ту кількість електрики, яка перетинає цей фрагмент за одиницю часу

$$\Delta I = \frac{d(\Delta Q)}{dt}. \quad (1.8)$$

Тут ΔI — сила струму через елемент поверхні ΔS , яку струм перетинає; $d(\Delta Q)$ — кількість електрики, що перетнула ΔS за час dt .

Густиною струму називають векторну величину \vec{j} , напрям якої у кожній точці збігається з напрямом швидкості дрейфу носіїв заряду \vec{v} у цій точці (швидкості “течії”), а величина — з силою струму через одиничну площадку, перпендикулярну до струму в даній точці,

$$|\vec{j}| = dI/dS, \quad (1.9)$$

де dI — сила струму через площадку dS , нормальну до струму ($dS \perp \vec{v}$).

Точніше й детальніше про величини, подібні до сили й густини струму, буде сказано в § 1.3 і 2.2, присвяченим гідродинамічній інтерпретації основних понять векторного аналізу та електричного струму.

На цьому й вичерпуються в загальних рисах первинні поняття та концепції про електричні заряди, поля й струми.

§ 1.2. Поля неперервно розподілених зарядів

Як і у фізиці суцільних середовищ, у макроскопічній електродинаміці з успіхом використовують моделі з неперервним розподілом електричних зарядів¹.

Нехай заряд неперервно розподілений вздовж певної лінії L (одновимірний розподіл), а заряд на елементі

¹ У подібних випадках фізики часто кажуть про фізично безмежно малі області, розуміючи під ними достатньо малі області, які, проте, ще містять дуже велику кількість мікрооб’єктів. Слово *фізично* будемо опускати.

довжини dl цієї лінії дорівнює dq . Лінійною густиною заряду λ називають величину

$$\lambda = dq/dl. \quad (1.10)$$

Лінійна густина λ може бути функцією точки на лінії L і часу t . Згідно з (1.10) для dq матимемо

$$dq = \lambda dl. \quad (1.11)$$

Нехай тепер заряд неперервно розподілений по деякій поверхні Σ (двовимірний розподіл) і на елементі цієї поверхні dS розташовано заряд dq . Поверхневою густиною заряду σ називають величину

$$\sigma = dq/dS, \quad (1.12)$$

яка може бути функцією точки на поверхні Σ і часу t . Очевидно,

$$dq = \sigma dS. \quad (1.13)$$

Нехай, нарешті, заряд неперервно розподілений в деякому об'ємі V (просторовий розподіл) і в елементі об'єму dV розташовано заряд dq . Просторовою густиною (або просто густиною) заряду ρ називають величину

$$\rho = dq/dV. \quad (1.14)$$

Густина ρ може бути функцією просторових координат \vec{r} і часу t . Очевидно,

$$dq = \rho dV. \quad (1.15)$$

Узагальнюючи засновану на законі Кулона формулу (1.5) на випадок неперервно розподілених зарядів, можемо написати:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = k \int \frac{dq \vec{R}}{R^2 R}, \quad (1.16)$$

де $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ (рис. 4), а радіус-вектори \vec{r} і \vec{r}' визначають координати точки спостереження електричного поля E і точки розташування елементарного заряду dq відповідно. Інтегрування в (1.16) поширюється на всю лінію L (у разі (1.11); на всю поверхню Σ (1.13); на весь об'єм V (1.15)).

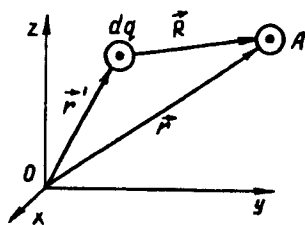


Рис. 4

Формула (1.7) на випадок неперервного розподілу зарядів узагальнюється таким чином:

$$Q = \int dq \quad (1.17)$$

з відповідним поширенням інтегрування на L , на Σ або на V .

§ 1.3. Гідродинамічна інтерпретація вихідних понять векторного аналізу

Теорія електрики й магнетизму з її векторними (електричним \vec{E} і магнітним \vec{H}) полями вдосталь насичена такими формальними й малонаочними поняттями, як *потік вектора*, *циркуляція вектора* тощо, які істотно ускладнюють первинне сприйняття фізичної теорії. Гідродинамічна інтерпретація понять векторного аналізу робить такі поняття досить наочними й природними.

Розглянемо ламінарний потік нестисливої рідини, що тече трубою змінного перерізу або руслом річки (рис. 5).

(Нестисливість означає, що густина рідини $\rho = dm/dV$ скрізь однакова: $\rho = \text{const}$).

Лініями току рідини називають такі лінії, дотичні до яких у кожній їхній точці за напрямом збігаються зі швидкістю течії $\vec{v}(\vec{r}, t)$ в даній точці (див. рис. 5). Якщо в якомусь

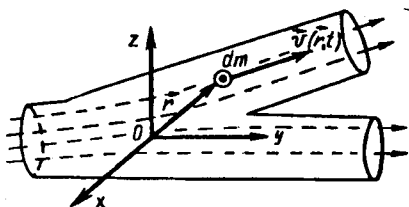


Рис. 5

перерізі, котрий перетинається лініями току, накреслити замкнену криву і через кожен її точку провести лінію току, то континуальна сукупність таких ліній утворюватиме бічну поверхню циліндра (взагалі кажучи, змінного перерізу), який обмежує так звану *трубку току* (рис. 6).

Потік рідини називається *однорідним*, якщо швидкість течії \vec{v} однакова в кожній його точці: $\vec{v} = \text{const}$. Однорідний потік на графіку зображується еквідистантним набором ліній току, який для такого потоку буде сукупністю паралельних прямих.

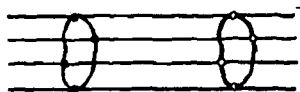


Рис. 6

Розглянемо однорідний потік рідини й поставимо за мету визначити кількість тієї рідини, яка проходить через

певний переріз ΔS виділеної трубки току за одиницю часу (рис. 7). Рідина за умовою нестислива ($\rho = \text{const}$), тому фактично немає різниці за масою dm чи об'ємом dV обчислювати кількість рідини, оскільки вони строго пропорційні одне одному ($dm = \rho dV = \text{const } dV$).

Виконаємо обчислення за об'ємом. За час dt нормальну до потоку площадку $\Delta S'$ перетне вся рідина, що заповнює прямий паралелепіпед $abcd$ — $a''b''c''d''$, ребро $a''a$ якого

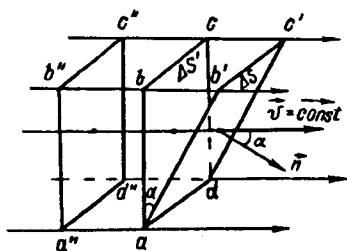


Рис. 7

$$a''a = vdt. \quad (1.18)$$

Отже, за час dt через $\Delta S'$ пройде вся рідина, що заповнює об'єм

$$dV = \Delta S' vdt. \quad (1.19)$$

За одиницю часу кількість рідини, що перетне переріз $\Delta S'$, становитиме

$$\frac{dV}{dt} = \Delta S' v. \quad (1.20)$$

Очевидно, та сама кількість рідини перетне за одиницю часу й будь-який інший переріз трубки току — зокрема похилий переріз ΔS . Але між ΔS і $\Delta S'$ існує простий і очевидний зв'язок:

$$\Delta S' = \Delta S \cos \alpha. \quad (1.21)$$

І тому для dV/dt можна записати

$$\frac{dV}{dt} = v_n \Delta S, \quad (1.22)$$

де

$$v_n = v \cos \alpha, \quad (1.23)$$

тобто v_n становить проекцію вектора швидкості течії \vec{v} на нормаль \vec{n} до площадки ΔS . Отже, шукана кількість рідини dV/dt (яка за одиницю часу проходить через площадку ΔS) дорівнює добуткові $v_n \Delta S$, який дістав назву *потіку вектора \vec{v} через площадку ΔS* . Очевидно, потік $v_n \Delta S$ є алгебраїчною величиною: додатний, коли кут α — гострий, і від'ємний, коли він тупий. Ця обставина дасть змогу роз-

різняти надалі рідину, що втікає в певну порожнину і витікає з неї.

Нехай треба обчислити кількість рідини, яка за одиницю часу перетинає довільну поверхню Σ у неоднорідному потоці (рис. 8). У цьому випадку поверхню Σ розбивають

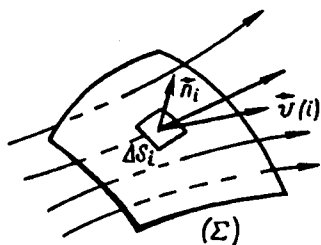


Рис. 8

на дрібні частини $\{\Delta S_i\}$, які можна вважати практично плоскими, а потоки через них — однорідними. Кількість рідини, що перетинає за одиницю часу елементарні площадки ΔS_i , обчислюється за формулою $d(\Delta V_i)/dt = v_n^{(i)} \Delta S_i$, а повна кількість рідини, що перетинає за одиницю часу усю поверхню Σ , дорівнює

$$\frac{dV}{dt} = \int_{(\Sigma)} v_n dS. \quad (1.24)$$

(Інтегрування виконується по всій поверхні Σ).

За математичною термінологією множина векторів швидкості течії, що відповідає усім точкам зайнятої потоком області, утворює *векторне поле* в цій області. Аналогічно утворює векторне поле і множина напруженостей електричного поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$; причому для математики фізичний сенс векторів поля не має значення. Користуючись щойно розглянутою гідродинамічною інтерпретацією величини $v_n \Delta S$, вводять потік довільного польового вектора $\vec{A}(\vec{r}, t)$ через елементарну площадку ΔS за формулою

$$\Delta \Phi \equiv A_n \Delta S, \quad (1.25)$$

а через довільну поверхню Σ — за формулою

$$\Phi \equiv \int_{(\Sigma)} A_n(\vec{r}, t) dS. \quad (1.26)$$

Для електростатичного поля \vec{E} (1.5), (1.16) аналогом ліній току будуть відомі з елементарного курсу *силові лінії* і відповідно *силові трубки* та ін.

З наведеного вже ясно, що гідродинамічна аналогія справді здатна відігравати велику евристичну роль у теорії векторних полів для знаходження змістовних математичних конструкцій і співвідношень. Продовжимо гідродинамічну інтерпретацію понять векторного аналізу.

Подумки виділимо в потоці рідини певну область об'єму V , обмежену замкненою поверхнею Σ , і обговоримо фізичний зміст потоку вектора швидкості течії $\vec{v}(\vec{r}, t)$ через цю замкнену поверхню при умові, що нормалі до поверхні завжди будемо спрямовувати назовні (рис. 9).

Нехай у межах виділеної області діють джерела рідини та її стоки¹ (перші вприскують в область V додаткову рідину; другі — її поглинають). Отже, у межах області V на "транзитний"

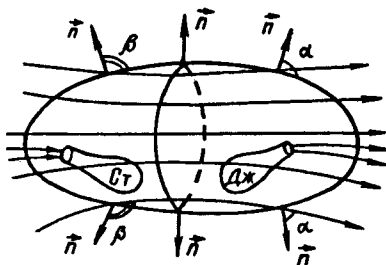


Рис. 9

потік накладаються додаткові потоки (джерела постачають до області V додаткову рідину; стоки її поглинають).

Розглянемо потік вектора \vec{v} через замкнену поверхню Σ , зважаючи на те, що нормалі до Σ спрямовані скрізь назовні. Як видно з рис. 9, кути між нормальними й лініями току в місцях входження потоку рідини в область V тупі ($\beta > \pi/2$), а в місцях її витоку — гострі ($\alpha < \pi/2$). Тому, коли б не було всередині області V джерел і стоків, сумарний потік вектора \vec{v} через замкнену поверхню Σ

$$\Phi = \oint_{(\Sigma)} v_n dS \quad (1.27)$$

дорівнював би нулеві, оскільки кількість рідини, що доставляється в область V транзитним потоком, в точності дорівнювала б кількості рідини, що витікає з області V . За наявності ж всередині V джерел (обох знаків) потік Φ буде дорівнювати алгебраїчній сумі продуктивностей джерел:

$$\Phi = \oint_{(\Sigma)} v_n dS = P_+ - P_- \quad (1.28)$$

¹ Стоки в розглядуваному контексті називають ще від'ємними джерелами.

(P_+ — продукована джерелами, а P_- — вилучена з потоку стоками за одиницю часу кількість рідини). Ясна за змістом формула (1.28), як буде видно далі, є точним гідродинамічним аналогом знаменитої теореми Остроградського—Гаусса в теорії електричних і магнітних полів, яка без зазначеної аналогії виглядає формально й штучно.

§ 1.4. Теорема Остроградського—Гаусса для електростатичного поля у вакуумі

Повертаючись до розгляду електростатичних полів у вакуумі, нагадаємо, як вимірюються тілесні кути, оскільки досвід викладання свідчить, що в цьому є реальна потреба.

Подібно до того, як вимірювання площ зводиться до вимірювання довжини ліній (рис. 10 ($\Delta S = ab$; повна площа, охоплена кривою, спочатку

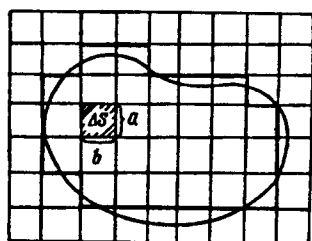


Рис. 10

апроксимується прямокутниками ΔS ($a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$)), вимірювання тілесних кутів ідейно зводиться до попереднього вимірювання плоских.

Тому, спираючись на правила вимірювання плоских кутів, достатньо пояснити спосіб вимірювання тілесних кутів, починаючи з кутів з прямокутними

перерізами (якими можна як завгодно точно апроксимувати врешті тілесні кути довільного перерізу).

Як відомо, завдяки теоремам подібності плоскі кути можна визначати як відношення довжини дуги, що спирається на відповідний кут, до радіуса цієї дуги (рис. 11):

$$\alpha = \frac{\overset{\smile}{AB}}{r_1} = \frac{\overset{\smile}{A'B'}}{r_2} \quad (1.29)$$

Що ж до тілесних кутів ω прямокутного перерізу, то вони визначаються як добуток відповідних плоских кутів (рис. 12)

$$\omega = \alpha \beta \quad (1.30)$$

аналогічно до вимірювання площ прямокутників за допомогою добутку довжин сторін¹.

¹ Нагадаємо, що плоскі кути (1.29) виражаються в радіанах, тілесні (1.30) — у стерadianах.

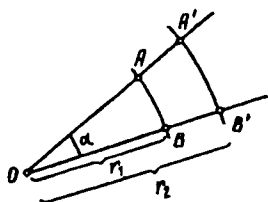


Рис. 11

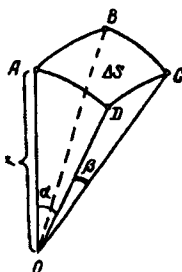


Рис. 12

Очевидно, усякий тілесний кут можна з наперед заданою точністю апроксимувати достатньою сукупністю малих тілесних кутів прямокутного перерізу. Для таких кутів матимемо (див. рис. 12)

$$\omega = \alpha\beta = \frac{\overset{\frown}{AD}}{r} \frac{\overset{\frown}{DC}}{r} = \frac{\Delta S}{r^2}, \quad (1.31)$$

де $\Delta S \approx \overset{\frown}{AD} \cdot \overset{\frown}{DC}$ — площа сферичної поверхні, що спирається на тілесний кут ω (причому точність твердження необмежено зростає, коли α і $\beta \rightarrow 0$).

Отже, безмежно малі тілесні кути (а з ними, як неважко збагнути, й довільні тілесні кути довільного перерізу) можна виражати як відношення площі сферичної поверхні, що спирається на тілесний кут, до квадрата її радіуса. (Рекомендуємо продумати далі).

Спираючись на вищезазначене, доведемо теорему Остроградського—Гаусса, яка полягає в тому, що потік (1.26) вектора напруженості електростатичного поля \vec{E} (1.5), (1.16) через довільну замкнену поверхню (Σ) дорівнює алгебраїчній сумі охоплених поверхнею зарядів, поділений на електричну сталу ϵ_0 [12],

$$\oint_{(\Sigma)} E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\Sigma}. \quad (1.32)$$

Тут Q_{Σ} — сумарний електричний заряд (1.7), (1.17) охопленої поверхнею Σ області. Зовнішній до цієї області електричний заряд з правої частини (1.32) випадає (утворює транзитний потік через виділену область, який дає нульовий внесок в інтеграл ліворуч (1.32), і це, як побачимо пізніше, дуже суттєво в теорії електрики).

Доведемо теорему Остроградського—Гаусса (О—Г) у два етапи: для окремого точкового заряду (1.3) і узагальнено доведення для довільної системи зарядів (1.5), (1.16), спираючись на принцип суперпозицій (1.4).

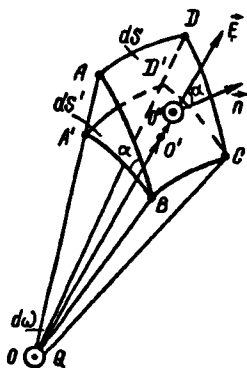


Рис. 13

Розглянемо потік вектора напруженості поля точкового заряду \vec{E} (1.3) через елемент dS деякої поверхні Σ (рис. 13). На рисунку \vec{n} — одинична нормаль до dS , яка утворює кут α з напруженістю \vec{E} ($\alpha = \vec{n}, \vec{r}/r$; $\vec{r} = O\vec{O}'$); dS' — проєкція елемента dS на сферу радіуса r , що спирається на спільний для dS і dS' тілесний кут $d\omega$. За формулами (1.5) і (1.2) та визначенням тілесного кута (1.31) дістанемо для потоку вектора \vec{E} через елемент dS

$$d\Phi = E_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dS \cos \alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega, \quad (1.33)$$

де $d\omega$ — тілесний кут, на який спирається елемент dS , оскільки

$$d\omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}, \quad (1.34)$$

в чому неважко переконатися з рис. 13.

Зазначимо, що якби нормаль \vec{n} була спрямована не від точкового заряду Q , а до нього, тобто якщо \vec{n} замінити на $\vec{n}' = -\vec{n}$, то замість кута $d\omega$ в (1.33) фігурувала б величина з протилежним знаком: $d\omega \rightarrow -d\omega$.

Отже, для елементарного потоку $d\Phi$ напруженості електричного поля \vec{E} у загальному випадку матимемо

$$d\Phi = \pm \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\omega, \quad (1.35)$$

де знак “плюс” перед тілесним кутом $d\omega$ буде тоді, коли нормаль \vec{n} спрямовано від заряду Q , а “мінус”, коли нормаль спрямовано до нього. Отже, потік $d\Phi$ з точністю до знака пропорційний тілесному кутові $d\omega$, під яким з точки розташування заряду Q видно елемент поверхні dS .

Визначимо потік вектора \vec{E} через замкнену поверхню для двох випадків: коли заряд Q розташований всередині виділеної області і поза нею (рис. 14: a — заряд в області V ; b — поза V). Згідно з (1.35) маємо (див. рис. 14, a)

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\omega = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (1.36)$$

оскільки повний тілесний кут дорівнює 4π стерадіан. У разі рис. 14, b ближню та дальню (щодо Q) частини замкненої поверхні Σ видно з точки розташування заряду Q під тим самим кутом $\Delta\omega$, але внески до потоку вектора E через вказані частини мають протилежні знаки (див. (1.35)). Тому сумарний потік

$$\Phi = \Delta\omega - \Delta\omega = 0. \quad (1.37)$$

На цьому доведення теореми О—Г для окремого точкового заряду завершується. Узагальнення теореми на довільну систему зарядів (1.5), (1.16) тривіальне, оскільки проєкція суми векторів на будь-який напрям дорівнює сумі проєкцій цих векторів на такий самий напрям

$$E_n = \sum_{i=1}^m E_{in} \quad (1.38)$$

(і аналогічно для неперервного розподілу зарядів (1.16)). Звідси

$$\Phi = \oint_{(\Sigma)} E_n dS = \sum_{i=1}^m \oint_{(\Sigma)} E_{in} dS = \frac{Q_{\Sigma}}{\epsilon_0}, \quad (1.39)$$

де Q_{Σ} — сумарний заряд тієї частини системи зарядів, яка потрапила всередину області V , охопленої поверхнею Σ .

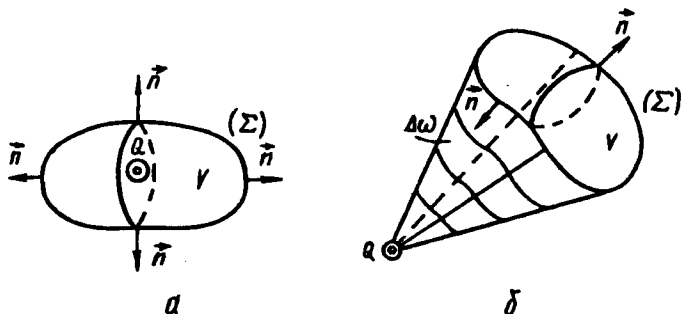


Рис. 14

Отже, теорему О—Г доведено. Узагальнення її на неперервний розподіл зарядів не становить істотних проблем.

Ця теорема відіграє винятково важливу роль в електродинаміці — особливо в диференціальній формі. Безпосередньо в інтегральній формі (1.39) вона дає змогу визначити напруженості полів \vec{E} у певних випадках симетричних розподілів заряду (див. § 1.6).

Уважний повторний перегляд даного параграфу переконає читача, що саме наявність у знаменнику виразу закону Кулона величини r^2 забезпечує виконання теореми О—Г в усіх її аспектах. Якби замість r^2 фігурувала б якась інша залежність від відстані r , теорема О—Г не мала б місця з багатьма своїми наслідками, включаючи систему рівнянь Максвелла. Тому закон Кулона (1.1), (1.3) неодноразово перевірявся різними методами [15] і знайшов своє переконливе підтвердження.

Як видно з порівняння (1.39) з (1.28), роль продуктивності гідродинамічних джерел в електростатиці виконують *електричні заряди*, які називаються *джерелами поля*.

§ 1.5. Про графічне зображення електростатичного поля

Коротко нагадаємо відомі з елементарного курсу методи графічного зображення електростатичних полів та наведемо кілька важливих прикладів.

За визначенням (1.3а) вектор напруженості електростатичного поля \vec{E} в кожній точці поля має напрям сили, що діяла б там на позитивний заряд $q > 0$. Як відомо, *силовими лініями* поля називають такі уявні лінії, дотичні в кожній точці до яких збігаються з вектором \vec{E} в цій точці. Напрямок напруженості поля \vec{E} визначає також і напрям відповідних силових ліній. Отже, силові лінії спрямовані від позитивних зарядів до негативних: з позитивних вони виходять, до негативних входять. Тобто заряди в електростатиці відіграють роль, аналогічну джерелам в гідродинаміці. Тому заряди й дістали назву *джерел поля* (позитивних і негативних; останні відіграють роль “стоків”).

Без зайвих пояснень графічно нагадаємо характер силових ліній для одного та двох точкових зарядів (на рис. 15 вони позначені кружечками із знаками “плюс” та “мінус”).

Від окремих точкових зарядів силові лінії йдуть в радіальних напрямках (з позитивного заряду a виходять, до

негативного b — входять). Характер поля системи двох однакових за величиною різноіменних зарядів показано на рис. 14, $в$, одноіменних — 14, $г$. Система з двох однакових за величиною і протилежних за знаком та зв'язаних між собою різноіменних зарядів утворює так званий *електричний диполь* (або просто *диполь*). Диполі відіграють, як буде видно, дуже важливу роль в теорії електрики.

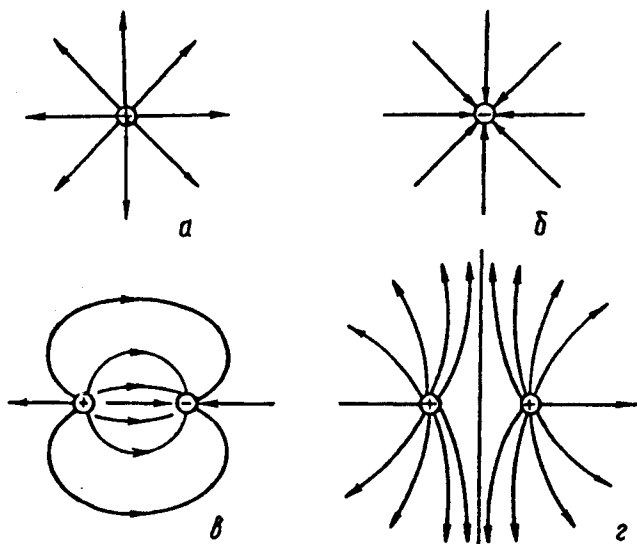


Рис. 15

Запровадивши далі (§ 1.7) електричний потенціал, доповнимо графічне зображення поля ще екіпотенціальними поверхнями.

§ 1.6. Напруженості ряду важливих симетричних полів

Поле безмежної рівномірно зарядженої площини. Нехай безмежна площина S (рис. 16) рівномірно заряджена з поверхневою густиною (1.12)

$$\sigma = \text{const.} \quad (1.40)$$

Згідно з симетрією ясно, що напруженість поля \vec{E} , створеного таким плоским розподілом заряду (1.40), буде однаковою скрізь на площинах, паралельних зарядженій площині S . Для розрахунку \vec{E} скористаємося даною умовою

симетрії і теоремою О—Г (1.39). Як замкнену поверхню Σ візьмемо прямий циліндр з основами, паралельними площині S і розташованими на однаковій від неї відстані по обидва її боки (див. рис. 16). Оскільки силові лінії розглядуваного поля, очевидно, є нормальними до S прямими (для спрощення рисунка їх там немає) і оскільки вектори \vec{E} напрямлені в різні боки по різні сторони від площини S , мають місце умови

$$\begin{cases} |E_{n_n}| = |E_{n_{np}}| \equiv E; \\ |E_{n_6}| \equiv 0, \end{cases} \quad (1.41)$$

де E — модуль вектора напруженості ($E = |\vec{E}|$), а символи n_n, n_{np}, n_6 репрезентують проєкції на ліву, праву й бічну частини поверхні Σ . Згідно із зазначеним модуль потоку вектора \vec{E} через Σ

$$|\Phi| = \left| \oint_{(\Sigma)} E_n dS \right| = 2E \Delta S \quad (1.42)$$

(ΔS — площа кожної з основ прямого циліндра на рисунку). Отже, за (1.39) і (1.42)

$$2E \Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} |\Delta Q|. \quad (1.43)$$

Тут ΔQ — заряд, сконцентрований на фрагменті ΔS площини S , вирізаному циліндром Σ . Тому за (1.12)

$$\Delta Q = \sigma \Delta S. \quad (1.44)$$

З (1.43) і (1.44) знаходимо шукану напруженість поля

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} = \text{const.} \quad (1.45)$$

Вектор \vec{E} по обидва боки від площини S буде напрямлений від неї при $\sigma > 0$, і до неї при $\sigma < 0$.

Поле безмежного рівномірно зарядженого прямого циліндра. З урахуванням попереднього можемо більш побіжно пояснити обчислення. Розглянемо безмежний прямий циліндр (рис. 17), рівномірно заряджений з лінійною густиною

$$\lambda = \text{const.} \quad (1.46)$$

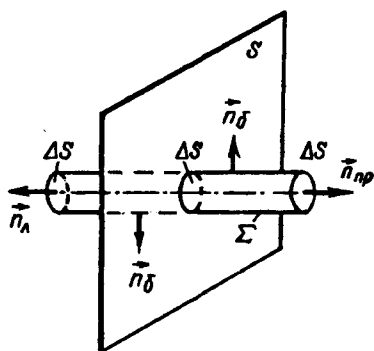


Рис. 16

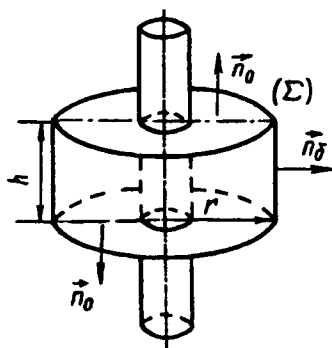


Рис. 17

Обмежуючись полем за межами зарядженого циліндра, випадки поверхневого і об'ємного розподілів зарядів можна не розрізняти. (Ці варіанти пропонуємо розглянути самостійно і порівняти отримані результати з поданими, наприклад, у праці [36].)

Зважаючи на очевидну осьову симетрію поля, за замкнену поверхню Σ оберемо коаксіальний зарядженому прямий циліндр висоти h і радіуса r (див. рис. 17). Очевидно, мають місце рівності

$$|E_n| \equiv E; \quad E_{n_0} \equiv 0. \quad (1.47)$$

Тут E — модуль вектора напруженості поля ($E = |\vec{E}|$); n_δ , n_0 символізують проєкції \vec{E} на бічну поверхню і на обидві основи відповідно. Згідно з (1.47) для потоку вектора \vec{E} через Σ дістанемо

$$|\Phi| = \left| \oint_{(\Sigma)} E_n dS \right| = 2\pi r h E. \quad (1.48)$$

Для заряду $\lambda \Delta Q$, охопленого циліндром Σ , за (1.46) і (1.10) знаходимо

$$\Delta Q = \lambda h. \quad (1.49)$$

Звідси за теоремою О—Г маємо

$$E = \frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.50)$$

Вектор \vec{E} буде спрямований від зарядженого циліндра при $\lambda > 0$ і до зарядженого, коли $\lambda < 0$.

Поле симетрично зарядженої сфери. Звернемося до розрахунку напруженості поля \vec{E} , створеного симетрично зарядженою (до заряду Q) сферою радіуса r_0 (рис. 18) за межами цієї сфери (тобто на відстані $r > r_0$ від її центра).

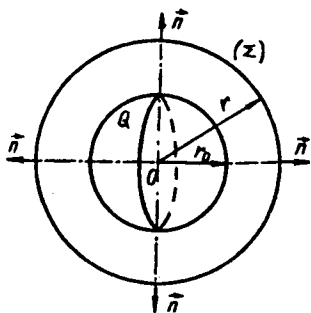


Рис. 18

Зважаючи на сферичну симетрію розподілу заряду, замкнену поверхню Σ виберемо у формі сфери радіуса $r > r_0$, з центром в центрі зарядженої сфери. Очевидно,

$$|E_n| \equiv E, \quad (1.51)$$

де E — модуль напруженості поля ($E = |E|$) (n символізує проєкцію на нормаль до сферичної поверхні Σ). Для потоку вектора \vec{E} дістанемо

$$|\Phi| = \left| \oint_{(\Sigma)} E_n dS \right| = 4\pi r^2 E. \quad (1.52)$$

Поверхня Σ за умовою охоплює повний заряд Q наелектризованої сфери. Тому за теоремою О—Г (1.39) матимемо

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}. \quad (1.53)$$

Неважко переконатися, що у векторній формі формула (1.53) відповідає закону Кулона (1.3) для точкового заряду:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.54)$$

Пропонуємо самостійно розробити схеми обчислення напруженості полів усередині рівномірно заряджених циліндра і сфери в двох варіантах для кожного об'єкта: коли заряд рівномірно розподілено лише по їхній поверхні і рівномірно розподілено по об'єму. Виконавши це, можна переконатися, що за умови поверхневого рівномірного розподілу заряду поля всередині заряджених циліндра і сфери дорівнюють нулю ($\vec{E} \equiv \vec{0}$). Фіксуємо на цьому увагу, оскільки даний факт нижче буде використано (див. також [15] або [36]).

§ 1.7. Робота в електростатичному полі. Потенціал поля

Сили, що діють в електростатичному полі на точковий заряд, є з очевидністю потенціальними, оскільки закон Кулона (1.1), (1.3) за формою тотожний закону всесвітнього тяжіння Ньютона, а гравітаційні сили безперечно мають потенціальний характер (див. розділ 1). Проте це питання все ж вимагає певного додаткового обговорення, оскільки в першій частині курсу йшлося лише про потенціальний характер взаємодії двох точкових мас, в той час як треба розглянути характер дії на певний точковий заряд довільно розподіленої у просторі системи нерухомих зарядів.

Аналогічно з теорією руху точкових мас в гравітаційному полі для точкового заряду q можна ввести потенціальну енергію. У кулонівському полі точкового заряду Q (1.3) вона становить¹

$$U = \int_r^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr'}{r'^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1.55)$$

Нагадуємо, що потенціальна енергія $U(\vec{r})$ чисельно дорівнює роботі, яку виконує силове поле при переміщенні заряду q з точки $\{\vec{r}\}$ на безмежність будь-яким шляхом. Зважаючи на цю обставину та на принцип суперпозицій (1.4), можна узагальнити формулу для потенціальної енергії точкового заряду q в полі системи довільно розподілених нерухомих зарядів. Неважко перекоонатися, що для системи дискретно (1.5) і відповідно неперервно (1.16) розподілених зарядів матимемо:

$$U(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + \int_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} \quad (1.56)$$

Тут $\rho(\vec{r}')$ — об'ємна густина заряду (1.14). Аналогічні формули існують і для лінійного та поверхневого розподілу заряду. (Їх потрібно записати самостійно). Звертаємо увагу на те, що потенціальна енергія $U(\vec{r})$ (див. (1.56)) заряду q

¹ У механіці потенціальна енергія позначається через Π , тут через U . Обидва варіанти відомі з навчальної літератури.

в полі довільної системи зарядів пропорційна значенню заряду q . Це дає змогу ввести нову величину — *потенціал електростатичного поля* — за формулою

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{U(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ \int_{(V)} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{array} \right. \quad (1.57)$$

Потенціал поля $\varphi(\vec{r})$ чисельно дорівнює роботі сил поля при перенесенні в ньому одиниці позитивного заряду з даної точки поля $\{\vec{r}\}$ у безмежність¹. Як видно з (1.57), потенціал поля визначається лише зарядами-джерелами поля і тому характеризує саме створене ними поле.

Отже, електростатичне поле можна характеризувати не лише напруженістю поля $\vec{E}(\vec{r})$ (див. (1.3а), (1.5), (1.16)), а й потенціалом $\varphi(\vec{r})$ (за (1.57)). Між цими двома характеристиками поля існує зв'язок, що впливає з відомого співвідношення між потенціальною енергією $U(\vec{r})$ й відповідною силою $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \quad (1.58)$$

($\vec{\nabla}$ традиційно символізує градієнт (див. розділ 1)).

З огляду на зв'язок між \vec{F} та \vec{E} (див. (1.3а)), а також між U та φ (1.57) за (1.58) можна записати

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}). \quad (1.59)$$

Звичайно, зв'язок (1.59) неважко встановити безпосередньо з виразів для \vec{E} ((1.5), (1.16)) та φ (1.57) без апеляції до розділу 1. (Пропонуємо виконати це самостійно.) З (1.59) випливає, що вектор \vec{E} спрямовано в бік спаду потенціалу $\varphi(\vec{r})$. (Над цим слід поміркувати).

Як відомо з механіки (а тут це можна незалежним чином відтворити), роботу, що її виконують сили поля над точковим об'єктом при його переміщенні з точки $\{\vec{r}_1\}$ до точки $\{\vec{r}_2\}$, можна обчислити двома способами:

¹ Як видно з розділу 1, точку відліку не обов'язково обирати у безмежності — її можна фіксувати довільно.

$$A_{12} = \begin{cases} \int_{(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2)} \vec{F} d\vec{r}; \\ U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2). \end{cases} \quad (1.60)$$

Звідси з огляду на (1.3а) та (1.57) неважко встановити, що

$$\int_{(\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2)} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_2). \quad (1.61)$$

Це ще одна форма зв'язку між \vec{E} та ϕ , з якої з урахуванням (1.60) неважко зробити висновок, що робота A_{12} сил електростатичного поля над точковим зарядом q при його переміщенні з точки $\{\vec{r}_1\}$ до точки $\{\vec{r}_2\}$ дорівнює добуткові заряду на відповідну різницю потенціалів

$$A_{12} = q \{\phi_1 - \phi_2\}. \quad (1.62)$$

Позначення зрозумілі. Це дуже важлива формула, яка стосується усієї електростатики й теорії сталих та квазістаціонарних струмів, про які мова йтиме попереду.

На закінчення зупинимось ще на одному важливому наслідкові співвідношення (1.61). Виконуючи інтегрування ліворуч у рівності (1.62) по замкненому контуру L , тобто повертаючись у вихідну точку ($\vec{r}_2 = \vec{r}_1$), дістанемо

$$\oint_{(L)} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \phi(\vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_1) \equiv 0. \quad (1.63)$$

Цю тотожність прийнято читати таким чином: “Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля \vec{E} по замкненому контуру дорівнює нулеві”.

Нагадаємо, нарешті, що скалярний добуток $\vec{E} d\vec{r}$ можна подати у вигляді

$$\vec{E} d\vec{r} = E_l dl, \quad (1.64)$$

де E_l — проекція вектора \vec{E} на напрям переміщення $d\vec{r}$; dl — довжина відповідної дуги (рис. 19); $E_l = |\vec{E}| \cos \alpha$; $|d\vec{r}| = dl$ (з точністю до малих вищого порядку).

Згідно з скалярною функцією $\phi(\vec{r})$ (див. (1.57)), яка описує електростатичне поле, графічне зображення поля збагачується поверхнями рівного потенціалу $\phi(\vec{r}) = \text{const}$. Коли заряд q рухається по такій поверхні, поле не виконує над ним

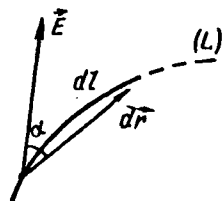


Рис. 19

роботи (див. (1.62)). Неважко довести, що вектори $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ нормальні до еквіпотенціальних поверхонь. (Рекомендуємо довести це.)

§ 1.8. Електростатична Індукція. Вектор електростатичної Індукції

Як відомо з елементарного курсу, провідники (тобто тіла, які добре проводять електрику) можна наелектризувати на відстані (без дотику до них зарядженими тілами). Якщо, наприклад, видовжену металеву болванку на діелектричній підставці розташувати в полі якогось зарядженого тіла (рис. 20), то листочки розміщених на кінцях болванки електроскопів (“гусариків”) розійдуться, демонструючи появу на них електричних зарядів. Досліди показали, що на одному кінці болванки виникає позитивний заряд, на другому — негативний. Якщо винести болванку за межі електричного поля, можна спостерігати зникнення зарядів на її кінцях. Описане явище одержало назву *електростатичної індукції* (наведення).

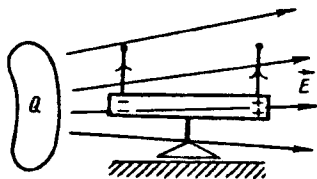


Рис. 20

Інтерпретація електростатичної індукції полягає в тому, що існуючі в твердих провідниках колективізовані електрони, які здатні досить вільно пересуватися в тілі металу, переміщуються зовнішнім електростатичним полем на один кінець болванки, оголюючи протилежні за знаком заряди іонів на другому її кінці. Накопичення зарядів на кінцях болванки припиняється, коли створене індукованими зарядами власне поле зрівноважується з зовнішнім (тобто тим, що породило електризацію). За межами поля індуковані заряди знову змішуються, нейтралізуючи болванку.

Електростатична індукція дає можливість іншим шляхом підійти до зондування (а отже і опису) електростатичного поля відмінним від зондування пробними зарядами¹. З цією метою можна використати так звані пластинки Мі (за ім'ям німецького фізика). Вони становлять дві

¹ На жаль, у навчальній літературі про такий підхід до зондування електричного поля практично забуто. Це скорочує виклад, але за рахунок втрати розуміння глибинної фізичної суті вектора електростатичної індукції \vec{D} (див. далі).

металеві пластинки невеликого діаметра, насаджені на діелектричні ручки. Розглянемо схему їх використання. Складанням пластинок до купи утворюють з них єдиний провідник (рис. 21), на якому в електростатичному полі \vec{E} індукуються заряди. Розсунувши пластинки в полі (тобто утворивши між ними зазор), виносять їх так за межі поля. Вимірюють заряд, що виник на них, за індукцією. Досвід показує, що в кожній точці поля¹ існує така орієнтація пластинок M_i , за якої на них індукуються максимальний заряд. Фіксуємо цей напрям. Якщо відома площа пластини ΔS та індукований на них заряд Δq (вибирають заряд позитивної пластинки), можна визначити його поверхневу густину

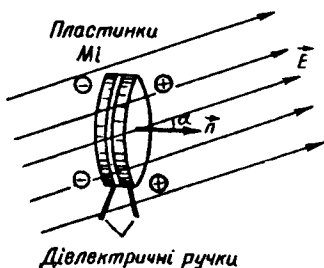


Рис. 21

$$\sigma = \Delta q / \Delta S; \quad (1.65)$$

максимальне значення якої позначимо через σ_0 . Змінюючи орієнтацію пластини відносно напрямку з максимальною густиною σ_0 , виявляємо, що густина σ при цьому змінюється за законом

$$\sigma = \sigma_0 \cos \alpha. \quad (1.66)$$

Введемо вектор \vec{D} , модуль якого

$$|\vec{D}| = \sigma_0, \quad (1.67)$$

а напрям збігається з напрямом нормалі \vec{n} до позитивної пластинки M_i в положенні, коли на ній індукуються максимальний заряд. Тоді формула (1.66) збігається з виразом для проекції вектора \vec{D} на пряму, що йде під кутом α до фіксованого (див. вище) напрямку. Вектор \vec{D} називають *вектором електростатичної* (або просто *електричної*) *індукції*. Назва, як бачимо, природна.

Поле, утворене множиною векторів \vec{D} , називають *полем вектора електростатичної індукції*. За його допомогою можна описувати електростатичне поле не гірше, ніж за

¹ Малий розмір пластинок M_i дає змогу вважати поле в їхній зоні практично однорідним.

допомогою вектора напруженості \vec{E} . Оскільки обидва векторних поля у вакуумі породжуються тією самою системою зарядів-джерел, між ними повинен існувати зв'язок. Досліди показують, що у вакуумі такий зв'язок має вигляд

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1.68)$$

де ϵ_0 — електрична стала (див. (1.2)).

З наведеного вище ясно, що співвідношення (1.68) не є визначенням¹ вектора \vec{D} , а є законом природи. Можна довести, що він є еквівалентним закону Кулона. Саме законом Кулона його й називає Р. В. Поль [32].

Кожен із векторів \vec{E} і \vec{D} відіграє свою роль у теорії електрики, що особливо важливо в теорії електромагнітних явищ у матеріальних середовищах. Зважаючи на закон (1.68), перепишемо теорему О—Г (1.39) у термінах вектора \vec{D} :

$$\tilde{\Phi} = \oint_{(\Sigma)} D_n dS = Q_{\Sigma}. \quad (1.69)$$

§ 1.9. Провідники в електростатичному полі

З дослідів випливає ряд важливих особливостей поведінки провідників у електростатичному полі, які мають велике принципове й прикладне значення. Зупинимось на них, зінтерпретуємо та виведемо наслідки.

Незалежно від способу електризації ізолюваного провідника — індукцією чи дотиком зарядженого тіла, — завжди заряди в *рівновазі* розміщуються лише на поверхні провідника, електричне поле в його середині відсутнє ($\vec{E} \equiv \vec{0}$). Отже, заряджений провідник є *поверхнево зарядженим* і *еквіпотенціальним*, тобто становить тіло рівного потенціалу (до поверхні включно). Усі особливості наелектризованих провідників пояснюються наявністю в них відносно вільних носіїв заряду, які під впливом первинних (запалювальних) полів приходять у рух і перерозподіляються доти, доки створене ними додаткове (вторинне) поле не скомпенсує в тілі провідника запалювальне поле. Внаслідок

¹ Вводити просто за визначенням два взаємно пропорційні вектори немає змісту. Але рівність (1.68) пов'язує між собою дві істотно різні за фізичним змістом величини, що рельєфно впливає з § 1.8.

практично миттєвої релаксації сумарне електростатичне поле перетвориться на нуль у тілі провідника аж до його поверхні включно.

З цього випливає ряд перевірених дослідами властивостей заряджених провідників. Передусім рівноважний поверхневий розподіл зарядів не зміниться, якщо суцільний провідник замінити на провідник такий самий за формою, але з порожниною. Отже, внутрішня частина зарядженого провідника не істотна; все залежить від дуже тонкого приповерхневого шару (теоретично — поверхні).

Інакше кажучи, металева оболонка не “пропускає” в обмежену нею порожнину електростатичне поле, екрануючи від нього цю порожнину. Цим широко користуються в науці й техніці, зокрема радіотехніці.

Внаслідок екіпотенціальності провідників (до поверхні включно) напруженість поля \vec{E} — нормальна до поверхні провідників із зовнішнього її боку, а вектор індукції \vec{D} — чисельно дорівнює поверхневій густині заряду σ у кожній точці поверхні. Твердження щодо нормальності вектора $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ випливає з математичного факту перпендикулярності градієнта будь-якої функції ϕ до поверхонь вигляду $\phi(\vec{r}) = \text{const}$. Справді, на таких поверхнях¹

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = 0. \quad (1.70)$$

Це означає, що скалярний добуток векторів $\vec{\nabla}\phi \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\}$ і $d\vec{r} \{dx, dy, dz\}$ дорівнює нулю: $(\vec{\nabla}\phi, d\vec{r}) = 0$, тобто кут між ними дійсно прямий.

Що ж до рівності $|\vec{D}| = |\sigma|$ у кожній точці поверхні провідника, то це випливає із закону $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ (1.68) і теореми О—Г (1.69) (рис. 22).

На рисунку зображено фрагмент поверхні провідника S з виділеною на ній ділянкою ΔS , на якій побудовано замкнений прямий циліндр з поверхнею Σ .

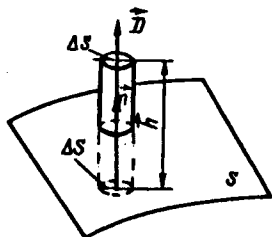


Рис. 22

З огляду на перелічені вище властивості провідників за допомогою теореми О—Г та за умови

¹ Тут — екіпотенціальні поверхні.

$h \rightarrow 0$ дістанемо $|\vec{D}| \Delta S = |\sigma| \Delta S$, звідки й випливає шукана рівність $|\vec{D}| = |\sigma|$. Твердження доведено.

§ 1.10. Диполь в електричному полі. Електричне поле диполя

У теорії діелектриків (і не лише в ній) велику роль відіграють так звані диполі, тобто спарені точкові заряди, рівні за величиною, протилежні за знаком і розташовані

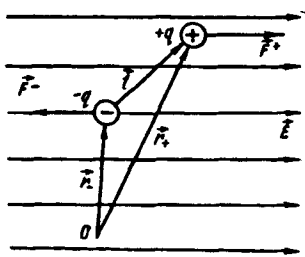


Рис. 23

на певній відстані l один від одного. Диполь із зарядами $+q$ і $-q$ ($q > 0$) в електростатичному полі зображено на рис. 23. Вважатимемо поле однорідним $\vec{E} = \text{const}$. У такому полі на диполь діє пара сил \vec{F}^+ , \vec{F}^- , кожна з яких дорівнює

$$\vec{F}^+ = q\vec{E}; \quad \vec{F}^- = -q\vec{E}. \quad (1.71)$$

Моментом цієї пари буде

$$\vec{M} = [\vec{r}_-, \vec{F}^-] + [\vec{r}_+, \vec{F}^+] = q [\vec{l}, \vec{E}]. \quad (1.72)$$

Квадратні дужки символізують векторний добуток, а $\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$ — вектор, спрямований від від'ємного заряду ($-q$) до додатного ($+q$), який називають *плечем диполя*. Добуток

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad (1.73)$$

дістав назву *дипольного моменту*. Отже, момент сил \vec{M} , що діють на диполь у полі \vec{E} , дорівнює

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]. \quad (1.74)$$

Пара сил, що діє на диполь (як видно з рис. 23), намагається повернути його так, щоб дипольний момент \vec{p} зорієнтувати вздовж поля \vec{E} . Отже, електричне поле \vec{E} чинить орієнтуючу дію на розташовані в ньому диполі.

У неоднорідному полі, коли $|F^+| \neq |F^-|$, дія електричного поля \vec{E} на диполь не тільки орієнтуюча, а й така, що прагне перемістити диполь як ціле у просторі, оскільки в цьому разі відмінним від нуля буде не лише головний момент $\vec{M} = [\vec{r}_-, \vec{F}^-] + [\vec{r}_+, \vec{F}^+]$, а й головний вектор $\vec{R} = \vec{F}^+ + \vec{F}^-$ прикладених до зарядів сил.

Зазначене вище використовується при вивченні поведінки діелектриків у електростатичному полі.

Розглянемо електричне поле, створюване самим диполем, оскільки це питання також відіграє принципову роль у теорії електромагнітних явищ. Зважаючи на те, що мова в подальшому йтиме про молекулярні (мікроскопічні) диполі, обмежимося розгляданням поля на значних порівняно з плечем диполя l ($r \gg l$) відстанях r . Більше того, зважаючи на працю [15], обмежимося обчисленням поля в точці A вздовж осі диполя (рис. 24). Для модуля напруженості E і потенціалу φ поля в точці A згідно з (1.3) та (1.57) дістанемо

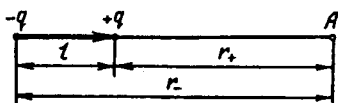


Рис. 24

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right\}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right\}. \quad (1.75)$$

Звідки, ввівши позначення

$$r \equiv r_- - \frac{l}{2} = r_+ + \frac{l}{2} \quad (1.76)$$

та враховуючи, що з точністю до малих вищого порядку (за $l/r \ll 1$) можна покласти

$$r_- r_+ \approx r^2, \quad (1.77)$$

знаходимо

$$E \approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \varphi \approx \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.78)$$

Тут узято до уваги визначення дипольного моменту p (див. рис. (24) та (1.73)).

Неважко прямим обчисленням переконатися, що між φ та E (див. (1.78)) існує співвідношення

$$E = -d\varphi/dr, \quad (1.79)$$

яке й слід було очікувати на підставі загальної формули (1.59).

Як видно з формул (1.78), напруженість E і потенціал поля диполя спадають з відстанню r швидше, ніж кулонівські поля окремих точкових зарядів (1.3) та (1.57). Така сама залежність від r характерна для полів диполя не лише на його осі, а й в усьому просторі [15]. Ця особливість є одним з виявів взаємного екранування близько розташованих однакових за величиною, але різноіменних зарядів.

Другим виявом такого екранування є зменшення E і ϕ при зближенні зарядів ($\vec{l} \rightarrow 0$; $\vec{p} \rightarrow 0$). Ще ефективніше екранують одне одного різноіменні заряди у квадрупольях, октуполях і т. д. [39].

§ 1.11. Діелектрики в електростатичному полі. Поляризація діелектриків

На відміну від провідників з порівняно вільними носіями заряду (електрони в металах, іони в електролітах), у діелектриках різноіменні носії заряду досить міцно зв'язані між собою в межах молекул, і тому поведінка діелектриків в електростатичних полях відрізняється від поведінки провідників. Прикладене до діелектриків зовнішнє електричне поле не викликає¹ такого радикального перерозподілу зарядів в них, як у провідниках. Під дією електричного поля діелектрики лише поляризуються. Причому відбувається це по-різному в різних діелектриках відповідно до особливостей молекулярної будови. Існують діелектрики, молекули яких у нормальному стані не мають дипольних моментів у силу повного взаємного екранування в них різноіменних зарядів. Молекули таких діелектриків дістають дипольні моменти лише під дією зовнішнього електричного поля, яке порушує симетрію розподілу різноіменних зарядів, розсовуючи центри їх розподілів. Але є діелектрики, молекули яких мають готові дипольні моменти навіть за відсутності зовнішніх полів. Проте хаотичний тепловий рух робить орієнтації молекулярних диполів також хаотичними, і тому в цілому діелектрик не виявляє електричних властивостей. Дія зовнішнього поля на такі діелектрики полягає в створенні домінуючого напрямку орієнтації молекулярних диполів у силу орієнтуючої дії електричного поля (див. § 1.10). Але не істотно, яким чином поляризується діелектрик. Важливим є сам факт, що він поляризується. Це означає, що під дією електричного поля позитивні кінці

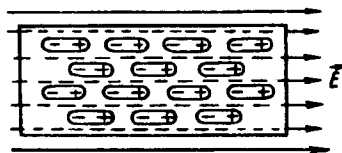


Рис. 25

молекулярних диполів тяжіють розташуватися вздовж електричного поля, а негативні — проти поля. В орієнтації молекулярних диполів з'являється певний порядок, дуже схематично зображений на рис. 25. Він і зумов-

¹ Якщо воно не надто сильне й не руйнує диполі.

лює поляризацію діелектриків, яка вносить свої корективи в електричне поле, додаючи до зовнішнього поля свою компоненту.

Як свідчить досвід, поляризація однорідних діелектриків проявляється у виникненні на одній грані позитивного поверхневого заряду; на протилежній — негативного. В неоднорідних діелектриках, крім поверхневих, виникають ще некомпенсовані об'ємні заряди. Відмінність у характері поляризації однорідних і неоднорідних діелектриків радимо пояснити самостійно й перевірити власну трактовку з виробленою в науці [15].

Для кількісної характеристики поляризації діелектриків вводиться поняття про вектор поляризації \vec{P} . Він характеризує собою сумарний дипольний момент одиниці об'єму діелектрика. (Така величина фізично інформативна, оскільки з механіки, наприклад, відомо, що головний момент \vec{M} прикладених до системи сил становить векторну суму моментів сил, прикладених до частин цієї системи; в свою чергу, моменти сил, прикладених до окремих диполів, виражаються через їхні дипольні моменти \vec{p} (див. (1.74)).

Виділимо в діелектрику фізично безмежно малий об'єм dV і складемо векторну суму $\delta\vec{p}$ елементарних дипольних моментів усіх (δN) наявних в dV молекул

$$\delta\vec{p} = \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{p}_i. \quad (1.80)$$

Тут δN — число поляризованих молекул в межах об'єму dV . Вектором поляризації діелектрика \vec{P} називають векторну величину

$$\vec{P} \equiv \frac{\delta\vec{p}}{dV}. \quad (1.81)$$

Знання вектора \vec{P} дає можливість визначити поляризаційні заряди, і навпаки. У повному обсязі це буде з'ясовано пізніше. Тут же обмежимося ілюстрацією сказаного на прикладі однорідного діелектрика в однорідному електричному полі ($\vec{E} = \text{const}$) в моделі суцільних середовищ (яка, як уже зазначалося, добре узгоджується з експериментом в області макроскопічних явищ). У такій моделі нейтральний діелектрик можна уявляти собі як рівномірне накладання одної на одну неперервно розподілених у просторі негативної і позитивної електрики (рис. 26, а); а поляри-

зований — як деякий зсув позитивної електрики відносно негативної (рис. 26, б). Внаслідок однорідності електричного поля ($E = \text{const}$) і однорідності діелектрика замість безмежно малого об'єму dV , який фігурує в (1.81), можна обрати об'єм цілого діелектричного бруса $\Delta V = L\Delta S$, де ΔS — площа його поперечного перерізу, а L — довжина. Сумарний дипольний момент бруса можна, очевидно, визначити за формулою

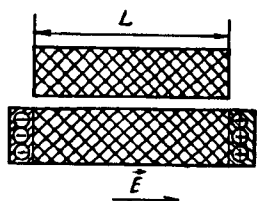


Рис. 26

$$\Delta p = \Delta qL = \sigma' \Delta SL$$

(σ' — поверхнева густина поляризаційного заряду). Отже, для модуля вектора поляризації \vec{P} дістанемо

$$P = |\vec{P}| = \frac{\Delta p}{\Delta V} = \sigma'. \quad (1.82)$$

Цим і продемонстровано зв'язок між вектором поляризації \vec{P} і розподілом поляризаційного¹ заряду σ' у даному конкретному випадку. Ним поки що і обмежимося.

§ 1.12. Електроємність провідників. Конденсатори

Потенціал поля, створеного будь-якою обмеженою (у просторі та за сумарним значенням) системою зарядів, можна нормувати так, аби він перетворювався на нуль на безмежності. Між значенням (нормованого таким чином) потенціалу на поверхні зарядженого провідника і повним зарядом на ньому існує дуже простий зв'язок: заряд і потенціал провідника пропорційні один одному:

$$q = C\phi. \quad (1.83)$$

Тут q і ϕ — повний заряд провідника і його потенціал відповідно. Константу C називають *електроємністю* (або просто *ємністю*) провідника. З рівності $C = q/\phi$ випливає, що електроємність чисельно дорівнює заряду, який слід надати провіднику для зміни його потенціалу на одиницю.

¹ Поляризаційні заряди називають ще *зв'язаними* (з очевидних причин).

Закономірність (1.83) можна розглядати як наслідок еквіпотенціальності заряджених провідників (встановленої експериментально¹) і закону (1.57).

Ємність конденсаторів порівняно з ємністю окремого провідника (1.83) є важливішою. Конденсаторами називають систему з двох провідників (або двох серій провідників) з розвиненими поверхнями, як правило, подібними одна до одної. Для утворення конденсатора провідники наближають один до одного (найчастіше подібними поверхнями), в зазорі між якими може бути вакуум або різні діелектрики. Найпростіший конденсатор можна створити з двох однакових металевих платівок у формі “бутерброда” з вакуумною або діелектричною “прокладкою”. Зовні до металевих обкладинок конденсатора приєднуються клеми для з'єднання конденсатора з джерелом струму й зарядки конденсатора. Схематичне зображення конденсатора подано на рис. 27. Вертикальні лінії символізують металеві обкладинки, а відростки — клеми конденсатора.

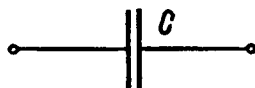


Рис. 27

Заряд обкладинкам надається за допомогою того чи іншого джерела струму. Заряди, що виникають на обкладинках, однакові за величиною і протилежні за знаками. Обкладинки конденсаторів є провідниками, а тому вони еквіпотенціальні. Саме тому можна говорити про різницю потенціалів між обкладинками в цілому (а не між окремими точками).

Позначимо заряд додатної обкладинки через q , а різницю потенціалів між додатною і від'ємною обкладинками — через $U \equiv \varphi_+ - \varphi_-$. Відношення цих величин у рівновазі виявляється сталим:

$$C = q/U = \text{const.} \quad (1.84)$$

Константу C називають *ємністю* конденсатора; чисельно вона дорівнює тому заряду, який змінює різницю потенціалів між обкладинками на одиницю. Електроємність C визначається формою і розмірами обкладинок конденсатора та природою діелектрика між ними. Обчислимо й проаналізуємо ємності трьох геометрично простих конденсаторів.

¹ Застерігаємо від повного отождоювання реального фізичного змісту експериментальних фактів і їхньої інтерпретації.

Ємність плоского конденсатора. Розглянемо конденсатор, що складається з двох плоскопаралельних металевих платівок, ширина зазору між якими d значно менша за їхні лінійні розміри (наприклад, довжину й ширину):

$$d \ll l_1, l_2, \quad (1.85)$$

де l_1, l_2 — довжина й ширина платівок. Схематичний вид збоку конденсатора показано на рис. 28. Якщо знехтувати крайовими ефектами, які за умови (1.85) відіграють незначну роль, то електричне поле між обкладками можна вважати скрізь однорідним. Завдяки різним знакам заряду обкладок поля від них у зазорі додаються і завдяки (1.85) результуюче поле дорівнює

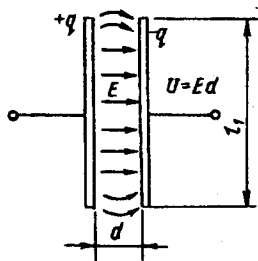


Рис. 28

$$E = \sigma / \epsilon_0. \quad (1.86)$$

За межами ж платівок поля практично компенсуються. Згідно з (1.61) і (1.86) для різниці потенціалів між обкладками дістанемо

$$U = Ed = \sigma d / \epsilon_0. \quad (1.87)$$

Заряд на додатній обкладинці дорівнює

$$q = \sigma S. \quad (1.88)$$

Але тоді за (1.84) матимемо

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (1.89)$$

Це й є формула для ємності плоского конденсатора з обкладками площею S та шириною зазору d , в якому є вакуум. (На практиці формула (1.89) досить добре відповідає дійсності і з повітрям у зазорі.)

Ємність циліндричного конденсатора. Розглянемо конденсатор з металевими обкладками у вигляді двох коаксіальних прямих циліндрів різних радіусів $r_2 > r_1$ (рис. 29). При умові

$$h; r_1; r_2 \gg d = r_2 - r_1 \quad (1.90)$$

крайовими ефектами можна знехтувати, вважаючи, що поле між обкладками можна ототожнити з полем безмежного циліндра.

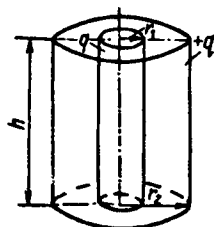


Рис. 29

Зовнішня обкладинка в порожнині не створює поля (див. § 1.6). В зазорі воно повністю утворюється зарядом внутрішньої обкладинки і дорівнює за (1.50)

$$E = \lambda / 2\pi\epsilon_0 r. \quad (1.91)$$

Але тоді за (1.61) різниця потенціалів між обкладинками визначатиметься як

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (1.92)$$

а заряд на позитивній обкладинці як

$$q = \lambda h. \quad (1.93)$$

Звідси для ємності C

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln r_2/r_1}. \quad (1.94)$$

Але при умові (1.90)

$$\ln r_2/r_1 = \ln \left(1 + \frac{d}{r_1} \right) \approx \frac{d}{r_1}. \quad (1.95)$$

Отже, для C остаточно

$$C = (\epsilon_0 S) / d, \quad (1.96)$$

де $S = 2\pi r_1 h$ — площа внутрішньої обкладинки (яка завдяки (1.90) практично збігається із площею зовнішньої). Отже, ми знову дістали для ємності таку саму формулу, що й для плоского конденсатора.

Ємність сферичного конденсатора. Набувши певного досвіду, ми лише побіжно накреслимо виведення формули для конденсатора, обкладинками якого слугують дві металеві концентричні сфери близьких радіусів r_1 і r_2 :

$$r_1, r_2 \gg r_2 - r_1 \equiv d. \quad (1.97)$$

Різниця потенціалів U між сферами за (1.61) та (1.52) дорівнює

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right\} \approx \frac{Qd}{4\pi r_1^2 \epsilon_0}. \quad (1.98)$$

Тут враховано умову (1.97). Звідси для ємності C знову дістанемо формулу (1.96), (1.89), оскільки $4\pi r_1^2 = S$ — площа поверхні внутрішньої сфери (яка за (1.97) практично збігається з площею зовнішньої).

З цих прикладів неважко здогадатися, що ємність усіх конденсаторів, лінійні розміри обкладинок яких значно перебільшують ширину зазору між ними, визначається за формулою (1.89). Так воно насправді і є.

§ 1.13. Діелектрик у зазорі конденсатора. Вектор індукції \vec{D} в речовині

Розглянемо тонкий (1.85) плоский конденсатор, між обкладинками якого вміщено однорідний діелектрик (рис. 30). Під впливом електростатичного поля, створеного зарядами обкладинок, діелектрик між ними поляризується. На поверхнях діелектрика, що межують з обкладинками, виникають поляризаційні (зв'язані) заряди із знаками, протилежними до знаків заряду суміжних обкладинок. Внаслідок з кожного боку зазора виникає сумарний заряд з поверхневою густиною

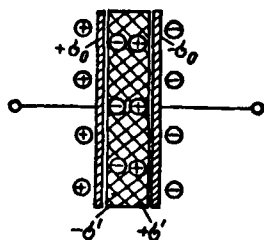


Рис. 30

$$\sigma = \sigma_0 - \sigma', \quad (1.99)$$

де σ_0 — густина заряду обкладинок; σ' — густина поляризаційного заряду. Нехтуючи малоістотними за умов (1.85) крайовими ефектами, можна стверджувати, що між обкладинками утворилося електростатичне поле, яке визначається за формулою

$$E = (\sigma_0 - \sigma') / \epsilon_0. \quad (1.100)$$

Але з огляду на (1.82) можна (1.100) переписати у вигляді

$$E = (\sigma_0 - P) / \epsilon_0;$$

звідки випливає, що

$$\sigma_0 = \epsilon_0 E + P. \quad (1.101)$$

Нижче покажемо, що σ_0 за величиною дорівнює вектору електростатичної індукції

$$D = \sigma_0 \quad (1.102)$$

і тому (1.100) набуває вигляду

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (1.103)$$

З дослідів випливає, що для однорідних діелектриків має місце закономірність

$$P = \alpha E = \varepsilon_0 \chi E, \quad (1.104)$$

де α та χ — сталі коефіцієнти *поляризованості*. Отже, (1.103) можна перетворити на

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E \quad (1.105)$$

запровадивши *діелектричну сталу*

$$\varepsilon = 1 + \chi. \quad (1.106)$$

Для вакууму слід покласти $\chi = 0$; $\varepsilon = 1$.

Результат (1.105) є узагальненням закону (1.68) на випадок електричних полів у однорідних матеріальних середовищах. Залишилося тільки пояснити ототожнення (1.102). З цією метою повертаємося до § 1.8 і 1.12. Згідно з процедурою визначення вектора індукції \vec{D} та формулою (1.86) неважко зрозуміти, що трохи розсунувши й зафіксувавши в такому стані пластинки M_1 , можна винести їх за межі поля, консервуючи між ними точнісінько таке саме за величиною поле, яке індукувало на них заряд. Це й дає ключ для дослідного визначення вектора \vec{D} у твердому діелектрику, в який не можна внести пластинки M_1 . Замість цього в зазор між обкладками плоского конденсатора, які відіграють тепер роль пластинок M_1 , вставляють відповідний брусок діелектрика. Гадаємо, що й без подальших пояснень, тепер є зрозумілим ототожнення (1.102). (Рекомендуємо обміркувати це).

Заряди, що накопичуються на обкладках конденсатора, *вільні* (не зв'язані); вони піддаються простому експериментальному визначенню [32]. Як видно з (1.102), величина вектора індукції \vec{D} визначається саме вільними зарядами σ_0 . Зв'язані ж (поляризаційні) заряди σ' визначають вектор поляризації \vec{P} . Напруженість електростатичного поля \vec{E} визначається як вільними σ_0 , так і зв'язаними σ' зарядами. Саме цей факт і виражається рівністю (1.103), переписаною у формі

$$E = (D - P) / \varepsilon_0, \quad (1.107)$$

еквівалентний співвідношенню (1.100).

У § 4.4. буде показано, що у загальному випадку формулу (1.102) слід записувати у векторній формі

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (1.108)$$

На закінчення встановимо формулу для ємності плоского конденсатора з діелектриком між обкладинками.

Із закону (1.105) випливає, що різниця потенціалів U між обкладинками тонкого плоского конденсатора з діелектриком дорівнює

$$U = Ed = \frac{Dd}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\sigma_0 d}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (1.109)$$

Тут враховано співвідношення (1.102). Для заряду на обкладинках q можна записати

$$q = \sigma_0 S, \quad (1.110)$$

й тому ємність конденсатора дорівнює

$$C = q/U = \epsilon\epsilon_0 S/d. \quad (1.111)$$

Це й буде шуканим узагальненням формули (1.89).

Паралельне й послідовне з'єднання ємностей докладно розглядається в працях [15], [36] та інструкціях до практичних занять.

Практика вказує на доцільність застеретти початківця від абсолютізації закономірностей, заснованих на використанні тих чи інших властивостей речовини, оскільки вони можуть істотно змінюватися під впливом певних причин. І справа далеко не тільки в тому, що речовина може змінювати агрегатний стан, кардинально змінюючи й свої фізичні властивості; можуть бути й інші причини. Наприклад, слід не забувати, що заряд на провіднику можна нарощувати до певної межі, після якої він неодмінно почне стікати з провідника у простір. Але, перелічуючи властивості заряджених провідників, ми про це зовсім не згадували. Не розглядали ми також явище пробою діелектрика під дією достатньо сильних полів, коли навіть диполі можуть руйнуватися, і тому діелектрик вже недостатньо буде моделювати сукупністю "вічних" диполів. Необхідні більш деталізовані моделі діелектриків. І таких застережень у фізиці можна робити безліч. Та вони переобтяжували б текст. Замість такого перевантаження посібника ми й визнали за доцільне зробити наведене застереження. Приклади подібного роду та їх аналіз можна знайти, зокрема, у Берклівському курсі [28].

Глава 2

СТАЛИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ ТА ЯВИЩА, ЩО ЙОГО СУПРОВОДЖУЮТЬ

§ 2.1. Основні закони та теплова дія сталого струму

Історія науки свідчить про те, що у встановленні законів природи однаково важливу роль відіграють як спосте-

реження та експеримент, так і здогадка, гіпотеза, інтерпретація. Чистий експеримент або чиста гіпотеза можуть бути лише епізодами в науці. Правилком же є їхнє тісне переплетіння і взаємне доповнення на всіх етапах досліджень. Варто з цього приводу згадати хоча б закон Кулона (див. вище) або закономірності термодинаміки [36]. Курс електрики в цьому розумінні ще повчальніший. Тут гіпотеза або інтерпретація та експеримент тісно переплітаються і взаємно доповнюють одне одного. Встановлені на такій основі закономірності закріплюються в науці в результаті всебічного зіставлення наслідків з них із подальшим експериментом. Схематизуючи історичний шлях розвитку науки, автори ставлять собі за мету продемонструвати вищесказане, обминаючи лише блукання та помилкові трактовки. Звертаємо на це увагу.

У попередній главі розглянуто властивості наелектризованих (заряджених) провідників у рівновазі, тобто після припинення процесу такого перерозподілу зарядів у провідниках, в результаті якого електричне поле в тілі провідників (аж до поверхні включно) зникло, компенсувалося, перетворилося на нуль. Якщо в тілі провідника певним чином підтримувати електричне поле й забезпечити приплив нових зарядів на місце перемішених електричним полем, то в провіднику буде підтримуватися впорядкований рух електричних зарядів — електричний струм. Неважко зрозуміти, що такі умови можна стабільно забезпечити в замкненому колі провідників за наявності в ньому так званого джерела струму, яке б заважало релаксації провідників до рівноважного стану, весь час підтримуючи існування електричного поля, тобто градієнта потенціалу в тілі провідників ($\vec{E} = -\nabla\varphi \neq 0$). Схематично таке електричне коло подано на рис. 31. На ньому зображено послідовно з'єднані: джерело струму \mathcal{E} , два споживачі (опори) R , R' , вимикач (ключ) K та з'єднувальні проводи. (Стосовно принципу роботи так званих гальванічних елементів, які були мало не єдиними джерелами електричного струму при вивченні його законів, можна прочитати, наприклад, у працях [15, 32]. Правила підрахунку повного опору паралельно й послідовно з'єднаних провідників відомі з елементарного курсу.)

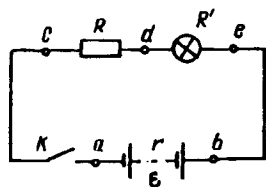


Рис. 31

Як свідчить досвід, протягом часу, поки на затискачах (клемах a , b) джерела \mathcal{E} струму підтримується стала напруга¹ (різниця потенціалів), в замкненому електричному колі, утвореному з послідовно з'єднаних провідників (див. рис. 31), підтримується сталий електричний струм.

В § 1.1 було запроваджено поняття про силу струму ΔI як величини, що дорівнює кількості електрики, яка перетинає певну площадку ΔS перерізу провідника за одиницю часу (1.8). В електричному колі під силою струму I розуміють кількість електрики, що перетинає повний поперечний переріз кожного з провідників, які утворюють коло. За технічний напрям струму прийнято напрям руху позитивних зарядів. До відкриття закону Ома силу сталого струму можна було вимірювати, наприклад, за допомогою кулонометрів [15], заснованих на електролітичній дії струму, та лічильників часу (годинників, секундомірів тощо).

Дослідами німецького фізика Георга Ома встановлено, що за стабільних умов між напругою U (різницею потенціалів $U = |\varphi_1 - \varphi_2|$) на кінцях будь-якої ділянки провідника (наприклад, cd (див. рис. 31)) і силою струму I в колі має місце взаємна пропорційність:

$$I = \Lambda U. \quad (2.1)$$

Сталий коефіцієнт Λ залежить лише від форми, розмірів і матеріалу провідника і дістав назву *провідності* даного провідника. На практиці, проте, зручніше користуватися оберненою до Λ величиною

$$R = 1/\Lambda \quad (2.2)$$

під назвою *опору провідника*. Така назва виправдана тим, що при заданій напрузі U сила струму I в провіднику буде тим меншою, чим більший опір провідника R . З урахуванням (2.2) закон Ома для ділянки кола (2.1) набуває вигляду

$$I = U/R. \quad (2.3)$$

Оскільки за законом Ома сила струму I і напруга U на кінцях провідника взаємно пропорційні, їх можна вимірювати тим самим приладом — гальванометром, — модифікації якого дають вольтметр і амперметр [15].

¹ До відкриття закону Ома напругу вимірювали переважно електрометрами [15, 32].

Дослідження показали, що опір електропровідного стержня чи дротини із заданого матеріалу прямо пропорційний довжині l стержня (дротини) і обернено пропорційний площі його поперечного перерізу S

$$R = \rho l / S, \quad (2.4)$$

де ρ — характеристичний параметр матеріалу, з якого зроблено провідник. Цей параметр дістав назву *питомого опору*, оскільки з огляду на

$$\rho = R S / l \quad (2.5)$$

він чисельно дорівнює опору провідника одиничної довжини ($l = 1$) та одиничного перерізу ($S = 1$). Питомий опір залежить від стану провідника, зокрема від температури. На значних температурних інтервалах ця залежність може бути лінійною

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta t), \quad (2.6)$$

де $\Delta t = t - t_0$ — різниця між заданою температурою t , °C (за Цельсієм) і температурою t_0 , що відповідала питомому опорі ρ_0 ; α — температурний коефіцієнт опору для чистих металів $\alpha > 0$; в околі нульової температури цей коефіцієнт близький до $1/273 = 0,00367$, тобто до температурного коефіцієнта розширення ідеальних газів, проте є провідники, для яких $\alpha < 0$; зокрема, він є від'ємним для всіх електролітів.

Досліджуючи теплову дію струму, Джоуль і незалежно від нього Ленц встановили, що кількість теплоти ΔQ , яка виділяється за час Δt у провіднику з опором R , по якому тече струм із силою I , дорівнює

$$\Delta Q = R I^2 \Delta t. \quad (2.7)$$

Це співвідношення називають *законом Джоуля—Ленца*. Як зазначалося в розділі 2, цей закон був одним з тих чинників, який привів до остаточного утвердження в науці закону збереження й перетворення енергії, відображеному в першому принципі термодинаміки. Отже, електричний струм несе з собою енергію, за рахунок якої й нагрівається провідник. При цьому електрична енергія (енергія рухомих носіїв заряду) перетворюється на теплову. Постає питання про джерело її поповнення для підтримання сталого струму. Справа в тому, що сама лише робота сил електростатичного поля не може бути таким джерелом, оскільки інтегральна робота таких сил по замкненому електричному колу в силу

(1.60, (1.61), (1.63) дорівнює нулю. Звідки тоді джоулева теплота? Тому для підтримання сталого струму в замкненому колі повинні діяти, крім електростатичних, ще сили якоїсь іншої фізичної природи, які назвали загальним терміном *сторонні сили*. Ясна річ, що в колі сталого струму (див. рис. 31) сторонні сили діють в межах джерела струму. В їхній не електростатичній природі неважко переконатися хоча б тому, що в надрах джерела струм тече проти електростатичного поля (рис. 32). Адже дія таких джерел, як,

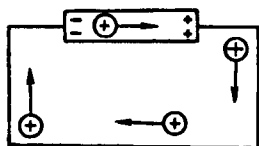


Рис. 32

наприклад, гальванічні елементи [15], ґрунтується на тому, що в їхніх надрах відбувається й підтримується просторове відокремлення позитивних і негативних зарядів, що й породжує стабільну різницю потенціалів на кінцях джерел. Проти створеного таким чином електростатичного поля

напрявлені сторонні сили, що рухають носії заряду в надрах джерел (див. рис. 32). За рахунок роботи сторонніх сил і відновлюється електрична енергія струму в колі, витрачувана на джоулеве нагрівання провідників¹.

З урахуванням закону Ома для ділянки кола (2.3) закон Джоуля—Ленца (2.7) можна подати ще у двох формах:

$$\Delta Q = IU \Delta t, \quad \Delta Q = (U^2 / R) \Delta t, \quad (2.8)$$

кожна з яких є зручною у відповідній постановці задачі. Для джоулевої потужності N за (2.7), (2.8) дістанемо ланцюжок співвідношень

$$N \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta t} = RI^2 = IU = U^2 / R. \quad (2.9)$$

За кількістю джоулевої теплоти, що виділяється за малий проміжок часу dt , тобто за $\delta Q = UI dt$, та за визначенням сили струму (1.8) дістанемо

$$\delta Q = U \frac{dq}{dt} dt = Udq. \quad (2.10)$$

Оскільки напруга дорівнює різниці потенціалів на кінцях провідника ($U = \varphi_1 - \varphi_2$), у межах якого виділяється джоулева теплота (2.10), величина $\delta Q = Udq$ дорівнює роботі (1.62) електростатичних сил перенесення кількості електри-

¹ Теплові ефекти, пов'язані зі струмом у провідниках, можуть мати й інший, відмінний від (2.7) характер. Відомий, наприклад, ще ефект Пельтьє [15]. Але тут ми не розглядаємо подібні слабкі ефекти.

ки dq через розглядувану ділянку провідника (див. рис. 31). Звідси випливає, що робота електростатичних сил повністю перетворюється на джоулеву теплоту. Саме з цієї причини сила сталого струму є однаковою в усіх перерізах замкненого кола. Ситуація тут цілком аналогічна рівномірному механічному рухові тіл під дією сил, що долають сили опору. (Рекомендуємо поміркувати над цим детальніше).

За аналогією з напруженістю електростатичного поля \vec{E} запроваджується поняття напруженості поля сторонніх сил \vec{E}^* та сумарної напруженості поля

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}^*. \quad (2.11)$$

З міркувань, аналогічних викладеним у § 1.7 (див. (1.60), (1.63)), циркуляція вектора \vec{E}' (2.11) по замкненому колу

$$\mathcal{E} \equiv \oint_{(L)} \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \oint_{(L)} \vec{E}^* \cdot d\vec{r} \quad (2.12)$$

чисельно дорівнює роботі сторонніх сил по перенесенню одиничного заряду вздовж цього кола. У формулі (2.12) враховано, що циркуляція по замкненому колу напруженості електростатичного поля \vec{E} дорівнює нулю (1.63). Величина \mathcal{E} з розмірністю напруги U дістала назву *електтрорушійної сили* джерела струму. Вона є характеристичною величиною джерела.

Оскільки сталий струм I тече не тільки по зовнішній, а й по внутрішній (по відношенню до джерела) частині кола, він і там виділяє теплоту, яка за законом Джоуля—Ленца (справедливим і для електролітів) дорівнює

$$\delta Q' = rI^2 dt. \quad (2.13)$$

Параметр r дістав назву *внутрішнього опору джерела струму*. Він також є характеристичним параметром джерела.

Якщо сумарний опір зовнішньої частини кола позначити через R_0 , то повну кількість джоулевої теплоти $\delta \tilde{Q}$, що виділяється за час dt у всьому колі, згідно з (2.7) можна обчислити за формулою

$$\delta \tilde{Q} = (R_0 + r) I^2 dt = RI^2 dt. \quad (2.14)$$

Тут запроваджено *повний опір кола*

$$R = R_0 + r. \quad (2.15)$$

Добуток опору R' певної ділянки кола (або повного кола) на силу струму I в колі дістав назву *спаду напруги* на цій ділянці кола (або *повного спаду напруги* на всьому колі)

$$U' = R'I; \quad U + u = (R_0 + r)I. \quad (2.16)$$

Використавши повний спад напруги $U + u$, можна (2.14) подати у вигляді, аналогічному (2.10),

$$\delta \tilde{Q} = (U + u)Idt = (U + u)dq. \quad (2.17)$$

За першим принципом термодинаміки, очевидно, можна тоді записати

$$\delta \tilde{Q} = (U + u)dq = \mathcal{E}dq. \quad (2.18)$$

Звідси для повної потужності джерела струму знаходимо

$$\tilde{N} = \delta \tilde{Q} / dt = \mathcal{E}I. \quad (2.18a)$$

Тут враховано визначення (2.12) і взято до уваги фізичний зміст електрорушійної сили \mathcal{E} джерела струму. З (2.18) випливає, що, з одного боку,

$$\mathcal{E} = u + U, \quad (2.19)$$

а з іншого — за (2.16),

$$\mathcal{E} = (R_0 + r)I, \text{ або } I = \mathcal{E} / R_0 + r. \quad (2.20)$$

Формула (2.20) відома під назвою *закону Ома для повного кола*. Закон Ома (2.3), (2.20) є основним законом сталого струму.

Для обчислення сили струмів та інших величин у розгалужених електричних колах німецьким фізиком Кірхгофом було обгрунтовано два важливих правила — правила, чи закони Кірхгофа. Засвоєння цих правил, з урахуванням викладеного вище, не становить принципових труднощів. (З ними неодмінно знайомлять на практичних і лабораторних заняттях. Можна рекомендувати також працю [15]).

§ 2.2. Закони Ома та Джоуля—Ленца в диференціальній формі

З'ясовані у § 2.1 закони Ома та Джоуля—Ленца, переписані у так званій диференціальній формі, відіграють дуже важливу роль в теорії електрики, що буде видно з подальшого. Для їхнього встановлення необхідно дещо деталізувати поняття густини струму (див. (1.9)).

У макроскопічній (феноменологічній) електродинаміці, як уже зазначалося, електричний струм з успіхом моделю-

ється на зразок потоку суцільної рідини, і тому обговорена в § 1.3 гідродинамічна інтерпретація понять векторного аналізу адекватна і в задачах теорії електричного струму. Нею й будемо користуватися. З огляду на це провідники електричних кіл можна розглядати як свого роду “канали” змінного перерізу, по яких тече електричний струм. Отже, можна ввести лінії току в провідниках, дотична в кожній точці до яких збігається з вектором дрейфової швидкості \vec{v} носіїв струму¹. Якщо через $\tilde{\rho}$ позначити об’ємну густину електричного заряду (1.14), то, як неважко зрозуміти, вектор густини струму (1.9) можна подати у вигляді

$$\vec{j} = \tilde{\rho} \vec{v}. \quad (2.21)$$

Тоді сила струму I у провіднику буде дорівнювати потоку вектора \vec{j} через площу поперечного перерізу провідника ΔS :

$$I = \int_{(\Delta S)} j_n dS. \quad (2.22)$$

Нехай струм у провіднику викликаний певним джерелом струму, тобто дрейф носіїв заряду відбувається під дією електростатичного поля \vec{E} . (Такий струм називають *струмом провідності*.) Тоді в *однорідному* провіднику напрям вектора \vec{E} є єдиним виділеним напрямом, і тому дрейфова швидкість \vec{v} , а з нею і густина струму \vec{j} (2.21) за напрямом збігаються з напрямом вектора \vec{E} ($\vec{v}; \vec{j} \uparrow \vec{E}$).

Виділимо в тілі провідника елементарний прямий циліндр dV , вісь якого спрямована вздовж лінії току в провіднику (рис. 33). Площу поперечного перерізу циліндрика позначимо через dS , а довжину — через dl . Тоді через переріз dS циліндрика dV тече струм силою

$$\delta I = jdS. \quad (2.23)$$

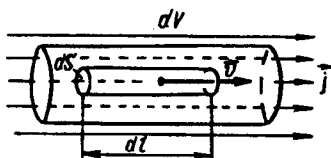


Рис. 33

¹ Нагадаємо, що електричний струм виникає тоді, коли з якихось причин на хаотичний тепловий рух накладається впорядкований дрейф зарядів у певному напрямі; $\tilde{\rho}$ — це густина здатного до впорядкованого руху електричного заряду.

За законом Ома (1.3) і формулою (1.4) цей струм дорівнює¹

$$\delta I = - \frac{d\varphi}{\delta R} = \frac{Edl}{\rho dl/dS} = \sigma EdS. \quad (2.24)$$

Тут введено обернену до питомого опору ρ *провідність*

$$\sigma = 1/\rho. \quad (2.25)$$

Зіставляючи (2.23) і (2.24) з урахуванням умови $\vec{j} \uparrow \uparrow \vec{E}$, дістанемо для *однорідних* провідників

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.26)$$

Це співвідношення й уособлює закон Ома в диференціальній формі (тобто локально, в кожній точці провідника).

Звернемося до підрахунку джоулевої теплоти, яка виділяється в елементарному циліндрику dV . За законом Джоуля—Ленца маємо

$$\delta Q = \rho \frac{dl}{dS} (jdS)^2 = \rho j^2 dV, \quad (2.27)$$

оскільки $dl dS = dV$. Перераховуючи виділену теплоту на одиницю об'єму, дістанемо *питоме тепловиділення*

$$w \equiv \frac{\delta Q}{dV} = \rho j^2 = \frac{j^2}{\sigma}. \quad (2.28)$$

Ця формула уособлює закон Джоуля—Ленца в диференціальній формі.

§ 2.3. Магнітне поле.

Напруженість магнітного поля

Довгий час електричні й магнітні явища вивчалися незалежно одне від одного і про їхній взаємозв'язок в науці не було відомостей, хоч певна аналогія між ними і усвідомлювалася. Насамперед впадав у вічі *дистанційний* характер взаємодії як для заряджених тіл, так і для намагнічених. Існування такої дистанційної взаємодії і привело врешті до концепції про електричні, магнітні та інші фізичні поля.

Незалежний на перших порах розвиток вчення про електричні і магнітні явища зумовив розробку і незалежних методів індикації і вивчення відповідних полів. Сліди незалежного визначення характеристик електричного й магніт-

¹ Знак “мінус” зумовлений тим, що напруга $U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi$.

ного полів даються взнаки й зараз, призводячи нерідко до трохи штучних і ходульних побудов, пов'язаних з трактуванням векторів напруженості \vec{H} , індукції \vec{B} магнітного поля та їхнього взаємозв'язку. Позбутися елементів такої неприємної штучності, на нашу думку, можна шляхом певної *модернізації* реального, історично обумовленого визначення \vec{H} та \vec{B} . Воно, з нашого погляду, і сьогодні є фізично життєздатним.

Розвиток учення про магнетизм починався з вивчення сталих магнітів, а також магнітного поля Землі. Ще тоді було встановлено, що магніти мають два полюси — північний і південний, та що одноіменні полюси відштовхуються, а різноіменні притягуються. Пізніше дослідним шляхом було встановлено й закон взаємодії магнітних полюсів типу закону Кулона (1.1), хоча й менш переконливим чином, оскільки не можна відокремити *північний* полюс від *південного*: розрізаний навпіл магніт (рис. 34) завжди знову має два протилежні полюси.

Прямий магніт за своїми властивостями нагадує електричний диполь (див. § 1.10, рис. 15). У зв'язку з вищезазначеним у науці довгий час панувала концепція про магнітні маси двох типів на зразок позитивних і негативних електричних зарядів¹. Звідси й походить поняття про напруженість магнітного поля \vec{H} як аналога напруженості електричного поля \vec{E} . Проте, оскільки сучасна теорія магнетизму не використовує поняття магнітних мас, то до визначення вектора напруженості магнітного поля у вакуумі \vec{H} підійдемо дещо інакше.

Для первинного тестування *макроскопічних магнітних полів* зручно користуватися магнітними стрілками спеціальної конструкції², насадженими на голку (як стрілка компасу). У магнітному полі така стрілка встановлюється у певному напрямі, визначаючи північним кінцем напрям магнітної силової лінії L у даному місці поля (рис. 35). Цей напрям і береться за *напрямок магнітного поля*.

У магнітному полі на описану стрілку-тестер діє крутильний момент, який викликає її коливання відносно

¹ Історично теорія магнітних диполів передувала теорії електричних і послуговувала прототипом для останніх. Але тепер логічніше діяти в протилежному дусі.

² Така стрілка становить тонкий намагнічений стерженьок фіксованого перерізу (*магнітна спиця*).

напряму магнітного поля. Згадуючи теорію руху твердого тіла навколо нерухомої осі (див. розділ 1) та нехтуючи незначним тертям магнітної стрілки на голці, неважко дістати рівняння механічних коливань стрілки

$$j \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mH\sin\varphi,$$

або для малих коливань, коли $\sin \varphi \approx \varphi$,

$$j \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mH\varphi. \quad (2.29)$$

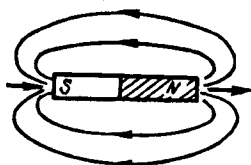


Рис. 34

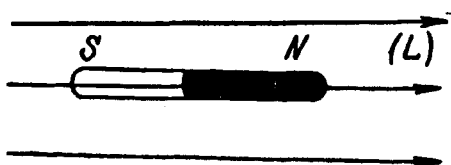


Рис. 35

Тут j — момент інерції стрілки-стержня (який неважко обчислити); m — її магнітний момент; H — величина напруженості магнітного поля у вакуумі (m та H введено за аналогією з електричним дипольним моментом p (1.73) і напруженістю електричного поля E ; складіть відповідне рівняння для електричного диполя й порівняйте з (2.29)).

Переписавши рівняння (2.29) в канонічній формі

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (2.30)$$

впізнаємо в ньому рівняння гармонічних коливань з циклічною частотою

$$\omega = \sqrt{mH/j}. \quad (2.31)$$

Нагадаємо, що циклічна частота пов'язана з частотою коливань ν простою формулою $\omega = 2\pi\nu$, і тому її неважко визначити дослідним шляхом. Проте для визначення двох поки що невідомих величин m та H необхідно мати два співвідношення. Тому треба розробити й виготовити еталонну стрілку-тестер. Обминаючи питання щодо технології його виготовлення, яка тут не істотна, запишемо для частоти еталонної стрілки формулу (2.31) у тому самому місці поля

$$\omega_0 = \sqrt{m_0 H / j}, \quad (2.32)$$

де m можна визначити через m_0 з формули

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{m/m_0}, \quad (2.33)$$

і, підставивши визначений в одиницях m_0 магнітний момент m у (2.31), обчислити H . Отже, можна знайти величину і напрям вектора \vec{H} (див. рис. 35). Описану вище процедуру визначення \vec{H} і візьмемо за основу. Вона не проста, але фізично природна. На базі інших співвідношень може бути встановлено простіший шлях практичного визначення \vec{H} . Проте концептуально описаний вище шлях є логічно досконалим. Власне кажучи, багато фізичних співвідношень встановлюють, запроваджуючи спочатку відносні одиниці виміру, а згодом на базі певних відкритих закономірностей вводять уже ті чи інші системні одиниці (наприклад, в системі СІ). Продемонструємо це нижче на прикладі магнітного поля.

§ 2.4. Магнітна дія електричного струму

У 1820 р. Ерстед виявив, що електричний струм у провіднику чинить орієнтуючу дію на магнітну стрілку. З цього було зроблено висновок, що електричний струм породжує магнітне поле. Почалося вивчення згаданого поля¹.

Експериментальні дослідження були виконані Біо та Саваром, які встановили, що напруженість магнітного поля струму H пропорційна його силі I , залежить від відстані до провідників електричного кола та від їхньої конфігурації. Ясна річ, простої універсальної формули для повної напруженості магнітного поля H існувати не може через обмежену кількість можливих конфігурацій провідників. Виконавши певний математичний аналіз одержаних Біо та Саваром результатів й спираючись на принцип суперпозицій, справедливий, як виявилось, і для магнітного поля, Лаплас вивів формулу для парціальної напруженості $d\vec{H}$ магнітного поля, створюваного елементом провідника $d\vec{l}$ (рис. 36). Ця формула носить назву закон Біо—Савара—Лапласа (БСЛ) і в системі СІ має вигляд

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (2.34)$$

Тут дужки символізують векторний добуток; \vec{r} — радіус-вектор, проведений від елемента провідника $d\vec{l}$ (розглядуваного як вектор з напрямом технічного струму I) до точки спостереження магнітного поля $d\vec{H}$. На рис. 36 пряма

¹ Звичайно, термінологія сучасна.

AA' є продовженням вектора $d\vec{l}$; вектор $d\vec{H}$ лежить у площині, перпендикулярній до прямої AA' і є дотичним до кола з радіусом $O'B$ і з центром на прямій AA' . За модулем вектор dH дорівнює

$$dH = \frac{I dl \sin\alpha}{4\pi r^2} \quad (2.35)$$

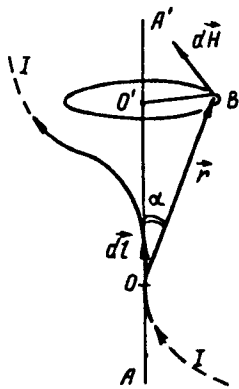


Рис. 36

(кут α показано на рис. 36).

Закон БСЛ у принципі дає змогу обчислити напруженість магнітного поля, створеного провідником будь-якої конфігурації шляхом підсумовування (інтегрування) внесків від усіх його ділянок. (Приклади щодо цього будуть наведені далі).

Повне магнітне поле тонкого провідника із силою струму I , очевидно, має вигляд:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_{(L)} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad (2.34a)$$

(L символізує криву, що її утворює провідник).

Для цікавих наведемо дуже повчальні міркування, які ведуть від прямих експериментальних результатів Біо та Савара до закону (2.34), (2.35). Насамперед зазначимо дослідні факти, яких достатньо для встановлення (2.34).

1. Дослідження магнітного поля безмежного прямого провідника із силою струму I показали, що, по-перше, силові лінії такого поля становлять плоскі концентричні кола з центрами на провіднику, напрям яких разом із напрямом струму підпорядковані правилу правого гвинта (рис. 37); по-друге, за значенням напруженість \vec{H} такого поля прямо пропорційна силі струму в провіднику I і обернено пропорційна відстані R від провідника:

$$H = k I / R. \quad (2.36)$$

(Провідник можна вважати практично безмежним при умові $I \gg R$ (див. рис. 37)).

2. Провідники конфігурацій, зображених на рис. 38, практично не виявляють магнітної дії. Це означає, що парціальні внески окремих ділянок провідника підпоряд-

ковані такому правилу векторного додавання, яке гарантує взаємну компенсацію внесків тих ділянок провідника, які утворюють практично замкнені векторні багатокутники (див. рис. 38 ($d\vec{l}_1 + d\vec{l}_2 + d\vec{l}_3 + d\vec{l}_4 = \vec{0}$)).

Зазначені умови очевидно можуть задовольнити парціальні внески вигляду¹

$$d\vec{H} = kI [d\vec{l}, \vec{r}] f(r) \quad (2.37)$$

лінійні за першою умовою за I , $d\vec{l}$ та \vec{r} і з певною залежністю від r , вираженою якоюсь скалярною функцією $f(r)$, котру належить визначити за допомогою закону (2.36). Для знаходження функції $f(r)$ запишемо результат обчислення за допомогою гіпотетичної поки що формули (2.37) напруженості магнітного поля безмежного прямого провідника й порівняємо вираз із законом (2.36).

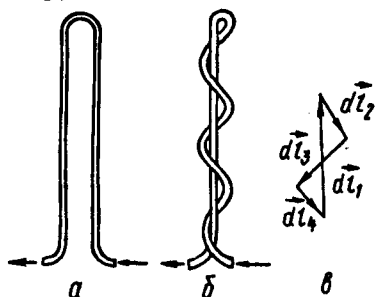


Рис. 38

по дотичній до відповідного плоского кола. Тому довжина $H = |\vec{H}|$ вектора \vec{H} дорівнює алгебраїчній сумі довжин окремих внесків (2.37)

$$H = \int_{(L)} dH = kI \int_{(L)} f(r) r \sin \alpha dl. \quad (2.38)$$

За змінну інтегрування зручно обрати кут α (див. рис. 39). Тоді з точністю до малих вищого порядку матимуть місце співвідношення $dl \sin \alpha = r d\alpha$ і $r = R/\sin \alpha$. Отже,

$$r \sin \alpha dl = (R/\sin \alpha)^2 d\alpha; \quad (2.39)$$

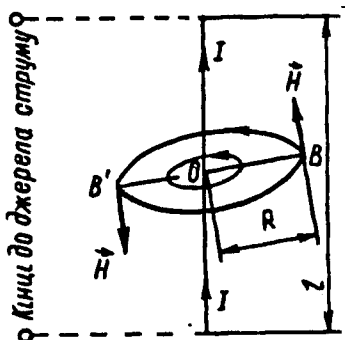


Рис. 37

Парціальні внески (2.37) у шукану напруженість поля прямого провідника (рис. 39) напрямлені усі в один бік —

¹ Це — найпростіший варіант, з якого й слід починати. Досвід довів його справедливність.

для H дістанемо

$$H = 2kI \int_0^{\pi/2} (R/\sin \alpha)^2 f(R/\sin \alpha) d\alpha. \quad (2.40)$$

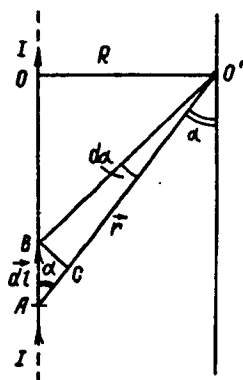


Рис. 39

Для узгодження цього виразу з дослідною формулою (2.36) з очевидністю слід прийняти

$$f(r) = c/r^3 \quad (c = \text{const}). \quad (2.41)$$

Тоді для H матимемо

$$H = \frac{2kcl}{R} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = \frac{2kcl}{R}. \quad (2.42)$$

Очевидно, слід обрати $c = 1/2$. Звідси остаточно для (2.37) знаходимо

$$d\vec{H} = \frac{kI}{2} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (2.43)$$

що за формою збігається із записаним вище законом БСЛ (2.34). Саме в цьому місці й можна перейти від довільно обраних (тобто відносних) одиниць H до системних. У СІ за коефіцієнт k беруть безрозмірну величину $k = 1/2\pi$. Тоді якщо силу струму I виражають в амперах, а відстань r — у метрах, то одиницею H буде ампер на метр (Ам^{-1}). Цей приклад в загальних рисах показує принцип переходу від відносних одиниць виміру до системних, або абсолютних.

Реконструкція диференціального закону БСЛ (2.34) з дослідного інтегрального співвідношення (2.36) — це ще один приклад теоретичного розв'язування так званих обернених задач фізики, одну з яких вже було розглянуто в механіці (див. розділ 1), при відтворенні закону всесвітнього тяжіння Ньютона з законів Кеплера.

§ 2.5. Магнітне поле на осі кругового струму. Природа магнетизму за Ампером

Користуючись законом БСЛ (2.34), обчислимо магнітне поле на осі кругового струму, аналіз якого розкриває глибинну природу магнетизму матеріальних тіл.

Нехай струм силою I тече по плоскому кільцю (с) радіуса R (рис. 40) у напрямі, показаному стрілками. Плоский замкнений контур із струмом називають *магнітним листком*.

Визначимо напруженість магнітного поля на відстані $r = \overline{OA}$ від центра магнітного листка на прямій, нормальній до його площини, яка проходить через центр листка O .

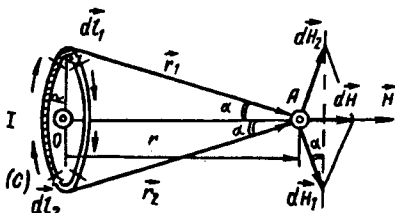


Рис. 40

З міркувань симетрії зручно підсумовувати парціальні внески попарно від діаметрально протилежних відрізків dl_1 і dl_2 кола:

$$d\vec{H} = d\vec{H}_1 + d\vec{H}_2. \quad (2.44)$$

Очевидно, усі $d\vec{H}$ спрямовані вздовж осі \overline{OA} . Так само спрямоване й сумарне поле

$$\vec{H} = \int_{(c)} d\vec{H} \quad (2.45)$$

((c) символізує інтегрування вздовж півкола). Тому для визначення H достатньо знайти суму модулів:

$$H = \int_{(c)} dH, \quad (2.46)$$

в якій $dH = |d\vec{H}| = |d\vec{H}_1 + d\vec{H}_2|$. Як видно з рис. 40,

$$dH = (dH_1 + dH_2) \sin \alpha = (dH_1 + dH_2) \frac{R}{r_1}. \quad (2.47)$$

Але за законом БСЛ

$$dH_1 = \frac{Idl_1}{4\pi r_1^2}, \quad dH_2 = \frac{Idl_2}{4\pi r_2^2}. \quad (2.48)$$

Нарешті ясно, що

$$r_1^2 = r_2^2 = R^2 + r^2 \quad \text{і} \quad dl_1 = dl_2 = R d\varphi, \quad (2.49)$$

($d\varphi$ — кут, під яким з центра листка видно дуги dl_1, dl_2 ($0 \leq \varphi \leq \pi$)). Зваживши на (2.49), (2.48), (2.47), за (2.46) знаходимо

$$H = \frac{I}{2\pi} \frac{S}{\{R^2 + r^2\}^{3/2}}, \quad (2.50)$$

де $S = \pi^2 R$ — площа магнітного листка.

За умови $R \ll r$ формула (2.50) переходить у

$$H = \frac{IS}{2\pi r^3}. \quad (2.51)$$

Порівнюючи (2.51) з (1.78) і зіставляючи величини $p_e = ql$ (див. (1.73)) і

$$p_m = IS, \quad (2.52)$$

вбачаємо *формальну* тотожність електричного поля диполя

$$E = \frac{p_m}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{див. (1.78)}) \quad \text{і} \quad \text{поля магнітного листка} \quad H = \frac{p_m}{2\pi r^3} \quad (\text{див. (2.51)}):$$

обидва вони спадають з відстанню як r^3 . Величину p_m називають *магнітним моментом листка*. (Більш детальний аналіз відповідних полів підтверджує щойно зазначену формальну тотожність).

На підставі щойно описаного Ампер розкрив природу магнетизму матеріальних тіл. За Ампером, він зумовлений *замкненими мікрострумами*, що існують в речовині. Цей блискучий здогад Ампера був підтверджений і доповнений подальшим розвитком науки, починаючи з відкриття будови атомів і молекул. Трактування Ампера одразу роз'яснило, чому не можна відділити південну й північну магнітну маси: магнітних мас і диполів просто не існує. Роль елементарних мікромагнітиків відіграють кругові мікроструми; магнітне поле породжується рухомими електричними зарядами. Квантова фізика розширила й поглибила вчення про магнетизм речовини, але про це тут рано говорити.

Подібно до того, як електростатичне поле можна описувати не лише напруженістю $\vec{E}(\vec{r})$ (див. (1.16)), а й потенціалом $\phi(\vec{r})$ (1.57), магнітостатичне поле $\vec{H}(\vec{r})$ (2.34a) може описуватись ще так званим вектор-потенціалом $\vec{A}(\vec{r})$ (див. дод. 5). Більше того, в загальному випадку не статичних, а змінних у часі полів вектор-потенціал входить до складу навіть електричного поля (див. дод. 5).

§ 2.6. Дія магнітного поля на струм. Вектор індукції магнітного поля

Електричний струм не тільки продовжує магнітне поле, а й відчуває дію магнітного поля на собі. У цьому один з проявів не просто дії, а *взаємодії* різних видів рухомої мате-

рії між собою. Вперше на якісному рівні дію магнітного поля на рухомі заряди спостерігали В. В. Петров, а трохи згодом і незалежно від нього Г. Деві. Вони виявили відхилення дуги Петрова (або вольтової дуги) під дією сильних магнітних полів. Проте такі досліди не встановлювали якихось кількісних співвідношень.

Вивчити дію магнітного поля на струм на кількісному рівні вдалося на прикладі струмоносних провідників. Зробив це знову Ампер. Щоправда, сучасна версія закону Ампера зовсім не та¹. Та в поєднанні із законом БСЛ (2.34) вона йому еквівалентна. Сьогодні законом Ампера називають співвідношення, яке визначає силу, з якою діє на елемент $d\vec{l}$ провідника із струмом задане магнітне поле. Розглянемо цей закон.

За законом Ампера на елемент струму $I d\vec{l}$ (рис. 41) в магнітному полі діє сила $d\vec{F}$, пропорційна силі струму I , довжині цього елемента $dl = |d\vec{l}|$ та синусу кута α між напрямом магнітного поля (визначеного вектором його напруженості \vec{H}) і напрямом струму² I :

$$dF = B dl I \sin \alpha. \quad (2.53)$$

Коефіцієнт пропорційності B не залежить ні від матеріалу провідника, ні від жодного з параметрів I , dl , α , а лише від магнітного поля. Напрямок сили Ампера (2.53) визначається за правилом лівої руки: якщо розташувати ліву руку так, щоб магнітні силові лінії входили в її долоню, витягнуті пальці вказували напрям струму, то відставлений великий палець укаже напрям сили Ампера $d\vec{F}$. Об'єднати формулу (2.53) з правилом лівої руки можна, надавши коефіцієнту B зміст вектора, напрям якого збігається з напрямом \vec{H} (мова йде про поле у вакуумі, а практично й у повітрі). У такому разі закон Ампера можна подати у компактній формі:

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (2.54)$$

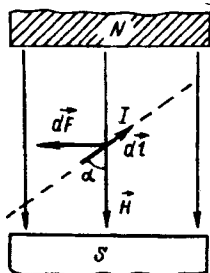


Рис. 41

¹ Ампер визначив закон взаємодії елементарних ділянок $d\vec{l}$ і $d\vec{l}'$ струмоносних провідників. Це досить складний за формою закон [37].

² Нагадаємо, що елементові провідника $d\vec{l}$ як вектору приписують напрям, в якому за технічною умовою тече струм.

(Рекомендуємо перевірити на правило лівої руки). Не будемо зупинятися тут на тому, як реально поставити експеримент для встановлення описаного закону. Така можливість існує й не становить великих труднощів. Вкажемо лише на те, що у вигляді (2.54) закон Ампера відповідає СІ. Завдяки цьому законові з'являється можливість вивчати (зондувати) магнітне поле не лише за допомогою магнітних стрілок (див. § 2.3), а й за допомогою струмоносних провідників¹, спираючись на (2.53). Оскільки при цьому вектор \vec{B} визначається лише магнітним полем, то й сам може його визначити. Порівняння вектора \vec{B} з вектором \vec{H} вказує на їхню взаємну пропорційність у вакуумі

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (2.55)$$

Стала μ_0 має назву *магнітної сталої*; в СІ вона визначається за формулою

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}. \quad (2.56)$$

Вектор \vec{B} дістав назву *вектора магнітної індукції*.

Отже, двома різними векторами можна характеризувати не тільки електричне поле (\vec{E} та \vec{D}), а й магнітне (\vec{H} і \vec{B}).

Про зв'язок між \vec{H} та \vec{B} в речовині див. [15, 32, 36].

Підводячи певний підсумок, слід зазначити, що вихідні поняття й концепції вчення про магнетизм та його зв'язок з електрикою вироблялися дуже поступово й непрямолінійно. Це є наслідком багатогранності й складності електричних і магнітних процесів, сутність яких зовсім не лежить на поверхні явищ. З цією обставиною ми ще не раз зустрінемося протягом сходження до рівнянь Максвелла.

§ 2.7. Теорема повного струму

Важливою ланкою на шляху до рівнянь Максвелла є на перший погляд дещо формальна теорема повного струму, до розгляду якої переходимо.

Теорема. Циркуляція вектора напруженості магнітного поля \vec{H} вздовж довільного замкненого контура (L) дорів-

¹ Для точного вимірювання тих чи інших фізичних величин користуються частіше не вихідними, а зручними похідними закономірностями.

ное алгебраїчній сумі струмів, охоплених контуром (L) (рис. 42, а)

$$\oint_{(L)} H_l dl = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (2.57)$$

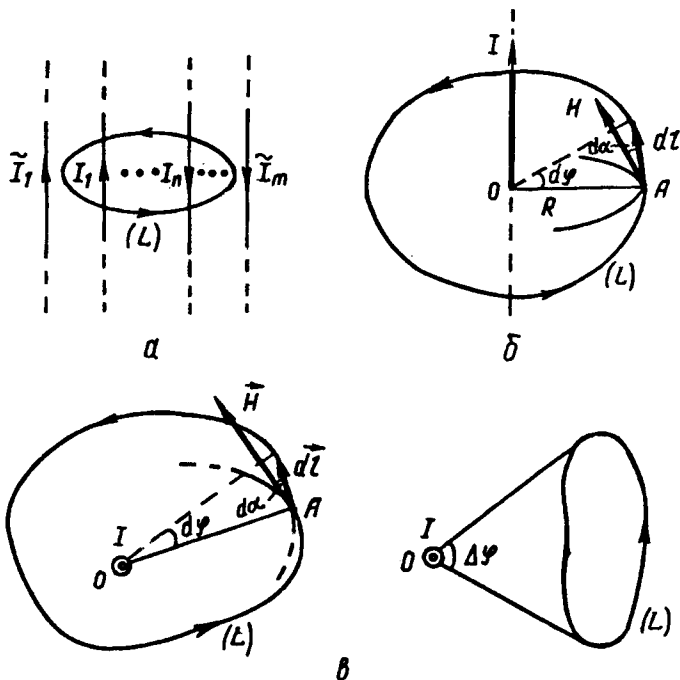


Рис. 42

Струми $\{I_i\}_1^n$, що за напрямом утворюють правий гвинт з напрямом обходу контура (L) , слід вважати додатними ($I_i > 0$), а ті, що утворюють лівий гвинт, — від'ємними ($I_i < 0$). Струми, що не охоплюються контуром (L) , на циркуляцію $\oint_{(L)} H_l dl$ не впливають. Останнє твердження особливо важливе.

Доведення теореми побудуємо, спираючись на (2.36), тобто на формулу для магнітного поля безмежного прямого струму. Більш загальне доведення математично складне. Його можна знайти, наприклад, у праці [18].

Розглянемо елементарний внесок в циркуляцію вектора \vec{H} (2.36) (рис. 42, б, в) ($OA = R$; $\alpha = dl, \vec{H}$) в околі точки A

$$H_l dl = H dl \cos \alpha = \frac{|I| dl}{2\pi R} \cos \alpha \quad (2.58)$$

(тут $k = 1/2\pi$, що відповідає системі СІ). Як видно з рисунка, $dS = \pm dl \cos \alpha$ — елемент дуги кола радіуса R в площині, нормальній до напрямку струму. Знак “плюс” слід обирати, коли кут α гострий; знак “мінус” — тупий. Елементарну дугу ds видно з точки O під кутом

$$d\varphi = \frac{ds}{R} = \pm \frac{dl \cos \alpha}{R}.$$

Отже, для $H_l dl$ можна записати

$$H_l dl = \pm \frac{|I|}{2\pi} d\varphi = \frac{I}{2\pi} d\varphi. \quad (2.59)$$

Звідси для контура, що охоплює струм (лівий вид згори на рис. 42, в),

$$\oint_{(L)} H_l dl = I, \quad (2.60)$$

а для контура, що не охоплює струм (правий вид згори на рис. 42, в),

$$\oint_{(L)} H_l dl = I(\Delta\varphi - \Delta\varphi) = 0. \quad (2.60a)$$

Для кількох провідників зі струмом за принципом суперпозицій для магнітних полів з (2.60a) впливає (2.57), що й треба було довести.

Глава 3

КВАЗІСТАЦІОНАРНІ СТРУМИ ТА ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ПОЛЯ

§ 3.1. Закон електромагнітної Індукції Фарадея

Сповідуючи ідею не просто про зв'язок, а про *взаємозв'язок* явищ природи, один із засновників сучасної електродинаміки Фарадей свідомо й цілеспрямовано шукав явище, обернене до встановленого Ерстедом, Біо, Саваром, Лапласом. Провідну ідею тут можна сформулювати таким чином: “Якщо електричний струм породжує магнітне поле, то й, навпаки, магнітне поле повинно породжувати елек-

тричний струм". Постає питання, при яких умовах це може мати місце. Основна складність проблеми, як виявилось, полягала у розв'язанні саме цього питання. Виявивши неабияку наполегливість та винахідливість (пошуки продовжувалися понад десять років), Фарадей встановив умови, за яких магнітне поле породжує струм¹. Проте не володіючи в достатній мірі математикою, Фарадей не знайшов компактного й єдиного підходу до математичного формулювання численних варіантів прояву відкритої ним електромагнітної індукції. Це пізніше було зроблено Максвеллом і з ентузіазмом підтримано Фарадеем.

У загальному вигляді закон електромагнітної індукції Фарадея—Максвелла виглядає таким чином:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.1)$$

де \mathcal{E} — ЕРС, що виникає в замкненому електропровідному контурі (L) (рис. 43) під дією змінного магнітного поля; Φ — потік вектора магнітної індукції \vec{B} через поверхню, подумки натягнену, як на п'яльця, на контур (L). Отже, ЕРС \mathcal{E} визначається швидкістю зміни $d\Phi/dt$ потоку Φ . Знак “-” відображає правило Ленца [36], яке неявно міститься в детальнішому поясненні правил обчислення величин, що входять до закону (3.1). Розглянемо ці правила.

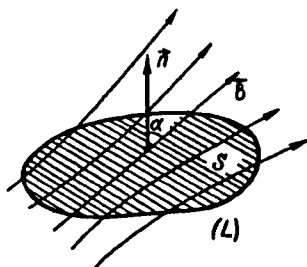


Рис. 43

На контурі (L) фіксують певний напрям обходу (на рис. 43 показано стрілками), який визначають як додатний. Нормалі до натягненої на контур (L) поверхні (S), які фігурують у формулі для потоку

$$\Phi = \int_{(S)} B_n dS, \quad (3.2)$$

орієнтують так, щоб з їхнього кінця додатний обхід по контуру (L) виглядав би як такий, що відбувається проти годинникової стрілки. Додатною вважається ЕРС \mathcal{E} , коли вона викликає струм у додатному напрямі контура (L). Ця

¹ Нагадуємо, що ми користуємося сучасною термінологією, оскільки за часів Фарадея не існувало ще реальних уявлень про електромагнітні поля.

дещо задовга, але точна й повна інтерпретація закону (3.2) була здобута працями попередніх поколінь вчених. →

Як видно з (3.2), лише змінний потік Φ вектора \vec{B} через поверхню (S), охоплену контуром (L), породжує ЕРС \mathcal{E} , викликаючи струм у контурі. Саме в констатації цього факту полягає основний зміст і основне досягнення відкриттів Фарадея, який не мав ще чутливої апаратури. Після відкриття закону електромагнітної індукції (3.1) стало остаточно зрозумілим, що лише *статичні* електричні та магнітні явища виявляють себе окремо одне від одного. Приведені ж у рух електричні заряди (зокрема, електричний струм) породжують не тільки електричне, а й магнітне поле, тобто електромагнітне поле, й відчують на собі дію магнітного поля. Звичайно, теза про те, що саме рухома електрика породжує комбіноване (електромагнітне) поле, потребувала прямої перевірки. Таку перевірку здійснив Роуланд. Про ідею й наслідки його дослідів можна прочитати, наприклад, у працях [15, 32].

Перехід від вивчення законів статичних електричних і магнітних полів та сталого електричного струму до змінних полів і струмів спричинив істотний перегляд ряду закономірностей, про що мова попереду. Такий перегляд, звичайно, відбувався лише під тиском нових фактів і не одразу в усіх напрямках. Зокрема, теорія не дуже швидкозмінних електричних струмів, так званих *квазістаціонарних* струмів (уточнення робитимемо по ходу викладу), з успіхом спирається на набір понять і законів, строго встановлених для сталих струмів і статичних полів. Тому розгортання теорії явищ, породжуваних електромагнітною індукцією Фарадея, перемешатимемо з аналізом необхідних статичних закономірностей, надаючи їм відповідні форми.

§ 3.2. Самоіндукція. Індуктивність провідників

За законом БСЛі кожен провідник із струмом породжує магнітне поле. Якщо струм у колі змінний, то змінним буде й породжуване ним магнітне поле. Отже, поверхню (S), охоплену електропровідним контуром (L) із змінним струмом, пронизуватиме змінний потік *власного* магнітного поля, який за законом Фарадея (3.1) викличе додаткову до зовнішньої \mathcal{E}_0 ЕРС \mathcal{E}_{si} , а з нею й додатковий струм I_{si} , які дістали назву *ЕРС і струму самоіндукції* (si — self induction).

Отже, у колі змінного струму (рис. 44) діятимуть дві ЕРС — від зовнішнього джерела \mathcal{E}_0 та ЕРС самоіндукції \mathcal{E}_{si} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{si}. \quad (3.3)$$

З досвіду і з теорії (див. нижче) випливає, що потік вектора магнітної індукції \vec{B} власного магнітного поля струму через площадку, охоплену стру-

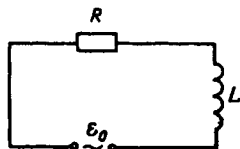


Рис. 44

моносним контуром, є пропорційним силі струму в контурі

$$\Phi_{si} = LI. \quad (3.4)$$

Коефіцієнт L дістав назву індуктивності контура¹. Якщо контур сконструйовано так, що він є механічно жорстким і сили Ампера (2.54) не можуть його деформувати, індуктивність контура L буде сталою і тому для ЕРС самоіндукції за (3.1), (3.4) матимемо

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.5)$$

Розглянемо теоретичні обчислення, які підтверджують формулу (3.4). Із закону БСЛ (2.34) та визначення потоку (3.2) випливає, що

$$\Phi_{si} = \int_{(S)} B_n dS = \frac{I}{4\pi} \int_{(S)} \left\{ \oint_{(L)} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \right\}_n dS. \quad (3.6)$$

Ввівши позначення

$$L \equiv \frac{I}{4\pi} \int_{(S)} \left\{ \oint_{(L)} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \right\}_n dS, \quad (3.7)$$

впізнаємо в (3.6) формулу (3.4).

Усі елементи електричного кола мають омичний опір R і певну індуктивність L . Але кожен із названих параметрів може на певних ділянках кола відігравати домінуючу роль. На схемах такі ділянки умовно зображають окремо, розуміючи під R та L повний опір та індуктивність кола.

¹ Тут йдеться про квазістаціонарні струми, коли силу струму I в усіх перерізах провідників електричного кола можна вважати однаковою в кожен момент часу.

§ 3.3. Екстраструми; енергія струму та магнітного поля

Розглянемо процеси, які відбуваються в електричних колах (рис. 45) в результаті їхнього вмикання (рис. 45, а ($R = R_0 + r$)) або розмикання (рис. 45, б ($R = R_1 + R_2$)). Виявляється, що внаслідок наявності в таких колах значної індуктивності L струм в них після вмикання не одразу досягає величини, передбаченої законом Ома (2.20), і після вимикання не зникає одразу. Існує певний час релаксації τ , протягом якого зростає (від нуля до омичного (2.20) струму) *струм вмикання* й спадає (від омичного до нуля) *струм розмикання*. Додаткові (до омичного) струми дістали назву *екстраструмів*.

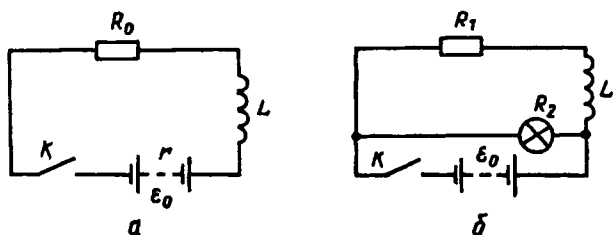


Рис. 45

Спираючись на закон електромагнітної індукції Фарадея (3.1), (3.5), доведемо, що після вмикання кола (див. рис. 45, а) струм у ньому під час релаксації зростає за законом

$$I(t) = I_0 \{1 - e^{-\beta t}\}, \quad (3.8)$$

а після розмикання кола (див. рис. 45, б) струм у ньому спадає за законом

$$I(t) = I_0 e^{-\beta t}. \quad (3.9)$$

У формулі (3.8) $I_0 = \varepsilon_0 / R$ — чисто омичний струм у колі (а), а в (3.9) I_0 — початкове (на момент розмикання $t = 0$) значення сили струму у колі (б); $\beta = R/L$ — обернений час релаксації τ ($\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{L}{R}$) екстраструмів. Перш ніж доводити (3.8), (3.9), проаналізуємо їх. Почнемо зі струму розмикання. Графік його зображено на рис. 46, б. Сила струму розмикання $I(t)$ спадає за експоненціальним законом до нуля. Через час

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{L}{R}, \quad (3.10)$$

який називають часом релаксації, сила струму $I(t)$ зменшиться у e разів, а при $t \gg \tau$ ним практично можна буде знехтувати. (За період $t = 2\tau$ сила струму спадає майже у дев'ять разів.)

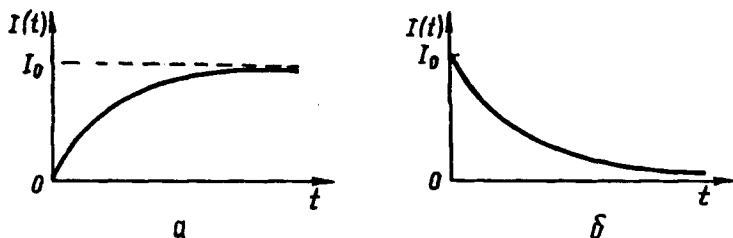


Рис. 46

Сила струму вмикання, навпаки, на першому етапі з часом релаксації τ (3.10) зростає (рис. 46, а) і врешті виходить на своє, чисто омичне значення

$$I(t) \approx I_0 = \mathcal{E}_0 / R \quad (t \gg \tau). \quad (3.11)$$

Як видно з (3.10), час релаксації τ зростає із зростанням індуктивності L і спадає із зростанням омичного опору R , що фізично зрозуміло. (Рекомендуємо розміркувати).

Доведемо закони (3.8), (3.9).

Ввімкнувши коло (див. рис. 45, а), приводимо у рух носії заряду в провідниках, тобто викликаємо струм. Внаслідок інерційності носіїв струму на початку процесу сила струму зростає, починаючи з нуля, і, отже, струм є змінним. Змінний струм породжує ЕРС самоіндукції \mathcal{E}_{si} , яка діє в колі разом із ЕРС джерела струму \mathcal{E}_0

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{si} = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt}. \quad (3.12)$$

За законом Ома для повного кола (2.20), який за досвідом залишається справедливим і для квазістаціонарних струмів, маємо

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (3.13)$$

Отже, для визначення сили струму I в колі (див. рис. 45, а) дістали диференціальне рівняння (3.13). Надавши йому канонічної форми

$$\frac{dI}{dt} + \beta I = I_0 \quad (\beta = R/L; \quad I_0 = \mathcal{E}_0/R) \quad (3.14)$$

і доповнивши початковою умовою

$$I(0) = 0, \quad (3.15)$$

бачимо, що сила струму $I(t)$ визначається двома параметрами I_0 ; β . Прямою перевіркою можна переконатися, що співвідношення (3.8) є розв'язком так званої граничної задачі: сукупності рівняння (3.14) та початкової умови (3.15).

Ще простіше доводиться (3.9). Після вимкнення розгалуженого кола (див. рис. 45, б) від джерела струму \mathcal{E}_0 (тобто після розмикання вимикача K), струм, спадаючи, породжує ЕРС самоіндукції \mathcal{E}_{si} (3.5), яка тепер діє лише в замкненій частині кола. Отже, за законом Ома матимемо

$$-L \frac{dI}{dt} = RI. \quad (3.16)$$

Надавши рівнянню (3.16) канонічної форми

$$\frac{dI}{dt} + \beta I = 0 \quad (\beta = R/L) \quad (3.17)$$

і доповнивши його початковою умовою

$$I(0) = I_0, \quad (3.18)$$

прямою перевіркою можна переконатися, що співвідношення (3.9) є розв'язком граничної задачі (3.17), (3.18).

Формули (3.8), (3.9) доведено.

У прикладах (3.8), (3.9) виразно виступає правило Ленца, за яким індуктивний струм протидіє чинникам, що його породжують: протидіє наростанню сили струму при вмиканні кола та його спаду при розмиканні, сповільнюючи ці процеси. (Рекомендуємо простежити за тим, що правило Ленца формально забезпечується саме законом "мінус" у формулі (3.5)).

Як впливає з § 2.1, поповнення енергетичних (джоулевих) витрат сталого струму відбувається за рахунок роботи сторонніх сил, що діють у межах джерел струму. (Під *сторонніми* слід розуміти будь-які сили *не електростатичного* походження. Оскільки електростатичні носять потенціальний характер, то їхня робота вздовж замкненого кола дорівнює нулю). Постає питання, за рахунок яких енергетичних джерел виникають, скажімо, електроструми? Аналізуючи фізичне походження низки співвідношень (3.5), (3.1), (3.2), приходимо до висновку, що такі струми вини-

кають за рахунок енергії магнітного походження. Підрахуємо кількість енергії, необхідної для підтримання струму розмикання (3.9). На підставі формули для потужності струму (2.18а) можемо обчислити повну роботу, яку виконує струм розмикання (3.9):

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} \tilde{N}(t) dt = \int_0^{\infty} \varepsilon_{si} Idt = -L \int_0^{\infty} I \frac{dI}{dt} dt = \\ &= - \int_{I_0}^0 LI dI = \frac{LI_0^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

де I_0 — початкове значення сили струму розмикання. Вираз (3.9) має подвійне фізичне трактування. З одного боку, спадаючи від значення I_0 до нуля, екстраструм розмикання виконує роботу A . Отже, в струмоносному провіднику з індуктивністю L , по якому тече струм силою I , накопичена енергія

$$W_L = LI^2/2, \quad (3.20)$$

(індекс “0” опущено, оскільки стежити за процесом можна не з початку, а з довільного моменту часу t). З іншого боку, першоджерелом цієї енергії є магнітне поле, спад якого за законом Фарадея (3.5) точно скорельовано зі спадом струму самоіндукції. Але тоді за законом збереження й перетворення енергії така сама кількість енергії (3.20) була сконцентрована у власному магнітному полі струму самоіндукції. Отже, формула (3.20) визначає й енергію, накопичену в магнітному полі. Обидва трактування виразу (3.20) тотожні й стануть нам у нагоді.

§ 3.4. Коливальний RLC -контур. Вільні коливання в контурі¹

Якісний аналіз процесів, які відбуваються в коливальному, або RLC -контурі (рис. 47), відомі з елементарного курсу. Це електричні коливання, які загасають внаслідок переходу електричної енергії у джоулеву теплоту на активному опорі R . Вони в точності аналогічні вільним механічним коливанням під дією пружних (або квазіпружних) сил у в'язкому середовищі (Див. розділ 1). Тому фактично зали-

¹ § 3.4 і 3.5 не мають прямого зв'язку з ідеями, що ведуть до рівнянь Максвелла, але надто важливі самі по собі.

щастя встановити відповідні рівняння і порівняти їх з рівняннями механічних коливань.

До рівнянь, що описують коливання в RLC -контурі, корисно підійти на підставі фундаментального закону збереження й перетворення енергії.

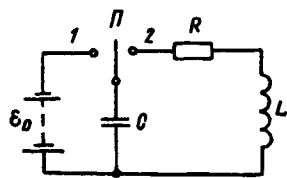


Рис. 47

Замкнувши перемикач Π (див. рис. 47) на клему 1, заряджаємо конденсатор C . Перевівши Π в положення 2, даємо можливість конденсатору C розряджатися через активний (омічний) опір R і котушку індуктивності L , запустивши тим самим процес електричних коливань, які загасають. Цей процес відбу-

вається, як відомо, за рахунок періодичного перетворення енергії W_C зарядженого конденсатора C на енергію електричного струму W_L (3.20) і навпаки; він загасає через втрати на джоулеве нагрівання провідника R .

Отже, енергетичний баланс в RLC -контурі за час dt можна записати у вигляді

$$-dW = RI^2 dt, \quad (3.21)$$

де $-dW$ — зменшення повної електричної енергії струмонесучого RLC -контура

$$W = W_C + W_L \quad (3.22)$$

за час dt , а праворуч у рівності (3.21) — джоулеві теплові втрати (3.14) за той же час. Користуючись співвідношенням (3.20), а також формулою для енергії зарядженого до заряду q конденсатора

$$W_C = q^2 / 2C \quad (3.23)$$

(яку буде встановлено наприкінці параграфа), за допомогою енергетичного балансу (3.21) дістанемо рівняння

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + LI \frac{dI}{dt} + RI^2 = 0. \quad (3.24)$$

Але неважко зрозуміти, що швидкість зменшення заряду q на обкладках конденсатора дорівнює силі струму I у колі

$$-\frac{dq}{dt} = I. \quad (3.25)$$

З урахуванням (3.25) рівняння (3.24) можна перетворити на

$$-\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} + RI = 0. \quad (3.26)$$

Сукупність рівнянь (3.26), (3.25) утворює систему рівнянь для визначення заряду конденсатора q і сили струму I у контурі як функцій часу t . Неважко, проте, і розділити змінні q та I . Справді, враховуючи (3.25), можна (3.26) надати вигляду

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad (3.27)$$

тобто дістати рівняння коливань, що загасають (див. розділ 1), для заряду q на обкладинках конденсатора. Домножуючи (3.27) почленно на $1/C$, можна перетворити його на таке саме рівняння для напруги U_C між обкладинками ємності C вигляду

$$U_C = q/C. \quad (3.28)$$

Продиференціювавши (3.26) за часом та знову врахувавши (3.25), приходимо до рівняння відносно I

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (3.29)$$

За формою воно точно збігається з рівнянням коливань, що загасають (3.27).

Розділивши почленно (3.27) та (3.29) на L і замінивши I та q на y , дістаємо канонічну форму рівнянь

$$\ddot{y} + 2\beta \dot{y} + \omega_0 y = 0, \quad (3.30)$$

де похідні за часом традиційно позначено крапками згори та запроваджено нові константи

$$\beta \equiv R/2L; \quad \omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}. \quad (3.31)$$

Розв'язки рівнянь типу (3.30) отримано й обговорено в розділі 1. За умови $\omega_0 > \beta$, що є найбільш цікавою, вони справді мають вигляд коливань, що загасають з часом релаксації $\tau = 1/\beta = 2L/R$

$$y(t) = G e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.32)$$

де G , φ_0 — початкові амплітуди й фаза коливань, що визначаються з початкових умов $\{y(0) = y_0; \dot{y}(0) = v_0\}$; циклічна частота ω дорівнює

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (3.33)$$

Як бачимо, коливання в RLC -контурі описуються рівняннями типу (3.30), тотожними рівнянню механічних коливань (див. розділ 1), при наступному зіставленні елек-

тричних і механічних параметрів: $L \sim m$; $1/C \sim k$; $R \sim \gamma$ (див. розділ 1) з відповідними висновками (L — інерційність струму, $1/C$ — аналог пружності; R — аналог коефіцієнта в'язкого тертя).

Варта уваги також та обставина, що з огляду на (3.5) та (3.28) виразу (3.26) можна надати форми

$$U_c + \varepsilon_{si} = RI. \quad (3.34)$$

Ця формула становить узагальнення другого правила Кірхгофа на випадок квазістаціонарних струмів у колах, що містять ємність. Вона, як бачимо, є строгим наслідком фундаментального закону збереження й перетворення енергії (3.21), а не окремим постулатом.

На закінчення обгрунтуємо формулу (3.23).

Енергія зарядженого конденсатора — це потенціальна енергія заряду на його обкладинках, яка не залежить від способу зарядки конденсатора. Тому зарядку можна мислити як розділення зарядів шляхом “вищипування” їх з однієї обкладинки й перенесення на іншу. Нехай заряд q' вже перенесено; тоді між обкладинками виникає напруга (1.84) $U'_C = q'/C$. Отже, для перенесення чергової порції заряду dq' через зазор конденсатора слід виконати певну роботу

$$\delta A = U'_C dq' = \frac{q'}{C} dq'. \quad (3.35)$$

Інтегруючи (1.26) по заряду від 0 до q , дістанемо шукану енергію зарядженого конденсатора W_C (3.23). У § 4.9 енергію W_C (3.23) буде перетлумачено як енергію електричного поля.

§ 3.5. Вимушені коливання; резонанси струмів і напруг

Важливу роль у теорії й практиці відіграють вимушені коливання в RLC -контурі та пов'язані з ними явища резонансу струмів і резонансу напруг (у механіці поділ на резонанси двох типів не розглядався як нецікавий). Вимушені коливання відбуваються, наприклад, у контурі, в якому послідовно з опором R , індуктивністю L і ємністю C ввімкнено ще змінну зовнішню напругу періодичного характеру (рис. 48).

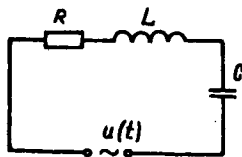


Рис. 48

Для складання рівняння вимушених коливань знов вдаємося до фундаментального закону збереження й перетворення енергії. При стабільно діючій зовнішній напрузі $u(t)$ в RLC -контурі виникає електричний струм $I(t)$. При цьому ззовні до контура за час dt надходить енергія в кількості

$$dW = u(t) I(t) dt. \quad (3.36)$$

Ця енергія йде на зарядку конденсатора dW_C , на подолання індуктивної інерційності dW_L (згадайте електромеханічну відповідність $L \sim m$) та на джоулеві теплові витрати $I^2 R dt$. Отже, енергетичний баланс має вигляд

$$dW_C + dW_L + I^2 R dt = dW. \quad (3.37)$$

Звідси з огляду на (3.36), (3.23), (3.20) дістаємо рівняння

$$(q/C) \dot{q} + LI\dot{I} + RI^2 = uI, \quad (3.38)$$

якому після врахування (3.25) можна надати вигляду

$$-q/C + LI\dot{I} + RI = u. \quad (3.39)$$

Насамперед зазначимо, що (3.39) становить ще одне узагальнення другого правила Кірхгофа на квазістаціонарні струми в колах типу, показано на рис. 48 [див. (3.28), (3.5)]

$$u + U_C + \mathcal{E}_{si} = IR, \quad (3.40)$$

яке, як бачимо, строго випливає з фундаментального закону збереження й перетворення енергії (3.37), а не просто постулюється.

Повторюючи майже буквально міркування попереднього параграфа, з урахуванням (3.28) з (3.39) дістанемо два рівняння

$$\begin{cases} \ddot{U}_C + 2\beta \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = -\omega_0^2 u; \\ \ddot{I} + 2\beta \dot{I} + \omega_0^2 I = \frac{1}{L} \dot{u}. \end{cases} \quad (3.41)$$

Перше з них визначає напругу U_C між обкладинками конденсатора C ; друге — струм I у RLC -контурі як функції часу. Отже, при наявності зовнішньої напруги ($u(t) \neq 0$) рівняння для U_C і I схожі, але не тотожні. Це призведе, як побачимо, до різних резонансних частот для U_C та I .

Нехай періодична зовнішня напруга $u(t)$ має вигляд

$$u(t) = u_0 \cos \Omega t, \quad (3.42)$$

де u_0 — амплітуда, а Ω — циклічна частота коливань поданої до контуру напруги. Тоді, очевидно,

$$\dot{u}(t) = -\Omega u_0 \sin \Omega t. \quad (3.43)$$

(Ті, хто не бажає робити обчислень, можуть одразу звернутися до формул (3.50)—(3.57)).

Повторення матеріалу про механічні вимушені коливання (див. розділ 1) дає можливість без великих зусиль збагнути, що можна одночасно дістати розв'язок обох рівнянь (3.41), ввівши комплексну функцію $z(t)$ вигляду

$$z(t) = -\left\{ \frac{1}{\omega_0^2} U_C(t) + i \frac{L}{\Omega} I(t) \right\} \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (3.44)$$

Для $z(t)$ за допомогою (3.41) маємо

$$\ddot{z} + 2\beta \dot{z} + \omega_0^2 z = u_0 e^{i\Omega t}. \quad (3.45)$$

Тут введено комплексну експоненту

$$e^{i\Omega t} \equiv \cos \Omega t + i \sin \Omega t. \quad (3.46)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.45) складається з двох доданків: загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (яке отримується з (3.45) при $u_0 = 0$) та окремого розв'язку рівняння (3.45) (див. розділ 1). Але загальний розв'язок однорідного рівняння описує перехідний процес типу (3.32), що загасає з часом релаксації $\tau = 2L/R$. Ним за умови $t \gg \tau$ можна знехтувати. *Стабільний* же окремий розв'язок можна дістати таким самим чином, як це робилося в механіці. Він має вигляд

$$z(t) = z_0 e^{i\Omega t}, \quad (3.47)$$

де комплексна амплітуда z_0 визначається за формулою

$$z_0 = u_0 \left\{ \omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega \right\}^{-1}. \quad (3.48)$$

Як і в механіці, звідси маємо

$$z(t) = \frac{u_0}{\rho} e^{i(\Omega t - \varphi_0)}. \quad (3.49)$$

Тут початкова фаза — φ_0 визначається за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad (3.50)$$

а резонансний знаменник ρ — за формулою

$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}. \quad (3.51)$$

Залишилося розділити уявну й дійсну частини розв'язку $z(t)$, й вирази для шуканих U_C та I (3.44) буде знайдено. Прості обчислення дають

$$\begin{cases} U_C(t) = -\omega_0^2 \operatorname{Re} z(t) = -\frac{u_0 \omega_0^2}{\rho} \cos(\Omega t - \varphi_0); & (3.52) \\ I(t) = -\frac{\Omega}{L} \operatorname{Im} z(t) = -\frac{u_0 \Omega}{\rho} \sin(\Omega t - \varphi_0). & (3.52a) \end{cases}$$

Фактори, що визначають резонансну частоту $\Omega_{\text{рез}}$ для напруги U_C і сили струму I , як бачимо, різні. Для напруги умовою резонансу, очевидно, буде мінімум знаменника ρ , а для сили струму I — мінімум величини ρ/Ω . Перший мінімум було знайдено в розділі 1. Він відповідає частоті

$$\Omega_{\text{рез}}^U = \{\omega_0^2 - 2\beta^2\}^{1/2}. \quad (3.53)$$

Цим визначено так звану *резонансну частоту напруг*. Що ж до *резонансної частоти струмів* I , то вона визначається з умови мінімуму за частотою Ω величини

$$\rho/\Omega = \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega}\right)^2 + 4\beta^2} \quad (3.54)$$

Оскільки обидва підкорінні доданки у цьому виразі позитивні, умовою мінімуму з очевидністю буде $\omega_0^2 - \Omega_{\text{рез}}^2 = 0$. Отже, резонансна частота струмів збігається з власною частотою контура

$$\Omega_{\text{рез}}^I = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (3.55)$$

На закінчення перепишемо амплітудне значення сили струму $I(t)$, що встановився (3.52), через вихідні фізичні параметри RLC -контура, й проаналізуємо отриманий вираз. З урахуванням позначень (3.31) для вказаної амплітуди (3.52a) знаходимо

$$I_0 = \frac{u_0 \Omega}{\rho L} = \frac{u_0}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/\Omega C)^2}}. \quad (3.56)$$

Через свою формальну схожість із законом Ома для дільниці кола (2.3) формула (3.56) дістала назву *закону Ома для змінного струму*, а її знаменник

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/\Omega C)^2} \quad (3.57)$$

— назву повного опору, що складається з *активної* R і так званої реактивної частини ($\Omega L - 1/\Omega C$).

Ми обминули тут питання про зручний метод векторних діаграм, який добре викладено майже в усіх підручниках [15, 36]. За цим методом, проте, можна побудувати лише усталений розв'язок (3.52), який не враховує перехідного процесу (3.32), важливого в ряді технічних задач. Крім того, закон збереження й перетворення енергії, яким користувалися тут, гарантує безпомилкове й автоматичне складання рівнянь, виключаючи певні непорозуміння, які часом трапляються в методі векторних діаграм.

Задачу про електричні коливання в двох індуктивно зв'язаних контурах розглянуто у дод. 1.

Глава 4

ЗАГАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МАКСВЕЛЛА

§ 4.1. Властивості вектора поляризації

Феноменологічна (макроскопічна) електродинаміка, як уже зазначалося, з успіхом використовує моделі неперервного розподілу зарядів і струмів за теорією суцільних середовищ. Проте реальна якісна мікроінтерпретація тих чи інших процесів відіграє в електродинаміці таку ж важливу евристичну роль, як і в термодинаміці. З огляду на це й будемо вести подальший виклад.

Запровадивши неперервні об'ємні густини додатної і від'ємної електрики ρ^+ і ρ^- , повну об'ємну густину заряду ρ розглядають як свого роду просторову суперпозицію ρ^+ і ρ^-

$$\rho = \rho^+ + \rho^- = \rho^+ - |\rho^-|. \quad (4.1)$$

Для однорідно нейтральних тіл матимемо

$$\rho \equiv 0 \Rightarrow \rho^+ = -\rho^- = |\rho^-|. \quad (4.2)$$

Якщо ж тіло має об'ємний заряд, то $\rho \neq 0$. Зрозуміло, що поняття про поверхневий і лінійний розподіли зарядів — це ідеалізація дуже тонких заряджених шарів та жгутів, які можна граничним переходом дістати з відповідних формул для об'ємно заряджених тіл. Надалі все це буде автоматично і без додаткових пояснень використовуватися в посібнику, що залишає студентів поле для міркувань.

Із загального визначення вектора поляризації \vec{P} (див. гл. 1 (1.81)) з моделі суцільних середовищ випливає, що дипольний момент $\delta\vec{p}$ елементарного об'єму dV дорівнює

$$\delta \vec{p} = \vec{P} dV, \quad (4.3)$$

а дипольний момент $\Delta \vec{p}$ тіла скінченного об'єму ΔV —

$$\Delta \vec{p} = \int_{(\Delta V)} \vec{P}(\vec{r}) dV. \quad (4.4)$$

Розглянемо косу діелектричну призму (рис. 49) з площею основи ΔS та довжиною ребра Δl ($\Delta V = \Delta S \Delta l \cos \alpha$).

Матеріал призми вважати-
мемо *однорідним*. Нехай
призму поляризовано од-
норідним зовнішнім елек-
тричним полем \vec{E}_0 , пара-
лельним ребрам призми Δl .
При таких умовах поляриза-
ційні заряди з'являться
лише на основах призми

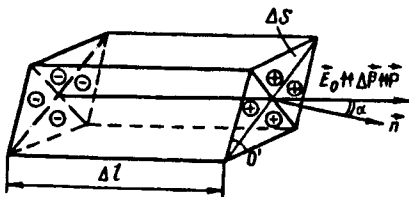


Рис. 49

основах ΔS . Позначимо їхню по-
верхневу густину через σ' . Тоді для модуля дипольного
моменту призми $\Delta p = |\Delta \vec{p}|$ матимемо

$$\Delta p = \sigma' \Delta S \Delta l = \frac{\sigma' \Delta V}{\cos \alpha}, \quad (4.5)$$

де α — кут між нормаллю \vec{n} до основи ΔS і напрямом
зовнішнього поля \vec{E}_0 , а з ним і векторів $\Delta \vec{p}$ та \vec{P} .

З іншого боку, при (4.3), (4.4) в даних умовах має місце
рівність

$$P = |\vec{P}| = \frac{\Delta p}{\Delta V} = \frac{\sigma'}{\cos \alpha}.$$

Звідси

$$\sigma' = P \cos \alpha \equiv P_n \quad (4.6)$$

(P_n — проекція вектора \vec{P} на зовнішню нормаль \vec{n} до осно-
ви призми ΔS).

Оскільки в безмежно малих (з фізичного погляду) об'є-
мах dV макроскопічні поля (а також матеріали) завжди
можна вважати приблизно однорідними, то результат (4.6)
можна інтерпретувати таким чином. У процесі поляризації
кількість електрики, що перетинає довільну безмежно малу
поверхню dS , дорівнює

$$\delta q = \sigma' dS = P_n dS. \quad (4.7)$$

Даним співвідношенням скористаємося для встановлення
зв'язку вектора \vec{P} з об'ємною густиною поляризаційних

(тобто зв'язаних) зарядів ρ' в разі *неоднорідної* поляризації діелектрика (див. (4.14)). З цією метою розглянемо безмежно малий куб з гранями, паралельними координатним площинам, і об'ємом $dV = dx dy dz$ (рис. 50). У процесі поляризації куба кількість позитивної електрики δq_1 , яка перетне праву грань куба і залишить область dV , за (4.7) дорівнює

$$\delta q_1 = P_y(x, y + dy, z) dx dz. \quad (4.8)$$

У той же час ліву його грань у тому самому напрямі перетне й потрапить до області dV кількість позитивної електрики δq_2 , яка дорівнює

$$\delta q_2 = P_y(x, y, z) dx dz. \quad (4.9)$$

Внаслідок в межах dV позитивний заряд зростає

$$\delta q^{(1)} = \delta q_2 - \delta q_1 = -\frac{\partial P_y}{\partial y} dV. \quad (4.10)$$

Аналогічні міркування дають змогу отримати вирази для тієї кількості некомпенсованої електрики $\delta q^{(2)}$, $\delta q^{(3)}$, яка нагромаджується в dV внаслідок потоків через решту граней куба:

$$\delta q^{(2)} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} dV; \quad \delta q^{(3)} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} dV. \quad (4.11)$$

Сумарний зв'язаний заряд δq , що нагромадився в dV в процесі поляризації, становить

$$\delta q = \delta q^{(1)} + \delta q^{(2)} + \delta q^{(3)} = -\left\{ \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right\} dV. \quad (4.12)$$

Але цей зв'язаний заряд можна виразити й через його об'ємну густину ρ' :

$$\delta q = \rho' dV. \quad (4.13)$$

Порівнюючи (4.12) і (4.13), дістанемо шуканий локальний зв'язок вектора \vec{P} з об'ємною густиною зв'язаних зарядів ρ'

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = -\rho'. \quad (4.14)$$

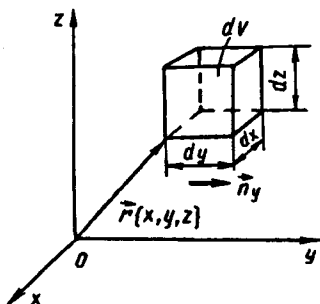


Рис. 50

У векторному аналізі часто фігурує сума похідних від проекцій векторів на осі декартових координат типу (4.14), яка називається *дивергенцією вектора* (тут \vec{P}) і позначається¹

$$\operatorname{div} \vec{P} \equiv \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}. \quad (4.15)$$

(Гідродинамічну інтерпретацію такої конструкції розглянемо далі).

Переглянувши й трохи модифікувавши (дод. 3) хід обчислень, що ведуть до (4.14), неважко переконатися в тому, що

$$\operatorname{div} \vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Sigma} P_n dS; \quad (4.16)$$

тут Σ — поверхня, що охоплює об'єм ΔV . Формула (4.16) дає загальне (не залежне від вибору системи координат) визначення дивергенції вектора \vec{P} (та й будь-якого вектора). Рівняння (4.16) і формула (4.6) відбивають основні властивості вектора поляризації \vec{P} , яким належить важлива роль в електродинаміці Максвелла.

Наступним кроком до рівнянь Максвелла буде перехід до локального формулювання теореми Остроградського—Гаусса для напруженості електричного поля \vec{E} (1.39).

§ 4.2. Локальне формулювання теореми Остроградського—Гаусса

Для переходу до локальної версії теореми Остроградського—Гаусса (1.39) застосуємо її до безмежно малого об'єму ΔV (див. рис. 50), переписавши спочатку (1.39) у детальнішому вигляді

$$\oint_{(\Sigma)} E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{(\Delta V)} \rho dV \approx \frac{\rho \Delta V}{\varepsilon_0}. \quad (4.17)$$

Як впливає з (4.17),

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{(\Sigma)} E_n dS = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (4.18)$$

¹ Загальне визначення дивергенції подано в (4.16).

Але з огляду на визначення дивергенції (4.16), справедливо для будь-якого вектора, ліва частина (4.18) дорівнює

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Sigma)} E_n dS = \operatorname{div} \vec{E}. \quad (4.19)$$

Зіставляючи (4.18) і (4.19), знаходимо шукану локальну версію теореми Остроградського—Гаусса

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0. \quad (4.20)$$

За дод. 3 рівність (4.20) розкриваємо у системі декартових координат:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.21)$$

Під ρ слід розуміти сумарну густину вільних і зв'язаних зарядів.

З (4.21) випливає основне рівняння електростатики — рівняння Пуассона для потенціалу ϕ електростатичного поля. Справді, підставляючи в нього компоненти вектора \vec{E} , виражені через потенціал ϕ ,

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (4)$$

дістанемо шукане рівняння Пуассона:

$$\Delta \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.23)$$

Доповнене граничними умовами рівняння (4.23) дає змогу розрахувати потенціали електростатичних полів для будь-якого розподілу зарядів як функції координат ($\phi = \phi(\vec{r})$). Можна довести, що для обмеженого у просторі розподілу зарядів розв'язком рівняння Пуассона буде функція вигляду (1.57).

Отже, теорема Остроградського—Гаусса в диференціальній формі (4.21), (4.23) дає змогу обчислювати будь-які (а не лише симетричні) електростатичні поля.

Нарешті, неважко здогадатися про гідродинамічну інтерпретацію рівнянь (4.21), (4.20) та гідродинамічний сенс дивергенції, що має чимале евристичне значення.

При визначенні потоків довільних польових векторів \vec{A} вони зіставляються з вектором швидкості течії \vec{v} нестисливої рідини [див. пояснення до (1.25), (1.26)]. Тому уявімо собі, що вектор \vec{E} визначає поле швидкостей течії, а об'ємна густина заряду ρ — питому (локальну) продуктив-

ність джерел рідини. Тоді неважко буде збагнути, що $\operatorname{div} \vec{E}$ (4.19), (4.20) становить кількість рідини, яка, розбігаючись, “фонтанує” з безмежно малого об’єму dV у перерахунку на одиничний (тобто це свого роду питома розбіжність рідини з даного околу точки \vec{r}). (Якщо нагадати, що в перекладі слово “дивергенція” саме й означає розбіжність, то сенс позначень і походження термінів стануть зрозумілими). Потоки виходять (розбігаються) з джерел, на яких починаються або закінчуються відповідні лінії “течії” (тут силові лінії). Така аналогія робить природним поширення застосування рівняння (4.20), теоретично доведеного тут для електростатичних полів, на випадок довільних електричних полів, здійснене свого часу Максвеллом. Узгодження всіх наслідків з його рівнянь з експериментом підтверджує правомірність зазначеного поширення.

§ 4.3. Загальне визначення вектора електричної індукції. Друге рівняння Максвелла

У § 1.13 на простому прикладі продемонстровано перевагу вектора індукції \vec{D} у порівнянні з вектором напруженості \vec{E} , яка полягає в тому, що вектор \vec{D} визначається лише через вільні заряди, в той час як \vec{E} — через вільні й зв’язані заряди разом узяті. Вільні ж заряди на провідниках першого роду піддаються досить простому практичному визначенню (або вимірюванню), в той час як зв’язані — не завжди. З наведеного в попередньому параграфі випливає загальна можливість такого визначення вектора \vec{D} , яке завжди давало б таку саму перевагу над вектором \vec{E} . Справді, за визначенням назвемо *вектором електричної індукції* (або *зміщення*) \vec{D} величину

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (4.24)$$

Якщо через $\tilde{\rho}$ позначимо сумарну густину вільних ρ і зв’язаних ρ' зарядів

$$\tilde{\rho} = \rho + \rho', \quad (4.25)$$

то з огляду на (4.20) (де ρ має бути замінено на $\tilde{\rho}$) та на (4.14) дістанемо

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (4.26)$$

Отже, \vec{D} справді визначається лише через вільні заряди, які здебільшого легше експериментально визначити й які

зумовлюють так званий електричний *струм провідності*, викликаний електричним полем або іншими причинами.

Співвідношення (4.24), (4.26), строго встановлені на базі вірогідних рівнянь електростатики, постулативно розповсюджуються на довільні електричні поля. Практика підтвердила справедливість цього, і за прийнятою класифікацією співвідношення (4.26) називають *другим рівнянням Максвелла*. Отже, даним параграфом розпочинається пряме сходження до системи рівнянь Максвелла.

→ Подібно до електричного поля у вакуумі між векторами \vec{E} і \vec{D} в будь-якому матеріальному середовищі існує зв'язок¹. Для однорідних та ізотропних середовищ він досить простий

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad (\epsilon = 1 + \alpha), \quad (4.27)$$

причому безрозмірний коефіцієнт α дістав назву *діелектричної сприйнятливості*, а ϵ — *відносної діелектричної проникності*.

Для анізотропних середовищ зв'язок між \vec{E} і \vec{D} складніший, оскільки таким є зв'язок між \vec{P} та \vec{E} :

$$P_\xi = \epsilon_0 \{ \alpha_{\xi x} E_x + \alpha_{\xi y} E_y + \alpha_{\xi z} E_z \} \quad (\xi = x, y, z). \quad (4.28)$$

Існують матеріали, для яких зв'язок між \vec{P} та \vec{E} — нелінійний (наприклад, в сегнетоелектриках [15]) і навіть нелокальний.

§ 4.4. Реінтерпретація закону електромагнітної індукції. Перше рівняння Максвелла

Фарадей, а слідом за ним і Максвелл були першими послідовними прихильниками ідеї щодо особливої ролі оточуючого середовища та електричних і магнітних полів у передачі взаємодії між зарядами й струмами та про самостійну фізичну роль цих полів. Ця ідея практично й спонукала Максвелла на пошуки свого точного математичного відображення. Міркування Максвелла, як першопрохідця, дуже складні, не завжди послідовні, а часом просто фантастичні. До того ж добуті ним рівняння за формою значно відрізнялися від своєї сучасної версії, яку їм надали Герц

¹ Цього й варто було чекати, оскільки першопричиною електромагнітних процесів у речовині, як правило, є вільні заряди і струм.

і незалежно від нього Хевісайд. Сьогодні вже майже ніхто з фізиків не згадує про хід оригінальних міркувань Максвелла. Від закону електромагнітної індукції до першого рівняння Максвелла в сучасній його формі можна перейти внаслідок наступних міркувань.

Нагадаємо закон Фарадея (3.1)

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.29)$$

В усіх варіантах реального прояву закону Фарадея спостерігався електричний струм I , породжуваний ЕРС індукції \mathcal{E} . Струм врешті породжується електричним полем. Тому природно припустити, що змінне магнітне поле (4.29) швидкістю зміни свого потоку Φ породжує саме електричне поле \vec{E} , яке вже й викликає струм I . Отже, роль провідника повинна бути допоміжною, оскільки він є лише індикатором електричного поля, вказуючи на його присутність силою струму, що в ньому виникає. Звідси можна зробити висновок, що змінне магнітне поле $\vec{B}(t)$ породжує не власне струм $I(t)$, а електричне поле $\vec{E}(t)$, причому незалежно від наявності чи відсутності провідника. Але за законом Ома для повного кола має місце співвідношення (див. (2.12))

$$\mathcal{E} = \oint_{(L)} \vec{E}_l \, dl, \quad (4.30)$$

де \vec{E} обов'язково містить *сторонню* складову (не електростатичного походження). Тому природно зв'язок електричного (не електростатичного) поля $\vec{E}(t)$ зі змінним магнітним полем $\vec{B}(t)$ шукати на базі закону ((4.29), з підставленням в нього замість ϵ циркуляції вектора \vec{E} :

$$\oint_{(L)} \vec{E}_l \, dl = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.31)$$

У цій формулі вже відсутні провідник-індикатор і ЕРС; і з огляду на (3.2) є лише прямий зв'язок змінного магнітного поля $\vec{B}(t)$ із породжуваним ним електричним $\vec{E}(t)$:

$$\oint_{(L)} \vec{E}_l \, dl = - \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n \, dS. \quad (4.32)$$

Тут внесено під інтеграл похідну за часом, контур (L) —

довільний, виділений у просторі замкнений контур, а (Σ) — натягнена на вказаний контур поверхня¹.

Наведені вище міркування не є фізично доказовими, а лише евристичними. Справедливість постулату (4.32) утвердилася в науці внаслідок узгодження результатів з експериментом. Залишилося перейти від інтегральної форми до диференціальної, яка встановлює локальний зв'язок електричного поля $\vec{E}(t)$ зі змінним магнітним $\vec{B}(t)$. Це й буде першим рівнянням Максвелла в найзручнішій і універсальній формі.

Звернемося до виведення диференціальної версії першого рівняння Максвелла (4.32). Єдине, на перший погляд, рівняння (4.32) насправді становить континуум рівнянь, оскільки контур (L) можна вибирати довільно. Для одно-

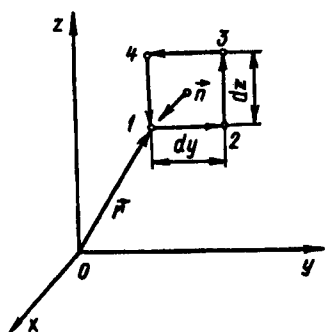


Рис. 51

значного визначення векторної величини \vec{E} досить застосувати (4.32) до трьох різних контурів. Оберемо три квадратні безмежно малі контури в площинах, паралельних координатним, і на прикладі контура, паралельного площині yOz (рис. 51), покажемо відповідні обчислення. Контурний інтеграл $\oint E_l dl$ розіб'ємо на

(L)

чотири частини, які розглядатимемо попарно: $\{1-2; 3-4\}$ і $\{2-3;$

$4-1\}$. Для безмежно малого контура (L) з точністю до малих вищого порядку маємо

$$\begin{aligned} \oint_{(L)} E_l dl &= \{E_y(x, y, z) - E_y(x, y, z + dz)\} dy + \\ &+ \{E_z(x, y + dy, z) - E_z(x, y, z)\} dz. \end{aligned}$$

Продовжуючи наближення в рамках того самого порядку величин, запишемо

$$\oint_{(L)} E_l dl = \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right\} dydz. \quad (4.33)$$

¹ Формула (4.32) є першим рівнянням Максвелла в інтегральній формі.

Для швидкості зміни потоку вектора \vec{B} через орієнтовану площину $dydz$ дістанемо

$$\int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS = - \frac{\partial B_x}{\partial t} dydz. \quad (4.34)$$

Наближені вирази (4.33), (4.34) при $dS = dydz \rightarrow 0$

$$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{1}{dS} \oint_{(L)} E_l dl = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (dS = dydz); \quad (4.35)$$

$$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{1}{dS} \int_{(\Sigma)} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_n dS = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (4.35a)$$

перетворюються на точні. Тому остаточно дістанемо

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t}. \quad (4.36)$$

Прямим обчисленням можна переконатися, що ще два співвідношення отримуємо з (4.36) шляхом циклічного підставлення за законом



Отже, до (4.36) маємо додати ще два рівняння:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (4.36a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}. \quad (4.36b)$$

Усі три рівняння (4.36) можна об'єднати в одне векторне

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.37)$$

де $\text{rot } \vec{E}$ — вектор з компонентами, які визначаються розкриттям символічного визначника¹

¹ rot — ротор. Гідродинамічне тлумачення ротора див. у працях [14, 28].

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (4.38)$$

Символічний визначник (4.38) розкривають за звичайним правилом, дотримуючись лише певного порядку “співмножників”: ліворуч стоять векторні елементи першого рядка; посередині — символи диференціювання; праворуч — компоненти вектора \vec{E} . За таким правилом дістаємо

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} = & \vec{i} \left\{ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right\} + \vec{j} \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right\} + \\ & + \vec{k} \left\{ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

(Загальне й незалежне від вибору системи координат математичне визначення $\operatorname{div} \vec{A}$ та $\operatorname{rot} \vec{A}$ можна знайти, наприклад, у праці [12]).

Рівняння (4.37) і є першим рівнянням Максвелла (в диференціальній формі). Подальший коментар буде зроблено вже до повної системи рівнянь Максвелла.

§ 4.5. Локальна версія закону повного струму. Третє рівняння Максвелла

Для переходу від (2.57) до локальної форми закону повного струму перепишемо праву частину закону (2.57) у формі

$$\sum_{i=1}^n I_i = \int_{(\Sigma)} j_n dS, \quad (4.40)$$

надаючи закону повного струму нового вигляду

$$\oint_{(L)} H_l dl = \int_{(\Sigma)} j_n dS, \quad (4.41)$$

де \vec{j} — густина електричного струму; (Σ) — поверхня, натягнена на замкнений контур (L) . Перехід (4.40) стане наочним, якщо поглянути на рис. 42,а згори (рис. 52). У тілі провідників, очевидно, $\vec{j} \neq 0$; за їхніми межами $\vec{j} \equiv 0$; і тому інтеграл праворуч (4.40) збігається з сумою ліворуч цього рівняння. Та закон (4.41) залишається

справедливим навіть якщо контур (L) розташовано всередині тіла, по всьому перерізу якого тече струм. Інтеграл праворуч в (4.41) враховує тоді лише ту частину струму, яка охоплюється контуром (L).

Якщо порівняти (4.41) з (4.32), то впадає у вічі формально математична тотожність цих формул при зіставленні: $\vec{E} \sim \vec{H}$; $\frac{\partial B}{\partial t} \sim \vec{j}$. Тому, повторюючи буквально ті самі міркування, які вели від (4.32) до (4.37), дістанемо локальну версію закону повного струму

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}. \quad (4.42)$$

Виявляється, проте, що справедливий для випадку сталих струмів закон (4.41), (4.42) вступає в суперечність з фундаментальним законом збереження електричного заряду у разі змінних струмів. Це буде доведено в наступному параграфі. Внаслідок досить складних міркувань Максвелл дійшов до висновку, що в загальному випадку змінних полів і струмів закон (4.42) має виглядати таким чином:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (4.43)$$

де \vec{D} — вектор електричної індукції (або зміщення). За умови сталих струмів і полів $\partial D / \partial t \equiv 0$, і ми повертаємося до експериментально встановленого (на часи Фарадея—Максвелла) закону (4.42), (4.41). Дописаний з напівінтуїтивних міркувань доданок $\partial D / \partial t$ названо Максвеллом *струмом зміщення*

$$\vec{j}_{\text{зм}} \equiv \partial \vec{D} / \partial t. \quad (4.44)$$

Аналіз прикладів [15, 36] показує, що повна сила струму $\vec{j}_n = \vec{j} + \vec{j}_{\text{зм}}$ завжди замкнена, “тече” навіть у діелектрику між обкладинками конденсатора і у вакуумі.

Рівняння (4.43) беззастережно утвердилося в науці після теоретичного передбачення Максвеллом та експериментального підтвердження Герцем існування електромагнітних хвиль. Це рівняння й є *третім рівнянням Максвелла*. До обговорення рівняння (4.43) ми ще повернемося. Але перед цим слід обговорити експериментальні основи та теоретичне формулювання закону збереження заряду та його зв'язок з другим і третім рівняннями Максвелла.

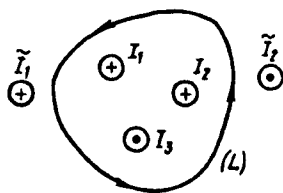


Рис. 52

§ 4.6. Закон збереження заряду й струм зміщення

Ідея щодо існування закону збереження електричного заряду виникла під впливом дослідів по електризації тіл тертям, яке виявило, що внаслідок тертя двох різнорідних і нейтральних тіл вони можуть електризуватися, набуваючи завжди протилежних електричних зарядів. Електризація тертям інтерпретується як така, що веде до просторового розділення протилежних зарядів, які в нейтральних тілах компенсують одне одного. Безпосереднім експериментальним підтвердженням закону збереження заряду послуговували дослід з електризації тіл у середині так званого “циліндра Фарадея”. Він становить замкнену металеву оболонку з порожниною всередині. Якщо в середину циліндра Фарадея



Рис. 53

потрапляє заряджене тіло, то електропровідні стінки циліндра електризуються внаслідок електростатичної індукції (рис. 53).

На зовнішній частині оболонки циліндра Фарадея індукується заряд того самого знака, що й на вміщеному до циліндра тілі; на внутрішній — протилежний йому за знаком. Але повний (сумарний) заряд циліндра Фарадея залишається незмінним і дорівнює нулеві. Тому якщо за по-

верхню (Σ) в теоремі Остроградського—Гаусса (1.69) обрати поверхню циліндра Фарадея, то праворуч у цьому рівнянні стоятиме заряд зарядженого тіла (Q_Σ), вміщеного в порожнину. Отже, електричне поле при зовнішній поверхні (Σ) циліндра не буде нульовим і характеризуватиметься вектором D , значення якого дорівнює поверхневій густині індукваного заряду у відповідній точці поверхні ($D = \sigma \neq 0$) (див. § 1.9).

Якщо ж сумарний заряд у порожнині циліндра Фарадея виявиться нульовим, то за тією самою теоремою (1.69) циліндр електризуватися не буде. Електризація тіл тертям, виконана в порожнині циліндра Фарадея, ніколи не електризує його. З цього й випливає, що тертям заряди справді не створюються, а лише діляться між тілами порівну і в сумі дають нуль. Отже, має місце закон збереження заряду. Цей закон багатократно був прямо й опосередковано пере-

віренім і виявився універсально справедливим аж до мікросвіту включно.

Із закону збереження заряду випливає, що зменшення або збільшення сумарної кількості електрики в тій чи іншій області простору (ΔV) може відбуватися лише за рахунок витоку або притоку його через границю (Σ) даної області, тобто за рахунок струму через цю границю. Цей факт і припускає математичну формалізацію закону збереження заряду. Справді, швидкість зменшення ($-dQ/dt$) електричного заряду Q в області (ΔV) дорівнює, очевидно, силі струму I_Σ через границю області

$$- \frac{dQ}{dt} = I_\Sigma. \quad (4.45)$$

Але

$$Q = \int_{(\Delta V)} \rho \, dV; \quad I_\Sigma = \oint_{(\Sigma)} j_n \, dS, \quad (4.46)$$

де ρ — об'ємна густина заряду в області (ΔV); \vec{j} — густина струму на її границі (Σ). Отже,

$$- \int_{(\Delta V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = \oint_{(\Sigma)} j_n \, dS. \quad (4.47)$$

Навіть не звертаючись до математичних джерел, можна переконатися, що формула (4.47) еквівалентна так званому рівнянню неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (4.48)$$

яке математично відображає закон збереження заряду. З цією метою за область (ΔV) можна обрати безмежно малий куб з гранями, паралельними координатним площинам (див. рис. 50), і виконати обчислення в дусі зроблених для виведення (4.14), (4.15), (4.16) або (4.19). У декартовій системі координат (4.48) має вигляд (дод. 3)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0. \quad (4.49)$$

Рівняння (4.48) якраз і вступає у суперечність із законом повного струму (4.42) стосовно змінних струмів. Справді, для змінних струмів $\partial \rho / \partial t \neq 0$, і тому за (4.48)

$$\operatorname{div} \vec{j} \neq 0. \quad (4.50)$$

Прямим обчисленням (у декартовій системі координат) можна довести, що для будь-якого векторного поля $\vec{A}(\vec{r}, t)$ має місце тотожність¹

$$\operatorname{div} \{\operatorname{rot} \vec{A}\} \equiv 0. \quad (4.51)$$

Тому, застосовуючи оператор дивергенції до закону (4.42), дістанемо

$$\operatorname{div} \{\operatorname{rot} \vec{H}\} = \operatorname{div} \vec{j} \equiv 0, \quad (4.52)$$

що суперечить (4.50). Якщо ж закон (4.42) “підправити”, додавши до його правої частини струм зміщення $\vec{j}_{\text{зм}} = \partial \vec{D} / \partial t$, то матимемо (4.43). За допомогою другого рівняння Максвелла (4.26) з урахуванням того, що $\partial / \partial t (\operatorname{div} \vec{D}) = \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, можна переконатися, що (4.43) узгоджується з законом збереження заряду (4.38).

Радимо неодмінно самостійно виконати усі описані вище підрахунки. Інакше розуміння й засвоєння не буде.

Отже, саме закон збереження заряду (4.48) у разі змінних струмів і полів вимагає доповнити закон повного струму (4.42) струмом зміщення (4.44), перетворюючи його на третє рівняння Максвелла (4.43). Це мало не перший у тогочасній науці випадок, коли фундаментальний закон природи (4.43) вийшов не з дослідної лабораторії, а з-за письмового столу. Та, звичайно, теоретичні аргументи на його користь є науково обґрунтованими. Як побачимо далі, існування в природі електромагнітних хвиль теоретично передбачене Максвеллом, не в останню чергу зумовлене струмом зміщення $\vec{j}_{\text{зм}}$ (4.44) і без нього було б неможливим. Отже постулат Максвелла (4.43) витримав перевірку дослідом.

Переходимо до встановлення четвертого рівняння Максвелла.

§ 4.7. Четверте рівняння Максвелла

Четверте рівняння Максвелла математично констатує відсутність джерел магнітного поля, подібних до джерел

¹ Компоненти вектора $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ легко обчислюються за допомогою символічного визначника типу (4.38). Після цього обчислюється $\operatorname{div} \vec{B}$ за рецептом типу (4.15) і з урахуванням тотожностей типу $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$ доводиться тотожність (4.51).

електричного, — тобто відсутність у природі “магнітних зарядів”

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (4.53)$$

Воно є прямим аналогом другого рівняння Максвелла (4.26) для електричного поля, констатуючи формальну відмінність B від D .

Залишаючи загальне визначення вектора магнітної індукції B у речовині для самостійного вивчення [15, 36], спиратимемося на визначення його у вакуумі (§ 2.6) та на його зв'язок із вектором напруженості магнітного поля H (2.55).

Обґрунтуємо рівняння (4.53), спираючись на принцип суперпозицій для магнітних полів та на закон БСЛ (2.39), з огляду на (2.55), переписаний для вектора B :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (4.54)$$

Треба обчислити

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \int (L) d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int (L) \operatorname{div} \left\{ \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \right\}. \quad (4.55)$$

У теорії векторних полів — векторному аналізі [12] — такі операції, як rot та div , мають визначення, незалежні від вибору системи координат. Тому їхня конкретизація в декартовій системі координат (4.18), (4.15), яка зовні виглядає дещо специфічно, насправді не позбавляє обчислення загальності. Тому, помінявши місцями операцію інтегрування вздовж провідника зі струмом (L), який створює магнітне поле, з оператором div , можемо для обчислення $\operatorname{div} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$ під інтегралом обирати свою для кожного елемента $d\vec{l}$ систему декартових координат (рис. 54).

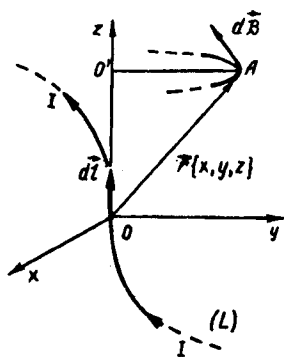


Рис. 54

Користуючись відомим з векторної алгебри зображенням векторного добутку у вигляді символічного визначника

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (4.56)$$

та розмістивши декартову систему координат, як показано на рис. 54, матимемо

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{-\vec{i}y + \vec{j}x}{r^3} dl. \quad (4.57)$$

Тут $dl = |d\vec{l}|$; $r^3 = \{x^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}$. Згідно з формулою (4.15)

$$\operatorname{div} (d\vec{B}) = \frac{\partial}{\partial x} (dB_x) + \frac{\partial}{\partial y} (dB_y) + \frac{\partial}{\partial z} (dB_z). \quad (4.58)$$

Але за (4.57), опускаючи скрізь сталий множник $\frac{\mu_0 I dl}{4\pi}$, можемо записати

$$dB_x \sim -y/r^3; \quad dB_y \sim x/r^3; \quad dB_z = 0. \quad (4.59)$$

Звідси прямі обчислення похідних (4.58) дають

$$\operatorname{div} (d\vec{B}) = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \left\{ \frac{3y}{r^4} x - \frac{3x}{r^4} y \right\} \equiv 0. \quad (4.60)$$

Отже, справді для повного поля вектора \vec{B} (4.55) є справедливим *четверте рівняння Максвелла* (4.53). Воно постулативно поширюється на загальний випадок змінних у часі струмів та полів аналогічно з другим рівнянням Максвелла (4.26).

§ 4.8. Повна система рівнянь електродинаміки та її попередній аналіз

Зведемо усі чотири рівняння Максвелла [(4.26), (4.37), (4.43), (4.53)] та попередньо їх обговоримо. Маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Перша пара рівнянь визначає електричні поля \vec{E} , \vec{D} ; друга — магнітні \vec{H} , \vec{B} , пов'язуючи їх між собою та з розподілом зарядів ρ і струмів \vec{j} . Це основна й універсальна система рівнянь електродинаміки, яка відіграє в ній таку саму визначальну роль, яку в механіці відіграють закони Ньютона, записані у вигляді диференціальних рівнянь руху (див. розділ 1). До цієї універсальної системи рівнянь додаються ще так звані матеріальні рівняння, які вже не є універсаль-

ними, а залежать від властивостей тих матеріалів і матеріальних середовищ, в яких розвиваються досліджувані електромагнітні процеси. Наведемо найбільш простий варіант додаткових матеріальних рівнянь. Для однорідних, ізотропних, не феромагнітних, не сегнетоелектричних, не надпровідних середовищ вони мають вигляд

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (4.62)$$

Останнє з них — це закон Ома в диференціальній формі, справедливий для провідників. Якщо фізичні умови такі, що ε та μ можна вважати константами, а будь-які струми (а не лише струми провідності $\vec{j} = \sigma \vec{E}$) — відсутніми ($\vec{j} = 0$), рівняння Максвелла (4.61) спрощуються:

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}; \quad (4.63)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{H} = 0.$$

Тут враховано вже рівняння (4.62) та додаткову умову $\vec{j} = 0$.

Для вакууму, де $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\rho = 0$, рівняння (4.63) мають ще компактніший вигляд. (Рекомендуємо записати).

У диференціальній формі (4.61) рівняння Максвелла мають ясну фізичну інтерпретацію, для викладення якої слід нагадати деякі особливості електричного й магнітного полів.

Як впливає з глави 1, електростатичне поле породжується так званими *джерелами поля* — електричними зарядами. Силкові лінії таких полів починаються і закінчуються на джерелах поля і тому незамкнені. Потенціальний характер електростатичних полів виявляється, зокрема, в тому, що циркуляція вектора напруженості електростатичного поля дорівнює нулю ($\oint_{(L)} E_l dl = 0$). Такі поля називають *безвихровими*.

Інший характер має магнітостатичне поле. Воно не має джерел, подібних до електричних зарядів. Силкові лінії його замкнені, і циркуляція вектора напруженості магнітостатичного поля не тотожна нулю, і дорівнює повному, охопленому контуром струмові ($\oint_{(L)} E_l dl = I$). Подібні поля називають *вихровими*.

Перехід інтегральних закономірностей до диференціальних призвів до появи дивергенцій та роторів. Дивергенції становлять *питтямі потоки* і тому відмінні від нуля при

джерелах потоків. Ротори походять від циркуляцій, і тому вони відмінні від нуля для *вихрових* частин полів. На підставі сказаного дамо одну з найбільш глибоких розшифровок рівнянь Максвелла (4.61).

Перше з них свідчить про те, що змінне у часі магнітне поле ($\partial B / \partial t \neq 0$) локально породжує вихрову частину електричного поля \vec{E} (від безвихрової ротор, як можна показати, дає нуль).

Друге вказує на те, що на електричне поле впливають також “джерела” поля — *електричні заряди* ($\rho \neq 0$) (від вихрової частини, як відомо, дивергенція дає нуль).

Третє рівняння вказує на те, що вихрове магнітне поле \vec{H} локально породжується електричним струмом ($\vec{j} \neq 0$), тобто *рухомими електричними зарядами*, а також змінним у часі електричним полем ($\partial D / \partial t \neq 0$).

Нарешті, четверте рівняння констатує відсутність джерел магнітного поля — *магнітних зарядів*.

На жаль, обсяг посібника не дає змоги порушити тут питання про так звані *монополі* Дірака, відкриття яких призвело б до подальшого узагальнення рівнянь Максвелла та до інших важливих наслідків [27]. Та поки що гіпотеза про монополі не знайшла експериментального підтвердження і тримається “в запасі”.

§ 4.9. Енергія електричного й магнітного полів

Для простоти обмежимося енергією полів у вакуумі. Узагальнення можна знайти у працях [15; 36]. Користуючись виразом (3.23) для енергії зарядженого конденсатора W_c та формулою (3.28), дістанемо

$$W_c = \frac{CU^2}{2} = \frac{CE^2d^2}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Sd. \quad (4.64)$$

Тут враховано, що в однорідному полі зазора конденсатора $U = Ed$ і що ємність тонкого конденсатора C задається формулою (1.89). Оскільки $Sd = V$ — об’єм зазора, то відношення

$$w_e = \frac{W_c}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad (4.65)$$

— це густина енергії, розподіленої в електричному полі зазора конденсатора. Отже, енергію конденсатора можна тлумачити двома способами: як енергію зарядів на обкладинках (3.23) і як енергію, сконцентровану в полі між обкладинками. (Тут є аналогія з тлумаченням потенціальної

енергії кульки на здеформованій пружині: її з однаковим успіхом можна вважати потенціальною енергією кульки (див. теорію механічних коливань) або енергією здеформованої пружини). Різниця між двома трактуваннями w_e виявляється не в статичці, а в динаміці, зокрема в теорії електромагнітних хвиль. Там стає ясным, що слід приписати енергію W_c та її густину w_e електричному полю. Щоправда, такого висновку можна дійти й в межах електростатики (точніше квазістатики), якщо підійти до виведення (4.65) інакше [15, 32]. Отже, *електричне поле, як і інші види матерії, має енергію і може її "транспортувати"* (див. нижче) у просторі.

Спираючись на (3.20) та користуючись виразом для індуктивності L довгого соленоїда [15, 36], можна шляхом, близьким до виведення (4.65), довести, що й магнітне поле має енергію, розподілену в просторі, густина якої

$$w_m = \frac{\mu_0 H^2}{2} \quad (4.66)$$

(див. дод. 4). Отже, *електромагнітне поле має енергію, розподілену в просторі, густина якої*

$$w = w_e + w_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}. \quad (4.67)$$

Така констатація знадобиться нам у теорії електромагнітних хвиль.

§ 4.10. Електромагнітні хвилі.

Фізична природа світла

Розробляючи загальну теорію електромагнетизму — одне з найвидатніших творінь людства, — Максвелл на основі отриманих рівнянь зробив паралельно ще два фундаментальні відкриття: передбачив можливість поширення у просторі електромагнітних хвиль і відкрив електромагнітну природу світла. Продемонструємо обидва ці відкриття досить просто.

Почнемо з розглядання електромагнітних хвиль. Маючи на увазі довести на базі рівнянь Максвелла лише принципову можливість існування електромагнітних хвиль, обмежимося найпростішим варіантом такого доведення, а саме: покажемо, що серед розв'язків рівнянь Максвелла (4.63) є такі, що становлять плоскі, плоскополяризовані електромагнітні хвилі, які поширюються в певному напрямі. (Розшифровувати усі щойно наведені означення хвиль будемо по ходу викладення).

Насамперед обговоримо так зване хвильове рівняння та характер його розв'язків (в одновимірному варіанті) й покажемо, що з рівнянь Максвелла для E й H випливають хвильові рівняння.

Нагадаємо, що хвиля — це зовсім не обов'язково “синусоїда”. Форма хвиль може бути різною. Визначальною ознакою плоскої хвилі, яка не загасає, може бути послідовне й неперервне відтворення її конфігурації у напрямі її поширення зі сталою швидкістю. Повне прояснення сказаного дає рис. 55, на якому показано два миттєві

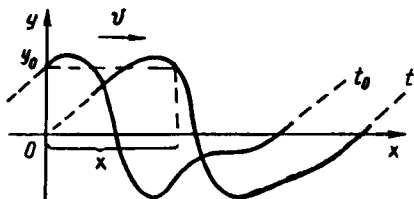


Рис. 55

“знімки” хвилі, пущеної по довгому еластичному канату з інтервалом часу $\Delta t = t - t_0$ (Ox — напрям поширення хвилі, Oy — напрям коливань каната).

Нехай у початковий момент часу $t = 0$ у точці $x = 0$ відхилення каната

від горизонтальної осі Ox дорівнювало y_0 . Тоді на відстані x таке саме відхилення спостерігатиметься через час $\Delta t = x/v$, де v — швидкість поширення хвилі. Звідси ясно, що стан каната, який спостерігався в точці 0, у певний момент часу t повториться у точці x із запізненням на $\Delta t = x/v$. Тому рівнянням хвилі, яке описує її форму в будь-який момент часу t , буде вираз

$$y_+ = f_+(t - x/v), \quad (4.68)$$

де $f_+(t)$ — довільна функція, яка визначає закон зміни y_+ з часом t в нульовій точці, а рівняння (4.68) — форму хвилі в довільний фіксований момент часу t як функцію x .

Ми розглянули хвилю, яка біжить зліва направо. Неважко збагнути, що для хвилі протилежного напрямку слід написати вираз

$$y_- = f_-(t + x/v). \quad (4.69)$$

Аргумент

$$\varphi_{\pm} = t \pm x/v \quad (4.70)$$

називають *фазою хвилі*. Покажемо, що незалежно від виду функцій $f_{\pm}(t)$ (тобто від форми хвилі) хвильові функції y_{\pm} задовольняють хвильове рівняння

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_{\pm}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_{\pm}}{\partial x^2}. \quad (4.71)$$

З цією метою досить порівняти між собою значення других похідних від f_{\pm} за часом і координатою. Застосувавши так зване ланцюгове правило диференціювання складних функцій¹, дістанемо

$$\frac{\partial^2 y_{\pm}}{\partial t^2} = \frac{d^2 y_{\pm}}{d\varphi_{\pm}^2}, \quad \frac{\partial^2 y_{\pm}}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 y_{\pm}}{d\varphi_{\pm}^2}. \quad (4.72)$$

Звідси й випливає (4.71). Отже, усі плоскі хвилі, що не загасають, задовольняють універсальне хвильове рівняння незалежно від форми хвиль.

Покажемо, що за певних умов з рівнянь Максвелла (4.63) випливають хвильові рівняння типу (4.71) для \vec{E} та \vec{H} , а з цих хвильових рівнянь — ще два фундаментальні висновки. А саме: покажемо, що в тій області простору, де немає ні електричних зарядів ($\rho \equiv 0$), ні електричних струмів ($\vec{j} \equiv 0$) і де система рівнянь (4.63) виглядає найпростіше:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{E} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{H} &= 0; \end{aligned} \quad (4.73)$$

серед її розв'язків є такі, для яких вектори \vec{H} і \vec{E} всюди однаково напрямлені: $\vec{H} \parallel$ осі Oz ; $\vec{E} \parallel$ осі Oy і задовольняють хвильові рівняння типу (4.71), які описують при цьому плоскі хвилі, що поширюються вздовж осі Ox (рис. 56). Це й будуть плоскі, плоскополяризовані електромагнітні хвилі, про які згадувалося на початку параграфа. Для таких розв'язків вектори \vec{E} та \vec{H} репрезентуються такими проекціями:

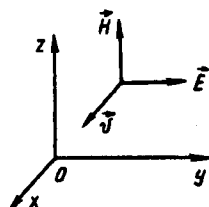


Рис. 56

$$\vec{E} \{0; E; 0\}; \quad \vec{H} \{0; 0; H\}. \quad (4.74)$$

Звідси для їхніх дивергенцій за (4.74) дістанемо

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial y} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial H}{\partial z} = 0. \quad (4.75)$$

¹ Ланцюгове правило для складної функції $y = F(\varphi(\xi))$ має вигляд

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{dF}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\xi}.$$

Що ж до їхніх роторів, то за (4.38), (4.39) та (4.74) неважко знайти

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\vec{i} \frac{\partial E}{\partial z} + \vec{k} \frac{\partial E}{\partial x} = -\mu \mu_0 \vec{k} \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{i} \frac{\partial H}{\partial y} - \vec{j} \frac{\partial H}{\partial x} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{j} \frac{\partial E}{\partial t}.\end{aligned}\quad (4.76)$$

Прирівнюючи множники при однакових ортах $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, замість двох векторних рівнянь (4.76) дістанемо чотири в проєкціях

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= -\mu \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, & \frac{\partial E}{\partial z} &= 0; \\ -\frac{\partial H}{\partial x} &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, & \frac{\partial H}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (4.77)$$

З рівнянь (4.75), а також другої колонки рівнянь (4.77) випливає, що E та H не залежать від y та z і залежать лише від x і t :

$$E = E(x, t); \quad H = H(x, t). \quad (4.78)$$

На цьому роль рівнянь (4.75) та другої колонки (4.77) вичерпана. E та H із (4.78) знаходять за допомогою першої колонки рівнянь (4.77). Вони становлять лінійну однорідну систему з двома невідомими E та H . Для виключення з неї магнітного поля H продиференціюємо перше рівняння за координатою x , а друге — за часом t , домножуючи його, крім того, на $\mu \mu_0$. Виконавши це й використовуючи рівність $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x}$, легко приходимо до хвильового рівняння типу (4.70) для E :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \quad (4.79)$$

причому швидкість поширення хвилі v дорівнює

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}. \quad (4.80)$$

Для вилучення з тієї самої системи E продиференціюємо перше рівняння за t , одночасно домножуючи його на $\varepsilon \varepsilon_0$, а друге за x . Зваживши на рівність $\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x}$, приходимо до хвильового рівняння для H :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (4.81)$$

при тому самому визначенні швидкості поширення хвилі v [див. (4.80)]. Але це й означає, що електричне E і магніт-

не H поля є хвильовими, причому хвилі поширюються вздовж осі Ox

$$E = E(t \pm \frac{x}{v}); \quad H = H(t \pm \frac{x}{v}). \quad (4.82)$$

Але при цьому губиться зв'язок між електричним і магнітним полями, оскільки функції $E(\varphi_{\pm})$ і $H(\varphi_{\pm})$ незалежні одна від одної. Втім, у них має бути цей зв'язок згідно з рівнянням Максвелла (4.77). Справа в тому, що, диференціюючи ці рівняння, ми підвищили їхній порядок і тим самим збільшили кількість розв'язків. Для відбракування зайвих на функції E та H накладаються додаткові умови, підставляючи їх у якоесь з двох рівнянь першої колонки (4.77). Підставимо їх у перше. Тоді

$$\mp \frac{1}{v} \frac{dE}{d\varphi_{\pm}} = \mu \mu_0 \frac{dH}{d\varphi_{\pm}}.$$

Звідси з урахуванням (4.79) та опускаючи фізично нецікаву сталу складову полів, остаточно дістанемо

$$\mp \sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H. \quad (4.83)$$

Пропонуємо отримати те саме за допомогою другого рівняння першої колонки (4.77). Отже, кількість розв'язків (4.82) хвильових рівнянь (4.79), (4.80) вдвоє переважає множину фізично осмислених розв'язків (4.83), що, крім хвильових, задовольняють ще вихідні рівняння Максвелла (4.77), які відтворюють фізичний взаємозв'язок між E та H .

Власне кажучи, хвильові рівняння (4.79), (4.80) відображають лише характер поширення електромагнітного збудження й тому є кінематичними. Динаміку ж взаємного породження електричних полів магнітними і навпаки передають рівняння Максвелла (4.77). Вони є динамічними.

Геометричне зображення електромагнітних хвиль традиційно ґрунтується на важливому прикладі синусоїдальних хвиль (рис. 57):

$$E = E_0 \sin \omega (t \pm \frac{x}{v}); \quad (4.84)$$

$$H = \mp \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0 \sin \omega (t \pm \frac{x}{v}).$$

На рисунку показано поперечний характер електромагнітних хвиль та їхню здатність до поляризації¹. Очевидно також, що вектори \vec{E} , \vec{H} і \vec{v} утворюють правоґвинтову трійку.

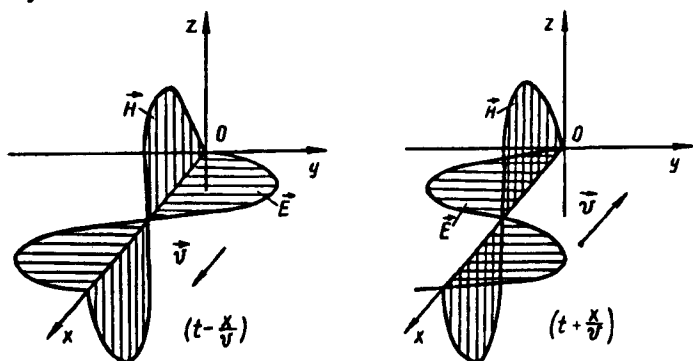


Рис. 57

Оскільки електромагнітне поле має енергію, розподілену в просторі з густиною w (див. (4.67)), то електромагнітні хвилі, поширюючись, переносять цю енергію з густиною енергетичного потоку

$$\vec{S} = w \vec{v}. \quad (4.85)$$

Вектор густини потоку енергії \vec{S} називається *вектором Умова—Пойтінга*. Враховуючи (4.67), (4.80) та (4.83), для модуля (величини) вектора S дістанемо

$$S = |\vec{S}| = EH. \quad (4.86)$$

Аналізуючи за допомогою рис. 57 взаємну орієнтацію ортогональної трійки векторів \vec{E} , \vec{H} та \vec{v} , неважко дійти висновку, що (4.85) і (4.86) можна охопити одним виразом

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] \quad (4.87)$$

(квадратні дужки символізують векторний добуток \vec{E} на \vec{H}).

Із загальної теорії рівнянь Максвелла (4.61) випливає, що вектор Умова—Пойтінга (4.87) не тільки в розглянутому випадку, а й завжди репрезентує густину потоку енергії електромагнітного поля.

¹ Здатність, оскільки розглянуто окремий випадок (4.74) електромагнітних хвиль. Природні хвилі можуть і не бути поляризованими.

Швидкість поширення електромагнітних хвиль (4.79) у вакуумі (коли $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$) можна обчислити за формулою

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}; \quad (4.88)$$

тут c — швидкість світла в пустоті. Інакше кажучи, підрахована через електричну ε_0 і магнітну μ_0 сталі швидкість поширення електромагнітних хвиль збіглася з відомою з давніх часів швидкістю світла. Оскільки ж в науці часів Максвелла вже запанував хвильовий погляд на природу світла¹ та завдяки явищу поляризації було відомо, що світлові хвилі поперечні, Максвелл зробив висновок, що світло має електромагнітну природу. Ця гіпотеза блискуче підтвердилася всім подальшим розвитком науки.

Отже, Максвелл заклав фундаментальні основи одночасно під фізику електромагнітних і оптичних явищ.

§ 4.11. Рівняння Максвелла та спеціальна теорія відносності Ейнштейна

Оскільки основний закон класичної механіки — другий закон Ньютона — є інваріантним (незмінним) стосовно перетворень Галілея (див. кн. 1, розділ 1)

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad t' = t, \quad (4.89)$$

то за допомогою механічних процесів неможливо відрізнити одну систему координат від другої, які перебувають у рівномірному й прямолінійному відносному русі (4.89). Особливу роль у механіці відіграють інерціальні системи відліку, стосовно яких власне й є справедливим другий закон Ньютона (якщо не запроваджувати фіктивних “сил” інерції).

Строго кажучи, абсолютно інерціальних систем відліку не існує. Тому сучасна фізика розглядає фактично цілу ієрархію (послідовність) дедалі більш інерціальних систем відліку, яку вже можна практично вказати. Та на початку все було інакше. З легкої руки Ньютона довгий час у науці побутувала гіпотеза про існування так званого *абсолютного простору* як свого роду завжди тотожного собі та індиферентного до матеріальних тіл їхнього “вмістилища”. Звідси випливало існування абсолютно нерухомої системи відліку,

¹ Починаючи з XVII ст., в науці тривалий час конкурували два погляди на природу світла: корпускулярний (Ньютон) та хвильовий (Гюйгенс).

хоч і не ясно було, як її практично фіксувати в просторі. У такому контексті інерціальні системи відліку мислилися як такі, що рухаються рівномірно і прямолінійно стосовно гіпотетичної абсолютно нерухомої системи. Паралельно існувала *гіпотеза про абсолютний час* як універсальну та безвідносну до подій і систем відліку (однакову для них) “тривалість”. Формально універсальність часу зафіксовано рівністю $t' = t$. Як бачимо, абсолютний час t теж є чимось практично невловимим. Проте ідея про абсолютні простір і час дуже довго домінувала в науці (та й зараз явно не суперечить повсякденному досвіду й підсвідомим відчуттям, на котрі наука, проте, не може покладатися).

Працями Фарадея й Максвелла було завершено побудову теорії електромагнітних явищ; передбачено теоретично та підтверджено Герцем практично існування електромагнітних хвиль. За аналогією з хвильовими процесами у суцільних середовищах (акустичні хвилі в повітрі; хвильові збудження в твердих тілах та в рідинах) виникло питання щодо природи середовища, в якому поширюються електромагнітні хвилі. І тут наука потрапила у дуже складне й суперечливе становище, пов'язане з гіпотезою *всесвітнього “ефіру”* — свого роду “тонкої матерії”, що нібито заповнює увесь міжкорпускулярний простір і буцімто є носієм електромагнітних хвиль. Для пояснення фізичних процесів в ефірі (на кшталт аналогічних процесів у суцільних середовищах) ефіру доводиться приписувати часом несумісні механічні властивості, але альтернативи гіпотезі ефіру довгий час не знаходили. Більше того, з ним пов'язувалася надія виявити абсолютний рух і фіксувати абсолютно нерухому систему відліку. Ця надія, в свою чергу, пов'язувалася з електродинамікою та оптикою, рівняння якої не інваріантні стосовно перетворень Галілея (4.89).

Почалися експериментальні й теоретичні дослідження щодо виявлення, зокрема, так званого “ефірного вітру”. Міркування розвивалися за аналогією з акустикою. Адже швидкість поширення звуку, що йде від рухомого джерела, залежить від того, під яким кутом до напряму руху цього джерела розташовано звуковий приймач, оскільки до власної швидкості звукової хвилі векторно додається швидкість руху джерела відносно повітря. Зрозуміло, важливим тут є саме відносний рух джерела звуку й повітря, тобто лише наявність “вітру” відносно джерела звуку. Аналогічно будувалися досліди й по виявленню “ефірного вітру” щодо рухомого джерела світла як генератора електромагнітних хвиль певного діапазону частот. Вирішальними виявилися

досліди Майкельсона й Морлі, виконані за допомогою дуже чутливого інтерферометра Майкельсона [22]. Жодного “ефірного вітру” при цьому не було виявлено: швидкості світла, пущеного вздовж напрямку руху Землі відносно гіпотетичного ефіру і строго впоперек цьому напрямку, з високою точністю збігалися.

Досліди Майкельсона і Морлі фактично поховали гіпотезу ефіру. Дуже поширеною є також думка, що саме вони й створили дослідну основу для спеціальної теорії відносності Ейнштейна. Та за знайденими свідченнями самого Ейнштейна, формулюючи основні постулати спеціальної теорії відносності (див. нижче), він на досліди Майкельсона і Морлі не спирався. До цих постулатів вела Ейнштейна, а також Пуанкаре інша логіка, за якою коротко простежимо.

Математик Пуанкаре прийшов фактично до тих самих висновків, що й Ейнштейн [23], в результаті відкриття групи перетворень координат і часу, яка в електродинаміці відіграє роль, подібну до перетворень Галілея (4.89) у механіці, залишаючи інваріантними рівняння Максвелла. Цю групу перетворень Пуанкаре назвав *перетвореннями Лоренца* на відзнаку великих заслуг вченого перед теорією електромагнетизму (хоча Лоренц запровадив лише схожі перетворення і в іншому контексті). Не знижуючи фізичної загальності при розгляді двох інерціальних систем координат — умовно нерухомої системи K і рухомої K' , — можна вважати, що в початковий момент часу ($t = 0$) осі цих координатних систем збігаються і що система K' рухається зі сталою швидкістю вздовж осі Ox системи K (рис. 58). Зміщення початків відліку та різна просторова орієнтація осей координат двох систем K і K' можуть бути усунені чисто геометричним, а не фізичним шляхом. Тому така ситуація тут не розглядатиметься. Для зображеного на рис. 58 випадку перетворення Лоренца мають вигляд

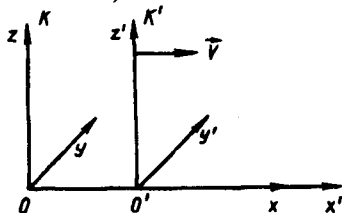


Рис. 58

$$x' = \gamma(x - Vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \gamma(t - Vx/c^2); \quad (4.90)$$

тут

$$\gamma = \{1 - V^2/c^2\}^{-1/2}, \quad (4.91)$$

а c — швидкість світла у вакуумі. Обернені перетворення Лоренца

$$x = \gamma (x' + Vt'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \gamma (t' + \frac{Vx'}{c^2}). \quad (4.90a)$$

За умови малих порівняно зі швидкістю світла c швидкостей відносного руху систем K і K' ($V \ll c$) перетворення Лоренца (4.90) переходять у перетворення Галілея (4.89) для даного розташування систем K і K' (див. рис. 58):

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t \quad (\gamma \approx 1). \quad (4.92)$$

Саме з аналізу даного факту та з урахуванням марних спроб виявити ефірний вітер (а такі спроби робилися і до вирішальних дослідів Майкельсона і Морлі) Пуанкаре і незалежно від нього Ейнштейн зробили висновок про глибокий фізичний (а не формально математичний) зміст перетворень Лоренца (4.90), (4.91)). Та саме більш лаконічна й чітка з фізичного погляду позиція, до якої зрештою дійшов Ейнштейн, набула широкого розповсюдження серед фізиків¹. Але навіть вона торувала собі дорогу із значними труднощами через свою на ті часи парадоксальність, адже революційно стверджувала про різний перебіг часу в різних системах відліку, про відносність понять одночасності й довжини предметів і т. ін.

За висновками Ейнштейна і Пуанкаре, не лише закони механіки, а й взагалі всі закони фізики не дають змоги розрізняти різні інерціальні системи відліку: всі вони абсолютно рівноправні. Отже, за великих швидкостей руху ($v \sim c$) вимагають корекції закони механіки Ньютона, які, за Ейнштейном та Пуанкаре, теж повинні бути інваріантними стосовно перетворень Лоренца (4.90), як загальніших за перетворення Галілея (4.89). Увесь подальший розвиток фізики повністю підтвердив висновки спеціальної теорії відносності, до короткого викладу якої ми й переходимо.

Для встановлення перетворень Лоренца інформація, яка міститься у рівняннях Максвелла (4.61) і яку використав Пуанкаре, є надмірною. Ейнштейн зрештою пішов кардинально простішим і прозорішим шляхом. (Така прозорість взагалі відрізняє геніальну творчість Ейнштейна). Справа в

¹ До простих постулатів навіть Ейнштейн прийшов не одразу, а в результаті кропіткого аналізу.

тому, що з рівнянь Максвелла випливає існування не лише плоских хвиль, що були розглянуті нами вище, а й *сферичних*, які радіально розходяться, наприклад, від точкового джерела світла. Рівняння фронту сферичної світлової хвилі, яка в початковий момент часу ($t = 0$) вийшла з точкового джерела, розташованого в початку координат $x = 0, y = 0, z = 0$, має вигляд

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (4.93)$$

З наведених нижче постулатів Ейнштейна перетворення, які відповідають переходу від умовно нерухомої системи координат K до рухомої відносно K зі сталою швидкістю ($V = \text{const}$), тобто до K' , повинні залишати інваріантним рівняння фронту сферичної хвилі

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (4.94)$$

Така умова з очевидністю кардинально простіша за умову інваріантності рівнянь Максвелла (4.61).

Постулати Ейнштейна, сформульовані ним в знаменитій праці "До електродинаміки рухомих тіл" (1905), читаються таким чином:

"1. Закони, за якими змінюється стан фізичних систем, не залежать від того, до якої з двох систем координат, що рухаються одна відносно одної рівномірно й прямолінійно, відносяться ці зміни.

2. У "нерухомій" системі координат кожен промінь світла рухається з цілком певною швидкістю c незалежно від того, випромінює його рухоме чи нерухоме тіло".

Перший постулат за сучасною термінологією означає інваріантність законів природи стосовно зазначеної в ньому заміни систем координат. Другий констатує універсальну сталість швидкості світла незалежно від руху чи спокою його джерела у вибраній системі координат.

Обґрунтовуючи перетворення Лоренца (4.90), (4.91), на базі постулатів Ейнштейна, зазначимо, що прямим підставленням цих перетворень можна переконатися, що вони дійсно залишають рівняння (4.93) інваріантним, перетворюючи його у (4.94). (Пропонуємо перевірити це). Всі інші перетворення, що мають таку саму властивість, відрізняються від (4.90) тим, що осі двох розглядуваних систем координат можуть не збігатися за напрямом, тобто бути повернутими одна відносно одної на фіксовані кути. Можуть не збігатися також початки координат розглядуваних систем у початкові моменти часу, а отже, й розташу-

вання точкового джерела світла в них. Тому загальніше слід було б казати про інваріантність так званого інтервалу

$$\Delta s^2 \equiv \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2. \quad (4.95)$$

Та це не міняє суті задачі [28].

Коротко нагадаємо відомі з елементарного курсу твердження теорії відносності про відносність поняття *довжина* тіла (у напрямі руху) і *одночасність* подій для різних інерціальних систем.

Нехай в умовно нерухомій системі координат K кінці лінійки, що лежить нерухомо паралельно осі Ox , мають координати x_2, x_1 . Тоді її довжина l дорівнює

$$l = x_2 - x_1. \quad (4.96)$$

У рухомій системі K' за довжину лінійки l' природно прийняти різницю координат її кінців $l' = x'_2 - x'_1$ в той самий (для K') момент часу t' . Тоді за (4.90) дістанемо

$$l = \gamma l' \text{ або } l' = l/\gamma = l\sqrt{1 - V^2/c^2} < l. \quad (4.97)$$

Отже, в рухомій системі довжина лінійки l' менша за довжину в нерухомій l .

Нехай тепер у нерухомій системі координат K розглядаються дві одночасні в ній події ($t_1 = t_2$), що відбуваються в точках x_1 і x_2 відповідно. Тоді в системі K' для тих самих подій за (4.90) матимемо

$$\Delta x' = \gamma \Delta x; \quad \Delta t' = -\gamma \frac{V \Delta x}{c^2}. \quad (4.98)$$

Тобто в рухомій системі K' події не одночасні і такі, що відбуваються на різних відстанях одна від одної.

Назвемо проміжок часу, вимірюваний у відносно нерухомій системі координат K нерухомих годинником, *власним проміжком часу* $\tau \equiv t_2 - t_1$. Нехай годинник розміщено у початку координат (де $x = 0$) нерухомих системи. З огляду на (4.90) матимемо

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \gamma \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (4.99)$$

Отже, в рухомій системі координат K' проміжки $\Delta t'$ часу між двома подіями довщі за власний проміжок часу τ .

Нарешті, звернемося до закону перетворення швидкостей при переході від *нерухомих* системи K до *рухомих* K' . За визначенням маємо

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (4.100)$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (4.100a)$$

Користуючись оберненими перетвореннями Лоренца (4.90a), неважко дістати

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + Vdt')}{\gamma(dt' + \frac{Vdx'}{c^2})} = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}; \quad (4.101)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \frac{Vdx'}{c^2})} = \frac{v'_y}{\gamma(1 + v'_x V/c^2)};$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z}{\gamma(1 + v'_x V/c^2)}.$$

Як бачимо, це не подібні до закону перетворення Галілея для швидкостей, яке має вигляд прямого векторного додавання

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}. \quad (4.102)$$

(Рекомендуємо розписати у компонентах по осях координат). Проте за умови $v, V \ll c$ обидва перетворення практично збігаються.

Нехай у рухомій системі координат частинка рухається вздовж осі $O'x'$ і, отже, для неї $v'_x \neq 0$; $v'_y = 0$; $v'_z = 0$. Нехай це така частинка, швидкість якої може досягти швидкості світла c (далі побачимо, що така частинка не має маси, наприклад, фотон). Тоді в нерухомій системі K для неї за (4.101) матимемо

$$\lim_{v'_x \rightarrow c} v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{cV}{c^2}} = c; \quad v_y = 0; \quad v_z = 0. \quad (4.103)$$

Як бачимо, така частинка і в нерухомій системі має ту саму швидкість c . Ця швидкість є найбільшою у природі.

§ 4.12. Релятивістська динаміка матеріальної точки

Згідно з постулатами Ейнштейна закони Ньютона вимагали свого узагальнення, аби перетворитися на інваріантні щодо перетворень Лоренца (4.90) (котрі переходять у перетворення Галілея (4.92) при малих порівняно зі швидкістю

швидкостях). Опускаючи тут дещо переобтяжливі для загального курсу калькуляції, наведемо отриманий результат¹.

Узагальнюючи другий закон Ньютона у разі великих швидкостей руху, Ейнштейн довів, що йому можна надати звичайного вигляду

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (4.104)$$

але при цьому імпульс частинки \vec{p} визначають за формулою

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.105)$$

(дод. 2). Параметр m , що фігурує в (4.105), дістав назву *маси спокою* з причини, зрозумілої з подальшого. Нерідко множник

$$M(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.106)$$

називають *масою рухомої частинки*. Це роблять за аналогією з нерелятивістським випадком, оскільки імпульс \vec{p} можна подати у формально традиційному вигляді

$$\vec{p} = M(v) \vec{v}. \quad (4.107)$$

За малих швидкостей руху ($v \ll c$) маса рухомої частинки практично збігається з її масою спокою m , а імпульс \vec{p} — з нерелятивістським імпульсом $\vec{p}_0 = m\vec{v}$.

Найважливішим наслідком узагальнення (4.104), (4.105) виявилася нова формула для енергії частинки, яку можна обчислити за роботою сили \vec{F} на переміщенні $d\vec{r}$. Згідно з (4.104), (4.105)

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{v} dt = \vec{v} d\vec{p}. \quad (4.108)$$

Продовжуючи ланцюжок перетворень, запишемо

$$\vec{v} d\vec{p} = d(\vec{p} \vec{v}) - \vec{p} d\vec{v} = d\left\{ \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right\} - \frac{mvdv}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.109)$$

¹ Досконалий і порівняно короткий шлях до релятивістських рівнянь, який не викликає питань, пролягає через запроваджений Мінковським чотиривимірний формалізм (дод. 2).

Тут враховано, що $\vec{v}^2 = v^2$, $\vec{v} d\vec{v} = v dv$ і для скорочення вводиться стандартне позначення

$$\beta = v/c. \quad (4.110)$$

Останній доданок у (4.109) з урахуванням (4.110) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} -\frac{mvdv}{\sqrt{1-\beta^2}} &= -\frac{m}{2} \left\{1 - \frac{v^2}{c^2}\right\}^{-1/2} dv^2 = \\ &= d\left\{mc^2 \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}\right\}. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Отже, для δA завдяки (4.109) та (4.111) остаточно маємо

$$\begin{aligned} \delta A &= d\left\{\frac{mv^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + mc^2 \sqrt{1-\beta^2}\right\} = \\ &= d\left\{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right\}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Звідси (з точністю до константи) для енергії E знаходимо

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4.113)$$

Для його розшифровки вдамося до нерелятивістського наближення, яке відповідає умові

$$\beta^2 = v^2/c^2 \ll 1. \quad (4.114)$$

Розкладаючи $\{1 - \beta^2\}^{-1/2}$ в степеневий ряд за β^2 , для E дістанемо

$$\begin{aligned} E &= mc^2 (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx mc^2 \left\{1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots\right\} = \\ &= mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (4.115)$$

Другий доданок $mv^2/2$ — це нерелятивістський вираз для кінетичної енергії: Що ж до першого доданка mc^2 , то оскільки він сталий, його за звичкою хочеться відкинути як не істотну адитивну (до енергії) константу. Та, зважаючи на те, що ця константа сконструйована з таких фундаментальних величин як маса спокою m і швидкість світла c , Ейнштейн витлумачив¹ її, як власну енергію частинки, яку вона має в стані спокою (коли $v = 0$):

$$E_0 = mc^2. \quad (4.116)$$

¹ Насправді інтерпретація Ейнштейном доданка mc^2 базувалася на детальніших міркуваннях [1].

Ця смілива для свого часу інтерпретація блискуче підтвердилася. Її величезна роль спливає в реакціях ядерних і суб'ядерних перетворень і лежить, зокрема, в основі ядерної енергетики. Взагалі, починаючи від виявлення Ерстедом зв'язку між магнетизмом і електрикою і до геніального прозріння Ейнштейна, наука про такі далекі від прямої наочності речі, які вивчає електродинаміка, з безпрецедентною для історії науки лавиноподібною швидкістю сятнула величезних висот. Таких грандіозних здобутків наука не знала з античних часів до перших десятиліть XIX ст., навіть якщо врахувати тріумфальну ходу ньютонівської механіки, розпочату в XVII ст.

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ТА ЗАПИТАННЯ

1. *Визначіть напруженість і потенціал електростатичного поля та встановіть зв'язок між ними.*
2. *Доведіть теорему Остроградського—Гаусса для вакууму.*
3. *Розкажіть про вектор електростатичної індукції та його зв'язок з напруженістю поля.*
4. *Що ви знаєте стосовно провідників в електростатичному полі?*
5. *Розкажіть про діелектрики в електростатичному полі та вектор поляризації.*
6. *Опишіть електроємність, конденсатори та вплив діелектрика на ємність конденсатора.*
7. *Що ви знаєте про сталій електричний струм та параметри, які його визначають?*
8. *Розкажіть про закон Ома для ділянки кола та повного кола.*
9. *У чому полягає теплова дія струму?*
10. *Запишіть закон Ома та Джоуля—Ленца в диференціальній формі.*
11. *Яка магнітна дія струму та дія магнітного поля на струм? Яка природа магнетизму за Ампером?*
12. *Дайте пояснення щодо векторів напруженості магнітного поля та його магнітної індукції. Який зв'язок між цими векторами?*
13. *Сформулюйте й доведіть теорему повного струму.*
14. *Розкрийте закон електромагнітної індукції Фарадея. Що таке самоіндукція та індуктивність провідників?*
15. *Що ви знаєте про екстроструми та час їхньої релаксації?*

16. Розкажіть про RLC -контур та вільні й вимушені коливання в ньому. Що ви знаєте про резонанс струмів і напруг?

17. Наведіть загальне визначення вектора електричної індукції (зміщення); сформулюйте й запишіть друге рівняння Максвелла.

18. Розкажіть про закон Фарадея і перше рівняння Максвелла.

19. Що ви знаєте про взаємозв'язок закону збереження заряду й струм зміщення? Запишіть третє рівняння Максвелла.

20. Запишіть і проаналізуйте повну систему рівнянь Максвелла.

21. Розкажіть про електромагнітні хвилі.

22. Що ви знаєте про теорію відносності Ейнштейна?

Атомна й субатомна фізика давно вже стала практично необхідною в таких сучасних галузях науки й техніки, як ядерна енергетика, напівпровідникова й лазерна техніка тощо. В основі атомної фізики лежить квантова механіка. З погляду авторів, викладаючи загальні основи квантової механіки, слід значно розширити та поглибити проти прийнятого на сьогодні розгляд генезису та аналіз рівняння Шредінгера на основі всебічного обговорення ланцюжка модельних одновимірних задач із прямокутними потенціальними бар'єрами та ямами, які не потребують складної математики і водночас гарантують переконливий аналіз принципів відмінностей між законами мікро- і макрофізики та демонструють певну відповідність між ними. Тому для вивільнення місця у посібнику не обговорюються елементарні відомості про будову речовини та її складових (типи твердих тіл, будова атомів та молекул тощо), відомих з елементарного курсу.

Визнано за доцільне звернутися до Ейнштейнового методу обґрунтування формули Планка (хоч історично він був далеко не першим) як виключно простого за формою й пов'язаного з фундаментальним поняттям про *стимульоване (вимушене)* випромінювання, яке було вперше запроваджене Ейнштейном і виявилось ключовим у сучасній теорії лазерів та мазерів.

Зазначимо, що до розділу 5 з електродинаміки й механіки перенесено ті закономірності класичної фізики, які виявилися найактуальнішими саме у фізиці мікросвіту (чи то безпосередньо, чи то завдяки принципу відповідності, який відіграє неабияку роль у новітній фізиці), зокрема питання про силу Лоренца та рух заряджених частинок у схрещених електричному й магнітному полях, необхідних для фізичної ідентифікації елементарних частинок по їхніх треках у камерах Вільсона, фотоемульсіях та бульбашкових камерах, відомих з елементарного курсу. Тут також розгля-

нуто й мікроінтерпретацію законів Ома та Джоуля—Ленца з обговоренням дуже важливого поняття про ефективну масу.

У межах загального курсу неможливо уникнути суто описових (якісних) підходів до численних закономірностей у мікросвіті, оскільки відповідні калькуляції математично дуже складні; тому інколи використовуються певні фізичні аналогії.

Короткий термін “субатомна фізика” починає витісняти традиційний і дещо задовгий термін “фізика атомного ядра та елементарних частинок”. Ми використовуємо короткий термін.

Глава 1

ПРОБЛЕМИ КЛАСИЧНОЇ ФІЗИКИ В ОБЛАСТІ МІКРОЯВИЩ. ПОЯВА КВАНТОВИХ ІДЕЙ

§ 1.1. Сила Лоренца. Заряджені частинки в електричному й магнітному полях

Як відомо з елементарного курсу, фізичні процеси у мікросвіті на відміну від макроскопічних відповідають квантовим законам. Проте й у мікросвіті цілу низку задач можна з успіхом розв’язувати за допомогою класичних (не квантових) уявлень¹. До таких задач належить, зокрема, аналіз треків елементарних частинок у камерах Вільсона. Не вдаючись до з’ясування особливостей взаємозв’язку класичних і квантових законів на основі принципу відповідності (див. далі), розглянемо класичну теорію руху заряджених частинок у електричному \vec{E} та магнітному \vec{B} полях, яка має пряме відношення до згаданого вище аналізу треків та до цілої низки інших важливих задач. З цією метою обґрунтуємо формулу для так званої сили Лоренца \vec{F}_L , яка діє на частинку з зарядом q , що рухається із швидкістю \vec{v} в електричному \vec{E} та магнітному \vec{B} полях. Сила Лоренца визначається за формулою

$$\vec{F}_L = q \{ \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \}. \quad (1.1)$$

¹ Саме ця обставина врешті зумовлює справедливість принципу відповідності між квантовою і класичною теоріями.

Квадратні дужки символізують векторний добуток \vec{v} на \vec{B} . Інколи силою Лоренца називають лише *магнітну складову сили* (1.1)

$$\vec{F}_m = q [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (1.1a)$$

Для виведення формули (1.1a), а з нею й (1.1), вдамося до закону Ампера (див. розділ 3):

$$\delta \vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}], \quad (1.2)$$

де I — сила струму в провіднику; $d\vec{l}$ — напрямлений його відрізок (напрямок котрого збігається з технічним напрямком струму I); $\delta \vec{F}$ — сила, що діє на відрізок $d\vec{l}$ з боку магнітного поля \vec{B} .

З огляду на одновимірність тонкого провідника можна записати

$$I d\vec{l} = \vec{j} dS dl = \vec{j} dV. \quad (1.3)$$

Тут \vec{j} — густина струму; dS — площа поперечного перерізу провідника; $dV = dS dl$ — об'єм розглядуваного відрізка провідника dl . Але густину струму \vec{j} можна подати у вигляді

$$\vec{j} = qn\vec{v}, \quad (1.4)$$

де n — концентрація носіїв заряду; \vec{v} — їхня дрейфова швидкість (тобто середнє значення впорядкованої компоненти швидкості руху елементарних носіїв заряду). Отже, для $\delta \vec{F}$ дістанемо

$$\delta \vec{F} = q [\vec{v}, \vec{B}] ndV. \quad (1.5)$$

Але $ndV = \delta N$ — це кількість носіїв заряду в об'ємі dV ; тому на кожний елементарний заряд діє сила

$$\vec{F}_m = \frac{\delta F}{\delta N} = [\vec{v}, \vec{B}]q, \quad (1.6)$$

яка збігається з (1.1a), що й треба було визначити. Що ж до електричної компоненти сили Лоренца

$$\vec{F}_e = q\vec{E}, \quad (1.7)$$

то вона є простою екстраполяцією на мікрочастинки відомої з електродинаміки формули (див. розділ 4).

Звичайно, ланцюжок міркувань, що ведуть до формули (1.1), є в дійсності лише евристичним, а не доказовим. Проте усі наслідки з формули (1.1) з часом дістали повне експериментальне підтвердження, й тому ця формула безперечно відбиває закон природи.

З формули (1.1a) видно, що магнітна складова \vec{F}_m сили Лоренца \vec{F}_L — нормальна до напрямку руху (тобто до \vec{v}) та до вектора магнітної індукції \vec{B} . Вона не виконує роботи, змінюючи лише імпульс частинки.

На підставі формули (1.1) можна переходити до вивчення руху заряджених частинок в електричному та магнітному полях.

Рух частинки в сталому електричному полі. Нехай частинка з зарядом q рухається в сталому електричному полі з напруженістю $\vec{E} = \text{const}$. Тоді за другим законом Ньютона та формулою (1.7) матимемо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \quad (\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}). \quad (1.8)$$

Тут m — маса частинки; q — її заряд. Оскільки права частина рівняння (1.8) — стала величина, то рівняння інтегрується безпосередньо, тому дістанемо

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \gamma \vec{E} t + \vec{v}_0; \\ \vec{r} &= \frac{\gamma \vec{E} t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

де $\gamma = q/m$ — відношення заряду до маси (типовий параметр механіки руху заряджених частинок); \vec{v}_0, \vec{r}_0 — вектор початкової швидкості та початковий радіус-вектор частинки відповідно. *Рух частинки у сталому електричному полі, як і слід було чекати, рівноприскорений.*

Рух у сталому магнітному полі. Нехай тепер частинка з зарядом q рухається в сталому магнітному полі $\vec{B} = \text{const}$. Тоді за другим законом Ньютона і формулою (1.1a) матимемо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q [\vec{v}, \vec{B}]. \quad (1.10)$$

Розкладемо вектор швидкості \vec{v} на нормальну до вектора \vec{B} і паралельну йому складові:

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel \quad (\vec{v}_\perp \perp \vec{B}; \quad \vec{v}_\parallel \parallel \vec{B}). \quad (1.11)$$

Підставляючи розклад (1.11) у (1.10), знайдемо

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \gamma [\vec{v}_\perp; \vec{B}]; \quad \frac{d\vec{v}_\parallel}{dt} = \vec{0}. \quad (1.12)$$

Оскільки $[\vec{v}_\perp, \vec{B}] \perp \vec{v}_\perp$, то, як відомо з механіки, \vec{v}_\perp не змінюється за модулем, а лише за напрямом, причому

$$|\vec{v}_\perp| = \text{const}; \quad \frac{v_\perp^2}{R} = \gamma v_\perp B. \quad (1.13)$$

Тут R — радіус кривизни траєкторії

$$R = v_\perp / \gamma B = \text{const}. \quad (1.14)$$

З (1.13) і (1.14) випливає, що в сталому магнітному полі $B = \text{const}$ заряджена частинка рухається по спіралі радіуса R з віссю, паралельною вектору магнітної індукції B .

Грунтовно й детально розглянути щойно обговорену задачу можна аналогічно наступній задачі (поклавши в ній $E = 0$), до розв'язання якої й перейдемо з наведенням регулярної процедури аналізу — точної, повчальної і повної, хоча й трохи задовгої.

Рух частинки в схрещених електричному й магнітному полях. Нехай частинка з зарядом q рухається в схрещених електричному ($E = \text{const}$) і магнітному ($B = \text{const}$) полях, які для простоти вважатимемо взаємно перпендикулярними ($E \perp B$). Спрямуємо вісь Oy вздовж вектора E , а вісь Oz — вздовж вектора B . Тоді

$$\vec{E} \{0, E, 0\}; \quad \vec{B} \{0, 0, B\}. \quad (1.15)$$

Розписана у компонентах сила Лоренца (1.1) матиме вигляд

$$F_{Lx} = qBv_y; \quad F_{Ly} = q \{E - Bv_x\}; \quad F_{Lz} = 0. \quad (1.16)$$

Звідси, за другим законом Ньютона, дістанемо

$$m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y; \quad m \frac{dv_y}{dt} = q \{E - Bv_x\}; \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (1.17)$$

Запровадивши стандартні позначення

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}, \quad (1.18)$$

знаходимо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = \gamma B \dot{y}; \quad \dot{y} = \gamma \{E - B \dot{x}\}; \quad \dot{z} = 0. \quad (1.19)$$

Останнє з цих рівнянь інтегрується безпосередньо:

$$\dot{z} = v_z^0 = \text{const}; \quad z = v_z^0 t + z_0, \quad (1.20)$$

демонструючи рівномірний рух частинки вздовж осі Oz , паралельній магнітному полю (1.15).

Перші два рівняння найпростіше розв'язати, ввівши комплексну функцію¹

¹ Такий спосіб було вже двічі використано раніше при розгляданні механічних (див. розділ 1) та електричних (розділ 4) коливань.

$$\xi = x + iy \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (1.21)$$

З урахуванням, що $i^2 = -1$ та $i^{-1} = -i$, за допомогою перших двох рівнянь (1.19) для ξ (1.21) знаходимо

$$\dot{\xi} = -i\gamma B \xi + i\gamma E. \quad (1.22)$$

Пряме інтегрування рівняння (1.22) за часом веде до

$$\xi = -i\gamma B \xi + i\gamma Et + \zeta_0, \quad (1.23)$$

де ζ_0 — поки що невизначена комплексна константа, пов'язана, як побачимо, з початковими умовами. (Якщо детальні підрахунки читачеві не потрібні, можна перейти одразу до аналізу формули (1.28) та наступних за нею).

Зауважимо, що рівняння належить до звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, які ми вже неодноразово розв'язували впродовж курсу (див. розділи 1, 4).

Загальний розв'язок рівняння (1.23) складається з суми загального розв'язку ξ_0 відповідного однорідного рівняння

$$\dot{\xi}_0 = -i\gamma B \xi_0 \quad (1.23)$$

та будь-якого частинного розв'язку ξ_1 вихідного рівняння (1.23):

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \xi_1(t). \quad (1.24)$$

Загальний розв'язок $\xi_0(t)$ рівняння (1.23) має вигляд

$$\xi_0(t) = A e^{-i\gamma B t}, \quad (1.25)$$

де A — комплексна стала інтегрування. В справедливості (1.25) неважко переконатися прямим підставленням в (1.23). Повертаючись до вихідного рівняння (1.23), шукаємо його частинний розв'язок у вигляді лінійної функції

$$\xi_1(t) = at + b, \quad (1.26)$$

сталі коефіцієнти якої (a та b) визначимо шляхом підставлення (1.26) у (1.23) й дістанемо¹

$$a = E/B; \quad b = \frac{i}{\gamma B} \{E/B - \zeta_0\}. \quad (1.27)$$

¹ Зауважимо, що розв'язок попередньої задачі можна дістати з наведених тут формул, поклавши в них $E = 0$.

Отже, остаточно для $\xi(t)$ маємо

$$\xi(t) = A e^{-i\gamma B t} + \frac{E}{B} t + \frac{i}{\gamma B} \{E/B - \zeta_0\}. \quad (1.28)$$

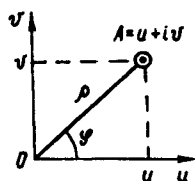
Це й буде загальним розв'язком вихідного рівняння (1.22), яке уособлює другий закон Ньютона. Як і належить, загальний розв'язок рівняння другого порядку (1.22) містить дві довільні комплексні константи A та ζ_0 , які визначаються з початкових умов (див. далі).

Для повернення до декартових координат частинки (x, y) треба визначити реальну та уявну частини розв'язку (1.28):

$$x(t) = \operatorname{Re} \xi(t); \quad y(t) = \operatorname{Im} \xi(t). \quad (1.29)$$

При цьому найзручніше скористатися з показникової форми комплексних чисел і подати константу A у вигляді¹

$$A = \rho e^{i\varphi}, \quad (1.30)$$



де $\rho = |A| = \sqrt{u^2 + v^2}$; $\varphi = \arg A$ (рис. 59).
Комплексну константу ξ_0 зручно подати у формі

$$\xi_0 = \alpha + i\beta. \quad (1.31)$$

Враховуючи наведені позначення (1.30), (1.31), за допомогою (1.28), (1.29) остаточно дістанемо

$$x(t) = \rho \cos(\omega t - \varphi) + (E/B)t + \beta/\gamma B;$$

$$y(t) = -\rho \sin(\omega t - \varphi) + E/\gamma B^2 - \alpha/\gamma B \quad (\omega = \gamma B). \quad (1.32)$$

Це й буде шуканий розв'язок рівнянь руху зарядженої частинки (1.19) у координатній формі.

Сталі інтегрування ρ , φ , α , β визначаються з початкових умов. Згідно з (1.32) для проєкцій швидкості частинки на осі Ox , Oy знаходимо

$$v_x = \dot{x}(t) = -\omega \rho \sin(\omega t - \varphi) + E/B;$$

$$v_y = \dot{y}(t) = -\omega \rho \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.33)$$

До сукупності координат (1.32) і швидкостей (1.33) слід додати ще $z(t)$ з (1.20). Матимемо повну й строгую картину руху зарядженої частинки в сталих і схрещених електричному й магнітному полях (1.15), виражену в координатній формі.

¹ За формулою Ейлера $e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi$.

Формули типу (1.15), (1.32), (1.33) широко використовують при розв'язанні численних задач, пов'язаних з рухом заряджених частинок у різних електровакуумних приладах, а також у камері Вільсона, фотоемульсіях, бульбашкових камерах (коли можна обмежитися нерелятивістським наближенням); ці формули визначають також відомий ефект Хола [15]. Отже, класичні закономірності продовжують успішну "роботу" навіть у світі мікрочастинок (електронів, іонів тощо). Але далеко не в усіх задачах класичні формули "працюють" успішно, про що мова попереду.

Для повноти продовжимо аналіз руху заряджених частинок у схрещених полях, спираючись на формули (1.32), (1.33). Враховуючи (1.32), неважко дістати

$$\left\{x - \frac{E}{B}t - \frac{\beta}{\gamma}\right\}^2 + \left\{y - \frac{E}{\gamma B^2} + \frac{\alpha}{\gamma\beta}\right\}^2 = \rho^2. \quad (1.34)$$

За відсутності електричного поля ($E = 0$) (1.34) переходить у рівняння кола радіуса ρ з центром у точці $\{\beta/\gamma B, -\alpha/\gamma B\}$:

$$\left\{x - \frac{\beta}{\gamma B}\right\}^2 + \left\{y + \frac{\alpha}{\gamma B}\right\}^2 = \rho^2. \quad (1.34)$$

Неважко переконатися при цьому, що ρ збігається з R (1.14), як і слід було чекати. Справді, з визначенням \vec{v}_\perp та з (1.32), (1.33) при $E = 0$ впливає, що

$$v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega\rho = \gamma B\rho. \quad (1.35)$$

Звідси й приходимо до висновку, що $\rho = R$. При $E \neq 0$ траєкторія руху частинки (точніше, її проекція на площину xOy) (див. (1.32)) становить так звану трохойду (щось подібне до "кола" радіуса ρ з неперервно зміщуваним центром, який дрейфує зі сталою швидкістю (див. (1.34), (1.33))

$$\vec{v} = E/B \quad (1.36)$$

паралельно осі Ox .

Дрейфова швидкість зарядженої частинки визначається лише відношенням полів E/B і не залежить від заряду q і маси m самої частинки, яка рухається. Це щось схоже на знесення за течією тіла, що пливе. Сукупна дія електричного й магнітного полів "зносить" частинку вздовж напрямку Ox , надаючи сталої (дрейфової) компоненти її швидкості вздовж цього напрямку. Дуже цікава й повчальна обставина.

§ 1.2. Елементарна електронна Інтерпретація законів Ома та Джоуля—Ленца

Розгляданням зазначених у назві параграфа важливих задач продовжуємо показувати успішне застосування класичних законів для теоретичної мікроінтерпретації феноменологічних закономірностей.

Для простоти вважатимемо провідник ідеальним монокристалом, тобто таким, що має строго періодичну структуру — ідеальну кристалічну решітку. В періодичних силових полях рух частинки моделюють за методом так званої ефективної маси, суть якого буде роз'яснено наприкінці параграфа за простою і ясною (як нам здається) аналогією. А поки що пропонуємо сприйняти на віру, що, замінивши реальну масу частинки m на деяку ефективну m^* , можна в певному розумінні (див. далі) не враховувати дії на неї періодичного поля решітки, вважаючи, що вона рухається лише під дією зовнішніх силових полів. Що ж до вузлів решітки, то взаємодію частинки з ними можна зводити до прямих співударів. Така дуже спрощена модель, як побачимо далі, дає досить переконливе мікропояснення законів Ома та Джоуля-Ленца.

Отже, замінивши реальну масу частинки на ефективну, маємо право не враховувати періодичного силового поля решітки. Це — перше суттєве припущення спрощеної моделі. Другим істотним припущенням буде правомірність розглядати сукупність колективізованих електронів металу як ідеальний електронний газ (точніше, квазіелектронний газ, оскільки реальну масу електрона заміняємо певною (див. далі) ефективною масою). Таке припущення можна виправдати тим, що за рівномірного (в середньому) просторового розподілу колективізованих електронів у провіднику дія “задніх” і “передніх” електронів на кожен окремий електрон взаємно компенсується.

Колективізовані електрони в цьому разі розглядатимемо в металі як ідеальний квазіелектронний газ, частинки якого набувають впорядкованого руху (який накладається на хаотичний тепловий) під дією електричного поля \vec{E} , породжуваного джерелом струму. Маючи на увазі оціночні підрахунки та зважаючи на встановлене в електродинаміці (див. розділ 4), повне перетворення енергії сталого струму на джоулеву теплоту, вважатимемо, що при кожному зіткненні з атомами решітки електрони повністю передають їм енергію, набуту під час прискореного руху між зіткненням з вузлами решітки. Позначимо через λ довжину середнього

вільного пробігу квазіелектронів, а через \vec{E} — напруженість зовнішнього електричного поля в провіднику. Під дією поля прискорення кожного електрона дорівнюватиме

$$\vec{a} = e\vec{E}/m^*, \quad (1.37)$$

де e — заряд електрона; m^* — його ефективна маса. За час вільного пробігу τ таке прискорення призведе до набуття електронем впорядкованої швидкості

$$\vec{v}_{\max} = \vec{a}\tau = \frac{e\vec{E}}{m^*}\tau. \quad (1.38)$$

Середнім (між зіткненнями) значенням впорядкованої швидкості буде

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \vec{v}_{\max} = \frac{e\vec{E}}{2m^*}\tau. \quad (1.39)$$

Звідси для густини струму \vec{j} у провіднику дістанемо

$$\vec{j} = en \langle \vec{v} \rangle = \frac{e^2 n \tau}{2m^*} \vec{E} \quad (1.40)$$

(n — концентрація колективізованих електронів металу). Порівнюючи (1.40) з законом Ома в диференціальній формі (див. розділ 4)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.41)$$

приходимо до висновку про узгодження між собою виразів (1.40) та (1.41), причому

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{2m^*}. \quad (1.42)$$

Зазначимо, що з (1.40) випливає також відомий зв'язок середньої швидкості дрейфу електронів $\langle \vec{v} \rangle$ з так званою *рухливістю* u , яка визначається за законом

$$\langle \vec{v} \rangle = u \vec{E}. \quad (1.43)$$

Зважаючи на (1.40), для рухливості u дістанемо

$$u = \frac{e}{2m^*} \tau. \quad (1.44)$$

За час вільного пробігу τ кожен електрон набуває кінетичної енергії впорядкованого руху K , яка дорівнює

$$K = \frac{1}{2} m^* v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2 E^2}{m^*} \tau. \quad (1.45)$$

Домноживши K на концентрацію електронів n та зваживши на повну (в середньому) передачу набутої електронами

енергії решітці при кожному зіткненні з нею, дістанемо питому потужність Джоулева тепловиділення у вигляді

$$w = \frac{1}{2} \frac{ne^2\tau}{m^*} E^2. \quad (1.46)$$

При ототожненні (1.42) формула (1.40) дійсно збігається з законом Джоуля і Ленца в диференціальній формі (див. розділ 4).

Отже, закони Ома та Джоуля—Ленца справді знаходять задовільне якісне мікропояснення в рамках обговореної вище спрощеної моделі. Грунтовне ж пояснення вимагає складних теоретичних обчислень на базі так званих *кінетичних рівнянь*, що виходить далеко за межі загального курсу фізики.

Залишилося пояснити тільки зміст ефективної маси m^* , який, як нам здається, задовільно демонструється на елементарному прикладі.

Розглянемо рух частинки з масою m по періодично хвилястій похилій площині зі сталою довжиною хвилі λ (рис. 60) під дією сили ваги P .

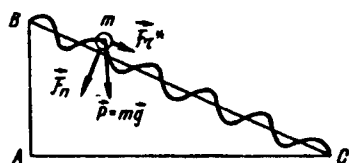


Рис. 60

Не звертаючи уваги на деталі руху (на колювання відносно лінії BC), простежимо за основною тенденцією руху: за спуском вздовж напрямку BC (див. рис. 60). Очевидно, реальний рух відбувається внаслідок дії некомпенсованої реакціїми

зв'язків “скочувальної сили” $F_{ск}$, яку можна подати у вигляді двох доданків: сталого доданка F_c^* , паралельного прямій BC, і періодичного (у просторі) доданка f , зумовленого хвилями поверхні

$$\vec{F}_{ск} = \vec{F}_c^* + \vec{f}. \quad (1.47)$$

Згідно з таким розбиттям сили (1.47) прискорення \vec{a} так само можна подати у вигляді двох доданків

$$\vec{a} = \vec{a}_c^* + \vec{a}_1 \quad (1.48)$$

причому

$$\vec{a}_c^* = \vec{F}_c^*/m = \text{const}, \quad (1.49)$$

в той час як \vec{a}_1 матиме періодичний (у просторі) характер

$$\vec{a}_1(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r})/m \quad (1.50)$$

з періодом λ . Очевидно, середнім (по періоду λ) прискоренням, що зумовлює основну тенденцію спуску вздовж ВС, буде

$$\langle \vec{a} \rangle_{\tau} = \frac{\vec{F}_{\tau}^*}{m} + \frac{\langle \vec{f} \rangle_{\tau}}{m}. \quad (1.51)$$

Визначимо ефективну масу m^* з рівності

$$\vec{F}_{\tau}^*/m^* \equiv \{ \vec{F}_{\tau}^* + \langle \vec{f} \rangle_{\tau} \} / m. \quad (1.52)$$

Тоді з огляду на (1.51), очевидно, матимемо

$$m^* \langle \vec{a} \rangle_{\tau} = \vec{F}_{\tau}^*, \quad (1.53)$$

що за формою збігається з другим законом Ньютона для руху фіктивної частинки з масою m^* під дією сили \vec{F}_{τ}^* , тобто під дією сталої складової скочувальної сили $\vec{F}_{\text{СК}}$ без урахування періодичної її складової.

Звичайно, формула (1.52) не є “рецептурною” для реального обчислення ефективної маси m^* . Вона лише обґрунтовує принципову можливість запровадити ефективну масу m^* . У дійсності в описаній постановці ефективна маса може розглядатися як емпіричний параметр. З цього приводу пропонуємо розробити інструкцію до лабораторної роботи по визначенню ефективності маси за допомогою хвилястої похилої площини.

Метод ефективної маси належить до методу *квaziчастинок*, яким кардинально спрощується розв’язання численних теоретичних задач, що не піддаються точному розв’язанню. (Звертаємо увагу на цю обставину).

§ 1.3. Народження квантової фізики

Квантова фізика народилася на самому початку ХХ ст.: 19 жовтня 1900 р. на засіданні Німецького фізичного товариства в Берліні Макс Планк виступив з доповіддю “Про поліпшення формули Віна для спектрального розподілу”, в якій вперше запропонував свою славнозвісну формулу, що носить тепер його ім’я, і яку буде встановлено тут за методом Ейнштейна (див. далі). Формула Планка відома читачеві з елементарного курсу фізики. Простежимо генезис первинних квантових уявлень.

Добре узгоджувана з експериментом формула Планка була отримана спочатку напівемпірично. Надалі Планк знайшов для неї і теоретичне обґрунтування, яке, проте, суперечило фундаментальним концепціям класичної фізи-

ки, оскільки було пов'язане з дивною на ті часи гіпотезою про дискретний — квантовий — характер електромагнітного випромінювання атомами речовини, модельованими Планком сукупністю осциляторів [1]. Лише в припущенні, що модельовані осциляторами атоми речовини випромінюють світло порціями, кратними величині¹

$$\epsilon_0 = h \nu. \quad (1.54)$$

Планку вдалося дістати вірну формулу, яка чудово узгоджувалася з експериментом². Усі спроби позбутися такого дивного з класичного погляду припущення закінчилися невдачею. Довелося визнати реальність гіпотези про дискретний характер електромагнітного (зокрема, світлового) випромінювання атомами речовини. Так, уперше для мікроінтерпретації макроскопічних закономірностей довелося зрестися класичних законів щодо характеру, електромагнітного випромінювання такими мікрооб'єктами, як атоми речовини. Та це виявилось лише початком кардинального перегляду фізичних законів, що панують у мікросвіті. Наступні кроки на шляху до сучасної квантової фізики здійснили Ейнштейн, Бор [1, 41] та де Бройль.

Аналізуючи сукупність таких явищ, як випромінювання чорного тіла, фотолумінісценція, виникнення катодних променів, закони зовнішнього фотоефекту [1, 41] та ін., Ейнштейн дійшов висновку, що світло не тільки випромінюється порціями (квантами), а взагалі існує у формі квантів, тобто енергія світла завжди розподілена у просторі дискретно, квантами. Отже, кванти є формою існування електромагнітних полів. Сьогодні кванти світла — фотони — з повним правом відносять до сім'ї елементарних частинок.

Отже, розвиваючи й поглиблюючи вихідні ідеї Планка, Ейнштейн фактично першим серед фізиків висунув гіпотезу про подвійну — корпускулярно-хвильову природу світла. У своїй праці “Про одну евристичну точку зору стосовно виникнення й перетворення світла” (1905 р.) Ейнштейн писав: “...незважаючи на повне підтвердження експериментом теорії дифракції, відбиття, заломлення, дисперсії і т. д.,

¹ $h = 6,626 \cdot 10^{-27}$ ерг.с. — стала Планка; ν — частота випромінюваного світла.

² Універсальність законів термодинаміки дає змогу на основі конкретних моделей діставати загальні результати.

може виявитись, що теорія світла, яка оперує неперервними просторовими функціями, призведе до суперечності з експериментом, коли її будуть застосовувати до явищ виникнення й перетворення світла”.

І справді, експеримент давно й беззастережно підтвердив подвійну природу світла: явища дифракції, інтерференції, поляризації, дисперсії [36] і т. д. свідчать про хвильовий характер поширення світла у просторі, а фотоефект, ефект Комптона (див. далі) — про корпускулярний характер елементарних актів взаємодії світла з мікрооб'єктами, що входять до складу речовини (електронами, атомами тощо).

Якими б дивними на ті часи не були уявлення про квантову природу світла, успішне й переконливе пояснення на такій основі перелічених вище та ряду інших фізичних явищ у мікросвіті сприяло поширенню квантових ідей. Особливо важливим кроком у розвитку квантової теорії було пояснення Н. Бором природи лінійчастих спектрів випромінювання атомів водню на базі висунутих ним постулатів. (Вони відомі з елементарного курсу. Тому лише побіжно нагадаємо суть).

Як відомо [43], дослідженнями Резерфорда встановлено, що атоми матеріальних тіл складаються з компактного позитивно зарядженого ядра, навколо якого рухаються негативні електрони. Кулонівські сили взаємодії електронів з ядрами за своїм характером подібні до гравітаційних. Це призвело до виникнення відомої ідеї про квазіпланетарну будову атома. Проте вона одразу ж наштовхнулася на значні труднощі. Згідно із законами класичної електродинаміки електрони, рухаючись по замкнених траєкторіях (і, отже, прискорено¹), повинні були б безперервно випромінювати електромагнітну енергію за рахунок втрати механічної, внаслідок чого радіуси їхніх орбіт повинні були б весь час зменшуватися, а електрони впасти на ядра своїх атомів. Крім того, в міру зменшення радіуса орбіт електронів швидкість їхнього обертання повинна була зростати. Отже, атоми повинні були б бути нестійкими, а спектри їхнього випромінювання — неперервними (частота електромагнітних хвиль неперервно зростала б з наближенням електронів до ядра). Але нічого подібного на досліді не спостерігається: атоми напрочуд стійкі й стабільні, а спектри їхнього випромінювання — лінійчасті [43] й з

¹ За законами електродинаміки частинки, що рухаються прискорено, випромінюють електромагнітну енергію.

характерними серіями ліній для кожного хімічного елементу. Зважаючи на зазначені вище факти та успіхи неабияких дивних (на ті часи) гіпотез, датський фізик Н. Бор всупереч законам класичної механіки та електродинаміки проголосив два нові фізичні постулати [43]. У викладі відомого фізика Шпольського вони звучать так:

1. Атоми та атомні системи можуть довгий час перебувати лише у певних стаціонарних станах, в яких, незважаючи на прискорений рух заряджених частинок, що входять до їх складу, вони не випромінюють і не поглинають енергію. У цих станах атомні системи мають енергії, що утворюють дискретний ряд: $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$. Стаціонарні стани стійкі, усяка зміна енергії системи в результаті випускання або поглинання електромагнітного випромінювання або внаслідок співударів може відбуватися лише при повному переході (стрибком) з одного з цих станів в інший.

2. Переходячи з одного стаціонарного стану в інший, атоми випускають або поглинають випромінювання лише строго визначеної частоти. Випромінювання, що випускається або поглинається при переході із стану E_m до E_n , є монохроматичним і його частота ν визначається за умовою

$$h\nu = E_m - E_n, \quad (1.55)$$

де h — стала Планка.

Умову (1.55) називають *правилом частот Бора*. Постулати Бора дали змогу побудувати досить переконливу (на ті часи) теорію атома водню та пояснити всі особливості спектра його випромінювання [43]. Але поширити на інші хімічні елементи засновану на згаданих постулатах теорію ні Бору, ні його послідовникам не вдалося. Тепер вже відомо, що у мікросвіті діють інші порівняно з класичними фізичні закони. Це закони квантової механіки, виражені рівнянням Шредінгера, про яке детальна мова попереду. В процесі побудови сучасної квантової теорії довелося врешті зректися законів механіки Ньютона та електродинаміки Максвелла, замінивши їх новими, які переходять у класичні за певних умов (див. далі). Шлях до реальної квантової теорії пролягає через аналіз ще кількох вирішальних закономірностей, серед яких особливе місце посідає рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоэффекту, теорія так званого ефекту Комптона, та гіпотеза де Бройля [43], які потребують окремого розгляду (§ 1.4).

На шляху до сучасної теорії науки довелося подолати певний бар'єр, пов'язаний з її виходом за межі безпосередньо спостережуваного та наочного, коли значно зростає

роль так званої *математичної гіпотези* і методу теоретичних спроб і помилок; коли формальне домінує над наочним, до якого так часто вдаються при вивченні класичних розділів фізики і що робить цю науку такою ясною і прозорою. Оскільки подібний бар'єр (у мініатюрі) доводиться долати студенту і зараз, доцільно, з нашого погляду, коротко пояснити неминучість виходу науки за межі наочного, коли значно змінюється співвідношення навіть між такими поняттями, як розуміти і уявляти (наочно).

Наочні уявлення людини ґрунтуються на тій інформації, яку постачають до мозку органи чуття (зір, слух, відчуття смаку, запаху, дотику). Усі наші наочні образи комбінуються з елементів, сформованих за допомогою відповідних органів чуття і тільки з них. Без зору чи слуху не було б у нашому уявленні пов'язаних з цими органами чуття образів; а якби були ще якісь додаткові органи чуття, то наше уявлення збагатилося б новими, невідомими нам образами. Та було б наївно думати, що навколишній світ на всіх рівнях має лише такі властивості, для яких у нас існують органи чуття. (Життєдіяльність людини макроскопічна і як така повністю забезпечується наявними органами чуття). Це означає, що людина у своєму пізнанні рано чи пізно повинна була зустріти такі властивості навколишнього світу, які знаходяться вже поза можливостями нашого наочного уявлення. З цього моменту поняття уявляти (наочно) і розуміти вже перестають бути тотожними. Сучасна наука вважає зрозумілими усі ті властивості й явища навколишнього світу, для яких відкрито рівняння, котрі дають змогу правильно передбачити хід подій, незважаючи на те, чи уявляємо ми їх наочно, чи ні. Аналітичні можливості людського мислення виявилися потужнішими за наше наочне уявлення, і в цьому триумф людського розуму, хоч і трохи прикро чогось не уявляти (наочно).

Наочне уявлення в сучасній науці часто замінюють міркуванням за аналогією. Так, наслідки хвильових властивостей мікрооб'єктів можна передбачити за аналогією з хвильовими процесами в суцільних середовищах, наслідки корпускулярних властивостей — за аналогією з класичними частинками. І все це незважаючи на те, що мікрооб'єкти, напевно, не є тотожними ні класичним хвилям, ні класичним частинкам, виступаючи чимось третім, не даним нам у пряме відчуття. З таких позицій і слід виходити, приступаючи до вивчення дивовижних (з повсякденного погляду) законів мікросвіту.

§ 1.4. Фотоефект, ефект Комптона; корпускулярно-хвильовий дуалізм

Серед закономірностей зовнішнього фотоефекту, відомого з елементарного курсу фізики, дивною з класичного погляду була наявність так званої “червоної границі фотоефекту”, яку Ейнштейну вдалося пояснити тільки на базі уявлень стосовно квантів світла. Нагадаємо суть справи.

Принципову схему для спостереження зовнішнього фотоефекту подано на рис. 61. Через сітчастий металевий анод A на суцільний металевий катод K спрямовується монохроматичний світловий потік. За допомогою джерела струму E між катодом і анодом створюється напруга. Під дією світла з катода вириваються електрони, які внаслідок різниці потенціалів між A та K потрапляють на анод A ; гальванометр G показує наявність електричного струму в колі, який дістав назву *фотоструму*. За класичною теорією енергія

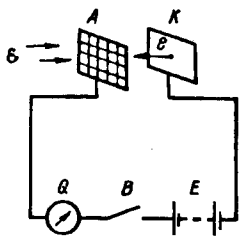


Рис. 61

світлових (тобто електромагнітних) хвиль пов'язана з їхньою амплітудою, а не з частотою, і тому, здавалося б, поява чи не поява фотоструму не повинна зумовлюватися частотою світлових хвиль. Тим часом досліди свідчать про те, що для кожного металу, з якого зроблено катод, існує своя мінімальна частота світла, подальше зменшення якої призводить до зникнення фотоструму, яким би інтенсивним не був світловий потік. Ця мінімальна частота дістала назву *червоної границі фотоефекту* (характерної для кожного металу). Переконливе й просте пояснення наявності червоної границі фотоефекту дав Ейнштейн на основі уявлення про кванти світла та закон збереження й перетворення енергії. Підсумуємо міркування Ейнштейна.

Розглядатимемо спрямований на катод монохроматичний світловий потік як потік квантів світла — фотонів, кожен з яких має енергію.

$$\varepsilon = h\nu \quad (1.56)$$

(див. (1.54)). Вважаючи, що фотон, стикаючись з електронном катода, повністю передає йому свою енергію, за законом збереження й перетворення енергії матимемо

$$h\nu = \frac{mv_{\max}^2}{2} + A; \quad (1.57)$$

тут $\frac{mv_{\max}^2}{2}$ — максимальна кінетична енергія вибитого з катода електрона; A — робота, яку слід виконати для виривання електрона з металу (дістала назву *роботи виходу* й є характерною для кожного металу). Рівняння (1.57) називають рівнянням Ейнштейна. З нього випливає, що для частот ν , менших за критичну ν_0 ,

$$\nu < \nu_0 \equiv A/h, \quad (1.58)$$

фотоэффект дійсно не повинен спостерігатися: у таких фотонів бракує енергії для виривання електронів з металу.

Отже, у зовнішньому фотоэффекті елементарні акти взаємодії квантів з електронами металу чітко демонструють корпускулярні властивості світла.

Ще яскравіше й повніше корпускулярні властивості світла виявляються в так званому ефекті Комптона. Розглянемо його суть.

Досліджуючи розсіювання рентгенівських променів (які становлять потік високоенергійних фотонів) на елементах малої атомної маси (парафіні), американський фізик Артур Комптон у 1922 р. виявив наявність у розсіяному потоці цілого спектра фотонів, менш енергійних за початкові. Зміна довжини хвилі розсіяних променів $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ виявилася пропорційною $(1 - \cos \theta)$, де θ — кут, утворений між напрямом розсіяного і первинного пучків променів (рис. 62). Узгоджуваний з дослідними теоретичний результат було отримано на підставі припущень і розрахунків, які наводяться нижче.

На основі квантових уявлень розглянемо розсіяване електронами парафіну рентгенівське проміння як потік високоенергійних квантів світла — фотонів. Висока енергія фотонів $h\nu$, що налітають на атоми малої атомної маси, дає змогу знехтувати енергією зв'язку електронів e в атомах (у порівнянні з $h\nu$) та рухом цих електронів, вважаючи їх такими, які до зіткнення з фотонем знаходяться у стані спокою. З іншого боку, висока енергія фотонів $h\nu$ вимагає застосування релятивістських формул. Релятивістський зв'язок енергії E з імпульсом \vec{p} , як відомо, має вигляд (див. розділ 4).

$$E^2 = c^2 (\vec{p}^2 + m^2 c^2), \quad (1.59)$$

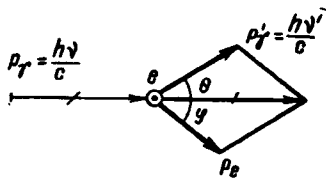


Рис. 62

де c — швидкість світла; m — маса спокою відповідної частинки. У той час як маса спокою електрона відмінна від нуля $m_e \neq 0$, маса спокою фотона дорівнює нулю $m_\gamma = 0^1$. Тому зв'язок енергії з імпульсом (1.59) для фотонів

$$\varepsilon = cp_\gamma = h\nu. \quad (1.60)$$

Звідси для імпульсу фотонів p_γ матимемо

$$p_\gamma = h\nu/c. \quad (1.61)$$

Згідно із законами збереження енергії та імпульсу для співудару високоенергійного фотона з нерухомим спочатку електроном дістанемо

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + c\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}; \quad (1.62)$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p_e \cos \varphi; \quad (1.62a)$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - p_e \sin \varphi, \quad (1.62b)$$

де (1.62) — закон збереження енергії; (1.62a), (1.62b) — закон збереження імпульсу (в проекціях). Враховуючи тотожність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, неважко за допомогою (1.62a), (1.62b) отримати

$$\frac{h^2}{c^2} \{v^2 - 2vv' \cos \theta + v'^2\} = p_e^2. \quad (1.63)$$

З (1.62) випливає

$$h(v - v') = \{-m_e c + \sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2}\} c, \quad (1.64)$$

або ж

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{c^2} \{v^2 - 2vv' + v'^2\} &= p_e^2 - 2m_e c \{\sqrt{p_e^2 + m_e^2 c^2} - m_e c\} = \\ &= p_e^2 - 2m_e c h(v - v'). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Комбінуючи (1.63) з (1.65), приходимо до співвідношення

$$h \frac{vv'}{c} (1 - \cos \theta) = m_e (v - v'). \quad (1.66)$$

Звідси з огляду на

$$v/c = 1/\lambda, \quad (1.67)$$

¹ Тільки частинка з нульовою масою може рухатися з швидкістю світла c .

де λ — довжина хвилі, легко знаходимо

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (1.68)$$

у повній відповідності з експериментом. Величина

$$\Lambda = h/m_e c \quad (1.69)$$

дістала назву *комptonівської довжини хвилі*. Одночасно з поясненням ефекту Комптона співвідношення (1.62) свідчать про справедливість законів збереження енергії та імпульсу в мікросвіті.

Після успішного теоретичного обґрунтування експериментальної формули Комптона (1.68) на базі уявлень про кванти електромагнітного випромінювання (фотони), які подібно до матеріальних частинок мають імпульс p_γ і енергію $\varepsilon = h\nu = cp_\gamma$, подвійна (корпускулярно-хвильова) природа світла стала повністю очевидною. Адже такі явища як інтерференція, дифракція, дисперсія, поляризація повністю свідчать про хвильові властивості світла¹, відбиваючи відомий принцип суперпозицій векторів напруженості електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів та характеризуючи особливості розповсюдження світла у просторі (див. розділ 4). В елементарних актах взаємодії з мікрочастинками світло виявляє свої корпускулярні властивості (фотоэффект, ефект Комптона). Але кванти світла — фотони — це дуже своєрідні частинки: вони не “забувають” про свою двоєдину природу, оскільки їхні енергія ε та імпульс p_γ

$$\varepsilon = h\nu; \quad p_\gamma = \frac{h\nu}{c} = h/\lambda \quad (1.70)$$

виражаються через частоту ν і довжину λ відповідних електромагнітних хвиль. Таке дивовижне й суперечливе з погляду класичної фізики сполучення хвильових і корпускулярних властивостей світла (які, проте, ніколи одночасно не проявляються) є беззастережним дослідним фактом і лягло в основу квантової теорії.

Такою подвійною (корпускулярно-хвильовою) природою відрізняється не тільки світло, але й усі види матеріальних мікрочастинок (електрони, атоми та ін.). Таке твердження було висунуте спочатку як гіпотеза французьким фізиком де Бройлем за аналогією із світлом.

¹ Точніше і ширше — електромагнітного випромінювання.

Але досить швидко воно знайшло своє повне експериментальне підтвердження: була виявлена дифракція електронів на атомах кристалічних решіток. Необхідно було знайти рівняння, яке подібно до рівнянь Максвелла в електродинаміці описувало б хвилі, яким відповідають мікрочастинки (на зразок квантів світла в електродинаміці).

Якщо в теорії світла квантові уявлення прив'язувалися до встановленої перед тим хвильової картини, то в теорії таких мікрочастинок, як електрони, атоми і т. д., прив'язування йшло в протилежному напрямі, а саме: спираючись на закони збереження енергії та імпульсу, характерні для корпускул (див., наприклад, ефект Комптона, де електрон розглядається як корпускула), йшли пошуки відповідних хвильових рівнянь.

Вихідні положення були сформульовані де Бройлем. Розглянемо їх у спрощеному варіанті, прив'язуючи до відповідних дуалістичних уявлень про світло.

У просторі, де немає електричних зарядів та струмів, плоскі монохроматичні електромагнітні хвилі можуть бути подані у формі (див. розділ 4)

$$y = y_0 \sin \omega (t \pm \frac{x}{c}); \quad (1.71)$$

під y можна розуміти як електричне E , так і магнітне поле H ; $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ — циклічна частота; T — період коливань, які породжують хвилі (1.71). Якщо від суто хвильових параметрів (типу ω , ν , T , λ) перейти до корпускулярних (типу ε , p_γ (1.70), то хвилі (1.71) можна подати таким чином (p_γ — тут модуль імпульсу фотона):

$$y = y_0 \sin 2\pi \left\{ \frac{\varepsilon}{h} t \pm \frac{p_\gamma}{h} x \right\}. \quad (1.72)$$

Запровадивши замість сталої h нову сталу

$$\hbar = h/2\pi, \quad (1.73)$$

яка більш зручна в квантовій теорії, замість (1.72) дістанемо

$$y = y_0 \sin (\varepsilon t \pm p_\gamma x) / \hbar. \quad (1.74)$$

Це рівняння й буде характеризувати плоскі електромагнітні хвилі, які поширюються в додатному (–) або від'ємному (+) напрямках осі Ox і які виражено через енергію ε та модуль імпульсу p_γ відповідних квантів світла (фотонів)¹.

¹ Якщо замість модуля імпульсу під p_γ розуміти сам імпульс, то досить обмежитись знаком (–) у (1.74), (1.75). (Рекомендуємо довести, чому саме так).

Плоскі хвилі можна подати також у вигляді

$$z = y_0 \cos(\epsilon t \pm p_\gamma x) / \hbar, \quad (1.75)$$

який від (1.74) відрізняється лише фазою. Часом зручніше користуватися комплексною формою плоскої хвилі.

$$u = y_0 e^{-i\{\epsilon t \pm p_\gamma x\} / \hbar}, \quad (1.76)$$

від якої до (1.74) та (1.75) можна перейти, виділивши уявну та відповідно дійсну частини:

$$y = \text{Im } u; \quad z = -\text{Re } u. \quad (1.77)$$

Якщо в оптиці наперед заданій плоскій хвилі з частотою ν та довжиною хвилі λ зіставлялися кванти світла (фотони) з енергією ϵ та імпульсом p_γ , вираженими через ν і λ за формулами

$$\epsilon = h \nu; \quad p_\gamma = h / \lambda, \quad (1.78)$$

то в хвильовій теорії вільних матеріальних частинок, які розглядаються як кванти якогось хвильового поля, кожній вільній частинці з енергією E та імпульсом p за де Бройлем зіставляється плоска хвиля з частотою ν та довжиною λ відповідно:

$$\nu = E / h; \quad \lambda = h / p. \quad (1.79)$$

Хвилі де Бройля прийнято позначати через ψ і записувати у комплексній формі:

$$\psi(x, t) = A e^{-i\{Et \pm px\} / \hbar}. \quad (1.80)$$

Нижче (§ 1.5) покажемо, що в даному разі така форма не є просто зручним математичним прийомом, а відповідає фізичній суті задачі. Це означає, зокрема, що хвильове поле де Бройля (1.80) є суттєво двокомпонентним¹:

$$\psi(x, t) = u(x, t) + iv(x, t), \quad (1.81)$$

де $i = \sqrt{-1}$, а функції $u(x, t)$, $v(x, t)$ — дійсні компоненти поля (1.80). Фізичний сенс ψ функції (1.80) (а саме так її називають) було розкрито не одразу, про що йтиметься далі.

¹ Нагадаємо, що електромагнітне поле в загальному випадку шести-компонентне:

$$\vec{E} \{E_x, E_y, E_z\}; \quad \vec{H} \{H_x, H_y, H_z\}.$$

§ 1.5. Рівняння Шредінгера

Як усяка плоска хвиля, що поширюється в напрямі осі Ox (див. розділ 4), хвиля де Бройля (1.80) задовольняє хвильове рівняння вигляду

$$\frac{1}{v_{\phi}^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (1.82)$$

де $v_{\phi} = E/p$ — фазова швидкість хвилі. У цьому неважко переконатися прямим підставленням виразу (1.80) у (1.82), оскільки

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2} \psi; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \psi.$$

Проте вираз (1.80) задовольняє рівняння (1.82) при будь-яких значеннях двох параметрів E та p , які не пов'язані між собою. Тим часом ефект Комптона (1.63) свідчить про наявність зв'язку між енергією E , імпульсом p та масою спокою m вільної частинки, такою самою, як і в класичній (тут не квантовій) механіці. Як і у випадку з вільними електромагнітними хвилями (1.3) (див. розділ 4), серед розв'язків хвильового рівняння (1.82) є зайві — не фізичні. Отже, хвильове рівняння (1.82) не може слугувати для описування фізично осмислених хвиль де Бройля. В електродинаміці для відбору фізично осмислених хвиль слугують рівняння Максвелла (див. розділ 4). У шуканій за де Бройлем хвильовій теорії вільних мікрочастинок аналогів рівнянь Максвелла заздалегідь ніхто не знав. Для знаходження таких рівнянь (або рівняння) можна скористатися з наявності зв'язку між енергією E та імпульсом p (1.59). Проте пряме використання релятивістського зв'язку (1.59) веде до так званого рівняння Клейна—Гордона, яке виявилось неадекватним поведінці електронів у атомах [43].

Релятивістське хвильове рівняння для електронів згодом знайшов Дірак. Але спочатку Шредінгер відкрив відповідне нерелятивістське рівняння, справедливе для електронів. Спрощуючи історичний шлях пошуків адекватного експерименту хвильового рівняння, простежимо за тими евристичними міркуваннями, які ведуть до знаменитого рівняння Шредінгера, що дало узгодження теорії з експериментом. Пробним каменем для перевірки отриманого рівняння виявився найпростіший атом водню. Розрахунок енергетичних рівнів атома водню, за Шредінгером, автоматично дав правильний набір дискретних енергетичних рівнів без додаткових штучних і чисто декларативних постулатів на зразок цитованих вище постулатів Бора. У підході Шредін-

гера все виявилось логічним і послідовним, хоча на ті часи зовсім незвичним¹. Узгодження передбачень теорії з експериментом стало основою для її визнання ще до того, як було розкрито точний фізичний смисл хвильової функції $\psi(x, t)$.

Для простоти спочатку побудуємо рівняння Шредінгера щодо хвиль, що вільно поширюються у напрямі осі Ox ; після чого узагальнимо рівняння на випадок хвиль довільного напрямку та врахуємо потенціальні силові поля, що діють на відповідну мікрочастинку.

У нерелятивістській області (тобто для не дуже швидких або високоенергетичних частинок) зв'язок між енергією E та імпульсом p має вигляд

$$E = p^2/2m. \quad (1.83)$$

Спіраючись на (1.83), побудуємо рівняння, яке автоматично веде лише до таких хвиль де Бройля (1.80), які відповідають зв'язку (1.83). Це й буде рівняння Шредінгера, що для нерелятивістських мікрочастинок з відмінною від нуля масою спокою (зокрема, електронів) відіграє роль, аналогічну ролі рівнянь Максвелла для фотонів, репрезентуючи їхні хвильові властивості.

Неважко переконатися, що для хвиль де Бройля (1.80) мають місце співвідношення

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi, \quad -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} = p \psi. \quad (1.84)$$

Тобто застосування до хвиль де Бройля (1.80) операторів $\hat{E} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ та $\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ еквівалентне множенню їх на енергію E та імпульс p відповідно. Тому оператори \hat{E} і \hat{p} називають *оператором енергії і імпульсу*. У математиці, коли застосування якогось оператора \hat{L} до певної функції f еквівалентне множенню цієї функції на певне число l

$$\hat{L} f = l f, \quad (1.85)$$

кажуть, що функція f є *власною функцією* оператора \hat{L} , а число l — *власним значенням* цього оператора. Отже, хвиля де Бройля ψ (1.80) є власною функцією одночасно операторів \hat{E} і \hat{p} з власними значеннями E і p відповідно.

¹ Історично хвильовій теорії Шредінгера передувала так звана матрична теорія Гайзенберга, яка виявилася еквівалентною теорії Шредінгера.

Квадратом \hat{L}^2 оператора \hat{L} називають операцію послідовного двократного застосування цього оператора до будь-якої функції

$$\hat{L}^2 f \equiv \hat{L} (\hat{L} f). \quad (1.86)$$

Застосовуючи квадрат оператора імпульсу $\hat{p}^2 = -\hbar^2 \partial^2 / \partial x^2$ до хвилі де Бройля, дістанемо

$$\hat{p}^2 \psi = p^2 \psi. \quad (1.87)$$

Звідси ясно, що коли серед хвиль де Бройля (1.80) дібрати такі, що задовольняють рівняння

$$\hat{E} \psi = \frac{\hat{p}^2}{2m} \psi, \quad (1.88)$$

то умова (1.83) виконуватиметься автоматично. В явному вигляді рівняння (1.89) записується таким чином:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (1.89)$$

Це й є шукане хвильове рівняння Шредінгера для частинки, що вільно рухається вздовж осі Ox .

Покажемо, що плоскі хвилі де Бройля, поширювані в довільному напрямі Ol , який можна охарактеризувати одиничним вектором $\vec{n}_0 = \vec{p}/p$ (\vec{p} — вектор імпульсу, p — його модуль), мають вигляд

$$\psi(\vec{r}, t) = Ae^{-i \frac{Et - \vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}}. \quad (1.90)$$

Тут \vec{r} — радіус-вектор частинки, а $\vec{p} \cdot \vec{r}$ — скалярний добуток \vec{p} на \vec{r} . Неважко збагнути, що оператором вектора імпульсу (кажуть просто імпульсу) буде

$$\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}, \quad (1.91)$$

де $\vec{\nabla}$ репрезентує градієнт

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.92)$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти вздовж координатних осей). Відповідно оператором квадрата імпульсу буде

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta, \quad (1.93)$$

де Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.94)$$

Оскільки за нерелятивістських швидкостей має місце закон

$$E = \vec{p}^2 / 2m, \quad (1.95)$$

то узагальнення рівняння Шредінгера (1.88) для вільної частинки, що рухається в довільному напрямі, матиме вигляд

$$\hat{E} \psi = (\vec{p}^2 / 2m) \psi; \quad (1.96)$$

або в явному вигляді

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi. \quad (1.97)$$

Оператор

$$\hat{H} \equiv \vec{p}^2 / 2m = -(\hbar^2 / 2m) \Delta \quad (1.98)$$

з очевидної причини називають *оператором кінетичної енергії*.

З чисто формальних міркувань для частинки, що рухається в полі потенціальних сил, маючи там потенціальну енергію $U(\vec{r})$, напрошується узагальнення рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \{\hat{H}_0 + U\} \psi, \quad (1.99)$$

або в явному вигляді

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \{-\hbar^2 / 2m \Delta + U(\vec{r})\} \psi. \quad (1.100)$$

Оператор

$$\hat{H} = -\hbar^2 / 2m \Delta + U(\vec{r}) \quad (1.101)$$

є *оператором повної енергії*. Він дістав назву *оператора Гамільтона*. Його називають також просто *гамільтоніаном*. У короткому запису рівняння Шредінгера виглядає таким чином:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi. \quad (1.102)$$

Воно описує рух однієї мікрочастинки з масою m в полі потенціальних сил з потенціальною енергією $U(\vec{r})$.

Звичайно, виконані побудови не мають доказової, а лише евристичну силу¹. Фізичним обґрунтуванням рівняння Шредінгера (1.100), (1.102) слугує узгодження наслідків з нього з експериментом, яке виявилось вражаюче повним.

¹ Існує ґрунтовніший ланцюжок евристичних міркувань, що ведуть до (1.102), але це виходить за межі загального курсу.

На закінчення обґрунтуємо справедливність зображення плоскої хвилі де Бройля, що поширюється у напрямі $\vec{n}^0 = \vec{p}/p$ (рис. 63), у формі (1.90). Трикутник ABC становить фрагмент площини сталої фази, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі Ol ; радіус-вектор \vec{r} вказує на довільну точку на площині рівної фази ABC , а відрізок \overline{OD} — проекцію радіуса-вектора \vec{r} на напрям поширення хвилі Ol (або на $\vec{n}^0 = \vec{p}/p$, що те саме). Роль відстані x у формулі (1.80) відіграє тепер відстань \overline{OD} . Тому фазу

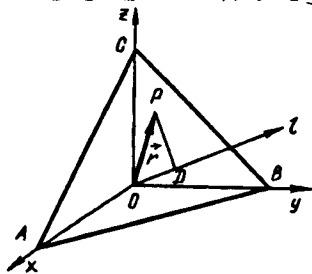


Рис. 63

плоскої хвилі де Бройля (1.80) $\varphi \equiv \frac{Et - px}{\hbar}$ слід замінити тепер на

$$\varphi = \frac{Et - p\overline{OD}}{\hbar}. \quad (1.103)$$

Але для \overline{OD} маємо

$$\overline{OD} = \vec{r} \vec{n}^0 = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{p}.$$

І тому $p\overline{OD} = \vec{p} \cdot \vec{r}$. Отже, для фази φ маємо

$$\varphi = \frac{Et - p\overline{OD}}{\hbar} = \frac{Et - \vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}.$$

Це збігається з фазою хвилі (1.90), що й треба було довести.

Перш ніж обговорювати (в доступному обсязі) квантовомеханічну теорію атома водню, з'ясуємо на простих одновимірних моделях особливості поведінки частинок, які мають подвійну (корпускулярно-хвильову) природу (хвильові властивості відображає хвильова функція $\psi(\vec{r}, t)$, яка задовольняє рівняння Шредінгера; корпускулярні виражаються законами збереження енергії та імпульсу, в елементарних актах взаємодії мікрочастинок).

Перш за все зазначимо своєрідний шлях пошуку рівняння, яке описує хвильові властивості мікрочастинок — рівняння Шредінгера (1.100), оскільки такий шлях типовий для сучасної фізики, яка вийшла вже за межі безпосередньо спостережуваного і наочного. Це шлях “математичної гіпотези”, тобто формального пошуку таких рівнянь, що відображали б закономірності, які випливають з експерименту. Тому й не дивно, що спочатку було знайдено рівняння (1.100), а лише після цього шляхом перебору варіантів [1]

розгадано фізичний сенс хвильової функції $\psi(\vec{r}, t)$. Не суперечливою й такою, що витримала екзамен на відповідність дослідам, виявилася фізична інтерпретація хвильової функції за М. Борном. За його трактовкою квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi^* \psi = u^2 + v^2 \quad (1.104)$$

дає розподіл (або густину) ймовірностей знайти частинку поблизу точки \vec{r} у момент часу t . У формулі (1.104) u та v — відповідно дійсна та уявна частини хвильової функції

$$\psi = u + iv, \quad (1.105)$$

а зірочка над ψ символізує комплексно спряжену до ψ функцію

$$\psi^* = u - iv. \quad (1.106)$$

Отже, ймовірність $dP(\vec{r}, t)$ знайти частинку в об'ємі $dV = dx dy dz$ біля точки $\{\vec{r}\}$ в момент часу t за Борном виражається формулою

$$dP(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV. \quad (1.107)$$

Таке трактування, як показав досвід його використання, відповідає експериментальним даним.

Не зупиняючись на обґрунтуванні нижчезазначеного, вкажемо, що густина потоку ймовірності $\vec{j}(\vec{r}, t)$ обчислюється за формулою

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{i\hbar}{2m} \{ \psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \}. \quad (1.108)$$

З рівняння Шредінгера (1.100) та з (1.108) випливає, що

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \quad (1.109)$$

тобто має місце “рівняння неперервності”, яке відображає свого роду закон збереження ймовірностей. (Рекомендуємо порівняти з законом збереження електричного заряду в електродинаміці).

На підставі борнівського фізичного трактування хвильової функції (1.107) та виразу для густини струму ймовірностей $\vec{j}(\vec{r}, t)$ природно на фізичні розв'язки $\psi(\vec{r}, t)$ рівняння Шредінгера (1.100) накласти такі додаткові умови: хвильові функції $\psi(\vec{r}, t)$ повинні бути скрізь скінченними, однозначними й неперервними разом із своїми першими похідними за координатами і за часом.

Сформульованим додатковим умовам, як ми побачимо, належить у квантовій механіці не менш фундаментальна роль, ніж рівнянню Шредінгера (1.100).

Глава 2

ОСНОВИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ НА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПРИКЛАДАХ

§ 2.1. Стаціонарне рівняння Шредінгера

Оскільки в рівнянні Шредінгера (1.100) для частинок, що рухаються в потенціальних полях¹ $U(\vec{r})$, просторові координати $\{\vec{r}\}$ і час t розділені (перші подані лише в гамільтоніані \hat{H} (1.101); друга — лише в операторі $\hat{E} = i\hbar \partial/\partial t$ ліворуч в рівнянні (1.100)), то серед розв'язків рівняння (1.100) існують мультиплікативні розв'язки вигляду

$$\psi(\vec{r}, t) = f_E(t) \psi_E(\vec{r}), \quad (2.1)$$

які відповідають так званим стаціонарним станам. Стаціонарні стани, як буде показано нижче, описують ситуації, коли розподіл ймовірностей знайти мікрочастинку в тій чи іншій точці простору $\{\vec{r}\}$ не залежить від часу

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 \equiv |\psi_E(\vec{r})|^2, \quad (2.2)$$

тобто є стабільним. Буде показано, що стаціонарні стани відповідають цілком певним (фіксованим) значенням енергії E . Вони реалізують саме ті стаціонарні стани, які мав свого часу на увазі Н. Бор, але вже на досконалій і послідовній теоретичній основі. Покажемо, що

$$f_E(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \quad (2.3)$$

а $\psi_E(\vec{r})$ задовольняє *стаціонарне* рівняння Шредінгера

$$\hat{H} \psi_E(\vec{r}) = E \psi_E(\vec{r}). \quad (2.4)$$

Параметр E інтерпретується як енергія стаціонарного стану квантової системи у повній згоді з експериментом (та з теорією вільних частинок, де E — з апіорною очевидністю енергія).

¹ Більш загальне рівняння Шредінгера, яке відповідає рухові не лише в потенціальних полях, в загальних курсах майже не розглядають. Не розглядають також багаточастинкових рівнянь Шредінгера.

Підставляючи (2.1) у рівняння Шредінгера (1.100), дістанемо

$$\psi_E(\vec{r}) \left\{ i \hbar \frac{df_E(t)}{dt} \right\} = f_E(t) \hat{H} \psi_E(\vec{r}). \quad (2.5)$$

Розділивши обидві частини (2.5) на $f_E(t) \psi_E(\vec{r})$, знаходимо

$$\frac{1}{f_E(t)} \left\{ i \hbar \frac{df_E(t)}{dt} \right\} = \frac{1}{\psi_E(\vec{r})} \hat{H} \psi_E(\vec{r}) \equiv E = \text{const}. \quad (2.6)$$

Умова $E = \text{const}$ є наслідком розділення змінних: ліва частина залежить лише від часу t ; права — лише від координат \vec{r} . Звідси випливають два незалежні рівняння:

$$i \hbar \frac{df_E(t)}{dt} = E f_E(t); \quad \hat{H} \psi_E(\vec{r}) = E \psi_E(\vec{r}). \quad (2.7)$$

Перше з них універсальне (однакове за формою для всіх квантових систем) і має очевидний розв'язок (2.3). (Дане твердження пропонується перевірити). Друге — різне для різних частинок m і різних потенціальних полів, оскільки в гамільтоніан (1.101) входить маса частинки m і її потенціальна енергія $U(\vec{r})$, яка у квантовій механіці називається просто *потенціалом*. Оскільки

$$|f_E(t)|^2 = |e^{-i \frac{E}{\hbar} t}|^2 = \cos^2 \frac{E}{\hbar} t + \sin^2 \frac{E}{\hbar} t \equiv 1, \quad (2.8)$$

розподіл ймовірностей $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ справді не залежить від часу, що й треба було довести. Друге рівняння у явному вигляді записується таким чином:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}) \right\} \psi_E(\vec{r}) = E \psi_E(\vec{r}) \quad (2.9)$$

і називається *стаціонарним рівнянням Шредінгера* (для частинки¹ з масою m в потенціальному полі $U(\vec{r})$).

На модельних прикладах, які детально розглядаються в наступних параграфах, буде продемонстровано, що рівняння (2.9) у сукупності з додатковими умовами, які накладаються на хвильові функції (див. § 1.5), визначають не тільки набір можливих хвильових функцій $\{\psi_{E^{(i)}}(\vec{r})\}$, а й набір фізично можливих енергій $\{E^{(i)}\}$. Інакше кажучи, доповнене зазначеними додатковими умовами рівняння Шредінгера (2.9) визначає набір можливих стаціонарних станів системи $\{\psi_{E^{(i)}}(\vec{r})\}$ та її енергетичний спектр $\{E^{(i)}\}$.

¹ Рівняння Шредінгера для кількох частинок має складніший вигляд.

Детальніше про все це буде сказано в наступних параграфах на простих модельних прикладах.

§ 2.2. Загальні риси руху класичної частинки в потенціальному полі

Для зіставлення між собою схожих і не схожих рис руху класичної і квантової частинки в однаковому полі потенціальних сил нагадаємо деякі характерні особливості одновимірного руху класичної частинки в потенціальному полі (рис. 64). На рисунку зображено хід потенціальної кривої

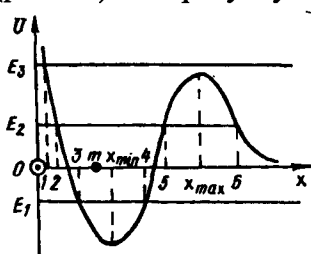


Рис. 64

$U = U(x)$, яка імітує основні й характерні риси потенціальної енергії мікрочастинки в полі певного силового центра. При $x \rightarrow 0$ $U(x) \rightarrow \infty$. Це означає, що класична частинка не може впасти на силовий центр; на відрізку $(0, x_{\min})$ центр відштовхує частинку. Між точками x_{\min} та x_{\max} має місце притягання частинки до центра; в області $x > x_{\max}$ центр знову відштовхує частинку. Область $(0, x_{\max})$ називають *потенціальною ямою*, а (x_{\min}, ∞) — *потенціальним бар'єром*.

Позначимо повну енергію класичної частинки через E :

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(x) = \text{const.} \quad (2.10)$$

У потенціальному полі сил енергія класичної частинки E зберігається (див. розділ 1). Закон збереження енергії

$$E = \text{const} \quad (2.10a)$$

дає змогу визначити межі руху класичної частинки. Справді, в силу умови $\frac{mv^2}{2} \geq 0$ та формули (2.10) частинка може перебувати лише в тих областях прямої Ox (вздовж якої відбувається її одновимірний рух), де виконується нерівність

$$E \geq U(x). \quad (2.11)$$

Тому класична частинка з енергією E_1 (див. рис. 64) може перебувати лише в області (x_3, x_4) , виконуючи коливання між крайніми її точками. Такий обмежений у просторі рух називають *фінітним (скінченним)*. Частинка з енергією E_2

(див. рис. 64) може здійснювати як коливальний (фінітний) рух між точками (x_2, x_5) , так і *інфінітний* в області $x \geq x_6$. Зона ж (x_5, x_6) заборонена для класичної частинки з енергією E_2 . Нарешті, частинка з енергією E_3 здійснює інфінітний рух в області $x > x_1$. Отже, класична частинка не може подолати потенціальний бар'єр, якщо її енергія E менша висоти цього бар'єра (як це має місце у випадках $E = E_1, E = E_2$).

Як буде видно з наступних параграфів, поведінка квантової частинки в ситуаціях, аналогічних щойно розглянутим, відрізняється від класичної. Зокрема, вона може подолати потенціальний бар'єр скінченної ширини (випадок E_2 на рис. 64). Таке подолання потенціального бар'єра дістало назву *тунельного ефекту*.

§ 2.3. Моделювання потенціальних кривих прямокутними бар'єрами і ямами

Лише небагато реалістичних квантовомеханічних задач (наприклад, теорія атома водню, гармонічного осцилятора та кілька інших задач) припускають точні розв'язки в аналітичній формі); та й то побудова їх вимагає солідних математичних знань. Для більшості ж задач доводиться користуватися наближеними або модельними методами. Та, на щастя, загальні особливості поведінки мікрочастинок можна з'ясувати на максимально спрощених і схематизованих одновимірних моделях з прямокутними бар'єрами і ямами, до короткої характеристики котрих і переходимо.

Прямокутну стилізацію потенціалу $U(x)$ типу, поданого на рис. 64, показано на рис. 65,а. Одновимірне рівняння Шредінгера, яке відповідає стилізованому таким чином потенціалу, неважко розв'язати в елементарних функціях, які становлять комбінацію експоненційних і тригонометричних функцій і тому цілком доступні для початківця.

Проте навіть така спрощена задача вимагає дещо задовгих обчислень, які здатні завуалювати фізично важливі висновки. Тому оберемо простіший шлях, розглядаючи особливості руху мікрочастинок у потенціальних полях, що моделюють окремі елементи показаного на рис. 65,а потенціалу. Насамперед розглянемо рух мікрочастинки в полі ступінчастого потенціалу (рис. 65,б); а далі — в нескінченно глибокій потенціальній ямі (рис. 65,в), в ямі скінченної глибини (рис. 65,г) та в полі з бар'єром скінченної ширини (рис. 65,д).

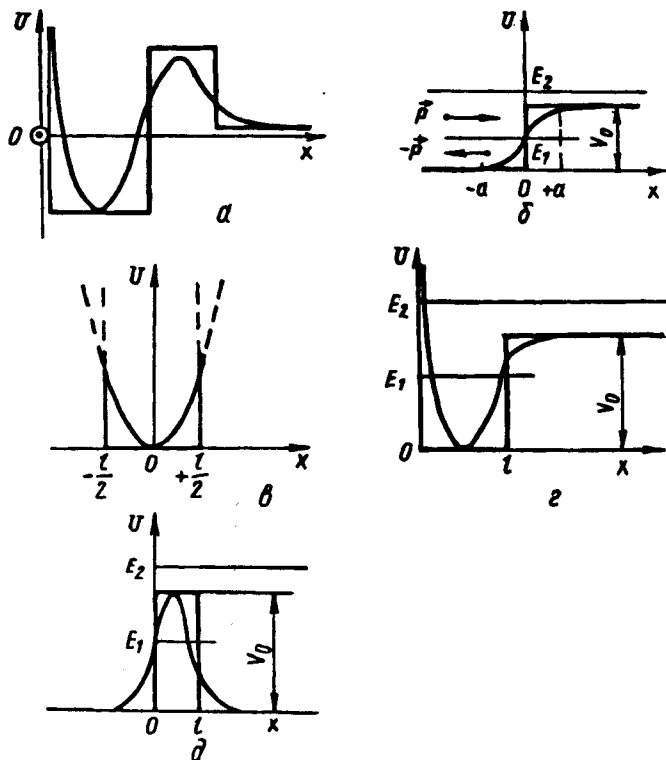


Рис. 65

§ 2.4. Рух мікрочастинок у модельних полях прямокутних конфігурацій

Розглянемо одновимірний рух частинки з масою m на базі стаціонарного рівняння Шредінгера (2.4) в модельних потенціальних полях (див. рис. 65, б—д).

Рух частинки в ступінчастому полі (див. рис. 65, б). Поля з ламаними прямокутними елементами вважатимемо надалі граничними варіантами гладких (неламаних) полів. Останні показано на рис. 65, б—д тонкими плавними лініями (зокрема, на рис. 65, б — це полого крива, яка переходить в ламану, коли $a \rightarrow 0$).

Одновимірне стаціонарне рівняння Шредінгера (2.4), яке відповідає розглянутій задачі, має вигляд

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2 \psi}{dx^2} + U(x) \psi = E \psi, \quad (2.12)$$

причому

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0; \\ V_0 > 0, & \text{коли } x \geq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Позбавляючись для зручності коефіцієнта при другій похідній $d^2\psi/dx^2 \equiv \psi''$, дістанемо замість (2.12) рівняння

$$\psi' + \frac{2m}{\hbar^2} \{E - U(x)\} \psi = 0, \quad (2.14)$$

з яким надалі й матимемо справу.

Хід потенціалу $U(x)$, поданий формулою (2.13), вимагає розбиття осі Ox , вздовж якої відбувається рух частинки, на дві області відповідно до (2.13). Ліворуч і праворуч точки $x = 0$ відповідно маємо

$$\begin{cases} \psi_L'' + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_L = 0 & (x < 0); \\ \psi_{II}'' + \frac{2m}{\hbar^2} \{E - V_0\} \psi_{II} = 0 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.15)$$

(L і II — ліва та права півосі відповідно). На підставі фізичної вимоги неперервності хвильової функції ψ разом з її першою похідною побудуємо такі розв'язки рівнянь (2.15), які неперервно переходили б один в один у точці $x = 0$, тобто задовольняли б умови

$$\begin{cases} \psi_L(0) = \psi_{II}(0); \\ \psi_L'(0) = \psi_{II}'(0). \end{cases} \quad (2.16)$$

Як буде видно з подальшого, слід розрізняти два випадки: *підбар'єрний рух*, коли повна енергія

$$E < V_0, \quad (2.17)$$

і *надбар'єрний*, коли

$$E > V_0. \quad (2.18)$$

Розглянемо спочатку підбар'єрний (2.17) рух: $E - V_0 < 0$. Тоді, запровадивши позначення

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \quad \kappa \equiv \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}, \quad (2.19)$$

переходимо від (2.15) до

$$\psi_L'' + k^2 \psi_L = 0 \quad (x < 0); \quad \psi_{II}'' - \kappa^2 \psi_{II} = 0 \quad (x \geq 0). \quad (2.20)$$

Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що

$$\psi_L^\pm(x) = e^{\pm ikx}; \quad \psi_{II}^\pm(x) = e^{\pm \kappa x} \quad (2.21)$$

є лінійно незалежними розв'язками рівнянь (2.20). Побудувавши за їхньою допомогою загальні розв'язки рівнянь (2.20)

$$\psi_{\text{л}}(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}; \quad \psi_{\text{п}}(x) = C e^{-\alpha x} + D e^{+\alpha x}, \quad (2.22)$$

визначимо коефіцієнти A, B, C, D за допомогою умов "зшивання" в точці $x = 0$ та інших фізичних умов. Умови зшивання (2.16) дають

$$\begin{aligned} A + B &= C + D; \\ ik(A - B) &= -\alpha(C - D). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Проте з двох рівнянь (2.23) не можна визначити чотири величини A, B, C, D . Тому вдамося до залучення інших додаткових фізичних умов. Перш за все вкажемо, що параметр k (див. (2.19)) є так званим *хвильовим числом*

$$k = p/\hbar. \quad (2.24)$$

Тут $p = \sqrt{2mE}$ — модуль нерелятивістського імпульсу вільної частини (нагадаємо, що $E = p^2/2m$). Тому функції $e^{\pm ikx}$ — це координатні частинки вільних одновимірних хвиль де Бройля (1.80), що "біжать" зліва направо (e^{ikx}) і справа наліво (e^{-ikx}). Отже, хвиля Ae^{ikx} відповідає потоковій частинці, що налітає зліва на потенціальний бар'єр, розташований у точці $x = 0$ (див. рис. 65,6); а хвиля Be^{-ikx} — відбитому від бар'єра потоковій. Оскільки інтенсивність пучка, що налітає, є довільною (залежить від нас), покладемо

$$A = 1. \quad (2.25)$$

Звернемося тепер до $\psi_{\text{п}}(x)$ (див. (2.22)). З фізичної вимоги скінченності хвильової функції випливає, що

$$D = 0. \quad (2.26)$$

У протилежному разі було б $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_{\text{п}}(x) = \infty$, що суперечить згаданій умові скінченності хвильових функцій в усьому просторі.

З урахуванням (2.25), (2.26) умови зшивання (2.23) набувають вигляду

$$\begin{cases} 1 + B = C; \\ ik(1 - B) = -\alpha C. \end{cases} \quad (2.27)$$

Отримали два алгебраїчні рівняння для визначення двох коефіцієнтів B і C . Розв'язавши їх, знаходимо

$$B = \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha}, \quad C = \frac{2ik}{ik - \alpha}. \quad (2.28)$$

Звідси для хвильових функцій $\psi_{\text{Л}}$, $\psi_{\text{П}}$ матимемо

$$\begin{cases} \psi_{\text{Л}}(x) = e^{ikx} + \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} e^{-ikx}; \\ \psi_{\text{П}}(x) = \frac{2ik}{ik - \alpha} e^{-\alpha x}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Провівши аналогію з хвильовою оптикою, за допомогою (2.29) можна зробити висновок, що для мікрочастинок, які на відміну від класичних частинок виявляють і хвильові властивості, бар'єр типу, поданого на рис. 65, б, слугує аналогом недосконалого "дзеркала", яке частково відбиває хвилю, що падає на нього, а частково — поглинає її. Відбита хвиля згідно з першим рівнянням (2.29) представлена доданком

$$\frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} e^{-ikx}; \quad (2.30)$$

частина ж хвилі, що проходить в середину бар'єра, згідно з другим рівнянням (2.29) виражається функцією

$$\frac{2ik}{ik - \alpha} e^{-\alpha x}, \quad (2.31)$$

яка експоненційно спадає при заглибленні хвилі в середину бар'єра ($x > 0$).

Отже, на відміну від класичної частинки, яка з достовірністю відбивається від бар'єра за умови (2.17), мікрочастинка, яка має подвійну корпускулярно-хвильову природу, має відмінну від нуля ймовірність заглибитися в середину бар'єра (див. (2.31)). Від бар'єра відбивається лише частина потоку, що падає на нього (див. (2.30)). (Рекомендуємо перевірити, що спроба знищити хвилю, що заглибилася в середину бар'єра, поклавши $C = 0$, веде до суперечності в системі рівнянь (2.27)).

Нехай висота бар'єра V_0 буде дуже великою порівняно з енергією налітаючих на нього частинок E , тобто нехай нерівність (2.17) буде сильною

$$E \ll V_0. \quad (2.32)$$

Тоді з огляду на (2.19) матиме місце також сильна нерівність

$$k \ll \alpha, \quad (2.33)$$

за якої

$$B = \frac{ik/\alpha + 1}{ik/\alpha - 1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -1; \quad (2.34)$$

$$C = 2 \frac{ik/\varepsilon}{ik/\varepsilon - 1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} 0. \quad (2.35)$$

Звідси випливає, що безмежно високий вертикальний потенціальний бар'єр є аналогом ідеального дзеркала в оптиці, яке повністю відбиває хвилі, що падають на нього.

Отже, для нескінченно високого бар'єра завдяки (2.34), (2.35) маємо для функцій (2.29)

$$\begin{cases} \psi_{\text{Л}}(x) = e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i \sin kx \quad (x < 0); \\ \psi_{\text{П}}(x) \equiv 0 \quad (x \geq 0). \end{cases} \quad (2.36)$$

Зокрема $\psi_{\text{Л}}(x)$ має "вузол" на стінці бар'єра, тобто в точці $x = 0$:

$$\psi_{\text{Л}}(0) = 0. \quad (2.37)$$

Розглянемо надбар'єрний потік частинок, для якого

$$E > V_0. \quad (2.38)$$

Замість рівнянь (2.20) з (2.15) дістаємо

$$\psi_{\text{Л}}'' + k^2 \psi_{\text{Л}} = 0; \quad \psi_{\text{П}}'' + K^2 \psi_{\text{П}} = 0, \quad (2.39)$$

де

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \quad K \equiv \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}. \quad (2.40)$$

Оскільки в (2.40) під коренем стоять кінетичні енергії¹ (E при $x < 0$ та $E - V_0$ при $x \geq 0$), то k і K — це хвильові числа частинки відповідно перед і після подолання нею бар'єра. Тому замість (2.22) тепер маємо

$$\psi_{\text{Л}}(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}; \quad \psi_{\text{П}}(x) = C e^{iKx} + D e^{-iKx}; \quad (2.41)$$

а замість (2.23) з умови зшивання (2.16) знаходимо

$$\begin{cases} A + B = C + D; \\ ik(A - B) = iK(C - D). \end{cases} \quad (2.42)$$

Як і в (2.25), A можна прирівняти одиниці. Що ж до функції $\psi_{\text{П}}(x)$ (див. (2.41)), то в ній не повинно бути хвилі, яка біжить справа наліво, оскільки після подолання бар'єра в точці $x = 0$ частинці вже немає від чого відбиватися;

¹ На межі бар'єра ($x = 0$) кінетична енергія змінюється стрибком ($\Delta E = V_0$) завдяки "зламу" (при $a \rightarrow 0$) ідеалізованого потенціального бар'єра (див. рис. 65, б).

вона летить у безмежність ($x \rightarrow \infty$). Тому слід покласти $D = 0$. Отже, замість (2.42) повинно бути

$$\begin{cases} 1 + B = C; \\ ik(1 - B) = iKC. \end{cases} \quad (2.43)$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо

$$B = \frac{k - K}{k + K}; \quad C = \frac{2k}{k + K}. \quad (2.44)$$

Звідси випливає, що на відміну від класичної частинки, яка гарантовано долає бар'єр за надбар'єрних енергій $E > V_0$ (див. (2.38)), мікрочастинка, що має подвійну (корпускулярно-хвильову) природу, має ймовірність відбитися від бар'єра ($B \neq 0$) і повернути назад. Проте коли енергія частинки, що налітає, необмежено зростає, точніше коли нерівність (2.38) стає сильною

$$E \gg V_0, \quad (2.45)$$

матимуть місце умови

$$B = \frac{k/K - 1}{k/K + 1} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} 0; \quad C = 2 \frac{k/K}{1 + k/K} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} 1, \quad (2.46)$$

тобто високоенергійна надбар'єрна (2.45) мікрочастинка також практично з гарантією долає бар'єр, а відбита від бар'єра хвиля практично зникає.

Проведений аналіз показує відмінність у поведінці класичних і мікрочастинок в однакових за формою потенціальних полях і вказує на умови, коли ця відмінність практично зникає. (Радимо уважно простежити за цим, перечитавши параграф).

Рух частинки в ямі безмежної глибини (див. рис. 65, σ). У даній задачі до рівняння Шредінгера (2.12) додаються умови

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & \text{коли } x \leq -l/2; \\ 0, & \text{коли } -l/2 < x < +l/2; \\ \infty, & \text{коли } x \geq l/2. \end{cases} \quad (2.47)$$

Умови (2.47) наближено імітують дуже глибокі потенціальні ями при невисоких енергіях руху частинок. Оскільки безмежно високі вертикальні стінки бар'єра аналогічні ідеальним дзеркалам в оптиці (див. попередню задачу), приходимо до граничних умов, що накладаються на хвильову функцію $\psi(x)$:

$$\psi(-l/2) = \psi(+l/2) = 0 \quad (2.48)$$

(див. рис. 65, в). З огляду на (2.47) та (2.48) констатуємо, що в межах ями ($-l/2 < x < +l/2$) мікрочастинка рухається вільно; тому відповідний розглядуваній задачі розв'язок рівняння Шредінгера (2.14) у межах ями має вигляд суперпозиції двох хвиль де Бройля, які "бігають" назустріч одна одній, повністю відбиваючись від вертикальних стінок ями

$$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad (-l/2 < x < +l/2). \quad (2.49)$$

Тут k визначається за формулою (2.19), а $\psi(x)$ повинна задовольняти граничні умови (2.48), які й визначатимуть коефіцієнти A та B , а також, як буде видно далі, набір дозволених дискретних значень енергії, що їх може мати частинка в безмежно глибокій ямі (квантування енергії).

Підставляючи (2.49) в (2.48), дістанемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A та B .

$$\begin{cases} A e^{-i\frac{kl}{2}} + B e^{i\frac{kl}{2}} = 0; \\ A e^{i\frac{kl}{2}} + B e^{-i\frac{kl}{2}} = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Лінійна однорідна система рівнянь (відносно A та B) має нетривіальний розв'язок лише тоді, коли її визначник дорівнює нулеві,

$$\Delta(kl) \equiv \begin{vmatrix} e^{-i\frac{kl}{2}} & e^{i\frac{kl}{2}} \\ e^{i\frac{kl}{2}} & e^{-i\frac{kl}{2}} \end{vmatrix} = -2i \sin kl = 0. \quad (2.51)$$

Але умова (2.51) може виконуватися тільки за дискретних значень аргументу синуса kl , які визначаються за формулою

$$k_{II} l = \pi n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.52)$$

з якої випливає, що в безмежно глибокій потенціальній ямі частинка може перебувати лише в таких стаціонарних станах, яким відповідає дискретний набір енергетичних рівнів, що згідно з (2.19) та (2.52) визначається за умовою

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.53)$$

Відповідний набір хвильових функцій (2.19) можна визначити, скориставшись з рівнянь (2.50), які за умови (2.50) лінійно залежні. Тому один з коефіцієнтів (A чи B) можна обирати довільно, а другий визначити через нього¹. Покладаючи $A = 1$, визначимо набір коефіцієнтів B_n . З першого рівняння (2.50) з урахуванням (2.52) дістанемо

¹ Ця обставина є наслідком лінійності й однорідності рівняння Шредінгера (2.12) і дає змогу довільним чином нормувати його розв'язки.

$$B_n = -e^{-ik_n l} = -e^{-in\pi} = -(-1)^n. \quad (2.54)$$

Звідси для набору дозволених стаціонарних станів (2.49) матимемо

$$\psi_n(x) = N_n \{e^{ik_n x} - (-1)^n e^{-ik_n x}\}. \quad (2.55)$$

Тут N_n — довільний сталий нормувальний множник. Його визначають звичайно з умови¹

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx = 1. \quad (2.56)$$

Перш ніж обговорювати особливості поведінки хвильових функцій $\psi_n(x)$, проаналізуємо структуру енергетичного спектра (2.53).

Для різниці в енергії між сусідніми $(n+1)$ -м та n -м енергетичними рівнями за (2.53) дістанемо

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1). \quad (2.57)$$

Оскільки розглянута модель може претендувати на якісне зіставлення з реальними фізичними ситуаціями лише для не дуже високих енергетичних рівнів в достатньо глибоких потенціальних ямах, будемо вважати n обмеженим числом ($n \leq n_0$ — фіксоване число).

Як видно з (2.53), різниця ΔE_n зменшується (тобто енергетичні рівні зближаються), коли ширина потенціальної ями l зростає, причому має місце гранична умова

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Delta E_n = 0 \quad (n \leq n_0). \quad (2.58)$$

За такої умови частинка фактично повністю звільняється, оскільки стінки ями безмежно розсуваються внаслідок чого частинка може вільно рухатися по всій осі Ox . Енергія ж вільної частинки ніколи не квантується, утворюючи неперервний спектр². Це *універсальний* закон, який, проте, тут доводити не будемо через математичну складність.

Різниця ΔE_n взагалі може бути дуже малою, а спектр майже неперервним, коли має місце нерівність

¹ Умова нормування (2.56) тут значення не має. Взагалі ж вона важлива, оскільки пов'язана з імовірнісною інтерпретацією хвильових функцій.

² Це твердження має строге теоретичне доведення, яке виходить за межі загального курсу.

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \ll 1; \quad (2.59)$$

тобто у випадку дуже масивних частинок (великі маси m), достатньо великих l , або коли стала Планка \hbar може вважатися зневажливо малою

$$\hbar = 2\pi\hbar \ll 2l\sqrt{2m}. \quad (2.60)$$

Остання нерівність відповідає асимптотичному переходу від квантових до класичних законів руху, що можна довести.

Повернемося до множини хвильових функцій (2.55) і обговоримо кілька перших з них. З цією метою зручно пересунути початок відліку на осі Ox , запровадивши нову координату

$$y = x + l/2. \quad (2.61)$$

Тоді для $\psi_n(x)$ після нескладних обчислень дістанемо

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_n(y) = \psi_n(y - l/2) &= N_n e^{-i\frac{k_n l}{2}} \{e^{ik_n y} - e^{-ik_n y}\} = \\ &= \tilde{N}_n \sin k_n y, \end{aligned} \quad (2.62)$$

де $\tilde{N}_n = 2iN_n \exp\left\{-i\frac{k_n l}{2}\right\}$ — новий нормувальний множник. Підставляючи в (2.62) k_n (див. (2.52)), знаходимо явний вираз для $\tilde{\psi}_n(y)$

$$\tilde{\psi}_n(y) = \tilde{N}_n \sin \frac{\pi n}{l} y. \quad (2.63)$$

При $n = 1, n = 2, n = 3$ маємо

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1(y) &= \tilde{N}_1 \sin \frac{\pi}{l} y, & \tilde{\psi}_2(y) &= \tilde{N}_2 \sin \frac{2\pi}{l} y, \\ \tilde{\psi}_3(x) &= \tilde{N}_3 \sin \frac{3\pi}{l} y. \end{aligned} \quad (2.64)$$

З (2.53) випливає, що, крім двох вузлів¹ на стінках ями (2.48), n -та хвильова функція $\psi_n(y)$ має ще $n-1$ вузол в середині ями. Такий зв'язок числа вузлів хвильової функції з номером дискретного енергетичного рівня стаціонарного стану виявився універсальним для частинки в будь-якій потенціальній ямі. Цією обставиною широко користуються у разі, коли не можна точно розв'язати відповідного рівняння Шредінгера, а хвильові функції штучно моделюють за так званим варіаційним методом, який в загальних курсах, на жаль, не розглядається.

¹ Вузлами функції $f(x)$ називають ті точки $x = x_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots$), де вона перетворюється на нуль: $f(x_j) = 0$.

Рух частинки в полі з ямою скінченної глибини (див. рис. 65, з). Для простоти ліва стінка розглядуваної ями безмежно висока і вертикальна, отже непроникна. Тому рівняння Шредінгера (2.14) слід розглядати лише на додатній напівосі ($x \geq 0$) і одразу доповнити його співвідношеннями

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } 0 \leq x < l; \\ V_0, & \text{коли } x \geq l, \end{cases} \quad (2.65)$$

а також

$$\psi(0) = 0. \quad (2.66)$$

Крім того, треба враховувати умови неперервності (зшивання) розв'язків у точці $x = l$:

$$\psi_a(l) = \psi_b(l); \quad \psi_a'(l) = \psi_b'(l) \quad (2.67)$$

(індекси a і b відповідають хвильовій функції $\psi(x)$ у зоні ями і бар'єра відповідно).

Подібно до випадку ступінчастого потенціалу слід розрізнити рух частинок з підбар'єрною (2.32) і надбар'єрною (2.38) енергіями E .

Для підбар'єрного руху розв'язки $\psi_a(x)$ і $\psi_b(x)$ слід, очевидно, шукати у вигляді

$$\begin{cases} \psi_a(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} & (0 \leq x < l); \\ \psi_b(x) = C e^{-\alpha x} + D e^{+\alpha x} & (x \geq l). \end{cases} \quad (2.68)$$

$$(2.69)$$

Параметри k і α визначаються тут за формулами (2.19). Відповідно до умов (2.66), (2.67), а також з умовою скінченності хвильової функції $\psi(x)$, яка еквівалентна тут рівності $D = 0$, знаходимо

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ A e^{ikl} + B e^{-ikl} = C e^{-\alpha l}; \\ ik(A e^{ikl} - B e^{-ikl}) = -\alpha C e^{-\alpha l}. \end{cases} \quad (2.70)$$

З цієї системи рівнянь і визначають коефіцієнти A , B , C . Оскільки система (2.70) однорідна, вона має нетривіальний розв'язок лише тоді, коли її визначник

$$\Delta_l(k) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{ikl} & e^{-ikl} & -e^{-\alpha l} \\ ik e^{ikl} & -ik e^{-ikl} & \alpha e^{-\alpha l} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.71)$$

Розкриваючи визначник $\Delta_l(k)$ за першим рядком, після нескладних обчислень матимемо

$$\Delta_1(k) = -2ie^{-\alpha l} \{ \alpha \sin kl + k \cos kl \} = 0.$$

Звідси випливає умова

$$\sin kl = -(k/\alpha) \cos kl, \quad (2.72)$$

яка визначає, як і в попередній задачі, дискретний спектр енергій частинки в потенціальній ямі скінченної глибини (див. рис. 65, з). Не зупиняючись на цей раз на аналізі хвильових функцій, обговоримо умову квантування енергії (2.72).

Зазначимо, що граничним переходом до нескінченно глибокої ями (тобто коли $V_0 \rightarrow 0$) ми повертаємося до умови (2.51), і отже, до (2.52), оскільки $\lim \alpha = \infty$, коли $V_0 \rightarrow 0$. (Це свого роду перевірка умови (2.72)). Перепишемо тепер її у простішому вигляді

$$\operatorname{tg} kl = -k/\alpha. \quad (2.73)$$

Рівняння (2.73) є трансцендентним відносно E (див. (2.19)); його можна розв'язати за допомогою ЕОМ або з певним наближенням графічно. В останньому випадку знаходять точки перетину графіків двох функцій

$$f_1(E) \equiv \operatorname{tg} kl, \quad f_2(E) \equiv -k/\alpha. \quad (2.74)$$

Оскільки функція $\psi_6(x) = C e^{-\alpha x}$ швидко спадає із заглибленням частинки в середину бар'єра, частинка в ямі практично локалізована (зв'язана з силовим центром).

Неважно переконалися, що за скінченних значень висоти бар'єра V_0 рівняння (2.73) має скінченне число коренів. Отже, дискретний набір енергетичних рівнів у розглядуваній ямі скінченний (хоча б тому, що рівняння (2.72) або (2.73) слід розглядати лише за умови $E < V_0$). Більше того, за певних умов рівняння (2.72) зовсім не має розв'язків. У такому разі частинка зовсім не може локалізуватися в ямі і, отже, знаходитися у зв'язаному (з силовим центром) стані. Як показано у праці [11], при

$$V_0 l^2 < \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} \quad (2.75)$$

рівняння (2.72) зовсім не має розв'язку, і тому частинка не може локалізуватися в такій ямі (вона для того або недостатньо глибока (малі V_0), або ж занадто вузька (малі l)).

Не вдаючись до обчислень хвильових функцій надбар'єрного ($E > V_0$) руху частинки, вкажемо, що такий рух інфінітний, а енергетичний спектр — неперервний. (Рекомендуємо виконати відповідні розрахунки й провести їхній аналіз самостійно). Взагалі можна довести, що надбар'єрний рух частинок у будь-яких полях інфініт-

ний, а відповідний енергетичний спектр — неперервний. Підбар'єрний же рух в потенціальних ямах завжди фінітний, а відповідний енергетичний спектр — дискретний (або зовсім “порожній”, відсутній (2.75)).

Потенціальний бар'єр. Тунельний ефект (див. рис. 65, д). Розглянемо лише підбар'єрний рух частинки ($E < V_0$) у полі, поданому на рис. 65, д, як найцікавіший. Налітаючи на такий бар'єр, підбар'єрна класична частинка з достовірністю відіб'ється від нього. Підбар'єрні ж мікрочастинки мають відмінну від нуля ймовірність пройти крізь бар'єр. Таке їх проходження дістало назву *тунельного ефекту*. Покажемо, що він дійсно має місце. З цією метою розглянемо підбар'єрний рух частинки в полі (див. рис. 65, д). До рівняння Шредінгера (2.14) додаємо тепер умови

$$U(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0; \\ V_0, & \text{коли } 0 \leq x \leq l; \\ 0, & \text{коли } x > l, \end{cases} \quad (2.76)$$

а також умови “зшивання” розв'язків у точках $x = 0$ і $x = l$:

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(0) &= \psi_\delta(0); & \psi_\delta(l) &= \psi_\pi(l); \\ \psi'_\lambda(0) &= \psi'_\delta(0); & \psi'_\delta(l) &= \psi'_\pi(l) \end{aligned} \quad (2.77)$$

(індекси λ , δ та π символізують зону ліворуч від бар'єра ($x < 0$), зону бар'єра ($0 \leq x \leq l$) і зону праворуч від бар'єра ($x > 0$) відповідно.)

Гадаємо, що тепер без детальних пояснень можна вже записати (для випадку, коли потік частинок налітає на бар'єр зліва направо) систему співвідношень:

$$\begin{cases} \psi_\lambda(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}; \\ \psi_\delta(x) = C e^{-\alpha x} + D e^{\alpha x}; \\ \psi_\pi(x) = \mathcal{E} e^{ikx}. \end{cases} \quad (2.78)$$

Як і раніше, можна покласти $A = 1$. Тоді для визначення коефіцієнтів B , C , D , \mathcal{E} можна скористатися з умов “зшивання” (2.77). Дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 1 + B = C + D; \\ ik(1 - B) = -\alpha(C - D); \\ e^{-\alpha l} C + e^{\alpha l} D = \mathcal{E} e^{ikl}; \\ -\alpha(e^{-\alpha l} C - e^{\alpha l} D) = ik\mathcal{E} e^{ikl}. \end{cases} \quad (2.79)$$

Оскільки ця система для B , C , D , \mathcal{E} не є однорідною, жодних умов, що накладаються на енергетичні рівні, не

виникає; рух при цьому інфінітний. Особливо цікавим в даній задачі є коефіцієнт ϵ за умови $E < V_0$, оскільки він визначає хвилю, що пройшла крізь бар'єр, тобто свідчить про те, що справді існує тунельний ефект. На ньому й сконцентруємо увагу. Канонічні, хоча й трохи задовгі, калькуляції дають

$$\epsilon = \frac{4ik\kappa e^{-ikl}}{(\kappa + ik)^2 e^{2ikl} - (\kappa - ik)^2} e^{-\alpha l} . \quad (2.80)$$

Звідси видно, що $\epsilon \neq 0$ і, отже, підбар'єрна хвиля-частинка дійсно в змозі "просочитися" ("тунелювати") крізь потенціальний бар'єр, чого не може здійснити класична частинка. Саме ця обставина лежить в основі теорії відомого з елементарного курсу α -розпаду α -активних ядер та в основі багатьох інших фізичних явищ, не відомих класичній фізиці. Тому на тунельний ефект звертаємо особливу увагу.

Наявність у формулі (2.80) експоненціального фактора $e^{-\alpha l}$ з урахуванням (2.72) означає, що амплітуда ϵ хвилі де Бройля, яка пройшла крізь потенціальний бар'єр (як світлова хвиля через напівпрозору пластинку), швидко спадає зі зростанням висоти V_0 або ширини l бар'єра, і в межах нескінченно високого або широкого бар'єра обертається на нуль.

Детальніше й ґрунтовніше описані вище задачі подані, наприклад, у працях [11, 25].

Гадаємо, що з наведених прикладів ми усвідомили кардинальну відмінність в поведінці мікро- і макро- (тобто класичних) частинок, а також риси подібності в поведінці мікрооб'єктів з поведінкою класичних електромагнітних (зокрема, світлових) хвиль, з одного боку, і з поведінкою класичних частинок (корпускул) — з іншого. У цьому й полягає корпускулярно-хвильовий дуалізм, притаманний усім мікрооб'єктам.

АТОМ ВОДНЮ ТА ІНШІ АТОМИ. ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА ЕЛЕМЕНТІВ МЕНДЕЛЄЄВА

§ 3.1. Сферично симетричні стани водневоподібних атомів

Як відомо з елементарного курсу, ядро атома водню складається з одного протона, а його електронна оболонка містить один електрон. Тому потенціальна енергія електрона в полі ядра водню має вигляд¹

$$U(r) = -e^2/r, \quad (3.1)$$

де e — заряд електрона (нагадаємо, що заряди електрона і протона, маючи різні знаки, дорівнюють один одному за величиною); r — відстань між центром ядра і електроном.

Якщо однократно іонізувати атом гелію He^+ , двократно — літій Li^{++} , взагалі $(z - 1)$ -кратно атом з порядковим номером z за таблицею Менделєєва, дістанемо так звані водневоподібні атоми. Для них потенціальна енергія єдиного електрона, що залишився, в полі відповідного ядра виглядатиме як

$$U(r) = -ze^2/r. \quad (3.1a)$$

У системі координат з початком у центрі ядра водневоподібного атома рівняння Шредінгера набирає форми

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{ze^2}{r} \right\} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}), \quad (3.2)$$

де $\mu = Mt/(M + m)$ — зведена маса електрона в атомі (M — маса ядра, m — маса електрона).

Розглядаючи зв'язані стани електрона в атомі (тобто його фінітний рух у кулонівській потенціальній ямі (3.1) (рис. 66)), зважимо на від'ємність повної енергії електрона

$$E < 0. \quad (3.3)$$

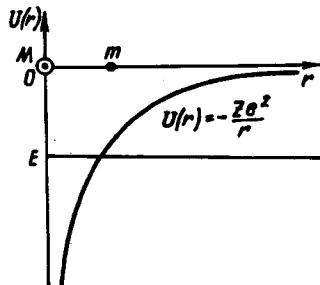


Рис. 66

¹ В атомній фізиці система одиниць СІ незручна. Тому користуватимемося системою СГСЕ [11].

Для побудови відповідного розв'язку рівняння Шредінгера (3.2) надамо йому канонічного вигляду

$$\left\{ \Delta + \frac{\beta}{r} - \alpha^2 \right\} \psi = 0. \quad (3.4)$$

Тут введено константи

$$\beta = \frac{2\mu z e^2}{\hbar^2}; \quad \alpha^2 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} > 0. \quad (3.5)$$

Для спрощення математичних розрахунків обмежимося множиною сферично симетричних розв'язків рівняння (3.4). На цьому прикладі основна фізична суть проблеми виступає цілком виразно. Узагальнення на випадок нецентрально-симетричних розв'язків (пелюсткового типу) є вже справою майже чисто математичного мистецтва, хоч і містить додаткову фізичну інформацію, яку ми прокоментуємо без обчислень.

Якщо перейти від декартових координат $\{x, y, z\}$ до сферичних $\{r, \theta, \varphi\}$ (див. розділ 1) і обмежитися тільки сферично симетричними розв'язками

$$\psi = \psi(r), \quad (3.6)$$

то оператор Лапласа перетворюється на

$$\Delta \rightarrow \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}. \quad (3.7)$$

(Це ми обгрунтуємо наприкінці параграфа.) Отже, в даному разі рівняння Шредінгера (3.4) перетворюється на звичайне диференціальне

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\beta}{r} - \alpha^2 \right\} \psi(r) = 0. \quad (3.8)$$

У таких рівняннях завжди можна позбутися члена з першою похідною (d/dr). У даному разі це досягається підставленням

$$\psi(r) = u(r)/r. \quad (3.9)$$

Для $u(r)$ за допомогою (3.8) знаходимо

$$u'' + \frac{\beta}{r} u - \alpha^2 u = 0. \quad (3.10)$$

Перш ніж шукати всю сукупність фізичних¹ розв'язків рівняння (3.10), покажемо, що серед розв'язків вихідного

¹ А є й нефізичні (зайві) розв'язки.

рівняння (3.8) за певного значення параметра α є розв'язок вигляду¹

$$\psi_1(r) = A_1 e^{-\alpha r}. \quad (3.11)$$

Доведення даного твердження досягається прямим підставленням виразу (3.11) до рівняння (3.8). В результаті матимемо

$$\left\{ -\frac{2\alpha}{r} + \frac{\beta}{r} \right\} \psi_1(r) = 0.$$

Звідки одразу знаходимо

$$\alpha = \beta/2 = \frac{z\mu e^2}{\hbar^2} \implies E_1 = -\frac{z^2 \mu I^4}{2 \hbar^2} \quad (3.12)$$

Трохи згодом покажемо, що власна функція $\psi_1(r)$ відповідає найнижчому енергетичному рівню E_1 електрона у водневоподібних атомах. Найнижчий (за енергією) стаціонарний стан квантової системи називають *основним станом*. Отже, основному стану електрона в атомі водню відповідає хвильова функція $\psi_1(r)$ (3.11) і значення енергії E_1 (3.11), (3.12).

В теоретичній та математичній фізиці доведено, що хвильові функції, які відповідають зв'язаним станам, за межами потенціальної ями завжди дуже швидко спадають з відстанню (фінітний рух), причому потенціалам, що прямують з певною швидкістю до нуля на безмежності ($\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) = 0$), відповідають хвильові функції, які спадають не повільніше, ніж $r^n e^{-\alpha r}$ ($0 \leq n \leq N_0$ — скінченне число). Саме так веде себе, наприклад, $\psi_1(r)$, а відповідна йому $u_1(r)$ дорівнює

$$u_1(r) = r \psi_1(r) = A_1 r e^{-\alpha r}. \quad (3.13)$$

Тому набір зв'язаних станів електрона водневоподібного атома, що задовольняють рівняння (3.10), логічно шукати у вигляді

$$u(r) = f(r) e^{-\alpha r}, \quad (3.14)$$

а нову шукану функцію $f(r)$ подати степеневим рядом

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \quad (3.15)$$

¹ А також вигляду $\psi_1(r) = \tilde{A}_1 e^{+\alpha r}$ з $\alpha = -\beta/2$.

з коефіцієнтами a_k , які треба визначити підставлянням розкладу (3.14) в рівняння (3.10). Розклад (3.15) починається з $a_1 r$, а не з a_0 , оскільки $\psi(r)$ повинна бути всюди скінченною, включаючи точку $r = 0$.

Згідно з (3.10) та (3.14) дістанемо

$$f''(r) - 2\alpha f'(r) + \frac{\beta}{r} f(r) = 0. \quad (3.16)$$

Заготовивши похідні від $f(r)$

$$\begin{cases} f'(r) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k r^{k-1}; \\ f''(r) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) a_k r^{k-2} = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) k a_{k+1} r^{k-1}, \end{cases} \quad (3.17)$$

підставимо їх у (3.16)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (k+1) k a_{k+1} + (\beta - 2\alpha k) a_k \right\} r^{k-1} \equiv 0. \quad (3.18)$$

Оскільки степеневий ряд тотожний нулю лише тоді, коли нулями є всі його коефіцієнти, то

$$(k+1) k a_{k+1} - (2\alpha k - \beta) a_k \equiv 0. \quad (3.19)$$

Звідси для коефіцієнтів a_k дістанемо рекурентну формулу

$$a_{k+1} = \frac{2\alpha k - \beta}{k(k+1)} a_k. \quad (3.20)$$

Згідно з (3.20), задавши довільним чином a_1 , усі інші коефіцієнти визначаємо за (3.20) вже цілком однозначно. Що ж до першого коефіцієнта a_1 , то його визначають з умови нормування для зв'язаних станів

$$\int \Psi^*(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) dV = 1, \quad (3.21)$$

яка впливає з імовірнісної інтерпретації хвильової функції $\Psi(\vec{r})$ [11, 25]. Проте тут визначення a_1 не знадобиться.

З (3.20) для великих k

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2\alpha - \beta/k}{(k+1)} \approx \frac{2\alpha}{k+1} \quad (k \gg \beta). \quad (3.22)$$

Але асимптотична для ряду (3.15) (великі k) рекурентна формула (3.22) ($a_{k+1} \approx \frac{2\alpha}{k+1} a_k$) є точною для розкладання експоненти

$$\tilde{f}(r) \equiv e^{2\alpha r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\alpha)^k}{k!} r^k. \quad (3.23)$$

Це означає, що коли ряд $f(r)$ за (3.15) не обривається на певному члені, перетворюючись на поліном, то поведінка функції (3.15) при великих r збігається з поведінкою експоненти $f(r)$ (3.23), і тому для $\psi(r)$ (див. (3.6)) при великих r за (3.9), (3.14), (3.15) і (3.23) дістанемо¹

$$\psi(r) \underset{\text{(великі } r)}{\sim} e^{2\alpha r} e^{-\alpha r} = e^{\alpha r}. \quad (3.24)$$

Звідси $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \infty$. Але такі функції не мають фізичного змісту. Проте з рекурентної формули (3.20) випливає, що існує такий дискретний набір параметрів $\{\alpha_n\}$, для якого ряд (3.15) обривається на певному члені, перетворюючись на поліном. Очевидно (див. (3.20)), цей дискретний набір задовольняє умову

$$\alpha_n = \beta/2n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.25)$$

За такої умови ряд (3.15) справді перетворюється на поліном

$$f(r) \Rightarrow f_n(r) = \sum_{k=1}^n a_k r^k, \quad (3.26)$$

а відповідні хвильові функції $\psi_n(r)$ за (3.9) на

$$\psi_n(r) = u_n(r)/r = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k r^{k-1} \right\} e^{-\alpha_n r}. \quad (3.27)$$

Такі функції вже є скінченними при всіх значеннях r і, отже, фізично осмисленими.

З огляду на (3.25) та (3.5) для набору “дозволених” енергетичних рівнів матимемо

$$E_n = -\tilde{A}z^2 \frac{1}{n^2}, \quad \tilde{A} = \frac{\mu e^4}{2\hbar} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.28)$$

Але такі E_n — це саме ті величини, які у згоді з експериментом постулював свого часу під тиском фактів Н. Бор!

¹ Доведіть, що $\tilde{\varphi}_1(r) = e^{\alpha r}$ так само задовольняє рівняння (3.8) і є другим (не фізичним) розв'язком (у парі з (3.11)). Отже, коли не обіравати ряд (3.15), поклавши (3.25), то отримаємо нефізичний розв'язок.

Отже, застосоване до водневоподібних атомів рівняння Шредінгера природним чином, без будь-яких штучних додаткових умов¹ веде до спостережуваного експериментального набору рівнів (3.28). Власне кажучи, це й стало головною причиною швидкого визнання рівняння Шредінгера. (Подібно до того, як достатньо швидкому визначенню класичних законів Ньютона сприяло їхнє узгодження з законами Кеплара та іншими законами руху небесних тіл).

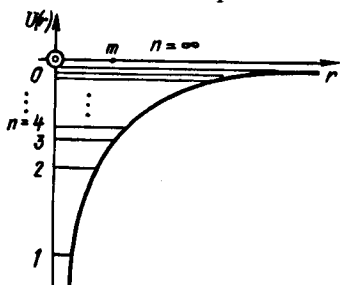


Рис. 67

Набір дискретних енергетичних рівнів водневоподібних атомів $\{E_n\}_1^\infty$ відповідає зв'язаним станам електронів у цих атомах $\psi_n(r)$, тобто *фінітному* їх рухові в кулонівській потенціальній ямі (рис. 67). Як видно із формули (3.28), набір енергетичних рівнів швидко ущільнюється зі зростанням n коли E_n наближаються до нуля.

Особливості кулонівського потенціалу (3.1), (3.1a) виявилися такими, що, знайшовши тільки частину хвильових функцій $\psi_n(r)$, які репрезентують лише сферично симетричні стани (котрі не залежать від кутів θ і ϕ), ми не “загубили” жодного енергетичного рівня! Справа тут у так званому *виродженні рівнів*, коли тому самому значенню енергії відповідає не одна, а кілька хвильових функцій. Показати це на прикладі водневоподібних атомів у загальному курсі фізики не так просто, що пояснюється математичними труднощами. Проте проілюструвати принципове існування вироджених рівнів все ж можна на прикладі вільних частинок, описуваних хвилями де Бройля:

$$\psi_{E, \vec{p}}(\vec{r}, t) = A e^{-\frac{E}{\hbar} t} e^{i \vec{p} \vec{r}}. \quad (3.29)$$

Для таких хвиль кожному фіксованому значенню енергії

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} \{ p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \} = \text{const} \quad (3.30)$$

відповідає цілий континуум векторів імпульсу $\vec{p} \{ p_x, p_y, p_z \}$, кінці яких описують сферичну поверхню (3.30). Набір

¹ Нагадаємо, що староквантові (як їх тепер називають) постулати Н. Бора *штучно* нав'язували дискретизацію класичних орбіт електронів у атомі водню.

відповідних стаціонарних хвильових функцій $\psi_{E,\vec{p}}(\vec{r}) = A e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar}$ визначається не лише значенням енергії E , а й значеннями проекцій імпульсу (p_x, p_y, p_z), що задовольняють умову (3.30). Отже, фіксованій енергії E відповідає безмежно багато різних власних функцій (3.29), (3.30). Подібно до цього стаціонарні хвильові функції електрона водневоподібних атомів так само нумерується не одним квантовим числом n (яке дістало назву *головного квантового числа*), а чотирма: *головним, орбітальним, магнітним і спіновим*. Фізичний зміст кожного з цих чисел і кореляцію між ними буде розглянуто у наступному параграфі. Таке виродження рівнів разом з принципом Паулі (див. далі § 3.2) зумовлює, як побачимо, оболонкову структуру атомів.

Обгрунтуємо, нарешті, перехід (3.7) для сферично симетричних станів (3.6).

У системі координат з центром в ядрі атома матимемо

$$r = \{x^2 + y^2 + z^2\}^{1/2}. \quad (3.31)$$

Тому

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{d\psi}{dr}.$$

Звідси

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{x^2}{r^2} \left\{ -\frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2 \psi}{dr^2} \right\}. \quad (3.32)$$

(Рекомендуємо обчислити самостійно, закривши (3.32), аналогічні вирази для $\partial^2 \psi / \partial y^2$, $\partial^2 \psi / \partial z^2$).

Підсумовуючи результати, дістанемо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr},$$

що й треба було довести (3.7).

§ 3.2. Квантові числа електронів в атомах; принцип Паулі, електронні оболонки атомів

При обговоренні ланцюжка евристичних міркувань, що ведуть до рівняння Шредінгера (1.100), було запроваджено поняття про власні функції f_l та власні значення l операторів \hat{L} (1.85). З визначення цих величин випливає, що хвильові функції ψ_E та енергії E мікрочастинок є власними функціями і відповідно власними значеннями оператора енергії — гамільтоніана \hat{H} (1.101):

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + U(\vec{r}).$$

Як відомо з елементарного курсу, у мікросвіті дискретних значень можуть набувати (тобто квантуватися) не лише енергії E частинок у потенціальних силових полях, а й інші фізичні величини. Так, внаслідок руху електронів в атомах останні можуть мати магнітний момент \vec{m} , який в магнітному полі з напруженістю \vec{H} орієнтується відносно напрямку вектора \vec{H} не довільним чином, а під цілком певним (дискретним) набором кутів та мати дискретну множину значень (уточнення будуть наведені далі). З теоретичного аналізу подібних ситуацій можна зробити висновок, що у мікросвіті фізичним величинам відповідають певні оператори, власні функції і власні значення яких визначають набори фізично можливих станів системи і набори можливих значень відповідних фізичних величин (квантування). Цей висновок підтверджено подальшим розвитком квантової фізики. На жаль, тут немає можливості детально зупинитися на тих міркуваннях, які дають змогу постулювати правила математичного конструювання операторів конкретних фізичних величин¹. Це робиться в теоретичній фізиці. На підставі міркувань, апробованих досвідом, можна зробити такі висновки:

1) оператори фізичних величин мають бути *самоспряженими*, тобто такими, власні значення яких дійсні (не комплексні), оскільки такими є самі фізичні величини;

2) оператори складних фізичних величин, які в класичній фізиці виражаються певними функціями координат $\{\vec{r}\}$ та імпульсів $\{\vec{p}\}$, комбінуються з операторів координат $\{\hat{r} \equiv \vec{r}\}$ та імпульсів $\{\hat{p} \equiv -i\hbar\vec{\nabla}\}$ за тими самими формулами, що й класичні величини². Наприклад, оператор моменту імпульсу конструюється аналогічно класичному його виразу. Оскільки класичний момент імпульсу \vec{L} визначається за формулою

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}], \quad (3.33)$$

квантовий його аналог має вигляд

¹ Спрощена низка міркувань такого типу наводиться вище щодо рівняння Шредингера.

² Щоправда, інколи доводиться вдаватися до симетризації відповідних класичних виразів, але про це тут говорити немає сенсу.

$$\hat{L} = [\vec{r}, \hat{p}] = -i\hbar [\vec{r}, \vec{\nabla}] \quad (3.34)$$

(квадратні дужки символізують векторний (у разі (3.33)) і символічно векторний (у разі (3.34)) добуток \vec{r} на \vec{p} (та відповідно \hat{p})).

З метою розписати \hat{L} у проєкціях на осі координат слід розкрити символічний визначник

$$\hat{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} (-i\hbar). \quad (3.34)$$

Зокрема для оператора проєкції моменту \hat{L}_z на вісь Oz за (3.34) дістаємо

$$\hat{L}_z = x \hat{p}_y - y \hat{p}_x = -i\hbar \left\{ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right\}. \quad (3.35)$$

Як показує теоретичний аналіз, саме описане правило математичного конструювання операторів фізичних величин забезпечує правильний граничний перехід від квантових співвідношень до класичних (справедливих у макросвіті). Отже, таке правило конструювання операторів фізичних величин відбиває фундаментальний фізичний принцип відповідності, за яким квантові закони повинні переходити у класичні, коли можна знехтувати величинами порядку першої і вищих ступенів сталої Планка \hbar . (Рекомендуємо проаналізувати під таким кутом зору модельні приклади гл. 2).

Звичайно, на власні функції операторів фізичних величин накладаються природні вимоги *однозначності, скінченності, неперервності*.

Математичній гіпотезі у сучасній фізиці, яка вийшла за межі безпосередньо спостережуваного й наочного (крім обговорюваних тут постулатів квантової механіки, слід згадати ще постулати спеціальної теорії відносності (див. розділ 4), належить, як бачимо, значна роль.

На жаль, у загальному курсі важко (та й не варто) формулювати і реально розв'язувати численні задачі на знаходження власних функцій і власних значень для різних операторів фізичних величин. (Це робиться в теоретичній фізиці). Для ілюстрації розглянемо лише простеньку задачу на знаходження власних функцій і власних значень опера-

тора проекції моменту імпульсу частинки на певним чином фізично виділений напрям, який сумістимо з віссю Oz . Отже, поставимо задачу, як кажуть, на власні значення оператора \hat{L}_z . Для цього введемо полярні координати $\{r, \theta, \varphi\}$, пов'язані з декартовими таким чином (див. розділ 1):

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta. \quad (3.36)$$

Покажемо, що в полярних координатах оператор \hat{L}_z має вигляд

$$\hat{L}_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.37)$$

З цієї метою в (3.37) повернемося до декартових координат $\{x, y, z\}$. Маючи справу з переходом до різних систем координат, слід не випускати з поля зору, що оператори типу \hat{H} (див. (3.32)), \hat{L}_z (3.35) та ін. самі по собі не більше як символи. Мається на увазі, що вони діють на певні функції $\hat{H}\psi(\vec{r})$; $\hat{L}_z = f(\varphi)$, які знаходяться праворуч від операторів. Інакше різні перетворення над операторами виконати неможливо. Беручи сказане до уваги, матимемо

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.38)$$

З огляду на (3.36) знаходимо

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -y; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = x; \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.39)$$

Тому

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.40)$$

і

$$\hat{L}_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} = -i \hbar \left\{ x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right\}, \quad (3.41)$$

що справді збігається з (3.35). Отже, в полярних координатах власні функції і власні значення оператора проекції моменту імпульсу на вісь Oz (див. (3.35), (3.41)) можна знайти з рівняння

$$-i \hbar \frac{\partial f}{\partial \varphi} = l_z f(\varphi), \quad (3.42)$$

доповненого фізичними умовами скінченності, однозначності та неперервності, які накладаються на власні функції $f(\varphi)$.

Рівняння (3.42) має розв'язки вигляду

$$f(\varphi) = A e^{i \frac{l_z \varphi}{\hbar}}, \quad (3.43)$$

де A — не залежний від φ нормувальний множник (може залежати від r, θ).

Формула (3.43) перевіряється прямим підставленням (3.43) в (3.42). За дійсних значень шуканого параметра l_z скінченність і неперервність $f(\varphi)$ забезпечено автоматично. Вимога однозначності з необхідністю веде до вибору

$$l_z / \hbar = \pm m \quad (3.44)$$

($m = 0, 1, 2, 3, \dots$ — послідовність цілих чисел). Тоді при $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$ значення $f(\varphi)$ не змінюється (однозначність). Звідси для власних значень оператора проекції моменту імпульсу l_z на фізично виділений напрям Oz дістаємо

$$l_z = \pm \hbar m \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.45)$$

На виборі максимального значення m зупинимось трохи згодом (обмеження ж повинно бути, оскільки проекція вектора на будь-яку вісь за модулем не може перевищувати модуля самого вектора).

Демонстрація методики обчислень та фізичної інтерпретації власних функцій і власних значень операторів фізичних величин (на модельних прикладах гл. 2 та реальних прикладах даної глави), сподіваємося, дала змогу з'ясувати основні особливості подвійної (корпускулярно-хвильової) поведінки мікрочастинок, риси їхньої схожості з класичними частинками і відмінності від них, елементи відповідності між класичними і квантовими законами та принципи розв'язування квантових задач.

Подальші обчислення завели б досить далеко в математичні хащі, надмірні для першого ознайомлення з квантовомеханічними законами. Тому подальший виклад носитиме здебільшого описовий (декларативний) характер з незначною часткою простих обчислень. У загальному курсі це безперечно виправдане.

Якщо не обмежуватися сферично симетричними (3.6) розв'язками рівняння Шредінгера (3.2), а знайти всі його фізичні розв'язки

$$\psi = \psi(r, \theta, \varphi), \quad (3.46)$$

то з урахуванням спіна електрона виявилось б, що всі енергетичні рівні (3.28) електрона у водневоподібних атомах вироджені й кожному з них відповідає набір різних хвильо-

вих функцій (\equiv стаціонарних станів електрона), які слід нумерувати чотирма квантовими числами: *головним* квантовим числом n (3.28), яке визначає набір енергетичних рівнів; *орбітальним* l , яке визначає набір дозволених значень модулів моменту імпульсу $|\vec{L}|$ (3.33), (3.34); *магнітним* m (3.45), яке визначає набір можливих проєкцій моменту \vec{L} на фізично виділений напрям: *спіновим* s , що визначає проєкцію власного моменту електрона на виділений напрям і має два припустимі значення $\{+1/2 \text{ та } -1/2\}$.

Опишемо фізичний зміст цих квантових чисел детальніше та вкажемо на зв'язок між ними.

Орбітальне квантове число l з модулем орбітального моменту електрона $L = |\vec{L}|$ пов'язане за співвідношенням

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1), \quad (3.47)$$

причому при заданому головному квантовому числі n , яке визначає енергію E_n , орбітальне квантове число l може набирати цілочисельних значень від нуля до $n - 1$:

$$l = 0; 1; 2; \dots; n - 1. \quad (3.48)$$

При фіксованому l магнітне¹ квантове число m (3.45), яке визначає проєкцію моменту \vec{L} на фізично виділений напрям, може набирати таких цілочисельних значень:

$$m = -l; -l+1; \dots; -1; 0; 1; \dots; l-1; l. \quad (3.49)$$

Отже, може набирати $2l + 1$ значення.

Нарешті, проєкція спіна (власного моменту) електрона σ_z визначається спіновим квантовим числом s , яке набуває двох значень: $s = -1/2; +1/2$, за формулою

$$\sigma_z = \hbar s. \quad (3.50)$$

Отже, кожному енергетичному рівню E_n електрона водневоподібного атома за (3.28) відповідає цілий набір різних стаціонарних станів

$$\{\psi_{nlms}(r, \theta, \varphi)\}. \quad (3.51)$$

Неважко підрахувати число цих станів (або, як кажуть, *кратність виродження рівня E_n*). Згідно з (3.48), (3.49), (3.50)

¹ Епітет *магнітне* пов'язаний з тим, що механічний момент \vec{L} рухомої зарядженої частинки в атомі пов'язаний з магнітним моментом \vec{m} за формулою $\vec{m} = -\frac{e}{2mc} \vec{L}$.

число станів N_n , що відповідають енергетичному рівню E_n , дорівнює

$$N_n = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2 n^2. \quad (3.52)$$

Сферично симетричні стани (3.27) відповідають нульовому орбітальному моменту $l = 0$. Їх називають s-станами. Далі зі зростанням l ідуть p-, d-, f- і т. д. стани¹ ($p \sim l = 1$; $d \sim l = 2$; $f \sim l = 3$).

Стан електрона в атомі, який відповідає найнижчому енергетичному рівню $E_1 = -\frac{Z^2 \mu e^4}{2\hbar^2}$ (3.28), називають *основним*. Всі інші стани ($n \geq 2$) — збудженими. Досвід свідчить, що атом у збудженому стані не може бути стабільним; після збудження атом через певний проміжок часу самочинно (спонтанно) повертається в основний стан, здійснивши прямий (або поетапний) перехід в основний стан з випромінюванням одного або відповідно серії фотонів. Час “життя” атома в збудженому стані не визначається однозначно, а підпорядковується певному статичному закону. Проте з рівняння Шредінгера не впливають спонтанні переходи електронів між своїми стаціонарними станами в атомах. Це пояснюється тим, що потенціальне поле $U(\vec{r})$, яке входить до рівняння Шредінгера (див., наприклад, (3.2), (3.1)), статичне. Насправді ж фізичні силові поля становлять динамічні системи, які можуть обмінюватися енергією з частинками, змінюючи тим самим свій і їхній стани. Більш послідовна квантова теорія враховує динаміку не лише частинок, а й полів. Така теорія вже описує спонтанні переходи електронів у атомах і т. д. Це — *квантова електродинаміка*, яку в загальних курсах за складністю не вивчають.

Оскільки рано чи пізно атомні системи спонтанно переходять в основний стан, постає питання, чому електрони в атомах утворюють енергетичні оболонки² з певним (див. далі) розподілом за енергетичними рівнями, а не перехо-

¹ Назви станів p-, d-, f- і т. д. — традиційні, запозичені з спектроскопії.

² На жаль, немає змоги тут хоча б побіжно простежити історію відкриття оболонкового розподілу електронів у атомах. Взагалі за експериментальними дослідженнями та демонстраціями ми змушені відсилати, наприклад, до праці [32] через брак місця. (Та робота в бібліотеках повинна бути нормою для студента.)

дять геть усі на найнижчий енергетичний рівень. На це питання (і на багато інших) дає відповідь *принцип Паулі*.

Для пояснення оболонкового характеру заповнення електронами енергетичних рівнів в атомах Паулі висунув гіпотезу про те, що в будь-якому квантовому стані (який визначається повним набором квантових чисел) може знаходитись лише один електрон. Тому кожен наступний електрон незбудженого атома повинен займати найглибший енергетичний рівень серед ще не заповнених.

Принцип заборони Паулі (а саме так його ще називають), як виявилось, має *універсальний* характер. Він справедливий для всіх мікрочастинок, що мають напівцілий спін ($s = -1/2, +1/2$). Такі частинки дістали назву *ферміонів*. Принцип Паулі не поширюється на так звані *базони*, які мають цілий спін ($s = -1, 0, +1$). До базонів належать, наприклад, *фотони*.

Особливостями виродження енергетичних рівнів водневоподібних атомів та принципом Паулі можна пояснити характер заповнення електронних оболонок в атомах. А саме: оскільки кожному фіксованому енергетичному рівню E_n відповідає цілий набір стаціонарних станів ψ_{nlms} з квантовими числами n, l, m, s , між якими існує корелятивний зв'язок:

$$\begin{aligned} n &= 1; 2; 3; \dots; & l &= 0; 1; \dots; n - 1; \\ m &= 0; \pm 1; \dots; \pm l; & s &= -1/2; +1/2, \end{aligned} \quad (3.53)$$

то n -ту енергетичну оболонку може займати не більш як $2n^2$ (див. (3.52)) електронів з різними наборами квантових чисел n, l, m, s . Неважко збагнути, що на найнижчому енергетичному рівні $n = 1$; $E_1 = -z^2 \frac{\mu l^4}{2\hbar^2}$ можуть знаходитись

лише два електрони з наборами квантових чисел: $n = 1$; $l = 0$; $m = 0$; $s = -1/2, +1/2$. На другому ($n = 2$)-енергетичному рівні знаходиться вже $2n^2 = 8$ електронів з наборами квантових чисел: $n = 2$; а) $l = 0$; $m = 0$; б) $l = 1$; $m = -1$; 0 ; $+1$; $s = -1/2, +1/2$ і т. д. (Рекомендуємо перерахувати ще два-три вищі набори квантових чисел.)

Отже, принцип Паулі дійсно пояснює оболонкову структуру атомів. Взагалі він пояснює багато явищ у мікросвіті, зокрема, наявність періодичності хімічних властивостей елементів, тобто періодичну таблицю Менделєєва (див. наступний параграф). Щоправда, не всі елек-

тронні оболонки атомів заповнюються у повній згоді з формулами (3.28) та (3.53). Це пояснюється тим, що заснована на теорії водневоподібних атомів схема не звертає уваги на те, що електрони взаємодіють не лише з ядром, а й між собою, що вносить свої корективи в їхній енергетичний спектр (набір дозволених енергій) та в характер заповнення енергетичних оболонок. І все ж заповнення оболонок найлегших атомів відповідає обговореному правилу, оскільки взаємодія електронів з ядром в них істотно домінує над взаємодією “розмазаних” по атому електронів між собою.

На закінчення наведемо розподіл імовірностей знайти електрон на різних відстанях від ядра атома водню в основному ($n = 1$) стані. Як було показано, хвильова функція основного стану має вигляд (3.11)

$$\psi_1(r) = A_1 e^{-\alpha_1 r}. \quad (3.54)$$

Нормувальний множник A_1 визначається умовою

$$\int \dot{\psi}_1(r) \psi_1(r) dV = 1, \quad (3.55)$$

яка за теоремою додавання імовірностей (див. розділ 2) означає, що десь у просторі з *достовірністю* перебуває електрон. Для основного стану (3.54) інтеграл (3.55) неважко обчислити:

$$4\pi |A_1|^2 \int_0^{\infty} e^{-2\alpha_1 r} r^2 dr = 1. \quad (3.56)$$

(Пропонуємо виконати обчислення й знайти явний вираз для $|A_1|$.)

Неважко зрозуміти, що за теоремою додавання (див. розділ 2) імовірність знайти електрон у сферичному шарі товщини dr на відстані r від ядра визначається за формулою

$$dP(r) = 4\pi |A_1|^2 e^{-2\alpha_1 r} r^2 dr. \quad (3.57)$$

Обчислимо відстань r_1 , на яку припадає максимум імовірності (3.57). Очевидно, цей максимум визначається за умовою

$$\frac{df(r)}{dr} = 0, \quad \text{де } f(r) = r^2 e^{-2\alpha_1 r}. \quad (3.58)$$

В явному вигляді умову (3.58) можна записати таким чином:

$$2r \{1 - \alpha_1 r\} e^{-2\alpha_1 r} = 0. \quad (3.59)$$

Максимуму відповідає корінь

$$r_{\max} = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{2}{\beta} = \frac{\hbar^2}{4\pi e^2} . \quad (3.60)$$

У староквантовій теорії Бора r_{\max} — радіус першої електронної орбіти. У сучасній квантовій теорії немає поняття траєкторії чи орбіти. Як ми бачили, в кожному стаціонарному стані електрони ніби “розмазані” навколо ядра з густиною імовірності $\psi_{nlms}(r, \theta, \varphi)^2$. На відстань r_m припадає максимум імовірності в основному стані.

§ 3.3. Періодична система елементів Менделєєва

Як відомо з елементарних курсів фізики та хімії, хімічні елементи підпорядковані періодичному закону, встановленому Менделєєвим. З розвитком квантової фізики внаслідок відкриття принципу Паулі і пов'язаної з ним оболонкової структури електронної підсистеми в атомах була з'ясована фізична природа періодичної повторюваності хімічних властивостей елементів. Виявилось, що ці властивості істотно визначаються будовою зовнішньої електронної оболонки атомів, її конфігурацією.

Із зростанням номера елемента z в періодичній системі Менделєєва зростає заряд відповідного йому ядра атома, а отже, й число електронів, розташованих навколо нього. За принципом Паулі електрони не можуть усі разом перебувати в найнижчому енергетичному стані, а утворюють енергетичні оболонки (див. § 3.2). Коли зовнішня оболонка атома повністю “заселяється” електронами, на новій зовнішній оболонці наступного за номером атома з'являється один електрон, далі за таблицею — ще один і т. д. При просуванні по таблиці Менделєєва в напрямі зростання номерів елементів будуть зустрічатися атоми, зовнішня електронна оболонка яких за своєю конфігурацією повторює зовнішню оболонку певного попереднього за номером атома. Хімічні властивості таких атомів-побратимів будуть аналогічними.

Менделєєв пов'язував періодичність властивостей хімічних елементів з атомною масою, а не, як роблять тепер, із зарядом ядра, який в електронних одиницях збігається з порядковим номером елемента. Тому ізотопи (рекомендуємо повторити про них за шкільним курсом) спричинювали порушення порядку розташування елементів у таблиці

Менделєєва. Та лише на базі квантової механіки з її принципом Паулі вдалося з'ясувати фізичну суть періодичного закону та розібратися в причинах деякого його порушення, якщо послідовність елементів у таблиці пов'язувати з їхньою атомною масою, як це робив Менделєєв.

Детальніше про періодичну систему елементів Менделєєва можна прочитати, наприклад, у праці [11].

Глава 4

ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ ФІЗИКИ КРИСТАЛІЧНИХ ТІЛ

§ 4.1. Поняття про енергетичні зони електронів у кристалах

Обминаючи питання про молекулярні спектри енергій [11], перейдемо до якісного (без обчислень) обговорення енергетичних спектрів електронів в ідеальних кристалах. З цією метою вкажемо на ті зміни в енергетичному спектрі мікрочастинок (зокрема, електронів), які відбуваються, коли вони потрапляють у поле не одного, а двох, трьох і т. д. силових центрів (атомів), розташованих у певному порядку. Вважатимемо силові центри однаковими. (Одновимірні модельні варіанти обговорюваної проблеми схематично показано на рис 68.) На рисунку подано три одновимірні приклади: потенціальна яма одного силового центра (*a*); двох однакових центрів, розташованих на відстані “*a*” один від одного (*b*); дуже великого числа ($N \gg 1$) однакових центрів, розташованих на однакових відстанях *a* один від одного.

Визначивши енергетичні рівні $\{E_i\}$ частинки в потенціальній ямі одного центра (*a*), простежимо, що станеться з цими рівнями, коли вона потрапляє в поле двох, трьох і більше однакових центрів. Аналіз показує, що між рівнями енергії частинки в полі одного й кількох центрів існує певна відповідність. А саме: кожен (умовно кажучи) одноцентровий рівень енергії *E* розщеплюється на два (*E'* і *E''* (*b*)), три, ..., *N* підрівнів (за числом силових центрів). Причому ширина розщеплення ΔE визначається відстанню між центрами¹ (*a*), зменшуючись зі збільшенням цієї відстані.

¹ При великому числі *N* силових центрів, розташованих на однакових відстанях *a* один від одного, *a* становить сталу кристалічної решітки (тут — одновимірної).

Це пояснюється ослабленням взаємодії між атомами при зростанні відстані a між ними. При дуже великому числі N силових центрів кожен рівень E перетворюється на систему дуже щільно розташованих підрівнів, яка утворює практично неперервну енергетичну смугу, котру називають енергетичною зоною.

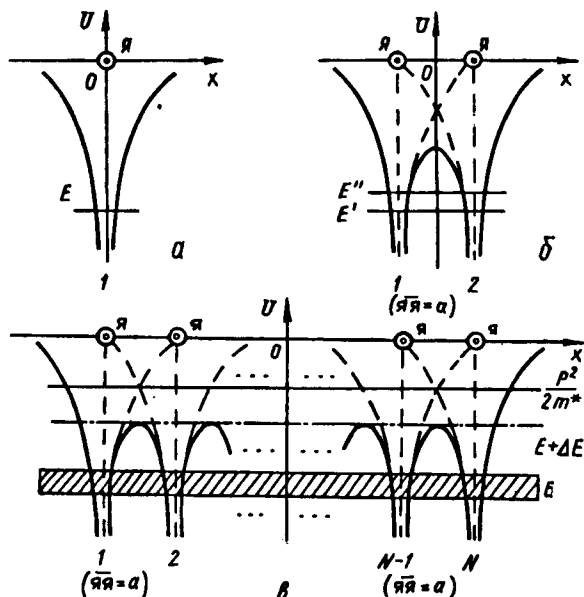


Рис. 68

Як показує теоретичний аналіз, енергетичні спектри частинок у довільному періодичному полі сил (а не лише в полі системи однакових центрів) мають зонний характер. Отже, енергетичні спектри електронів у монокристалах завжди мають зонний характер. Тому (за прийнятою термінологією) кажуть про *дозволені й заборонені зони* електронів у кристалах. Сенс термінів — зрозумілий.

Проте цілком ідеальні кристали — це абстракція. Існують різні порушення в кристалічних решітках (вакансії, дислокації, дисклінації тощо [39]); трапляються домішки сторонніх (не типових для даного кристала) атомів; нарешті, строга періодичність порушується на межах кристалів поблизу їхньої поверхні. Усі такі порушення строгої періодичності призводять до появи додаткових (найчастіше окремих, ізольованих) енергетичних рівнів, які можуть потрапляти в заборонені (для ідеальних кристалів) енерге-

тичні смуги (зони). Такі додаткові енергетичні рівні залежно від походження називають *домішковими*, *поверхневими* тощо.

Ширина дозволених і заборонених енергетичних зон електронів у кристалах істотно варіюється в межах одного кристала, а також від кристала до кристала в досить широким межах. Дозволені зони, які походять від різних атомарних рівнів, можуть не тільки розділятися забороненими зонами, а й перекриватися між собою, утворюючи єдині неперервні смуги.

Взаємне розташування та співвідношення між шириною дозволених і заборонених енергетичних зон, наявність дефектів чи домішок у кристалах (і пов'язаних з ними додаткових енергетичних рівнів) і т. д. відіграють неабияку роль у визначенні фізичних властивостей кристалів, зокрема, є вирішальними у проблемі поділу матеріальних тіл на провідники, напівпровідники (різних типів) та діелектрики.

§ 4.2. Коротко про провідники, напівпровідники, діелектрики

Для кожного кристала, як показують розрахунки, при фіксованих відстанях між атомами кристалічної решітки (так званих сталих решітки) ширина дозволених зон збільшується при підвищенні енергії рівня, з якого утворено зону. Нижні енергетичні рівні, що відповідають глибинним (внутрішнім) атомним оболонкам, розщеплюються дуже слабо (практично зовсім не розщеплюються). Більш високоенергетичні оболонки, яким відповідають більші радіуси електронних хмарок¹, розщеплюються дужче, відповідні їм дозволені зони — ширші.

Зони дозволених енергій електронів кристалічних решіток, що складаються з різних атомів (наприклад, кристалів NaCl), утворюються з атомарних рівнів усіх компонентів (тут Na та Cl). Оскільки енергетичні зони в кристалах утворюються з атомарних енергетичних рівнів, вони зберігають ту саму класифікацію, що й в атомах (хоч відповідні квантові числа вже не мають тут попереднього (атомарного) фізичного трактування) [11].

При об'єднанні атомів у кристал заповнені енергетичні оболонки переходять у заповнені енергетичні зони. Анало-

¹ Розподіл імовірностей $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ знайти електрон біля точки $\{\vec{r}\}$ в момент часу t визначає *електронну хмару* атомів. Цей термін широко використовується.

гічні частково або повністю незаповнені енергетичні оболонки переходять у частково або повністю незаповнені енергетичні зони. (Зрозуміло, мова йде про найнижчий енергетичний стан системи — її основний, не збуджений стан.) Заповненими лише частково будуть, очевидно, і валентні зони, які до того ж можуть перекриватися із зонами ще вищих енергій.

Розглянемо зони, що утворилися з тих атомарних рівнів, які в результаті об'єднання атомів у кристал лежать вище внутрішньокристалічних потенціальних бар'єрів (штрих-пунктирна лінія на рис. 10, *в*). Колективізовані між атомами решітки електрони, що мають такі енергії, майже вільно рухаються в межах кристала між стінками потенціальної ями, утвореної граничними потенціальними бар'єрами (див. рис. 10, *в*).

Якщо вдатися до методу ефективної маси, який залишається правомірним і в квантовій механіці (хоч і з істотними поправками), то періодичне поле всередині кристала можна до певної міри не враховувати, замінивши масу електрона m на ефективну його масу m^* . Тоді вважатимемо, що в кристалі між його сторонами “бігають” назустріч одна одній вільні електронні хвилі¹ де Бройля; але сили вільних електричних струмів зустрічних напрямів в основному стані системи завжди компенсують один одного; сумарна сила струму дорівнює нулю. Але якщо найвища “населена” електронами зона в основному стані заповнена не повністю, то навіть слабке електричне поле, прикладене до протилежних граней кристала, здатне порушити симетрію руху електронів у напрямі дії електричного поля \vec{E} , викликаючи струм. Отже, провідниками будуть такі кристали, найвища населена електронна енергетична зона яких не буде заповненою повністю. Це може бути валентна зона, породжена валентною оболонкою атомів кристала, або зона, утворена перекриттям валентної зони з наступною за нею вищою зоною. Важливо лише, щоб найвища населена в основному стані зона була заповнена не повністю. Кристал буде провідником. Згадана вище заповнена не повністю зона називається зоною провідності. Якщо ж в основному стані найвища населена електронами зона повністю заповнена і відділена від наступної дозволеної зони забороненою зоною, то кристал буде діелектриком. Від ширини такої

¹ Точніше, “квазіелектронні хвилі”, оскільки запроваджено ефективну масу.

забороненої зони залежить, поганим чи добрим буде відповідний діелектрик: широка заборонена зона відповідає доброму діелектрику, вузька — поганому. Якщо якість діелектрика визначати за чисельним значенням електропровідності відповідного матеріалу, то відношення електропровідності хороших провідників (металів) до електропровідності добротних діелектриків становить значну величину ($\sim 10^{20}$).

Ізолятори з відносно малою забороненою зоною між найвищою повністю заповненою (в основному стані) зоною і наступною за нею відносять до *напівпровідників*. (Це — грубе визначення.)

Досі мова йшла про ідеальні кристали, в яких немає додаткових енергетичних рівнів, розташованих у заборонених зонах. Якщо враховувати наявність різних дефектів у кристалах (особливо наявність домішкових, не типових для даного кристала атомів), які породжують додаткові енергетичні рівні, то загальна картина змінюється. Для кристалів із достатньо високою концентрацією дефектів (наприклад, домішок) додаткові рівні можуть істотно впливати на умови переходу електронів до зони провідності, значно змінюючи тим самим електропровідність матеріалу. Це, як зрозуміло, дає можливість у широких межах керувати електричними властивостями напівпровідників [3].

Підкреслимо, нарешті, значну температурну залежність електропровідності напівпровідників.

Сподіваємося, що гранична спрощеність і схематичність викладених вище міркувань зрозуміла. Проте на якісному рівні (без відповідних обчислень та оцінок) більш ґрунтовне обговорення неможливе.

Якщо під дією якихось фізичних збуджень (достатньо сильного електричного поля, нагрівання кристала чи інших причин) електрони заповнених зон “перекидаються” у вищу енергетичну зону, не повністю заселяючи її, то вона починає слугувати зоною провідності, різко змінюючи електропровідність кристалів. Тоді у нижчій за енергією валентній зоні (або, скажімо, на домішкових рівнях) виникає нестача електронів, тобто з’являються некомпенсовані позитивні заряди, які дістали назву *дірок*. Такі електронні вакансії (дірки) можуть переміщатися по кристалу, викликаючи додаткову силу електричного струму, що підсумовується з електронним струмом зони провідності. Строго кажучи, переміщаються не позитивні заряди йонів решітки, а електрони з сусідніх рівнів, які залягають на глибших (за електрони провідності) енергетичних рівнях

і тому менш рухливі (вздовж кристала). Через це дірковий струм характеризується параметрами, відмінними від електронного із зони провідності. Його зручно розглядати як рух позитивних зарядів [3, 11].

Отже, у загальному випадку виявилось доцільним носії струму в напівпровідниках поділяти на два типи: негативні (представлені електронами провідності) і позитивні (дірками). Звідси й два типи провідності: *n*-типу і *p*-типу (negative та positive). Такий поділ принципово важливий; за його допомогою вдалося розкрити багато важливих фізичних закономірностей у напівпровідниках, які мають дуже широке застосування [3, 11].

З цього приводу можна рекомендувати доступний і в той же час досить ґрунтовний підручник [3], в якому викладено особливості фізичних процесів у напівпровідниках різних типів, зокрема, явища на контакті напівпровідників *p*- і *n*-типів. Усе це має пряме відношення до теорії твердотільних діодів, транзисторів тощо, дуже важливих у сучасній електронній техніці [3].

Глава 5

ВЗАЄМОДІЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ З РЕЧОВИНОЮ

§ 5.1. Термодинаміка й рівноважне випромінювання. Формула Планка

Як відомо з елементарного курсу, теплове, світлове, радіо та ряд інших різновидів випромінювання має однукову фізичну природу — електромагнітне випромінювання різних діапазонів частот. Ще задовго до відкриття квантової природи світла (точніше, до відкриття універсально подвійної, корпускулярно-хвильової природи мікрооб'єктів) було з'ясовано, що випромінювання бере участь у термодинамічних процесах нарівні з речовиною. Давно відомо, що релаксація системи тіл до термодинамічної рівноваги відбувається не тільки в термостатованому калориметрі з рідиною, а й в термостатованій та вакуумованій порожнині. Це означає, що термообмін між тілами відбувається не тільки внаслідок теплопровідності (наприклад, через рідину калориметра), а й шляхом обміну енергією між тілами за допомогою випромінювання. Тим-то фізичні закони випромінювання важливі не лише для оптики, а й для термодинаміки та й фізики взагалі. Не випадково квантова фізика

бере свій початок з формули Планка для рівноважного випромінювання абсолютно чорного тіла.

Простежимо за основним ланцюжком фактів, що привели до формули Планка.

Позначимо через u просторову густину енергії випромінювання, тобто ту його енергію, що припадає на одиницю об'єму простору, яким поширюється випромінювання. Цю густину можна розкласти за частотами ν (або довжинами хвиль λ):

$$u = \int_0^{\infty} u_{\nu} d\nu. \quad (5.1)$$

Тут $u_{\nu} d\nu$ — просторова густина енергії випромінювання, яка припадає на інтервал частот $\nu, \nu + d\nu$. Функцію u_{ν} називають *частотним розподілом енергії випромінювання*.

Розглянемо замкнену порожнину з непрозорою (для випромінювання) оболонкою, стінки якої підтримуються при певній фіксованій температурі T (термостатуюча оболонка). Нехай порожнину заповнено якимсь розрідженим (ідеальним) газом. За таких умов стінки порожнини та атоми газу будуть обмінюватися променистою енергією, весь час випромінюючи та поглинаючи її.

Подібно до динамічної рівноваги (скажімо, насиченої пари з відповідною рідиною в термостаті) всередині термостатованої порожнини встановлюється динамічно рівноважний розподіл променистої енергії зі спектральною густиною u_{ν} , яка залежить лише від температури T стінок порожнини,

$$u_{\nu} = u_{\nu}(T). \quad (5.2)$$

Якщо в стінці розглядуваної замкненої порожнини зробити зовсім невеликий отвір, який практично не порушував би термодинамічної рівноваги в середині порожнини, то його можна розглядати як абсолютно чорне джерело випромінювання, інтенсивність якого I за законом Кірхгофа [36, 43] становить універсальну функцію температури T , що не залежить від матеріалу стінок порожнини і природи ідеального газу в ній.

Нагадаємо, що *абсолютно чорним* називають тіло, яке повністю поглинає спрямовану на нього променисту енергію. Саме таку властивість має малий отвір порожнини, оскільки промені, що проходять крізь нього в порожнину, багатократно відбиваючись від її стінок (можливо, з частковим поглинанням і ревіпромінюванням), практично не мають шансів знов вийти через цей отвір за межі порожнини.

Практично в усіх підручниках (див., наприклад, [36,43]) доводиться, що між рівноважною густиною u та інтенсивністю випромінювання абсолютно чорного тіла I існує простий зв'язок

$$u = \frac{4\pi}{c} I, \quad u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu, \quad (5.3)$$

де I_ν — спектральний розподіл інтенсивності

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu. \quad (5.4)$$

Зв'язок (5.3) дає можливість експериментально визначати спектральну густину рівноважного випромінювання $u_\nu(T)$ шляхом вимірювання $I_\nu(T)$. Практичні вимірювання $I_\nu(T)$, а з ним і визначення $u_\nu(T)$ (5.3) виявили значну розбіжність між тими значеннями $u_\nu(T)$, які давали тогочасна (тобто класична, доквантова) теорія й експеримент.

Побудована на класичних фізичних уявленнях теорія Релея—Джінса (Р—Дж) для $u_\nu(T)$ давала формулу

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi}{c^3} kT\nu^2. \quad (5.5)$$

І хоч за малих значень частоти ν формула (5.5) узгоджувалася з експериментом, її не можна в жодному разі визнати задовільною, оскільки за умови $\nu \rightarrow \infty$ вона вела до так званої *ультрафіолетової катастрофи*:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = \infty. \quad (5.6)$$

Згідно з (5.6) повна просторова густина енергії u так само виявлялася безмежною. Як результат (5.6), так і безмежне значення u різко контрастували з дослідними даними.

За емпіричною (підгонною) формулою Віна експерименту за великих частот ν відповідала не формула Р—Дж, а зовсім інша¹:

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi}{c^3} h \nu^3 e^{-h\nu/kT}. \quad (5.7)$$

¹ Тут, забігаючи трохи наперед, запроваджено вже сталу Планка, якої ще не міг використовувати.

Прагнучи об'єднати в єдиному виразі формули Р—Дж та Віна, Макс Планк півемпіричним шляхом [1, 41] встановив для $u_\nu(T)$ формулу

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi}{c^3} h \nu^3 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (5.8)$$

яка чудово узгоджувалася з експериментом для всіх частот $0 \leq \nu < \infty$. Якщо скористатися з розкладу експоненти в степеневий ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (5.9)$$

то для малих частот ν , коли можна вважати, що

$$x = h\nu/kT \ll 1 \quad (5.10)$$

формула Планка (5.8) переходить у формулу Р—Дж. (Рекомендуємо перевірити це.) При досить великих частотах (коли можна знехтувати одиницею в знаменнику формули Планка (5.8) у порівнянні з $\exp\{h\nu/kT\}$, з очевидністю дістаємо формулу Віна (5.7)).

Як уже зазначалося, теоретичне обґрунтування формули Планка (5.8) виявилось неможливим без запровадження гіпотези про кванти світла з енергіями:

$$\varepsilon = h\nu.$$

Оскільки вірну формулу (5.8) спочатку було одержано фактично емпіричним шляхом, її можна сприймати як суто дослідний факт, до якого повинна вести кожна послідовна фізична теорія. Саме так (з одним лише нюансом) буде тлумачитись тут шлях до формули Планка (5.8), запропонований Ейнштейном (див. § 5.2).

§ 5.2. Формула Планка за Ейнштейном

Формулу Планка (5.8) ми правомірно сприймаємо як дослідний факт, що згодом дістав також теоретичне обґрунтування на базі гіпотези про кванти світла. Тому міркування Ейнштейна розглядатимуться тут не з погляду чергового теоретичного обґрунтування закону Планка, а як первинне обґрунтування поняття про *стимульоване (вимушене) випромінювання*, без запровадження якого узгодження з формулою Планка в підході Ейнштейна отримати не можна.

Нехай у стані термодинамічної рівноваги перебуває система, що складається з термостатованої порожнини з

непрозорими стінками, в межах якої знаходиться система незалежних один від одного атомів у полі рівноважного (теплового) випромінювання. Оскільки рівновага мислиться як динамічна, природно застосувати при її розгляді *принцип детальної рівноваги*. За цим принципом динаміка атомів визначається таким чином: скільки атомів, вміщених у порожнину, під дією випромінювання за певний (достатньо малий) проміжок часу dt переходить із стану n з енергією E_n до стану m з енергією E_m , стільки ж за той самий час переходить із стану m до n (тобто в зворотному напрямі).

Енергетичні переходи в атомах, “занурених” у поле теплового випромінювання, розбі’ємо на три типи: 1) *збудження* атомів з нижчого рівня E_n на вищий E_m під дією випромінювання; 2) *спонтанне* повернення їх з вищого рівня E_m на нижчий E_n з випромінюванням відповідного кванта світла; 3) *вимушений* перехід з вищого рівня E_m на нижчий E_n з випромінюванням такого самого кванта. Останній перехід був за часів Ейнштейна піонерською гіпотезою, без якої узгодити його результат з формулою Планка, як побачимо, неможливо.

За умови термодинамічної рівноваги макроскопічних систем числа атомів N_1, N_2, N_3, \dots , які перебувають у станах з енергіями E_1, E_2, E_3, \dots відповідно, в середньому стали величини. Згідно з Ейнштейном вважатимемо середнє число атомів, що перейшли за одиницю часу з рівня E_m на E_n в результаті спонтанного (самочинного) випромінювання, пропорційним вихідному числу атомів N_m , тобто покладемо його таким, що дорівнює

$$A_m^n N_m \quad (E_m \rightarrow E_n). \quad (5.11)$$

Що ж до кількості вимушених переходів між рівнями E_n і E_m в обидва боки ($E_n \leftrightarrow E_m$), то середні їхні значення за одиницю часу будуть дорівнювати

$$B_m^n N_m u(\nu_{mn}) \quad (m \rightarrow n); \quad B_n^m N_n u(\nu_{mv}) \quad (n \rightarrow m), \quad (5.12)$$

де $u(\nu_{mn})$ — спектральний розподіл енергії випромінювання, що відповідає частоті ν_{mn} переходу між рівнями E_m та E_n :

$$\nu_{mn} = (E_m - E_n)/h. \quad (5.13)$$

Наявність фактора $u(\nu_{mn})$ для вимушених (стимульованих полем випромінювання) переходів (5.12) і його відсутність

для спонтанних (самочинних) переходів (5.11) є природним припущенням, яке зробив Ейнштейн.

Згідно з принципом детальної рівноваги слід, очевидно, покласти

$$A_m^n N_m + B_m^n N_m u(v_{mn}) = B_n^m N_n u(v_{mn}). \quad (5.14)$$

Звідси для $u(v_{mn})$ дістанемо

$$u(v_{mn}) = A_m^n / [B_n^m N_n / N_m - B_m^n]. \quad (5.15)$$

Але за розподілом Больцмана [36, 43]

$$N_n / N_m = \frac{g_n}{g_m} e^{-\frac{E_n - E_m}{kT}}; \quad (5.16)$$

де g_n, g_m — кратності виродження рівнів з номерами n та m . Отже, для $u(v_{mn})$ з урахуванням правила частот Бора (5.13) знаходимо

$$u(v_{mn}) = A_m^n / \left[B_n^m \frac{g_n}{g_m} e^{-\frac{h\nu_{mn}}{kT}} - B_m^n \right]. \quad (5.17)$$

Напівфеноменологічний підхід не дає можливості незалежним чином визначити коефіцієнти¹

$$A_m^n; \quad B_m^n; \quad B_n^m \quad (5.18)$$

і встановити співвідношення між ними. Тому (якщо не вдаватися до розгорнутого квантостатичного розгляду задачі, неможливого за часів Ейнштейна) слід звернутися до формального узгодження виразу (5.17) з достовірною формулою Планка (5.8). Порівняння (5.17) з (5.8) веде до співвідношень

$$g_n B_n^m \equiv g_m B_m^n; \quad \frac{g_m A_m^n}{g_n B_n^m} \equiv \frac{8\pi}{c^3} h \nu_{mn}^3. \quad (5.19)$$

Отже, за припущень Ейнштейна узгодження формули (5.17) з достовірним законом Планка (5.8) справді можливе. Спробуємо зрестися гіпотетичного за часів Ейнштейна припущення про вимушене (стимульоване) випромінювання, покладаючи

$$B_m^n \equiv 0. \quad (5.20)$$

¹ Ці величини називають *коефіцієнтами Ейнштейна*.

З огляду на (5.17) приходимо не до точної формули Планка (5.8), а до формули Віна (5.7), яка є наближеною, справедливою за високих частот.

Отже, якщо не враховувати вимушеного випромінювання, достовірної формули Планка справді отримати не можна. Таким шляхом завдяки Ейнштейну вперше ввійшло в науку поняття про *вимушене випромінювання*, яке є ключовим у сучасній теорії лазерів (див. § 5.3).

Зазначимо, нарешті, що наближена формула Віна (5.7) в силу (5.20) свідчить про те, що спонтанні переходи (5.11) за високих частот ν домінують над вимушеними, якими за цих умов можна знехтувати.

§ 5.3. Поняття про квантові генератори — лазери

Завдяки своїм унікальним властивостям широко відомі тепер лазери знайшли багатогранне застосування. Ці створені людиною штучні пристрої не мають природних аналогів. Термін лазер утворився з перших літер англійської назви відповідного процесу: *light amplification by stimulated emission of radiation* (laser).

Спершу цей термін застосовувався для процесів лише оптичного (видимого) діапазону частот за аналогією з терміном *мазер* (maser), який з'явився раніше і стосувався НВЧ-діапазону частот (microwave amplification...). Проте зараз термін *лазер* універсально застосовний до спеціальних пристроїв стимульованого випромінювання усіх діапазонів частот (зокрема, інфрачервоного, видимого, ультрафіолетового, рентгенівського і т. д. діапазонів).

Загальні уявлення про дію лазерів можна дістати на основі наведених нижче максимально спрощених і схематизованих міркувань. Ідейно ці міркування пов'язані з викладеними вище (див. § 5.2) міркуваннями Ейнштейна; проте стосуються вони нерівноважної взаємодії монохроматичного випромінювання з речовиною і тому не є повністю тотожними попереднім, потребуючи навіть дещо інших позначень.

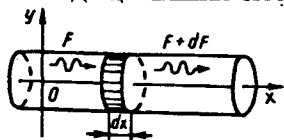


Рис. 69

Розглянемо взаємодію з речовиною плоскої монохроматичної електромагнітної хвилі частоти ν , яка поширюється в цій речовині в напрямі осі Ox (рис. 69). Якщо частота хвилі ν збігається з борів-

ською частотою квантового переходу речовини з енергетичного рівня E_1 на рівень E_2

$$\nu = (E_2 - E_1)/h \quad (E_2 > E_1), \quad (5.21)$$

то хвиля активно стимулюватиме переходи між рівнями E_1, E_2 (в обох напрямках). Оскільки такі переходи пов'язані з поглинанням або випромінюванням квантів світла — фотонів — з енергією $\varepsilon = h\nu$ (див. (5.21)), то пов'язаний з первісною хвилею потік фотонів змінюватиме свою інтенсивність при проходженні через речовину. Якщо на розглядуваний момент часу t енергетичні рівні одиниці об'єму активного¹ середовища заселені відповідно N_1 і N_2 електронами, то природно припустити, що зміна dF густини фотонів F у шарі речовини товщиною dx (див. рис. 69) буде пропорційною самій густині потоку F , різниці між заселеностями рівнів $\Delta N_{12} = N_2 - N_1$ в одиниці об'єму (на момент часу t) і товщині шару dx :

$$d_x F = \sigma F \Delta N_{12} dx. \quad (5.22)$$

Тут σ — коефіцієнт пропорційності з розмірністю площі. (Рекомендуємо розміркувати.) З (5.22) випливає, що за умови

$$\Delta N_{12} = N_2 - N_1 > 0 \quad (5.22a)$$

густина потоку фотонів F буде збільшуватися в шарі dx , тобто цей шар відіграватиме роль підсилювача. За умови ж

$$\Delta N_{12} = N_2 - N_1 < 0 \quad (5.22b)$$

густина потоку фотонів F буде зменшуватися у шарі dx , тобто цей шар поглинатиме фотони, збіднюючи їхній потік F .

Взаємодія випромінювання з речовиною, яка перебуває в стані термодинамічної рівноваги, завжди супроводжується поглинанням світла, оскільки тоді за Больцманом

$$N_2^e / N_1^e = \exp \{ -(E_2 - E_1) / kT \} < 1 \quad (5.23)$$

(індекс e символізує стан термодинамічної рівноваги — equilibrium). За нормальних умов переважна більшість атомів речовини перебуває в основному стані, і тому формула (5.23) є типовою, породжуючи поглинання світла речовиною. Підсилювати світло (збільшуючи потік фотонів)

¹ Активним середовищем називають тут речовину, з якою взаємодіє поширюване по ній випромінювання.

буде лише речовина з так званою *інверсною заселеністю* рівнів, коли

$$N_2 > N_1 \quad (5.24)$$

(див. (5.22), (5.22a)). Таку інверсну заселеність рівнів слід створювати штучно. Відповідний процес дістав назву *накачки*. Про деякі методи накачки йтиметься далі.

Для оцінки інтегральної зміни ΔF густини F потоку фотонів на ділянці шляху $\Delta l = l - l_0$ крізь однорідну речовину замінимо $\sigma \Delta N_{12}$ (5.22) на ефективну константу

$$\sigma \Delta N_{12} \rightarrow \overline{\sigma \Delta N_{12}} \equiv \alpha. \quad (5.25)$$

Тоді з огляду на (5.22) матимемо

$$\Delta F = F - F_0 = F_0 \{ e^{\alpha \Delta l} - 1 \}, \quad (5.26)$$

де F_0 — густина потоку в плоскому перерізі активного тіла $x = l_0$ (див. рис. 69). Експоненціальна і, отже, сильна залежність ΔF від Δl дає змогу за належних умов ефективно впливати на потік випромінювання.

Розглянемо в загальних рисах динаміку даного процесу та ті додаткові умови, які забезпечують роботу активного середовища в режимі потужної генерації випромінювання.

Зумовлене поглинання фотона збудження активного середовища (тобто переведення його на вищий енергетичний рівень ($E_1 \rightarrow E_2$)) завжди є *вимушеним*. Зворотний перехід ($E_2 \rightarrow E_1$) з випромінюванням фотона відбувається за двома варіантами: *спонтанно* (самочинно) та *вимушено*. За аналогією з міркуваннями Ейнштейна (див. § 5.2) для вимушених переходів обох напрямів покладемо

$$\frac{dN_1}{dt} = -\sigma_{12} F N_1; \quad \frac{\delta N_2^{(B)}}{dt} = -\sigma_{21} F N_2. \quad (5.27)$$

Тут $\delta N_2^{(B)}$ — вимушене зменшення питомої заселеності рівня E_2 за час dt ($W_{ik} \equiv \sigma_{ik} F$ — імовірність переходу $i \rightarrow k$).

Для спонтанної зміни питомої заселеності $\delta N_2^{(C)}$ рівня E_2 запишемо

$$\delta N_2^{(C)} / dt = A N_2 \quad (5.28)$$

(A — ймовірність спонтанного випромінювання). Повна зміна питомої заселеності dN_2 рівня E_2 за (5.27), (5.28) визначається рівністю

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{\delta N_2^{(b)} + \delta N_2^{(c)}}{dt} = - \{ \sigma_{12} F + A \} N_2. \quad (5.29)$$

Згідно із законами квантової механіки, які візьмемо на віру, має місце умова

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \equiv \bar{\sigma}, \quad (5.30)$$

аналогічна першій умові (5.19).

Неважко переконатися, що величина $\bar{\sigma}$ має розмірність площі. Вона дістала назву *перерізу* процесів поглинання та випромінювання.

Перейдемо до викладення принципів роботи квантових генераторів — лазерів.

Нехай певним чином (прикладі буде наведено нижче), буде здійснено інверсну заселеність рівнів E_1 , E_2 (5.24). Тоді активне середовище працюватиме як підсилувач світлових хвиль з частотою ν (див. (5.20)). Щоб підсилувач почав працювати в режимі *генератора*, необхідно забезпечити належний позитивний зворотний зв'язок.

У видимій області спектра зворотний зв'язок можна забезпечити за допомогою двох плоских дзеркал, розташованих збоку торців активного середовища перпендикулярно до напрямку руху фотонів (рис. 70). Плоска світлова хвиля, що “бігає” паралельно осі активного циліндра, по черзі відбивається від дзеркал, кожного разу підсилюючись активним середовищем. Зробивши одне з дзеркал (2) частково прозорим, можна випустити за межі системи корисний пучок променів.

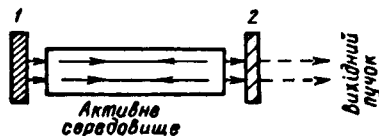


Рис. 70

Для ефективної роботи лазера всі параметри системи потребують відповідного підбору (шляхом розрахунків, про які тут важко казати). Якщо не виконано певних “порогових” умов, генерація взагалі не виникає. Але це питання виходить за межі загального курсу.

Згідно з (5.26) за один прохід через активне середовище завдовжки l коефіцієнт підсилення η становитиме

$$\eta = F^{\text{вих}} / F^{\text{вх}} = \exp \{ \bar{\sigma} (N_2 - N_1) l \}, \quad (5.31)$$

де $F^{\text{вих}}$ та $F^{\text{вх}}$ — густини фотонних потоків на виході й вході системи відповідно. Якщо втрати в *резонаторі*¹ визна-

¹ Резонатор складається з дзеркал 1 і 2 і активного середовища.

чаються лише пропусканням дзеркал, то поріг генерації досягається за умови

$$R_1 R_2 \exp \{2\tilde{\alpha}(N_2 - N_1) l\} = 1 \quad (5.32)$$

(R_1 і R_2 — коефіцієнти відбиття дзеркал (за інтенсивністю)). З цієї умови випливає критичне (порогове) значення інверсної заселеності рівнів:

$$(N_2 - N_1)_{\text{кр}} = -\frac{\ln(R_1, R_2)}{2\tilde{\alpha}l}, \quad (5.33)$$

починаючи з якої лазер генерує. При досягненні такої інверсної заселеності генерацію заініціює навіть спонтанне випромінювання (5.28).

Коротко зупинимося на можливих схемах накачки (отримання інверсної заселеності рівнів). Вкажемо на два технічні засоби її реалізації та вибору середовища. Накачування можна здійснити, наприклад, за допомогою спеціальних ламп, що дають інтенсивну світлову хвилю, або ж електричного розряду в активному середовищі.

Стосовно вибору активного середовища, то з огляду на викладену вище максимально спрощену теорію генерації дещо несподіваною (на перший погляд) є практична неможливість побудувати лазер лише на двох рівнях. Треба підбирати активну речовину з певним порядком розташування не двох, а трьох-чотирьох рівнів. Справді, нехай обрано тільки два рівні $E_1 < E_2$. За нормальних умов згідно з умовою термодинамічної рівноваги Больцмана (5.23) $N_1^e > N_2^e$. Здавалося б, треба лише збагачувати рівень E_2 за рахунок збіднення рівня E_1 ($\Delta N_2 = -\Delta N_1$) і продовжувати це аж до виконання порогової умови (5.33). Та на шляху до (5.33) в певний момент заселеності рівнів вирівнюються ($N_1 = N_2$); а за такої умови підсилення (5.21) припиняється ($dF = 0$), середовище стає прозорим для світла з частотою ν (5.20). Тому слід вибрати активні середовища з трьома або чотирма рівнями, розташованими як показано на рис. 71. Якщо вибрано середовище з трьома рівнями (рис. 13,а), причому перехід з третього (інверсованого за рахунок першого) рівня на другий відбувається швидко, то лазерна генерація може виникати на частоті $\nu = (E_2 - E_1)/h$.

Аналогічні міркування щодо чотирирівневого середовища (рис. 13,б) (з незначним ускладненням) пропонуємо виконати самостійно [11, 13].

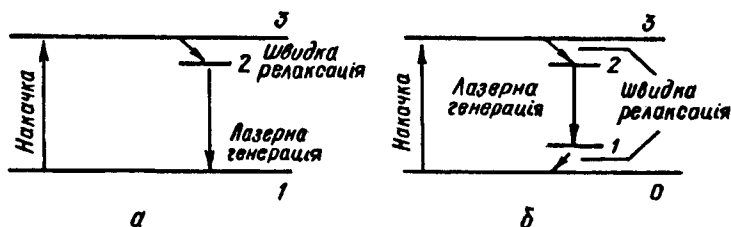


Рис. 71

Ясна річ, проектування реальних лазерів потребує відповідних розрахунків, теорія яких виходить за межі загальних курсів.

На закінчення без доведень зазначимо, що лазери здатні генерувати потужне, монохроматичне, висококогерентне, висококонцентроване за напрямом випромінювання, чого не дає жодна інша система. Доступна їй в той же час багатогранна теорія лазерів викладена в праці [13]. Як видно зі сказаного, сподіваємося, зрозуміло, чому лазери називають ще *квантовими генераторами*.

§ 5.4. Формула Планка і закон Стефана—Больцмана

Відкритий Планком закон випромінювання абсолютно чорного тіла (5.8) охоплює практично всі встановлені до його появи закони: Стефана—Больцмана, Релея—Джінса, Віна [36, 43]. Усі згадані закони випливають із закону Планка (5.8). Покажемо це на прикладі закону Стефана—Больцмана.

Запровадимо енергетичну світність S абсолютно чорної поверхні, що випромінює, за формулою

$$S = \pi I = cu/4, \quad (5.34)$$

де використано співвідношення (5.3). Враховуючи зв'язок u з u_ν (5.1) та формулу Планка (5.8), дістанемо для S

$$S = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{v^3 dv}{e^{hv/kT} - 1}. \quad (5.35)$$

Введемо нову змінну інтегрування

$$x = hv/kT, \quad dx = \frac{h}{kT} dv. \quad (5.36)$$

За її допомогою (5.35) набуває вигляду

$$S = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \right\} T^4 \equiv \sigma T^4. \quad (5.37)$$

Це й є славнозвісна формула, що виражає закон Стефана—Больцмана. Інтеграл у фігурних дужках можна обчислити [36], діставши

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} &= \int_0^{\infty} \frac{x^3 e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} \{1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots\} dx = \\ &= 6 \{1 + 2^{-4} + 3^{-4} + \dots\} = \pi^4/15. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Отже, з відкриттям формули (закону) Планка фактично відпала необхідність в окремому встановленні цілої низки (див. вище) відкритих раніше законів випромінювання матеріальних тіл.

Глава 6

АТОМНЕ ЯДРО ТА ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ

§ 6.1. Склад та розмір атомних ядер; ядерні сили; дефект маси; енергія зв'язку

Коротко нагадаємо елементарні відомості про склад атомних ядер і особливості взаємодії їхніх складових: протонів та нейтронів.

З відомих дослідів Резерфорда й подальших досліджень випливало, що атоми мають квазіпланетарну¹ будову з дуже компактним і масивним ядром й незрівнянно більш рихлою та легкою електронною оболонкою і що ядро несе позитивний електричний заряд, який чисельно дорівнює сумарному негативному заряду електронів. Як встановлено [6], лінійні розміри атомів мають порядок 10^{-10} м, а лінійні розміри ядер — лише 10^{-15} м. Тому відношення об'єму ядра до об'єму атома в цілому складає мізерну величину порядку $(10^{-15})^3 : (10^{-10})^3 = 10^{-15}$. Якщо врахувати, що масою електронної оболонки можна знехтувати порівняно з масою ядра, то стає зрозумілим вислів про те, що атом майже порожній, оскільки практично вся його маса сконцентрована в мізерній частині його об'єму — ядрі.

¹ Ми кажемо “квазіпланетарну”, зважаючи на квантові закони в атомах.

Ще до розкриття наукою квазіпланетарної будови атомів почалося вивчення так званої *радіоактивності* речовин (Беккерель (1896 р.); П'єр і Марія Кюрі (1898 р.); Резерфорд і Содді (1902 р.)), яке зрештою привело до усвідомлення складної структури не лише атомів, а й їхніх ядер. Справа в тому, що на радіаційну активність речовин (а такі в природі існують) не впливають ні хімічні реакції, ні нагрівання. Отже, α -, β - та γ -випромінювання (відомі з елементарного курсу фізики) походять з таких атомних глибин, на які не впливають ні хімічні перетворення, ні нагрівання. Тому з розкриттям ядерної будови атомів та з'ясуванням природи хімічної взаємодії (яка визначається конфігурацією зовнішніх електронних оболонок атомів) стало ясно, що α -, β - і γ -промені породжуються атомними ядрами, демонструючи їхню складну структуру. Сучасною наукою встановлено, що ядра атомів дійсно становлять складні утворення й побудовані з протонів і нейтронів.

Основними характеристиками атомних ядер (надалі казатимемо просто ядер) є електричний заряд, маса та магнітний момент. Оскільки протони несуть позитивний заряд, який чисельно дорівнює заряду електрона, а нейтрони електричного заряду не мають, то заряд ядра (в електронних одиницях¹) дорівнює числу протонів у ньому й тому збігається з порядковим номером елемента в періодичній системі Менделєєва. Масу в ядерній фізиці зручно вимірювати в атомних одиницях маси (АОМ). За АОМ у сучасній ядерній фізиці прийнято 1/12 маси ізотопу вуглецю C^{12} .

Найпростіший серед атомів — атом водню (H) — має ядро з одного протона та оболонку з одного електрона. В АОМ маса атома водню m_H становить

$$m_H = 1,00782519 (\pm 80) \text{ АОМ.} \quad (6.1)$$

Оскільки маса електрона m_e в 1836,1 раза менша за масу протона m_p , то часто з достатньою для практики точністю масу протона m_p можна ототожнити з масою атома водню m_H

$$m_p \approx m_H. \quad (6.2)$$

Маса нейтрона m_n трохи більша за масу протона

$$m_n = 1,00866520 (\pm 10) \text{ АОМ.} \quad (6.3)$$

¹ У системі СІ заряд електрона за величиною дорівнює $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ К.

Дуже зручним і поширеним у фізиці ядра та елементарних частинок є вимірювання мас в енергетичних одиницях, яке можливе завдяки встановленому Ейнштейном зв'язку маси з енергією [41]:

$$E = mc^2, \quad (6.4)$$

де E — власна енергія частинки; m — її маса спокою; c — швидкість світла у вакуумі. З (6.4) випливає пропорційність між E та m :

$$m = E/c^2 \sim E, \quad (6.5)$$

яка й дає змогу вимірювати маси в енергетичних одиницях. Найпоширенішою серед них в атомній фізиці є так званий електронвольт (eВ), який чисельно дорівнює тому приросту енергії, якого набуває електрон в електричному полі, рухаючись під його дією між точками з різницею потенціалів в 1 В. Ця зручна в атомній фізиці одиниця для ядерної фізики занадто мала. Тому в ній користуються мегаелектронвольтами (МеВ) і навіть гігаелектронвольтами (ГеВ).

Протони й нейтрони, як елементарні складові атомних ядер, мають спільну назву — *нуклони* (від слова nucleous — ядро). Магнітні моменти нуклонів пов'язані з їхніми спінами (власними механічними моментами), а магнітні моменти ядер — з власними та орбітальними моментами нуклонів в ядрах.

Як уже зазначалося, число протонів у ядрі збігається з порядковим номером z відповідного хімічного елемента в таблиці Менделєєва. На відміну від числа протонів z число нейтронів N в ядрах того самого хімічного елемента не обов'язково точно фіксоване. Цілком можливими є його невеликі варіації. Так, перший хімічний елемент таблиці Менделєєва — водень — має три модифікації: власне водень (H) (в ядрі лише один протон), дейтерій (D) (в ядрі один протон і один нейтрон), тритій Тг (в ядрі один протон і два нейтрони). Атоми того самого хімічного елемента з різними числами нейтронів в них називають *ізотопами*. Так, власне водень, дейтерій і тритій — усе це ізотопи водню (${}_1\text{H}^1$; $\text{D} = {}_1\text{H}^2$; $\text{Tg} = {}_1\text{H}^3$).

Число нуклонів A в ядрі, яке дорівнює сумі числа протонів z і нейтронів N

$$A = z + N, \quad (6.6)$$

називають *масовим числом*. Така назва зумовлена тим, що число A дорівнює масі відповідного ядра в атомних одиницях, заокругленій до цілих чисел.

Для розрізнення ізоотопів якогось елемента X між собою його символу надають двох індексів: ${}_Z X^A$. Наприклад, ізотопи урану позначають ${}_{92}\text{U}^{235}$, ${}_{92}\text{U}^{238}$ і т. ін.

Оскільки протони — це одноіменно заряджені частинки, вони за законом Кулона повинні відштовхуватися один від одного. Постає питання: чому ж тоді ядра переважної більшості природних елементів стійкі й не розвалюються? Аналіз цілої низки фактів привів до висновку, що на дуже малих відстанях (порядку розмірів легких ядер) між нуклонами починають діяти значні сили взаємного притягання, які набагато перевищують кулонівські сили електростатичного відштовхування. Саме ці сили, які одержали назву *ядерних*, і утримують нуклони в ядрі. Причому має місце так званий принцип *зарядової незалежності ядерних сил*¹, за яким сили ядерної взаємодії між двома нуклонами є практично однаковими незалежно від того, чи це два протони, два нейтрони або пара протон—нейтрон.

Ядерні сили короткодійні. На відстанях, що перевищують розміри легких ядер, вони практично зникають. На таких відстанях протони вже дійсно починають відштовхуватися один від одного як одноіменно заряджені частинки.

Дослідним шляхом встановлено, що маси ядер $M_{\text{я}}$ менші за суму мас нуклонів, що входять до їхнього складу. Сума мас M нуклонів в ядрі дорівнює

$$M = zm_p + Nm_n. \quad (6.7)$$

Різниця ΔM між сумою має нуклонів в ядрі M і дійсною масою ядра $M_{\text{я}}$

$$\Delta M \equiv M - M_{\text{я}} = zm_p + Nm_n - M_{\text{я}} \quad (6.8)$$

називається *дефектом маси*. Виявляється, що енергія зв'язку нуклонів в ядрі $E_{\text{зв}}$, тобто величина, яка чисельно дорівнює мінімальній роботі, необхідній для повної дисоціації ядра на окремі нуклони, дорівнює добутку дефекта маси ΔM на квадрат швидкості світла:

$$E_{\text{зв}} = \Delta M c^2. \quad (6.9)$$

З огляду на співвідношення Ейнштейна (6.4) стає зрозумілим, що формула (6.9) відповідає релятивістському зв'язку маси з енергією. (Вона одразу породжує питання про розповсюдження співвідношення для нуклонів типу

¹ Трохи детальніше про це буде сказано нижче у зв'язку з аналогічними станами так званих дзеркальних ядер.

(6.9) на енергію зв'язку електронів в атомах. Дефект маси зв'язаних в атомах електронів справді має місце, але є зневажливо малим; ним можна знехтувати на практиці.)

Важливою фізичною характеристикою ядер є їхня енергія зв'язку ε , перерахована на один нуклон

$$\varepsilon(A) \equiv \frac{E_{зв}}{A} = \frac{\Delta M(A) c^2}{A}. \quad (6.10)$$

Досліди показали, що $\varepsilon(A)$ як функція A спочатку швидко спадає зі зростанням A , а далі (після вузької області безладних коливань) починає повільно зростати. Це дуже важлива закономірність. З неї випливає, що в області зовсім легких ядер виграшу в енергії можна досягти злиттям двох надлегких ядер в одне, тобто, як кажуть, в результаті реакції *синтезу* двох легких ядер в одне. В області ж дуже важких ядер, навпаки, виграшу в енергії можна досягти в результаті реакції *дисоціації* (розвалу) важкого ядра на середині. На цьому головним чином і ґрунтується атомна енергетика, а також сподівання на термоядерну енергетику майбутнього. Дещо детальніше про це роз'яснено далі.

На закінчення ще кілька слів про зарядну незалежність ядерних сил. Теорія й досліди свідчать про те, що в ядрах діють квантові закони, цілком аналогічні квантовим законам для атомів, молекул тощо. Залишається справедливим навіть рівняння Шрединґера¹, незважаючи на релятивістське співвідношення (6.9). (Останнє пояснюється тим, що дефект маси ΔM значно менший, ніж маса ядра $\Delta M \ll M_{я}$.) Так само як атоми атомні ядра можуть перебувати в певних стаціонарних станах, які відповідають дискретним наборам енергетичних рівнів $E_1, E_2 \dots$. Як виявилось, між енергетичними рівнями ізобарних ($A = A'$) ядер з наведеним нижче (6.11) співвідношенням між числами протонів і нейтронів²

$$\{z; N\} \quad \text{та} \quad \{z \pm 1; N \mp 1\} \quad (6.11)$$

існує взаємна відповідність та схожість щодо взаємного розташування. Це означає, що заміна одного протона на нейтрон і навпаки слабо впливає на енергетичні спектри ядер, що, в свою чергу, свідчить про практичну зарядну

¹ Щоправда, з деякими специфічними особливостями.

² Ядра із співвідношенням (6.11) існують і називаються *дзеркальними*.

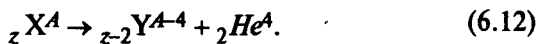
незалежність ядерних сил (точніше, про слабку їх залежність). Є й інші (і досить численні) тому свідчення.

§ 6.2. Радіоактивний розпад. Ядерні реакції. Ланцюгова реакція. Реакції ядерного синтезу

Відкриття природної радіоактивності, розкриття фізичної природи та особливостей α -, β - та γ -променів відіграло неабияку роль в ядерній фізиці та її технічних застосуваннях, особливо у з'ясуванні можливостей і суті ядерних перетворень, які фактично зробили здійсненними давні мрії середньовічних алхіміків про перетворення (вживаючи сучасну термінологію) одних хімічних елементів у інші. Тому основні закони й особливості радіоактивного розпаду неодмінно входять до програм з ядерної фізики.

Коротко нагадаємо про фізичну природу α -, β - та γ -променів. Як показали досліди¹, α -промені становлять ядра гелію, які складаються з двох протонів та двох нейтронів, β -промені — потік електронів, а γ -промені — потік високоенергійних квантів електромагнітного випромінювання.

Процеси радіоактивного випромінювання — це природні приклади так званих *ядерних реакцій розпаду*. Нехай, наприклад, відомо, що ядра ${}_Z X^A$ випромінюють α -частинки. Оскільки ці частинки становлять ядра гелію, то відповідну реакцію α -розпаду ядра ${}_Z X^A$ можна символічно записати таким чином:



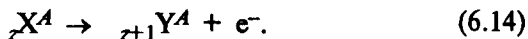
Аналогічну реакцію для β -розпаду якогось ядра записати аналогічно (6.12) неможливо, оскільки в ядрі немає електронів (тобто готових β -частинок). Виявляється, проте, що електрони (β -частинки) народжуються в ядрі в момент випромінювання в результаті розпаду нейтронів на протони й електрони. Запишемо реакцію розпаду нейтрона n :



(e^- — електрон (на відміну від позитрона e^+)). Виявляється, що у вільному стані нейтрони не стабільні і протягом часу порядку 10^3 с всі вони розпадаються на протони та електрони за схемою (6.13). Але у складі більшості відомих ядер нейтрони все ж стабільні. Проте у складі β -активних ядер стабільність виявляють не всі нейтрони.

¹ Зокрема, аналіз кривизни й довжини треків α - і β -частинок у камері Вільсона та фотоемульсіях.

Реакцію β -розпаду ядер треба записувати таким чином:



Отже, α -розпад веде до зміщення елемента на два номери назад за таблицею Менделєєва (6.12), а β -розпад — на один номер вперед (6.14).

Як видно з (6.12), (6.14), ядерні реакції справді здійснюють віковічну мрію алхіміків про перетворення одних хімічних елементів у інші, але вже не фантастичні, а реальні перетворення і не так, як комусь заманеться, а за певними правилами.

Нарешті вкажемо що фізична природа γ -активності ядер інша, ніж природа α - та β -активності. γ -Промені не є продуктом ядерних реакцій (хоч можуть останні й супроводжувати). Вони виникають в результаті *квантових переходів* атомних ядер з вищих енергетичних рівнів на нижчі. У цьому розумінні γ -випромінювання цілком подібне до електромагнітного випромінювання атомів, але значно більш енергійними квантами.

Як відомо з елементарного курсу фізики, в природі існує три сім'ї радіоактивних елементів, які через ланцюжок радіоактивних перетворень врешті закінчуються на стабільних елементах. Це відомі ряди урану — радію, актинію, торію (див., наприклад, [6]).

Хоч момент розпаду кожного окремого радіоактивного атома точно передбачити не можна, проте загальну динаміку розпаду макроскопічної кількості речовини можна визначити точно. Природний радіоактивний розпад хімічних елементів підпорядкований чіткій статистичній закономірності, яку можна встановити таким чином. Природно вважати, що число атомів dN радіоактивного елемента, які розпалися протягом часу dt , пропорційний загальному числу цих атомів на даний момент:

$$dN = -\lambda N(t)dt \quad (6.15)$$

Переписавши (6.15) у вигляді $dN/N = -\lambda dt$ і проінтегрувавши обидві частини отриманої рівності за часом, після нескладних перетворень дістанемо

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.16)$$

де N_0 — початкова ($t = 0$) кількість радіоактивних атомів. Константу λ називають *сталю радіоактивного розпаду* даного елемента. Домножуючи обидві частини рівності (6.16)

на масу одного атома m_0 , дістанемо закон радіоактивного розпаду по масі

$$M(t) = M_0 e^{-\lambda t}. \quad (6.17)$$

Тут M_0 — початкова маса радіоактивної речовини; $M(t)$ — її маса на момент часу t .

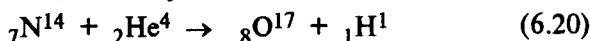
Формула (6.17) добре узгоджується з експериментом. Характерною величиною, яка визначає інтегральну тривалість процесу розпаду радіоактивних речовин, є так званий період їхнього піврозпаду T , який визначається за умовою

$$M_0/2 = M_0 e^{-\lambda T}. \quad (6.18)$$

Звідси для T матимемо

$$T = \ln 2 / \lambda. \quad (6.19)$$

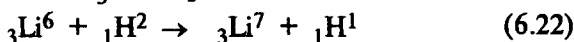
Усвідомивши фізичну суть природних радіоактивних перетворень, вчені вдалися до винайдення штучних способів ядерних перетворень, а згодом і до проблеми розщеплення важких ядер та синтезу легких. Методика напрошувалася сама собою: оскільки в природі існують стабільні й нестабільні ядра (тобто стійкі й нестійкі сукупності протонів та нейтронів), то, можливо, бомбардуванням ядер якимись частинками можна змінювати структуру і склад ядер, штучно викликаючи їхню нестабільність, зокрема штучну радіоактивність. І справді, в 1919 р. Резерфорду вперше вдалося розщепити ядро азоту ${}^7_3\text{N}^{14}$ шляхом бомбардування його α -частинками (тобто ядрами атома гелію ${}^4_2\text{He}^4$). Відповідна ядерна реакція записується таким чином:



(${}^8_6\text{O}^{17}$ — ізоотоп кисню, а замість ${}^1_1\text{H}^1$ точніше було б писати ${}_1^1\text{p}^1$ — протон). З цієї реакції усе фактично й почалося. Далі було здійснено ще цілий ряд ядерних реакцій, наприклад розщеплення ядра літію ${}^7_3\text{Li}^7$ пучками протонів ${}_1^1\text{p}^1$ з енергією 12000 еВ:

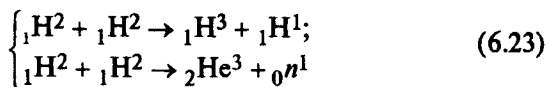


(Кокрофт і Уолтон, 1932 р.). У 1933 р. бомбардуванням літію ${}^6_3\text{Li}^6$ ядрами важкого ізотопа водню $\text{D} = {}^2_1\text{H}^2$ було одержано ізоотоп літію ${}^7_3\text{Li}^7$ в реакції



(Лоуренс, Льюїс, Левінгстон) і т. д.

Важливим відкриттям тих часів виявилось отримання важкого ізотопу водню — тритію ($\text{Tt} = {}^3_1\text{H}^3$) та нового ізотопу гелію (${}^3_2\text{He}^3$) в реакціях



(Оліфант, Хартек, Резерфорд, 1934 р.).

Так почалася ера ядерної фізики, що увінчалася відкриттям ланцюгової реакції з ураном, яка лежить в основі сучасної ядерної енергетики та, на жаль, ядерної зброї. До обговорення даної важливої проблеми ми й переходимо.

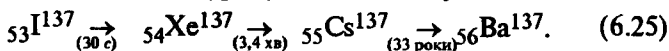
Ядерні реакції, як і хімічні, можуть бути *екзотермічними* і *ендотермічними*. Оцінка енергетичного ефекту ядерних реакцій здійснюється на основі вивчення відповідного дефекту маси та врахування його співвідношення з енергією зв'язку (6.9). Нехай в реакцію вступають ядра з масами M_1 і M_2 , а на виході дістаємо ядра з масами M_3 та M_4 . Тоді, очевидно, можна записати

$$M_1 + M_2 = M_3 + M_4 + \Delta m. \quad (6.24)$$

Якщо $\Delta m > 0$, тобто сума мас ядер до реакції більша за суму мас ядер після реакції, реакція буде *екзотермічною*. Якщо ж $\Delta m < 0$, то *ендотермічною*. Енергетичний ефект реакції в обох випадках дорівнюватиме (чисельно) $\epsilon = |\Delta m| c^2$. Для більшості ядер (на кожен пару частинок, що вступають в реакцію) ϵ має порядок кількох мегаелектрон-вольт, що в мільйони разів більше за відповідні значення для хімічних реакцій.

В основі сучасної ядерної енергетики лежить реакція поділу масивних ядер на ядра середньої маси. На такий поділ здатні ядра з масами, більшими, ніж маса олова.

Розглянемо поділ ядра урану-235 (${}_{92}\text{U}^{235}$) на частини під дією так званих теплових (тобто порівняно повільних) нейтронів. Під дією таких нейтронів ядра ${}_{92}\text{U}^{235}$ поділяються здебільшого на дві частини — два ядра середніх мас. Продукти первинного розпаду, як правило, нестабільні, оскільки містять ненормально велику кількість нейтронів. Шляхом ланцюжка перетворень вони врешті переходять до стабільного стану. Прикладом такого ланцюжка переходів продуктів розпаду ядра урану-235 може бути послідовність



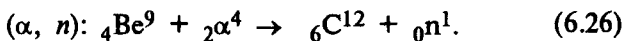
Під стрілками вказано періоди піврозпаду відповідного ядра. З (6.25) ясно, що досить стійким радіоактивним продуктом розпаду урану-235 буде ${}_{55}\text{Cs}^{137}$.

Поділ урану-235 супроводжується виділенням величезної енергії: 1 г урану виділяє стільки ж енергії, скільки її

можна дістати в результаті спалювання 2,5 т вугілля, тобто порядку 22000 кВт·год.

Уран-235 — єдиний природний елемент, придатний для виробництва енергії у промислових масштабах. Оскільки ж відповідний поділ його здійснюється за допомогою нейтронів, які не мають потужних зовнішніх джерел, промислове добування енергії з урану-235 можна здійснити лише за допомогою ланцюгової реакції. Справа в тім, що в кожному акті поділу ядра ${}_{92}\text{U}^{235}$ разом з ядрами — продуктами поділу — звільнюється два-три нейтрони. Треба лише створити умови, щоб ці нейтрони викликали поділ ще достатньої кількості ядер урану-235, породжуючи тим самим ланцюгову реакцію.

Первинний потік нейтронів можна дістати, наприклад, за допомогою суміші радію з берилієм. Радій випромінює α -частинки, які, бомбардуючи ядра берилію, перетворюють їх на вуглець з виділенням нейтронів:

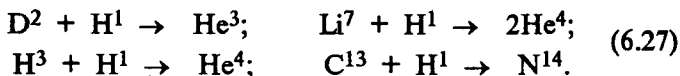


Ці нейтрони за належних умов і провокують ланцюгову реакцію ${}_{92}\text{U}^{235}$. Проте можна обійтися й без первинного джерела нейтронів, спираючись на нейтрони в космічному випромінюванні та на відмінну від нуля ймовірність спонтанного їх випромінювання ядрами самого урану-235 (яке часом трапляється). Слід лише сконцентрувати певну масу його та ввести в неї відповідні речовини — сповільнювачі нейтронів. Останнє необхідно зробити, оскільки продукovanі при розпаді ядер ${}_{92}\text{U}^{235}$ нейтрони занадто швидкі й тому погано поглинаються іншими ядрами, виходять за межі маси урану й втрачаються.

Звичайно, для реального створення умов керованої ланцюгової реакції необхідно виконати відповідні інженерні розрахунки, яких ми тут не маємо можливості торкатися. Сучасна наука й техніка використовує не лише уран-235, а й, наприклад, такі штучні елементи, як плутоній-239, що одержується з урану-238, або уран-233 — з торію-232.

Якщо маса урану-235 перевищує певне критичне значення, ланцюгова реакція стає некерованою: відбувається вибух колосальної сили. Саме ця обставина використовується в атомних бомбах.

Більш ефективнішими з погляду енергетичного виходу є не реакції поділу важких ядер, а реакції синтезу легких. Високоєфективними прикладами таких реакцій можуть бути



Для здійснення таких реакцій потрібні неабиякі попередні енергетичні затрати. Некеровані реакції такого типу знайшли використання у водневих бомбах. Керовані ж *термоядерні реакції* (а саме так називають подібні реакції) досі ще масштабно здійснити не вдалося, але дослідні роботи ведуться в усьому світі.

§ 6.3. Поняття про елементарні частинки

Складові усіх атомів, тобто електрони, протони, нейтрони, належать до так званих *субатомних*, або *елементарних*, *частинок*. Але сучасній науці відомі не лише перелічені вище елементарні частинки. За новітніх даних сукупність усіх відомих елементарних частинок може бути розбита за різними ознаками на кілька класів. Найбільш крупномасштабним є поділ частинок на *ферміони* та *бозони*. *Ферміони* — це частинки напівцілого спіну. Усі вони підпорядковані принципу заборони (або виключення) Паулі. *Бозони* — частинки цілого спіну. На цих принцип Паулі не поширюється. Електрони, протони та нейтрони є ферміонами, фотони — бозонами.

Зазначимо, що *елементарними* у фізиці називають частинки, які не можна розбити на складові. Поняття елементарності відносне. Так, за умов, коли стан ядер атомів не змінюється в результаті тих чи інших процесів, навіть ядра атомів можна вважати елементарними утвореннями. Але тільки стосовно згаданих процесів. Коли сьогодні кажуть, що якийсь матеріальний об'єкт складається з певних дрібніших (елементарніших) об'єктів, то зважають на дефект маси, який має місце при об'єднанні "простих" матеріальних частинок у складні.

Після поділу на ферміони та бозони елементарні частинки поділяються ще на кілька класів. Для характеристики цих класів зазначимо, що наукою відкрито чотири основні типи взаємодії частинок: *гравітаційні*, *слабкі*, *електромагнітні* та *сильні*.

Гравітаційна взаємодія універсальна: в ній беруть участь усі елементарні частинки. Джерелом гравітаційного поля є гравітаційна маса частинок (а точніше¹, чотиритен-

¹ Це й подальші уточнення можна повністю зрозуміти лише після вивчення відповідних розділів теоретичної фізики.

зор енергії — імпульсу). Джерелом електромагнітного поля є електричні заряди і струми (точніше — чотиривектор електричного струму). Електромагнітна взаємодія значно менш універсальна, ніж гравітаційна. Те саме в певній мірі можна сказати й про слабку взаємодію. Прикладом процесу, зумовленого слабкою взаємодією, є β -розпад. Це відносно повільний процес.

Сильним взаємодіям (окремим випадком яких є взаємодія нуклонів у ядрах атомів) підпорядковані відносно масивні частинки, що мають назву *адрони*, до яких належать протони, нейтрони, а також ціле сонмище мезонів та гіперонів. (Нехай не засмучує початківця певна невизначеність вживаних вище термінів: для усвідомлення їхньої суті треба засвоїти солідний обсяг літературних джерел, які виходять за межі стандартних курсів загальної фізики.) Серед відомих ферміонів лише шість не беруть участі у сильних взаємодіях. Вони належать до класу *лептонів* (легких частинок). Це електрон e , мюон μ , таулептон τ та електронне, мюонне і таунейтринно (ν_e, ν_μ, ν_τ).

Отже, елементарні частинки поділяються на адрони та лептони.

Кожна елементарна частинка має свого двійника — *античастинку*. Античастинками заряджених частинок є частинки тієї самої маси, але протилежного заряду. Частинки зі своїми античастинками (якщо ті та інші не тотожні між собою, бо буває й так) при зіткненні *анігілюють* (знищуються, породжуючи, як правило, високоенергійні кванти електромагнітного випромінювання — фотони).

Власне кажучи, адрони лише з певною натяжкою можна вважати елементарними, оскільки вони мають помітні розміри й побудовані з так званих *кварків*. Щоправда, вільних кварків ніхто на досліді досі не спостерігав. Та численні непрямі факти свідчать про їхнє існування в межах відповідних “елементарних” частинок, хоч там вони й зазнають дуже значного дефекту маси. Саме тому й не можна ототожнювати вислів: “адрони складаються з кварків” з висловом: “ядра складаються з нуклонів”. Тут з’являється нова фізична якість, пов’язана, зокрема, з великим дефектом маси. Проте є підстави казати про глобальний поділ елементарних частинок на кварки та лептони. Лептони було побіжно перелічено вище. Тому залишилося перелічити кварки. Кварки є безструктурними точкоподібними (до 10^{-17} м) і мають дробні електричні заряди, які становлять $2/3$ або $1/3$ від електронного

заряду e . Вони характеризуються також набором спеціальних квантових чисел, що дістали назву *ароматів*. На сьогодні відомо шість кварків (та шість антикварків): u — (up)-кварк; d — (down)-кварк; s — (strange)-кварк; c — (charming)-кварк; b — (bottom)-кварк і t — (top)-кварк [10].

За масами й кварковою структурою адрони поділяються на *баріони* та *мезони*. Баріони — це важкі трикваркові комбінації (QQQ); мезони — більш легкі кварк-антикваркові пари (QQ). Риска над символом частинки зображає античастинку.

Наведемо по три приклади баріонів та мезонів:

Баріони	Мезони
uud — p (протон),	$u\bar{d}$ — π^+ (піон),
udd — n (нейтрон),	$d\bar{s}$ — K^0 (каон),
uds — Λ (лямбда-гіперон)	$c\bar{c}$ — Ψ (ψ -мезон).

Серед елементарних частинок тільки чотири типи їх (та чотири відповідні типи античастинок) стабільні у вільному стані. Це всі три нейтрино (ν_e, ν_μ, ν_τ); фотони (γ електрони (e) та протони (p). Усі інші частинки через певний (часто виключно малий) час розпадаються. Найбільш великий період життя має вільний нейтрон n , який протягом часу $\sim 10^3$ с розпадається на протон p , електрон e та нейтрино ν_e :

$$0n^1 \rightarrow 1p^1 + e^- + \nu_e. \quad (6.28)$$

Проте розпад елементарних частинок на зразок схеми розпаду (6.28) не означає, що нестабільні частинки складаються з продуктів їхнього розпаду. За сучасних уявлень згадані вище продукти розпаду народжуються в момент самого розпаду. І така сама ситуація спостерігається не лише при *розпадах* елементарних частинок, а й при будь-яких інших *взаємних перетвореннях* частинок, котрих налічується безліч і котрі можна штучно спровокувати за допомогою так званих прискорювачів, які розганяють заряджені частинки і змушують їх співударятися з іншими частинками-мішенями. Перетворення з елементарними частинками підпорядковані законам збереження енергії, імпульсу, електричного заряду тощо¹.

На закінчення вкажемо на те, що електромагнітна взаємодія здійснюється шляхом обміну *фотонами*; а кварки,

¹ Існують точні й неточні (приблизні) закони збереження.

що взаємодіють, обмінюються глюонами. Фотони й глюони — кванти так званих *калібровних* полів.

На жаль, теорія елементарних частинок дуже складна у математичному плані. Тому тут немає жодної можливості скільки-небудь доказово спинитися на теорії руху й взаємодії елементарних частинок. Залишається лише декларативно констатувати, що вже створено об'єднану теорію електрослабких взаємодій, а також єдину теорію сильних взаємодій — *квантову хромодинаміку*. Є підстави сподіватися побудувати навіть єдину теорію усіх типів взаємодій взагалі. Про все це можна на порівняно доступному рівні прочитати в праці [30].

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ ТА ЗАПИТАННЯ

1. Наведіть міркування та викладки, що ведуть від закону Ампера до сили Лоренца.
2. Що ви знаєте про мікроінтерпретацію законів Ома та Джоуля—Ленца?
3. Розкажіть про особливості руху заряджених частинок у магнітному полі.
4. Наведіть і поясніть рівняння Ейнштейна для фото-ефекту.
5. Наведіть евристичні міркування, що ведуть до рівняння Шредингера; розкрийте фізичний сенс хвильової функції.
6. Розкажіть про дисперсію хвиль де Бройля.
7. Встановіть стаціонарне рівняння Шредингера та наведіть його фізичну інтерпретацію.
8. Покажіть відмінність та риси схожості руху класичної і квантової частинок у потенціальних полях.
9. Розкажіть про енергетичні спектри фінітного й інфінітного руху частинок.
10. Розкрийте суть тунельного ефекту з належними розрахунками.
11. Побудуйте та проаналізуйте сферично симетричні розв'язки рівняння Шредингера для електрона в атомі водню.
12. У чому полягає принцип Паулі і як формуються електронні оболонки атомів?
13. Розкажіть про квантові числа атомних електронів та заповнення енергетичних оболонок.
14. Дайте квантомеханічне пояснення періодичного закону Менделєєва.
15. Розкажіть про утворення енергетичних зон електронів у кристалах.

16. У чому полягає в загальних рисах фізична суть поділу твердих тіл на провідники, напівпровідники та ізолятори?

17. Наведіть і поясніть формулу Планка для випромінювання абсолютно чорного тіла.

18. Встановіть формулу Планка за Ейнштейном.

19. Як за Ейнштейном впливає поняття про вимушене (стимульоване) випромінювання?

20. Розкрийте основні принципи роботи лазерів.

21. Розкажіть про склад, розміри й будову атомних ядер.

22. Що ви знаєте про енергію зв'язку атомних ядер і як з цього впливає можливість одержання атомної енергії?

23. Розкажіть про ланцюгові реакції та про термоядерний синтез.

24. Наведіть сучасну класифікацію елементарних частинок на основі уявлень про кварки та лептони.

Продовжуючи вивчення процесів в електричних колах з індуктивністю, розглянемо приклад вимушених коливань, які виникають у двох індуктивно зв'язаних контурах, що не містять конденсаторів.

Два індуктивно зв'язаних контури, в один з яких подано змінну напругу \tilde{u} , а другий зовнішніх джерел струму не має, показано на рис. 72.

Маючи досвід складання відповідних рівнянь, запишемо без пояснень

$$\begin{cases} R_1 I_1 + L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} = \tilde{u}(t); \\ R_2 I_2 + L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt} = 0. \end{cases} \quad (\text{Д.1})$$

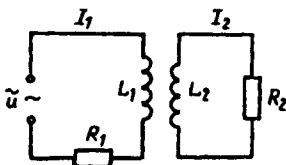


Рис. 72

Тут $L_{11} \equiv L_1$; $L_{22} \equiv L_2$ — коефіцієнти *самоіндукції* (індуктивності) первинного й вторинного контурів; $L_{12} = L_{21} \equiv L$ — коефіцієнти *взаємодукції* цих контурів; $\tilde{u}(t)$ — змінна зовнішня напруга.

Для спрощення обчислень не будемо враховувати перехідного процесу, а одразу спинимося на *стаціонарній* частині розв'язку системи рівнянь. Зручно також зобразити синусоїдальну зовнішню напругу у формі комплексної експоненти

$$\tilde{u}(t) = u_0 e^{i\omega t}. \quad (\text{Д.2})$$

Виділити в решті реальну частину розв'язків, як відомо, не становить труднощів.

Для обраної правої частини (Д.2) першого з рівнянь (Д.1) розв'язок будемо шукати у вигляді

$$I_1(t) = X e^{i\omega t}; \quad I_2(t) = Y e^{i\omega t}. \quad (\text{Д.3})$$

Тоді для похідних матимемо

$$\frac{dI_1}{dt} = i\omega I_1; \quad \frac{dI_2}{dt} = i\omega I_2. \quad (\text{Д.4})$$

Підставляючи (Д.3) і (Д.4) і (Д.1) і скоротивши на $e^{i\omega t}$, дістанемо систему алгебраїчних рівнянь для визначення X та Y .

$$\begin{cases} (R_1 + i\omega L_1) X + i\omega L Y = u_0; \\ i\omega L X + (R_2 + i\omega L_2) Y = 0. \end{cases} \quad (\text{Д.5})$$

Систему з двох рівнянь майже завжди вигідно розв'язувати за допомогою детермінантів. Обчислення для детермінанту системи Δ дають

$$\Delta = (R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) - \omega^2 L^2. \quad (\text{Д.6})$$

Звідси знаходимо

$$X = \frac{u_0}{\Delta} (R_2 + i\omega L_2); \quad Y = -\frac{i\omega}{\Delta} L. \quad (\text{Д.7})$$

Не зупиняючись на виділенні з (Д.3) за допомогою (Д.7) реальних частин та початкових фаз, обговоримо лише характер залежності амплітуд вимушених коливань $|X|$ та $|Y|$ від примусової частоти ω та коефіцієнта взаємодукції L . Неважко переконатися в тому, що

$$|X| = \left\{ \frac{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}{[R_1 R_2 + \omega^2 (L^2 - L_1 L_2)]^2 + \omega^2 [L_1 R_2 + L_2 R_1]^2} \right\}^{1/2}; \quad (\text{Д.8})$$

$$\begin{aligned} |Y| &= \frac{\omega L}{\{[R_1 R_2 + \omega^2 (L^2 - L_1 L_2)]^2 + [L_1 R_2 + L_2 R_1]^2 \omega^2\}^{1/2}} = \\ &= \frac{L}{\{[R_1 R_2 / \omega + \omega (L^2 - L_1 L_2)]^2 + [L_1 R_2 + L_2 R_1]^2\}^{1/2}}. \end{aligned} \quad (\text{Д.9})$$

Як видно з отриманих виразів,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |Y| = 0; \quad \lim_{L \rightarrow 0} |Y| = 0. \quad (\text{Д.10})$$

Це зрозуміло з фізичного погляду, оскільки стала напруга $u = u_0$ ($\omega = 0$) не викликає індукційного струму у вторинному колі; не буде в ньому струму й при зникненні взаємодії ($L = 0$); крім того, амплітуди носять резонансний характер, досягаючи найбільшого значення за умови

$$\frac{R_1 R_2}{\omega_0} + \omega_0 (L^2 - L_1 L_2) = 0. \quad (\text{Д.11})$$

Звідси для резонансної частоти ω_0 дістанемо

$$\omega_0 = \left\{ \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 - L^2} \right\}^{1/2}. \quad (\text{Д.12})$$

Усі параметри умови (Д.11) додатні, тому вона здійсненна лише при $L^2 < L_1 L_2$. При нерівності ($L^2 > L_1 L_2$) амплітуда $|Y|$ буде найбільшою за умов мінімуму (за ω) залежного від частоти ω доданку знаменників. (Рекомендуємо знайти самостійно.)

Якщо знаменнику амплітуд (Д.8), (Д.9) надати форми

$$\{\dots\}^{1/2} = L \left\{ \left[\frac{R_1 R_2}{\omega L} + \omega \left(L - \frac{L_1 L_2}{L} \right) \right]^2 + \left[\frac{L_1}{L} R_2 + \frac{L_2}{L} R_1 \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (\text{Д.13})$$

то стає ясным, що роль, аналогічну ємності c^* в RLC -контурі, відіграє величина

$$c^* = L / R_1 R_2 \quad (\text{Д.14})$$

і т. д. Отже, наявність безконтактного індуктивного взаємозв'язку зумовлює появу ємності c^* , породжуваної таким зв'язком. Звідси й резонансні явища, схожі на такі в RLC -контурі.

ДОДАТОК 2

Обґрунтувати узагальнення Ейнштейна (4.104), (4.105) — основного закону динаміки матеріальної точки на випадок великих швидкостей руху ($v \sim c$) — найраціональніше за допомогою загальноживаного в сучасній фізиці *чотириформалізму Мінковського*. Інваріантність законів динаміки матеріальної точки відносно перетворень Лоренца (4.90), (4.91) стає тоді очевидною.

Чотиривимірний світ або *простір Мінковського* запроваджується за формальною аналогією з тривимірним простором, описаним у системі декартових координат (x_1, x_2, x_3) .

За теоремою Піфагора довжина вектора $\Delta \vec{t}$ пов'язана з довжинами його проєкцій $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ на осі декартових координат Ox_1, Ox_2, Ox_3 співвідношенням

$$\Delta l^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2. \quad (\text{Д.15})$$

(Тут зручно було перепозначити $x \equiv x_1; y \equiv x_2; z \equiv x_3$). Виконавши аналогічні перепозначення у виразі для інтервалу ΔS (4.96)

$$x \equiv x_1; \quad y \equiv x_2; \quad z \equiv x_3; \quad ict \equiv x_4 \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (\text{Д.16})$$

дістанемо для нього

$$\Delta S^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2. \quad (\text{Д.17})$$

Формальна аналогія між (Д.15) та (Д.17) очевидна. На базі такої аналогії запроваджують *чотири-вектори* (*4-вектори*), тобто чотирикомпонентні величини $\vec{A} \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, які перетворюються подібно до \vec{r} і t за формулами Лоренца (4.90); останні в нових позначеннях (Д.16) набувають вигляду

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma (x_1 + i \frac{V}{c} x_4); & x'_2 &= x_2; & x'_3 &= x_3; \\ x'_4 &= \gamma (x_4 - i \frac{V}{c} x_1). \end{aligned} \quad (\text{Д.18})$$

Отже, аналогічно (Д.10) для 4-вектора \tilde{A} маємо закон перетворення

$$A'_1 = \gamma (A_1 + i \frac{V}{c} A_4); \quad A'_2 = A_2; \quad A'_3 = A_3; \\ A'_4 = \gamma (A_4 - i \frac{V}{c} A_1). \quad (\text{Д.19})$$

Неважко зрозуміти, що за такого закону значення

$$\tilde{A}^2 \equiv A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 \quad (\text{Д.20})$$

буде інваріантом стосовно перетворень (Д.19).

З метою узагальнення другого закону Ньютона на випадок великих швидкостей руху запроваджують так званий *інваріантний (власний) час* τ за допомогою диференціальної рівності

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = dt \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{dt}{\gamma}, \quad (\text{Д.21})$$

де ds — безмежно малий інтервал типу Δs (4.96) і враховано, що

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2; \quad \gamma = [1 - v^2/c^2]^{-1/2}; \quad v_i \equiv \frac{dx_i}{dt} \\ (i = 1, 2, 3). \quad (\text{Д.22})$$

Термін “власний час” походить від порівняння (Д.21) з (4.99).

Далі запроваджують 4-вектори швидкості \tilde{u} та імпульсу \tilde{p} за формулами

$$u_i \equiv \frac{dx_i}{d\tau}; \quad p_i \equiv m u_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (\text{Д.24})$$

Після цього постулюють замість другого закону Ньютона рівняння

$$\frac{dp_i}{d\tau} = F_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{Д.25})$$

в яких F_i репрезентують компоненти 4-вектори сили $\tilde{F} \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, котрі ми маємо ще детально обговорити для з'ясування їхнього зв'язку з вектором сили \vec{F} класичної механіки.

Очевидно, закон (Д.25) є коваріантним (тобто інваріантним за формою) стосовно до перетворень Лоренца (Д.18), (Д.19). Обговоримо детальніше співвідношення (Д.24) та (Д.25).

Зважаючи на (Д.21), маємо

$$u_i = \gamma \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (\text{Д.26})$$

Тому для просторових компонентів ($i = 1, 2, 3$) дістанемо

$$u_i = \gamma v_i. \quad (\text{Д.27})$$

Тут $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ — компоненти звичайного вектора (кажуть — *3-вектора*) швидкості руху частинки \vec{v} . Для часової ж компоненти ($i = 4$) маємо

$$u_4 = i c \gamma. \quad (\text{Д.28})$$

Склавши з u_i інваріант, за (Д.27), (Д.28) та (Д.22) знаходимо

$$\tilde{u}^2 \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = -c^2 = \text{const.} \quad (\text{Д.29})$$

Для просторових компонентів 4-імпульсу p_i ($i = 1, 2, 3$) (Д.24) маємо

$$p_i = \gamma m v_i, \quad (\text{Д.30})$$

що з огляду на (Д.22) збігається з (4.105). Для часової компоненти ($i = 4$) дістанемо

$$p_4 = i \gamma m c = \frac{iE}{c}, \quad (\text{Д.31})$$

де використано вираз для релятивістської енергії частинки E (4.113). Отже, часова компонента 4-імпульсу \vec{p} (Д.24) з точністю до множника ic^{-1} становить енергію частинки.

Для виявлення зв'язку чотири-сили \vec{F} (Д.25) із звичайною силою \vec{F} перепишемо рівняння (Д.25) у вигляді

$$\frac{dp_i}{dt} = \gamma F_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (\text{Д.32})$$

Тому в нерелятивістській границі ($v/c \ll 1$) просторові компоненти 4-сили ($i = 1, 2, 3$) прямують до компонентів звичайної сили. Що ж до часової ($i = 4$) компоненти 4-сили, то вона з огляду на (Д.33) та (Д.31) пов'язана з потужністю

$$\frac{dE}{dt} = -icF_4. \quad (\text{Д.33})$$

На закінчення, спираючись на тотожність (Д.29) та зв'язок 4-імпульсу (Д.24) з три-імпульсом \vec{p} (4.105) та енергією E (Д.31), запишемо

$$E^2 = c^2 (\vec{p}^2 + m^2 c^2). \quad (\text{Д.34})$$

Ця рівність пов'язує релятивістську енергію частинки E з її триімпульсом \vec{p} та масою спокою m і швидкістю світла c . Ці дуже важливі розрахунки винесено в додаток лише через певну їхню громіздкість.

ДОДАТОК 3

Обгрунтуємо формулу (3.16):

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Sigma)} \vec{A}_n dS = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{Д.35})$$

З цією метою оберемо за ΔV нескінченно малий куб з гранями, паралельними координатним площинам (див. рис. 50). Потік вектора \vec{A} через поверхню (Σ) , що охоплює ΔV , природно розбивається на шість частин (за числом граней), які зручно згрупувати за парами взаємно паралельних площин. Зовнішні нормалі до кожної з таких пар будуть антипаралельними одна одній:

$$\vec{n}_{mp} = -\vec{n}_x = \vec{n}_y; \quad \vec{n}_s = -\vec{n}_x = \vec{n}_z; \quad \vec{n}_n = -\vec{n}_y = \vec{n}_z, \quad (Д.36)$$

індекси пр, л; в, н; п, з відповідають правій та лівій; верхній та нижній; передній та задній граням (див. рис. 50)). Розглянемо внесок від лівої та правої граней у потік через поверхню Σ вектора \vec{A} . На лівій та відповідно правій гранях маємо

$$A_{n_l} = -A_y(x, y, z); \quad A_{n_p} = A_y(x, y + dy, z). \quad (Д.37)$$

Зважаючи на мализну граней, для сумарного потоку вектора \vec{A} через ліву й праву грані, очевидно, дістанемо

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma_A + \Sigma_{mp})} A_n dS &\approx \{A_y(x, y + dy, z) - A_y(x, y, z)\} dx dz \approx \\ &\approx \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta V, \end{aligned} \quad (Д.38)$$

оскільки $dx dy dz = \Delta V$.

Аналогічно можна підрахувати й внески в потік від передньої та задньої, верхньої та нижньої граней:

$$\int_{(\Sigma_n + \Sigma_z)} A_n dS \approx \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta V; \quad \int_{(\Sigma_n + \Sigma_x)} A_n dS \approx \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V. \quad (Д.39)$$

Отже, для повного потоку через ці грані дістаємо

$$\frac{1}{\Delta V} \oint_{(\Sigma)} A_n dS \approx \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (Д.40)$$

у границі (при $\Delta V \rightarrow 0$) наближена рівність (Д.40) перетворюється на точну, тобто на (Д.35), що й треба було довести.

ДОДАТОК 4

Для елементарного обґрунтування формули (4.66) звертаються звичайно до попереднього обчислення індуктивності нескінченно довгого тонкого соленоїда. Вважатимемо, що соленоїд зроблено шляхом щільної намотки на циліндричний каркас (остов) тоненького дротяного провідника. Зважаючи на дуже малу товщину провідникової дротини, можна кожний виток щільної спіралі соленоїда наближено розглядати як плоске кільце. Отже, соленоїд складається з щільно припасованих одне до одного витків у вигляді майже кілець.

Розглянемо циркуляцію вектора напруженості магнітного поля \vec{H} вздовж замкненого контура (L) у вигляді прямого паралелепіпеда, дві сторони якого йдуть паралельно осі циліндричного каркаса (одна всередині циліндра, друга — зовні його), а ще дві — перпендикулярно до вказаної осі. За описаних вище умов магнітне поле соленоїда повністю сконцентроване всередині безмежного каркаса, а вектор його напруже-

ності всюди є практично паралельним осі циліндричного остова. Тому циркуляція вектора \vec{H} вздовж описаного контура (L) зводиться до

$$\oint_{(L)} H_l dl = NI \quad (Д.41)$$

(оскільки зовні циліндра $\vec{H} = \vec{0}$). Тут l — довжина сторони паралелепіпеда, паралельної осі циліндричного каркаса; $H = \text{const}$ — модуль вектора напруженості поля всередині циліндра.

За теоремою повного струму (2.57) матимемо

$$Hl = nI, \quad (Д.42)$$

де I — сила струму в провіднику; n — число витків на одиницю довжини. Звідси для H всередині соленоїда дістаємо

$$H = nI. \quad (Д.43)$$

Отже, за законом електромагнітної індукції Фарадея на виділеній довжині соленоїда l , що має $N = n l$ витків, виникає ЕРС самоіндукції \mathcal{E}_{si} , яка за модулем дорівнює

$$|\mathcal{E}_{si}| = NS \frac{dB}{dt} = NS \mu_0 \frac{dH}{dt} = \mu_0 n^2 l S \frac{dI}{dt}, \quad (Д.44)$$

де S — площа поперечного перерізу циліндричного каркасу. Отже, індуктивність виділеної частини соленоїда

$$L = \mu_0 n^2 \Delta V. \quad (Д.45)$$

Тут $\Delta V = Sl$ — об'єм даної частини соленоїда.

Враховуючи (Д.43) та (Д.45), згідно з (3.20) для енергії магнітного поля розглядуваного фрагмента соленоїда дістаємо

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \mu_0 n^2 \Delta V \frac{H^2}{2n^2} = \frac{\mu_0 H^2}{2} \Delta V, \quad (Д.46)$$

а звідси для просторової густини енергії поля знаходимо

$$w_m = \frac{W_L}{\Delta V} = \frac{\mu_0 H^2}{2}, \quad (Д.47)$$

що збігається з використаною нами формулою (4.66).

ДОДАТОК 5

Про вектор-потенціал. Покажемо, що напруженість магнітного поля \vec{H} завжди можна подати у вигляді

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad (Д.48)$$

де $\vec{A}(\vec{r})$ — так званий *вектор-потенціал*, до певної міри (див. далі) аналогічний скалярному потенціалові електростатичного поля $\varphi(\vec{r})$, пов'язаному з \vec{E} за формулою

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (Д.49)$$

Доведення формули (Д.48) найпростіше почати з елементарного магнітного поля БСЛ (2.34):

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (\text{Д.50})$$

Зваживши на (4.57), розпишемо $d\vec{H}$ у проєкціях на локальні осі координат (див. рис. 54):

$$\begin{aligned} d\vec{H} &= \frac{I}{4\pi} \frac{x\vec{j} - y\vec{i}}{r^3} dl; \\ r^3 &= (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}. \end{aligned} \quad (\text{Д.51})$$

Прямим обчисленням неважко перевірити, що поклавши

$$d\vec{A} \equiv \frac{I\vec{k}}{4\pi} \frac{dl}{r} \quad (\vec{k} - \text{орт осі } Oz), \quad (\text{Д.52})$$

дістанемо $d\vec{H}$ (Д.50)

$$d\vec{H} = \text{rot}(d\vec{A}) = \frac{Idl}{4\pi} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1/r \end{vmatrix}. \quad (\text{Д.53})$$

(Рекомендуємо перевірити прямим обчисленням символічного визначника). Отже, для елементарного магнітного поля БСЛ формулу типу (Д.48) доведено.

Для тонкого провідника (див. рис. 54), очевидно, маємо

$$I \vec{k} dl = \vec{j} dS dl = \vec{j} dV. \quad (\text{Д.54})$$

Тут \vec{j} — густина струму; dS — площа поперечного перерізу провідника, а dV — елементарний його об'єм. Отже, для (Д.52) можна записати

$$d\vec{A} = \frac{\vec{j}}{4\pi r} dV. \quad (\text{Д.55})$$

Порівнюючи $d\vec{A}$ (з елементарним потенціалом електростатичного поля $d\phi = \rho dV/R$ (1.57), помічаємо аналогічність цих формул. Оскільки в (Д.48) оператор "rot" діє на координати точки спостереження поля \vec{B} (див. рис. 36), для повного вектор-потенціала \vec{A} дістанемо формулу, аналогічну (1.57):

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (\text{Д.56})$$

де інтегрування поширюється на весь струмоносний об'єм V .

Зауважимо без доведення, що за допомогою рівнянь Максвелла можна показати, що в загальному випадку змінних у часі і просторі полів так само можна запровадити скалярний $\phi(\vec{r}, t)$ і векторний $\vec{A}(\vec{r}, t)$ потенціали, такі, що

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \mu\mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A}. \quad (\text{Д.57})$$

Потенціали ϕ , \vec{A} відіграють дуже важливу роль у теорії електромагнітних явищ.

Дисперсія хвиль де Бройля. На відміну від електромагнітних хвиль хвилі де Бройля (1.80) (розділ 5) диспергують навіть у вакуумі. Загальну суть цього явища зручно пояснити на основі порівняння хвиль де Бройля з плоскими монохроматичними електромагнітними хвилями (див. розділ 4). Фазова швидкість v_ϕ таких хвиль визначається за формулою

$$v_\phi = \{\epsilon\epsilon_0 \mu \mu_0\}^{-1/2}. \quad (\text{Д.58})$$

Вона може змінюватись зі зміною середовища, в якому хвилі поширюються, оскільки для різних середовищ параметри μ та ϵ можуть бути різними. В однорідних же середовищах (де $\epsilon \mu = \text{const}$) та у вакуумі ($\epsilon = \mu = 1$) фазова швидкість v_ϕ монохроматичних електромагнітних хвиль є сталою величиною, яка не залежить від їхньої частоти ν (або довжини λ).

Інша справа — хвилі де Бройля:

$$\psi(x, t) = A e^{-i \frac{Et + px}{\hbar}}. \quad (\text{Д.59})$$

Їхня фазова швидкість v_ϕ визначається за формулою

$$v_\phi = E/p = p/2m. \quad (\text{Д.60})$$

Тут враховано, що для вільної мікрочастинки

$$E = p^2/2m. \quad (\text{Д.61})$$

Але імпульс p мікрочастинки пов'язаний з довжиною відповідної хвилі де Бройля λ співвідношенням

$$p = \hbar 2\pi/\lambda. \quad (\text{Д.62})$$

Тому для фазової швидкості хвиль де Бройля (Д.60) дістаємо

$$v_\phi = \pi \hbar / m\lambda. \quad (\text{Д.63})$$

Отже, на відміну від фазової швидкості електромагнітних хвиль (Д.58), фазова швидкість хвиль де Бройля v_ϕ (Д.63) не однакова для хвиль різної довжини λ навіть у вакуумі. Залежність фазової швидкості поширення хвиль v_ϕ від їхньої довжини називають *дисперсією хвиль*. Дисперсія хвиль де Бройля веде до просторового розпливання так званих хвильових пакетів [3; 11; 25] (які є суперпозицією монохроматичних хвиль де Бройля, оскільки хвилі різної довжини поширюються з різною фазовою швидкістю).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ (з коротким коментарем)

Рекомендовані нижче підручники доповнюють і поглиблюють матеріал даного посібника, обмежуючись мінімумом джерел високого гатунку та залишаючи достатнє поле для самостійної діяльності студентів, оскільки робота у наукових та технічних бібліотеках забезпечує багатогранність, виробляє наполегливість та інтерес до книги, обов'язкові для творчого спеціаліста.

1. *Ансельм А. И.* Очерки развития физической теории в первой трети XX века. М.: Наука, 1986. 244 с.

2. *Астахов А. В.* Курс физики. 1. Механика. Кинетическая теория материи. М.: Наука, 1977. 384 с.

Зроблено спробу пересомислення курсу загальної фізики з сучасних позицій. Посібник цікавий нетрадиційним підходом до матеріалу.

3. *Астахов А. В., Широков Ю. М.* Курс физики. III. Квантовая физика. М.: Наука, 1983. 240 с.

Продовжує курс фізики А. В. Астахова [2].

4. *Белоус М. В., Васковская В. Н., Воронцовская Л. В., Ментковский Ю. Л.* Физика (для подготовительных отделений). К.: Вища шк., 1990. 480 с.

Посібник є перехідним між шкільним та вузівським курсами; у вступі детально обговорено роль і місце фізики в системі природничих і технічних наук та в людській культурі взагалі. Має ряд методичних новинок.

5. *Беккер Р.* Теория теплоты. М.: Наука, 1974. 504 с.

Грунтовний підручник з основ термодинаміки, статистичної фізики та кінетики (включаючи теорію флуктуацій, броунівського руху та елементи нерівноважної термодинаміки). Наведено необхідні відомості з суміжних галузей науки та характерні приклади застосування теоретичних положень.

6. *Борн М.* Атомная физика. М.: Мир, 1970. 484 с.

Майстерно й стисло подано основні відомості з сучасної атомної фізики одним з її творців.

7. *Де Бур Я.* Введение в молекулярную физику и термодинамику. М.: Мир, 1962. 277 с.

Відрізняється простотою, глибиною та значним набором прикладів, зокрема, з другого принципу термодинаміки.

8. *Бялик О. М., Ментковский Ю. Л.* Вопросы динамической теории затвердевания металлических отливок. К.: Вища шк., 1983. 111 с.

Розглянуто релаксацію термодинамічної системи до стану рівноваги на простому прикладі тверднення малих металевих виливків, який охоплює, зокрема, стадію фазового переходу від рідкого до твердого стану.

9. *Геворкян Р. Г., Шепель В. В.* Курс общей физики. М.: Наука, 1972. 599 с.

Компактний і доступний підручник. Містить, зокрема, чіткий геометричний виклад розбиття прискорення на дотичну та нормальну складові.

10. *Гернет М. М.* Курс теоретической механики. М.: Наука, 1981. 303 с.

Короткий і доступний курс, що, крім зв'язку з технічною механікою та елементами теорії машин та механізмів, містить елементи аналітичної динаміки, методи якої становлять основу багатьох сучасних фізичних теорій.

11. *Гольдин Л. Л., Новикова Г. И.* Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988. 428 с.

Розширений (порівняно з багатьма іншими підручниками) та поглиблений курс атомної фізики на сучасному рівні.

12. *Гольдфайн И. Л.* Векторный анализ и теория поля. М.: Наука, 1968. 128 с.

Простота й наочність — головні риси підручника. Можна рекомендувати також: *Липтєв Г. Ф.* Элементы векторного исчисления. М.: Наука, 1975. 335 с.

13. *Звелто О.* Принципы лазеров. М.: Мир, 1990. 558 с.

Простий, ґрунтовний і досить повний підручник з фізики лазерів.

14. *Зильберман Г. Е.* Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1970. 384 с.

Нетрадиційний за формою та трактуванням матеріалу курс з широким тематичним охопленням при досить лаконічному викладі та широкому застосуванні графічних методів в теорії електрики.

15. *Калашиков С. Г.* Электричество. М.: Наука, 1977. 591 с.

Достатньо повний, різноплановий курс електрики, що перекриває усі основні її закони та містить численні приклади застосувань (на рівні загального курсу фізики).

16. *Карташов А. П., Рождественский Б. Л.* Математический анализ. М.: Наука, 1984. 448 с.

Для нас цікавий тим, що в курсі коротко й просто та водночас строго впроваджено комплексні числа, різні способи їхнього зображення та дії з ними.

17. *Кемпфер Ф.* Путь в современную физику. М.: Мир, 1972. 375 с.

На простій математичній основі зроблено досить вдалу спробу перебудувати курс фізики відповідно до сучасних вимог. Зокрема пояснюється ідея ієрархії інерційних систем відліку.

18. *Компанеев А. С.* Теоретическая физика. М.: Наука, 1957. 563 с.

Відрізняється ясністю, простотою, детальними обчисленнями на доступному рівні.

19. *Космодемьянский А. А.* Курс теоретической механики. М.: Наука, 1966. Ч. 2. 398 с.

Просто й детально розглянуто, зокрема, задачі Цюлковського з теорії реактивного руху.

20. *Кудряцев П. С., Конфедератов И. Я.* История физики и техники. М.: Наука, 1960. 507 с.

Коротко та досить послідовно охоплює період розвитку фізики та техніки від античності до 50-х років ХХ ст.

21. *Кузовлев В. А.* Техническая термодинамика и основы теплопередачи. М.: Наука, 1973. 303 с.

Викладено термодинаміку газів та водяної пари; основи теплопередачі. Описано, зокрема, прилад Бернарді для ілюстрації другого принципу термодинаміки.

22. *Ландсберг Г. С.* Оптика. М.: Наука, 1976. 926 с.

Один з найповніших (енциклопедичних) підручників з загальної оптики.

23. *Логанов А. А.* К работам Анри Пуанкаре о динамике электронов. М.: Наука, 1988. 102 с.

Детально проаналізовано роботи А. Пуанкаре щодо динаміки електрона, з чого видно його тотожне Ейнштейновому трактування фізичного сенсу коваріантності рівнянь Максвелла відносно перетворень Лоренца (на 5 червня 1905 р.).

24. *Магнус К.* Колебания. М.: Мир, 1982. 303 с.

Доповнює й поглиблює підручник [29]; містить типові приклади нелінійних коливань, що набули великого значення в науці й техніці.

25. *Маркс Г.* Введение в квантовую механику. Будапешт: АН Венгрии, 1962. 360 с.

Досить повно та вельми доступно викладено основи квантової механіки. Не потребує знань з теорії операторів.

26. *Млодзевський А. Б.* Термодинамика. К.: Рад. шк., 1954. 203 с.

Короткий, майстерний підручник з широким охопленням матеріалу при ясному та лаконічному викладі. Наведено підхід Каратеодорі до запровадження ентропії, який часто обминають за браком місця, що робить теорію неповною.

27. *Монополь Дірака* // Сб. статей. М.: Мир, 1970. 332 с.

Повний огляд проблем з різних поглядів, що існували на час виходу збірника, щодо так званого відокремленого магнітного полюсу — Монополя Дірака.

28. *Парсел Э.* Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1975. 440 с.

Автор — лауреат Нобелівської премії. Книга є другим томом знаменитого Берклівського курсу фізики (БКФ), розробленого комісією у складі визначних американських фізиків, як повний і сучасний курс для природничих і технічних вузів.

29. *Пейн Г.* Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1970. 389 с.

Достатньо повно й доступно викладено теорію коливань і хвиль, що відіграють важливу роль в багатьох розділах науки й техніки. Зокрема, просто й наочно впроваджено метод комплексної експоненти, що заслужено набув широкого наукового вжитку.

30. *Перкинс Д.* Введение в физику высоких энергий. М.: Энергоатомиздат, 1991. 428 с.

Доступно й на сучасному рівні викладено основні задачі сучасної фізики високих енергій. Корисний для спеціалістів в галузі атомної енергетики, які прагнуть мати фундаментальну підготовку.

31. *Планк М.* Принцип сохранения энергии. М., 1938. 235 с.

Грунтовний аналіз становлення фундаментального фізичного принципу (зокрема, першого принципу термодинаміки). Доступний за виглядом.

32. *Поль Р. В.* Механика, акустика, ученіе о теплоте. М.: Мир, 1979. 479 с.; Ученіе об электричестве. 1962. 516 с.; Оптика и атомная физика. 1966. 552 с.

Неперевершений і оригінальний курс загальної фізики щодо опису виразних демонстрацій з кожного її розділу. Витримав багато видань (зокрема три в Радянському Союзі). В перших двох книгах переконливо доведено неспроможність беззастережного лабораторного обґрунтування законів Ньютона. Лабораторні досліди скоріше ілюструють, ніж доводять закони Ньютона, які утвердилися в науці завдяки узгодженню з відомими законами небесної механіки. Дуже повчальний факт.

33. *Понтрягин Л. С.* Анализ бесконечно малых. М.: Наука, 1980. 256 с.

Дуже вдало й дохідливо викладено основи математичного аналізу одразу для функцій комплексної змінної, що відповідає сучасним математичним потребам в багатьох природничих і технічних науках.

34. *Радченко І. В.* Молекулярна фізика. Х.: Вид-во Харк. ун-ту, 1959. 538 с.

Достатньо повний і доступний курс молекулярної фізики з численними прикладами застосування. Детально обговорено поняття про термодинамічну імовірність та її зв'язок з математичною, без чого важко зрозуміти постулат Больцмана про ентропію.

35. *Самойлович А. Г.* Термодинамика и статистическая физика. М.: Наука, 1955. 368 с.

Грунтовний, ясний, добре впорядкований і строгий курс. Детально й строго запроваджено термодинамічну температуру. Бездоганне поєднання теорії з експериментальними даними. Глибоко роз'яснено постулат Больцмана про ентропію.

36. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1977. 687 с. Общий курс физики. Оптика. 1980. 751 с.

Повний, добре систематизований курс фізики. Зокрема добре викладено динаміку твердого тіла, електрику та магнетизм, наведено багато прикладів застосування. Є доречні історичні вкраплення.

37. *Федорченко А.* Теоретична фізика. К.: Вища шк., 1992. Ч.1. 535 с. Досить детальний підручник з екскурсами до ідейних витоків науки (в сучасній інтерпретації).

38. *Ферми Е.* Термодинаміка. Х.: Вид-во Харк. ун-ту, 1973. 136 с.

Добре скомпонований підручник з термодинаміки (з прикладами та порядками величин).

39. *Физический энциклопедический словарь.* М.: Наука, 1984. 944 с.

Досить повний і лаконічний словник-довідник на сучасному рівні з посиланням на першоджерела.

40. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Наука, 1966. Т. 2. 800 с.

Один з найповніших посібників з класичного математичного аналізу.

41. *Хунд Ф.* История квантовой теории. К.: Наук. думка, 1980. 244 с.

42. *Шимкович А. А.* Механика. Минск: Вышэйш. шк., 1969. 384 с.

Коротко й вдало подано матеріал, що служить містком між загальною фізикою (механіка) та теоретичною і прикладною механікою (зокрема теорією машин та механізмів, гіроскопів, реактивного руху).

43. *Шпольский Э. В.* Атомная физика: В 2 т. М.: Наука, 1984. Т. 1. 552 с.

Чудовий і замкнений виклад основних законів сучасної атомної фізики.

44. *Эшштейн А. С.* Курс термодинамики. М.: Наука, 1948. 419 с.

Фундаментальний підручник з численними прикладами застосування термодинаміки, включаючи хімічну.

ЗМІСТ

Розділ 4. ЕЛЕКТРОДИНАМІКА	3
<i>Глава 1. Електрика як польова теорія. Електростатика</i>	4
§ 1.1. Електричні заряди, поля, струми	4
§ 1.2. Поля неперервно розподілених зарядів	12
§ 1.3. Гідродинамічна інтерпретація вихідних понять векторного аналізу	14
§ 1.4. Теорема Остроградського—Гаусса для електростатичного поля у вакуумі	18
§ 1.5. Про графічне зображення електростатичного поля	22
§ 1.6. Напруженості ряду важливих симетричних полів	23
§ 1.7. Робота в електростатичному полі. Потенціал поля	27
§ 1.8. Електростатична індукція. Вектор електростатичної індукції	30
§ 1.9. Провідники в електростатичному полі	32
§ 1.10. Диполь в електричному полі. Електричне поле диполя ..	34
§ 1.11. Діелектрики в електростатичному полі. Поляризація діелектриків.	36
§ 1.12. Електроємність провідників. Конденсатори	38
§ 1.13. Діелектрик у зазорі конденсатора. Вектор індукції \vec{D} в речовині	42
<i>Глава 2. Сталій електричний струм та явища, що його супроводжують</i>	44
§ 2.1. Основні закони та теплова дія сталого струму	44
§ 2.2. Закони Ома та Джоуля—Ленца в диференціальній формі	50
§ 2.3. Магнітне поле. Напруженість магнітного поля	52
§ 2.4. Магнітна дія електричного струму	55
§ 2.5. Магнітне поле на осі кругового струму. Природа магнетизму за Ампером	58
§ 2.6. Дія магнітного поля на струм. Вектор індукції магнітного поля	60
§ 2.7. Теорема повного струму	62
<i>Глава 3. Квазістаціонарні струми та електромагнітні поля</i>	64
§ 3.1. Закон електромагнітної індукції Фарадея	64
§ 3.2. Самоіндукція. Індуктивність провідників	66
§ 3.3. Екстраструми; енергія струму та магнітного поля	68
§ 3.4. Коливальний RLC-контур. Вільні коливання в контурі ..	71
§ 3.5. Вимушені коливання; резонанси струмів і напруг	74

Глава 4. Загальні рівняння електродинаміки. Основи теорії Максвелла	78
§ 4.1. Властивості вектора поляризації	78
§ 4.2. Локальне формулювання теореми Остроградського—Гаусса	81
§ 4.3. Загальне визначення вектора електричної індукції. Друге рівняння Максвелла	83
§ 4.4. Реінтерпретація закону електромагнітної індукції. Перше рівняння Максвелла	84
§ 4.5. Локальна версія закону повного струму. Третє рівняння Максвелла	88
§ 4.6. Закон збереження заряду й струм зміщення	90
§ 4.7. Четверте рівняння Максвелла	92
§ 4.8. Повна система рівнянь електродинаміки та її попередній аналіз	94
§ 4.9. Енергія електричного й магнітного полів	96
§ 4.10. Електромагнітні хвилі. Фізична природа світла	97
§ 4.11. Рівняння Максвелла та спеціальна теорія відносності Ейнштейна	103
§ 4.12. Релятивістська динаміка матеріальної точки	109
Розділ 5. АТОМНА Й СУБАТОМНА ФІЗИКА	114
Глава 1. Проблеми класичної фізики в області мікровіщ. Поява квантових ідей	115
§ 1.1. Сила Лоренца. Заряджені частинки в електричному й магнітному полях	115
§ 1.2. Елементарна електронна інтерпретація законів Ома та Джоуля—Ленца	122
§ 1.3. Народження квантової фізики	125
§ 1.4. Фотосфект, ефект Комптона; корпускулярно-хвильовий дуалізм	130
§ 1.5. Рівняння Шредінгера	136
Глава 2. Основи квантової механіки на елементарних прикладах . .	142
§ 2.1. Стационарне рівняння Шредінгера	142
§ 2.2. Загальні риси руху класичної частинки в потенціальному полі	144
§ 2.3. Моделювання потенціальних кривих прямокутними бар'єрами і ямами	145
§ 2.4. Рух мікрочастинок у модельних полях прямокутних конфігурацій	146
Глава 3. Атом водню та інші атоми. Періодична система елементів Менделєєва	159
§ 3.1. Сферично симетричні стани водневоподібних атомів	159
§ 3.2. Квантові числа електронів в атомах; принцип Паулі, електронні оболонки атомів	165
§ 3.3. Періодична система елементів Менделєєва	174

<i>Глава 4. Елементи квантової фізики кристалічних тіл</i>	175
§ 4.1. Поняття про енергетичні зони електронів у кристалах . . .	175
§ 4.2. Коротко про провідники, напівпровідники, діелектрики . .	177
<i>Глава 5. Взаємодія випромінювання з речовиною</i>	180
§ 5.1. Термодинаміка й рівноважне випромінювання. Формула Планка	180
§ 5.2. Формула Планка за Ейнштейном	183
§ 5.3. Поняття про квантові генератори — лазери	186
§ 5.4. Формула Планка і закон Стефана—Больцмана	191
<i>Глава 6. Атомне ядро та елементарні частинки</i>	192
§ 6.1. Склад та розмір атомних ядер; ядерні сили; дефект маси; енергія зв'язку	192
§ 6.2. Радіоактивний розпад. Ядерні реакції. Ланцюгова реакція. Реакції ядерного синтезу	197
§ 6.3. Поняття про елементарні частинки	202
<i>Додатки</i>	207
Додаток 1	207
Додаток 2	209
Додаток 3	211
Додаток 4	212
Додаток 5	213
Додаток 6	215
Список рекомендованої літератури (з коротким коментарем)	216

Навчальне видання

Богацька Ірина Георгіївна
Головко Дмитро Богданович
Маляренко Анатолій Андрійович
Ментковський Юзеф Леонович

ЗАГАЛЬНІ ОСНОВИ ФІЗИКИ

У двох книгах

Книга 2

Електродинаміка Атомна та субатомна фізика

За редакцією *Д. Б. Головка,*
Ю. Л. Ментковського

Художник обкладинки *І. Л. Шур*
Художній редактор *Т. О. Шур*
Технічний редактор *І. М. Лукашенко*
Коректор *Н. В. Цісик*

Підп. до друку. 26.11.97. Формат 84x108/32.
Папір офсет. № 1. Гарн. Тип. Таймс. Офсет. друк.
Ум. друк. арк. 11,76. Ум. фарбовідб. 12,18.
Обл.-вид. арк. 13,44. Вид. № 3824. Зам. № 72425

Оригінал-макет виготовлено в центрі
комп'ютерного макетування фірми "ВІПОЛ"

Видавництво "Либідь" при Київському університеті
ім. Тараса Шевченка. 252001 Київ, Хрещатик, 10.

Свідоцтво про державну реєстрацію № 05591690 від 23.04.94

АТ "ВІПОЛ". 252151, Київ, вул. Волинська, 60.