З.В.БОНДАРЕНКО

В.І.КЛОЧКО

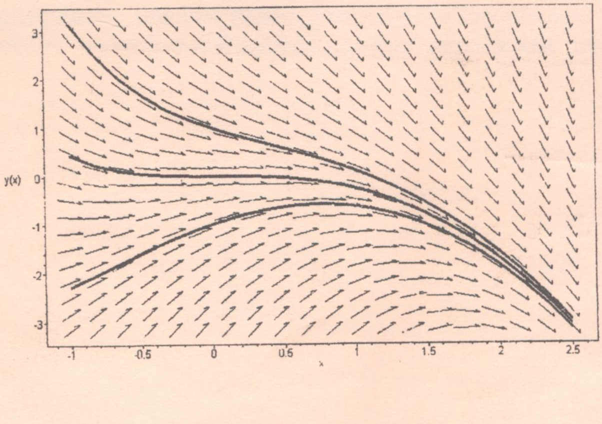
КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ДЛЯ СТУДЕНТІВ УСІХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ



Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

З.В.БОНДАРЕНКО

В.І.КЛОЧКО

КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Затверджено Вченою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів усіх спеціальностей. Протокол № 11 від 25 червня 2003 р.

ВІННИЦЯ ВНТУ 2004

УДК 512.64
Б 81

Рецензенти:

С.В. Юхимчук, доктор технічних наук, професор
В.М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
С.В. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Бондаренко З.В., Клочко В.І.
Б 81 **Курс вищої математики з комп'ютерною підтримкою. Диференціальні рівняння.** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2004. – 130с.

В посібнику розглянуті основні питання розділу "Диференціальні рівняння". З кожної теми наводяться короткі теоретичні відомості; приклади розв'язування задач з використанням математичного пакета MathCAD; пропонуються завдання для індивідуальної роботи, завдання для аудиторної самостійної роботи, завдання для типового розрахунку.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 512.64

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Метою навчального посібника є допомога студентам у самостійній роботі над навчальним матеріалом, викладачам – в керуванні процесом здобуття студентами знань та навичок у складанні диференціальних рівнянь, пошуку і дослідженні розв'язків рівнянь, у використанні при цьому сучасних комп'ютерних технологій.

Теоретичний і практичний матеріал посібника відповідає навчальній програмі з математики для технічних, технологічних, економічних спеціальностей вищих закладів освіти. До посібника також вміщено додатковий навчальний матеріал, який виходить за межі програми з математики для бакалаврату та інженерії і який може бути використаний при поглибленому вивченні диференціальних рівнянь.

До посібника включено основний програмний матеріал, наводяться приклади розв'язування задач з використанням системи MathCAD; пропонуються завдання для індивідуальної роботи, завдання для аудиторної самостійної роботи, завдання для типового розрахунку.

Матеріал посібника може бути використаний для самостійної роботи, побудови типових завдань, розробки навчальних програм.

ВСТУП

Багато важливих інженерних задач можна ставити і розв'язувати двома шляхами: експерементально або на основі аналізу математичної моделі реального об'єкта (процесу, явища тощо). Порівняння методів показує, що кожен з них має переваги і недоліки.

Схему експерементального розв'язання задачі можна зобразити так: розробляють методику досліджень і експерементальні засоби; проводять власне експеремент, в якому по можливості найповніше відтворюють реальні умови взаємодії об'єкта досліджень з навколишнім середовищем. Внаслідок повторних експерементів нагромаджується масив даних, який після систематизації і статичної обробки зображають у вигляді таблиць, графіків чи експерементальних функціональних залежностей.

Відносно цього варто відмітити дві обставини. Перша: за допомогою правильно поставленого і технічно оснащеного експеременту часто вдається здобути надійні й достовірні результати навіть в умовах експерементальних досліджень. Це суттєва перевага експерементальних методів. Друга: результати і закономірності, здобуті в даному конкретному експеременті, не можуть бути беззастережно використані для узагальнень і прогнозів результатів інших, навіть подібних експерементів. Це є певним недоліком експерементальних методів.

На відміну від експерементальних методів, математичним методам поки що "не під силу" розв'язання складних прикладних задач. Разом з тим там, де математичне розв'язання можливе, ці методи мають великі можливості для узагальнень, тобто застосування здобутих результатів і закономірностей для інших подібних задач.

В основі математичних методів дослідження лежать звичайні диференціальні рівняння і так звані рівняння математичної фізики. До останніх належать диференціальні рівняння з частинними похідними, а також деякі споріднені рівняння інших типів (інтегральні, інтегро-диференціальні тощо).

Диференціальні рівняння складають внаслідок математичного аналізу задачі. Вони відображають основну інформацію про найзагальніші закономірності фізичних процесів чи явищ, які є головним змістом задачі, що розглядається. Наприклад, у задачах механіки твердого тіла диференціальні рівняння теорії пружності відображають лінійну залежність між напруженнями і деформаціями, у задачах теплопровідності диференціальні рівняння теплопровідності ґрунтуються на залежності теплового потоку від градієнта температури тощо.

Слід зазначити, що такий опис наведених залежностей досить схематичний, оскільки, і напружений стан, і теплопровідність як фізичні явища залежать від багатьох факторів.

Механіка, фізика, радіоелектроніка, хімія, біологія, економіка, машинобідування – це далеко не повний перелік наук, у яких знаходять широке використання диференціальні рівняння.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Загальні поняття

Диференціальним рівнянням першого порядку називається співвідношення виду

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \qquad (1)$$

де x - незалежна змінна (аргумент); $y = y(x)$ - невідома функція аргументу x;

$F(x, y, y')$ - задана функція змінних $(x, y, y') = \frac{dy}{dx}$. Рівняння (1) не розв'язане відносно похідної.

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad (2)$$

де $f(x, y)$ - задана функція двох змінних, називається *диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної*.

Часто використовують симетричну форму запису диференціального рівняння першого порядку:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ - задані функції змінних x та y.

Розв'язком диференціального рівняння (1) або (2) на інтервалі називається неперервна диференційована функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює це рівняння в тотожність, тобто

$$F\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}\right) = 0 \ \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x))\right), \ x \in I.$$

Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ називається *інтегралом* рівняння (1) або (2), якщо воно неявно задає розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння.

Графік розв'язку $y = \varphi(x)$ називається *інтегральною кривою* диференціального рівняння. Проекція інтегральної кривої на вісь ординат називається *фазовою кривою* або *траєкторією* диференціального рівняння.

Задача знаходження розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (2), який задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$, називається *задачею Коші*.

Через кожну точку (x; y) області визначення рівняння (2) проведемо пряму тангенс кута нахилу якої до осі абсцис дорівнює $f(x, y)$. Ця сім'я прямих називається полем напрямків рівняння (2) або *полем напрямків* функції $f(x,y)$.

Інтегральна крива в кожній своїй точці дотикається до поля напрямків функції $f(x,y)$. Крива, яка в кожній своїй точці дотикається до напрямку, що є в цій точці, є інтегральною кривою.

Ізокліною називається крива, в кожній точці якої напрямок поля однаковий. Усі інтегральні криві, які перетинають дану ізокліну, утворюють з віссю абсцис один і той самий кут.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Довести, що функція $y = Cx + \dfrac{C}{\sqrt{1+C^2}}$ для кожного $C \in R$ є розв'язком рівняння $y - xy' = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

2. Показати, що функція $y = x\left(1 + \int \dfrac{e^x}{x} dx\right)$ є розв'язком рівняння $xy' - y = xe^x$.

3. Показати, що функція $\varphi(x) = x\int\limits_0^x \sin t^2 dt$ є розв'язком диференціального рівняння $xy' - y = x^2 \sin x^2$.

4. Показати, що для кожного $C \in R$ співвідношення $y = arctg(x+y) + C$ є інтегралом диференціального рівняння $(x+y)^2 y' = 1$.

5. Довести, що функція $y = \varphi(x)$, параметрично задана системою $x = te^t$, $y = e^{-t}$, є розв'язком рівняння $(1+xy)y' + y^2 = 0$.

6. Показати, що функція $y = x + C\sqrt{1+x^2}$ для кожного $C \in R$ є розв'язком рівняння $(xy+1)dx - (x^2+1)dy = 0$. Довести, що інших розв'язків, дане рівняння не має.

7. Довести, що всі розв'язки диференціального рівняння $y' - \dfrac{m}{x} y = 0$ визначаються формулою $y = C|x|^m$ $C \in R$.

8. Скільки розв'язків $y = \varphi(x)$ рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$ визначає співвідношення $y(x + \ln x) = 1 - y$?

9. Скільки розв'язків рівняння $(x-1)y' + y = 0$ визначає співвідношення $y(x-1) = C$ для кожного фіксованого $C \in R$? Знайти розв'язки даного рівняння, які задовольняють такі початкові умови:
1) $y(0) = 0$; 2) $y(0) = -1$; 3) $y(2) = 1$.
Знайти область визначення кожного з цих розв'язків.

10. За допомогою математичного пакета побудувати інтегральні криві таких рівнянь:
а) $y' = \dfrac{|xy|}{xy}$; б) $y' = \dfrac{x-y}{|x-y|}$;

в) $y' = -\dfrac{x+|x|}{y+|y|}$; г) $y' = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \neq x \\ 1, & y = x \end{cases}$.

Завдання для аудиторної самостійної роботи

1.Скласти ДР сім'ї логарифмічних спіралей $x^2 + y^2 = Ce^{arctg\,x/y}, C \in R$. (Відповідь: $xy' + y + 2x = 0$).

2. Довести, що функція $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ є розв'язком ДР $(1 + xy)y' + y^2 = 0$.

3. Тіло рухається прямолінійно із швидкістю пропорційною часу руху. Знайти рівняння руху тіла, якщо воно пройшло шлях 20м за 10с і 35м за 20с від початку відліку часу. Який шлях пройде тіло за 1хв. 40 с .
(Відповідь: $s = 0{,}15t^2 + 15$, 515м).

4. Скласти ДР однопараметричної сім'ї кривих $xtg(x + C) = y, C \in R$. (Відповідь: $xy' = y + x^2 + y^2$).

5. Довести, що функція $y - x + C_1 \ln y = C_2$ є інтегралом ДР $yy' - (y')^2 + (y')^3 = 0$.

6. При бродінні швидкість процесу розмноження активного ферменту пропорційна його кількості. Через 2 години після бродіння кількість ферменту складала *6г, а* через 6 годин - 24 г. Якою була початкова кількість ферменту?
(Відповідь: $x' = kx, x = 3e^{0,5t}$, х=3г)

7. Скласти ДР однопараметричної сім'ї кривих $xch(x + C) = y, C \in R$. (Відповідь: $xy'y + x\sqrt{(y^2 - x^2)}$).

8. Довести, що функція $s = t^2 \ln t + C_1 t^2 + C_2 t + C_3$ є розв'язком диференціального рівняння $ts'''(t) = 2$.

9. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(-1,4)$ і має ту властивість, що піднормаль її в будь-якій точці є стала, яка дорівнює 4.
(Відповідь: $yy' = 4, y^2 = 8(x + 3)$)

10. Показати, що для кожного $C \in R$ співвідношення $y = arctg(x + y) + C$ є інтегралом диференціального рівняння $(x + y)^2 y' = 1$.

11.Довести, що функція $y = \varphi(x)$, параметрично задана системою $x = te^t$, $y = e^{-t}$, є розв'язком рівняння $(1 + xy)y' + y^2 = 0$.

12.Скласти диференціальні криві сім'ї кривих:

а) $x^2 + y^2 - Cx = 0$; в) $y = \sin x + C\cos x$;

б) $x - y - Ce^{\frac{x}{y-x}} = 0$; г) $x + y + C(1 - xy) = 0$

13.Скласти диференціальне рівння сім'ї кіл із спільним центром $O(0;1)$.

14.Скласти диференціальне рівняня сім'ї парабол, які проходять через початок координат і для яких вісь абсцис є віссю симетрії.

15. Скласти диференціальне рівняння сім'ї еліпсів, що мають сталу велику вісь, яка дорівнює $2a$.

16. Рівняння силових ліній диполя (диполь – два заряди $+q$ і $-q$, розміщені один від одного на відстані $2a$), за законом Кулона, мають вигляд $\frac{x+a}{r_1}-\frac{x-a}{r_2}=C$, де $r_1^2=(x+a)^2+y^2$, $r_2^2=(x-a)^2+y^2$. Скласти диференціальне рівння силових ліній.

17. Знайти диференціальне рівння сім'ї кардіоїд, що проходять через полюс, мають в ньому точку звороту, а віссю симетрії кардіоїд є полярна вісь.

18. Знайти рівняння сім'ї циклоїд з однаковою висотою $H=2d$, основи яких лежать на осі абсцис.

Завдання для типового розрахунку №1

За допомогою математичного пакета MathCAD, довести, що $y(x)$ є розв'язком даного диференціального рівняння.

1) $y'=\frac{2x}{x^2+1}$; $\quad y=\ln(x^2+1)$.

2) $y'=\sin x\cos 3x$; $\quad y=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 4x$.

3) $y'=\sqrt{1-x^2}$; $\quad y=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)$.

4) $y'=x\cos x$; $\quad y=x\sin x+\cos x$.

5) $xy'=y(1+\ln y+\ln x)$; $\quad y=xe^x$.

6) $xy'-2y=2x^5$; $\quad y=x^2+x^5$.

7) $xydx+(x+1)dy=0$; $\quad y=(x+1)e^{-x}$.

8) $xdy=y\ln\frac{y}{x}dx$; $\quad y=xe^{x+1}$.

9) $xy'+y=y(\ln x-\ln y)$; $\quad y=xe^{\frac{1}{x}-2}$.

10) $xy'=2\left(y+\sqrt{xy}\right)$; $\quad y=x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$.

11) $y-xy'=x\sec\frac{y}{x}$; $\quad y=x\arcsin(1-\ln|x|)$.

12) $y'+y=2x+1$; $\quad y=2x-1+2e^{-x}$.

13) $y'-2xy=3x^2-2x^4$; $\quad y=e^{x^2}+x^3$.

14) $y'+ytgx=\sec x$; $\quad y=\sin x+\cos x$.

15) $(x^2+1)y'+4xy=3$; $\quad y=\frac{x(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$.

16) $y'-yctgx=\sin x$; $\quad y=(C+x)\sin x$.

17) $y'-\frac{3y}{x}=x$; $\quad y=x^3-x^2$.

18) $xy'+y=\ln x+1$; $\quad y=\ln x+\frac{1}{x}$.

19) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$; $\qquad y=\frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$.

20) $y'-2xy=xe^{-x^2}$; $\qquad y=e^{-x}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$.

21) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$; $\qquad y=(x+1)(1+x^2)$.

22) $y'+y=\cos x$; $\qquad y=e^{-x}+0{,}5(\cos x+\sin x)$.

23) $y'+y\cos x=\sin 2x$; $\qquad y=e^{-\sin x}+\sin x-1$.

24) $y'+tgx=x\cos^2 x$; $\qquad y=\frac{x}{2}\sin 2x=\cos^2 x$.

25) $y'=2y+e^x-x$; $\qquad y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}$.

26) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$; $\qquad y=(x+1)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$.

27) $y'-\frac{y}{\sin x}=tg\frac{x}{2}$; $\qquad y=(1+x)tg\frac{x}{2}$.

28) $y'(1+x^2-xy)=\sqrt{1+x^2}$; $\qquad y=\sqrt{x^2+1}(arctgx+C)$.

29) $x^2y^2y'+xy^3=1$; $\qquad y=\sqrt[3]{\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^3}}$.

30) $y'-y+y^2\cos x=0$; $\qquad y=\frac{2e^x}{e^x(\cos x+\sin x)+1}$.

Завдання для типового розрахунку №2

За допомогою одного з математичних пакетів побудувати множину графіків, які належать до загального розв'язку, і виділити графік частинного розв'язку диференціального рівняння.

	Диференціальне рівняння	Загальний розв'язок	Початкова умова
1	$y'+xy=x$	$y=Ce^x+x+1$	$y(0)=5$
2	$xdy-ydx=x^{2dx}$	$y=x^2-4x+C$	$y(0)=0$
3	$2x=2yy'=0$	$x^2+y^2=C^2$	$y(3)=4$
4	$\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$	$\arcsin x-\sqrt{1-y^2}=C$	$y(0)=0$
5	$y'=10^{x+y}$	$10^x+10^{-y}=C$	$y(0)=1$
6	$y'+ytgx=\frac{x}{y}$	$y=Cx\cos x$	$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$
7	$2x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0$	$(1+x^2)\sqrt{1+y^2}=C$	$y(0)=1$
8	$yy'\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}=1$	$\sqrt{1-y^2}=-\arcsin x+C$	$y(0)=0$
9	$y'+\sin\frac{x-y}{3}=\sin\frac{x+y}{3}$	$\ln\left\|tg\frac{y}{6}\right\|=6\sin\frac{x}{3}+C$	$y(0)=\pi$

10	$\sqrt{4-x^2}\,y' = xy^2 + x$	$y = -tg\left(\sqrt{4-x^2}+C\right)$	$y(2)=\frac{\pi}{4}$
11	$\sqrt{6+y^2}\,dx + 4\left(x^2y + ydy\right) = 0$	$x = -tg\left(2\sqrt{6+y^2}+C\right)$	$y(0)=\sqrt{3}$
12	$2y'\sin x + \sin x = 2y\cos x$	$y^2 = Ce^{-x}\cos^2 x$	$y(0)=1$
13	$\sin x\cos^2 y dx + \cos^2 x dy = 0$	$\sec x + tgy = C$	$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$
14	$y'\cos^3 y - \cos(2x+y) = \cos(2x-$	$0{,}5y + 0{,}25\sin 2y = C + \sin 2x$	$y(0)=0$
15	$y'ctgx + y = 2$	$y = C\cos x + 2$	$y(0)=1$
16	$xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2dy = 0}$	$\sqrt{1+x^2} + \ln\lvert y\rvert + \frac{y^2}{2} = C$	$y(0)=1$
17	$y' + xy = xy^3$	$\ln\left\lvert 1 - \frac{1}{y^2}\right\rvert = x^2 + C$	$y(0)=\sqrt{2}$
18	$xyy' = \frac{1+x^2}{1-y^2}$	$2y^2 - y^4 = 4\ln y - y^2 + C$	$y(1)=0$
19	$\frac{x}{y}dx = \sqrt{1+x^2}\ln ydy$	$4\sqrt{1+x^2} = 2y^2\ln y - y^2 + C$	$y(0)=1$
20	$xy' - y = xtg\frac{y}{x}$	$\sin\frac{y}{x} = Cx$	$y(1)=\frac{\pi}{2}$
21	$xdx = \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx$	$Cx^2 = y + \sqrt{x^2+y^2}$	$y(1)=0$
22	$xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$	$ctg\left(\frac{1}{2\ln\frac{y}{x}}\right) = \ln Cx$	$y(1)=e$
23	$xy' + y = y(\ln x - \ln y)$	$y = xe^{\frac{C}{x^{-2}}}$	$y(1)=1$
24	$xy' = 2\left(y + \sqrt{xy}\right)$	$y = x\left(\sqrt{Cx}-2\right)^2$	$y(1)=1$
25	$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$	$y - 2x = Cx^2(y+x)$	$y(2)=2$
26	$\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2dy = 0$	$Cx^2 = y + \sqrt{x^2+y^2}$	$y(1)=3$
27	$y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$	$y = Ce^{x^2} + x^3$	$y(0)=2$
28	$ye^y dx = \left(y^3 = 2xe^y\right)dy$	$x = y^2\left(C - e^{-y}\right)$	$y(0)=-1$
29	$y' - yctgx = \sin x$	$y = (C+x)\sin x$	$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$
30	$y' - \frac{3y}{x} = x$	$y = Cx^3 - x^2$	$y(2)=4$

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{1}$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Якщо $g(C_0)=0$, то функція $y=C_0$ є розв'язком рівняння (1). Розв'язки рівняння (1), вздовж яких $g(y)\neq 0$, задовольняють співвідношення

$$\int\frac{dy}{g(y)} - \int f(x)dx = C\,,\ C = const\,.$$

Теорема. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *визначені і неперервно диференційовані в околах точок* $x=x_0$, $y=y_0$ *відповідно, причому* $g(y_0)\neq 0$. *Тоді розв'язок* $y=\varphi(x)$ *рівняння* (1) з *початковою умовою* $\varphi(x_0)=y_0$ *існує в деякому околі точки* $x=x_0$, *єдиний і задовольняє співвідношення*

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)}\frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx\,.$$

Рівняння вигляду $y'=f(ax+by+c)$ заміною зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними $z=ax+by+c$.

З диференціальним рівнянням виду $y'=f(y)$ пов'язане поняття векторного поля на прямій. Кожній точці y з області визначення функції $f(y)$ поставимо у відповідність вектор, довжина якого дорівнює $|f(y)|$, а напрям збігається з додатним напрямом осі Oy, якщо $f(y)>0$, і протилежний йому якщо $f(y)<0$. Тоді множина векторів утворить векторне поле. Точки, в яких напрям поля не визначений, тобто в яких $f(y)=0$, називаються *особливими точками* векторного поля або *положеннями рівноваги.* Побудувавши векторне поле, неважко схематично зобразити інтегральні криві даного рівняння.

Наведемо приклад застосування MathCAD для побудови векторного поля диференціального рівння $y'=\cos(x-y-1)$. Мовою пакета складається програма.

$$dx := 0.4$$

$$v(x,y) := \begin{pmatrix} dx \\ \cos(x-y-1) \end{pmatrix}$$

$$N := 20$$

$$i := 0..N-1 \qquad j := 0..N-1$$

$$x_{min} := -2 \qquad x_{max} := 2$$

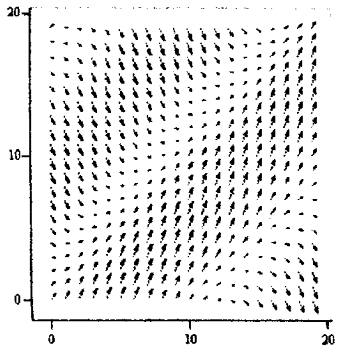
$$y_{min} := -2 \qquad y_{max} := 2$$

$$x_i := x_{min} + \frac{i}{N-1}\cdot(x_{max} - x_{min})$$

$$y_j := y_{min} + \frac{j}{N-1}\cdot(y_{max} - y_{min})$$

$$V_{i,j} := v(x_i, y_j)$$

$$vx_{i,j} := (V_{i,j})_0 \qquad vy_{i,j} := (V_{i,j})_1$$



(vx, vy)

Рисунок 1

Як видно з рисунка 1, розв'язки $y = x - 1 + 2k\pi,\ k \in Z$ будуть особливими розв'язками рівняння, оскільки напрям поля в цих точках не визначений.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Розв'язати рівняння $x(1+y^2) + y(1+x^2)y' = 0$.

2. Розв'язати рівняння $y' = xy^2 + 2xy$.

3. Розв'язати рівняння $2chydy-\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}dy\right)=0$.

4. Знайти розв'язок рівняння

$$e^x dx-\left(1+e^x\right)ydy=0,$$

який задовольняє умову $y(0)=1$.

5. Знайти розв'язок $y=\varphi(x)$ рівняння $x^2y-1=\cos 2y$, який задовольняє умову $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\frac{5\pi}{4}$.

6. Розв'язати рівняння

$$\left(1+e^y\right)dx-e^{2y}\sin^3 xdy=0.$$

Знайти розв'язок, який задовольняє умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

7. Розв'язати рівняння $y'+y=2x+1$.

8. Розв'язати рівняння $y'=\cos(x-y-1)$.

9. Розв'язати рівняння $y'=k\frac{y}{x}$ і побудувати інтегральні криві цього рівняння.

Завдання для аудиторної самостійної роботи

1. $e^{x+3y}dy=xdx$. (Відповідь: $e^{3y}=3\left(C-xe^{-x}-e^{-x}\right)$.)

2. $y'\sin x=y\ln y$. (Відповідь: $\ln y=Ctg(x/2)$.)

3. $y'=(2x-1)ctgy$. (Відповідь: $\ln|\cos y|=x-x^2+C$.)

4. $\sec^2 xtgydy+\sec^2 ytgxdy=0$. (Відповідь: $C=tgytgx$.)

5. $\left(1+e^x\right)ydy+e^ydx=0$. (Відповідь: $-e^{-y}(y+1)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C$.)

6. $\left(y^2+3\right)dx-\frac{e^x}{x}ydy=0$. (Відповідь: $\ln\left(y^2+3\right)=2\left(C-xe^{-x}-e^{-x}\right)$.)

7. $\sin y\cos xdy=\cos y\sin xdx$. (Відповідь: $C=\cos x/\cos y$.)

Однорідні рівняння

Функція $F(x,y)$ називається *однорідною степеня* k, якщо для всіх $\lambda > 0$ виконується рівність $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x,y)$. Прикладом однорідної функції може бути будь-яка форма (однорідний многочлен) степеня k. Функції

$$\frac{x-y}{x+y}, \ \frac{x^2+xy}{x-y}, \ x^2+y^2-xy, \ x^{k-1}y+y^k$$

наприклад, є однорідними відповідно степеня 0, 1, 2, k.

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

називається *однорідним*, якщо $f(x,y)$ — однорідна функція степеня нуль.

Диференціальне рівняння першого порядку в симетричній формі

$$A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$$

є однорідним, якщо $A(x,y)$ і $B(x,y)$ — однорідні функції одного степеня.

Однорідне рівняння можна розглядати в будь-якій однорідній (інваріантній відносно розтягання або стискання) області, наприклад, у куті з вершиною O тощо.

Заміна $y = zx$ приводить однорідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідне рівняння можна також звести до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою переходу до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

можна звести до однорідного за допомогою лінійної заміни $x = x_0 + t$, $y = y_0 + z$, де x_0, y_0 — координати точки перетину прямих $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ і $a_2x+b_2y+c_2 = 0$. Якщо ці прямі не перетинаються, то $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ і рівняння можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $a_1x+b_1y+c_1 = z$

Функція $g(x,y)$ називається *квазіоднорідною* (з вагами α і β) *степеня* k, якщо при деяких α і β виконується рівність $g(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^k g(x,y)$ якщо $\lambda > 0$.

Диференціальне рівняння (1) називається *квазіоднорідним* (з вагами α і β), якщо функція $f(x,y)$ є квазіоднорідною (з вагами α і β) степеня $\beta - \alpha$, тобто $f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^{\beta-\alpha} f(x,y)$.

Заміною $y = z^{\beta/\alpha}$ квазіоднорідне рівняння можна звести до однорідного. На практиці, проте, зручніше відразу користуватися заміною $y = ux^{\beta/\alpha}$, яка зводить квазіоднорідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}.$$

2. Розв'язати рівняння

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$$

3. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y = \sqrt{x^2 - y^2}}{x}.$$

4. Крива проходить через точку (1; 1). Відстань будь-якої дотичної до цієї кривої від початку координат дорівнює абсцисі точки дотику. Скласти рівняння кривої.

5. Розв'язати рівняння

$$y' = 2\left(\frac{y+1}{x+y-2}\right)^2.$$

6. Проінтегрувати рівняння

$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

7. Довести, що інтегральні криві рівняння $x^2 y' = \frac{y^2}{2} - \sqrt{5x^4 + y^4 + x^2 y^2}$, перетинають пряму $y = 2x$ під кутом 45°.

8.Визначити криву, яка проходить через точку А(0,1) і для якої трикутник, утворений віссю 0у, дотичною до кривої, та радіусом-вектором точки дотику, є рівнобедреним (причому основою його є відрізок дотичної від точки дотику до осі 0у).

9.Дві рідини *X, Y* піддають дистилюванню. Відомо, що в будь який момент цього процесу відношення кількостей рідин, які перетворюються в пару, пропорціональне відношенню кількостей , які знаходяться ще в рідиному стані. Визначити залежність між *X, Y*.

10. Визначити криву, знаючи, що піднормаль будь-якої точки кривої – середнє арифмитичне між коордтнатами точки.

Завдання для аудиторної самостійної роботи

1. $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$. (Відповідь: $\sin\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{|x|}$.)

2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$. (Відповідь: $(y^2 - x^2) Cx^2 y^3$.)

3. $(x + 2y)dx - xdy = 0$. (Відповідь: $y = Cx^2 - x$.)

4. $(x-y)dx-(x+y)dy=0$. (Відповідь: $arctg\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{y^2+x^2}{x^2}=\ln\frac{C}{x}$.)

5. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$. (Відповідь: $y/(x-y)=Cx$.)

6. $y^2+x^2y'=xyy'$. (Відповідь: $e^{y/x}=Cy$.)

7. $xy'-y=xtg(y/x)$. (Відповідь: $\sin(y/x)=Cx$.)

8. $xy'=y-xe^{y/x}$. (Відповідь: $e^{-y/x}=\ln Cx$.)

9. $xy'-y=(x+y)\ln((x+y)/x)$. (Відповідь: $\ln|1+y/x|=Cx$.)

10. $xy'=y\cos\ln(y/x)$. (Відповідь: $ctg\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)=\ln Cx$.)

Завдання для типового розрахунку №3.

1) Визначити типи диференціальних рівнянь.

2) За допомогою одного з математичних пакетів побудувати інтегральні криві диференціальних рівнянь.

3) Покласти С=0,5;1;2.

4) Вибрати зручний відрізок і побудувати дотичні до графіків у трьох точках вздовж прямої, яка проходить через початок координат.

5) Проаналізувати розміщення дотичних, зробити висновок.

1) $(x^2+y^2)dx-yxdy=0$,

2) $yy'=2y-x$,

3) $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$,

4) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$,

5) $xdy=\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx$,

6) $xy'=y\ln\frac{y}{x}$,

7) $(y^2-3x^2)dy-2xydx=0$,

8) $(x+2y)dx-xdy=0$,

9) $(x-y)dx-(x+y)dy=0$,

10) $(y^2 2xy)dx-x^2dy=0$,

11) $y^2+x^2y'dx=xyy'$,

12) $xy'-y=xtg\left(\frac{y}{x}\right)$,

13) $xy'=y-xe^{y/x}$,

14) $xy'=y\cos\ln\left(\frac{y}{x}\right)$,

15) $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$,

16) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$,

17) $y'=\frac{y}{x}-1$,

18) $y'x+x+y=0$,

19) $ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$,

20) $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$,

21) $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$,

22) $(x^2-2xy)y'=xy-y^2$,

23) $xy'+y\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)=0$,

24) $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$,

25) $(y^2-2xy)dx-x^2dy=0$,

26) $(x+2y)dx+xdy=0$,

27) $y'+\frac{x^2+y^2}{xy}=0$,

28) $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y$,

29) $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}+1$,

30) $xy'+x\cos\frac{y}{x}-y+x=0$.

Лінійні рівняння першого порядку

Рівняння

$$y'+a(x)y=b(x) \tag{1}$$

називається *лінійним*. Для розв'язування цього рівняння використовують певні методи. Розглянемо деякі з них.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Нехай маємо однорідне рівняння

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=0.$$

Розв'язки цього рівняння мають вигляд $y=Ce^{\int a(x)dx}$. Розв'язки рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$y=C(x)e^{-\int a(x)dx}. \tag{2}$$

Підставивши (2) в (1), для визначення $C(x)$ дістанемо рівняння $C'=b(x)e^{\int a(x)dx}$. Звідси

$$C(x)=C+\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx, \tag{3}$$

де C — довільна стала. Підставивши $C(x)$ з (3) в (2), знаходимо всі розв'язки рівняння (1):

$$y=e^{-\int a(x)dx}\left(C+\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx\right). \tag{4}$$

Будь-який розв'язок $y(x)$ лінійного рівняння (1), який проходить при $x=x_0$ через точку y_0, можна записати у вигляді

$$y=e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}\quad y_0+\int_{x_0}^{x} b(\tau)e^{\int_{x_0}^{\tau} a(t)dt}d\tau.$$

Метод Бернуллі. Розв'язок рівняння (1); шукаємо у вигляді $y=u(x)v(x)$ Маємо $u'v+uv'+a(x)uv=b(x)$, або $uv'+v(u'+a(x)u)=b(x)$. Функцію $u(x)$ виберемо з умови $u'+a(x)u=0$. Звідси, наприклад, $u(x)=e^{-\int a(x)dx}$. Тоді для функції $v(x)$ маємо рівняння

$$e^{-\int a(x)dx}\frac{dv}{dx}=b(x),$$

звідки $v(x)=C+\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$, де c — довільна стала. Перемноживши $u(x)$ і $v(x)$, дістанемо (4).

Метод інтегрувального множника. Помножимо обидві частини рівняння (1) на $e^{\int a(x)dx}$ і запишемо його у вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int a(x)dx}\right)=b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

Інтегруючи, дістаємо

$$ye^{-\int a(x)dx}=C+\int b(x)e^{\int a(x)dx},$$

$$y=e^{\int a(x)dx}\left(C+\int b(x)e^{\int a(x)dx}\right).$$

Деякі рівняння зводяться до лінійних за допомогою певних замін. Так, рівняння виду

$$f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)a(x)=b(x),$$

зводиться до лінійного за допомогою заміни $z=f(x)$. Зокрема, рівняння Бернуллі

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)y^n \quad n\neq 0,\ 1,$$

яке можна записати у вигляді

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+a(x)y^{1-n}=b(x),\ y\neq 0,$$

заміною $z=y^{1-n}$ зводиться до лінійного рівняння. Проте на практиці розв'язки рівняння Бернуллі зручніше відразу шукати за методом Бернуллі у вигляді $y=uv$.

Рівняння Ріккаті

$$\frac{dy}{dx}+a(x)y+b(x)y^2=C(x),$$

у загальному випадку не інтегрується в квадратурах. Проте якщо відомий частинний розв'язок $y=y_1(x)$ цього рівняння, то заміною $y=y_1+z$ зводять рівняння Ріккаті до рівняння Бернуллі відносно функції z.

Деякі рівняння стають лінійними, якщо x вважати функцією, а y — аргументом. Так, нелінійне відносно y рівняння

$$A(y)+(B(y)x-C(y))\frac{dy}{dx}=0,$$

розв'язується аналогічно рівнянню (1), якщо записати його у вигляді

$$\frac{dx}{dy}+\varphi(y)x=f(y),$$

де $\varphi(y)=\dfrac{B(y)}{A(y)}$, $f(y)=\dfrac{C(y)}{A(y)}$.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx}-2xy=3x^2-2x^4.$$

2. Розв'язати рівняння $xy'-2y=2x^4$.

3. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=e^{-\sin x}.$$

4. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx}+ytgx=\frac{1}{\cos x}.$$

5. Крива y = y (x) проходить через початок координат. Середина відрізка її нормалі, який міститься між будь-якою точкою кривої і віссю абсцис, лежить на параболі $y^2=ax$. Скласти рівняння цієї кривої.

6. Знайти розв'язок рівняння $y'\sin x-\cos x=-\sin^2 x/x^2$ який прямує до нуля якщо $x\to\infty$.

Завдання для аудиторної самостійної роботи

1. $(x^2+1)y'+4xy=3$, $y(0)=0$. (Відповідь: $y=(x^3+3x)/(x^2+1)^2$).
2. $y'+ytgx=\sec x$, $y(0)=0$. (Відповідь: $y=\sin x$).
3. $(1-x)(y'+y)=e^{-x}$, $y(0)=0$. (Відповідь: $y=e^{-x}\ln\dfrac{1}{1-x}$).
4. $xy'-2y=2x^4$, $y(1)=0$. (Відповідь: $y=x^4-x^2$).
5. $y'=2x(x^2+y)$, $y(0)=0$. (Відповідь: $y=x^2+1-e^{x^2}$).
6. $y'-y=e^x$, $y(0)=1$. (Відповідь: $y=(x+1)e^x$).
7. $xy'+y+xe^{-x^2}=0$, $y(1)=\dfrac{1}{2e}$. (Відповідь: $y=\dfrac{e^{-x^2}}{2x}$).

8. $\cos y dx = (x + 2\cos y)\sin y dy$, $y(0) = \pi/4$. (Відповідь: $x = \left(\sin^2 y - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\cos y}$).

9. $x^2 y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$. (Відповідь: $y = -(\ln x)/x$).

10. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2$, $y(2) = 1$. (Відповідь: $x = y^3 + y^2$).

11. $y' - ytgx = -y^2 \cos x$. (Відповідь: $y(x + C) = \sec x$).

12. $\cos x \frac{dy}{dx} - y\sin x = y^4$. (Відповідь: $y^3 = C\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x$).

13. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. (Відповідь: $\sqrt{y} = \frac{C}{x} + \frac{\ln(\cos x)}{x} + tgx$).

14. $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 1$. (Відповідь: $y(Cx + \ln x + 1) = 1$).

15. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$. (Відповідь: $y = Ce^{-\sin x} + xe^{-\sin x}$).

16. $y' + ytgx = x\cos^2 x$, $y(0) = 1$. (Відповідь: $y = C\cos x + \cos x(x\sin x + \cos x)$).

17. $x\ln x \frac{dy}{dx} + y = 2\ln x$, $y(1) = 0$. (Відповідь: $y = \ln x - \frac{1}{\ln x}$).

Завдання для типового розрахунку №4

1) Визначити тип диференціальних рівнянь.
2) За допомогою одного з математичних пакетів побудувати сімейство інтегральних кривих.
3) Покласти С=0,5;1;2.
4) Побудувати прямі $x = a_1$, $x = a_2$, $x = a_3$ (a_1, a_2, a_3 - будь-які) і зробити висновок в якому відношенні сімейство інтегральних кривих ділить відрізок ординати між будь якими кривими цього сімйства.
5) а) Вибрати зручний відрізок і побудувати дотичні до графіків у трьох точках вздовж прямої, паралельної осі Oy.
б) Проаналізувати розміщення дотичних.
в) Змінити відрізок і порівняти розміщення дотичних, зробити висновок.

1) $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$,
2) $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$,
3) $y' + ytgx = \sec x$,
4) $ye^y d = (y^3 + 2xe^y)dy$,
5) $(1-x)(y' - y)^2 y^2 \frac{y}{x}$,
6) $\cos y dx + (x + 2\cos y)\sin y dy = 0$,
7) $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$,
8) $y' - yctgx = \sin x$,
9) $ydx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0$,
10) $y' - \frac{3y}{x} = x$,
11) $xy' + y = \ln x = 1$,
12) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$,
13) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$,
14) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$,
15) $y' + y = \cos x$,
16) $y' + y = e^x$,
17) $y' + v\cos x = \sin 2x$,
18) $y' + tgx = \cos^2 x$,
19) $y' + tgx = x\cos^2 x$,
20) $y' + 2y + e^x = x$,

21) $dy=\left(x^2+2x-2y\right)dx$,

22) $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$,

23) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$,

24) $y'\left(1+x^2\right)-xy=\sqrt{1+x^2}$,

25) $y'-y\sin x=\sin x\cos x$

26) $ydx-\left(x-y^2\sin y\right)dy=0$,

27) $y'+2xy=)x^2e^{-x^2}$,

28) $y'+\dfrac{y}{x}=x^2$,

29) $y'+\dfrac{1}{x+y^2}=0$,

30) $dy=\left(x^2+2x-2y\right)dx$.

Завдання для типового розрахунку №5

Розглядається процес встановлюючого змінного струму в колі з самоіндукцією i - сила струму, V - напруга, R - опір кола, L - коефіцієнт самоіндукції. Процес описується відповідним диференціальним рівнянням:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i-\frac{V}{L}=0$$

1) Визначити силу струму в будь-який момент часу, $i(0)=i_0$.

2) Визначити силу струму, коли напруга $V=A\sin\omega t$

3)За допомогою математичного пакета Mathcad побудувати графіки напруги $V=A\sin\omega t$ і графік сили струму із даною напругою. Порівняти частоти, амплітуди і фази.

4) Чи залежить сила струму із напругою $V=A\sin\omega t$ від початкового значення сили струму i_0 через короткий проміжок часу?

№	R	L	V	A	ω
1	4	2	100	1	2
2	6	3	200	2	4
3	10	5	100	3	6
4	5	5	220	4	5
5	2	2	120	1	2
6	4	4	150	2	4
7	10	2	100	3	6
8	6	2	200	4	5
9	5	5	220	1	3
10	3	3	120	2	4
11	4	2	150	3	2
12	10	5	120	4	3
13	10	1	120	4	2
14	6	2	200	1	4
15	5	5	100	2	6

№	R	L	V	A	ω
16	4	4	120	4	5
17	3	3	150	1	2
18	10	2	100	2	4
19	2	2	200	3	6
20	5	5	220	4	5
21	10	5	120	1	3
22	6	2	100	2	4
23	4	2	200	3	2
24	5	5	150	4	3
25	3	3	100	1	2
26	6	2	220	3	6
27	4	4	120	2	4
28	10	5	150	4	3
29	5	5	200	5	2
30	2	2	100	1	1

1.Рівняння, які допускають зниження порядку

Загальні поняття й означення. Рівняння

$$F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0 \tag{1}$$

де x — незалежна змінна, y — шукана функція, а функція F визначена й неперервна в деякій області $G\subseteq R^{n+2}$, $n\geq 1$, та залежна від $y(n)$, називається *звичайним диференціальним рівнянням* n *-го порядку.*

Диференціальне рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right) \tag{2}$$

де функція f також неперервна в деякій області $D\subseteq R^{n+1}$ зміни своїх аргументів.

Розв'язком рівняння (2) на інтервалі $I=(a,b)$ називається функція $y(x)$, яка задовольняє умови:

1) $y(x)$ неперервно диференційовна n разів на I;
2) $\left(x,y(x),y'(x),...,y^{(n-1)}(x)\right)\in D$, $\forall x\in I$;
3) $y(x)$ перетворює рівняння (2) в тотожність, тобто

$$y^{(n)}(x)=f\left(x,y(x),y'(x),...,y^{(n-1)}(x)\right),\ \forall x\in I.$$

Аналогічне означення дається для розвязку рівняння (1).

Задачею Коші або початковою задачею для рівняння (2) називається задача знаходження розв'язку $y(x)$ рівняння (2), який задовольняє початкові умови:

$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0',...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$

де $x_0\in I$, y_0, $y_0',...,y_0^{(n-1)}$ - задані числа.

2. Деякі види рівнянь вищих порядків, інтегровних у квадратурах.

Рівняння, які містять лише похідну n-го порядку шуканої функції й незалежну змінну

Розглянемо рівняння

$$F\left(x,y^{(n)}\right)=0. \tag{3}$$

У багатьох випадках рівняння (3) можна параметризувати: $x=\varphi(t)$, $y^{(n)}=\psi(t)$, де $\varphi(t)$ - диференційовна функція. У цьому випадку можна знайти загальний інтеграл в параметричній формі. Маємо $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$, $dy^{(n-1)}=\psi(t)\varphi'(t)dt$, звідки $y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C_1=\psi_1(t,C_1)$.

Аналогічно знаходимо $y^{(n-2)}$ тощо. Для y дістаємо вираз виду $y=\psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n)$. Тому система $x=\varphi(t)$, $y=\psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n)$ є загальним інтегралом рівняння (3) у параметричній формі. Окремим випадком (3) є рівняння

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (4)$$

$$y = \iint \ldots \int f(x) dx dx \ldots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n .$$

Загальний розв'язок рівняння (4) у формі Коші має вигляд

$$y = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} f(x) dx dx \ldots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \ldots + y_0'(x - x_0) + y_0 ,$$

де $x_0 \in I$; y_0, y_0',...., $y_0^{(n-1)}$ - будь-які числа.

3. Деякі типи рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку

а) Рівняння, які не містять шуканої функції і кількох послідовних похідних

Розглянемо рівняння виду

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 , \ 1 \le k < n . \qquad (5)$$

За допомогою заміни $y^{(k)} = u$, де u — нова невідома функція, рівняння (5) можна звести до рівняння $(n-k)$-го порядку:

$$F\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}\right) = 0 . \qquad (6)$$

Якщо рівняння (6) інтегрується в квадратурах, то, повертаючись до змінної y , дістаємо проміжний інтеграл рівняння:

$$y^{(k)} = \varphi\left(x, C_1, \ldots, C_{n-k}\right), \text{ або } \Phi\left(x, y^{(k)}, C_1, \ldots, C_{n-k}\right) = 0 . \qquad (7)$$

Рівняння (7) є рівняннями виду (3).

б) Рівняння, які явно не містять незалежної змінної

Розглянемо рівняння виду

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 . \qquad (8)$$

За допомогою заміни

$$y' = p , \qquad (9)$$

де $p = p(y)$ — нова шукана функція, y — нова незалежна змінна, порядок рівняння (8) можна знизити на одиницю, оскільки

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} * \frac{dy}{dx} = pp' ,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} * \frac{dy}{dx} = \left(p''p + p'^2\right)p$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = g\left(p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right)$$

(10)

$$p^{(i)} = \frac{d^i p}{dy^i}, \quad i = 1,2,\ldots,n-1.$$

Підставивши (9), (10) в (8), дістанемо рівняння $(n-1)$-го порядку відносно нової шуканої функції p:

$$F_1\left(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right) = 0. \tag{11}$$

Якщо відомий загальний інтеграл рівняння (11):

$$\Phi_1\left(y, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right) = 0,$$

то співвідношення

$$\Phi_1\left(y, y', C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}\right) = 0 \tag{12}$$

є проміжним інтегралом $(n-1)$-го порядку рівняння (8) – диференціального рівняння першого порядку інтегрованого типу. Загальний інтеграл рівняння (12), який має вигляд $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - довільні сталі, є загальним інтегралом рівняння (8).

При виконанні заміни (9) можлива втрата розв'язків вигляду $y = const$. Безпосередньою підстановкою необхідно перевірити, чи справді рівняння (1) має такі розв'язки.

Завдання для аудиторної самостійної роботи

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, що допускає зниження порядку.

1) $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2$. (Відповідь: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$.)
2) $2xy'y'' = y'^2 - 1$. (Відповідь: $9C_2(y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3, y = \pm x + C$.)
3) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$. (Відповідь: $y = C_1 \ln x + 1/x + C_2$.)
4) $y'' + y' tgx = \sin 2x$. (Відповідь: $y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2}\sin 2x + C_2$.)
5) $y'' x \ln x = y'$. (Відповідь: $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$.)

Обчислити задачу Коші для диференціального рівняння, що допускає зниження порядку.

1) $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Відповідь: $y = -\ln|1 - x|, y = 0$.)
2) $y'^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Відповідь: $y = (1 \pm 3x/2)^{2/3}, y = 1$.)
3) $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Відповідь: $y = \sqrt{2x + 1}, y = 1$.)
4) $y'' + 2yy'^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$. (Відповідь: $x = y^3/3 - y - 2/3, y = 2$.)
5) $y'' tgy = 2y'^2$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$. (Відповідь: $y = arctg(2 - 2x), y = \pi/2$.)

Завдання для типового розрахунку №6

Зінтегрувати диференціальні рівняння і зробити перевірку одержаного результату, скориставшись одним з математичних пакетів.

1) а) $xy''=y'$, б) $1+(y')^2=2yy''$;

2) а) $y''x\ln x=y'$, б) $yy''+(y')^2=0$;

3) а) $xy''+y'=0$, б) $yy''+(y')^2=1$;

4) а) $(x-3)y''+y'=0$, б) $yy''=(y')^2$;

5) а) $(x-3)y''+y'=0$, б) $2yy''-3(y')^2 4y^2$;

6) а) $(1-x^2)y''-xy'=2$, б) $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)(y')^3=0$;

7) а) $y''=1+\dfrac{x(y'-x)}{1-x^2}$, б) $\cos yy''+\sin y(y')^2=y'$;

8) а) $x^2y''+xy'=1$, б) $yy''-(y')^2=y^2y'$;

9) а) $y''(e^x-1)+y'=0$, б) $yy''-yy'\ln y=2e^{-y}$;

10) а) $y''+\dfrac{2x}{1+x^2}y'=2x$, б) $y''+(y')^2=2e^{-y}$;

11) а) $(1+x^2)y''+2xy'=12x^3$, б) $yy''-(y')^2+(y')^3=0$;

12) а) $y''x\ln x=2y'$, б) $(y'')^2+(y')^2=a^2$;

13) а) $xy''+y'=\ln x$, б) $y'y''-\sqrt{1+(y')^2}=0$;

14) а) $xy''-y'=x^2e^x$, б) $y''+(y')^2+1=0$;

15) а) $y''+y'tgx=\sin 2x$, б) $yy''+(y')^2=y^2\ln y$;

16) а) $y''=y'+x$, б) $2yy'+(y')^2+(y')^4=0$;

17) а) $y''=\dfrac{x'}{x}+x$, б) $2yy'=(y')^2$;

18) а) $y''-2ctgxy'=\sin^3 x$, б) $yy''-(y')^2=y'$;

19) а) $y''+\dfrac{1}{x}y'=x^2$, б) $y'(1+(y')^2)=y''$;

20) а) $xy''+2y'=x^3$, б) $y''=\dfrac{y'}{\sqrt{y+1}}$;

21) а) $y''-2y'tgx=\sin x$, б) $2yy''=y^2+(y')^2$;

22) а) $(1+x^2)y''+(y')^2-1=0$, б) $y^4-y^3y''=1$;

23) а) $y''=\dfrac{y'}{x}+\dfrac{x^2}{y'}$, б) $y^3y''=-1$;

24) а) $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$, б) $y''+2y(y')^3=0$;

25) а) $y''tgx=y'+1$, б) $2yy''-(y')^2=1$;

26) а) $xy''=(1+2x^2)y'$, б) $(y-1)^2y''-2(y')^2=0$;

27) а) $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x(x-1)$, б) $(y'+2y)y''=(y')^2$;

28) а) $y''=-\dfrac{x}{y'}$, б) $y''=\dfrac{y'}{\sqrt{y}}$;

29) а) $y''+y'=chx$, б) $(2y+3)y''-2(y')^2=0$.

Лінійні рівняння вищого порядку

Основні поняття. Лінійне однорідне рівняння має вигляд

$$L(y) = y^{(n)} + h_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + h_{n-1}(x)y' + h_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

де функції $h_i(x)$ неперервні на $I = (a,b)$, $i = 1,2......n$.

Основні властивості розв'язків рівняння (1)

1. *Якщо* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *- розв'язки рівняння* (1), *то й будь-яка лінійна комбінація їх,* $\sum_{i=1}^{m} C_i y_i$ де $C_i = const$, $i = 1,2......n$, *є розв'язком рівняння* (1).

2. *Якщо лінійне однорідне рівняння* (1) *з дійсними коефіцієнтами має комплексний розв'язок* $y = u + iv$, *то функції* $u = \operatorname{Re} y$, $v = \operatorname{Im} y$ *кожна окремо також є розв'язками рівняння* (1).

Функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ називаються *лінійно залежними на множині* I,
якщо існують сталі $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ такі, що

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots. + \alpha_m\varphi_m(x) = 0, \; x \in I \qquad (2)$$

причому $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 > 0$.

Якщо тотожність (2) виконується лише для $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$, то функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ називаються лінійно незалежними на I.

Будь-яка система з n лінійно незалежних розв'язків $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ лінійного однорідного рівняння (1) називається *фундаментальною системою розв'язків рівняння* (1).

Фундаментальна система розв'язків $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називається нормальною (для $x = x_0$), якщо

$$\begin{array}{l}
y_1(x_0) = 1, \; y_1'(x_0) = 0, \ldots, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
y_2(x_0) = 0, \; y_2'(x_0) = 1, \ldots, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n(x_0) = 0, \; y_n'(x_0) = 0, \ldots, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1,
\end{array}$$

де $x_0 \in I$. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (1) має вигляд $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$, де $C_1, C_2, \ldots, C_n$—довільні сталі, а $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - фундаментальна система розв'язків рівняння (1).

Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - нормальна для $x = x_0$ фундаментальна система розв'язків рівняння (1), то розв'язок задачі Коші для рівняння (1) з початковими умовами $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ має вигляд

$$y=y_0y_1(x)+y_0'y_2(x)+\ldots+y_0^{(n-1)}y_n(x)$$

Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним однорідним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду

$$L(y)=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{(n-1)}y'+a_ny=0 \qquad (1)$$

де $a_j=const$, $j=1,2,\ldots,n$. Многочлен $D(\lambda)$ степеня n виду

$$D(\lambda)=\lambda^{(n)}+a_1\lambda^{(n-1)}+\ldots+a_{(n-1)}\lambda+a_n \qquad (2)$$

називається *характеристичним многочленом* лінійного диференціального оператора зі сталими коефіцієнтами $L(y)$. Рівняння

$$D(\lambda)=0 \qquad (3)$$

називається *характеристичним рівнянням оператора* $L(y)$.

Якщо $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l$ - корені рівняння (3), які мають кратності $m_1,m_2,\ldots,m_l$ $\sum\limits_{j=1}^{l}m_j=n$, відповідно, то функції

$$e^{\lambda_1x}, xe^{\lambda_1x},\ldots,x^{m_1-1}e^{\lambda_1x}, e^{\lambda_2x}, xe^{\lambda_2x},\ldots,x^{m_2-1}e^{\lambda_2x},\ldots,e^{\lambda lx}, xe^{\lambda lx},\ldots,x^{ml-1}e^{\lambda lx} \qquad (4)$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (1).

Якщо в рівнянні (1) коефіцієнти a_j, $j=1,2,\ldots,n$ — дійсні числа, а характеристичне рівняння (3) має дійсні корені

k_1 - кратності m_1, k_2 — кратності m_2, k_r - кратності m_r,

а також комплексні корені, які входять комплексно спряженими парами з однаковою кратністю:

$\alpha_1\pm i\beta_1$ - кратності μ_1, $\alpha_2\pm i\beta_2$ - кратності $\mu_2,\ldots,$ $\alpha_n\pm i\beta_n$ - кратності μ_n,

$\sum\limits_{j=1}^{r}m_j+2\sum\limits_{l=1}^{s}\mu_l=n$

то фундаментальну систему розв'язків рівняння (1) можна вибрати в дійсній формі

$$\begin{gathered}
e^{k_1x},\ xe^{k_1x},\ldots,\ x^{m_1-1}e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ xe^{k_2x},\ldots,x^{m_2-1}e^{k_2x},\ldots,\ e^{k_rx},\ xe^{k_rx},\ldots,x^{m_r-1}e^{k_rx},\\
e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x, xe^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,\ldots,x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x,\\
e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x, xe^{\alpha_1x}\sin\beta_1x,\ldots,x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x, \qquad (6)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e^{\alpha_sx}\cos\beta_sx, xe^{\alpha_sx}\cos\beta_sx,\ldots,x^{\mu_s-1}e^{\alpha_sx}\cos\beta_sx\\
e^{\alpha_sx}\sin\beta_sx, xe^{\alpha_sx}\sin\beta_sx,\ldots,x^{\mu_s-1}e^{\alpha_sx}\sin\beta_sx.
\end{gathered}$$

Отже, лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами завжди можна проінтегрувати в елементарних функціях, причому інтегрування зводиться до алгебраїчних операцій.

Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням, n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (1)$$

де $f(x)$ - неперервна на $I = (a;b)$ функція, $a_j = const$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Оскільки фундаментальну систему розв'язків рівняння завжди можна побудувати, задача інтегрування рівняння (1) зводиться до задачі побудови якого-небудь частинного розв'язку рівняння (1). Частинний розв'язок рівняння (1) завжди можна знайти, застосовуючи *метод варіації довільних сталих* (Лагранжа) або *метод Коші.*

Якщо права частина $f(x)$ в (1) має спеціальний вигляд

$$f(x) = P_m(x) e^{\sigma x}, \qquad (2)$$

де σ - комплексна (зокрема дійсна) стала, яка називається *контрольним числом функції* $f(x)$; $P_m(x)$ - многочлен степеня m, то знаходження частинного розв'язку по суті зводиться до алгебраїчних операцій. Нехай контрольне число σ є коренем характеристичного рівняння оператора $L(y)$ кратності $r \geq 0$ (якщо $r > 0$, то дістаємо *резонансний випадок*; якщо σ не є коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$ і дістаємо *нерезонансний випадок*). Тоді рівняння (1) має єдиний частинний розв'язок вигляду

$$\tilde{y} = x^r R_m(x) e^{\sigma x}, \qquad (3)$$

де $R_m(x)$ - многочлен степеня m, коефіцієнти якого можна знайти за допомогою *методу невизначених коефіцієнтів.*

Якщо коефіцієнти a_j, $j = 1,2,\ldots,n$, рівняння (1) —дійсні числа, а права частина має спеціальний вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right), \qquad (4)$$

де α, β - дійсні сталі, $P_m(x)$, $Q_n(x)$ - многочлени степеня m і n відповідно з дійсними коефіцієнтами, то рівняння (1) має єдиний частинний розв'язок виду

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right),$$

де $r \geq 0$ - кратність контрольного числа $\sigma = \alpha \pm i\beta$ функції $f(x)$ як кореня характеристичного рівняння оператора $L(y)$ ($r > 0$ - резонансний випадок, $r = 0$ - нерезонансний випадок), $R_l(x)$, $S_l(x)$ - многочлени степеня $l = \max\{m, n\}$, коефіцієнти яких можуть бути знайдені методом невизначених коефіцієнтів.

Отже, лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами завжди можна проінтегрувати в квадратурах, причому у випадку, коли права частина рівняння (1) – функція $f(x)$ має спеціальний вид (2) або (4), інтегрування по суті зводиться до алгебраїчних операцій.

Приклад 1.

Коливання в середовищі з опором h, частотою власних коливань системи ω, частотою збурювальної сили v, коли збурювальна сила періодична і має вигляд $f(x) = h\sin(vx)$ описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2h\frac{dy(x)}{dx} + \omega^2 y(x) = f(x).$$

Що можна сказати про амплітуду коливного руху, коли опір h достатньо малий, а частота v збурювальної сили наближається до частоти ω власних коливань ситстеми?

Проведемо дослідження, використавши математичний пакет MathCAD. Якщо $h = 0.2$, $\omega = 20$, $v = 5$, то диференціальне рівняння коливного руху набуває вигляду

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 0.4\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 400\cdot y(x) = 0.2\sin(5x)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

Застосувавши обчислювальний блок Given/Odesolve, побудуємо частинний розв'язок диференціального рівняння (рисунок 1).

Given

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 0.4\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 400\cdot y(x) = 0.2\sin(5x)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(x, 10)$$

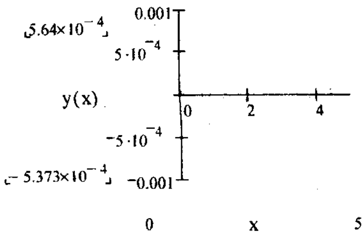


Рисунок 1

Якщо частоту ν збурювальної сили наблизити до частоти ω власних коливань ситеми, тобто прийняти $\nu = 15$, то графік частинного розв'язку змінюється:

Given

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 0.4\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 400y(x) = 0.2\sin(15\cdot x)$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

$$F := \text{Odesolve}(x, 10)$$

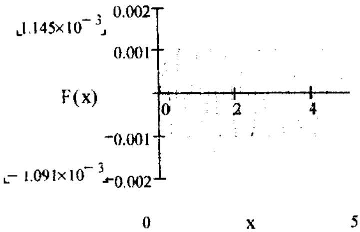


Рисунок 2

Наблизимо частоту ν збурювальної сили до частоти ω власних коливань ситеми, прийнявши $\nu = 19$.

Given

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x)\right) + 0.4\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 400y(x) = 0.2\sin(19x)$$

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

$$F := \text{Odesolve}(x, 10)$$

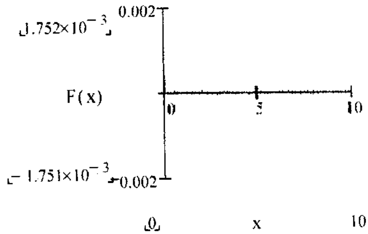


Рисунок 3

Проаналізувавши криві частинних розв'язків можна дійти висновку, що при наближені частоти зовнішньої сили до частоти власних коливань системи, амплітуда коливного руху зростає.

Приклад 2.

Розглядається схема динамічного моделювання процесу поверхневого пластичного деформування деталі із закріпленим гідравлічним демпфером у центрі при механічній обробці. Диференціальне рівняння, яке описує процес поверхневого пластичного деформування деталі, з биттям b, має вигляд:

$$m\frac{d^2y}{dx^2} = -C\frac{dy}{dx} - k(B + y + b\sin(\omega x)) + ES(B1 - y - b\sin(\omega x))\operatorname{sgn}(B1 - y - b\sin(\omega x)),$$ де

m – приведена маса інструмента (кг);

b – биття деталі (мм);

C – коефіцієнт демпферування (Н/(мм/с);

k – жорсткість пружини (Н/мм);

B – попередній натяг пружини (мм);

ω – кутова швидкість деталі (рад/с);

E – жорсткість матеріалу (Н/мм^2);

S – площа плями контакту (мм^2);

$B1$ – попередній статичний натяг інструмента в деталь (мм).

За допомогою математичного пакета MathCAD побудувати графік частинного розв'язку для, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ а також графік отриманного аналітичного розв'язку, порівняти результати, якщо $m=10$, $C=20$, $k=100$, $b=0.01$, $\omega=20$, $B=1$, $E=100$, $S=0$, $B1=1$.

Диференціальне рівняння деформування деталі з заданими коефіцієнтами набуває вигляду:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2\cdot\frac{d}{dx}y(x) + 10\cdot y(x) = -10 + 0.01\cdot\sin(20x)$$

Нижче наведено програму в середовищі пакета MathCAD для проробки всіх етапів аналітичного розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.

$$k^2+2k+10 \text{ solve}, k \rightarrow \begin{pmatrix} -1+3\cdot i \\ -1-3\cdot i \end{pmatrix}$$

$$y1(x) = C1e^{-x}\cos(3x) + C2e^{-x}\sin(3x)$$

$$y2(x) = D$$

$$10D = -10 \qquad D = -1$$

$$y2(x) = -1$$

$$y3(x) = A\cdot\cos(20x) + B\cdot\sin(20x)$$

$$\frac{d}{dx}y3(x) = -20\cdot A\cdot\sin(20\cdot x) + 20\cdot B\cdot\cos(20\cdot x)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}y3(x) = -400\cdot A\cdot\cos(20\cdot x) - 400\cdot B\cdot\sin(20\cdot x)$$

$$-400A\cos(20x) - 400B\sin(20x) + 2(-20A\sin(20x) + 20B(\cos(20x) +$$

$$+10(-20A\sin(20x) + 20B\cos(20x)) = 0.01\sin(20x)\textit{simplify} \rightarrow$$

$$-400A\cos(20x) - 240A\sin(20x) + 240B\cos(20x) = 0.01\sin(20x)$$

$$-400A - 240B = 0$$

$$-400B - 240A = 0.01$$

$$S := \begin{pmatrix} -400 & -240 & 0 \\ -240 & -400 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$$S1^{\langle 0\rangle} := S^{\langle 0\rangle} \qquad S1^{\langle 1\rangle} := S^{\langle 1\rangle} \quad B := S^{\langle 2\rangle}$$

$$S1 = \begin{pmatrix} -400 & -240 \\ -240 & -400 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

$$S1^{-1} = \begin{pmatrix} -3.906\times10^{-3} & 2.344\times10^{-3} \\ 2.344\times10^{-3} & -3.906\times10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$C := S1^{-1}\cdot B$$

$$C = \begin{pmatrix} 2.344\times10^{-5} \\ -3.906\times10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$y(x) = C1\cdot e^{-x}\cdot\cos(3\cdot x) + C2\cdot e^{-x}\cdot\sin(3\cdot x) - 1 + \left(2.34410^{-5}\right)\cos(20x) + \left(-3.906\times10^{-5}\right)\cdot\sin(20x)$$

$$\frac{dy}{dx}y(x) = -C1\exp(-x)\cos(3x) - 3C1\exp(-x)\sin(3x) - C2\exp(-x)\sin(3x) +$$

$$+3C2\exp(-x)cos(20x) - 4.68810^{-4} - 7.81210^{-4}\cos(20x)$$

$x := 0$

$C1e^{-x}\cos(3x) + C2e^{-x}\sin(3x) - 1 + 2.34410^{-5}\cos(20x) + (-3.90610^{-5})\sin(20x)$

$\to C1 - 0.99997656$

$C1 := .99997656$

$-.99195378311328000000 - 2.99992968 \cdot C2$

$-.33307293333333333333$

$y(x) = 0.99997656e^{-x}\cos(3x) - 0.333072933333e^{-x}\sin(3x) - 1 + 2.34410^{-5}\cos(20x) +$
$+(-3.90610^{-5})\sin(20x)$

Побудуємо графік одержаного розв'язку

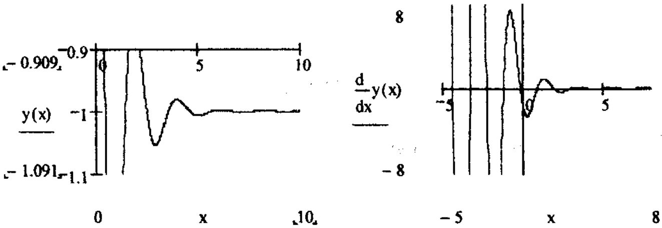


Рисунок 4

Наявність вбудованих функцій дозволяє без отримання аналітичного розв'язку одержати графіки частинного розв'язку:

Given

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 2\frac{d}{dx}y(x) + 10 \cdot y(x) = -10 + 0.01 \cdot \sin(20x)$$

$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$

$y := \mathrm{Odesolve}(x, 50)$

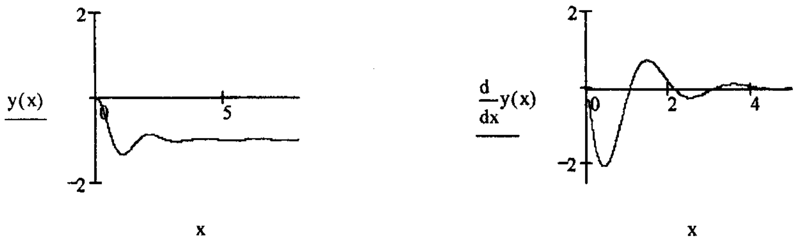


Рисунок 5

Певною мірою можна стверджувати про наближеність графіків, які отримані різними підходами що до розв'язування диференціальних рівнянь.

Завдання для практичних аудиторних занять

1. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 - x$;
2. $y''' + y'' = 6x^2 - 2x + 3$;
3. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$;
4. $y^{IV} - 9y'' = 3x^2 - 1$;
5. $y''' - y'' = 4 - x^2$;
6. $y''' - 13y'' + 12y' = 2x - 1$;
7. $3y''' - y'' = 5x$;
8. $y''' - 4y' = 16e^{2x}$;
9. $y^{IV} - y'' = 6x + 5$;
10. $y''' - 3y'' + 2y' = xe^x$;
11. $y'' - 4y' + 5y = 2xe^x$;
12. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$;
13. $y'' - 3y' + 2y = (3-4x)e^x$;
14. $y'' + 6y' + 9y = (1-x)e^{-3x}$;
15. $y'' - 5y' = -5x^2 + 2x$;
16. $y'' + 3y' = 2y = (12x^2 + 2x)e^{2x}$;
17. $2y'' - y' = x - 4$;
18. $y'' - 5y' = 4y = 4xe^{2x}$;
19. $y'' - 2y' = (x-2)e^x$;
20. $y'' + 2y' + 2y + 2e^{-x}$;
21. $y'' + y = 3e^{-x}$;
22. $y'' - 4y' - 5y = 3xe^{2x}$;
23. $y'' - y' = 2(1-x)$;
24. $y'' + 2y' + y = 2e^{-2x}$;
25. $y'' - y' = 3xe^x$;
26. $y'' + y = 5e^x$;
27. $y'' - y = (2-x)e^x$;
28. $y'' + 4y = 8e^{-2x}$;
29. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}$;
30. $y'' - 6y' + 9y = (16x-7)e^{-x}$.

Завдання для аудиторної самостійної роботи

1. а) $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x$; б) $y'' + 4y = 4y^{2x} - 8\sin x$.
2. а) $y'' - y = 4\cos x - \sin x$; б) $y'' + y' = 2shx + \sin x$.
3. а) $y'' + y = 6\sin 2x$; б) $y'' + 6y' + 13y = 2x - 4 + 4xe^{-3x}$.
4. а) $y'' + 9y = 3\cos x$; б) $y'' - 6y' + 18y = 3x^2 - 4 + (4x-1)e^x$.
5. а) $y'' - 4y' + 8y = 2\sin 2x$; б) $y'' + 9y = 3xe^{2x} - 4\sin x$.
6. а) $y'' + 2y' + 8y = 8\sin 2x$; б) $y'' + 2y' + 5y = 3x - 5 - 2xe^{-x}$.
7. а) $y'' - y = 2\sin x - 3\cos x$; б) $y'' - 4y' = 4x^2 - 2 - e^{-2x}$.
8. а) $y'' + 2y' + 10y = 5\sin x$; б) $y'' + 5y' = 7e^{2x} + 4x^2 - 3$.
9. а) $y'' + 2y' + y = 4\cos x$; б) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 - 9 + 3e^{2x}$.
10. а) $y'' + 4y' + 8y = 3\sin 2x$; б) $y'' - 6y' = 4x^2 - 5x + 7e^{3x}$.

11. Для кожного з даних неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь записати структуру його частинного розв'язку:

1) $y^{IV} + 4y'' = 5$; 2) $y'' + 3y' - 4y + 2x - 1$;
3) $y'' - 8y' + 16y = xe^x$; 4) $y''' + y'' = 2x + e^x$;
5) $y'' - 8y' = 2\cos^2 4x$; 6) $y'' + 25y = \sin 3x$.

Завдання для типового розрахунку №7

Зінтегрувати диференціальні рівняння
а) методом невизначених коефіцієнтів,
б) методом варіації довільних сталих,
в) методом інтегрального перетворення Лапласа,
г) методом інтеграла Дюамеля
застосувавши різні комп'ютерні математичні системи. Порівняти результати.

1) $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$,
2) $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$,
3) $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 4$,
4) $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$,
5) $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$,
6) $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$,
7) $y'' - 2y' = 2e^{x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$,
8) $2y'' - y' = 2x - 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0{,}5$,
9) $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$,
10) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$, $y(1) = e^{-1}$, $y'(1) = 0$,
11) $2y'' - y' - y = 1 - x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1{,}5$,
12) $y'' + 3y' = \cos x + \sin x$, $y(0) = 0{,}6$, $y'(0) = 0{,}2$,
13) $y'' - y = e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1{,}5$,
14) $y'' - 4y' = 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$,
15) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{x}\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$,
16) $y'' - 4y' + 5y = 2xe^{x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$,
17) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$,
18) $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^{x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$,
19) $y'' + 6y' + 9y = (1 - x)e^{-3x}$, $y(0) = y'(0) = 0$,
20) $y'' - 5y' + y = -5x^2 + 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$,
21) $2y'' - y' = x - 4$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$,
22) $y'' - 5y' + 4y = 4xe^{2x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -1$,
23) $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 1$,
24) $y'' + y = 3e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 2$,
25) $y'' - 4y' - 5y = 3xe^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$,
26) $y'' - y' - 5y = 3xe^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$,
27) $y'' + 2y' + y = 2e^{-2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$,
28) $y'' + y = 5e^{x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$,
29) $y'' - y = (2 - x)e^{x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$,
30) $y'' + 4y = 8e^{-2x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Задачі прикладного змісту

Складання диференціального рівняння, яке описує певний еволюційний процес або залежність між характеристиками досліджуваного явища, є часто не простою задачею. Універсального методу складання диференціального рівняння не існує, тому можна дати лише деякі загальні вказівки.

Нехай $y = y(x)$ — шукана залежність між характеристиками x і y даного процесу. Щоб скласти диференціальне рівняння, розв'язком якого є функція $y = y(x)$, треба виразити приріст цієї функції $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ через приріст Δx незалежної змінної x та інші величини, про які йдеться в задачі. Поділивши Δy на Δx та перейшовши до границі для $\Delta x \to 0$, дістанемо диференціальне рівняння, тобто залежність швидкості зміни величини y в точці x (похідної $u'(x)$) від x і $y(x)$. У багатьох випадках ця залежність ґрунтується на законі або експериментальному факті, який має місце в тій чи іншій галузі природознавства. При цьому, звичайно, використовують геометричний зміст похідної (тангенс кута нахилу дотичної) та фізичний зміст (швидкість перебігу процесу).

При розв'язуванні деяких задач отримують рівняння, шукана функція в яких міститься не тільки під знаком похідної, а й під знаком інтеграла. Рівняння такого типу називають *інтегральними або інтегро-диференціальними.* Вони виникають, наприклад, при використанні геометричного змісту визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції та інших інтегральних формул (довжина дуги кривої, площа поверхні і об'єм тіла обертання, робота сили тощо). У найпростіших випадках такі рівняння шляхом диференціювання зводять до диференціальних рівнянь.

Розглянемо важливі задачі з різних галузей науки і техніки, які приводять до диференціальних рівнянь.

Механіка. Визначити траєкторію руху (в тримірному просторі) точки масою m під дією сили F, залежної від часу t, положення точки r(t) (r - радіус-вектор точки)і її швидкості $\frac{dr}{dt}$, тобто

$$F = F\left(t, r, \frac{dr}{dt}\right)$$

Очевидно, отримати кінематичну модель задачі, тобто рівняння траєкторії руху $r = r(t)$, практично неможливо. Разом з тим, побудувати динамічну модель задачі дуже просто. Для цього досить скористатися другим законом Ньютона (добуток маси на прискорення точки дорівнює силі, що діє на неї):

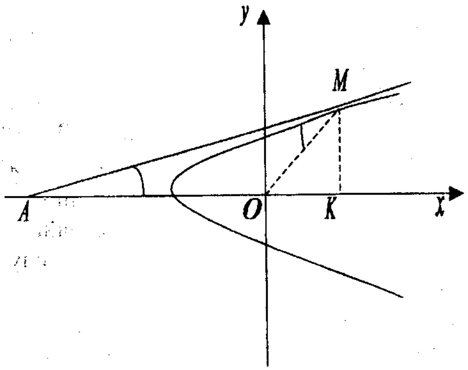
$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = F\left(t, r, \frac{dr}{dt}\right).$$

Це і є диференціальне рівняння руху точки.

Оптика. Нехай треба визначити форму осесиметричного дзеркала, яке збирає промені, паралельні його осі, в одну точку. Використаємо відомий закон геометричної оптики, згідно з яким кут падіння променя дорівнює кутові його відбиття. Нехай $y - f(x) = 0$ - рівняння осьового перерізу дзеркала. Фокус дзеркала помістимо в початок координат. Тоді маємо

$$y' = \frac{MK}{AK}; \quad MK = y; \quad AK = AO + OK = AO + x;$$

$$AO = OM = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$



Отже, остаточно маємо диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

яке містить незалежну змінну x, залежну від неї змінну y та похідну y' шуканої функції y. Таким чином, маємо динамічну модель задачі. Вона не дає нам відповіді про залежність. Необхідно з динамічної моделі виключенням "зайвої" змінної y' побудувати кінематичну модель задачі. У цьому випадку це легко здійснити, ще не знаючи методів інтегрування диференціальних рівнянь.

Неважко перевірити, що дане диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Отже, позначивши $\sqrt{x^2 + y^2} = U$ дістанемо відоме з інтегрального числення елементарне рівняння $U'=1$, внаслідок інтегрування якого маємо: $U = \sqrt{x^2 + y^2} = x + c$, де C - довільна стала. Таким чином, дістаємо кінематичну модель задачі $y^2 = 2Cx + x^2$. Як бачимо, шукані форми дзеркала описуються сім'єю рівнянь параболоїдів обертання.

Атомна фізика. Нехай, маємо радіоактивну речовину масою m_0, з періодом піврозпаду T (за відрізок часу T в результаті розпаду залишається $\frac{m_0}{2}$ речовини). Треба визначити залежність маси речовини від часу t. Нехай $m(t)$ - маса речовини в момент часу t . Для складання динамічної моделі задачі використовуємо закон радіоактивного розпаду, згідно з яким швидкість розпаду в момент часу t пропорційна наявній масі речовини в цей самий момент часу.

Отже, матимемо динамічну модель задачі у вигляді диференціального рівняння.

$$\frac{dm}{dt} = -km \ ,$$

де k - коефіцієнт пропорційності (знак "-" взято для позначення розпаду), він одночасно визначається періодом піврозпаду речовини $k = \frac{1}{T}\ln 2$ При цьому відомо, що на початку спостереження, тобто якщо $t = t_O$, маса речовини дорівнюватиме m_O. Проінтегрувавши рівняння з урахуванням величини m_O, T, дістанемо кінематичну модель задачі

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t-t_0}{T}} \ .$$

<u>Біологія.</u> Нехай треба знайти залежність площі S молодого листка вікторії-регії, що має форму круга, від часу t.

Відомо, що швидкість зміни площі S в момент часу t пропорційна площі листка, довжині його обводу та косинуса кута між падаючим на листок сонячним променем і вертикаллю до листка. Отже, на основі цих відомостей легко матимемо динамічну модель задачі (k - коефіцієнт пропорційності):

$$S' = kS^{\frac{3}{2}} \cos\varphi(t) \ ,$$

$$\varphi(t) = at + b \ge 0 \ , \qquad a,\ b - const, \ \varphi \le \pi \ .$$

Безпосередньо підстановкою неважко переконатись, що відповідна кінематична модель задачі має вигляд

$$S(t) = (C + \frac{k}{2a}\sin(at + B))^{-2} \ ,$$

де С - довільна стала.

<u>Електротехніка.</u> Нехай треба знайти залежність сили струму i від часу t в контурі, який складається із електрорушійної сили ε_0, опору k та індуктивності L, де ε_0, R, L - сталі.

Згідно з законом Ома маємо

$$\varepsilon_0 = R_i + L\frac{di}{dt} \ .$$

Це і є динамічна модель задачі. Відповідна їй кінематична модель, як легко переконатися безпосередньою підстановкою, має вигляд

$$i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\varepsilon_0}{R} \ ,$$

де C – довільна стала.

<u>Побут.</u> Знайти рівняння кривої, за якою розміщений рівень підземних вод навколо круглої криниці, яка поширюється до непроникного шару (рисунок 1).

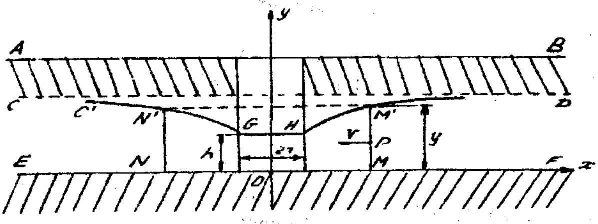


Рисунок 1

Розв'язання. Нехай AB - поверхня землі; CD - поверхня ґрунтових вод до
криниці; E - водонепроникний шар, який обмежує знизу потік підземних вод.

Якщо висота води в криниці підтримується вичерпуванням на постійному рівні GH, то поверхня ґрунтових вод навколо криниці понижується деяким чином.

Лінія поверхні ґрунтових вод CD переходить у два викривлені розгалуження $C'G$ і $P'H$, які залишаються на рівні води GH. Поверхня рівня ґрунтових вод являє собою поверхню кручення навколо осі Oy меридіональної лінії GC' чи HP'.

Крива $H'P$ знаходиться на основі емпіричного правила, за яким швидкість V точки води в точці P пропускного (дренувального) грунту пропорційна нахилу кривої в точці M', яка лежить на вертикалі точки P.

Позначаючи коефіцієнт пропорціональності k, одержимо вираз швидкості:

$$V = k = \frac{dy}{dx}.$$

Через бічну поверхню циліндра $N'NMM'$ радіально всередину протікає кількість води

$$Q = 2\pi xyV = 2\pi xyk\frac{dy}{dx} \tag{1}$$

яка для всього циліндра радіуса x дорівнює витраті води у криниці.

Розділимо змінні у диференціальному рівнянні (1):

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\pi k}{Q}ydy.$$

Інтегруючи, одержуємо

$$\ln x = \frac{\pi k}{Q}y^2 + C \tag{2}$$

Сталу інтегрування знаходимо з умови, що крива поверхні переходить у поверхню криниці *GH*.

Якщо діаметр криниці $2r$, а глибина води в криниці h, то якщо $x=r$, $y=h$, тобто

$$\ln r = \frac{\pi k}{Q}h^2 + C, \qquad \text{чи} \qquad C = \ln r - \frac{\pi k}{Q}h^2 \qquad (3)$$

Сталу інтегрування (3) вводимо в рівняння (2) і одержуємо рівняння шуканої кривої:

$$\ln\frac{x}{r} = \frac{\pi k}{Q}(y^2 - h^2), \qquad \text{чи} \qquad y^2 = \frac{a}{\pi k^2}\ln\frac{x}{r} + h^2.$$

Охорона праці. Розглянемо вентиляцію виробничого приміщення об'ємом V, $м^3$, в якому технологічний процес супроводжується рівномірним накопиченням шкідливих виділень у кількості Z одиниць на годину. Обмін повітря за одну годину складає M $м^3$/год, причому припливне повітря містить шкідливі виділення в концентрації μ на 1 $м^3$. Знайти концентрацію Z (на 1 $м^3$) виділень в приміщенні через i годин після початку роботи, якщо початкове значення цієї концентрації Z_0 (залишок забруднень від роботи попереднього дня).

Розв'язання. За короткий проміжок часу dt концентрація Z збільшиться на dZ_0. Загальна кількість виділень – Vdz. Вони складаються із виділень, які принесло поточне повітря μMdt, і виділень технологічних процесів Zdt за винятком кількості шкідливих виділень, які були в повітрі за проміжок dt. Нехтуючи зміною концентрації Z за нескінченно малий проміжок часу, вважаємо, що ця кількість дорівнює $ZMdt$.

Отже основне рівняння вентиляції

$$Vz = M\mu dt + Zdt - Mzdt \qquad (1)$$

Рівняння (1)можна зобразити у вигляді

$$\frac{Vdz}{M\mu + Z - Mz} = dt.$$

Інтегруючи це рівняння, маємо

$$-\frac{V}{M}\int\frac{d(M\mu + z - Mz)}{M\mu + z = Mz} = \int dt + C_1$$

або

$$\ln(M\mu + z - Mz) = -\frac{M}{V}(t + C_1)$$

Звідки загальний розв'язок

$$M\mu + Z - Mz = Ce^{-\frac{M}{V}t} \tag{2}$$

Початкові умови: для $t=0$, $z=z_0$, звідки

$$C = M\mu + Z - Mz \ .$$

Знайдену сталу інтегрування підставляємо в рівняння (2) , звідки одержуємо

$$Z = \left(\mu + \frac{Z}{M}\right)\left(1 - e^{-\frac{M}{V}t}\right) + Z_0 e^{\frac{M}{V}t} .$$

Техніка. Знайти рівняння кривої залізничної колії, яка переходить плавно від прямого напрямку до кругового, якщо довжина перехідної кривої l, а радіус колового шляху r.

Розв'язання. Кривизна перехідної кривої $\frac{1}{R}$ рівномірно змінюється від нуля до $\frac{1}{r}$.

Отже, $\frac{1}{R} = kS$, де k – коефіцієнт пропорційності, S – довжина дуги від початку перехідної кривої до точки $M(x,y)$.

Коефіцієнт k знаходять з умови, що $S = l \ \frac{1}{R} = \frac{1}{r}$,

звідки $\frac{1}{R} = kl$ і $k = \frac{1}{rl}$.

Отже, маємо $\frac{1}{R} = \frac{S}{rl}$.

Перехідна крива по всій довжині l незначно відхиляється від осі абсцис, і величину S можна замінити абсцисою x точки M. Отже, кутовий коефіцієнт дотичної $\frac{dy}{dx}$ в точці M буде дуже малим, тому в диференціальній формулі кривизни

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

величиною y'^2 можна знехтувати.

Таким чином, нехай $S = x$ і $\frac{1}{R} = y''$.

Спрощене диференціальне рівняння перехідної кривої $y'' = \frac{x}{rl}$.

Загальний розв'язок цього рівняння

$$y = \frac{x^3}{6rl} + C_1 x + C_2 .$$

Початкові умови: $x = 0$, $y = 0$ і $y' = 0$, звідки

$$C_1=0,\ C_2=0.$$

Підставляючи ці значення в загальний розв'язок, знаходимо шукане рівняння перехідної кривої:

$$y = \frac{x^3}{6rl}.$$

Економіка

Приклад 1 (Зростання при сталому темпі приросту).

Нехай в початковий момент часу $t_0=0$ чисельність населення в деякій країни становить N_0. Нехай темп зростання чисельності населення країни є сталим (зазначимо, що приріст може бути як додатним, так і від'ємним) і дорівнює величині T.

Темп зростання функції $y=y(t)$, як зазначалось у диференціальному численні, обчислюється за формулою $T_y = \frac{y'}{y}$. Тоді математична модель передбачення чисельності населення у будь-який момент може бути сформульована у вигляді диференціального рівняння, а задача Коші такого рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{y'}{y} = T, \\ y(0) = N_0. \end{cases}$$

Відокремивши змінні, знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$\frac{dy}{y} = Tdt,$$

$$\ln y = T \cdot t + \ln C,$$

$$y = C \cdot e^{T \cdot t}.$$

Частинний розв'язок отримаємо, якщо скористаємось початковою умовою, тобто тим, що якщо $t=0$ чисельність населення $y(0)$ дорівнює N_0. Тоді, підставивши $t=0$ у загальний розв'язок, знайдемо константу C: $N_0=Ce^{T \cdot 0}=C$. Отже, розв'язком задачі Коші є функція

$$y(t)=N_0\, e^{T \cdot t}.$$

Знайдена функція $y(t)=N_0 \cdot e^{T \cdot t}$ дозволяє передбачити чисельність населення в довільний момент часу. Наприклад, при річному темпі приросту $T = -2\%$ (темп зменшення чисельності населення в розмірі 2%) через t=20 (років) чисельність населення становитиме

$N_0 \cdot e^{-0{,}02\cdot 20} = N_0 \cdot e^{-0{,}4} \approx 0{,}6703 N_0$.

Зазначимо, що функція $y(t)=N_0 \cdot e^{T\cdot t}$ може бути математичною моделлю динаміки зростання цін при сталому темпі інфляції.

Приклад 2. (Зростання при спадному темпі приросту).

Нехай деяка фірма розпочинає випуск на продаж нового товару, а на момент часу t_0=0 на ринку продано $y(t_0)=y(0)=y_0$ одиниць товару. Позначимо через $y(t)$ кількість проданого товару в довільний момент часу t і побудуємо математичну модель прогнозування кількості проданого товару $y(t)$.

В теорії маркетингу встановлено, що темп приросту T_y кількості проданого товару лінійно залежить від обсягу наявного в продажу цього товару. Нехай темп приросту (спаду) T_y залежно від величини y є лінійною функцією, яка має вигляд: $T_y = b-ay$.

Отже, для функції $y=y(t)$ диференціальне рівняння з початковою умовою:

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{y} = b - ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Розв'язуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$\dfrac{dy}{y(b-ay)} = dt$, $\dfrac{dy}{by} + \dfrac{ady}{b(b-ay)} = dt$, $\dfrac{1}{b}\ln y - \dfrac{1}{b}\ln(b-ay) = t + C$, звідси виразимо $y(t)$

$\ln\dfrac{y}{b-ay} = bt + C$, $\dfrac{y}{b-ay} = C\cdot e^{bt}$, отже, загальний розв'язок $y(t)$ має вигляд

$$y = \frac{Cb}{e^{bt} + Ca}.$$

Приклад графіка функції кількості проданого товару $y(t)$ наведено на рисунку 2.

$$y(t) := .5\cdot\frac{2}{(\exp(2\cdot t) + 0.5\cdot 4)}$$

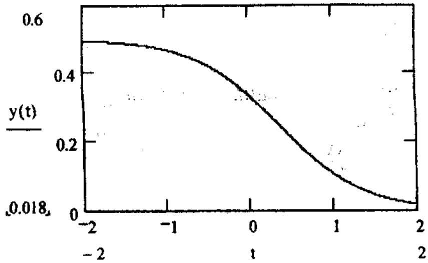


Рисунок 2

При конкретному значенні $y(0)=y_0$ отримуємо конкретну криву (функцію) вигляду $y(t)=\dfrac{1}{\alpha e^{\beta t}+\gamma}$. Ця функція (*логістична* функція, рис. 2) описує динаміку кількості проданого товару y залежно від часу t.

<u>Приклад 3.</u> (Попит при сталій гнучкості).

Гнучкість попиту на товар в залежності від ціни визначається рівністю $E_Q = \dfrac{dQ}{dP} * \dfrac{P}{Q}$,

де Q - розмір попиту на деякий товар залежно від його ціни P. Нехай $Q(P_0)=Q_0$.

Припустимо, що гнучкість попиту за ціною $E_Q=E$ є сталою на деякому інтервалі. Функція попиту $Q=Q(P)$ зі сталою гнучкістю задовольняє диференціальне рівняння, для якого сформулюємо задачу Коші :

$$\begin{cases} Q' \cdot \dfrac{P}{Q} = E \\ Q(P_0) = Q_0 \end{cases}$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dQ}{Q} = E\,\frac{dP}{P}.$$

Зінтегрувавши рівняння, запишемо його загальний розв'язок

$\ln Q = \ln C + E \cdot \ln P$, або $Q=C\cdot P^E$.

З урахуванням початкової умови отримуємо функцію попиту

$$Q(P) = \frac{Q(P_0)}{P_0} \cdot P^E.$$

Зокрема, якщо гнучкість $E = -1$ (функція попиту є спадною, а тому за припущеннями збільшення ціни, наприклад, на 1% зменшує попит на 1%) попит, залежно від ціни, описує функція

$Q(P) = \dfrac{Q(P_0)}{P_0} \cdot P^{-1}$, яка є обернено пропорційною залежністю щодо ціни товару $Q(P) = \frac{Q(P_0)}{P_0} \cdot \frac{1}{P}$.

Приклад 4. (Корисність при сталій схильності до ризику).

Поведінка споживача на ринку описується таким чином. Споживанню благ ставиться у відповідність число $U(x)$. Схильність споживача до ризику $r(x)$ залежно від кількості благ x обчислюється за формулою $r(x)=\frac{U''(x)}{U'(x)}$, де $U(x)$ - функція корисності для споживача. Побудуємо функцію корисності для споживача зі сталою (незалежною від x) схильністю до ризику $r(x)=r$ ($r<0$). З цією метою запишемо диференціальне рівняння

$$r(x)=\frac{U''(x)}{U'(x)}=r$$

з початковими умовами $U(0)=0$, $U'(0)=k$. Отже, задача Коші має вигляд

$$\begin{cases} U''(x) = r * U'(x), \\ U(0) = 0, \\ U'(0) = k. \end{cases}$$

Диференціальне рівняння є лінійним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами $U''-rU'=0$.

Складемо характеристичне рівняння $\lambda^2-r\lambda=0$, коренями якого є числа $\lambda_1 = 0$ та $\lambda_2 = r$.

Запишемо загальний розв'язок:

$$U(x)=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{r\cdot x}=C_1+C_2\,e^{r\cdot x}.$$

Скориставшись початковими умовами, обчислимо сталі. Якщо $U(0)=0$, $U'(0)=k$ маємо систему рівнянь $C_1= -C_2$, $C_2 * r= k$. Звідси отримаємо вирази для сталих $C_1= k/r$, $C_2= (-k)/r$.

Отже, функція корисності споживача має вигляд $U(x)=\frac{k}{r}e^{rx}-\frac{k}{r}$.

Зокрема, для $r = -0{,}3$ та $k=2$

$$U(x) = \frac{2}{-0{,}3}e^{-0{,}3x} - \frac{2}{-0{,}3} = \frac{20}{3} - \frac{20}{3}e^{-0{,}3x}.$$

На рисунку 3 наведено графіки функції корисності споживача при схильності до ризику $r = -0.3$ (графік $U(x)$) та $r = -0.4$ (графік $U1(x)$).

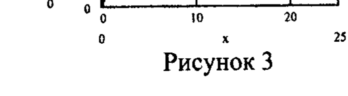


Рисунок 3

Отже, у разі сталої схильності до ризику $r = -0{,}3$ (незалежно від кількості благ x) функція корисності споживача має вигляд

$$U(x)=\frac{20}{3}-\frac{20}{3}e^{-0{,}3x} \text{ (рисунок 3).}$$

Задачі

1. З експерименту відомо, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості. Знайти півперіод розпаду речовини (час, за який розпадається половина речовини).

2. З експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій при достатньому запасі їжі пропорційна до кількості їх. За який час кількість бактерій збільшиться в m разів порівняно з початковою кількістю?

3. На матеріальну точку, маса якої m, діє стала сила, що надає точці прискорення a. Навколишнє середовище чинить рухомій точці опір, пропорційний до швидкості її руху (у — коефіцієнт пропорційності). Як змінюється швидкість руху залежно від часу, коли в початковий момент точка була в стані спокою?

4. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною до пройденого шляху. В початковий момент руху точка була на відстані 5 м від початку відліку шляху і мала швидкість V_0— 20 м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 10 с після початку руху.

5. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який пропорційний до швидкості човна. Початкова швидкість човна дорівнює 2 м/с, а його швидкість через 4 с дорівнює 1 м/с. Через скільки секунд швидкість човна дорівнюватиме 0,25 м/с? Який шлях може пройти човен до зупинки?

6. Прискорення локомотива, початкова швидкість якого дорівнює V_0, прямо пропорційне силі тяги F і обернено пропорційне до масі поїзда m. Сила тяги локомотива $F(t)=b-kv(t)$, де $v(t)$ - швидкість локомотива в момент t, а b і k - сталі величини. Знайти залежність сили тяги локомотива від часу t.

7. Матеріальна точка, маса якої m, рухається по координатній прямій Ox. Робота сили, яка діє на точку, пропорційна часу t від початку руху (коефіцієнт пропорційності дорівнює k). Знайти закон руху точки, якщо в початковий момент ($t=0$) точка була в стані спокою на відстані S_0 від початку відліку.

8. Парашутист спускається на парашуті, який має форму півсфери радіуса $R=4$ м. Його маса разом з масою парашута дорівнює 82 кг. Знайти швидкість v парашутиста через 2 с після початку спускання і шлях, який він пройшов за час t. Вважати, що сила опору повітря $F_1=0{,}00081\,sv^2$, де s — площа найбільшого перерізу, перпендикулярного до напрямку руху; v— швидкість руху.

9. Метеорит під впливом земного тяжіння із стану спокою починає прямолінійно падати на Землю з висоти h. Якою була б швидкість метеорита на поверхні Землі, коли б не було земної атмосфери? Радіус Землі $R = 6377$ км.

10. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку (1; 2). Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою, яка дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти криву $y = \varphi(x)$.

11. Крива $y = \varphi(x)$ проходить через точку (0;1) і в кожній її точці тангенс кута нахилу дотичної до цієї кривої дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику. Знайти криву $y = \varphi(x)$.

12. Крива проходить через початок координат і лежить у півплощині $y \geq 0$. Кожний прямокутник, обмежений осями координат і перпендикулярами до них, опущеними з точки кривої, ділиться кривою на дві частини. При цьому площа частини прямокутника, яка лежить під кривою, в два рази менша від площі частини прямокутника, яка лежить над кривою. Знайти криву $y = y(x)$.

13. У посудину, яка містить 20 л води, неперервно з швидкістю 5 л за хвилину вливається розчин, кожен літр якого містить 0,2 кг солі. У посудині розчин перемішується, і суміш витікає з посудини з тією самою швидкістю. Скільки солі буде в посудині через 4 хвилини?

14. Посудину, площа поперечного перерізу якої є відомою функцією висоти h, $S = S(h)$, наповнено рідиною до рівня H. У дні посудини є отвір площею σ, через який рідина виливається. Знайти час t, за який рівень рідини знизиться від початкового положення H до довільного h, $0 \leq h \leq H$, і час T, за який рідина повністю виллється.

15. Круглий циліндричний бак з вертикальною віссю діаметром $2R$ і висотою H наповнено водою. З баку вода витікає через круглий отвір діаметром $2a$ в дні бака. Знайти час T, за який вода повністю витече з бака.

16. У прямолінійній трубі радіуса R тече рідина. Швидкість течії v кожного шару рідини збільшується з наближенням цього шару до центра труби (осі циліндра). Знайти v як функцію відстані r відповідного шару рідини від осі циліндра.

17. Порожня залізна куля перебуває в стаціонарному тепловому стані, тобто коли температура в різних точках тіла різна, але в кожній окремій точці з часом вона не змінюється. Внутрішній радіус кулі 6 см, зовнішній — 10 см, температура внутрішньої поверхні $200\,°C$, зовнішньої — $20\,°C$. Знайти температуру в точках, які лежать на відстані 9 см від центра кулі.

18. Циліндричну котушку виготовлено з мідного дроту. При проходженні електричного струму через котушку виділяється теплота. Вивести формулу для температури $T = T(t)$ усталеного режиму як функції часу t.

19. Поглинання світлового потоку тонким шаром води пропорційне до товщини шару й потоку, який падає на його поверхню. При проходженні через шар товщиною 1 м поглинається 1/4 початкового світлового потоку. Яка частина світлового потоку дійде до глибини h?

20. У циліндричній посудині, об'єм якої V_0, атмосферне повітря за допомогою поршня адіабатично (без обміну теплоти з навколишнім середовищем) стискується до об'єму V_1. Обчислити роботу стискання.

21. Швидкість збільшення площі молодого листка вікторії-регії, який має форму круга, пропорційна до радіуса листка і кількості сонячного світла, яке падає на нього. Кількість сонячного світла пропорційна до площі листка і косинуса кута між напрямком променів і вертикаллю до листка. Знайти залежність між площею S листка і часом t, якщо о 6 годині ця площа дорівнювала 1600см^2, а о 18 годині того самого дня 2500 см^2. Вважати, що кут між напрямком променя Сонця і вертикаллю о 6 год і о 18 год дорівнював 90°, а опівдні - 0°.

22. Прискорення прямолінійного руху матеріальної точки задається формулою $a=(2t-10)$м/с^2. Знайти рівняння руху матеріальної точки, якщо для $t=0$с, $s=4$м і для $t=3$с, $s=13$м, і миттєву швидкість для $t=10$с.

23. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2), якщо відношення ординати будь-якої точки лінії до абсциси цієї точки дорівнює потроєному кутовому коефіцієнтові її дотичної в цій точці.

24. Відомо, що тіло рухається з швидкістю, пропорційною пройденому шляху, і проходить за 2с – 10м, а за 4с – 50м. Який шлях пройде тіло за 6с від початку відліку часу?

25. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (0,2) і має дотичну з кутовим коефіцієнтом $k=1/y$. Побудувати ескіз цієї кривої.

26. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю пропорційною часу руху. Знайти рівняння руху тіла, яке пройшло шлях 20м за 10с і 35м за 20с від початку відліку часу. Який шлях пройде тіло за 1хв 40с?

27. Знайти лінію, яка проходить через точку $(0,e)$, якщо кутовий коефіцієнт її дотичної дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику. Побудувати ескіз цієї лінії.

28. В куску гірської породи міститься 100 мг урану і 14 мг свинцю. Визначити вік гірської породи, якщо відомо, що період піврозпаду урану складає 4,5*10^9 років і при повному розпаді 238 г урану утвориться 206 г уранового свинцю. (Вважати, що в момент утворення гірська порода не містила свинцю, і нехтувати наявністю проміжкових продуктів розпаду урану і свинцю, які розпадаються значно швидше.)

29. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (9,9) і має ту властивість, що кутовий коефіцієнт будь-якої її дотичної в два рази менший кутового коефіцієнта радіус-вектора точки дотику.

30. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (2,1) і має ту властивість, що кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $x=1$ в точці з ординатою, яка дорівнює подвійній ординаті точки дотику.

Системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt}+f_i(t,x_1,x_2,...,x_n), \qquad i=1,2,...,n. \qquad (1)$$

називається системою в нормальній формі або системою, розв'язаною відносно похідних шуканих функцій $x_i = x_i(t)$.

Розв'язком системи рівнянь (1) на проміжку $I=(\alpha,\beta)\in R$ називається сукупність неперервно диференційовних на I функцій $x_i=\varphi_i(t)$, $i=1,2,...,n$, таких, що

$$\frac{d\varphi_i}{dt}=f_i(t,\varphi_1(t),...,\varphi_n(t))$$

при $\forall t\in I$.

Розглянемо один із методів – метод виключення, він полягає у зведені системи рівнянь до одного рівняння n-го порядку або до кількох рівнянь порядку, меншого ніж n.

Загальна система методу виключення така. Диференціюючи, наприклад, перше з рівнянь (1) послідовно n-1 разів і підставляючи щоразу замість похідних $\frac{dx_i}{dt}$ їх значення $f_1(t,x_1,x_2,...,x_n)$ з системи рівнянь, дістаємо

$$\begin{gathered}
\frac{dx_1}{dt}=F_1(t,x_1,x_2,...,x_n), \\
\frac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t,x_1,x_2,...,x_n), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}=F_{n-1}(t,x_1,x_2,...,x_n), \\
\frac{d^nx_1}{dt^n}=F_n(t,x_1,x_2,...,x_n).
\end{gathered} \qquad (2)$$

Знайшовши $x_2,x_3,...,x_n$ з перших n-1 рівнянь системи (2) і підставивши в останнє рівняння системи, дістанемо диференціальне рівняння n-го порядку

$$\frac{d^nx_1}{dt^n}=F\left(t,x_1,\frac{dx_1}{dt},...,\frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}}\right).$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо розв'язки системи (1).

Приклад.
Розв'язати систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + ay.$$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини першого рівняння, маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}. \qquad (3)$$

Із другого рівняння знаходимо

$$\frac{dy}{dt} = -x + ay = -x + a\left(\frac{dx}{dt} - ax\right) = a\frac{dx}{dt} - \left(1 + a^2\right)x.$$

Підставивши цей вираз у (3), дістанемо рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + \left(1 + a^2\right)x = 0.$$

Корені відповідного характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Тому
$x = e^{at}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right)$. З першого рівняння даної системи знаходимо $y(t)$:

$$y = \frac{dx}{dt} - ax = ae^{at}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{at}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right)$$
$$- ae^{at}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) = e^{at}\left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t\right).$$

Отже, загальний розвязок системи:

$$x = e^{at}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),$$
$$y = e^{at}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

Стійкість розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь

Стійкість або нестійкість розв'язків лінійної однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \qquad (1)$$

з неперервною обмеженою при $t \ge t_0$ матрицею $A(t)$ визначається поведінкою при $t \to +\infty$ матриціанту $x(t,t_0)$ цієї системи.

Теорема. Для стійкості розв'язку $x = \varphi(t)$ лінійної системи (1) необхідно й достатньо, щоб матрицант $x(t,t_0)$ системи був обмежений при $t \ge t_0$; для асимптотичної стійкості - щоб матрицант задовольняв умову $\lim_{t\to+\infty} x(t,t_0)=0$, а для нестійкості - щоб матрицант $X(t,t_0)$ був необмеженим.

Оскільки матрицант $X(t,t_0)$ не залежить від значення $x(t_0)$, то розв'язки лінійної системи або всі одночасно стійкі, або нестійкі. Тому лінійну систему (1) називають стійкою, асимптотичною стійкою або нестійкою залежно від властивостей її розв'язків.

Якщо в системі (1) матриця $A(t)=A$ не залежить від t, тобто є сталою, то умови стійкості її розв'язків визначаються властивостями власних значень матриці A.

Теорема. Розв'язки лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь із сталою A тоді й тільки тоді є:

1) стійкими, коли дійсні частини власних значень матриці A не додатні;

2) асимптотично стійкими, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні;

3) нестійкими, коли серед власних значень матриці є хоча б одне з додатною дійсною частиною.

Приклад 1.

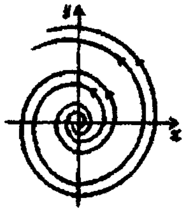
Дослідити на стійкість розв'язки системи

$$\frac{dx}{dt}=2x-y\,,\quad \frac{dy}{dt}=x+2y\,.$$

Побудувати графік цієї системи і показати напрямок руху по траєкторіях.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння: $\lambda^2-4\lambda+5=0$.

Його розв'язки: $\lambda_{1,2}=2\pm i$. Дійсні частини коренів цього рівняння додатні, тому всі розв'язки даної системи є нестійкими. Щоб зобразити траєкторії розв'язків, перейдемо до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді



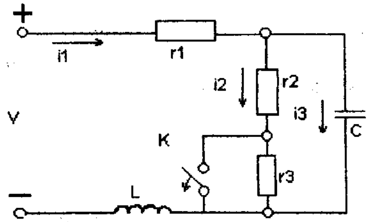
$$\frac{d\rho}{dt}\cos\varphi-\rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}=2\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi,$$

$$\frac{d\rho}{dt}\sin\varphi+\rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}=\rho\cos\varphi+2\rho\sin\varphi.$$

З цієї системи знаходимо $\frac{d\rho}{dt}=2\rho$, $\frac{d\varphi}{dt}=1$. Звідси $\rho=Ce^{2\varphi}$, $C\ge 0$ - рівняння траєкторії. Одна з траєкторій - точка (0,0), а інші - логарифмічні спіралі. Напрямок руху по цих спіралях показано стрілкою – точка $(x(t),y(t))$ з часом як завгодно далеко віддаляється по спіралі від початку координат.

Приклад 2.

Визначити напругу на ємності при замиканні ключа К. Параметри схеми: $r_1 = 20\ Ом; r_2 = 38\ Ом; r_3 = 87\ Ом;\ L = 0.25 Г;\ C = 100 мкФ;\ v = 290 В.$



Вибирається додатний напрям струму і записуються рівняння за законами Кірхгофа для післякомутаційного стану кола:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ V = r_1 i_1 + (r_2 + r_3)\cdot i_2 + L\dfrac{di_1}{dt} \\ (r_2 + r_3)\cdot i_2 = U_C \\ i_3 = C\dfrac{dU_C}{dt}. \end{cases}$$

З урахуванням параметрів схеми, система набуває вигляду:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 \\ 290 = 20 i_1 + 125 i_2 + 0.25\dfrac{di_1}{dt} \\ 125 i_2 = U_C \\ i_3 = 100\dfrac{dU_C}{dt}. \end{cases}$$

Із системи рівнянь виключаємо всі невідомі, крім одного, наприклад U_C. Отримаємо лінійне диференціальне рівняння з одним невідомим. Для цього виражаємо невідомі i_1, i_2, i_3 через U_C.

$$i_2 = \frac{U_C}{125}$$

$$i_1 = \frac{U_C}{125} + 10^{-4}\frac{dU_C}{dt} \tag{1}$$

$$290 = 20\left(\frac{U_C}{125} + 10^{-4}\frac{dU_C}{dt}\right) + 125\frac{U_C}{125} + 0.25\left(\frac{1}{125}\frac{dU_C}{dt} + 10^{-4}\frac{d^2U_C}{dt^2}\right) \tag{2}$$

Після перетворень одержимо:

$$0.25\cdot10^{-4}\frac{d^2U_C}{dt^2}+4\cdot10^{-3}\frac{dU_C}{dt}+1.16U_C=290. \qquad (3)$$

Таким чином знаходження напруги U_C зводиться до знаходження розв'язку неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок такого рівняння записуємо як дві складові (вимушена і вільна)

$$U_C=U_{C\,вим}+U_{C\,вільн}$$

Вимушену складову визначаємо з розрахунку нового встановленого режиму. В такому режимі сталий струм не проходить через ємність, тому напруга на ємності дорівнює напрузі на опорах r_2 і r_3

$$U_{C\,вим}=\frac{v(r_2+r_3)}{r_1+r_2+r_3}=250\,В.$$

Вільну складову записуємо в залежності від коренів характеристичного рівняння:

$$0.25\cdot10^{-4}k^2+4\cdot10^{-3}\cdot k+1.16=0$$

Характеристичне рівняння розв'язуємо засобами математичного пакету MathCAD.

$$0.25\cdot10^{-4}\cdot k^2+4\cdot10^{-3}k+1.16\text{ solve},k\rightarrow\begin{pmatrix}-80.-200.\cdot1i\\-80.+200.\cdot1i\end{pmatrix}$$

Осквльки, корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, то загальний розв'язок запишеться у вигляді:

$$U_C=250+e^{-80t}(A_1\sin(200t)+A_2\cos(200t)). \qquad (4)$$

Для визначення сталих інтегрування використаємо початкові умови. Згідно з законами комутації

$$U_C(0_+)=U_C(0_-),\quad i_L(0_+)=i_L(0_-).$$

Тому знаходимо напругу на ємності і струм в індуктивності до комутації:

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=\frac{v}{r_1+r_2}=5\,А;$$

$$U_C(0_-)=\frac{v}{r_1+r_2}r_2=190\,\text{В}.$$

Підставивши значення $U_C(0)$ і $t=0$ в загальний розв'язок, отримаємо:

$$190=250+A_2.$$

Звідки

$$A_2=-60.$$

Для знаходження A_1 використаємо другу початкову умову, для чого виразимо струм i_1 через сталі інтегрування A_1 і A_2. Підставимо рівняння (4) в (1), отримаємо:

$$i_1=2+\frac{e^{-80t}(A_1\sin(200t)-60\cos(200t))}{125}+10^{-4}\frac{d(250+e^{-80t}(A_1\sin(200t)-60\cos(200t))}{dt}.$$

Похідну знаходимо засобами математичного пакету MathCAD:

$$U_C(t)=250+e^{-80t}\left(A_1\sin(200t)-60\cos(200t)\right)$$

$$\frac{d}{dt}U_C(t)=-80\exp(-80t)\cdot\left(A_1\cdot\sin(200t)-60\cos(200t)\right)+\exp(-80t)\cdot\left(200A_1\cdot\cos(200t)+12000\sin(200t)\right)$$

Після перетворень одержимо:

$$i_1=2+e^{-80t}(0.02A_1\cos(200t)+1.2\sin(200t))$$

Підставляя початкові умови, маємо:

$$5=2+0.02A_1.$$

Звідки

$$A_1=150.$$

Таким чином,

$$U_C=250+e^{-80t}(150\sin(200t)-60\cos(200t))\,\text{В}.$$

Критерій стійкості за першим наближенням

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(x,t), \tag{1}$$

в якій A — стала матриця, $f(t,x)$ — неперервна по t і x $(t \ge t_0,\ \|x\| \le h)$ функція, яка задовольняє умову

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$$

рівномірно по $t \ge t_0$. Система рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

називається системою першого наближення для системи (1).

Теорема. Нехай функція $f(t,x)$ задовольняє умову (2).

Якщо дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, то нульовий розв'язок системи (1) — асимптотично стійкий.

Якщо серед власних значень матриці A є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то нульовий розв'язок системи (1) — нестійкий.

Якщо серед власних значень матриці A є хоча б одне з нульовою дійсною частиною, а інші мають від'ємні дійсні частини, то нульовий розв'язок системи рівнянь (1) може бути як стійким (асимптотично стійким), так і нестійким, тзбпо в цьому випадку з факту стійкості або нестійкості розв'язків системи першого наближення не можна зробити висновок про стійкість нульового (тривіального) розв'язку повної системи рівнянь (1).

Приклад 1:

Дослідити стійкість положень рівноваги математичного маятника з тертям:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dt}{dx} + \sin x = 0, \qquad k > 0. \tag{2}$$

Розв'язання. Від рівняння руху маятника перейдемо до системи

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x - 2ky. \tag{3}$$

Положення рівноваги визначаються із системи рівнянь:

$$y = 0, \quad \sin x + 2ky = 0.$$

Звідси $x = \pi n,\ y = 0,\ n \in Z$. Внаслідок періодичності системи рівнянь (3) по x, достатньо дослідити стійкість двох її розв'язків: $x=0, y=0$ (нижнє положення рівноваги) і $x=\pi, y=0$ (верхнє положення рівноваги маятника).

Лінеаризуємо систему рівнянь (3) в околі точки (0,0). Для цього виділимо лінійну частину функції $\sin x$ в околі точки $x=0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{x!} + \ldots$$

Система першого наближення в цьому випадку має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - 2ky.$$

Власні значення матриці коефіцієнтів цієї системи визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0.$$

Оскільки за умовою $k \succ 0$, то дійсні частини коренів цього рівняння від'ємні. Тому розв'язок $x=0, y=0$ системи (3) — асимптотично стійкий.

Дослідимо тепер стійкість верхнього положення рівноваги маятника, тобто стійкість розв'язку $x=\pi, y=0$ системи (3). В околі точки $x=\pi$ маємо

$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \ldots$$

Систему першого наближення для цього випадку можна записати так:

$$\frac{d(x-\pi)}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = (x-\pi) - 2ky.$$

Власні значення матриці коефіцієнтів системи визначаються з рівняння

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2k-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2k\lambda - 1 = 0.$$

Корені цього рівняння дійсні і мають різні знаки. Тому верхнє положення рівноваги маятника $x=\pi, y=0$ є нестійким.

Приклад 2. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\frac{dx}{dt} = 2x - \ln(1+y) + \sin x;$$
$$\frac{dy}{dt} = e^x + \sin(x+y) - \cos^2 y.$$

Розв'язання. Складаємо рівняння першого наближення:

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y.$$

Відповідне їм характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ комплексні, дійсні частини їх додатні. Отже, тривіальний (нульовий) розв'язок $x = y = 0$ даної системи нестійкий.

Приклад 2:

Дослідити на стійкість розв'язок $x = y = z = 0$ системи

$$\frac{dx}{dt} = -\sin(x - z), \quad \frac{dy}{dt} = \sin^2 x - y - \sin z, \quad \frac{dz}{dt} = tg(y - z). \qquad (5)$$

Розв'язання. Запишемо рівняння першого наближення даної системи в околі точки (0, 0, 0):

$$\frac{dx}{dt} = -x + z, \quad \frac{dy}{dt} = -y - z, \quad \frac{dz}{dt} = y - z.$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda+1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0,$$

Характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Оскільки $\mathrm{Re}\,\lambda_i$ p $0 << i = 1,2,3$, то тривіальний розв'язок $x = y = z = 0$ даної системи — асимптотично стійкий.

Засобами пакета покажемо графічно, що розв'язок системи рівнянь затухаючий (рисунок 1).

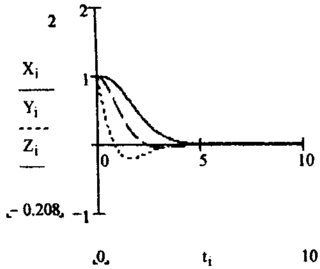


Рисунок 1

На рисунку 2 вказані фазові площини

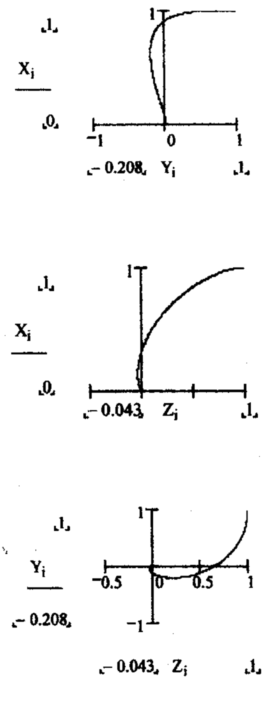


Рисунок 2

Склавши програму мовою пакета, побудуємо фазовий простір (рисунок 3).

$$D(t,Q) := \begin{pmatrix} -Q_0 + Q_2 \\ -Q_1 - Q_2 \\ Q_1 - Q_2 \end{pmatrix}$$

$$Npts := 3000$$

$$L := rkfixed\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$$

$$t := L^{\langle 0 \rangle}$$

$$X := L^{\langle 1 \rangle} \qquad Y := L^{\langle 2 \rangle} \qquad Z := L^{\langle 3 \rangle}$$

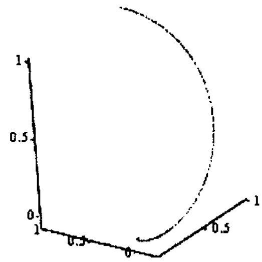
$$i := 0..\,Npts$$

$$\varepsilon := 0.001$$

$$R^{\langle 0 \rangle} := X \qquad R^{\langle 1 \rangle} := X + \varepsilon$$

$$S^{\langle 0 \rangle} := Y \qquad S^{\langle 1 \rangle} := Y + \varepsilon$$

$$T^{\langle 0 \rangle} := Z \qquad T^{\langle 1 \rangle} := Z + \varepsilon$$



(R, S, T)

Рисунок 3

В якості прикладів розрахунку динамічних систем наводились траєкторії на фазовій площині і у фазовому просторі. Але для дослідження фазового портрету необхідно розв'язати ситему диференціальних рівнянь велику кількість раз з різними початковими умовами (і, можливо, з різним набором параметрів моделі), щоб дізнатись, до якої точки збігаються різні траєкторії. Розглянемо таку задачу для розв'язку системи рівнянь автокаталітичної хімічної реакції з дифузією. Невідомі функції відображають динаміку концентрації проміжних продуктів деякої хімічної реакції. Параметр моделі *B* дорівнює початковій концентрації каталізатора.

Запишемо програму мовою пакета MathCAD.

$$v := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.5 & 1.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1.5 & 0.1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$B := 0.5$$

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} -(B+1)\cdot y_0 + (y_0)^2 \cdot y_1 + 1 \\ B\cdot y_0 - (y_0)^2 \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

$$t0 := 0 \qquad t1 := 4$$

$M := 100$

$$
U(v,t0,t1,M,D) := \left|\begin{array}{l}
y \leftarrow v^{\langle 0\rangle} \\
Z \leftarrow \mathrm{rkfixed}(y,t0,t1,M,D) \\
Z1^{\langle 0\rangle} \leftarrow Z^{\langle 0\rangle} \\
Z1^{\langle 1\rangle} \leftarrow Z^{\langle 1\rangle} \\
Z1^{\langle 2\rangle} \leftarrow Z^{\langle 2\rangle} \\
\text{for } k \in 1..\mathrm{last}\left[\left(v^{T}\right)^{\langle 1\rangle}\right] \\
\quad \left|\begin{array}{l}
y \leftarrow v^{\langle k\rangle} \\
Z \leftarrow \mathrm{rkfixed}(y,t0,t1,M,D) \\
Z2^{\langle 0\rangle} \leftarrow Z^{\langle 0\rangle} \\
Z2^{\langle 1\rangle} \leftarrow Z^{\langle 1\rangle} \\
Z2^{\langle 2\rangle} \leftarrow Z^{\langle 2\rangle} \\
Z1 \leftarrow \mathrm{stack}(Z1,Z2)
\end{array}\right. \\
Z1
\end{array}\right.
\qquad \mathrm{last}\left[\left(v^{T}\right)^{\langle 1\rangle}\right] = 9
$$

Запропонована програма формує з окремих матриць розв'язків системи з різними початковими умовами об'єднану матрицю U. Пари початкових умов задаються у вигляді матриці v розмірнісю 2×10. Це означає побудову десяти траєкторій. Для того, щоб поміняти кількість траєкторій, потрібно відповідно змінити розмірність матриці.

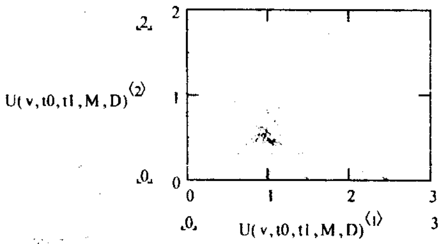


Рисунок 4

Як видно з рисунка, всі траєкторії, які вийшли з різних точок, збігаються в точку (1,0.5). Еволюцію фазового портрета можна спостерігати, проводячи розрахунки з різним параметром B. При $B = 2.5$ відбувається якісна перебудова портрета. Фазова траєкторія для такого параметра - граничний цикл (рисунок 5).

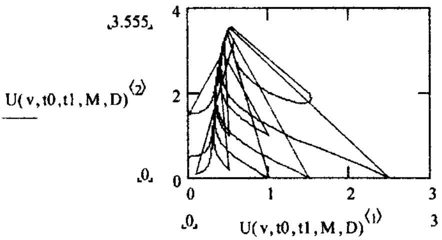


Рисунок 5

Завдання для індивідуальної роботи

Розв'язати систему диференціальних рівнянь

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \sin t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y + e^{-t}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^{t} + e^{-t}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y - 2e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 4y - 4e^{-t}. \end{cases}$$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 5y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y - 5t + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + t + 1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y + 40e^{-t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y + 9e^{-t}. \end{cases}$

Завдання для аудиторної самостійної роботи

Розв'язати систему диференціальних рівнянь

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 1 - t^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 3y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^{t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + t^2 - 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2x + 4y = 4t, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x + t^2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x + t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y + e^{3t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y + 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 4e^{t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 5\sin 2t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 10x - 4y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - 5y. \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y - e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y + 6e^{2t}. \end{cases}$

Завдання типового розрахунку №8

Розв'язати систему диференціальних рівнянь. Дослідити її на стійкість. За допомогою одного з математичних пакетів зобразити графічно траєкторії розв'язків цієї системи $x(0) = -1$, $y(0) = 0$.

1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t}, \\ y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^{t}. \end{cases} \right)$

2. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{t}, \\ y = -2C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}. \end{cases} \right)$

3. $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}, \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{3t} - \frac{1}{4} C_2 e^{-3t}. \end{cases} \right)$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{t}, \\ y = \frac{1}{3} C_1 e^{-3t} - C_2 e^{t}. \end{cases} \right)$

5. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{5t}, \\ y = C_1 - 4C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

6. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}, \\ y = 3C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}. \end{cases} \right)$

7. $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}, \\ y = 3C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t}, \\ y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t}. \end{cases} \right)$

9. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t}. \end{cases} \right)$

10. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^{t} - \frac{3}{2} C_2 e^{2t}. \end{cases} \right)$

11. $\begin{cases} x' = -2y, \\ y' = y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-2t}, \\ y = C_1 e^{t} + C_2. \end{cases} \right)$

12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{8t}. \end{cases} \right)$

13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t}, \\ y = 2C_1 e^{2t} + \frac{1}{3} C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$

14. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}. \end{cases} \right)$

15. $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + \frac{5}{3} C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$

16. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 + 3C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$

17. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases}$ $\left(Відповідь: \begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{9t}, \\ y = -C_1 e^{t} + C_2 e^{9t}. \end{cases} \right)$

18. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

19. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{3t}. \end{cases} \right)$

20. $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$

21. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x + 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

22. $\begin{cases} x' = 7x - 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{4t} + \frac{1}{3} C_2 e^{8t}. \end{cases} \right)$

23. $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

24. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{6t}, \\ y = -\frac{1}{4} C_1 + \frac{1}{2} C_2 e^{6t}. \end{cases} \right)$

25. $\begin{cases} x' = 5x + 8y, \\ y' = 3x + 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}, \\ y = -\frac{3}{4} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{9t}. \end{cases} \right)$

26. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -4C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$

27. $\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - \frac{1}{5} C_2 e^{2t}. \end{cases} \right)$

28. $\begin{cases} x' = -5x + 2y, \\ y' = x - 6y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t}, \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{4t} - C_2 e^{-7t}. \end{cases} \right)$

29. $\begin{cases} x' = 6x + 3y, \\ y' = -8x - 5y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\frac{8}{3} C_1 e^{-2t} - C_2 e^{3t}. \end{cases} \right)$

30. $\begin{cases} x' = 4x - 8y, \\ y' = -8x + 4y. \end{cases}$ $\left(\textit{Відповідь}: \begin{cases} x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{12t}, \\ y = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{12t}. \end{cases} \right)$

Крайові задачі

На відміну від задачі Коші для звичайного диференціального рівняння в крайовій задачі значення шуканої функції або значення лінійної комбінації функції і її похідної задається не в одній, а в двох точках (для двоточкової задачі), які обмежують відрізок, на якому шукається розв'язок.

Щоб розв'язати лінійну крайову задачу виду

$$l(y) \equiv a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x) = f(x),\ x \in [a;\ b], \tag{1}$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \tag{2}$$

де $a(x) \neq 0, \quad x \in [a;\ b]$,

треба знайти загальний розв'язок рівняння (1) і підібрати значення довільних сталих так, щоб виконувались крайові умови (2). Крайова задача не завжди має розв'язок, а якщо й має, то цей розв'язок не обов'язково єдиний.

Інтегральне зображення розв'язку лінійної крайової задачі (1), (2)

Теорема. Якщо лінійна однорідна задача (1), (2) ($f(x) \equiv 0$) має лише тривіальний розв'язок, то лінійна неоднорідна задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який можна записати в інтегральній формі

$$y = \int_a^b G(x, s)\, f(s)\, ds, \tag{3}$$

де G(x,s) - функція Гріна (впливу) задачі (1), (2). Функція G(x,s) визначена для $x \in [a;\ b]$, $s \in (a;\ b)$ і для кожного $s \in (a;\ b)$ має такі властивості:

1. Для $x \neq s$ функція $G(x,s)$ задовольняє лінійне однорідне рівняння

$$(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0. \tag{4}$$

2. Для $x = a$ і $x = b$ функція $G(x, s)$ задовольняє крайові умови (2).
3. Для $x = s$ функція $G(x, s)$ неперервна по x, а її похідна по x має розрив першого роду зі стрибком, який дорівнює $\frac{1}{a(x)}$, тобто

$$G(s + 0, s) = G(s - 0, s),\ G'_x(s + 0, s) - G'_x(s - 0, s) = \frac{1}{a(s)}. \tag{5}$$

Щоб знайти функцію Гріна задачі (1), (2), треба побудувати розв'язок $y_1(x) \neq 0$ рівняння (4), який задовольняє лише першу $(x = a)$ крайову умову, і розв'язок $y_2(x)$, який задовольняє другу $(x=b)$ крайову умову. Ці розв'язки є лінійно незалежними, бо, якщо $y_1 = cy_2$, $c = const \neq 0$, то функція $y_1(x) \neq 0$ була б нетривіальним розв'язком лінійної однорідної $(f(x) \equiv 0)$ задачі (1), (2), що суперечить умові теореми.

Функцію $G(x, s)$ шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s) y_1(x) \\ \psi(s) y_2(x) \end{cases} \text{при } a \le x \le s \text{ та } s \le x \le b, \tag{6}$$

Де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ вибираються так, щоб виконувались умови (5), тобто, щоб

$$\psi(s)\,y_2(s) = \varphi(s)y_1(s),\ \ \psi(s)\,y_2'(s) - \varphi(s)y_1'(s) = \frac{1}{a(s)} \tag{7}$$

Оскільки головний визначник системи (7)

$$(s) = \begin{vmatrix} y_2(s) - y_1(s) \\ y_2'(s) - y_1'(s) \end{vmatrix} = W\,[y_1(s);\, y_2(s)] \neq 0,$$

внаслідок лінійної незалежності розв'язків y_1 і y_2 то функції $\varphi(s)$ і $\phi(s)$ визначаються з (7) однозначно.

При розв'язуванні лінійних крайових задач наближеними методами часто застосовують такий прийом.

Розв'язок лінійного рівняння (1) шукають у вигляді

$$y = y_0(x) + \mu u(x) + \nu \upsilon(x), \tag{8}$$

де $y_0(x)$, $u(x)$, $\upsilon(x)$ є розв'язками таких задач Коші:

$$l(y) = f(x),\ y(a) = y'(a) = 0;\ l(y) = 0,\ y(a) = 1,\ y'(a) = 0;$$
$$(y) = 0,\ \ y(a) = 0,\ y'(a) = 1. \tag{9}$$

Підставивши (8) у крайові умови (2), дістанемо систему двох рівнянь для визначення коефіцієнтів μ і ν.

Якщо коефіцієнти рівняння (1) або крайових умов (2) залежать від деякого параметра λ, то при певних умовах існують такі значення цього параметра, для яких крайова задача має нетривіальний розв'язок. Ці значення параметра λ називаються *власними значеннями*, а відповідні їм розв'язки крайової задачі *власними функціями*. Важливим окремим випадком задачі на власні значення є задача *Штурма-Ліувілля*:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{dy}{dy}\right) - q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0, \tag{10}$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0,\ \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \tag{11}$$

де функції p, p', q, ρ - неперервні на $[a;\, b]$, $p > 0$, $\rho > 0$, $x \in [a;\, b]$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0, \gamma^2 + \delta^2 > 0$.

Приклад 1. Розв'язати задачу

$$y'' - y' = 0,\ y(0) = 3,\ y(1) - y'(1) = 1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 + C_2 e^x$, де C_1, C_2 - довільні сталі. Підберемо C_1 і C_2 так, щоб виконувались задані крайові умови. Маємо

$$C_1 + C_2 = 3,\ C_1 + C_2 e - C_2 e = 1,$$

звідки $$C_1 = 1,\ \ C_2 = 2.$$

Отже, розв'язком даної задачі є функція

$$y = 1 + 2e^x.$$

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$y'' + y' = 0, \ y(0) = 0, \ y(a) = y_0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Умова $y(0) = 0$ задовольняється для $C_1 = 0$.

Якщо $a \neq n\pi$, $n \in Z$, то з другої кривої знаходимо: $y_0 = C_2 \sin a$, $C_2 = \dfrac{y_0}{\sin a}$.

Отже, в цьому випадку існує єдиний розв'язок даної крайової задачі:

$$y = \frac{y_0}{\sin a} \sin x.$$

Якщо $a = n\pi$, *то* з другої крайової умови маємо:

$$C_2 \sin n\pi = y_0.$$

Якщо $y_0 = 0$, то крайова задача має нескінченну множину розв'язків $y = C_2 \sin x$, де C_2 – довільна стала.

Якщо $a = n\pi$, а $y_0 \neq 0$, то крайова задача розв'язків немає.

Приклад 3. Побудувати функцію Гріна для задачі $y''-y=f(x)$, де розв'язок $y(x)$ обмежений при всіх $x \in (-\infty, +\infty)$.

Розв'язання. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

Розв'язок $y_1(x) = e^x$ обмежений для $x \to -\infty$, а $y_2(x) = e^{-x}$ –для $x \to +\infty$.
Тому функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)e^x, \text{якщо} & -\infty < x \le s; \\ \psi(s)e^{-x}, \text{якщо} & s \le x < +\infty, \end{cases}$$

функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ визначаються з рівнянь

$\psi(s)\, e^{-s} = \varphi(s)\, e^s$, $-\psi(s)\, e^{-s} = \varphi(s)\, e^s + 1$.

Звідси $\varphi(s) = -\dfrac{1}{2} e^{-s}$, $\psi(s) = -\dfrac{1}{2} e^{s}$.

Отже,

$$G(x, s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} e^{x-s}, \text{якщо} & -\infty < x \le s; \\ -\dfrac{1}{2} e^{s-x}, \text{якщо} & s \le x < +\infty. \end{cases}$$

Приклад 4. Записати в інтегральній формі розв'язок задачі

$$y''=f(x),\ y(-1)=y(1)=0,\ -1\le x\le 1.$$

Розв'язання. Загальним розв'язком однорідного рівняння $y''=0$ є

$$y=C_1+C_2x.$$

Розв'язок $y_1\ (x)=1+x$ задовольняє першу крайову умову $y(-1)=0$, а розв'язок $y_2\ (x)=1-x$ – другу умову $y(1)=0$. Тому функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$G(x,s)=\begin{cases}\varphi(s)(1+x), \text{якщо } -1\le x\le s;\\ \psi(s)(1-x), \text{якщо } s\le x\le 1,\end{cases}$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ знаходимо з умов:

$$\varphi(s)(1+s)=\psi(s)(1-s),\ -\psi(s)-\varphi(s)=1.$$

Звідси

$$\varphi(s)=-\frac{1-s}{2},\ \ \psi(s)=-\frac{1+s}{2}.$$

Отже,

$$G(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(1-s)(1+s), \text{якщо } -1\le x\le s;\\ -\frac{1}{2}(1+s)(1-x), \text{якщо } s\le x\le 1,\end{cases}$$

І розв'язок даної задачі має вигляд

$$y=\int_{-1}^{1}G(x,s)f(s)ds=-\frac{1+x}{2}\int_{-1}^{x}(1-s)f(s)ds-\frac{1-x}{2}\int_{x}^{1}(1+s)f(s)ds.$$

Приклад 5.

Знайти власні значення та власні функції задачі

$$y''=\lambda y,\ y(0)=y(l)=0,\ l>0.$$

Розв'язання. Якщо $\lambda=0$, то $y=C_1x+C_2$ і крайові умови задовольняє лише тривіальний розв'язок $y\equiv 0$, тобто $\lambda=0$ не є власним значенням.

Нехай $\lambda>0$. Тоді $y=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Серед цих функцій крайові умови задовольняє лише $y\equiv 0$.

Якщо $\lambda<0$, то розв'язки рівняння $y''=\lambda y$ мають вигляд

$$y=C_1\sin\sqrt{-\lambda}\,x+C_2\cos\sqrt{-\lambda}\,x$$

Підставивши цей вираз у крайові умови, дістанемо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin \sqrt{-\lambda}\, l = 0.$$

Отже, задача має ненульові розв'язки лише для $\sqrt{-\lambda}\, l = k\pi$, тобто

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k = 1, 2, \ldots$$

Ці значення λ є власними. Відповідні власні функції:

$y_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$

Приклад 6. Знайти власні значення та власні функції задачі $y'' - \lambda y = 0$, $y'(0) = y(l) = 0$, $l > 0$

Розв'язання. Як і в попередній задачі, можна показати, що значення $\lambda \in [0; +\infty)$ не є власними.

Нехай $\lambda < 0$. Тоді $y = C_1 \sin \sqrt{-\lambda}\, x + C_2 \cos \sqrt{-\lambda}\, x$. Підставивши в крайові умови, дістанемо $C_1 = 0$, $C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) = 0$, тобто $\sqrt{-\lambda} = \left(\frac{1}{2} + k\right)\frac{\pi}{l}$.

Отже, власними значеннями даної задачі є числа

$$\lambda = \lambda_k = -\left(\frac{1}{2} + k\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Відповідні власні функції:

$$y_k(x) = \cos\left(\frac{1}{2} + k\right)\frac{\pi x}{l}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

1. Розв'язати крайові задачі :

1. $y'' + y = 1;\ y(0) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

2. $y'' - 2y' - 3y = 0;$ а) $y(0) = 1,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0;$ б) $y(0) = 1,\ \lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 2.$

2. Побудувати функцію Гріна для крайових задач:

1. $y'' = f(x);$) $y(0) = y(1) = 0;$) $y(0) = 0,\ y'(1) = 0;$) $y(0) + y(1) = 0,\quad y'(0) + y'(1) = 0.$
2. $y'' + y = f(x),\ y(0) = y(1) = 0.$
3. $y'' - k^2 y = f(x),\ k \neq 0,\ y(-1) = y(1),\ y'(-1) = y'(1).$
4. $y'' + y = f(x);\ y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi).$

3. Знайти власні значення:

1. $y'' = \lambda y;\ y'(0) = y'(l) = 0.$
2. $y'' = \lambda y;\ y(0) = y'(0) = 0.$

Методи розв'язування диференціальних рівнянь поділяють на графічні, аналітичні, наближені і чисельні.

Графічні методи грунтуються на геометричних побудовах. Наприклад, у методі ізоклін спочатку будують поле кривих постійного нахилу (поле ізоклін), де розв'язок рівняння відшукують у вигляді інтегральних кривих. Цей метод застосовують для диференціальних рівнянь першого порядку.

Слід зазначити, що навіть у спрощеній постановці для порівняно простих й ідеалізованих розрахункових моделей аналітичні розв'язання надто утруднені або ж виключені зовсім. Однак, якщо розв'язки знайдені, то їх відносять до так званих точних розв'язків. Вони є орієнтирами для оцінки похибок (тестування) наближених розв'язків тієї самої задачі.

У наближених методах спрощують власне диференціальне рівняння (наприклад, при формуванні диференціальних залежностей відкидають члени вищого порядку мализни) або ж використовують різні прийоми розв'язування, які, незважаючи на зниження точності кінцевого результату, дають змогу всеж таки його дістати. Один із прийомів полягає в тому, що шуканий розв'язок зображують у вигляді суми двох складових. Перша визначає основний лінійний розв'язок, а другу використовують як добавку (збурення), квадратом якого можна знехтувати. Цей прийом відомий як лінералізація розв'язання і використовується при розв'язуванні нелінійних задач.

У наближених методах використовують також ідею розвинення у ряд за деяким малим параметром (метод малого параметра), ідеї, за допомогою яких розв'язок описує граничну картину задачі (група асимтотичних методів), тощо.

Разом з тим останнім часом для розв'язування багатьох інженерних задач, які можна описати за допомогою диференціальних рівнянь, найефективнішим (а в багатьох випадках – єдиним) є чисельні методи. За своєю природою це наближені методи. До них належать методи Рітца і Бубнова-Гальоркіна, скінченних елементів і скінченних різниць, метод потенціалу та ін.

Для перших двох методів розрахункову модель об'єкта розглядають як суцільне середовище (континуум). Невідомі функції, напрклад переміщення, температура і тиск у точці, шукають у вигляді неперервної функції координат. Для розрахунку тіл складної форми використовують надзвичайно плідну ідею дискретизації суцільного тіла на фрагменти. У цьому випадку фактично неперервне змінювання функції апроксимується дискретною моделлю, тобто значення шуканої функції знаходять у скінченній кількості точок досліджуваної області. До цих методів розрахунку належать методи скінченних різниць, скінченних елементів, метод потенціалу тощо.

Але ми завжди уявляли, що відповідне диференціальне рівняння має розв'язок. Питання про те, коли розв'язок існує, коли він єдиний, вирішується так званими теоремами існування та єдиності. Вони мають принципове значення, гарантуючи законність використання якісних методів теорії диференціальних рівнянь для розв'язання інженерних і технічних задач. Часто доведення самих теорем існування та єдиності є конструктивними, тобто методи доведення дають і методи наближеного відшукування розв'язків з будь-яким ступенем точності. Таким чином теореми існування та єдиності лежать в основі методів чисельного інтегрування.

Розглянемо два приклади, але спочатку сформулюємо один із варіантів теорем існування та єдиності.

Теорема існування. Якщо в рівнянні $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ функція f визначена і неперервна в деякій обмеженій області D площини (x,y), то для будь-якої точки $(x_0,y_0)\in D$ існує розв'язок $y(x)$ початкової задачі

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0, \tag{1}$$

який визначений на деякому інтервалі і який містить точку x_0.

Теорема існування і єдиності. Якщо в рівнянні $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ функція f визначена і неперервна в деякій обмеженій області D площини (x,y), і задовольняє в області D умову Ліпшиця за змінною y, тобто

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|<L|y_2-y_1|,$$

де L- стала, то для будь якої точки $(x_0,y_0)\in D$ існує єдиний розв'язок $y(x)$ початкової задачі (1) який визначений на деякому інтервалі і який містить точку x_0.

Теорема про продовження. При виконанні умов теореми існування або теореми існування та єдиності будь-який розв'язок рівняння $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ з початковими даними $(x_0,y_0)\in D$ може бути продовженим до точки будь-як наближеної до області D. При цьому в першому випадку продовження буде необов'язково єдиним, в другому випадку воно єдине.

Розглянемо деякі чисельні методи інтегрування.

Метод Ейлера

Цей метод призначено для розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку, які мають вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

Він грунтується на розвинені функції $y = f(x)$ в околі точки x_0 у ряд Тейлора:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \ldots \qquad (2)$$

Якщо h має мале значення, то члени, що містять h у другому і вищих степенях, є нескінчено малими більш високих порядків і ними можна знехтувати. Тоді

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0), \qquad (3)$$

або

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \qquad (4)$$

де $y_1 = y(x_0 + h)$; $y_0 = y(x_0)$; $f(x_0, y_0) = y'(x_0)$.

Вираз (4) має вигляд рекурентних формул, за допомогою яких значення функції y_{n+1} в будь-якій точці x_{n+1} обчислюють за її значенням y_n у попередній точці x_n:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad h = x_{n+1} - x_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (5)$$

Оскільки в розвинені Тейлора члени, що містять h у другому і вищих степенях, відкидають, то похибка в методі Ейлера має порядок h^2. Вона ж зменшується пропорційно цій величині.

Модифікований метод Ейлера

У модифікованому методі Ейлера обчислення здійснюють за такою схемою:

1. За допомогою формули (5) послідовно обчислюють значення функції на початку (y_n) і в кінці ($\tilde{y}_{n+1}$) інтервалу.
2. За значенням функції $\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ обчислюють значення похідної в кінці інтервалу за формулою

$$y' = f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \qquad (6)$$

3. Обчислюють середнє значення похідної за її значеннями на початку і в кінці інтервалу:

$$y'_{cp} = \frac{1}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right] \tag{7}$$

4. За середнім значенням похідної уточнюють значення функції в кінці інтервалу за формулою

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n, y^{\%}_{n+1})\right] \tag{8}$$

Похибка на кожному кроці модифікованого методу Ейлера має порядок h^3, тобто вона зменшується пропорційно h^3.

Приклад 1.

Використовуя метод Ейлера з кроком $h=0,1$, знайти розв'язок диференціального рівняння $y' = -\frac{x}{y}$, $y(-1) = 0.21$ на відрізку $[-1,3]$.

Розв'язуємо початкову задачу за допомогою математичного пакету MathCAD. Складаємо програму мовою пакета. Результати чисельного обрахунку подаємо в таблиці.

$x^T =$	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1
$y^T =$	0.21	0.686	0.817	0.915	0.992	1.052	1.1	1.136	1.163	1.18

$x^T =$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$y^T =$	1.188	1.188	1.18	1.163	1.137	1.102	1.056	1	0.93	0.844

$x^T =$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$y^T =$	0.737	0.601	0.418	0.131	-0.859	-0.696	-0.48	-0.146	1.014	0.837

$x^T =$	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$y^T =$	0.609	0.281	-0.465	$5\cdot10^{-3}$	28.977	28.969	-28.96	28.951	28.942	28.932

Графічна інтерпритація отриманих результатів показана на рисунку 1.

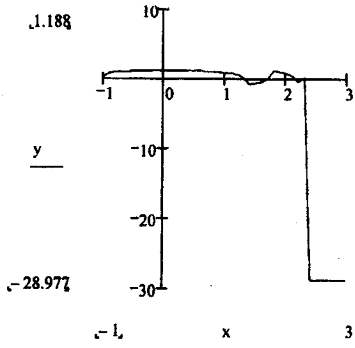


Рисунок 1

Використаємо теорему існування. Для початкової задачі, яка досліджується, функція $f(x,y) = -\frac{x}{y}$ визначена і неперервна на всій площині (x,y), за винятком точок осі абсцис. Таким чином, у відповідності з теоремою існування, існує розв'язок $y(x)$ початкової задачі, який визначений на деякому інтервалі, який містить точку $x_0 = -1$. Цей розв'язок за теоремою про продовження може бути продовжений до значення $y(x)$, близького до значення $y(x) = 0$.

У результаті чисельного інтегрування отримаємо розв'язок початкової задачі на деякому інтервалі (a,b), де $a<1$, $1{,}3<b<1{,}4$. Але, враховуючи конкретний вигляд диференціального рівняння, можна встановити проміжок існування розв'язку початкової задачі. Оскільки в рівнянні змінні відокремлюються, то

$$\int_{0.21}^{y} \eta d\eta = -\int_{-1}^{x} \xi d\xi.$$

Зінтегрувававши, отримаємо, що $y = \sqrt{1.0441 - x^2}$. Тобто розв'язок початкової задачі існує тільки для $|x| < \sqrt{1.0441} \approx 1.0218$.

Отже, застосування теореми існування (теореми про продовження) дозволило "відсікти" відрізок, на якому розв'язок початкової задачі не існує. Одне ж тільки чисельне інтегрування призводить до помилкового результату. Справа в тому, що при наближені розв'язку $y = y(x)$ до осі x, кут нахилу кривої наближається до 180°. Тому, поки аргумент x змінюється на величину 0,1, значення y встигає "перескочити" вісь ох, і ми попадаємо на іншу ітнтегральну криву.

Приклад 2.

Використавши спочатку метод Ейлера, а потім модифікований метод Ейлера, з кроком $h = 0.1$, знайти розв'язок початкової задачі $y' = 3x\sqrt[3]{y}$, $y(-1) = -1$ на проміжку [-1,1].

Розв'язуємо початкову задачу за допомогою MathCAD. Складаємо програму чисельного інтегрування методом Ейлера.

Результати чисельного розрахунку зведені в таблицю.

$x^T =$

-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4

$y^T =$

-1	-0.7	-0.46	-0.275	-0.138	-0.045	$8.173 \cdot 10^{-3}$

$x^T =$

-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3

$y^T =$

-0.016	$6.679 \cdot 10^{-3}$	$-4.62 \cdot 10^{-3}$	$3.763 \cdot 10^{-4}$	$3.763 \cdot 10^{-4}$	$2.542 \cdot 10^{-3}$	0.011

$x^T =$

0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1

$y^T =$

0.031	0.068	0.129	0.22	0.347	0.516	0.732

Графічна інтерпретація отриманих результатів показана на рисунку 2.

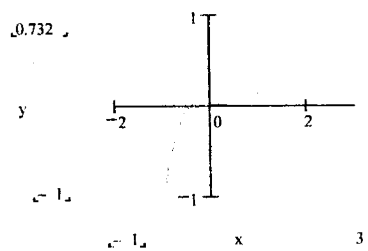


Рисунок 2

Складаємо програму чисельного інтегрування модифікованого метода Ейлера. Отримані числові значення занесені в таблицю.

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5

$z^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	-1	-0.73	-0.514	-0.346	-0.219	-0.129

$x^T =$

	6	7	8	9	10	11
0	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1

$z^T =$

	6	7	8	9	10	11
0	-0.068	-0.031	-0.012	$-4.173\cdot10^{-3}$	$-2.363\cdot10^{-3}$	$-4.361\cdot10^{-3}$

$x^T =$

	12	13	14	15	16	17
0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7

$x^T =$

	18	19	20
0	0.8	0.9	1

$z^T =$

	18	19	20
0	-0.522	-0.739	-1.01

Отримаємо графік, відмінний від попереднього (рисунок 3).

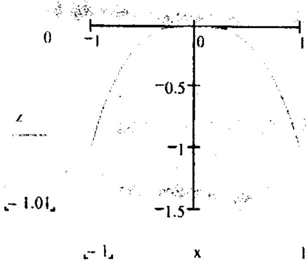


Рисунок 3

В чому причина такої розбіжності в результатах?
Проінтегруємо початкову задачу.

$$\int_{-1}^{y} \eta^{-\frac{1}{3}} d\eta = 3\int_{-1}^{x} \xi d\xi,$$

або $y = \pm x^3$. Можна побачити, що розв'язок за методом Ейлера наближає функцію $y_1(x) = x^3$, а за модифікованим методом Ейлера – функцію

$$y_2(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 0, \\ -x^3, & x \succ 0. \end{cases}$$

При цьому, y_1, і y_2 є розв'язками даного диференціального рівняння, тому для початкової задачі, що розглядається на проміжку [-1,1] маємо неєдиність.

Звертаючись до теореми існування і єдиності, відмітимо, що оскільки функція $f(x,y)=3x\sqrt[3]{y}$ неперервна на всій площині (x,y), то з теореми існування випливає, що існує розв'язок початкової задачі, який визначений на деякому проміжку, який містить $x_0=-1$. Цей розв'язок (за теоремою про продовження) може бути продовжений на будь-який проміжок. Оскільки $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=xy^{-\frac{2}{3}}$, то функція $f(x,y)=3x\sqrt[3]{y}$ задовільняє умову Ліпшиця за змінною y в будь-якій області, яка не містить точок осі x. Якщо область містить точки осі x, то в ній вказана функція умову Ліпшиця не задовольняє. Тому з теореми існування і єдиності (і теореми про продовження) випливає, що в даному випадку розв'язок початкової задачі може бути продовжений до осі x. Оскільки пряма $y=0$ є особливою інтегральною кривою для диференціального рівняння $y'=3x\sqrt[3]{y}$, то як тільки y стане рівним нулю, розв'язок початкової задачі не може бути єдино продовженний за точку $O(0,0)$.

Отже, звернення в даному випадку до теореми існування і єдиності (і теореми про продовження) дозволило розібратися в результатах чисельного інтегрування. Якщо мова іде про єдиність розв'язку початкової задачі на проміжку [-1,1], то він єдиний і визначений на проміжку [-1,0]. В загальному випадку таких розв'язків декілька.

Наближений метод, пов'язаний з многочленами Чебишева

В багатьох випадках потрібно отримати аналітичне наближення розв'язку. До такого методу належать методи, пов'язані з многочленами Чебишева. В простому випадку для рівняння

$$\sum_{m=0}^{n} P_m f^{(n-m)} = P,$$

коефіцієнти Чебишева розв'язку функції f даного рівняння задовільняють прості рекурентні відношення, за якими такі коефіцієнти можна визначити з великою точністю. Таким чином отримаємо наближений вираз для функції f у вигляді лінійної комбінації многочленів Чебишева T_k.

Приклад.

$(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=x^2+x$

Загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1(2x-1) + C_2 e^{-x} + \frac{x^2+1}{2}.$$

Введемо початкові умови: $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$.

Частинний розв'язок, який задовільняє початкові умови має вигляд:

$$y1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 - 2e^{-x}.$$

Застосуємо наближений метод, який грунтується на використанні многочленів Чебишева. Наближений розв'язок шукаємо, наприклад, у вигляді суми перших трьох многочленів Чебишева.

$$y(x) = \alpha_0 T_0(x) + \alpha_1 T_1(x) + \alpha_2 T_2(x),$$
$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Для обчислення коефіцієнтів α_0, α_1, α_2, сформуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_0 - \alpha_2 = -1, \\ \alpha_0 - 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 1, \\ 6\alpha_0 + 48\alpha_1 + 28\alpha_2 = 7 \end{cases}$$

При побудові системи, коефіцієнти диференціального рівняння необхідно було виразити через многочлени Чебишева:

$$2x + 1 = T_0 + 2T_1,$$
$$2x - 1 = -T_0 + 2T_1,$$
$$-2 = -2T_0,$$
$$x^2 + x = \frac{1}{2}T_0 + T_1 + \frac{1}{2}T_2.$$

Розв'язком системи є числа:

$$\alpha_0 = -\frac{17}{26} \approx -0.6538, \quad \alpha_1 = \frac{2}{39} \approx 0.0513, \quad \alpha_3 = \frac{9}{26} \approx 0.3462.$$

Отже, наближенний розв'язок має вигляд:

$$y2(x) \approx 0.6923x^2 + 0.0513x - 1$$

Якщо застосувати метод невизначених коефіцієнтів, тобто розв'язок шукати у вигляді: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, то він матиме вигляд:

$$y3(x) \approx -1 + x - 0.5x^2$$

На рисунку 4 наведені графіки отриманих наближених розв'язків.

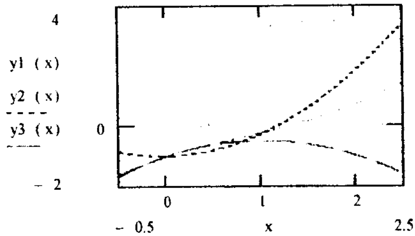


Рисунок 4

Отже, ми отримали аналітичне наближення розв'язку даного диференціального рівняння на відрізку [0,1].

Метод скінченних різниць

Суть методу полягає в тому, що похідні, які входять до диференціального рівняння, замінюють їхніми наближеними виразами. Така заміна дає можливість звести розв'язування диференціального рівняння для неперервної зміни аргументу до розв'язування системи лінійних рівнянь для функції дискретної зміни аргументу, заданого множиною точок (вузлів). Шукану функцію, визначувану у цих вузлах, називають вузловою, а одержану внаслідок дискретизації систему лінійних алгебраїчних рівнянь — скінченно-різницевою або просто різницевою.

Розв'язання системи скінченно-різницевих рівнянь дає змогу визначити наближені значення шуканої функції у вузлових точках. Кількість вузлових точок залежить від потрібної точності розв'язку, тому при розрахунках «вручну» треба починати з грубого розбиття області зміни невідомої функції на інтервали (ділянки), повторюючи потім розрахунок при більшій кількості розбиттів.

Розглянемо заміну похідних їхніми наближеними виразами через скінченні різниці.

Нехай шукану функцію $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння n-го порядку, задано кривою, показаною на рисунку 1. Розіб'ємо відрізок NL осі *Ox*, на якому будемо шукати розв'язок, на *k* ділянок однакової довжини *h* (крок сітки), взявши за вузли точки розбиття на ділянки. Позначимо сіткову функцію у вузлах i через y_i, а аргумент — через x_i.

Далі для зручності вузли i будемо ототожнювати із значенням аргументу x_i в цих точках, хоч ці поняття і різні i — номер вузла, а x_i — значення аргументу у вузлі i. Припустимо, що на деякому інтервалі [x_{i-2}, ..., x_{i+2}] криву $y = f(x)$ замінено ламаною, що сполучає вершини y_{i-2}, .., y_{i+2}. Запишемо першу похідну функції $y = f(x)$ для $x = x_i$ (точка С на кривій). За означенням перша похідна чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної, проведеної до кривої в точці С, до осі 0х, тобто $y'(x_i) = tg\alpha$.

Позначимо кут нахилу січної АС через β_i. Очевидно, що при досить невеликих значеннях кроку h кути α і β_i, будуть мало різнитися між собою, тому можна вважати, що $tg\alpha \approx tg\beta_i$. Запишемо $tg\beta_i$ через вузлові функції y_i і y_{i-1} і дістанемо наближений вираз першої похідної

$$y'(x_i)_- \approx (y_i - y_{i-1})/h \qquad (1)$$

де

$$(y_i - y_{i-1})/h = tg\beta_i$$

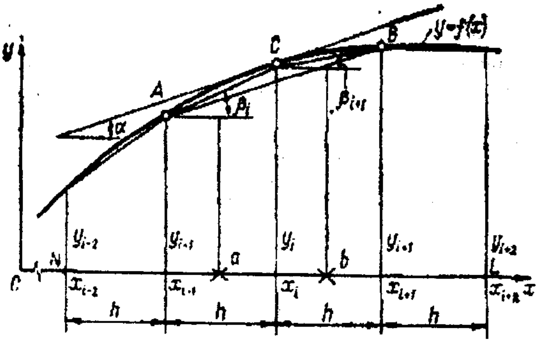


Рисунок 5

Першу похідну для $x = x_i$ наближено можна обчислити так:

$$y'(x_i)_+ \approx (y_{i+1} - y_i)/h \qquad (2)$$

де

$$(y_{i+1} - yi)/h = tg\beta_{i+1}.$$

Вирази, що стоять у правих частинах (1) і (2), називають відповідно лівою (знак -) і правою (знак +) різницевою похідною, а чисельники цих виразів — відповідно лівою і правою скінченою різницею.

З рисунка 5 видно, що значення першої похідної для $x = x_i$ буде точнішим, якщо її усереднити через ліву і праву скінченні різниці, бо нахил січної AB ближче до нахилу дотичної, ніж нахили січних AC і CB. Тоді першу похідну для $x = x_i$ запишемо так:

$$y'(x_i) = \frac{1}{2}\left[y'(x_i)_- + y'(x_i)_+\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right] = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \qquad (3)$$

Чисельник цього виразу називають центральною скінченною різницею, а вираз у цілому — центрально-різницевою похідною. Надалі, якщо не буде спеціального застереження, умовимося замінити перші похідні функції $y = f(x)$ центрально-різницевими зображеннями.

Для неперервної, n разів диференційованої функції за допомогою методу скінченних різниць можна зобразити будь-яку похідну до n-го порядку включно. Зокрема, другу похідну для $x = x_i$ можна знайти через різницю перших похідних для $x = a$ і $x = b$ (див. рисунок 1):

$$\left(y'(x_i)\right)' = \frac{y'(b) - y'(a)}{h} = \frac{(y_{i+1} - y_i)/h - (y_i - y_{i-1})/h}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \;. \qquad (4)$$

Третю похідну для $x = x_i$ визначають через різницю других похідних при $x = x_{i+1}$ і $x = x_{i-1}$:

$$\begin{aligned}\left(y''(x_i)\right)' &= \frac{y''(x_{i+1}) - y''(x_{i-1})}{2h} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i - y_i + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3} = \\ &= \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3} \;.\end{aligned} \qquad (5)$$

Четверту похідну для $x = x_i$ визначають через другу різницю других похідних для $x = x_{i+1}$ і $x = x_{i-1}$:

$$\left(y''(x_i)\right)'' = \frac{\left[y''(x_{i+1}) - 2y''(x_i) + y''(x_{i-1})\right]/h^2}{h^2} = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} \qquad (6)$$

Приклад 1. Визначити прогини балки сталого перерізу, що зазнає дії навантаження, розподіленого за законом трикутника.

Розв'язання. Рівняння зігнутої осі балки запишемо у вигляді

$$y^{IV} = q(x)/(EI) \tag{7}$$

граничні умови:

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = -\frac{M}{EI} = 0 \quad \text{для} \quad x = 0$$

$$y(l) = 0, \quad y''(l) = -\frac{M}{EI} = 0 \quad \text{для} \quad x = l.$$

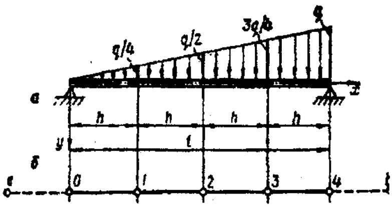


Рисунок 6.

Розіб'ємо балку по довжині на чотири ділянки і пронумеруємо вузли (рисунок 6). Замінимо для i-го вузла диференціальне рівняння (7) скінченно-різницевим за формулою (6):

$$y^{IV} = \frac{1}{h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) \, . \tag{8}$$

Використовуючи (8), складемо скінченно-різницеві рівняння для вузлів 1, 2 і 3: для вузла 1

$$y_a - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{qh^4}{4EI} \, ;$$

для вузла 2

$$y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = \frac{qh^4}{2EI} \, ;$$

для вузла 3

$$y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_6 = \frac{3qh^4}{4EI}.$$

При складанні рівнянь для вузлів 1 і 3 було введено a і b. Значення прогинів у точках a і b визначимо із граничних умов у точках 0 і 4.

Оскільки в точці 0 згинальний момент $M_0 = 0$ і прогин $y_0 = 0$, то, використавши (4), дістанемо

$$M_0 = -\frac{d^2 y}{dx^2}\bigg|_0 EI_0 = \frac{y_1 - 2y_0 + y_a}{h^2} EI_0 = 0,$$

звідки $y_a = -y_1$. Аналогічно $y_b = -y_3$. Підставимо в рівняння для вузлів 1, 2, 3 ці вирази для y_a і y_b, і врахуємо, що прогини $y_0 = y_4 = 0$, тоді матимемо систему скінченно-різницевих рівнянь

$$5y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{qh^4}{4EI};$$

$$-4y_1 + 6н_2 - 4y_3 = \frac{qh^4}{2EI};$$

$$y_1 - 4y_2 + 5y_3 = \frac{3}{4}\frac{qh^4}{EI}.$$

У матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

де

$$Q_1 = \frac{qh^4}{4EI}; \quad Q_2 - \frac{qh^4}{2EI}; \quad Q_3 - \frac{3}{4}\frac{qh^4}{EI}.$$

Розв'язуючи систему (9), дістанемо:

$$\begin{pmatrix} 5y_1 - 4y_2 + y_3 = \dfrac{ql^4}{4\cdot 256 EI} \\ -4y_1 + 6y_2 - 4y_3 = \dfrac{ql^4}{2\cdot 256 EI} \\ y_1 - 4y_2 + 5y_3 = 3\dfrac{ql^4}{4\cdot 256 EI} \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{19}{4096}\cdot\frac{ql^4}{EI} \quad \frac{7}{1024}\cdot\frac{ql^4}{EI} \quad \frac{21}{4096}\cdot\frac{ql^4}{EI} \right)$$

Точні значення прогинів.

$$\begin{pmatrix} y_1 = \dfrac{27.15}{6144}\cdot\dfrac{ql^4}{EI} \\ y_2 = \dfrac{39.92}{6144}\cdot\dfrac{ql^4}{EI} \\ y_3 = \dfrac{29.60}{6144}\cdot\dfrac{ql^4}{EI} \end{pmatrix}$$

Скориставшись математичним пакетом, побудуємо криву прогину (рисунок 7).

$$\text{Coords} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \dfrac{-19}{4096} \\ 2 & \dfrac{-7}{1024} \\ 3 & \dfrac{-21}{4096} \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x := \text{Coords}^{\langle 0 \rangle} \\ y := \text{Coords}^{\langle 1 \rangle} \end{array}$$

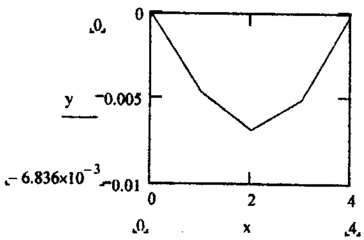


Рисунок 7

Розв'язок можна значно поліпшити, якщо згустити сітку. Наприклад, згущення сітки у два рази зменшує максимальну похибку розв'язку від 5 до 1%.

Застосування рядів та інтегралу Фур'є до розв'язування диференціальних рівнянь

1. Застосування функціональних рядів до розв'язування диференціальних рівнянь.

Нехай дано лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_nx = f(t) \qquad (1)$$

або $Lx = f$, де L – відповідний диференціальний оператор. Застосування рядів до розв'язування таких рівнянь базується на теоремі:

Теорема. Нехай функція $f(t)$ зображується функціональним рядом

$$f(t) = \sum_{K=1}^{\infty} f_K(t)$$

і нехай для будь-якого натурального $к$ рівняння $Lx = f_k(t)$ має розв'язок $x_k(t)$, при чому ряд $\sum_{K=1}^{\infty} x_K(t)$ рівномірно збігається до функції $x(t)$ і цей ряд можна диференціювати n раз. Тоді функція $x(t) = \sum_{K=1}^{\infty} x_K(t)$ є розв'язок рівняння (1).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння де функція $f(t)$ задана графічно (рисунок 1):

$$x'' - 3x' + 2x = f(t)$$

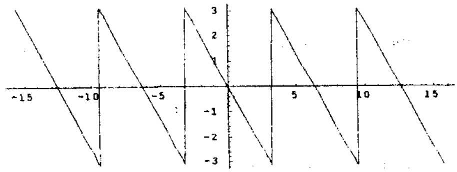


Рисунок 1

Оскільки корені характеристичного рівняння дорівнюють $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, то загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння такий:

$$x_{odn} = c_1e^x + c_2e^{2x}.$$

Для відшукання частинного розв'язку неоднорідного рівняння розкладемо функцію $f(t)$ в ряд Фур'є.

$$f(t) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}.$$

Знайдемо частинні розв'язки рівнянь

$$x'' - 3x' + 2x = \frac{\sin kt}{k}, \quad k = 1,2,...,$$

шукаємо розв'язки у вигляді

$$x_K(t) = A_K \sin kt + B_K \cos kt,$$

використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, одержуємо:

$$A_K = \frac{2-k^2}{k(k^4+5k^2+4)}, \quad B_K = \frac{3}{k^4+5k^2+4}.$$

Отже, функції

$$x_K(t) = \frac{2-k^2 \sin kt}{k(k^4+5k^2+4)} + \frac{3\cos kt}{k^4+5k^2+4}$$

є розв'язками допоміжних рівнянь. Можна показати, що ряди

$$\sum_{K=1}^{\infty} x_K(t), \sum_{K=1}^{\infty} x'_K(t), \sum_{K=1}^{\infty} x''_K(t),$$

рівномірно збігаються на всій числовій осі, тому ряд є частинним розв'язком даного рівняння. Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння такий:

$$x(t) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{3k\cos kt + (2-k^2)\sin kt}{k(k^4+5k^2+4)} + c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x'' + 4x = f(t),$$

де $f(t)$ функція з попереднього прикладу.

Тут $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, це означає, що

$$x = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Для відшукання частинного розв'язку розв'яжемо таку систему допоміжних рівнянь:

$$x'' + 4x = \frac{1}{2}\sin 2t,$$

$$x'' + 4x = \frac{1}{k}\sin kt, \quad k = 1,3,4,5,...$$

Розв'язок першого рівняння системи треба шукати у вигляді:

$$x_2(t)=t(A_2\cos 2t + B_2\sin 2t)$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо $A_2=-1/8$, $B_2=0$, а тоді $x_2=-\frac{1}{8}t\cos 2t$.

Розв'язки решти рівнянь шукаємо у вигляді:

$$x_K(t)=A_K\cos kt+B_K\sin kt,\ k=1,3,4,\ldots$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо

$$A_K=-\frac{k}{k^2-16},\quad B_K=-\frac{4}{k(k^2-16)}.$$

Ряди $\sum\limits_{K=1}^{\infty}x_K(t), \sum\limits_{K=1}^{\infty}x'_K(t), \sum\limits_{K=1}^{\infty}x''_K(t)$ збігаються і тому загальний розв'язок заданого рівняння можна записати в такому вигляді:

$$x(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{1}{15}\cos t+\frac{4}{15}\sin t-\frac{1}{8}t\cos 2t+\sum_{K=3}^{\infty}\frac{k\cos kt}{16-k^4}+\frac{4\sin kt}{k(16-k^4)}.$$

2. Застосування інтегральних зображень функцій для розв'язування диференціальних рівнянь

Застосування інтегральних зображень функції і, зокрема, інтегралу Фур'є для розв'язування диференціальних рівнянь базується на теоремі:

Теорема. Нехай функцію $f(t)$ можна зобразити у вигляді

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t,w)dw$$

і нехай для будь-якого w рівняння $Lx=F(t,w)$ має розв'язок $x(t,w)$, причому інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}x(t,w)dw$ збігається рівномірно по t і його можна диференціювати по параметру t, n раз. Тоді функція

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t,w)dw$$

є розв'язком рівняння $Lx=f(t)$.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$x'' - 3x' + 2x = f(t)$$

де функція *f(t)* задана графічно (рисунок 2).

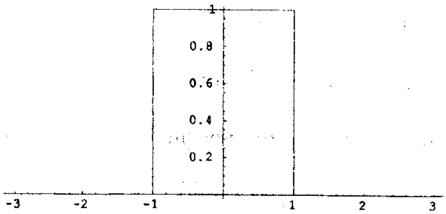


Рисунок 2

Зобразимо функцію *f(t)* інтегралом Фур'є, отримаємо

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}\cos wt dw.$$

Розв'яжемо допоміжне рівняння

$$x'' - 3x' + 2x = \frac{2}{\pi}\frac{\sin w}{w}\cos wt.$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$x(t,w)=A(w)\cos wt+B(w)\sin wt,$$

тоді

$$x_t'(t,w) = -A(w)w\sin wt + B(w)\cos wt,$$

$$x_t''(t,w) = -A(w)w^2\cos wt - B(w)w^2\sin wt,$$

$$-w^2A(w)\cos wt - w^2B(w)\sin wt + 3wA(w)\sin wt + 3wB(w)\cos wt + 2A(w)\cos wt + 2B(w)\sin wt \equiv \frac{2}{\pi}\frac{\sin w}{w}\cos wt$$

звідки

$$\begin{cases} (2-w^2)A(w) - 3wB(w) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin w}{w} \\ 3wA(w) + (2-w^2)B(w) = 0 \end{cases}$$

а звідси

$$A(w)=\frac{2(2-w^2)\sin w}{w\pi(w^4+5w^2+4)},B(w)=-\frac{6\sin w}{\pi(w^4+5w^2+4)}$$

$$A(w)=\frac{2(2-w^2)\sin w}{\pi w(w^4+5w^2+4)},B(w)=-\frac{6\sin w}{\pi(w^4+5w^2+4)}$$

Отже,

$$x(t,w)=\frac{2(2-w^2)\sin w\cos wt-6w\sin w\sin wt}{\pi w(w^4+5w^2+4)},$$

і це означає, в силу теореми, що розв'язок має вигляд:

$$x(t)=\int_0^{\infty}\frac{2(2-w^2)\sin w\cos wt-6w\sin w\sin wt}{\pi w(w^4+5w^2+4)}dw.$$

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''-\omega^2 y=f(x) \qquad (2)$$

де $f(x)$ — неперервна 2π-періодична функція, задана графічно (рисунок 3).

Розв'язання. Загальний розв'язок даного рівняння $y=C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}+\tilde{y}$ де $\tilde{y}$ — частинний розв'язок рівняння (1).

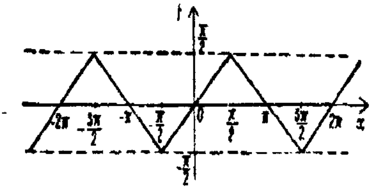


Рисунок 3.

Побудуємо $\tilde{y}$, використовуючи принцип суперпозиції. Функцію $f(x)$ розкладемо в ряд Фур'є. Маємо

$$f(x)=\begin{cases} x \ \textit{при} \quad x & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \\ \pi-x \ \textit{при} \ x & \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right], \end{cases}$$

Функція $f(x)$ — непарна. Тому коефіцієнти ряду Фур'є визначаються за формулами

$$a_k = 0, \ k = 0,1,2,...,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx dx, \quad k = 1,2,...$$

Маємо

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin kx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin kx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos kx}{k}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos kx - \frac{(\pi - x)\cos kx}{k}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos kx dx\right) = \frac{4}{\pi}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2}.$$

Отже, $b_{2n} = 0$

$$b_{2n+1} = \frac{4(-1)^n}{\pi(2\pi + 1)^2}, \qquad n = 0,1,2,....$$

Тому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n\sin(2\pi + 1)x}{\pi(2\pi + 1)^2}. \tag{3}$$

Оскільки $f(-\pi) = f(\pi)$, а функція $f(x)$ — кусково-гладка на [-π ; π] то ряд Фур'є (3) рівномірно збігається на всій числовій осі до $f(x)$. Розглянемо рівняння

$$y'' - \omega^2 y = \frac{4(-1)^n}{\pi(2\pi - 1)^2}\sin(2\pi + 1)x, \qquad n = 0,1,2,... \tag{4}$$

Шукатимемо частинний розв'язок $\tilde{y}_n$ цього рівняння у вигляді

$$\tilde{y}_n = c_n \sin(2\pi + 1)x \tag{5}$$

Підставивши (5) в (4), дістанемо

$$-c_n(\omega^2+(2n+1)^2)\sin(2n+1)x=\frac{4(-1)^n}{\pi(2\pi+1)^2}\sin(2n+1)x$$

звідки

$$c_n=\frac{4(-1)^n}{\pi(2\pi+1)^2(\omega^2+(2n+1)^2)}.$$

Отже,

$$\tilde{y}_n=\frac{4(-1)^n\sin(2n+1)x}{\pi(2n+1)^2(\omega^2+(2n+1)^2)},\qquad n=0,1,2,...$$

Згідно з принципом суперпозиції, якщо ряд

$$\tilde{y}=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{y}_n=\frac{4(-1)^n\sin(2n+1)x}{\pi(2n+1)^2(\omega^2+(2n+1)^2)}\ ,\tag{6}$$

збігається й допускає двократне почленне диференціювання, то функція $\tilde{y}$ є частинним розв'язком рівняння (1).

Доведемо, що ряд (6) можна почленно диференціювати два рази. Складемо ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{y}_n'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n\cos(2n+1)x}{\pi(2n+1)^2(\omega^2+(2n+1)^2)}\tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{y}_n''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}\sin(2n+1)x}{\pi(\omega^2+(2n+1)^2)}.\tag{8}$$

Оскільки

$$|\tilde{y}_n|\le\frac{4}{\pi(2n+1)^2(\omega^2+(2n+1)^2)},\quad\forall x\in R,$$

$$|\tilde{y}_n'|\le\frac{4}{\pi(2n+1)(\omega^2+(2n+1)^2)},\quad\forall x\in R,$$

$$|\tilde{y}_n''|\le\frac{4}{\pi(\omega^2+(2n+1)^2)},\quad\forall x\in R,$$

а числові ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^{2-i}(\omega^2+(2n+1)^2)},\qquad i=0,1,2,$$

збігаються, то за ознакою Вейєрштраса, ряди (6) - (8) збігаються рівномірно на всій числовій осі. Отже, ряд (6) можна почленно диференціювати. Тому

$$y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cos(2n+1)x}{(2n+1)^2 (\omega^2 + (2n+1)^2)},$$

де $C1, C2$ — довільні сталі.

Завдання для індивідуальної роботи

1. Знайти загальний розв'язок рівняння x''-$4x$=$f(t)$, де $f(t)$ періодична (з періодом 2π) функція, визначена на проміжку $[-\pi, \pi]$ рівністю:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \prec t \prec 0, \\ 1, & 0 \prec t \prec \pi, \\ 0, & x = 0,\ \pi,\ -\pi. \end{cases}$$

2. Знайти загальний розв'язок рівняння x''+$4x$=$f(t)$, де $f(t)$ періодична (з періодом 2π) функція, визначена на проміжку $[-\pi, \pi]$ рівністю:

$$f(x) = \begin{cases} |t|, & |t| \prec \pi, \\ 0, & |t| \succ \pi. \end{cases}$$

3. Знайти амплітудний спектр розв'язку рівняння x''-$3x'$+$2x$=$f(t)$, де $f(t)$ періодична з періодом 2π, визначена на проміжку $[0, 2\pi]$ рівнянням

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2};\ x(0)=x'(0)=0.$$

4. Знайти загальний розв'язок рівняння x''-$3x'$+$2x$=$f(t)$, де

$$f(x) = \begin{cases} 1-t, & \text{якщо} \quad 0 \prec t \prec 1, \\ 1+t, & \text{якщо} \quad -1 \prec t \prec 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad |t| \succ 1. \end{cases}$$

Приклади розв'язування завдань типового розрахунку за допомогою математичного пакета Mathcad

Приклад 1.

За допомогою Mathcad впевнитись, що функція

а) $y(t)=8\cos(3t)$ є розв'язком диференціального рівняння $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+9\frac{dy}{dt}=0$

б) $y(x)=e^{x^2}+x^3$ є розв'язком диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}-2xy-3x^2+2x^4=0$

Для виконання завдання використаємо команду *simplify* - спрощення виразу в меню *Symbolic*.

$$y(t) := 8\cos(3t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 9y(t)\ \text{simplify} \rightarrow 0$$

$$y(x) := e^{x^2} + x^3$$

$$\frac{d}{dx}y(x) - 2x\cdot y(x) - 3x^2 + 2x^4\ \text{simplify} \rightarrow 0$$

Приклад 2.

Розглядається процес усталеного змінного струму в колі з самоіндукцією. Процес описується відповідним диференціальним рівнянням: $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i-\frac{V}{L}=0$, де i – сила струму, V – напруга, R – опір кола, L – коефіцєнт самоіндукції. Побудувати графіки напруги $V=A\sin(\mathrm{wt})$ і графік сили струму з даною напругою. Порівняти частоти, амплітуди і фази. Чи залежить сила струму з напругою $V=A\sin(\mathrm{wt})$ від початкового значення сили струму i_0 через короткий проміжок часу? R=4, L=2, A=2, w=2.

Графік розв'язку рівняння $\frac{di}{dt}+2i=\sin(2t)$ будуємо, використавши обчислювальний блок *Given / Odesolve*

Given

$$\frac{d}{dt}i(t) + 2i(t) = \sin(2t)$$

$$i(0) = 3$$

$$F := \text{Odesolve}(t, 5\pi)$$

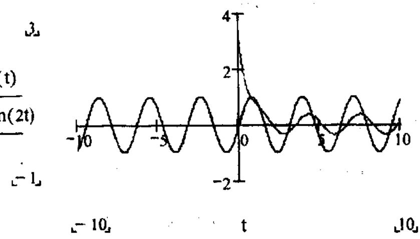


Рисунок 1

Аналізуючи криві, можна зробити висновки: а) сила струму з даною напругою і напруга мають однакову частоту, але різні амплитуду і фазу б) процес усталеного змінного струму в колі з самоіндукцією не залежить від початкового значення струму i_0.

Приклад 3. Зінтегрувати диференціальне рівняння

$$2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+5\frac{dy}{dx}=5x^2-2x-1,\ y'(0)=y(0)=1 \qquad (1)$$

методом невизначенних коєфіцієнтів.

Завдання виконується за такою схемою, скориставшись пакетом Mathcad, знаходимо загальний розв'язок $y_0(t)$ відповідного ЛОДР: $\frac{d^2y}{dx}+5\frac{dy}{dx}=0$

Характеристичне рівняння має корені

$$2k^2+5k \text{ solve}, k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$$

Загальний розв'язок запишеться у вигляді

$$y_0 = C_1 + C_2 \cdot e^{\frac{-5}{2}\cdot x} \qquad (2)$$

Знаходимо частинний розв'язок ДР:

$$y_\tau(x) = A\cdot x^3 + B\cdot x^2 + C\cdot x \qquad (3)$$

Підставимо (3) у рівняння (1). Засобами пакета знаходимо $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ формуємо систему рівнянь відносно A, B, C, розв'язуємо її.

$$\frac{d}{dx} y_\tau(x) = 3 \cdot A \cdot x^2 + 2 \cdot B \cdot x + C$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} y_\tau(x) = 6 \cdot A \cdot x + 2 \cdot B$$

$$12Ax + 4B + 15Ax^2 + 10Bx + 5C = 5x^2 - 2x - 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 12 & 10 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad A1^{\langle 0 \rangle} := A^{\langle 0 \rangle} \quad A1^{\langle 1 \rangle} := A^{\langle 1 \rangle} \qquad A1^{\langle 2 \rangle} := A^{\langle 2 \rangle}$$

$$B := A^{\langle 3 \rangle}$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A1^{-1} = \begin{pmatrix} 0.067 & 0 & 0 \\ -0.08 & 0.1 & 0 \\ 0.064 & -0.08 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$Y := A1^{-1} \cdot B \qquad Y = \begin{pmatrix} 0.333 \\ -0.6 \\ 0.28 \end{pmatrix}$$

Формуємо загальний розв'язок диференціального рівняння (1):

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^{(-2.5)x} + 0.333x^3 - 0.6x^2 + 0.28x$$

Далі розв'язуємо задачу Коші, скориставшись початковими умовами та пакетом. Одержуємо $C_1 = 1.288, C_2 = -0.288$.

Нижче наведено програму ров'язвязання задачі Коші.

$$\frac{d}{dx} y(x) = -2.5 \cdot C_2 \cdot \exp(-2.5 \cdot x) + .999 \cdot x^2 - 1.2 \cdot x + .28$$

$$x := 0$$

$$C_1 + C_2 \cdot e^{(-2.5)x} + 0.333x^3 - 0.6x^2 + 0.28x \rightarrow C_1 + C_2$$

$$\frac{d}{dx}y(x) = -2.5\cdot C_2\cdot \exp(-2.5\cdot x) + .999\cdot x^2 - 1.2\cdot x + .28 \rightarrow \frac{d}{dx}y(x) = -2.5\cdot C_2 + .28$$

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2.5 & 0.72 \end{pmatrix} \qquad S1^{\langle 0\rangle} := S^{\langle 0\rangle} \quad S1^{\langle 1\rangle} := S^{\langle 1\rangle} \quad B := S^{\langle 2\rangle}$$

$$S1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2.5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.72 \end{pmatrix}$$

$$S1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0 & -0.4 \end{pmatrix}$$

$$C := S1^{-1}\cdot B \qquad C = \begin{pmatrix} 1.288 \\ -0.288 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = 1.288 - 0.288\cdot e^{-2.5x} + 0.333x^3 - 0.6x^2 + 0.28x$$

Перевіримо результат

$$y(x) := 1.288 - 0.288\cdot e^{-2.5x} + 0.333x^3 - 0.6x^2 + 0.28x$$

$$\left(2\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 5\frac{d}{dx}y(x) - 5x^2 + 2x + 1\right) \rightarrow 0$$

Приклад 4.

Зінтегрувати диференціальне рівняння

$$y'' + y' = e^{-2t}, \; y''(0) = y'(0) = 0 \tag{4}$$

методом вариації довільної сталої.
Загальний розв'язок рівняння (4) шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{-x} \tag{5}$$

Система рівнянь відносно функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ набуває вигляду

$$C1'(x) + C2'(x)e^{-x} = 0$$

$$-C2'(x)\cdot e^{-x} = e^{-2x} \tag{6}$$

Розв'язуємо систему (5) методом Крамера

$$A := \begin{pmatrix} 1 & e^{-} \\ 0 & -e^{-x} \end{pmatrix} \quad A1 := \begin{pmatrix} 0 & e^{-} \\ e^{-2x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \quad A2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

$$|A| \to -\exp(-x)$$

$$|A1| \to -\exp(-x)\cdot\exp(-2\cdot x)$$

$$|A2| \to \exp(-2\cdot x)$$

$$C1'(x) := \frac{|A1|}{|\ |} \qquad C2'(x) := \frac{|A2|}{|\ |}$$

$$C1'(x) \to \exp(-2\cdot x)$$

$$\exp(-2\cdot x)$$

$$\frac{-1}{2}\cdot\exp(-2\cdot x) + C1$$

$$C2'(x) \to \frac{-\exp(-2\cdot x)}{\exp(-x)}$$

$$\frac{-\exp(-2\cdot x)}{\exp(-x)}$$

$$\frac{1}{\exp(x)} + C2$$

Одержали $C_1(x) = -0.5e^{-2x} + C_1$ і $C_2(x) = e^{-x} + C_2$. Підставивши у формулу (5) одержуємо розв'язок

$$y(x) = \frac{-1}{2}\cdot\exp(-2\cdot x) + C1 + \left(\frac{1}{\exp(x)} + C2\right)\cdot e^{-x} \text{ simplify} \to y(x) = \frac{1}{2}\cdot\exp(-2\cdot x) + C1 + \exp(-x)\cdot C2$$

Далі розв'язуємо задачу Коші, скориставшись початковими умовами та пакетом.

$$\frac{d}{dx}y(x) = -\exp(-2\cdot x) - \exp(-x)\cdot C2$$

$$\frac{1}{2}\cdot\exp(-2\cdot x) + C1 + \exp(-x)\cdot C2 \text{ substitute}, x = 0 \to \frac{1}{2}\cdot\exp(0) + C1 + \exp(0)\cdot C2$$

$$-\exp(-2\cdot x) - \exp(-x)\cdot C2 \text{ substitute}, x = 0 \to -\exp(0) - \exp(0)\cdot C2$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A1^{\langle 0\rangle} := A^{\langle 0\rangle} \quad A1^{\langle 1\rangle} := A^{\langle 1\rangle}$$

$$B := A^{\langle 2\rangle}$$

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y := A1^{-1}\cdot B$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Одержуємо розв'язок і перевіряємо його: за допомогою вбудованої функції зручно визначити чи одержана функція є розв'язком.

$$y(x) := \frac{1}{2}\cdot\exp(-2\cdot x) + 0.5 + \exp(-x)\cdot(-1)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{d}{dx}y(x) - e^{-2x} \rightarrow 0$$

Приклад 5.

Зінтегрувати диференціальне рівняння $y'' + y' = e^{-2x}, y'(0) = 0, y(0) = 0$, застосовуючи перетвореня Лапласа.

Для одержання розв'язку даного диференціального рівняння використаємо функцію *laplace* і *invlaplace*

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{d}{dx}y(x) - e^{-2x}\right) \text{laplace}, x \rightarrow s\cdot(s\cdot \text{laplace}(y(x), x, s) - y(0)) - \left.\frac{d}{dt}y(t)\right|_{t \leftarrow 0} + s\cdot \text{laplace}(y(x), x, s) - y(0) - \frac{1}{(s+2)}$$

$$s\cdot(s\cdot u) + s\cdot u - \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{1}{(s+2)\cdot s\cdot(s+1)} \text{ invlaplace}, s \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\exp(-2\cdot t) + \frac{1}{2} - \exp(-t)$$

Приклад 6

Зінтегрувати диференціальне рівняння $y'' + y' = e^{-2x}, y'(0) = 0, y(0) = 0$ методом Дюамеля.

Спершу знаходимо розв'язок диференціального рівняння:

$y'' + y' = 1, y'(0) = 0, y(0) = 0$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \frac{d}{dx}y(x) - e^{-2x}\right) = 0$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+\frac{d}{dx}y(x)-1 \text{ laplace}, x \rightarrow s\cdot(s\cdot \text{laplace}(y(x),x,s)-y(0))-\left| \begin{array}{l} t\leftarrow 0 \\ \frac{d}{dt}y(t) \end{array} \right. + s\cdot \text{laplace}(y(x),x,s)-y(0)-\frac{1}{s}$$

$$s\cdot(s\cdot u)+s\cdot u-\frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s^2\cdot(s+1)} \text{ invlaplace}, s \rightarrow t-1+\exp(-t)$$

Далі знаходимо похідну одержаного розв'язку

$$1-\exp(-t).$$

Розв'язок заданого диференціального рівняння знаходиться шляхом інтегрування згортки:

$$\left(1-e^{-\tau}\right)\cdot e^{-2(t-\tau)}$$

$$\frac{1}{2\cdot\exp(t)^2}\cdot\exp(\tau)^2-\frac{1}{\exp(t)^2}\cdot\exp(\tau)$$

$$\frac{1}{2\cdot\exp(t)^2}\cdot\exp(\tau)^2-\frac{1}{\exp(t)^2}\cdot\exp(\tau) \text{ substitute}, \tau = t \rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{\exp(t)}$$

$$\frac{1}{2\cdot\exp(t)^2}\cdot\exp(\tau)^2-\frac{1}{\exp(t)^2}\cdot\exp(\tau) \text{ substitute}, \tau = 0 \rightarrow \frac{1}{2\cdot\exp(t)^2}\cdot\exp(0)^2-\frac{1}{\exp(t)^2}\cdot\exp(0)$$

$$w1 := \frac{1}{2}-\frac{1}{\exp(\ )}$$

$$w2 := \frac{1}{2\cdot\exp(\ )^2}\cdot\exp(0)^2-\frac{1}{\exp(t)^2}\cdot\exp(0)$$

$$w := w1 -$$

$$w \rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{\exp(t)}+\frac{1}{2\cdot\exp(t)^2}$$

Приклад 7.

Дослідити систему ДР на стійкість. Зобразити графічно траєкторії розв'язків цієї системи.

$$x' = x-3y$$
$$y' = 3x-y$$
$$x(0) = -1, y(0) = 0$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\left(k^2+8\right) \text{ solve}, k \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot 1i\cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ -2\cdot 1i\cdot 2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Корені рівняння комплексно-спряжені, в яких дійсна частина дорівнює нулю. Побудуємо траєкторію розв'язку системи.

$$T := 10$$

Given

$$\frac{d}{dt}y0(t) = y0(t) - 3y1(t) \qquad y0(0) = -1$$

$$\frac{d}{dt}y1(t) = 3\cdot y0(t) - (y1(t)) \qquad y1(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \text{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} y0 \\ y1 \end{pmatrix}, t, T\right]$$

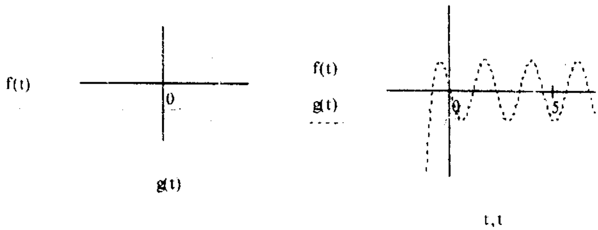


Рисунок 2

Можна зробити висновок про те, що положення рівноваги – центр.

Приклад 8.

Дослідити на стійкість систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -x + 8y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$$
$$x(0) = -1,\ y(0) = 0$$

Побудувати графік траєкторії розв'язку системи.

$$k^2 - k + 22 \text{ solve }, k \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1i\cdot 87^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1i\cdot 87^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Дійсні частини коренів цього рівняння додатні, тому розв'язок даної системи є нейстійким. Побудуємо фазову траєкторію розв'язку.

$T := 10$

Given

$$\frac{d}{dt}y0(t) = -1y0(t) + 8y1(t) \qquad y0(0) = -1$$

$$\frac{d}{dt}y1(t) = -3\cdot y0(t) + 2y1(t) \qquad y1(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \text{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} y0 \\ y1 \end{pmatrix}, t, T\right]$$

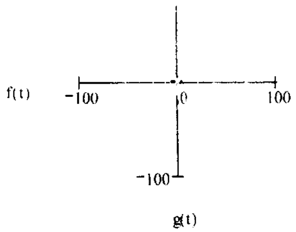


Рисунок 3

Можна зробити висновок про те, що положення рівноваги – фокус.

Приклад 9.

Побудувати фазовий портрет системи "хижак-жертва".

$$\frac{d}{dt}x(t) = 0.1\cdot x(t) - 0.1\cdot x(t)\cdot y(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) + 0.1x(t)\cdot y(t)$$

$$D(t,Q) := \begin{bmatrix} 0.1Q_0 - (0.1Q)_0\cdot Q_1 \\ -Q_1 + 0.1\cdot Q_0\cdot Q_1 \end{bmatrix}$$

$Npts := 3000$

$$L := \text{rkfixed}\left[\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}, 0, 100, Npts, D\right]$$

$t := L^{\langle 0 \rangle}$

$X := L^{\langle 1 \rangle}$ $\quad Y := L^{\langle 2 \rangle}$

$i := 0..\ Npts$

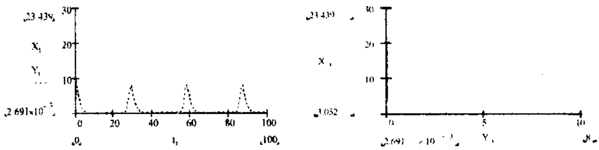


Рисунок 4

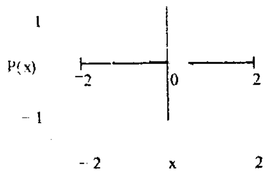
Можна зробити висновок, що з будь-якого становища система починає періодичний рух по єдиній замкнутій траєкторії з визначеним періодом, а також відмінна особливість системи полягає в тому, що поведінка її розв'язків чутлива до невеликих збурень. Таким чином робиться висновок, що коливання в такій системі „хижак - жертва" є нестійкими.

Приклад 10.

Дослідити фазові криві системи рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x^2 - x^4 .$$

Потенціальна енергія системи $P(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$. Критичні точки потенціальної енергії: $x = 0$, $x = \pm 1$.



У точці $x = 1$ потенціальна енергія має локальний мінімум, а в точці $x = -1$ - локальний максимум. Точка $x = 0$ - вироджена критична точка.

$f(x,y) := \frac{-x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{y^2}{2}$

$xlow := -0.5 \quad xhigh := 0.5$

$xn := 200$

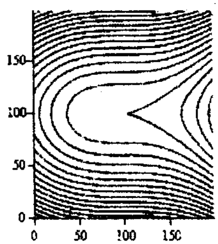
$ylow := -0.5 \quad yhigh := 0.5$

$yn := 200$

$i := 0..\ xn - 1 \qquad xind_i := xlow + i \cdot \frac{xhigh - xlow}{xn - 1}$

$j := 0..\ yn - 1 \qquad yind_j := ylow + j \cdot \frac{yhigh - ylow}{yn - 1}$

$M_{i,j} := f(xind_i, yind_j)$



M

Рисунок 5

Отже, положення рівноваги (-1,0) даної системи є сідлом, а положення рівноваги (1,0) є цетром.

Тестові питання для самоперевірки

1. Яке з наведених нижче рівнянь є диференціальним?
   a) $y = x^2 + 2xy^3$;
   b) $adr = rd\varphi$;
   c) $x^2 + \omega^2 x = A\sin vt$;
   d) $u^2(t) = a^2 u(t) + 1$.
2. Розв'язком якого із нижче наведених рівнянь є функція $y = x^3 + 5\sin\frac{x}{2}$?
   a) $y' = 3x^2 + 10\cos\frac{x}{2}$;
   b) $y' = 3x^2 + 2.5\cos\frac{x}{2}$;
   c) $y' = x^2 + 2.5\cos\frac{x}{2}$;
   d) $y' = x^2 + 10\cos\frac{x}{2}$.
3. Що називається особливою точкою (x_0, y_0)?
   a) Особливою називається точка (x_0, y_0), в досить малому околі якої ліва частина рівняння $y' = f(x, y)$ не задовольняє умови теореми існування і єдиності розв'язку.
   b) Особливою називається точка (x_0, y_0), в досить малому околі якої права частина рівняння $y' = f(x, y)$ не задовольняє умови теореми існування і єдиності розв'язку.
   c) Особливою називається точка (x_0, y_0), в досить малому околі якої права частина рівняння $y' = f(x, y)$ задовольняє умови теореми існування і єдиності розв'язку.
   d) Особливою називається точка (x_0, y_0), в досить великому околі якої права частина рівняння $y' = f(x, y)$ задовольняє умови теореми існування і єдиності розв'язку.
4. Вибрати правильне твердження.
   a) Через особливу точку не проходить жодної інтегральної кривої.
   b) Через особливу точку проходить одна інтегральна крива.
   c) Через особливу точку може не проходити жодної інтегральної кривої, може проходити одна.
   d) Через особливу точку може не проходити жодної інтегральної кривої, може проходити одна, декілька або безліч інтегральних кривих.

5. Нехай $y = x^4 + C$ є загальним розв'язком деякого диференціального рівняння. Знайти частинний розв'язок, який задовільняє початкову умову $y(1) = 2$.
   a) $y = x^4$;

b) $y = x^4 + 2$;

c) $y = x^4 + 1$;

d) $y = x^4 + 3$.

6. Записати диференціальні рівняння всіх прямих на площині.

a) $y'' = 1$;

b) $y'' = 0$;

c) $y'' = x$;

d) $y'' = -1$.

7. Визначити диференцальне рівняння кривої, всі дотичні до якої проходять через початок координат.

a) $y' = \frac{y}{x}$;

b) $y' = \frac{x}{y}$;

c) $y' = x$;

d) $y' = y$.

8. Визначити диференціальне рівняння всіх парабол, симетричних відносно осі $0y$ з вершиною в початку координат.

a) $y' = \frac{y}{x}$;

b) $y' = \frac{x}{y}$;

c) $y' = x$;

d) $y' = \frac{2y}{x}$.

9. Визначити диференціальне рівняння всіх кіл з центром в початку координат.

a) $y' = -\frac{y}{x}$;

b) $y' = -\frac{x}{y}$;

c) $y' = x$;

d) $y' = \frac{2y}{x}$.

10. Визначити диференціальні криві гіпербол.

a) $y' = -\frac{y}{x}$,

b) $y' = x$;

c) $y' = \frac{x}{y}$;

d) $y' = \frac{2y}{x}$.

11.За допомогою підстановки $u = x - y$ визначити тип диференціального рівняння $y' = \frac{2x - 2y - 1}{x - y + 1}$.

a) Однорідне рівняння першого порядку.
b) Лінійне рівняння першого порядку.
c) Рівняння Бернуллі.
d) Рівняння з відокремлюваними змінними.

12. Яке рівняння є лінійним?

a) $y' + y\sin x = x^2$;
b) $y' + y'\sin x = x^2$;
c) $y' + xy^2 = \sin x$;
d) $y' + xy^2 = x^2$.

13. Яке з наведених рівнянь відноситься до диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними?

a) $y' = \frac{xy}{x + y^3}$;
b) $t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3$;
c) $y' = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}$;
d) $y' = 10^{x+y}$.

14. Яке з наведених рівнянь відноситься до однорідних диференціальних рівнянь першого порядку?

a) $xdy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx$;
b) $y' + \frac{y}{x} = x^2$;
c) $\cos x \frac{dy}{dx} - y\sin x = y^4$;
d) $3xy' - 2y = \frac{x^3}{3y^2}$.

15. Визначити диференціальне рівняння другого порядку.

a) $(y''')^2 - y'' = \sin x$;
b) $y'' + (y')^3 + y = 0$;
c) $(y')^2 + xy' = y^3$;
d) $y^2 + \cos(y') = x$.

16. Визначити диференціальне рівняння третього порядку.

a) $y^3 + (y')^3 = x$;
b) $y'' + (y'')^2 + (y')^3 = 0$;
c) $y''' + y'' = xy^2$;
d) $x^3(y')^3 - y = x^2$.

17. Вказати відповідну пару диференціальних рівнянь, одне з яких виражене через диференціали.

a) $y' = x;\quad ydx - xdy = 0$.

b) $y' = x^2 + y^2;\quad dy = (x^2 + y^2)dx$.

c) $y' = \frac{y}{x};\quad (x^2 - xy)dx = dy$.

d) $y' + xy = x^2;\quad xdx - y^2dy = 0$.

18. Яке з наведених диференціальних рівнянь відноситься до лінійних однорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами?

a) $y'' + 3y' + x = 0$

b) $y'' - 4y' + xy = 0$

c) $y'' + y = 0$

d) $y'' - y - xy' = 0$

19. До якого типу зводиться рівняння $(2x+1)y' - 4e^{-y} + 2 = 0$ в результаті підстановки $u = e^y$?

a) Однорідне диференціальне рівняння першого порядку.
b) Лінійне диференціальне рівняння першого порядку.
c) Рівняння Бернуллі.
d) Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

20. Вибрати правильне трердження.

a) Дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, проведені у точках перетину цих кривих з прямою $x = x_0$, перетинаються в одній точці.
b) Дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, проведені у точках перетину цих кривих з прямою $x = x_0$, не перетинаються в одній точці.
c) Дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, проведені у точках перетину цих кривих з прямою $x = x_0$, паралельні.
d) Дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, проведені у точках перетину цих кривих з прямою $x = x_0$, перетинаються в одній точці або паралельні.

21. Скільки частинних розв'язків має рівняння

$$y''y^3 + 1 = 0,\qquad y(1) = y'(1) = 1?$$

a) Одне.
b) Два.
c) Три.
d) Чотири.

22. Які функції лінійно незалежні?

a) $\sin 2x,\quad \sin x\cos x$.

b) $x, 0, e^x$.

c) $x,\ \ln x$.

d) $e^x,\ e^{x+1}$.

23. Вибрати структуру частинного розв'язку рівняння $y'' + 9y = 4x$.

a) $y = Ax + B$.

a) $y = x(Ax + B)$.

b) $y = x^2(Ax + B)$.

c) $y = A\cos 3x + B\sin 3x$.

24. Вибрати структуру частинного розв'язку рівняння $y'' - 2y' + y = (1 - x)e^x$.

a) $y = Ax + B$.

b) $y = e^x(Ax + B)$.

c) $y = xe^x(Ax + B)$.

d) $y = x^2e^x(Ax + B)$.

25. Вибрати структуру частинного розв'язку рівняння $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$.

a) $y = A\cos x + B\sin x$.

b) $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$.

c) $y = x^2e^x(A\cos x + B\sin x)$.

d) $y = xe^x(A\cos x + B\sin x)$.

26. Нехай $\sin x$ і $\cos x$ фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння. Записати це рівняння.

a) $y'' - y = 0$.

b) $y'' + y = 0$.

c) $y'' - y' = 0$.

d) $y'' + y' = 0$.

27. При яких знвченях a всі ненульові розв'язки рівняння $y'' + ay' + y = 0$ будуть згасаючими гармонічними коливаннями?

a) $a < -2,\ a > 2$.

b) $a > 0,\ a < -2$.

c) $0 < a < 2$.

d) $-2 < a < 2$.

28. При яких значенях k всі ненульові розв'язки рівняння $y'' + y' + k^2 y = 0$ будуть згасаючими коливаннями?

a) $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$.

b) $k < -\frac{1}{2},\ k > \frac{1}{2}$.

c) $-\frac{1}{4} < k < \frac{1}{4}$.

d) $k < -\frac{1}{4},\ k > \frac{1}{4}$.

29. За даним характеристичним рівнянням $k^2 + 4 = 0$ записати лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку.

a) $y'' + 4y' = 0$.

b) $y'' + 4y + 4 = 0$.

c) $y''+4y=0$.

d) $y''+4y+4=0$.

30. За даними коренями характеристичного рівняння $k_1=2-i,\ k_2=2+i$ записати лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку.

a) $y''-4y'+5y=0$.

b) $y''-4y'+5=0$.

c) $y''+4y'+5y=0$.

d) $y''+4y'-5y=0$.

31. При якому значені α розв'язки системи $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\alpha x+5y \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+2y \end{cases}$ асимптотично стійкі?

a) $\alpha<-2{,}5,\ \alpha>-2$.

b) $-2{,}5<\alpha<-2$.

c) $0<\alpha<2{,}5$.

d) при будь-яких $\alpha\in R$.

32. При яких значенях α і β розв'язки системи $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+\alpha y+\beta z \\ \dfrac{dy}{dt}=-y+\alpha z \\ \dfrac{dz}{dt}=-z \end{cases}$ асимптотично стійкі?

a) $\alpha>-2,\ \beta>-2$.

b) $\alpha<-2,\ \beta<-2$.

c) $\alpha>-2,\ \beta<-2$.

d) при будь-яких $\alpha,\beta\in R$.

Відповіді: 1. b); 2. b); 3. b); 4. d); 5. c); 6. b); 7. a); 8. d); 9. b); 10. a); 11. d); 12. a); 13. d); 14.a); 15. b) 16. c); 17.b); 18. c); 19. b); 20. d); 21. b); 22. c); 23. a); 24. d); 25. d); 26. b); 27. d); 28. b); 29. c); 30. a); 31.b); 32. d).

Олімпіадні задачі

1. Функція $y(x)=e^{-x}$ є розв'язком задачі $y''=y,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$. Дослідити розв'язок на стійкість.

2. Довести, що рівняння

$y''+(xe^{-x}+1)y'+e^{-x}y=0$,

$y'' + e^x y' + xy = 1$

не мають загальних розв'язків.

3.Рух точки в площині (x_1, x_2) описується системою

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), \\ x_2'(t) = 1 \end{cases}$$

з початковим положенням $(x_1(0),)$. Визначити довжину траєкторії точки за відрізок часу $[0,t]$.

4.По якій траєкторії полетить кулька, пущена з швидкістю V_0 під кутом α до горизонту, якщо опір повітря пропорційний швидкості?

5.Нехай точка P рухається по вісі OX з постійною швидкістю $V>0$, а точка M рухається по деякій кривій L в площинні XOY з постійною швидкістю U, $U>V$, причому вектор швидкості точки M в кожний момент часу направлений в точку P. Крива L називається лінією погоні. Припускаючи, що в початковий момент точка P знаходиться на початку координат, а точка M – на вісі OY в точці $M_0(0, y_0)$, $y_0 > 0$, знайти рівняння лінії погоні L, точку $C(x,0)$, в якій точка M дожене P, і тривалість погоні T.

6.Знайти всі розв'язки диференційного рівняння

$$\begin{cases} x'' - \dfrac{2}{y} x'y' = 0 \\ y' + \dfrac{1}{y}(y'^2 - x'^2) = 0 \end{cases}$$

7.Дано рівняння $\dfrac{dx}{dt} = t^3 - 2x^3$. Довести, що будь-який його розв'язок необмежено продовжується вправо.

8.Нехай $f(x)$ - дійсна неперервна періодична функція, визначена на всій числовій прямі. Чи вірно, що диференціальне рівняння $y' = (y^2 - 1)(y - f(x))$ має періодичний розв'язок, відмінний від константи?

9.Довести, що всі розв'язки рівняння $x''(t) + arctgx(t) = 0$ обмежені на $[0, +\infty]$.

10.Довести, що система

$$\begin{cases} x' = x^2 \sin t - \dfrac{1}{2y^2 + 3} + \sin^2 t, \\ y' = y + \dfrac{1}{y^2 + 1} - x + \cos t \end{cases}$$

має періодичний розв'язок.

Призначення MathCAD

MathCAD є математичним редактором, що дозволяє проводити різноманітні наукові та інженерні розрахунки, починаючи від елементарної арифметики і закінчуючи складними реалізаціями чисельних методів. Користувачі MathCAD — це студенти, учені, інженери, різноманітні технічні фахівці. Завдяки простоті застосування, наочності математичних дій, великій бібліотеці вбудованих функцій і чисельних методів, можливості символьних обчислень, а також чудовому апарату представлення результатів (графіки найрізноманітніших типів, могутніх засобів підготовки друкованих документів і Web-сторінок), MathCAD став найбільш популярним математичним додатком. MathCAD 2001, на відміну від більшості інших сучасних математичних додатків, побудований відповідно до принципу WYSIWYG ("What You See Is What You Get" — "що Ви бачите, те й одержите"). Тому він дуже простий у використанні, зокрема, через відсутність необхідності спочатку писати програму, що реалізує ті чи інші математичні розрахунки, а потім запускати її на виконання. Замість цього досить просто вводити математичні вирази за допомогою вбудованого редактора формул, причому у вигляді, максимально наближеному до загальноприйнятого, і відразу одержувати результат. Крім того, можна виготовити на принтері друковану копію документа, чи створити сторінку в Інтернеті саме в тому вигляді, який цей документ має на екрані комп'ютера при роботі з MathCAD.

Для ефективної роботи з редактором MathCAD досить базових навичок користувача. З іншого боку, професійні програмісти можуть витягти з MathCAD набагато більше, створюючи різні програмні рішення, які істотно розширюють можливості безпосередньо закладені в MathCAD.

Відповідно до проблем реального життя, математикам доводиться вирішувати одну або кілька з таких задач:

— Введення на комп'ютері різноманітних математичних виразів (для подальших розрахунків чи створення документів, презентацій, Web-сторінок);

— проведення математичних розрахунків;

— підготовка графіків з результатами розрахунків;

— одержання різної довідкової інформації з області математики.

З усіма цими (а також деякими іншими) задачами з успіхом справляється MathCAD:

— математичні вирази і текст вводяться за допомогою формульного редактора MathCAD, що за можливостями і простотою використання не поступається, наприклад, редакторові формул, вбудованому в Microsoft Word;

— математичні розрахунки виконуються негайно, відповідно до формул;

— графіки різних типів (на вибір користувача) з великими можливостями форматування вставляються безпосередньо в документи;

— можливе введення і виведення даних у файли різних форматів;

— символьні обчислення дозволяють миттєво одержати різноманітну довідкову математичну інформацію, а система допомоги, Центр Ресурсів і вбудовані електронні книги допомагають швидко відшукати потрібну довідку чи приклад інших розрахунків.

Таким чином, потрібно добре уявляти собі, що до складу MathCAD входять кілька інтегрованих між собою компонентів — це могутній текстовий редактор для введення і редагування як тексту, так і формул, обчислювальний процесор для проведення розрахунків відповідно до введених формул і символьний процесор, що є, по суті, системою штучного інтелекту. Сполучення цих компонентів створює зручне обчислювальне середовище для різноманітних математичних розрахунків і, одночасно, документування результатів роботи.

Знайомство з MathCAD

Після того, як MathCAD 2001, встановлений на комп'ютері і запущений на виконання, з'являється основне вікно додатку. Воно має ту ж структуру, що і більшість додатків Windows. Зверху вниз розташовуються заголовок вікна, рядок меню, панелі інструментів (стандартна і форматування) і робоча сторінка, чи робоча область, документа (worksheet). Новий документ створюється автоматично при запуску MathCAD. У самій нижній частині вікна знаходиться рядок стану. Не забуваючи про подібність редактора MathCAD зі звичайними текстовими редакторами ви інтуїтивно зрозумієте призначення більшості кнопок на панелях інструментів.

При запуску на передньому плані також з'являється діалогове вікно Tip of the Day (Порада Дня), яку можна забрати, натиснувши кнопку Close (Закрити). Щоб відключити опцію появи Поради Дня при наступних запусках MathCAD, зніміть у його діалоговому вікні прапорець Show tips on startup (Показувати допомогу при запуску). Натиснувши кнопку Next Tip (Наступна порада), можна переглянути наступну пораду. При запуску MathCAD також можна спостерігати ще одне вікно — Resource Center.

(Цент ресурсів), який є, по суті, окремою програмою навігатором по можливостях MathCAD 2001, у якій є багато прикладів розв'язку найрізноманітніших математичних, фізичних та інженерних задач. У своїй роботі ви можете або не звертати на нього увагу, або користуватись як окремим доповненням до довідкової системи.

Наведемо приклади найпростіших розрахунків. Для обчислення сінуса якого-небудь числа досить ввести з клавіатури вирази типу sin(1/4)=. Після того як буде натиснута клавіша зі знаком рівності, із правої сторони виразу з'явиться результат.

$$\sin\left(\frac{1}{4}\right) = 0.247$$

Таким чином можна проводити і більш складні і громіздкі розрахунки, використовуючи при цьому весь арсенал спеціальних функцій, які вбудовані в MathCAD. Легше всього вводити їхні імена з клавіатури, як у прикладі з обчисленням сінуса, але, щоб уникнути можливих помилок у їхньому написанні, краще вибрати інший шлях. Щоб ввести вбудовану функцію в вираз:

Визначте місце у виразі, куди потрібно вставити функцію.

Натисніть кнопку з написом f(x) на стандартній панелі інструментів. У списку Function Category (Категорія функції) діалогового вікна Insert Function, що з'явилось (Вставити функцію) виберіть категорію, якій належить функція, – у нашому випадку це категорія Trigonometric (Тригонометричні).

У списку Function Name (Ім'я функції) виберіть ім'я вбудованої функції, під яким вона фігурує в MathCAD (sin). У випадку ускладнення з вибором орієнтуйтеся на підказку, що з'являється при виборі функції в нижньому текстовому полі діалогового вікна Insert Function.

Натисніть кнопку ОК — функція з'явиться в документі.

Заповніть відсутні аргументи введеної функції (у нашому випадку це 1/4).

Звичайно, не кожний символ можна ввести з клавіатури. наприклад, не одразу відомо як вставити в документ знак інтеграла чи диференціала. Для цього в MathCAD є спеціальні панелі інструментів, дуже схожі на засоби формульного редактора Microsoft Word. Одна з них — панель інструментів Math (Математика). Вона містить інструменти для вставки в документ типових математичних об'єктів (операторів, графіків, елементів програм і т.п.). Ця панель показана на рисунку 1 на фоні документа, що редагується.

Панель містить дев'ять кнопок, натискання кожної з яких приводить, у свою чергу, до появи на екрані ще однієї панелі інструментів. За допомогою цих дев'яти додаткових панелей можна вставляти в документи MathCAD різноманітні об'єкти. На рисунку 1, як легко побачити, на панелі Math у натиснутому стані знаходяться дві перші зверху ліворуч кнопки (над лівою з них знаходиться курсор миші). Тому на екрані присутні ще дві панелі — Calculator (Калькулятор) і Graph (Графік). Легко здогадатися, які об'єкти вставляються при натисканні кнопок на цих панелях.

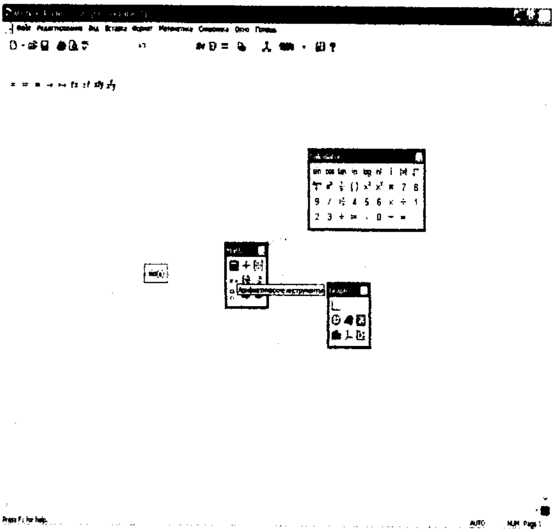


Рисунок 1

Наприклад, можна ввести вирази винятково за допомогою панелі Calculator (Калькулятор). Для цього потрібно спочатку натиснути кнопку sin (найпершу зверху). Результат даної дії показаний на рисунку 1 (вирази в рамці). Тепер залишається лише набрати вираз 1/4 усередині дужок. Для цього натисніть послідовно кнопки 1 – 4 на панелі Calculator (Калькулятор) і потім, на ній же, кнопку =, щоб одержати відповідь.
Якщо ви тільки починаєте освоювати редактор MathCAD, рекомендується, де це тільки можливо, вводити формули, користуючись складальними панелями інструментів і описаною процедурою вставки функцій за допомогою діалогу Insert Function (Вставити функцію). Це дозволить уникнути багатьох можливих помилок.

Описані дії демонструють використання MathCAD як звичайного калькулятора з розширеним набором функцій. Для математика ж інтерес представляє, як мінімум, можливість задання змінних і операцій з функціями користувача. Тому наведемо відповідні приклади. Зверніть увагу тільки на оператор присвоювання, що застосовується для задання значень змінним у першому рядку лістингу. Його, як і всі інші символи, можна ввести за допомогою панелі.

Лістинг 1. Використання змінних в розрахунках

$$x := 1.2 \qquad y := 55 \qquad z := 4$$

$$\frac{\left(x^2 \cdot 250\right)}{\sqrt[5]{y}} \cdot \ln(z \cdot \pi) = 408.814$$

Лістинг 2. Визначення функції користувача і розрахунок її значення в точці x=1

$$a := 2$$

$$f(x) := x^{a} - \frac{2}{|x-5|}$$

$$f(1) = 0.5$$

Calculator (Калькулятор). Присвоювання позначається не знаком рівності, щоб підкреслити його відмінність від операції обчислення. Символ рівності говорить про обчислення значення зліва направо, а символ ":=" — про присвоювання значення правої частини виразу лівій.

В останньому лістингу визначається функція f (x). Її графік показаний на рисунку 2. Щоб побудувати його потрібно натиснути на панелі Graph (Графік) кнопку з потрібним типом графіка і в заготовці графіка, що з'явилася, визначити значення, що будуть відкладені по осях.

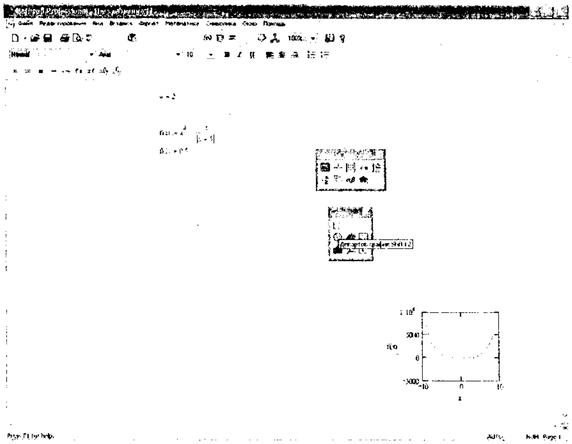


Рисунок 2

Однією із найбільш вражаючих можливостей MathCAD є символьні обчислення, що дозволяють розв'язати багато задач аналітично. Фактично, MathCAD "знає" математику, принаймні, на рівні непоганого вченого. Уміле використання інтелекту символьного процесора MathCAD звільняє вас від величезної кількості рутинних обчислень, наприклад, інтегралів, похідних (лістинг3). Зверніть увагу на традиційну форму написання виразів, єдина особливість полягає в необхідності застосування символу символьних обчислень → замість знака рівності. Його, до речі, можна ввести в редакторі MathCAD з кожної з панелей Evaluation (Вирази) чи Symbolic (Символіка), а символи інтегрування і диференціювання — з панелі Calculus (Обчислення).

Лістинг 3. Символьні обчислення

$$\int \frac{\ln(a\cdot x)}{x^{b}}\,dx \rightarrow \left[\frac{-1}{(-1+b)}\cdot x\cdot \ln(x) - \frac{(b\cdot \ln(a) - \ln(a) + 1)}{\left(-2\cdot b + b^{2} + 1\right)}\cdot x\right]\cdot x^{-b}$$

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{\left(x^{2}\cdot 250\right)}{\sqrt[5]{y}}\right]\cdot \ln(z\cdot\pi) \rightarrow 500\cdot\frac{x}{y^{\frac{1}{5}}}\cdot \ln(z\cdot\pi)$$

Обчислювальні оператори

Обчислювальні оператори вставляються в документи за допомогою панелі інструментів Calculus (Обчислення). При натисканні кожної з кнопок у документі з'являється символ відповідної математичної дії, яка має декілька місцезаповнювачів. Кількість і розташування місцезаповнювачів визначається типом оператора й в точності відповідає їхньому загальноприйнятому математичному запису. Наприклад, при вставці оператора суми (рисунок 3), необхідно задати чотири величини: змінну, по якій треба зробити підсумовування, нижня і верхня межі, а також сам вираз, що буде стояти під знаком суми. Для того щоб обчислити невизначений інтеграл, потрібно заповнити два місцезаповнювачі: підінтегрального виразу і змінної інтегрування.

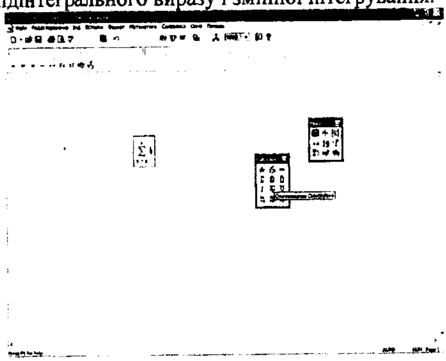


Рисунок 3

Перерахуємо основні обчислювальні оператори і наведемо найпростіші приклади їхнього застосування:

- диференціювання й інтегрування:
  - похідна,
  - n-а похідна,
  - визначений інтеграл,
  - невизначений інтеграл;
- підсумовування й обчислення добутку:
  - сума,
  - добуток,
  - сума ранжированої змінної,
  - добуток ранжированої змінної;
- границі:
  - двостороння,

- ліва,
- права.

Лістинг 4. Оператори обчислення похідних

$$\frac{d}{dx}\sin(x) \to \cos(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin(x) \to -\sin(x)$$

Лістинг 5. Оператори інтегрування

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \to \frac{1}{2 \cdot a^2}$$

$$\int \ln(x)\,dx \to x \cdot \ln(x) - x$$

Лістинг 6. Оператори сумування і обчислення добутку

$$\sum_{i=1}^{10} i = 55 \qquad \sum_{i=1}^{10} i \to 55$$

$$\prod_{i=1}^{30} i = 2.653 \times 10^{32}$$

Лістинг 7. Оператори символьного обчислення границь

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1+3x}{x} \to 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \to \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \to -\infty$$

Важливо відзначити, що є можливість обчислювати інтеграли з однією чи двома нескінченними межами, а також у символьній формі шукати значення нескінченних меж, сум (рядів) і добутків. Для зручності введення кнопка із символом нескінченності розміщена на тій же панелі інструментів Calculus (Обчислення). Приклад вставки символу нескінченності в задачі пошуку нескінченного ряду наведений на рисунку 4.

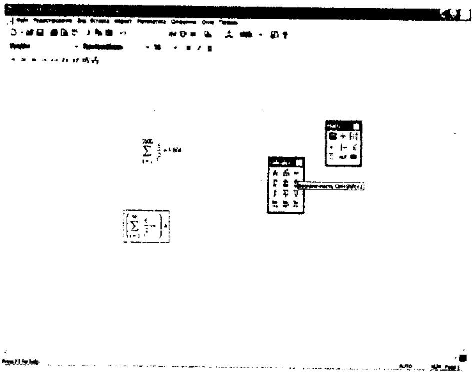


Рисунок 4

Логічні оператори

Результатом дії логічних, чи булевських операторів є тільки число 0 (якщо логічний вираз, який записан з його допомогою, істинний) чи 1 (якщо логічний вираз помилковий). Щоб обчислити значення логічного виразa, наприклад 1=1 (рисунок 5):

1. Вставте з панелі Boolean (Булеві оператори) відповідний оператор =.
2. У місцезаповнювачі, що з'явилось, вставте дві одиниці.

Натисніть клавішу <=>, щоб одержати відповідь.

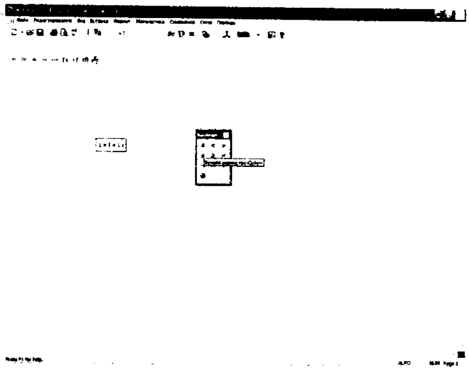


Рисунок 5

Виходить абсурдний, на перший погляд, вираз 1=1=1. Однак, насправді далі все правильно. Праворуч від оператора висновку записаний логічний вираз 1=1 (зверніть увагу, що логічний знак рівності виглядає по-іншому, ніж звичайний), що є істинним. Тому значення даного виразу дорівнює 1, що і показано праворуч від знаку рівності.

Перерахуємо логічні оператори; .

-більше (Greater Than) $x>y$,

-менше (Less Than) $x<y$;

-більше чи дорівнює (Greater Than or Equal) $x\geq$;

-менше чи дорівнює (Less Than or Equal) $x\leq y$;

-дорівнює (Equal) $x=y$;

-не дорівнює (Not Equal to) $x\neq y$;

Лістинг 8. Оператори прирівнювання

$2 = 3 = 0$ $\quad 5 > 1 = 1$ $\quad 3 > 3 = 0$

$7 = 7 = 1$ $\quad 3 < \infty = 1$ $\quad 3 \geq 3 = 1$

$0 \neq 0 = 0$

Лістинг 9. Булеві оператори

$1 \vee 0 = 1$ $\quad 1 \wedge 0 = 0$ $\quad 1 \oplus 0 = 1$ $\quad \neg 1 = 0$

$0 \vee 0 = 0$ $\quad 0 \wedge 0 = 0$ $\quad 0 \oplus 0 = 0$ $\quad \neg 0 = 1$

$1 \vee 1 = 1$ $\quad 1 \wedge 1 = 1$ $\quad 1 \oplus 1 = 0$

Оператори вирази

Майже всі обчислювальні оператори були розглянуті вище. Вони згруповані на панелі Evaluation (Вирази).

— Оцінити чисельно (Evaluate Numerically)
— Обчислити символьно (Evaluate Symbolically)
— Присвоювання (Definition)
— Глобальне присвоювання (Global Definition)

Розглянемо розходження між операторами звичайного присвоювання і глобального присвоювання. Для того щоб обчислити вирази, що містять деяку змінну чи функцію, необхідно, щоб цій змінній раніше в документі було присвоєнне яке-небудь значення. Інакше буде видаватися повідомлення про помилку. Однак, якщо в будь-якій частині документа (наприклад, у самому низу) вставити оператор глобального присвоювання, то змінна буде визначена в будь-якій частині документа.

Лістинг 10. Взаємодія глобального і локального присвоювання

$x \equiv 5$

$x = 5$

$x := 10$

$x = 10$

$y \equiv x^2$

$y = 25$

Зверніть увагу, що незважаючи на локальне присвоювання змінної x:=10 в третьому рядку лістинга, значення змінної у обчислюється таки відповідно до глобального значення x = 5, оскільки сама змінна загальним чином визначена через змінну x. Так само, як ви глобально присвоюєте значення змінної, допускається глобально визначати функції.

Лістинг 11. Глобальне визначення функції користувача

$f(2) = 128$

$f(x) \equiv x^7$

Символьна алгебра

Символьний процесор MathCAD вміє виконувати основні алгебраїчні перетворення, такі як спрощення виразів, розкладання їх на множники, символьне підсумовування і перемножування.

Спрощення виразів (Simplify)

Спрощення виразів — операція, яка найчастіше застосовується. Символьний процесор MathCAD прагне так перетворити вирази, щоб вони набули простішої форми. При цьому використовуються різні арифметичні формули, приведення подібних доданків, тригонометричні тотожності, перерахування зворотних функцій і ін. Щоб спростити вирази за допомогою меню (рисунок 6.):

1. Введіть вирази.
2. Виділіть вирази повністю або ту його частину, яку потрібно спростити.
3. Виберіть команду Symbolic/Simplify (Символіка/Спростити).

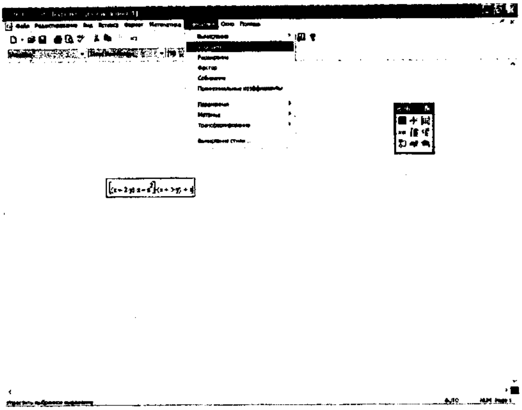


Рисунок 6

Для спрощення виразів використовуйте ключове слово simplify. Не забувайте, якщо деяким змінним, які входять у вирази, раніше були присвоєні деякі значення, то вони будуть підставлені в них при виконанні символьного висновку .

Лістинг 12. Спрощення виразу

$$(x+2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot(x+5\cdot y) + z \text{ simplify } \rightarrow 61\cdot z - 135\cdot z^2$$

Лістинг 13. Спрощення виразу з підстановкою значення змінних

$$x := 10 \quad y := 1$$

$$(x+2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot(x+5\cdot y) + z \text{ simplify } \rightarrow 13\cdot z - 15\cdot z^2$$

Спрощення виразів, що містять числа, виконується по-різному, в залежності від наявності в числах десяткової крапки. Якщо вона, є, то виконується безпосереднє обчислення виразу.

Лістинг 14. Спрощення виразу з числами

$\sqrt{3}$ simplify $\rightarrow \sqrt{3}$

$\sqrt{3.01}$ simplify $\rightarrow$ 1.73493515728974724

Розкладання виразів (Expand)

Операція символьного розкладання, чи розширення виразів протилежна за змістом операції спрощення. У ході розкладання розкриваються всі суми і добутки, а складні тригонометричні залежності розкладаються за допомогою тригонометричних тотожностей. Розкладання виразів відбувається шляхом вибору команди Symbolics / Expand (Символіка / Розкласти), або використанням разом з оператором символьного висновку ключового слова expand.

Розкладання на множники (Factor)

Розкладання виразів на прості множники виконується за допомогою команди Symbolics / Factor Символіка / Розкласти на множники), або використанням разом з оператором символьного висновку ключового слова factor. Ця операція дозволяє розкласти поліноми на добуток більш простих поліномів, а цілі числа— на прості співмножники.

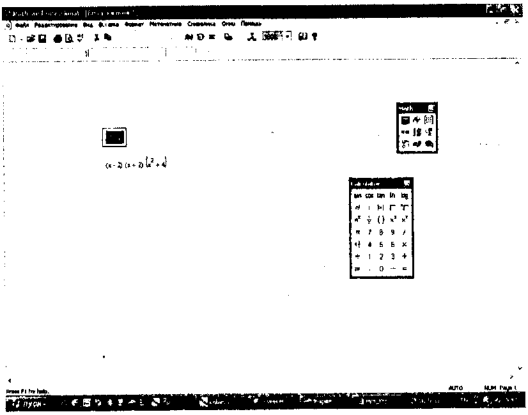


Рисунок 7

Лістинг 15. Приклади розкладання на множники

$x^4 - 16$ factor $\rightarrow (x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(x^2+4\right)$

28 factor $\rightarrow 2^2\cdot 7$

Щоб звести подібні доданки полінома за допомогою меню:

1. Введіть вирази.
2. Виберіть команду Symbolics / Collect (Символіка / Звести подібні).

У результаті з'явиться рядок з результатом зведення подібних доданків. Щоб звести подібні доданки за допомогою оператора символьного обчислення:

1. Введіть вирази.
2. Натисніть кнопку Collect на панелі Symbolic (Символіка).
3. Введіть у місцезаповнювач після вставленого ключового слова collect (звести подібні доданки) ім'я змінної, відносно якої потрібно звести подібні.

4. Введіть оператор символьного виведення→
5. Натисніть клавішу <Enter>.

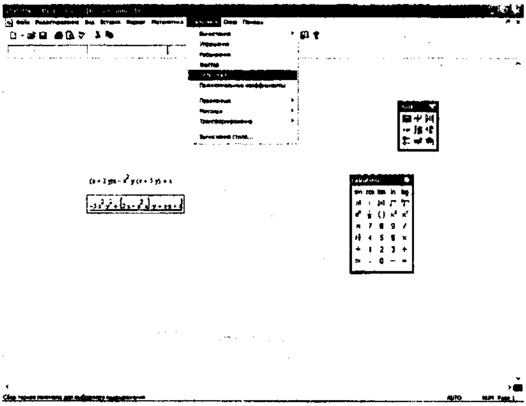


Рисунок 8

Лістинг 16. Зведення подібних доданків по різних змінних

$$(x+2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x+5\cdot y) + z \text{ collect}, x \rightarrow \left(z - z^2\cdot y\right)\cdot x + 2\cdot y\cdot z - 5\cdot z^2\cdot y^2 + z$$

$$(x+2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x+5\cdot y) + z \text{ collect}, y \rightarrow -5\cdot z^2\cdot y^2 + \left(2\cdot z - z^2\cdot x\right)\cdot y + x\cdot z + z$$

$$(x+2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x+5\cdot y) + z \text{ collect}, x, y, z \rightarrow \left(z - z^2\cdot y\right)\cdot x + 2\cdot y\cdot z - 5\cdot z^2\cdot y^2 + z$$

Коефіцієнти полінома (Polynomial Coefficients)

Якщо вираз є поліномом відносно деякої змінної x, заданим не в звичайному вигляді, а як добуток інших, більш простих поліномів, то коефіцієнти легко визначаються символьним процесором MathCAD. Коефіцієнти самі можуть бути функціями (часом досить складними) інших змінних.

Щоб обчислити поліноміальні коефіцієнти у виразі за допомогою меню:

1. Введіть вирази.
2. Виділіть в ньому ім'я змінної чи виразу, для якого потрібно обчислити поліноміальні коефіцієнти.
3. Виконайте команду Symbolic/Polynomial Coefficients (Символіка/Коефіцієнти полінома).

Щоб обчислити поліноміальні коефіцієнти за допомогою оператора символьного обчислення:

1. Введіть вирази.
2. Натисніть кнопку Coeffs на панелі Symbolic (Символіка).
3. Введіть у місцезаповнювач після вставленого ключового слова coeffs аргумент полінома.
4. Введіть оператор символьного виведення →

5. Натисніть клавішу <Enter>.

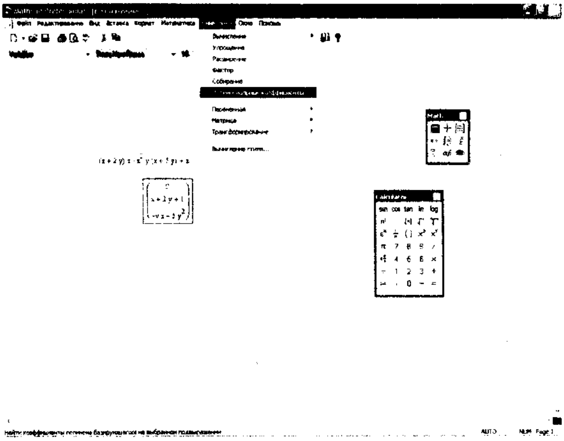


Рисунок 9

Лістинг 17. Обчислення коефіцієнтів полінома

$$(x+2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x+5\cdot y) + z \ \text{coeffs}, z \ \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x+2\cdot y+1 \\ -y\cdot x - 5\cdot y^2 \end{pmatrix}$$

$$(x+2\cdot y)\cdot z - z^2\cdot y\cdot(x+5\cdot y) + z \ \text{coeffs}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot y\cdot z - 5\cdot z^2\cdot y^2 + z \\ z - z^2\cdot y \end{pmatrix}$$

Лістинг 18. Обчислення поліноміальних коефіцієнтів для простої змінної і виразу

$$(x-4)\cdot(x-7)\cdot x + 99 \ \text{coeffs}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} 99 \\ 28 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(x-4)^3 + (x-4)\cdot(x-7)\cdot x + 99 \ \text{coeffs}, x-4 \ \rightarrow \begin{pmatrix} 99 \\ x^2 - 7\cdot x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ряди і добутки

Щоб обчислити символьно кінцеву або нескінченну суму чи добуток:

1. Введіть вирази, використовуючи панель Calculus (Обчислення) для вставки відповідних символів чи підсумовування добутків. При необхідності, введіть як межу ряду символ нескінченності (клавіші <Ctrl>+<Shift>+<Z>).

2. В залежності від бажаного стилю символьних обчислень, виберіть команду Symbolics / Simplify (Символіка / Спростити) чи введіть оператор символьного виведення →.

Лістинг 19. Символьні і чисельні розрахунки рядів

$$\sum_{i=0}^{10} 2^i = 2.047\times 10^3 \qquad \sum_{i=0}^{10} 2^i \to 2047$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i \to \frac{-1}{(a-1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\cdot n!} \to \exp\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{2^n\cdot n!} \to \exp\left(\frac{1}{2}\right) = 1.649$$

$$\sum_{n=0}^{100} \frac{1^n}{2^n\cdot n!} = 1.649$$

Лістинг 20. Символьний розрахунок добутку

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \to 0 \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \to \infty$$

Розкладання на елементарні дроби (Convert to Partial Fractions)

Щоб розкласти складний дріб на прості дроби, слід або виконати команду Symbolics/ Variable/ Convert to Partial Fractions (Символика / Змінна / Розкласти на елементарні дроби), або вказати ключове слово parfrac.

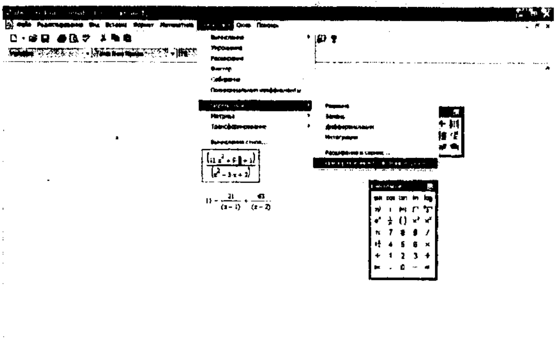


Рисунок 10

Підстановка змінної (Substitute)

Дуже зручна можливість символьних обчислень — це операція підстановки значення змінної у вирази.

Виділіть значення змінної, яке необхідно підставити в деякий вираз. Значення змінної може бути будь-яким виразом відносно будь-яких змінних.

Скопіюйте значення змінної в буфер обміну, наприклад, натисканням клавіш <Ctrl>+<C>, чи кнопки Copy (Копіювати) на панелі інструментів Standard(Стандартна).

Виділіть у виразі, в якому потрібно підставити значення з буферу обміну, змінну, яка буде замінюватися. Виконайте команду Symbolics / Variable / Substitute (Символіка / Змінна /Підставити).

Для здійснення тієї ж операції в сукупності з оператором символьного обчислення використовуйте ключове слово substitute, що вставляється в документ кнопкою на панелі Symbolic (Символіка). Після ключового слова substitute необхідно ввести в місцезаповнювачі логічні вирази, що показують, яку саме змінну якою формулою потрібно замінити.

Лістинг 21. Підстановка значення змінної

$$\sin\left(k\cdot x^2 + b\cdot x\right) \text{ substitute }, k = a\cdot x^2 \ \rightarrow \sin\left(a\cdot x^4 + b\cdot x\right)$$

Матрична алгебра

Символьний процесор MathCAD дозволяє аналітично виконувати найрізноманітніші матричні обчислення. Пам'ятаючи про те, що більшість операцій і вбудованих функцій здійснюються над матрицями так само, як над звичайними числами, до матричних обчислень можна застосовувати розглянуту вище команду спрощення (Simplify) з меню символьних обчислень.

Крім того, є ряд специфічних матричних операцій, які можна організувати, або за допомогою пункту меню Symbolics/ Matrix (Символіка / Матриця), або за допомогою декількох кнопок на панелі Symbolic (Символіка), що відносяться до матриць.

Матричні операції:

-Transpose (Транспонування).

- Invert (Зворотна матриця).

-Determinant (Визначник).

Диференціювання (Differentiate)

Щоб аналітично продиференціювати вираз по деякій змінній, виділіть в ньому цю змінну і виберіть команду Symbolics/ Variable/Differentiate {Символіка/ Змінна /Диференціювати) .

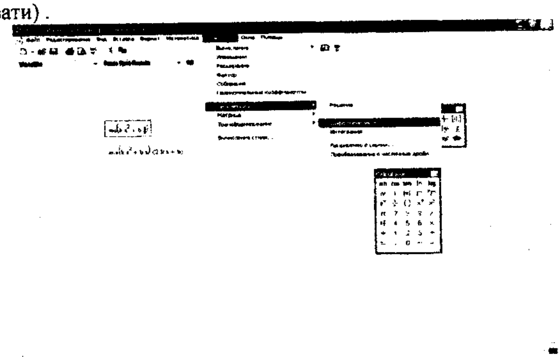


Рисунок 11

Інтегрування (Integrate)

Для обчислення невизначеного інтеграла від деякого виразу по визначеній змінній виділіть у виразі змінну і виконайте команду Symbolics/ Variable / Integrate (Символіка / Змінна / Інтегрувати). Обчислене аналітичне представлення невизначеного інтеграла з'явиться нижче.

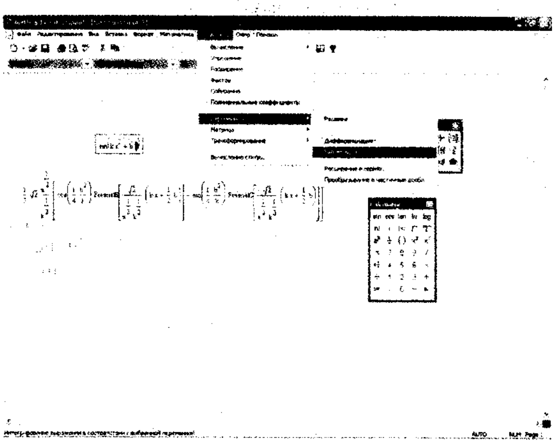


Рисунок 12

Розкладання в ряд (Expand to Series)

За допомогою символьного процесора MathCAD можливо одержати розкладання виразів в ряд Тейлора по будь-якій змінній x в точці x=0.

Щоб розкласти вирази в ряд:

1. Введіть вирази.
2. Виділіть значення змінної, по якій потрібно одержати розкладання в ряд.
3. Виконайте команду Symbolics / Variable / Expand to Series (Символіка / Змінна / Розкласти в ряд).
4. В діалоговому вікні, що з'явилося, введіть бажаний порядок апроксимації (Order of Approximation) і натисніть кнопку ОК.

Результат розкладання з'явиться під виразом. Не забувайте, що розкладання будується тільки в точці x=0. Щоб одержати розкладання в іншій точці x=a, можна, наприклад, підставити замість змінної x значення x=a .

$$\sin(kx^2 + bx)$$

$$bx + kx^2 + \frac{-1}{6}b^3x^3 + \frac{-1}{2}kb^2x^4 + (\frac{1}{120}b^5 - \frac{1}{2}k^2b)x^5 + 0(x^6)$$

Для розкладання в ряд другим способом, за допомогою оператора символьного обчислення, використовуйте ключове слово series, вставляючи його кнопкою панелі Symbolic (Символіка). Після ключового слова series, через кому, вказується ім'я змінної, порядок апроксимації.

Для розкладання в ряд другим способом, за допомогою оператора символьного обчислення, використовуйте ключове слово series, вставляючи його кнопкою панелі Symbolic (Символіка). Після ключового слова series, через кому, вказується ім'я змінної, порядок апроксимації.

Лістинг 22. Розкладання виразу в ряд з різним порядком апроксимації

$$\sin\left(k\cdot x^2 + b\cdot x\right) \text{ series}, x, 2 \ \rightarrow b\cdot x$$

$$\sin\left(k\cdot x^2 + b\cdot x\right) \text{ series}, x, 3 \ \rightarrow k\cdot x^2 + b\cdot x$$

$$\sin\left(k\cdot x^2 + b\cdot x\right) \text{ series}, x, 4 \ \rightarrow b\cdot x + k\cdot x^2 - \frac{1}{6}\cdot b^3\cdot x^3$$

$$\sin\left(k\cdot x^2 + b\cdot x\right) \text{ series}, x, 5 \ \rightarrow b\cdot x + k\cdot x^2 - \frac{1}{6}\cdot b^3\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot k\cdot b^2\cdot x^4$$

Лістинг 23. Розклад виразу в ряд за різними змінними

$$\sin\left(k\cdot x^2 + b\cdot x\right) \text{ series}, k, 3 \ \rightarrow \sin(b\cdot x) + \cos(b\cdot x)\cdot x^2\cdot k - \frac{1}{2}\cdot\sin(b\cdot x)\cdot x^4\cdot k^2$$

$$\sin\left(k\cdot x^2 + b\cdot x\right) \text{ series}, b, 3 \ \rightarrow \sin\left(k\cdot x^2\right) + \cos\left(k\cdot x^2\right)\cdot x\cdot b - \frac{1}{2}\cdot\sin\left(k\cdot x^2\right)\cdot x^2\cdot b^2$$

Розв'язуваня рівнянь (Solve)

За допомогою символьного процесора можна обчислити аналітично значення змінної, при якому вираз дорівнює нулю. Для цього:

1. Введіть вирази.
2. Виділіть змінну, відносно якої буде розв'язуватись рівняння, що прирівнює вираз до нуля.
3. Виберіть в меню Symbolics (Символіка) пункт Variable / Solve (Змінна / Вирішити).

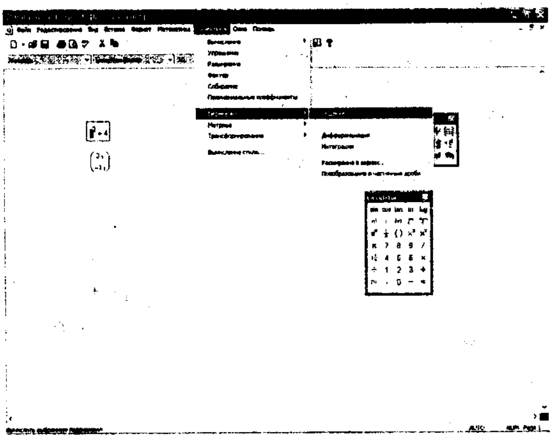


Рисунок 13

Інтегральні перетворення

Інтегральні перетворення, за означенням, ставлять у відповідність деякій функції *f(x)* іншу функцію від іншого аргументу *f(ω)*. Причому ця відповідність *f(x)→F(ω)* задається інтегральною залежністю. Символьний процесор MathCAD дозволяє здійснювати три види інтегральних перетворень функцій — перетворення Фур'є, Лапласа і Z-перетворення. Поряд із прямими перетвореннями, існує можливість робити кожне з цих трьох зворотних перетворень, тобто $F(\omega) \to f(x)$.

Для обчислення перетворення виразу виділяється змінна, по якій буде здійснюватися перетворення, і потім вибирається відповідний пункт меню. Перетворення з застосуванням оператора символьного обчислення використовуються з одним із відповідних ключових слів.

Перетворення Лапласа (Laplace)

Перетворенням Лапласа називають інтеграл від $f(x)$ такого виду:

$$F(s) = \infty \int_0 \quad F(s) = \int_0^\infty f(x)\exp(-sx)dx$$

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку може за означенням містити крім самої шуканої функції $y(t)$ тільки її першу похідну $y'(t)$. У переважній більшості випадків диференціальне рівняння можна записати в стандартній формі (формі Коші): $y'(t) = f(y(t), t)$, і тільки з такою формою вміє працювати обчислювальний процесор MathCAD.

Правильна з математичної точки зору постановка відповідної задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку повинна, крім самого рівняння містити одну початкову умову — значення функції $y(t_0)$ в якійсь точці t_0. Потрібно явно визначити функцію $y(t)$ на інтервалі від t_0 до t_i. За характером постановки задачі Коші називають ще задачами з початковими t умовами (initial value problem), на відміну від крайових задач.

Для чисельного інтегрування одного звичайного диференціального рівняння у користувача версії MathCAD 2001 (точніше, починаючи з версії MathCAD 2000 Pro) існує вибір - або використовувати обчислювальний блок Given/odesoive, або вбудовані функції, як у колишніх версіях MathCAD.

Обчислювальний блок Given/Odesolve

Обчислювальний блок для розв'язування одного звичайного диференціального рівняння , що реалізує чисельний метод Рунге-Кутти, складається з трьох частин:

- Given — ключове слово;
- звичайне диференціальне рівняння і початкова умова, записана за допомогою логічних операторів, причому початкова умова повинна бути у формі $y(t_0) = b$;
- Odesolve (t, tl) — вбудована функція для розв'язування звичайного диференціального рівняння.

Лістинг 24. Розв'язування задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$Given$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t) - y(t)^2$$

$$y(0) = 0.1$$

$$y := Odesolve(t, 10)$$

Не забувайте про те, що вставляти логічні оператори слід за допомогою панелі інструментів Boolean (Булеві оператори). При введенні з клавіатури пам'ятайте, що логічному знаку рівності відповідає сполучення клавіш <Ctrl>+<=>. Символ похідної можна ввести як засобами панелі Calculus (Обчислення), так і у вигляді штриха, набравши його за допомогою сполучення клавіш <Ctrl>+<F7>. Вибирайте той чи інший спосіб представлення похідної з міркувань наочності представлення результатів — на хід розрахунків він не впливає.

Користувач має можливість вибирати між двома модифікаціями чисельного методу Рунге-Кутта. Для зміни методу необхідно натисканням правої кнопки миші на області функції odesolve викликати контекстне меню і вибрати в ньому один із двох пунктів: Fixed (Фіксований крок) чи Adaptive (Адаптивний). За замовчуванням застосовується перший з них, тобто метод Рунге-Кутта з фіксованим кроком.

Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

MathCAD вимагає, щоб система диференціальних рівнянь була представлена в стандартній формі:

$$\begin{cases} y_0'(t) = f_0(y_0(t), y_1(t), \ldots y_{n-1}(t), t), \\ y_1'(t) = f_1(y_0(t), y_1(t), \ldots y_{n-1}(t), t), \\ \ldots \\ y_{N-1}'(t) = f_{N-1}(y_0(t), y_1(t), \ldots y_{N-1}(t), t) \end{cases},$$

Для того щоб записати задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, потрібно визначити ще N початкових умов, що задають значення кожної з функцій $y_i(t_0)$ у початковій точці t_0. У векторній формі вони можуть бути записані у вигляді $Y(t_0) = B$, де B — вектор початкових умов розміру $N\times1$, складений з $y_i(t_0)$.

Вбудовані функції для розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь

У MathCAD 2001 є три вбудовані функції, що дозволяють вирішувати поставлену задачу Коші різними чисельними методами.

-rkfixed(y_0, t_0, t_i, M, D) – метод Рунге-Кутта з фіксованим кроком;

-Rkadapt(y_0, t_0, t_i, M, D) – метод Рунге-Кутта зі змінним кроком;

-Bulstoer(y_0, t_0, t_i, M, D) — метод Булирша-Штера;

y_0 — вектор початкових значень у точці t_0 розміру n×i;

t_0 — початкова точка;

t_i — кінцева точка;

m — число кроків, на яких чисельний метод знаходить розв'язок;

D — векторна функція розміру $N\times1$ двох аргументів — скалярного t і векторного y. При цьому y — шукана векторна функція аргументу t того ж розміру $N\times1$.

Кожна з наведених функцій знаходить розв'язок у вигляді матриці, розміру (M+1)×(N+1). У її лівому стовпці знаходяться значення аргументу t, що поділяють інтервал на рівномірні кроки, а в інших N стовпцях — значення шуканих функцій $y_0(t), y_i(t), \ldots y_{N-1}(t)$.

Список літератури

1. Клочко В.І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі: Дис. д. педагог. наук. – К.: НПУ імені М.П. Драгомонова, 1997 – 396 с.
2. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. Под ред. Р.С. Гутера. Изд. 2-е испр. – М.: Наука, 1972.
3. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986.
4. Диференціальні рівняння (Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф.) - К.: Вища школа, 1987.
5. Ісаханов Г.В., Чорний С.М. Чисельні методи розв'язування задач будівництва. – К.: Вища школа, 1995.
6. Пискунов Н.С. Диференциальное и интегральное исчисление для втузов. - М.: Наука,1985. - т.2.
7. Краснов М.Л. Обыкновенные диференциальные уравнения. – М.:Высшая школа,1983.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
9. Самойленко А.М., Кривошея С.А.,Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах .- К.: Вища школа,1992.
10. Амелькин В.В. Диференциальные уравнения в приложениях.-М.: Наука,1987.
11. ДьяконовВ.П. MathCAD 8/2000: Спец.справ. СП.б.: Питер,2000.
12. ДьяконовВ.П., Абраменкова И.В. MathCAD 8 Pro в математике, в физике и в Internet. - М.: Нолидж, 1999.

Навчальний видання

Злата Василівна Бондаренко
Віталій Іванович Клочко

КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами
Редактор С.А. Малішевська

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідотцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 27.01.04 р.
Формат 29,7×42 1/4
Друк різографічний
Тираж 100 прим.
Зам. №2004-18

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. др. арк. 7.27

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ