

531(075)

Б.81

А.А. Бондаренко

О.О. Дубінін

О.М. Переяславцев



ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

**РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНИХ РОБІТ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**




- ✓ ЗАВДАННЯ**
- ✓ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ**
- ✓ МЕТОДИКА ТА ПРИКЛАДИ
ВИКОНАННЯ**

**НОВА КНИГА
ВИДАВНИЦТВО**

531(075)
Б 81
А. А. Бондаренко, О. О. Дубінін, О. М. Переяславцев

**ЗБІРНИК
ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

Завдання, теоретичні відомості, методика та приклади виконання.

НТБ ВНТУ

426370
531(075) Б 81 2004

Бондаренко А.А. Збірник завдань розрахунків:

АБОНЕМЕНТ-2

Нова книга
2004

ББК 22.21. я73
УДК 531/534 (076)
Б 81

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Лист № 14/18.2–2165 від 12.12.2003 р.

Рецензенти:

доктор технічних наук, професор,
заслужений діяч науки і техніки України
О. О. Рассказов
доктор фізико-математичних наук, професор
О. О. Горошко

Бондаренко А. А., Дубінін О. О., Переяславцев О. М. Збірник завдань
Б 81 розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки./ Навчальний
посібник. – Вінниця: Нова книга, 2004. – 288 с.
ISBN 966-7890-73-2

В посібнику в стислій формі подано теоретичні відомості, які є основою до розв'язання завдань, та наведені приклади виконання цих завдань, значна частина яких відповідає практичним ситуаціям.

Розрахований на студентів вищих технічних навчальних закладів усіх форм навчання, також може бути корисний аспірантам, викладачам та інженерно-технічним працівникам для поглиблення знань з теоретичної механіки.

ББК 22.21. я73

426370

ISBN 966-7890-73-2

© А. А. Бондаренко, О. О. Дубінін,
О. М. Переяславцев, 2004
© Видавництво "Нова Книга", 2004

НТБ ВІПУ
м.Вінниця

ПЕРЕДМОВА	6
РОЗДІЛ 1. Вибір варіантів розрахунково-графічних завдань.	8
Порядок виконання завдань.	8
РОЗДІЛ 2. Розрахунково-графічні завдання з статички	
твердого тіла.	9
2.1. Завдання С1	9
2.2. Завдання С2	11
2.3. Завдання С3	14
2.4. Завдання С4	14
2.5. Завдання С5	16
2.6. Завдання С6	18
2.7. Завдання С7	20
РОЗДІЛ 3. Методичні вказівки до виконання	
розрахунково-графічних завдань з статички твердого тіла.....	23
3.1. Предмет статички. Сила. Активні сили та реакції в'язей.	23
Аксиома про звільнення від в'язей. Види в'язей та їх реакції.	23
3.2. Збіжна система сил. Теорема про три сили.	28
Вказівки до завдань С1 і С2.	28
3.3. Момент сили відносно точки та осі. Пара сил.	36
Момент пари сил. Теореми про пари.	36
3.4. Алгебраїчна величина моменту сили відносно точки та моменту пари сил.	40
3.5. Теорема про паралельне перенесення сили.	41
3.6. Довільна плоска система сил. Теорема про момент рівнодійної системи сил відносно точки (теорема Варіньона).	41
Вказівки до завдань С3, С4 і С5.	41
3.7. Довільна просторова система сил. Теорема про момент рівнодійної системи сил відносно осі (теорема Варіньона). Вказівки до завдань С6 і С7.	61
РОЗДІЛ 4. Розрахунково-графічні завдання з кінематики.	68
4.1. Завдання К1	68
4.2. Завдання К2	69

4.3. Завдання К3	71
4.4. Завдання К4	72
4.5. Завдання К5	74
РОЗДІЛ 5. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних завдань з кінематики.	76
5.1. Предмет кінематики. Кінематика точки.	76
Способи задання руху точки. Швидкість та прискорення точки. Вказівки до завдання К1.	76
5.2. Плоскопаралельний рух твердого тіла. Визначення швидкостей точок тіла. Вказівки до завдання К2.	89
5.3. Визначення прискорення точок твердого тіла при плоскопаралельному русі. Вказівки до завдання К3.	103
5.4. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки (сферичний рух). Кути Ейлера. Швидкість та прискорення точок тіла. Вказівки до завдання К4.	115
5.5. Складний рух точки. Теорема про додавання швидкостей. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса). Вказівки до завдання К5.	125
Розділ 6. Розрахунково-графічні завдання з динаміки.	134
6.1. Завдання Д1	134
6.2. Завдання Д2	136
6.3. Завдання Д3	139
6.4. Завдання Д4	141
6.5. Завдання Д5	143
6.6. Завдання Д6	146
6.7. Завдання Д7	148
6.8. Завдання Д8	151
6.9. Завдання Д9	153
6.10. Завдання Д10.	157
РОЗДІЛ 7. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних завдань з динаміки.	160
7.1. Предмет динаміки. Загальні закони динаміки.	160
7.2. Диференціальні рівняння руху вільної та невільної матеріальної точки. Принцип Д'Аламбера.	162
7.3. Перша основна задача динаміки матеріальної точки та її розв'язання. Вказівки до завдання Д1.	165

7.4. Друга основна задача динаміки матеріальної точки та її розв'язання. Вказівки до завдання Д2.	172
7.5. Вільні і згасаючі коливання матеріальної точки. Вказівки до завдання Д3.	184
7.6. Відносний рух матеріальної точки. Переносна і коріолісова сили інерції. Вказівки до завдання Д4.	194
7.7. Система матеріальних точок. Центр мас системи матеріальних точок. Властивості внутрішніх сил системи матеріальних точок. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок.	200
7.8. Кількість руху матеріальної точки і системи матеріальних точок. Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок.	205
7.9. Теорема про рух центра мас системи матеріальних точок. Вказівки до завдання Д5.	209
7.10. Момент кількості руху матеріальної точки і системи матеріальних точок. Теорема про зміну моменту кількості руху системи матеріальних точок. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла. Вказівки до завдання Д6.	218
7.11. Кінетична енергія матеріальної точки і системи матеріальних точок. Кінетична енергія твердого тіла.	230
7.12. Робота сили. Потужність. Робота сили ваги, робота пружної сили, робота моменту пружних сил.	232
7.13. Робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла. Робота внутрішніх сил твердого тіла.	237
7.14. Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок. Вказівки до завдання Д7.	241
7.15. Вступ до аналітичної механіки. Аналітичне визначення в'язей. Кількість ступенів вільності механічної системи. Можливі переміщення. Ідеальні в'язі.	248
7.16. Принцип можливих переміщень (загальне рівняння статики). Вказівки до завдання Д8.	254
7.17. Загальне рівняння динаміки. Вказівки до завдання Д9.	261
7.18. Узагальнені координати. Узагальнені сили. Рівняння Лагранжа II роду. Вказівки до завдання Д10.	267

Список літератури	284
--------------------------------	------------

ПЕРЕДМОВА

“Теоретична механіка” – одна з фундаментальних загально-наукових дисциплін фізико-математичного профілю, яка являється науковою базою багатьох областей сучасної техніки і інженерних дисциплін (опір матеріалів, теорія механізмів і машин, деталі машин, гідравліка, будівельна механіка та ін.).

Велику роль відіграє теоретична механіка в розвитку науково-технічного прогресу, в зростаючому зв'язку з другими природничими науками, особливо, з фізикою, хімією, біологією, а також майже з усіма областями сучасної техніки.

Мета дисципліни “Теоретична механіка” полягає в тому, щоб навчити майбутнього інженера основним поняттям і законам механіки і випливаючих з цих законів методам розрахунку рівноваги і руху матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи.

Задача дисципліни – на базі одержаних знань майбутній інженер мусить самостійно оволодіти всім новим, з чим йому прийдеться зустрітись в подальшому прогресі науки і техніки. В задачу входить також – навчити студента вибирати оптимальні розрахункові схеми, проводити розрахунки типових елементів конструкцій, порівнювати варіанти, вибирати оптимальні рішення, володіти постановкою задачі, вибором методу розв'язання, аналізом рішення.

Добре оволодіння курсом теоретичної механіки вимагає не тільки глибоке вивчення теорії, а і здобути тверді навички в розв'язанні практичних задач. Для цього необхідно самостійно розв'язати значну кількість задач з усіх розділів теоретичної механіки.

Збірник завдань з теоретичної механіки, що пропонується, містить 22 завдання кожне в 1000 варіантах з усіх основних тем учбової програми: 7 з статички, 5 кінематики, 10 динаміки.

Достатнє число завдань по кожному із розділів курсу забезпечує можливість встановлювати тематику і кількість робіт в залежності від профілю підготовки спеціаліста, тобто від об'єму і змісту курсу теоретичної механіки, що вивчається.

Набір варіантів індивідуальних завдань студент може визначити за своїм шифром, якій встановлює викладач.

В збірнику в стислій формі подано теоретичні відомості, які є основою до розв'язання завдань, та наведені приклади виконання завдань, значна частина яких відповідає практичним ситуаціям.

Грунтуючись на цих прикладах, студенти (особливо заочних факультетів) зможуть самостійно виконати завдання з даного збірника.

Даний збірник можуть використати також аспіранти, інженери і техніки для поглиблення знань з теоретичної механіки.

РОЗДІЛ I. Вибір варіантів розрахунково-графічних завдань.

Порядок виконання завдань.

До кожного завдання подається 10 рисунків та дві таблиці А та Б (мають такий самий номер, що і завдання), які містять додаткові до тексту завдання умови. Нумерація рисунків та таблиць подвійна, при цьому номером рисунка і позначенням таблиці є цифра та літера, що стоять після точки. Наприклад, рис. С1.5 та таблиця С1.А це є рис.5 до завдання С1 та таблиця А до завдання С1. Нумери додаткових до тексту умов від 0 до 9 подані у першому стовпці кожної з таблиць.

Студент у всіх завданнях вибирає номер рисунка по останній цифрі шифру залікової книжки, номер додаткових до завдання умов по таблиці А по передостанній цифрі шифру, а по таблиці Б по третій цифрі з кінця шифру; наприклад, якщо шифр закінчується числом 637, то береться рис. 7, додаткові умови № 3 з таблиці А та додаткові умови № 6 з таблиці Б.

Завдання виконуються в учнівському зошиті в клітинку. На титульному листі обов'язково повинні бути: назва дисципліни, номер роботи, шифр студента, факультет, спеціальність, прізвище, ініціали студента та його адреса. На першій сторінці зошита вказуються: номер роботи, перелік завдань, автор та рік видання методичної літератури, що була використана при розв'язанні завдань.

Рисунки при розв'язанні завдань виконуються акуратно із застосуванням креслярських приладів. На рисунках необхідно наводити всі використані при розв'язанні величини: розміри, координатні осі, вектори сил, швидкостей, прискорень та інше.

Розв'язання завдань необхідно супроводити стислими текстовими поясненнями (які формули або теореми застосовуються для розв'язання, як отримані ті чи інші результати) та докладним викладом усіх розрахунків, що виконуються.

Роботи, що не відповідають усім зазначеним вимогам не розглядаються та відправляються для дооформлення. Всі виправлення згідно зауважень викладача необхідно виконати в кінці зошита з відповідними поясненнями.

РОЗДІЛ 2. Розрахунково-графічні завдання з статички твердого тіла.

2.1. Завдання С1. Тверде тіло на рис. С1.0 – $ABCD$; на рис. С1.1÷С1.9 – ABC , спирається у точці A на рис. С1.0, С1.1, С1.3÷С1.9 на шарнірно-нерухому опорі; на рис. С1.2 на дві взаємоперпендикулярні гладенькі поверхні і підтримується у рівновазі на рис. С1.0, С1.3 за допомогою шарнірно-рухомої опори; на рис. С1.2, С1.4 за допомогою гладеньких поверхонь; на рис. С1.1, С1.5, С1.7, С1.8 за допомогою невагомго стержня; на рис. С1.6, С1.9 за допомогою невагомгої та нерозтяжної нитки, яка перекинута через блок D , та тягача E . На тверде тіло діє сила \vec{P} , як це показано на рис. С1.0÷С1.9. Числове значення величини сили \vec{P} , кута α та лінійні розміри твердого тіла подані в таблицях С1.А та С1.Б.

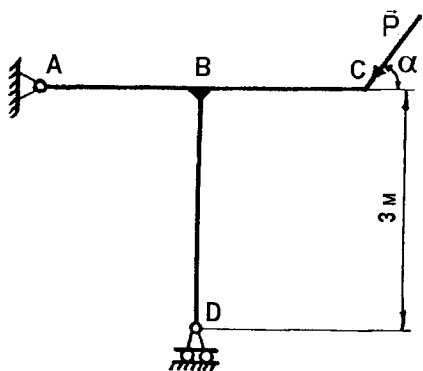


Рис. С1.0

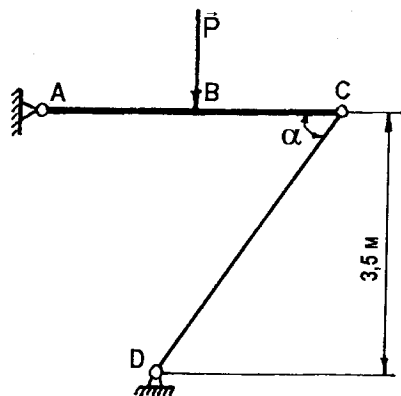


Рис. С1.1

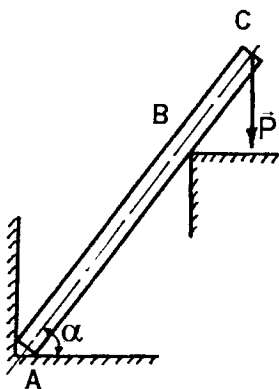


Рис. С1.2

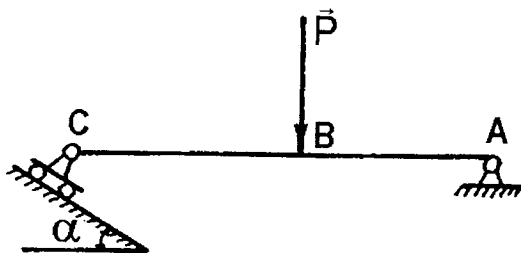


Рис. С1.3

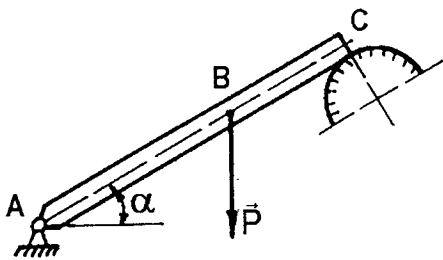


Рис. C1.4

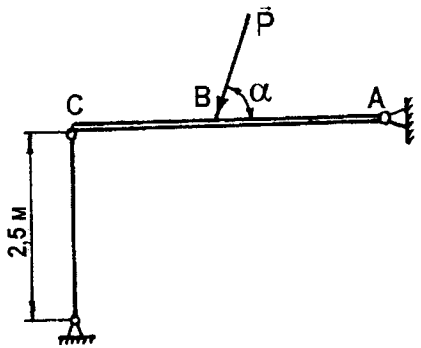
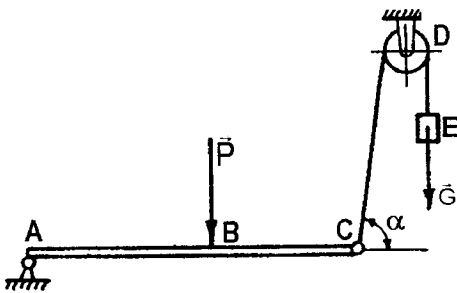


Рис. C1.5



Тертям в блоці D нехтувати.

Рис. C1.6

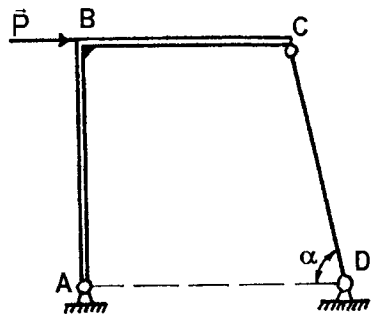


Рис. C1.7

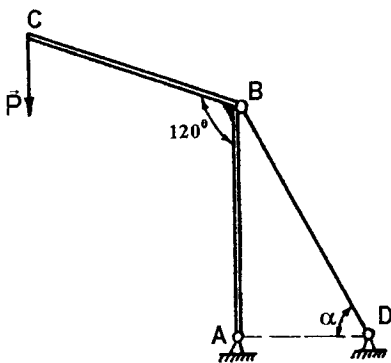
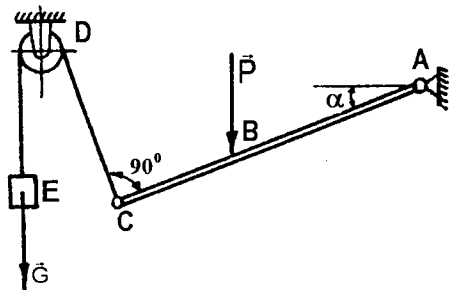


Рис. C1.8



Тертям в блоці D нехтувати.

Рис. C1.9

Визначити реакцію в'язі в точці A твердого тіла $ABCD$ (рис. С1.0), або твердого тіла ABC (рис. С1.1÷С1.9), а також: реакцію шарнірно-рухомої опори (рис. С1.0, С1.3); реакцію гладенької поверхні (рис. С1.2, С1.4); реакцію стержня (рис. С1.1, С1.5, С1.7, С1.8); числове значення сили ваги тягара G (рис. С1.6, С1.9).

Вагою твердого тіла нехтувати.

Вказівки до розв'язання завдання С1. Застосувати теорему про три сили; визначення невідомих сил провести на підставі геометричної та аналітичних умов рівноваги збіжної системи сил; порівняти результати проведених розрахунків.

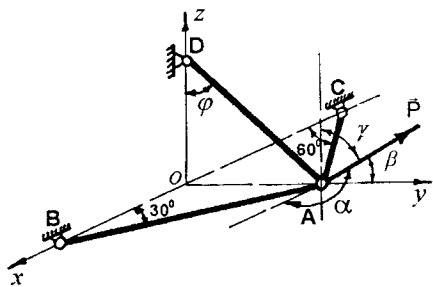
Таблиця С1.А

Варіант	P	α
	кН	град.
0	5,6	60°
1	6,5	50°
2	5,2	45°
3	8,2	60°
4	7,5	55°
5	6,2	60°
6	4,8	40°
7	5,8	60°
8	7,5	45°
9	5,0	75°

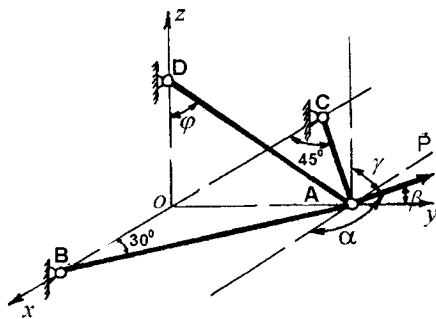
Таблиця С1.Б

Варіант	AB	BC
	м	м
0	3,2	2,1
1	2,5	1,9
2	3,5	1,5
3	2,7	1,7
4	3,0	2,5
5	3,4	1,5
6	2,5	1,9
7	3,0	1,8
8	1,8	1,5
9	2,7	2,2

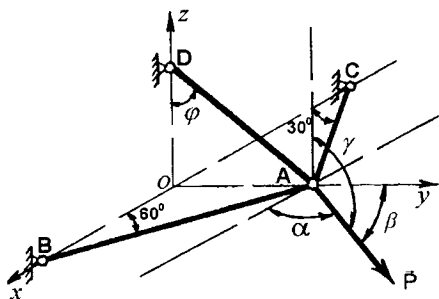
2.2. Завдання С2. Визначити зусилля в стержнях AB , AC та AD просторового кронштейна, якщо на вузол A діє сила \vec{P} , як це показано на рис. С2.0÷С2.9. Числове значення величини сили та значення кутів, що визначають положення вектора \vec{P} відносно системи координат, подані в таблицях С2.А та С2.Б. Вагою стержнів кронштейна нехтувати.



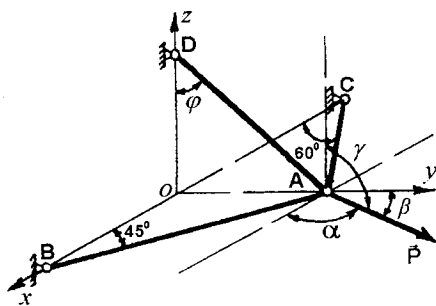
Puc. C2.0



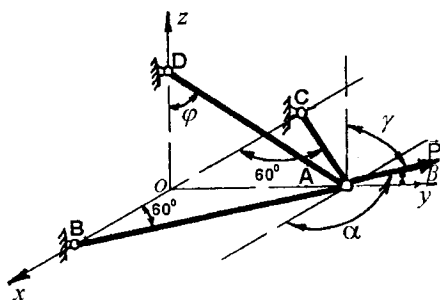
Puc. C2.1



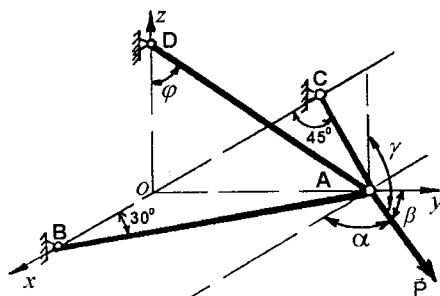
Puc. C2.2



Puc. C2.3



Puc. C2.4



Puc. C2.5

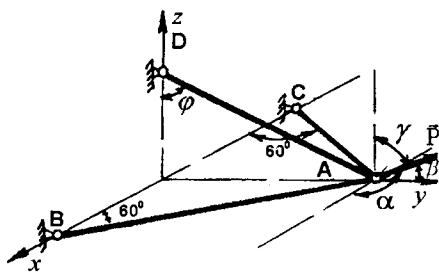


Рис. С2.6

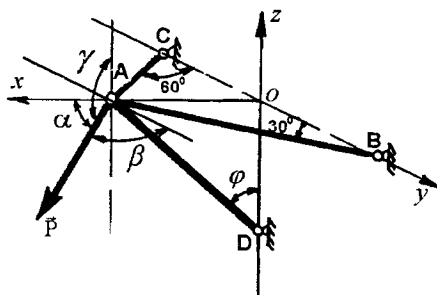


Рис. С2.7

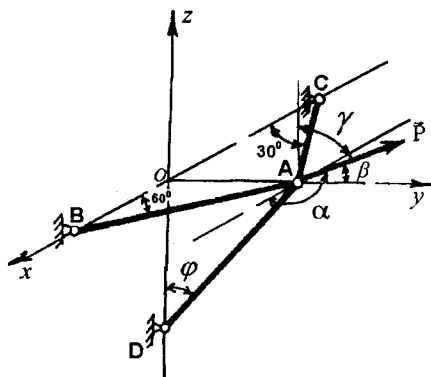


Рис. С2.8

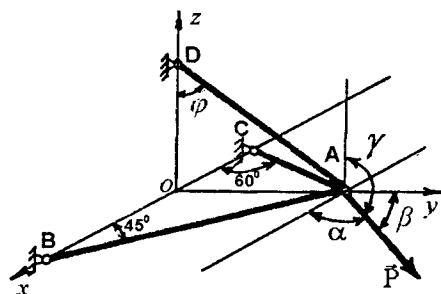


Рис. С2.9

Таблица С2.А

Вариант	P	φ
	кН	град.
0	2,5	35°
1	2,8	38°
2	2,2	40°
3	3,5	45°
4	2,5	50°
5	2,9	55°
6	3,5	45°
7	2,4	45°
8	2,6	75°
9	3,2	60°

Таблица С2.Б

Вариант	α	β	γ
	град.	град.	град.
0	60°	90°	30°
1	30°	60°	90°
2	60°	60°	45°
3	60°	45°	60°
4	45°	60°	60°
5	30°	60°	90°
6	90°	45°	45°
7	45°	90°	45°
8	45°	60°	60°
9	60°	45°	60°

2.3. Завдання С3. Користуючись умовою завдання С1 визначити реакцію в'язі в точці A твердого тіла $ABCD$ (рис. С1.0), або твердого тіла ABC (рис. С1.1–С1.9), а також: реакцію шарнірно-рухомої опори (рис.С1.0, С1.3); реакцію гладенької поверхні (рис. С1.2, С1.4); реакцію стержня (рис. С1.1, додаток С1.5, С1.7, С1.8); числове значення сили ваги тягача \vec{G} (рис.С1.6, С1.9). Вагою твердого тіла нехтувати.

Вказівки до розв'язання завдання С3. Реакцію в'язі в точці A твердого тіла подати двома складовими; визначення невідомих реакцій провести на підставі основної та двох додаткових форм рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил; порівняти розрахунки реакцій; повну реакцію в'язі в точці A твердого тіла визначити, як геометричну суму двох складових; порівняти результати розрахунків повної реакції в'язі в точці A з результатами, що були одержані при розв'язанні завдання С1.

2.4. Завдання С4. Визначити реакції опор та тиск в проміжному шарнірі C складеної конструкції. Схеми конструкцій подані на рис. С4.0–С4.9.

На конструкцію діють дві сили \vec{P}_1, \vec{P}_2 , рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю \vec{q}_1 і \vec{q}_2 та дві пари сил з моментами M_1 і M_2 . Вагою конструкції нехтувати.

Числові значення сил \vec{P}_1, \vec{P}_2 , числові значення інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження та числові значення моментів пар сил M_1 і M_2 подані в таблицях С4.А та С4.Б.

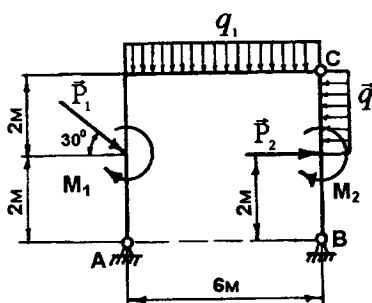


Рис. С4.0

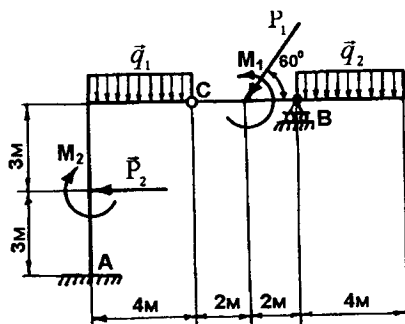
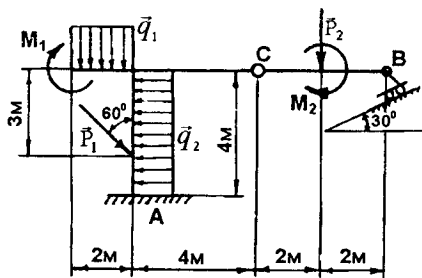
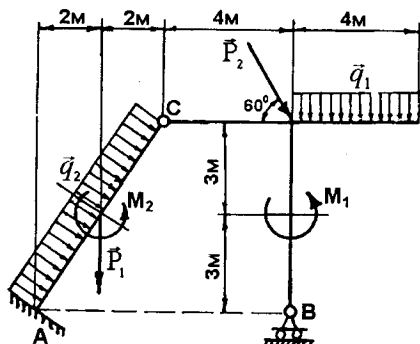


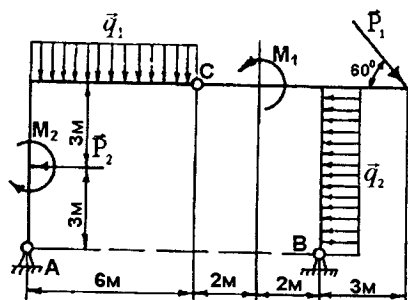
Рис. С4.1



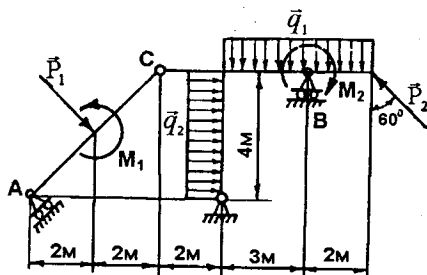
Puc. C4.2



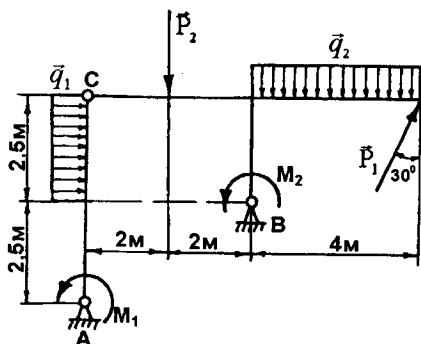
Puc. C4.3



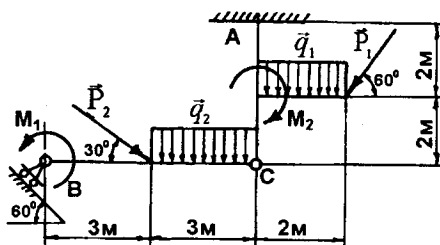
Puc. C4.4



Puc. C4.5



Puc. C4.6



Puc. C4.7

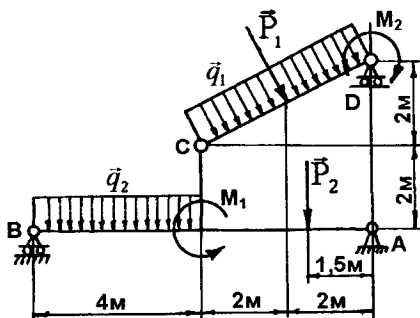


Рис. С4.8

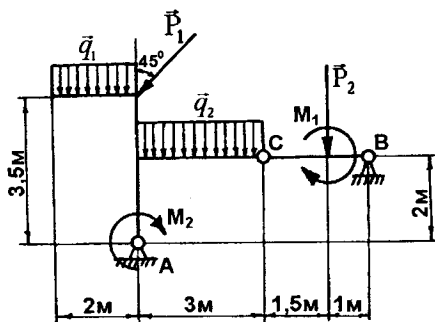


Рис. С4.9

Таблиця С4.А

Варіант	P_1	P_2	q_1	q_2
	кН	кН	кН/м	кН/м
0	6,0	5,0	2,0	4,0
1	7,0	5,0	4,0	2,0
2	4,0	6,0	2,0	4,0
3	8,0	4,0	4,0	2,0
4	5,0	4,0	2,0	4,0
5	8,0	7,0	4,0	2,0
6	9,0	4,0	2,0	4,0
7	5,0	11,0	4,0	2,0
8	6,0	7,0	2,0	4,0
9	7,0	6,0	4,0	2,0

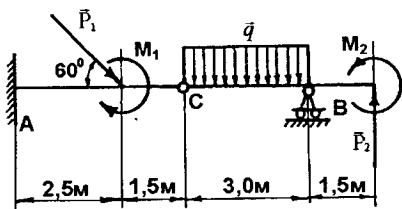
Таблиця С4.Б

Варіант	M_1	M_2
	кН·м	кН·м
0	10,0	6,0
1	10,0	4,0
2	4,0	8,0
3	4,0	6,0
4	2,0	12,0
5	12,0	6,0
6	8,0	10,0
7	6,0	8,0
8	8,0	10,0
9	6,0	4,0

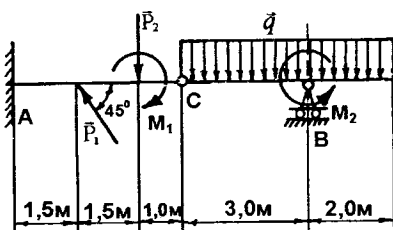
2.5. Завдання С.5. Визначити реакції опор та тиск в проміжному шарнірі C складеної балки. Схеми балки подані на рис. С5.0 – С5.9.

На балку діють сили \vec{P}_1, \vec{P}_2 , рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю \vec{q} та дві пари сил з моментами M_1 та M_2 . Вагою балки нехтувати.

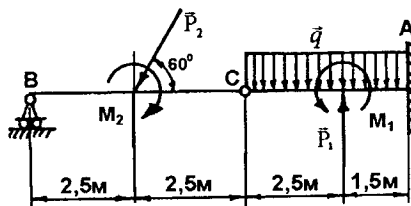
Числові значення сил \vec{P}_1, \vec{P}_2 , числові значення інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження та числові значення моментів пар сил подані в таблицях С5.А та С5.Б.



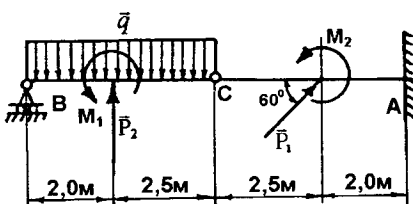
Puc. C5.0



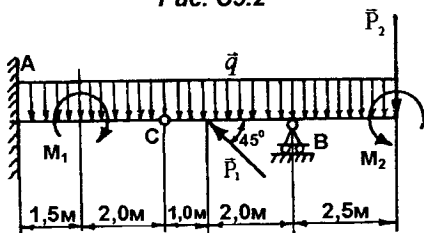
Puc. C5.1



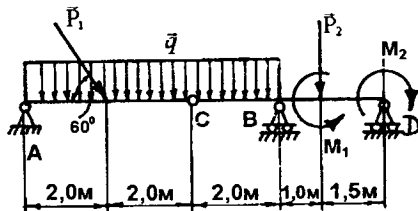
Puc. C5.2



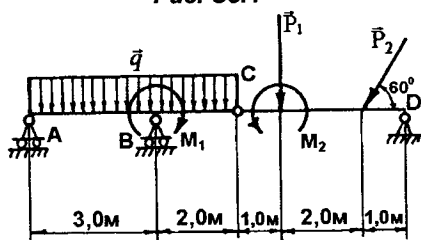
Puc. C5.3



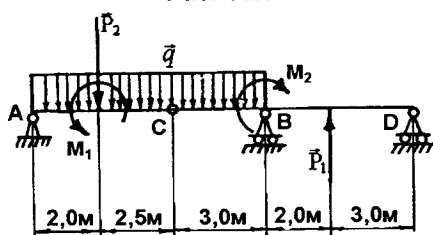
Puc. C5.4



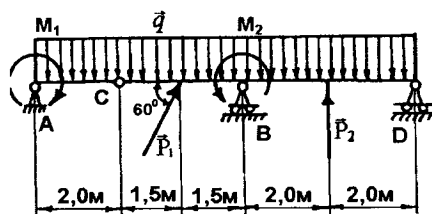
Puc. C5.5



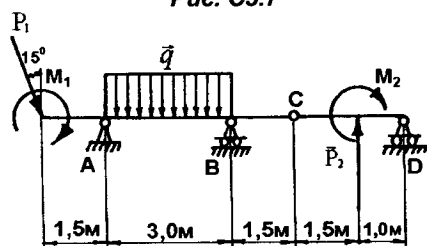
Puc. C5.6



Puc. C5.7



Puc. C5.8



Puc. C5.9

Таблиця С5.А

Варіант	P_1	P_2	q
	кН	кН	кН/м
0	4,0	6,0	2,0
1	6,0	8,0	4,0
2	8,0	4,0	2,0
3	10,0	5,0	4,0
4	5,0	10,0	2,0
5	8,0	6,0	4,0
6	4,0	8,0	2,0
7	7,0	4,0	4,0
8	6,0	8,0	2,0
9	5,0	6,0	4,0

Таблиця С5.Б

Варіант	M_1	M_2
	кН·м	кН·м
0	20,0	15,0
1	12,0	10,0
2	8,0	12,0
3	10,0	8,0
4	11,0	12,0
5	15,0	6,0
6	20,0	10,0
7	8,0	15,0
8	11,0	6,0
9	12,0	6,0

2.6. Завдання С6. Тонка однорідна горизонтальна плита $ABDE$ спирається на шість стержнів (рис.С6.0 – С6.9). На кінцях стержні закріплені шарнірами. До плити прикладені сили \vec{P}_1 і \vec{P}_2 .

Нехтуючи вагою плити і стержнів, визначити зусилля в стержнях. Величина сил і лінійні розміри стержневої конструкції подані в таблицях С6.А та С6.Б.

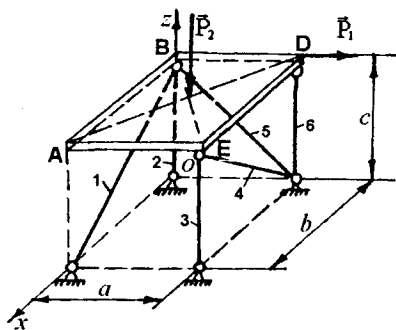


Рис. С6.0

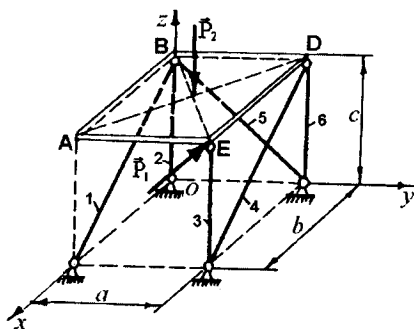
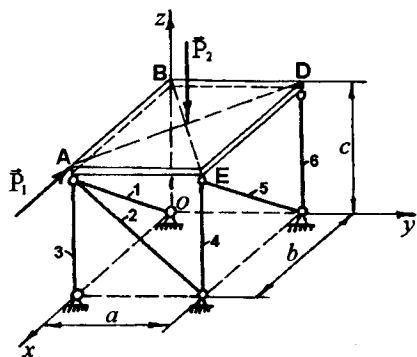
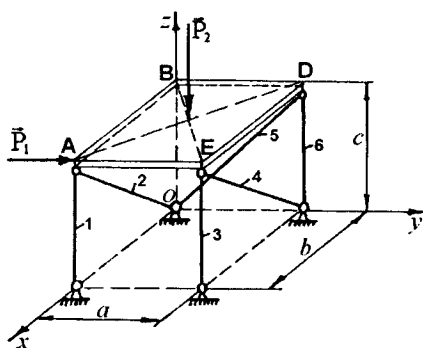


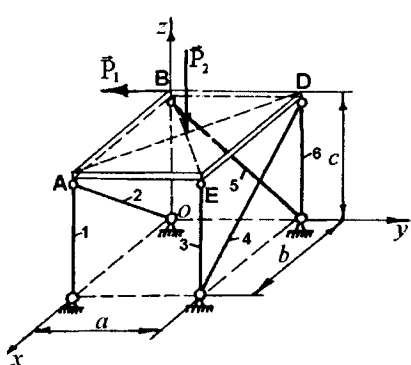
Рис. С6.1



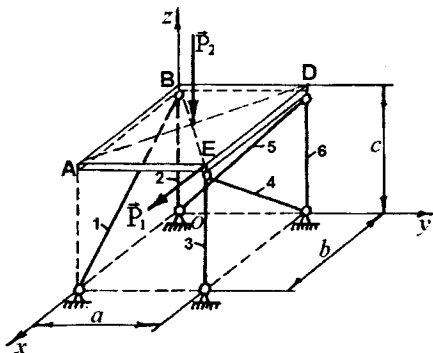
Puc. C6.2



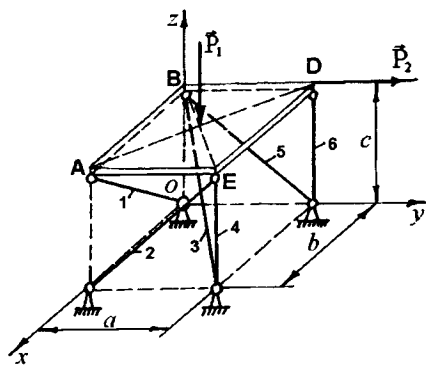
Puc. C6.3



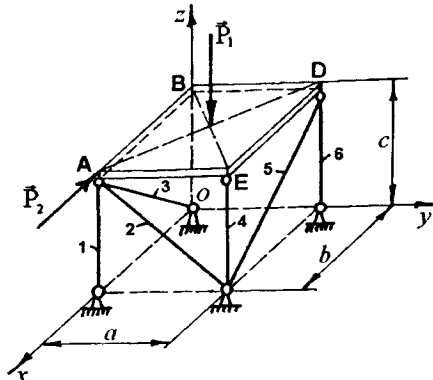
Puc. C6.4



Puc. C6.5



Puc. C6.6



Puc. C6.7

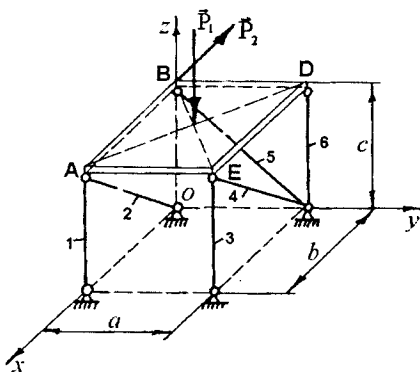


Рис. С6.8

Таблиця С6.А

Варіант	P_1	P_2
	кН	кН
0	8,0	4,0
1	5,0	6,0
2	7,0	5,0
3	4,5	8,0
4	6,5	5,5
5	4,5	6,0
6	5,5	3,0
7	6,5	6,5
8	7,5	5,0
9	6,0	6,0

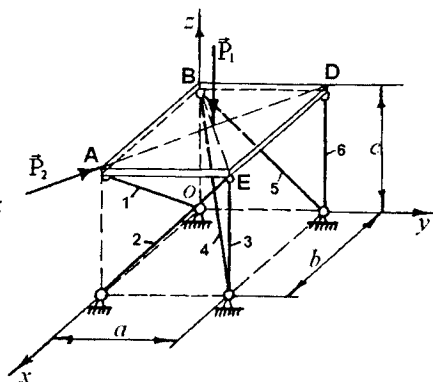


Рис. С6.9

Таблиця С6.Б

Варіант	a	b	c
	м	м	м
0	2,5	2,7	4,2
1	3,5	2,8	5,0
2	4,2	3,5	4,0,
3	2,5	2,7	3,5
4	3,5	4,2	4,5
5	2,8	4,5	3,0
6	4,5	2,5	4,5
7	3,2	2,1	5,5
8	4,2	3,0	3,0
9	2,7	2,9	5,0

2.7. Завдання С7. Визначити реакції опор вала, напрям та числове значення сили \vec{G} . Схеми вала показані на рис. С7.0 – С7.9.

Всі необхідні для розрахунків дані наведені в таблицях С7.А та С7.Б. Вагою вала та вагою насаджених на нього шківів та блоків нехтувати.

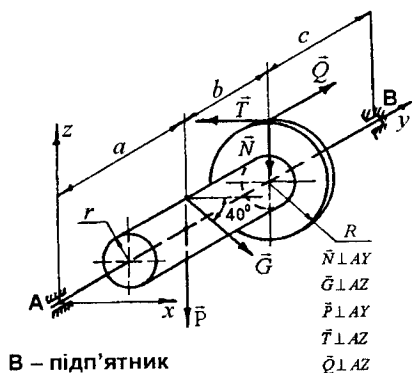


Рис. С7.0

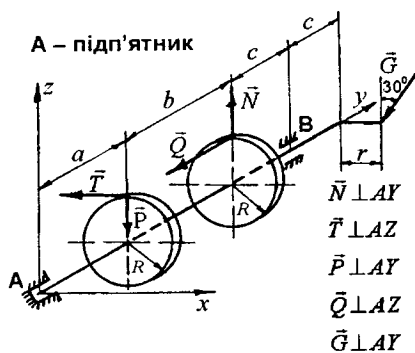


Рис. С7.1

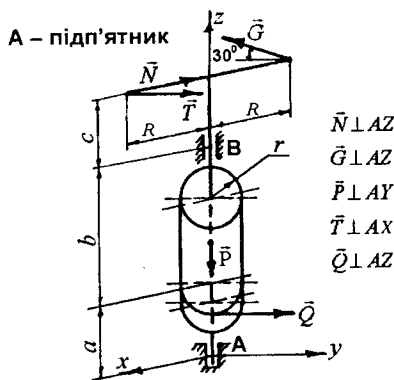


Рис. С7.2

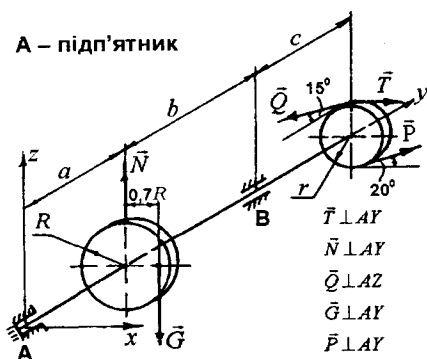


Рис. С7.3

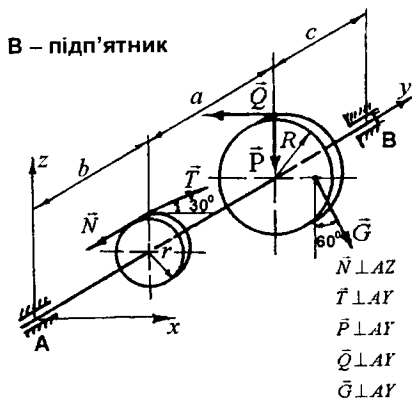


Рис. С7.4

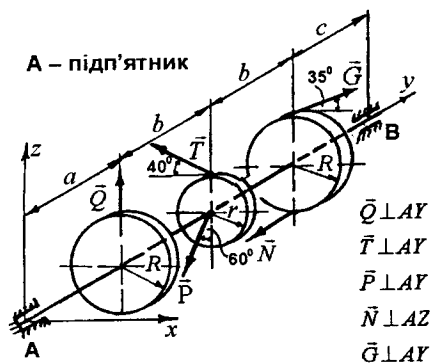


Рис. С7.5

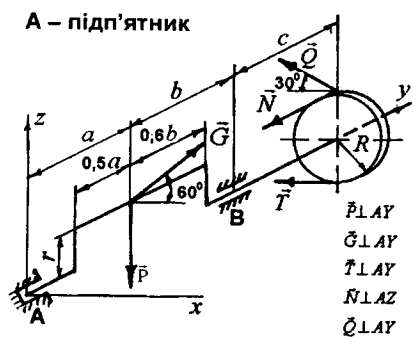


Рис. С7.6

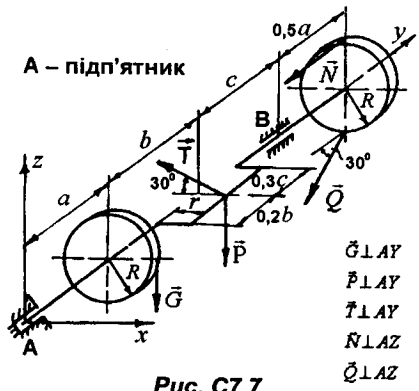


Рис. С7.7

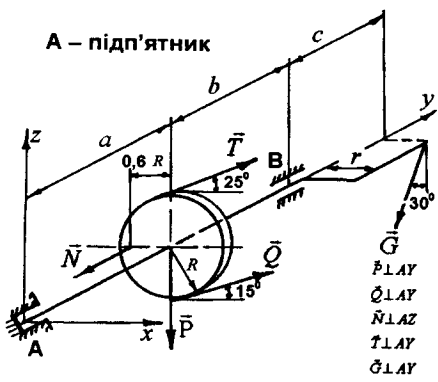


Рис. С7.8

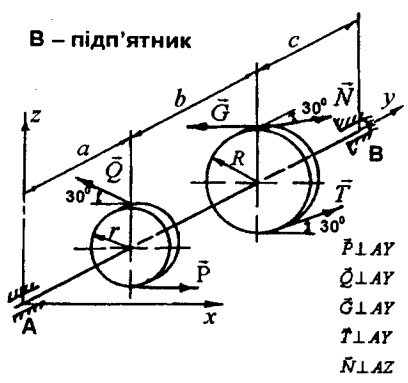


Рис. С7.9

Таблиця С7.А

Варіант	Q кН	T кН	P кН	N кН	a см
0	2,5	4,0	3,2	4,5	20,0
1	5,0	2,5	2,8	2,5	30,0
2	4,0	5,0	2,6	1,6	20,0
3	3,0	6,0	3,2	4,2	30,0
4	4,0	2,0	2,2	2,6	30,0
5	4,0	3,0	2,8	3,0	20,0
6	10,0	4,0	2,4	3,5	25,0
7	4,0	2,5	1,6	2,0	40,0
8	2,0	3,0	2,4	4,0	35,0
9	4,0	5,0	4,5	5,0	45,0

Таблиця С7.Б

Варіант	b см	c см	R см	r см
0	30,0	10,0	15,0	5,0
1	40,0	15,0	20,0	2,5
2	40,0	12,0	20,0	6,0
3	40,0	10,0	20,0	7,0
4	40,0	16,0	20,0	3,0
5	30,0	15,0	15,0	4,0
6	20,0	18,0	15,0	4,5
7	30,0	20,0	25,0	3,5
8	10,0	40,0	10,0	6,5
9	30,0	10,0	10,0	5,0

РОЗДІЛ 3. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних завдань з статички твердого тіла.

3.1. Предмет статички. Сила. Активні сили та реакції в'язей. Аксиома про звільнення від в'язей. Види в'язей та їх реакції.

Статикою твердого тіла називається розділ теоретичної механіки, в якому викладаються методи перетворення одних систем сил в інші, їм еквівалентні, а також вивчаються умови рівноваги різних систем сил, що діють на тверде тіло.

В статистиці твердого тіла, як і у всій механіці, одним з основних є поняття про силу.

Сила – кількісна міра механічної взаємодії матеріальних тіл.

Сила – векторна величина, тобто фізична величина, що характеризується напрямом у просторі, числовим значенням (модулем), точкою прикладання і складається з подібними собі за правилом паралелограма. Останнє у визначенні сили, як вектора є головним.

Вектор сили в статистиці твердого тіла розглядається як ковзний вектор, тобто не змінюючи дії сили на тверде тіло, точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії її дії в будь-яку іншу точку, що перебуває на лінії дії сили.

Сукупність сил, що діє на тіло, називається системою сил.

Еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які, не порушуючи стану тіла, можна замінити одна одною.

Якщо система сил еквівалентна одній силі, то така сила носить назву рівнодійної.

Зрівноважені системи сил або системи сил, еквівалентні нулю, – це такі системи сил, під дією яких тверде тіло перебуває у стані спокою відносно інерціальної системи відліку. Стан спокою твердого тіла відносно інерціальної системи відліку під дією зрівноваженої системи сил називається статичною рівновагою, або просто рівновагою.

Проекція сили на вісь – скалярна величина, що дорівнює добутковій модуля сили на косинус кута між напрямом сили і додатним напрямом осі.

Проекція сили на площину – вектор, що перебуває між проекціями початку та кінця сили на цю площину.

Сили, що діють на тверде тіло можна розділити на дві групи: сили активні, або сили задані і сили реакцій.

Сили, модуль і напрям дій яких відомі заздалегідь і які не залежать від інших прикладених до твердого тіла сил, носять назву активних сил, або заданих сил.

Поняття сили реакції пов'язане з поняттям про невільне тверде тіло та поняття про в'язі.

Вільним твердим тілом називається тіло, яке не контактує з іншими тілами і під дією прикладених до нього активних сил може здійснювати з даного положення будь-який рух.

Якщо рух твердого тіла під дією прикладених до нього активних сил обмежень іншими тілами, то тверде тіло буде невільним.

Обмеження на рухи твердого тіла, що зберігаються при будь-яких активних силах, прикладених до тіла, носять назву в'язей.

В'язі, обмежуючи рух твердого тіла, змінюють стан його руху, який був би, якщо тіло було б вільним, тобто в'язі є джерелом сил, прикладених до тіла.

Сила, з якою в'язь діє на тверде тіло, обмежуючи його рух, називається силою реакції в'язі, або просто реакцією.

При розв'язанні практичних задач статички твердого тіла велике значення має аксіома про звільнення від в'язей.

Аксіома про звільнення від в'язей. Не змінюючи механічного стану (руху чи рівноваги) твердого тіла, в'язь, накладену на тіло, можна відкинути, замінивши її дію реакцією, прикладеною до даного тіла.

Дамо найпростіші види в'язей та їх реакції, які зустрічаються під час розв'язання задач.

1 Якщо тіло спирається на гладеньку поверхню (без тертя), то сила реакції поверхні напрямлена по нормалі до цієї поверхні в точці стикання, тобто перпендикулярно до дотичної площини в даній точці (рис. 3.1–3.3).

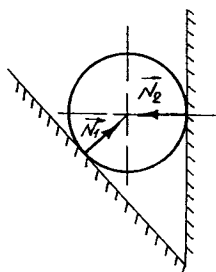


Рис. 3.1

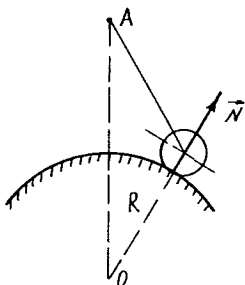


Рис. 3.2

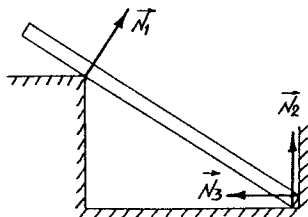


Рис. 3.3

2. Якщо на тіло накладена в'язь у вигляді невагомої нитки, троса, ланцюга та інше, то сила реакції в'язі прикладена до тіла в точці його кріплення та напрямлена вздовж в'язі від точки кріплення до точки підвісу в'язі (рис. 3.4, 3.5).

3. Якщо на тіло накладена в'язь у вигляді прямолінійного або криволінійного невагомого ідеального (без тертя в шарнірах) стержня, то лінія дії реакції в'язі проходить для стержня:

а) прямолінійного – вздовж стержня (рис. 3.6);

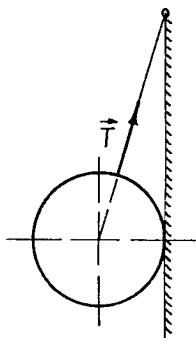


Рис. 3.4

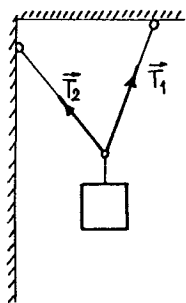


Рис. 3.5

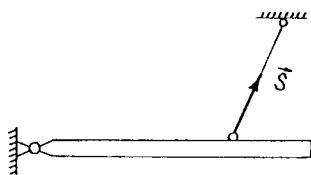


Рис. 3.6

б) криволінійного – вздовж прямої, що з'єднує кінцеві шарніри стержня (рис.3.7).

4. Якщо тіло спирається на рухомий шарнір (шарнірно-рухома опора), то сила реакції в'язі напрямлена по нормалі до площини, по якій котиться коток чи котки (рис. 3.8, 3.9).

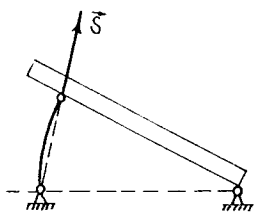


Рис. 3.7

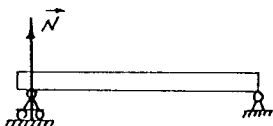


Рис. 3.8

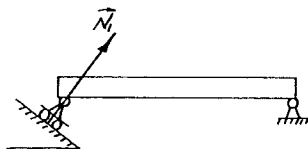


Рис. 3.9

5. Якщо тіло спирається на нерухомий шарнір (шарнірно-нерухома опора), то лінія дії реакції шарніра може мати будь-який напрям у площині, перпендикулярній до осі шарніра, тобто відсутня можливість точ-

но вказати напрям реакції цієї в'язі. Один із можливих варіантів конструкції цієї опори наведено на рис. 3.10. Опора складається з двох частин: нерухомого корпусу з віссю та рухомого корпусу, до якого кріпиться те чи інше матеріальне тіло. З рис. 3.10 випливає, що рухомий корпус має контакт з нерухомим корпусом шарніра через вісь шарніра y . Якщо знехтувати тертям, то реакція нерухомої осі напрямлена по нормалі до циліндричної поверхні у точці, де поверхня рухомого корпусу має контакт з віссю шарніра і перебуває у площині xOz , тобто у площині, перпендикулярній до осі шарніра (див. рис. 3.10, вид $A-A$). Оскільки точка контакту невідома, то і невідома лінія дії цієї реакції (див. рис. 3.10). Тому реакція цієї в'язі подається у вигляді двох складових по координатних осях або однією реакцією та кутом α (рис.3.11, 3.12).

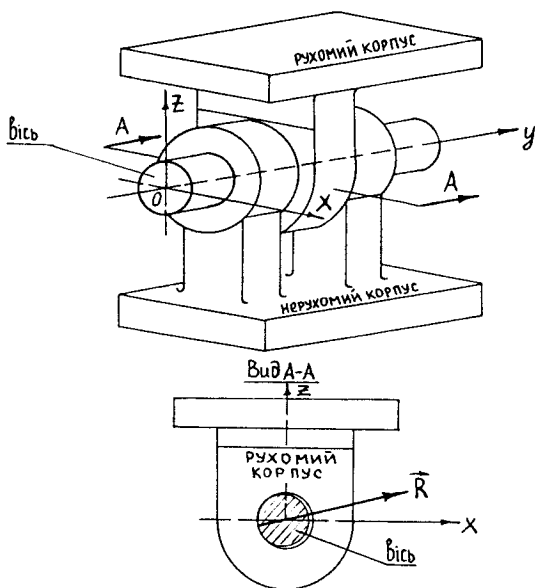


Рис. 3.10

6. Якщо на тіло накладена в'язь у вигляді жорсткої нерухомої опори (жорстке защемлення у площині), то дія такої в'язі на тіло складається з двох сил і пари сил з моментом M_A , тому що така в'язь перешкоджає не тільки лінійним переміщенням тіла, а й повороту його навколо точки закріплення (рис. 3.13).

7. Якщо на тіло накладена в'язь у вигляді жорсткої нерухомої опори (жорстке защемлення у просторі), то дія такої в'язі на тіло складається

з трьох сил і трьох пар сил з моментами M_x , M_y , M_z , тому що така в'язь перешкоджає, як лінійним переміщенням тіла, так і його повороту навколо точки закріплення у просторі (рис. 3.14).

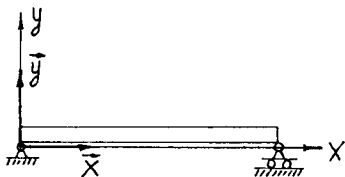


Рис. 3.11

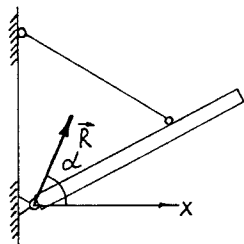


Рис. 3.12

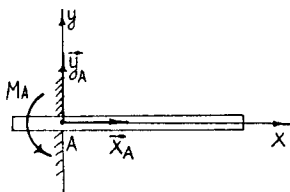


Рис. 3.13

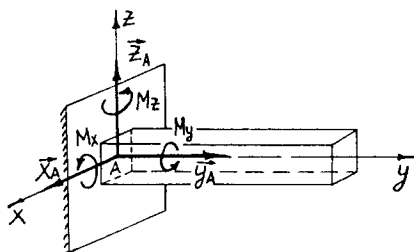


Рис. 3.14

8. Якщо до тіла накладена в'язь у вигляді сферичного шарніра (рис. 3.15, а) або під'ятника (рис. 3.15,б), то реакції таких в'язей, якщо знехтувати тертям, проходять через точку A і їх лінії дії у просторі невідомі. Тому реакції цих в'язей подають трьома складовими по координатних осях.

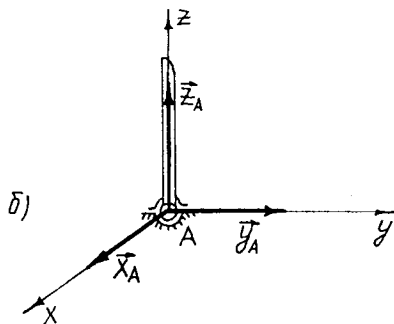
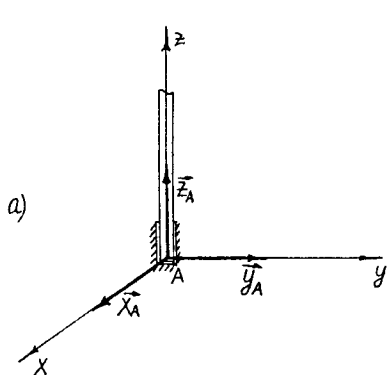


Рис. 3.15

3.2. Збіжна система сил. Теорема про три сили. Вказівки до завдань С1 і С2.

Сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, утворюють систему збіжних сил.

Нехай задана збіжна система сил, що прикладена до твердого тіла в точках A, B, \dots (рис. 3.16). Користуючись тим, що сила – це вектор ковзний, переносимо всі сили в точку O . Складаючи сили за правилом паралелограма або за правилом силового многокутника, знайдемо рівнодійну системи, яка визначається як замикаюча сторона силового многокутника (рис. 3.16):

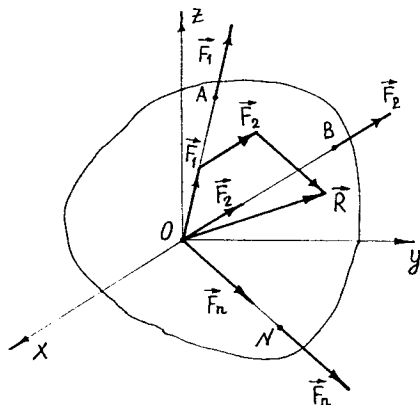


Рис. 3.16

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (3.1)$$

Побудуємо систему координат з початком у точці O та визначимо числове значення рівнодійної \vec{R} за формулою:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2}. \quad (3.2)$$

Рівності $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}$ випливають з теореми векторної алгебри – “проекція геометричної суми на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій складових векторів на ту саму вісь” (рис. 3.17).

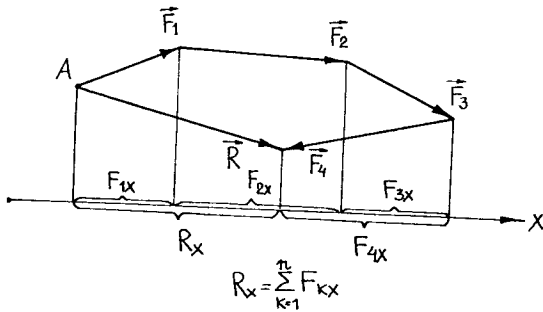


Рис. 3.17

Для рівноваги збіжної системи сил необхідно й достатньо, щоб рівнодійна системи дорівнювала нулю, тобто

$$\vec{R} = \vec{0}. \quad (3.3)$$

Тоді з рівності (3.1) випливає, що при рівновазі сил многокутник сил збіжної системи є замкнутим, а з рівності (3.2), що при цьому алгебраїчні суми проекцій сил системи на три взаємно перпендикулярні осі дорівнюють нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (3.4)$$

Замкненість многокутника сил збіжної системи та рівняння (3.4) носять назву умов рівноваги збіжної системи сил. Перша умова називається геометричною умовою рівноваги, друга – аналітичними умовами рівноваги, або рівняннями рівноваги збіжної системи сил.

Теорема про три сили. Якщо тверде тіло перебуває у стані рівноваги під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Нехай тверде тіло перебуває у рівновазі під дією трьох сил: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Всі сили містяться в одній площині (рис. 3.18).

Оскільки згідно з умовою теореми сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ непаралельні, то лінії дії двох сил, наприклад сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 , перетинаються в довільній точці, наприклад у точці O . Переносимо сили \vec{F}_1 та \vec{F}_2 у точку O та знайдемо їх рівнодійну \vec{R} (див. рис.3.18). Тепер можна розглядати рівновагу тіла, на яке діють дві сили \vec{R} та \vec{F}_3 . Очевидно, ці сили діють вздовж однієї прямої, тобто утворюють найпростішу зрівноважену систему сил. Звідси випливає, що лінія дії сили \vec{F}_3 проходить через точку O .

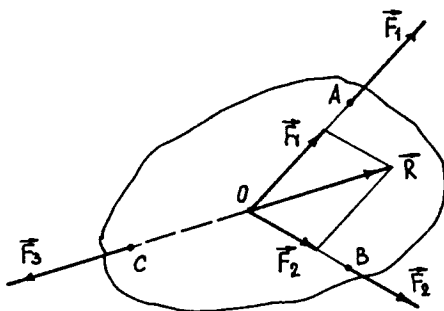


Рис. 3.18

Задачі, в яких розглядається рівновага збіжної системи сил на площині, можна за характером в'язей розділити на два типи:

1) задачі, де в'язі, що накладаються на тіло, рівновагу якого ми розглядаємо, такі, що наперед можна визначити лінії дії реакцій цих в'язей (гладенька поверхня, невагомий ідеальний стержень, невагома нитка);

2) задачі, де одна з в'язей, накладених на тіло, така, що лінію дії реакції наперед визначити не можна, наприклад нерухомий шарнір. У цьому випадку, якщо тіло перебуває у рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінію дії невідомої реакції можна визначити за допомогою теореми про три сили. До цього типу задач і належить завдання С1.

Розв'язуючи задачі про рівновагу збіжної системи сил, треба дотримуватися такого порядку:

- 1) виділити об'єкт (тіло, точку), рівновагу якого розглядають;
- 2) зобразити задані сили;
- 3) визначити в'язі, накладені на тіло;
- 4) застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, умовно відкинути в'язі та прикласти відповідні реакції в'язей;
- 5) зробити аналіз утвореної системи сил. Якщо задачу будемо розв'язувати за допомогою аналітичних умов рівноваги системи сил, то треба:
 - 6) вибрати прямокутну систему координат;
 - 7) скласти рівняння рівноваги твердого тіла під дією збіжної системи сил, тобто рівняння (3.4);
 - 8) розв'язати систему рівнянь і визначити всі невідомі величини;
 - 9) зробити аналіз розв'язку.

При розв'язанні задачі за допомогою геометричної умови рівноваги збіжної системи сил, замість пунктів 6 і 7 слід побудувати замкнений багатокутник сил, з якого визначити величину і напрям реакцій (коли кількість сил, що утворюють збіжну систему, перевищує 3, то краще застосовувати аналітичні умови рівноваги).

Приклад 3.1. Дефлегматор (теплообмінник) ректифікаційної колони спирається на горизонтальну балку ABC , прикріплену до вертикальної стіни шарніром A . Балка підтримується у рівновазі за допомогою стержня CD , як це показано на рис. 3.19. Кут $\alpha = 37^\circ$. На балку в точці B з боку дефлегматора діє сила $P = 10$ кН. Визначити реакцію шарніра A та стержня. Вагою балки та стержня знехтувати.

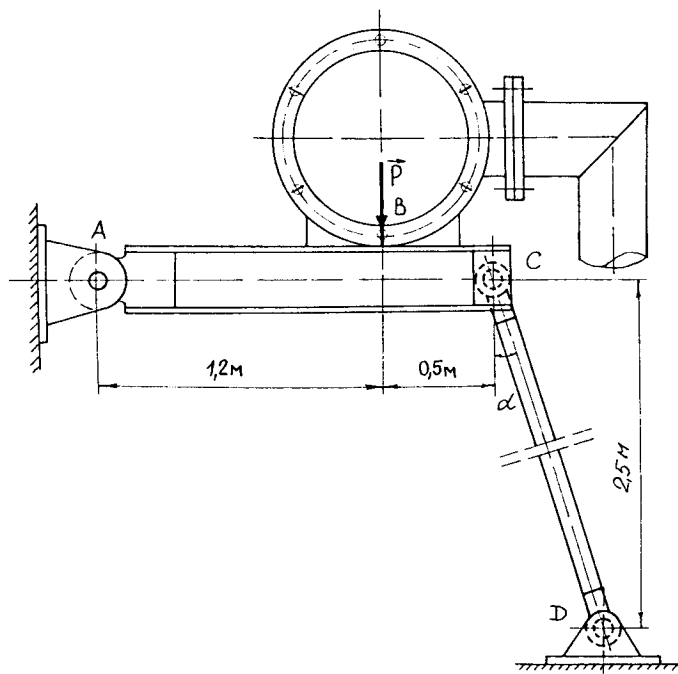


Рис. 3.19

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки ABC , до якої прикладена сила \vec{P} (рис. 3.20). Балка ABC – невільне тіло. В'язями для неї є нерухомий шарнір A і невагомий стержень CD . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язі і прикладемо відповідні їм реакції. Реакція \vec{S} стержня CD напрямлена вздовж стержня, а лінія дії реакції шарніра A – невідома. Оскільки балка перебуває у рівновазі під

дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії їх дії мусять перетинатися в одній точці. Продовжуючи лінії дії сили \vec{P} і реакції стержня CD до перетину, дістанемо точку K , через яку мусить пройти і лінія дії реакції шарніра A . Сполучивши точки A і K матимемо пряму $-AK$ лінію дії реакції \vec{R}_A шарніра A . Початково напрямляємо реакції \vec{S} та \vec{R}_A , як показано на рис. 3.20.

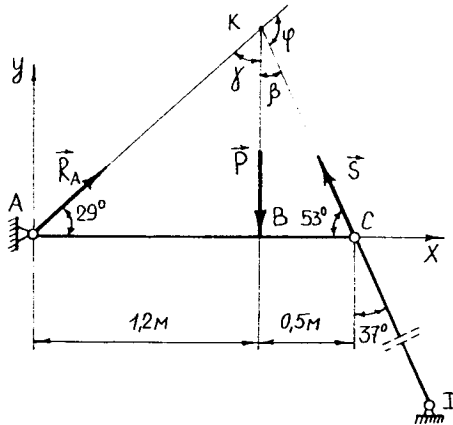


Рис. 3.20

Визначення реакцій \vec{S} та \vec{R}_A за допомогою геометричної умови рівноваги збіжної системи сил. Щоб визначити величину і напрям реакцій \vec{S} та \vec{R}_A , застосуємо геометричну умову рівноваги збіжної системи сил. Для цього побудуємо замкнений силовий трикутник (рис.3.21). Побудову починаємо з відомої сили \vec{P} .

У відповідному масштабі від довільно взятої точки відкладаємо вектор, який геометрично дорівнює силі \vec{P} . Через початок і кінець цього вектора проводимо прямі, відповідно паралельні лініям дії реакцій \vec{S} і \vec{R}_A до їх перетину. Задаємо напрям сил так, щоб трикутник був замкнутим (рис.3.21). З трикутника на підставі теореми синусів маємо:

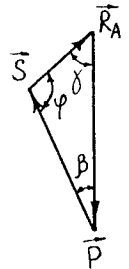


Рис. 3.21

$$\frac{P}{\sin \varphi} = \frac{S}{\sin \gamma} = \frac{R_A}{\sin \beta}. \quad (3.5)$$

Визначаємо кути φ , γ та β . Кут β визначаємо з трикутника ΔKBC (рис.3.20), тобто $\beta = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$. Кут γ визначаємо з трикутника

ΔKBA (рис.3.20), тобто $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1,2}{KB} = \frac{1,2}{0,66} = 1,81$, отже $\gamma = 61^\circ$, де $KB = \frac{0,5}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{0,5}{0,754} = 0,663$ м. Тоді $\varphi = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.

З рівності (3.5) визначаємо S і R_A :

$$S = \frac{P \sin \gamma}{\sin \varphi} = \frac{10 \cdot 0,875}{0,99} = 8,84 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{P \sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{10 \cdot 0,602}{0,99} = 6,08 \text{ кН}.$$

Дійсний напрям \vec{S} та \vec{R}_A поданий на рис. 3.20.

Примітка 3.1. Дійсний напрям реакцій, тобто сил, з якими в'язі діють на тверде тіло, що розглядається у рівновазі, визначає силувий трикутник (див. рис. 3.21). Звільняючи тверде тіло від в'язей та замінюючи в'язі відповідними реакціями, ми, як правило, знаємо лише лінії дії реакцій в'язей, але не знаємо напрям реакцій вздовж цих ліній. Тому, замінюючи в'язь відповідною реакцією, початково напрямляємо реакцію в будь-який бік по лінії її дії. Побудувавши силувий трикутник, коригуємо напрям реакції (див. рис. 3.20 і 3.21).

Визначення реакцій \vec{S} та \vec{R}_A за допомогою аналітичних умов рівноваги збіжної системи сил. Щоб визначити величину і напрям реакцій \vec{S} і \vec{R}_A скористуємося аналітичними умовами рівноваги збіжної системи сил (3.4). Так як на балку ABC (рис.3.20) діє плоска система збіжних сил, то з трьох рівнянь рівноваги (3.4) залишається тільки два:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (3.4,а)$$

Побудуємо систему координат з початком у точці A (рис.3.20) та складемо рівняння рівноваги (3.4,а). При складанні рівнянь рівноваги приймаємо до уваги, що проекція сили на вісь – скалярна величина, яка дорівнює добуткові модуля сили на косинус кута між напрямом сили і додатним напрямом осі.

Оскільки кути між осями координат і реакціями \vec{S} та \vec{R}_A визначені при застосуванні геометричної умови рівноваги сил, що діють на балку ABC (рис.3.20), то маємо

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; R_A \cos 29^\circ - S \cos 53^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; R_A \sin 29^\circ + S \sin 53^\circ - P = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:

$$R_A = \frac{S \cos 53^\circ}{\cos 29^\circ} = \frac{S \cdot 0,602}{0,875} = 0,688S = 0,688 \frac{P}{1,13} = \frac{10 \cdot 0,688}{1,13} = 6,08 \text{ кН},$$

$$\text{де } S = \frac{P}{1,13} = \frac{10}{1,13} = 8,84 \text{ кН}.$$

Дійсний напрям реакцій \bar{R}_A та \bar{S} поданий на рис. 3.20.

Примітка 3.2. Якщо з рівнянь рівноваги шукані сили визначаються зі знаком "+", то початковий напрям цих сил є дійсним їх напрямом (див. рис. 3.20). Якщо з рівнянь рівноваги ці сили визначаються зі знаком "-", то слід змінити їх початковий напрям на протилежний.

Приклад 3.2. Паропровід гострого пару до брагоректифікаційного апарата спиртзаводу підвішений до стелі за допомогою кронштейнів, як це показано на рис. 3.22. Кріплення стержнів кронштейнів в точках B, C, D, E (B', C', D', E') шарнірні. На кожний з кронштейнів діє сила $P = P_1 = 1,9$ кН. Положення векторів \vec{P} і \vec{P}_1 відносно системи координат $Oxuz$ визначається кутами $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 160^\circ$ (рис. 3.23). Нехтуючи вагою стержнів, визначити зусилля в стержнях кронштейнів.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу одного з кронштейнів, наприклад кронштейна $BCDE$ (рис. 3.23).

Зусилля – це внутрішні сили, які виникають у стержнях кронштейна під дією заданої сили \vec{P} . Щоб визначити ці сили застосуємо метод перерізів, тобто вирізуємо уявно вузол B (рис. 3.23).

Внутрішні сили (зусилля в стержнях) напрямляємо від перерізів вздовж стержнів, тобто приймаємо припущення, що стержні розтягуються силами $\vec{S}_D, \vec{S}_C, \vec{S}_E$ (якщо сили $\vec{S}_D, \vec{S}_C, \vec{S}_E$ були б напрямлені стрілками до перерізів, то у цьому випадку, мало б місце припущення, що стержні стискаються). Розглядаючи далі вузол B як вільний, що перебуває у рівновазі під дією активної сили \vec{P} і зусиль в стержнях $\vec{S}_D, \vec{S}_C, \vec{S}_E$ (збіжна просторова система сил), виберемо прямокутну систему координат, як показано на рис. 3.23, і складемо три рівняння рівноваги (3.4):

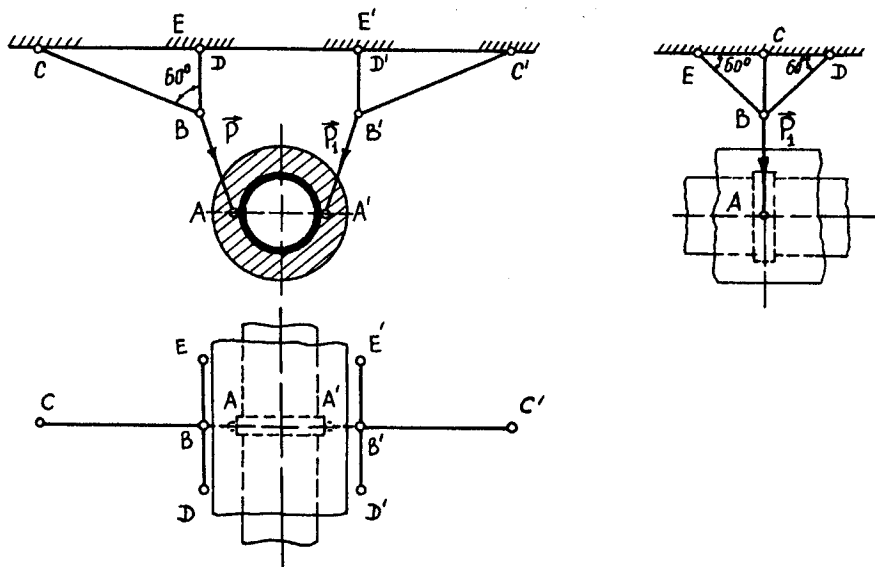


Рис. 3.22

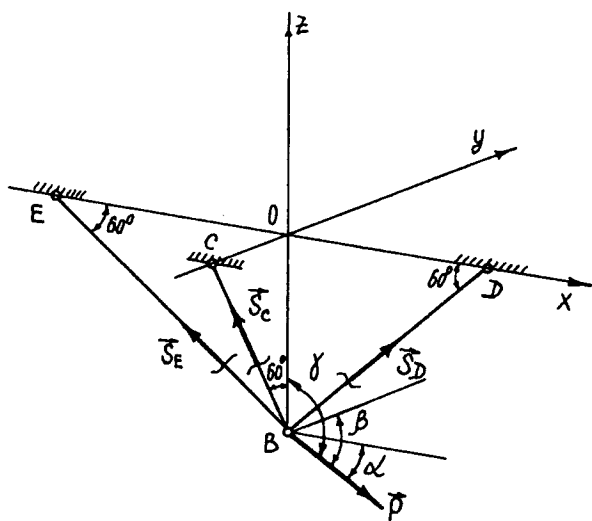


Рис. 3.23

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; S_D \cos 60^\circ - S_E \cos 60^\circ + P \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; -S_C \sin 60^\circ + P \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; S_D \sin 60^\circ + S_E \sin 60^\circ + S_C \cos 60^\circ + P \cos \gamma = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:

$$S_C = \frac{P \cos \beta}{\sin 60^\circ} = \frac{1,9 \cos 70^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1,9 \cdot 0,342}{0,866} = 0,75 \text{ кН};$$

$$S_D = \frac{S_E \cos 60^\circ - P \cos \alpha}{\cos 60^\circ} = \frac{S_E \cdot 0,5}{0,5} = S_E;$$

$$1,732 S_D + S_C \cdot 0,5 = -P \cos \gamma;$$

$$1,732 S_D + S_C \cdot 0,5 = -1,9(-0,94);$$

$$1,732 S_D + 0,1 = 1,79;$$

$$S_D = S_E = \frac{1,69}{1,732} = 0,96 \text{ кН}.$$

Знак "+" для зусиль \vec{S}_D , \vec{S}_C і \vec{S}_E показує, що стержні кронштейна працюють на розтяг.

3.3. Момент сили відносно точки та осі. Пара сил. Момент пари сил. Теорема про пари.

Моментом сили відносно точки O називається фізична величина, що дорівнює векторному добутку радіуса – вектора \vec{r} , проведеного з точки O у точку прикладання сили, на цю силу (рис. 3.24), тобто

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Як відомо з векторної алгебри, модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах-співмножниках. Тому модуль векторного добутку (див. рис. 3.24) дорівнює:

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin \alpha.$$

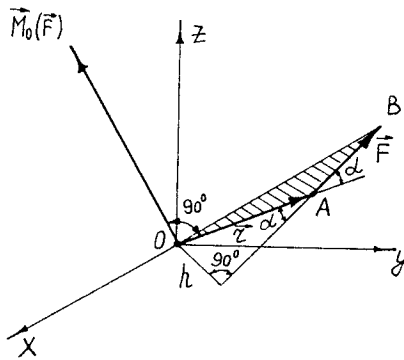


Рис. 3.24

Поставимо перпендикуляр з точки O на лінію дії сили \vec{F} .

Довжина h цього перпендикуляра дістала назву плеча моменту сили відносно точки O .

З рис. 3.24 випливає, що $r \sin \alpha = h$. Тому модуль моменту сили відносно точки O визначається у вигляді:

$$M_o(\vec{F}) = Fh. \quad (3.6)$$

Таким чином, момент сили відносно довільної точки O є вектором, перпендикулярним до площини, що містить у собі точку та силу (площина дії моменту), рівним за модулем добутку модуля сили на найкоротшу відстань між точкою та лінією дії сили (плече моменту сили) і напрямленим у ту частину простору, звідки можливе обертання тіла під дією сили, відносно точки, видно проти руху стрілки годинника (див. рис. 3.24). Точка прикладання вектора моменту сили – це точка, відносно якої визначається момент сили (рис. 3.24). Одиницею моменту сили відносно точки є ньютон-метр [Н·м].

Моментом сили відносно осі називається фізична скалярна алгебраїчна величина, що дорівнює моменту проекції цієї сили на площину перпендикулярну до осі відносно точки перетину осі з площиною (рис. 3.25), тобто

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_\pi) = \pm F_\pi h, \quad (3.7)$$

де h – найкоротша відстань між лінією дії вектора проекції сили на площину \vec{F}_π та точкою перетину осі з площиною (плече моменту проекції \vec{F}_π відносно точки O).

Момент сили відносно осі вважається додатним, якщо спостерігач, що дивиться збоку додатного напрямку осі, уявляє можливий поворот тіла під дією вектора \vec{F}_π (проекції сили \vec{F} на площину перпендикулярну до осі) навколо осі проти руху годинникової стрілки. У протилежному разі, момент сили відносно осі вважається від'ємним. Одиницею моменту сили відносно осі є ньютон-метр [Н·м].

Момент сили відносно осі дорівнює нулю у двох випадках:

- а) якщо лінія дії сили є паралельна осі;
- б) якщо лінія дії сили перетинає вісь.

Між моментом сили відносно осі та моментом сили відносно точки існує наступна залежність:

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}) \cos \alpha, \quad (3.8)$$

тобто момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки, що розміщена на цій осі.

Система двох паралельних сил, рівних за модулем, напрямлених у протилежні боки вздовж різних прямих називається парою сил (рис. 3.26).

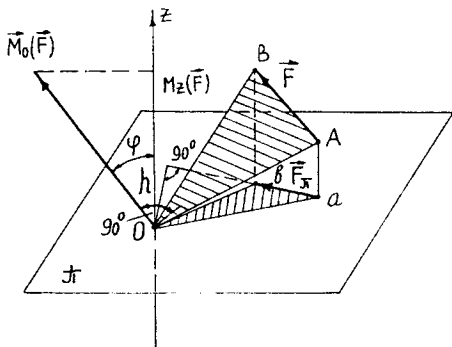


Рис. 3.25

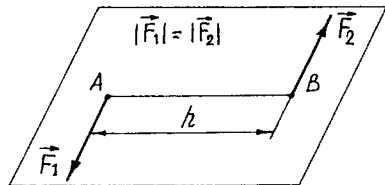


Рис. 3.26

Площина, в якій лежать сили пари, називається площиною дії пари сил, а найкоротша відстань між лініями дії сил пари – плечем пари сил (рис.3.26).

Векторний добуток

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{BA} \times \vec{F}_1, \quad (3.9)$$

називається моментом пари сил, тобто момент пари сил – вектор, перпендикулярний до площини дії пари сил, рівний за модулем добутку модуля однієї з сил пари на довжину плеча пари і напрямлений в ту частину просто-

ру, звідки можливе обертання твердого тіла під дією пари відно проти ходу стрілки годинника (рис. 3.27). Одиницею моменту пари є ньютон-метр [Н·м].

Теореми про пари.

Теорема 1. Дві пари сил, що перебувають в одній площині та мають геометрично рівні моменти, еквівалентні.

Теорема 2. Дві пари сил, що перебувають у паралельних площинах та мають геометрично рівні моменти, еквівалентні.

Теорема 3. Дві пари сил, що містяться в одній площині, можна замінити однією парою сил, що лежить у тій самій площині, з моментом, рівним геометричній сумі моментів даних двох пар.

Теорема 4. Дві пари сил, що перебувають у перетинаючих площинах, можна замінити однією парою сил з моментом, який дорівнює геометричній сумі заданих двох пар.

Розглянуті теореми про пари сил дають підставу стверджувати, що момент пари сил є вектором вільним і повністю характеризує дію пари сил на тверде тіло. Дії над парами сил можна замінити еквівалентними векторними операціями над їхніми моментами. Звідси випливають такі властивості пар сил. Не змінюючи дії даної пари сил на тверде тіло, дану пару сил можна:

- 1) повертати у площині її дії на будь-який кут і в будь-який бік;
- 2) переносити у площині її дії в будь-яке місце;
- 3) переносити у площину, що є паралельною площині дії даної пари сил;
- 4) змінити числові значення сил, що утворюють пару, і її плече, не змінюючи моменту пари;
- 5) система пар сил еквівалентна одній парі сил з моментом, що дорівнює геометричній сумі моментів пар сил системи, тобто

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k.$$

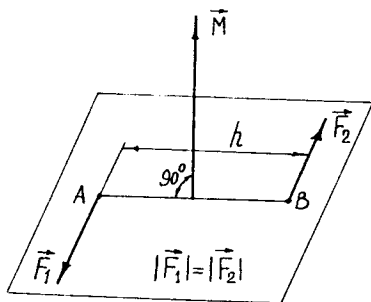


Рис. 3.27

3.4. Алгебраїчна величина моменту сили відносно точки та моменту пари сил.

Розглядаючи поняття моменту сили відносно точки і моменту пари сил, виявили, що це є вектори, перпендикулярні до площини дії моменту сили відносно точки і площини дії пари сил. Якщо на тіло діє плоска система сил, то зручно сполучити площину, в якій розташовані сили та пари сил, з площиною рисунка. У цьому разі вектори моменту сили відносно точки і моменту пари сил будуть розташовані перпендикулярно до площини рисунка. Якщо розглядати площину рисунка як координатну площину, наприклад xOy , то вектори моменту сили відносно точки і моменту пари сил будуть колінеарні осі Oz і повністю визначатимуться своїми проекціями на вісь Oz . Тому в плоских системах сил момент сили відносно точки і момент пари сил визначається алгебраїчною величиною.

Алгебраїчна величина моменту сили відносно точки – добуток зі знаком “+” або “-” модуля сили на найкоротшу відстань між лінією дії сили та точкою, відносно якої визначається момент сили (плече моменту сили відносно точки рис. 3.28), тобто

$$M_o(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (3.10)$$

Якщо під дією сили тіло може обертатися відносно даної точки проти ходу стрілки годинника, то моменту сили відносно точки у рівності (3.10) присвоюється знак “+”. У противному разі – знак “-”.

Алгебраїчна величина моменту пари сил – добуток зі знаком “+” або “-” модуля однієї з сил пари на довжину плеча пари (див. рис. 3.27), тобто

$$M = \pm F_1 h = \pm F_2 h. \quad (3.11)$$

При визначенні знака моменту пари сил користуються правилом знаків для моменту сили відносно точки, тобто при обертанні тіла під дією пари сил проти ходу стрілки годинника моменту пари сил присвоюється знак “+”. У протилежному разі – знак “-”.

Зауважимо, що розглянуті вище теореми про пари сил, для пар сил, що перебувають в одній площині, матимуть іншу редакцію, тобто:

1) пари сил, що мають алгебраїчно рівні моменти, тобто моменти пар чисельно рівні та напрямлені в один бік (мають один і той самий знак), еквівалентні;

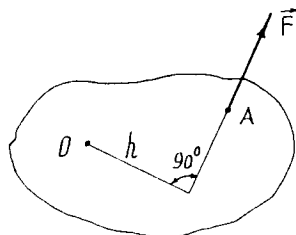


Рис. 3.28

2) система пар сил еквівалентна одній парі сил з моментом, що дорівнює алгебраїчній сумі моментів пар сил системи, тобто $M = \sum_{k=1}^n M_k$.

3.5. Теорема про паралельне перенесення сили.

Силу, що діє на тверде тіло, не змінюючи стану руху тіла, можна перенести паралельно самій собі у будь-яку точку цього тіла, прикладаючи при цьому пару сил з моментом, що дорівнює моменту сили, яка переноситься відносно точки, куди сила переноситься.

Нехай до твердого тіла в точці A прикладена сила \vec{F} (рис. 3.29). У довільній точці B цього тіла прикладаємо найпростішу зрівноважену систему сил, так що модулі сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 дорівнюють модулю сили \vec{F} , а лінії їх дії паралельні заданій силі. Сили \vec{F} та \vec{F}_2 утворюють пару сил з моментом M , що чисельно дорівнює $M = M_B(\vec{F}) = Fh$, а сила \vec{F}_1 , що за модулем дорівнює силі \vec{F}_1 , стає прикладеною в точці B тіла.

3.6. Довільна плоска система сил. Теорема про момент рівнодійної системи сил відносно точки (теорема Варіньона).

Вказівки до завдань С3, С4 і С5.

Сили, що довільно розташовані в одній площині, утворюють довільну систему сил.

Нехай задана довільна плоска система сил, що прикладена до твердого тіла в точках A, B, \dots (рис. 3.30). Виберемо довільну точку O (центр зведення) і на підставі теореми про паралельне перенесення сили перенесемо всі сили в точку O . Одержуємо систему збіжних сил, що прикладені в точці O , та систему пар сил з моментами, які дорівнюють моментам відповідних сил відносно точки O .

Складаючи сили та пари сил, знайдемо (рис. 3.31)

$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k; \quad M_O = \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k), \quad (3.12)$$

тобто довільна плоска система сил еквівалентна одній силі \vec{R}_O , що прикладена в центрі зведення, та одній парі сил з моментом M_O . Сила \vec{R}_O носить назву головного вектора системи, а пара сил з моментом M_O – головного момента системи. З рівностей (3.12) випливає, що головний вектор дорівнює геометричній сумі сил системи, а головний мо-

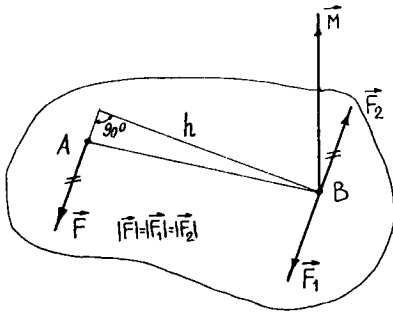


Рис. 3.29

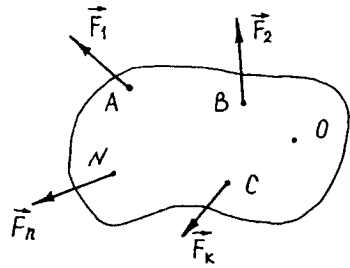


Рис. 3.30

мент дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил системи відносно центра зведення.

Побудуємо систему координат з початку у точці O (центрі зведення) і визначимо числове значення головного вектора \vec{R}_O за формулою:

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2}, \quad (3.13)$$

де $R_{Ox} = \sum_{k=1}^n F_{kx}$; $R_{Oy} = \sum_{k=1}^n F_{ky}$ (див. підрозділ 3.2).

Для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно й достатньо, щоб одночасно виконувались умови $\vec{R}_O = \vec{0}$; $M_O = 0$. Тоді з рівностей (3.12) та (3.13) випливає:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0. \quad (3.14)$$

Рівняння (3.14) виражають аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил. Ці умови носять назву основних умов рівноваги, або основних форм рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил.

Якщо змінити центр зведення, наприклад взяти довільну точку O_1 , то головний вектор \vec{R}_O не змінюється, а головний момент M_O змінюється і визначається за формулою:

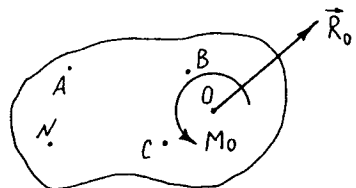


Рис. 3.31

$$M_{O_1} = M_O + M_{O_1}(\vec{R}_O). \quad (3.15)$$

Визначенням \vec{R}_O і M_O не обмежується подальше зведення плоскої системи сил до більш простої, так, наприклад, якщо $\vec{R}_O \neq \vec{0}$ і $M_O \neq 0$, то цю систему сил можна звести до однієї сили – рівнодійної.

Дамо додаткові форми рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил, тобто

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n \vec{F}_{kx} = 0, \quad (3.16)$$

де вісь x не перпендикулярна до прямої, що проходить через дві вибрані точки A та B

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0, \quad (3.17)$$

A, B, C – довільні точки, що не лежать на одній прямій.

Необхідність цих рівнянь очевидна. Розглянемо їх достатність. Якщо виконуються тільки дві перші умови рівняння (3.16), то головний момент системи дорівнює нулю. Така система не перебуває у рівновазі, а має рівнодійну, яка може проходити через точки A та B . Але згідно з третьою умовою $R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$, оскільки вісь x не перпендикулярна до прямої AB . Таким чином, остання умова може бути виконана тільки тоді, коли рівнодійна системи буде дорівнювати нулю, тобто коли буде рівновага плоскої системи сил.

Достатність умов (3.17) впливає з того, що коли при одночасному виконанні цих умов дана система сил не перебувала б у рівновазі, то вона мала б рівнодійну, лінія дії якої одночасно проходила б через точки A, B та C , що неможливо, тому що ці точки не лежать на одній прямій. Таким чином, за виконання умов (3.17) виконуватиметься рівновага плоскої системи сил.

Теорема про момент рівнодійної системи сил відносно точки (теорема Варіньона). Якщо плоска система сил має рівнодійну, то момент цієї рівнодійної відносно довільної точки твердого тіла дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил цієї системи відносно тієї самої точки.

Нехай система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, що діє на тверде тіло, має рівнодійну \vec{R} , що прикладена в точці O (рис. 3.32). Очевидно, головний момент цієї системи дорівнює нулю, якщо точка O є центром зведення. Візьмемо як центр зведення точку O_1 . Головний момент системи відносно центра зведення O_1 визначається за формулою (3.15), тобто

$$M_{O_1} = M_O + M_{O_1}(\vec{R}),$$

де $M_O = 0$ а $M_{O_1} = \sum_{k=1}^n M_{O_1}(\vec{F}_k)$.

Звідси маємо

$$M_{O_1}(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_{O_1}(\vec{F}_k),$$

що й треба було довести.

У задачах С3, С4 і С5 йдеться про рівновагу твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил.

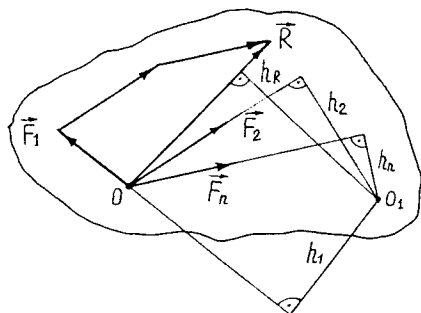


Рис. 3.32

Задачі, про рівновагу твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил слід розв'язувати в такій послідовності:

- 1) виділити тіло, рівновагу якого розглядатимемо для визначення невідомих величин;
- 2) зобразити всі задані сили;
- 3) побудувати прямокутну систему координат;
- 4) на підставі аксіоми про звільнення від в'язей умовно відкинути в'язі, замінивши їх відповідними реакціями.
- 5) зробити аналіз одержаної системи сил;
- 6) скласти рівняння рівноваги плоскої системи сил у формі (3.14), або (3.16), або (3.17);
- 7) розв'язати систему складених рівнянь і визначити всі невідомі;
- 8) зробити аналіз здобутого розв'язку.

Приклад 3.3. Визначити реакцію шарніра A та стержня CD балки, яка підтримує у рівновазі дефлегматор ректифікаційної колони (рис.3.19). З боку дефлегматора на балку діє сила $P = 10$ кН. Кут $\alpha = 37^\circ$. Вагою балки та стержня нехтувати.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу балки ABC (рис. 3.33). Балка – невільне тверде тіло. В'язями для неї є нерухомий шарнір A і невагомий стержень CD . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язі і прикладемо відповідні їм реакції. Реакція \vec{S} стержня CD напрямлена вздовж стержня, як це подано на рис. 3.33. Реакцію нерухомого шарніра (шарнірно-нерухомої опори) подаємо двома складовими \vec{X}_A, \vec{Y}_A напрямленими паралельно координатним осям, як це показано на рис. 3.33.

Матимемо довільну плоску систему сил (рис. 3.33). Для такої системи сил можна скласти три рівняння рівноваги, які містять три невідомі сили реакцій \vec{X}_A, \vec{Y}_A і \vec{S} .

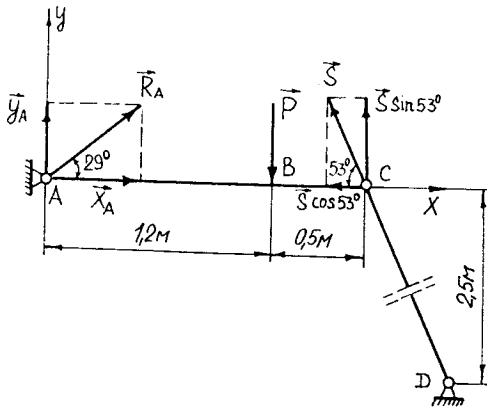


Рис. 3.33

Визначення реакцій \vec{X}_A, \vec{Y}_A та \vec{S} за допомогою основної форми рівнянь рівноваги (3.14) довільної плоскої системи сил. Щоб визначити величину і напрям реакцій \vec{X}_A, \vec{Y}_A і \vec{S} користуємося рівняннями рівноваги (3.14).

Побудуємо систему координат з початком у точці A (рис. 3.33) та складемо рівняння (3.14):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - S \cos 53^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - P + S \sin 53^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad S \sin 53^\circ \cdot 1,7 - P \cdot 1,2 = 0,$$

де момент сили \vec{S} відносно точки A визначений на підставі теореми Варіньона.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, матимемо:

$$S = \frac{P \cdot 1,2}{\sin 53^\circ \cdot 1,7} = \frac{10 \cdot 1,2}{0,799 \cdot 1,7} = 8,84 \text{ кН};$$

$$X_A = S \cos 53^\circ = 8,83 \cdot 0,602 = 5,32 \text{ кН};$$

$$Y_A = P - S \sin 53^\circ = 10 - 8,83 \cdot 0,799 = 2,95 \text{ кН}.$$

Дійсний напрям реакцій \vec{X}_A, \vec{Y}_A показаний на рис. 3.33.

Знаючи складові реакції \vec{R}_A вздовж координатних осей \vec{X}_A, \vec{Y}_A , можна визначити і саму реакцію \vec{R}_A як за величиною, так і за напрямом. Величину реакції знаходять за формулою:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,32^2 + 2,95^2} = 6,08 \text{ кН.}$$

Напрямок реакції \vec{R}_A визначають за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\vec{R}_A, x}) = \frac{X_A}{R_A} = \frac{5,32}{6,08} = 0,875; \quad (\widehat{\vec{R}_A, x}) = 29^\circ.$$

$$\cos(\widehat{\vec{R}_A, y}) = \frac{Y_A}{R_A} = \frac{2,95}{6,08} = 0,485; \quad (\widehat{\vec{R}_A, y}) = 61^\circ.$$

Визначення реакцій \vec{X}_A, \vec{Y}_A та \vec{S} за допомогою додаткової форми рівнянь рівноваги (3.16) довільної плоскості системи сил. Щоб визначити величину і напрям реакцій \vec{X}_A, \vec{Y}_A і \vec{S} користуємося рівняннями рівноваги (3.16).

Побудуємо систему координат з початком у точці A (рис. 3.33) та складемо рівняння (3.16):

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \cdot 1,2 + S \sin 53^\circ \cdot 1,7 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad P \cdot 0,5 - Y_A \cdot 1,7 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - S \cos 53^\circ = 0,$$

де момент сили \vec{S} відносно точки A визначений на підставі теореми Варіньона.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, матимемо:

$$S = \frac{P \cdot 1,2}{\sin 53^\circ \cdot 1,7} = \frac{10 \cdot 1,2}{0,799 \cdot 1,7} = 8,84 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{P \cdot 0,5}{1,7} = \frac{10 \cdot 0,5}{1,7} = 2,94 \text{ кН};$$

$$X_A = S \cos 53^\circ = 8,84 \cdot 0,602 = 5,32 \text{ кН.}$$

Дійсний напрям реакцій \vec{X}_A, \vec{Y}_A і \vec{S} показаний на рис. 3.33.

Визначаємо величину реакції \bar{R}_A за формулою

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,32^2 + 2,94^2} = 6,08 \text{ кН.}$$

Визначаємо напрям реакції \bar{R}_A за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\bar{R}_A, x}) = \frac{X_A}{R_A} = \frac{5,32}{6,08} = 0,875; \quad (\widehat{\bar{R}_A, x}) = 29^\circ.$$

$$\cos(\widehat{\bar{R}_A, y}) = \frac{Y_A}{R_A} = \frac{2,94}{6,08} = 0,484; \quad (\widehat{\bar{R}_A, y}) = 61^\circ.$$

Визначення реакцій \bar{X}_A, \bar{Y}_A та \bar{S} за допомогою додаткової форми рівнянь рівноваги (3.17) довільної плоскої системи сил. Щоб визначити величину і напрям реакцій \bar{X}_A, \bar{Y}_A і \bar{S} користуємося рівняннями рівноваги (3.17).

Приймаючи за центр моментів системи сил, що діє на балку ABC точки A, C і D , складемо рівняння рівноваги (3.17) див. рис. 3.33:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -P \cdot 1,2 + S \sin 53^\circ \cdot 1,7 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad P \cdot 0,5 - Y_A \cdot 1,7 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_D(\bar{F}_k) = 0; \quad S \cos 53^\circ \cdot 2,5 - S \sin 53^\circ \cdot 2,5 \operatorname{tg} 37^\circ +$$

$$+ P(0,5 + 2,5 \operatorname{tg} 37^\circ) - X_A \cdot 2,5 - Y_A(1,7 + 2,5 \operatorname{tg} 37^\circ) = 0,$$

де момент сили \bar{S} відносно точки A і D визначені на підставі теореми Варіньона.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, матимемо:

$$S = \frac{P \cdot 1,2}{\sin 53^\circ \cdot 1,7} = \frac{10 \cdot 1,2}{0,799 \cdot 1,7} = 8,84 \text{ кН;}$$

$$Y_A = \frac{P \cdot 0,5}{1,7} = \frac{10 \cdot 0,5}{1,7} = 2,94 \text{ кН;}$$

$$X_A = \frac{S \cos 53^\circ \cdot 2,5 - S \sin 53^\circ \cdot 2,5 \operatorname{tg} 37^\circ + P(0,5 + 2,5 \operatorname{tg} 37^\circ)}{2,5}$$

$$- \frac{Y_A(1,7 + 2,5 \operatorname{tg} 37^\circ)}{2,5} = \frac{8,84 \cdot 0,602 \cdot 2,5 - 8,84 \cdot 0,799 \cdot 2,5 \cdot 0,754}{2,5} +$$

$$+ \frac{10(0,5 + 2,5 \cdot 0,754) - 2,94(1,7 + 2,5 \cdot 0,754)}{2,5} = \frac{13,31}{2,5} = 5,32 \text{ кН.}$$

Дійсний напрям реакцій \bar{X}_A, \bar{Y}_A і \bar{S} показаний на рис. 3.33.
 Визначаємо величину реакції \bar{R}_A за формулою:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{5,32^2 + 2,94^2} = 6,08 \text{ кН.}$$

Визначаємо напрям реакції \bar{R}_A за напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{\bar{R}_A, x}) = \frac{X_A}{R_A} = \frac{5,32}{6,08} = 0,875; \quad (\widehat{\bar{R}_A, x}) = 29^\circ.$$

$$\cos(\widehat{\bar{R}_A, y}) = \frac{Y_A}{R_A} = \frac{2,94}{6,08} = 0,484; \quad (\widehat{\bar{R}_A, y}) = 61^\circ.$$

Результати проведених розрахунків реакцій \bar{X}_A, \bar{Y}_A і \bar{S} , а також (див. завдання С1) повністю збігаються.

У задачах С4 і С5 йдеться про рівновагу системи твердих тіл (зчленовані системи), що перебувають під дією довільної плоскої системи сил. В'язі, що з'єднують тверді тіла, носять назву внутрішніх в'язей на відміну від зовнішніх в'язей, що з'єднують систему твердих тіл з іншими тілами, що не входять в цю систему.

Якщо після звільнення від зовнішніх в'язей система твердих тіл залишається жорсткою, то методика розв'язання цієї задачі не відрізняється від методики розв'язання задач з рівноваги твердого тіла.

Якщо після звільнення від зовнішніх в'язей система твердих тіл не залишається жорсткою, то розв'язання цієї задачі можна подати у два способи.

Спосіб 1. Звільняємо систему від зовнішніх в'язей та застосовуємо аксіому про твердіння. Оскільки ця аксіома виражає лише необхідну умову рівноваги не жорстких тіл, то для визначення невідомих сил її застосування виявляється недостатнім. Необхідні додаткові умови. Цими умовами буде очевидний факт, тобто якщо система твердих тіл перебуває у стані рівноваги, то кожне тверде тіло, що входить до цієї системи, теж перебуває у стані рівноваги. Тому додатково необхідно розглянути рівновагу будь-якого одного або кількох твердих тіл, що утворюють дану систему.

Спосіб 2. Роз'єднуємо систему твердих тіл на окремі тверді тіла по внутрішніх в'язях та розглядаємо рівновагу кожного твердого тіла окремо. При цьому реакції внутрішніх в'язей будуть попарно рівними і протилежними за напрямом.

Доцільність застосування того чи іншого способу розв'язання залежить від умов конкретної задачі.

Задачі про рівновагу системи твердих тіл треба розв'язувати в такій послідовності:

1) виділити систему твердих тіл (тверді тіла, що входять у систему і рівновагу яких треба розглянути для визначення невідомих величин);

2) зобразити задані сили;

3) вибрати відповідні прямокутні системи координат, при цьому для кожного тіла і для всієї системи можна взяти окремі системи координат;

4) визначити в'язі (застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, замінити умовно дію в'язей відповідними реакціями);

5) зробити аналіз утвореної системи сил і порівняти число невідомих величин з числом рівнянь, що виражають умови рівноваги. Якщо ці числа однакові, то задача визначення невідомих сил може бути розв'язаною;

6) скласти рівняння рівноваги для сил, прикладених до кожного тіла, або до системи твердих тіл, рівновага яких розглядається;

7) розв'язати систему рівнянь, що виражають умови рівноваги, і знайти всі невідомі величини;

8) зробити аналіз розв'язку.

Приклад 3.4. Визначити реакції опор та тиск в проміжному шарнірі C складеної конструкції ACB . Конструкція (рис.3.34) підтримує площадку обслуговування альдегідної колони брагоректифікаційного апарата. Схема навантажування конструкції і її розміри показані на рис. 3.35, де $q = 2$ кН/м; $P = 10$ кН; $P_1 = 6$ кН; $P_2 = 1,5$ кН; $M = 7$ кН·м.

Кріплення конструкції в точках A і B шарнірні.

Вагою конструкції нехтувати.

Розв'язання. У задачі слід визначити реакції шарнірно-нерухомих опор A , B і шарніра C . Задача належить до задач, в яких розглядається рівновага системи твердих тіл під дією довільної плоскої системи сил. Способи розв'язання та послідовність розв'язання цих задач подані вище. Розглянемо розв'язання даної задачі обома способами.

Розв'язання задачі на підставі способу 1. Щоб визначити невідомі сили, розглянемо рівновагу конструкції ACB в цілому та рівновагу частини AC цієї конструкції (рис. 3.35) і (рис. 3.36). Для конструкції ACB зовнішніми в'язями є шарнірно-нерухомі опори A та B . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинемо зовнішні в'язі і прикладемо відповідні їм реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$.

Початковий напрям реакцій $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B$ і \vec{Y}_B показаний на рис.3.35.

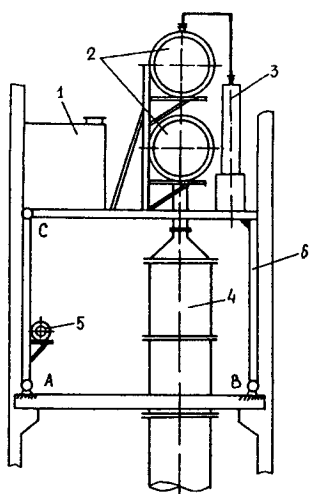


Рис. 3.34

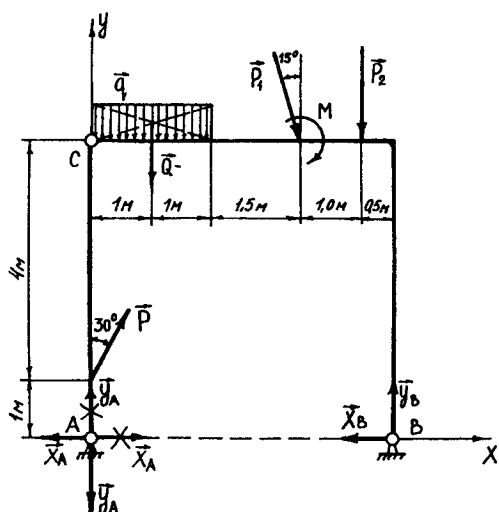


Рис. 3.35

Примітка 3.3. В інженерних розрахунках зустрічаються навантаження, розподілені вздовж відрізка прямої. Це навантаження носить назву розподілених сил і характеризується інтенсивністю розподілу \bar{q} , тобто силою, що діє на одиницю довжини по лінії розподілу сил.

Інтенсивність розподілених сил може бути сталою або змінюватися за довільним законом.

При розрахунках розподілені сили, що утворюють систему паралельних сил, замінюють рівнодійною.

Числове значення рівнодійної розподілених сил у випадку, коли інтенсивність їх розподілу є сталою, $Q = ql$, де l – довжина відрізка, вздовж якого розподілені сили. Лінія дії сили \bar{Q} паралельна розподіленим силам і проходить (у силу симетрії розподілених сил) посередині відрізка їх розподілу.

Беручи до уваги примітку 3.3, замінюємо розподілені сили силою \bar{Q} (див. рис. 3.35).

Розглянемо далі конструкцію ACB як вільне тверде тіло (застосувавши аксіому про твердіння) до якого прикладені сили $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}, \bar{Q}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_B, \bar{Y}_B$ та пара сил з моментом M , що утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо систему координат

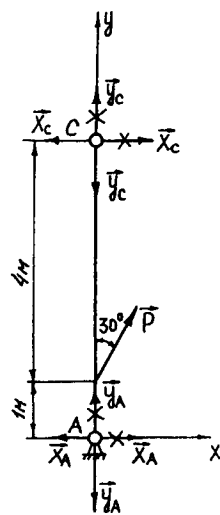


Рис. 3.36

нат з початком у точці A (рис. 3.35) та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил (3.14):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & X_A - X_B + P_1 \sin 15^\circ + P \sin 30^\circ &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & P \cos 30^\circ + Y_A - Q - P_1 \cos 15^\circ - P_2 + Y_B &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) &= 0; & P_2 \cdot 0,5 - M + P_1 \cos 15^\circ \cdot 1,5 - P_1 \sin 15^\circ \cdot 5 + \\ & & + Q \cdot 4 - Y_A \cdot 5 - P \cos 30^\circ \cdot 5 - P \sin 30^\circ \cdot 1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

де $Q = 2q = 2 \cdot 2 = 4$ кН; моменти сил \vec{P} та \vec{P}_1 відносно точки B визначені на підставі теореми Варіньона.

Роз'єднаємо конструкцію ACB по внутрішній в'язі (шарнір C) і розглянемо рівновагу частини AC . В'язями для неї є шарнірно-нерухома опора A та частина CB з шарніром C (рис. 3.35). Дію частини CB замінимо реакціями \vec{X}_C і \vec{Y}_C (реакції нерухомого шарніра), а дію шарнірно-нерухомої опори реакціями \vec{X}_A і \vec{Y}_A (рис. 3.36).

Розглядаючи рівновагу частини AC як вільного твердого тіла, на яке діє довільна плоска система сил, складемо три рівняння рівноваги (3.14) (система координат з початком у точці A подана на рис. 3.36):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & X_A + X_C + P \sin 30^\circ &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & Y_C + Y_A + P \cos 30^\circ &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) &= 0; & -X_C \cdot 5 - P \sin 30^\circ \cdot 1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

де момент сили \vec{P} відносно точки A визначений на підставі теореми Варіньона.

Таким чином, ми дістали систему шести рівнянь (3.18)–(3.19), що містять шість невідомих $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C$.

3 рівнянь (3.18)–(3.19) знаходимо:

$$X_C = -\frac{P \sin 30^\circ \cdot 1}{5} = -\frac{10 \cdot 0,5}{5} = -1 \text{ кН}$$

(змінюємо напрям сили \vec{X}_C на рис. 3.36 на протилежний).

$$X_A = -X_C - P \sin 30^\circ = -(-1) - 10 \cdot 0,5 = -4 \text{ кН}$$

(змінюємо напрям сили \vec{X}_A на рис. 3.35 та рис. 3.36 на протилежний).

$$X_B = X_A + P_1 \sin 15^\circ + P \sin 30^\circ = -4 + 6 \cdot 0,259 + 10 \cdot 0,5 = 2,55 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{P_2 \cdot 0,5 - M + P_1 \cos 15^\circ \cdot 1,5 - P_1 \sin 15^\circ \cdot 5 + Q \cdot 4 - P \cos 30^\circ \cdot 5 - P \sin 30^\circ \cdot 1}{5} =$$

$$= \frac{1,5 \cdot 0,5 - 7 + 6 \cdot 0,966 \cdot 1,5 - 6 \cdot 0,259 \cdot 5 + 4 \cdot 4 - 10 \cdot 0,866 \cdot 5 - 10 \cdot 0,5 \cdot 1}{5} = -7,53 \text{ кН}$$

(змінюємо напрям сили Y_A на рис. 3.35 та рис. 3.36 на протилежний).

$$Y_C = -Y_A - P \cos 30^\circ = -(-7,53) - 10 \cdot 0,866 = -1,13 \text{ кН}$$

(змінюємо напрям сили \vec{Y}_C на рис. 3.36 на протилежний).

$$Y_B = -P \cos 30^\circ - Y_A + Q + P_1 \cos 15^\circ + P_2 =$$

$$= -10 \cdot 0,866 - (-7,53) + 4 + 6 \cdot 0,966 + 1,5 = 10,17 \text{ кН.}$$

Дійсний напрям реакцій \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{X}_C і \vec{Y}_C показаний на рис. 3.35 і рис. 3.36.

Проведемо перевірку розрахунків. Для цього необхідно розглянути рівновагу частини конструкції ACB , яка не була використана при визначенні реакцій \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{X}_C і \vec{Y}_C . У нашому випадку це частина CB (рис. 3.37). Прикладемо до частини CB задані сили і відомі реакції: реакцію шарнірно-нерухомої опори B – \vec{X}_B , \vec{Y}_B і реакцію шарніра C – \vec{X}'_C , \vec{Y}'_C (реакції \vec{X}'_C і \vec{Y}'_C , відповідно до аксіоми про рівність дії та проти дії, мають напрям протилежний до напрямку реакцій \vec{X}_C і \vec{Y}_C на рис. 3.36).

Так як сили \vec{Q} , \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{X}'_C , \vec{Y}'_C , \vec{X}_B , \vec{Y}_B і пара сил з моментом M , що діють на частину CB утворюють довільну плоску систему сил, то ці сили мусять задовольняти рівняння рівноваги даної системи сил, наприклад рівняння (3.14). Побудуємо систему координат з початком у точці C (рис. 3.37) і складемо рівняння (3.14):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X'_C + P_1 \sin 15^\circ - X_B = 0;$$

$$1 + 6 \cdot 0,259 - 2,55 = 0;$$

$$2,55 - 2,55 = 0;$$

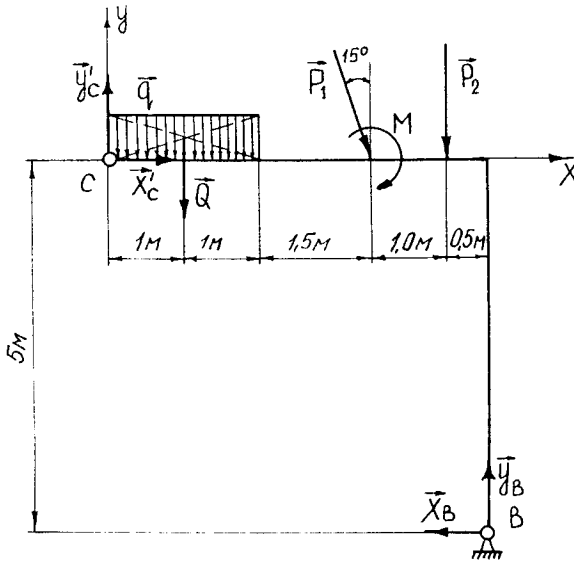


Рис. 3.37

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y'_C - Q - P_1 \cos 15^\circ - P_2 + Y_B = 0;$$

$$1,13 - 4 - 6 \cdot 0,966 - 1,5 + 10,17 = 0;$$

$$11,3 - 11,3 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad P_2 \cdot 0,5 + P_1 \cos 15^\circ \cdot 1,5 - P_1 \sin 15^\circ \cdot 5 -$$

$$-M + Q \cdot 4 - Y'_C \cdot 5 - X'_C \cdot 5 = 0;$$

$$1,5 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,966 \cdot 1,5 - 6 \cdot 0,259 \cdot 5 - 7 - 16 - 1,13 \cdot 5 - 5 = 0;$$

$$25,44 - 25,42 \approx 0,$$

де $X'_C = X_C$ і $Y'_C = Y_C$ відповідно до аксіоми про рівність дії та протидії; момент сили \vec{P}_1 відносно точки B визначений на підставі теореми Вариньона.

Як бачимо рівняння рівноваги задовольняються, реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ і тиск в шарнірі C $\vec{X}_C = -\vec{X}'_C, \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C$ визначені правильно.

Розв'язання задачі на підставі способу 2. Щоб визначити невідомі сили, роз'єднуємо конструкцію ACB по шарніру C на дві частини, частину AC (рис. 3.38) і частину CB (рис. 3.39). Розглянемо рівновагу кожної частини конструкції окремо.

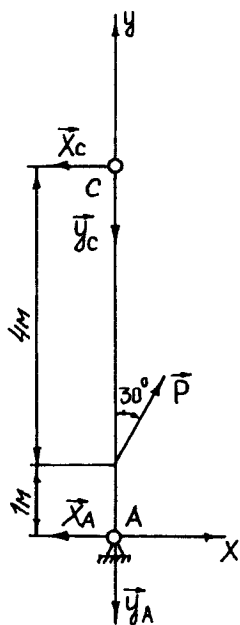


Рис. 3.38

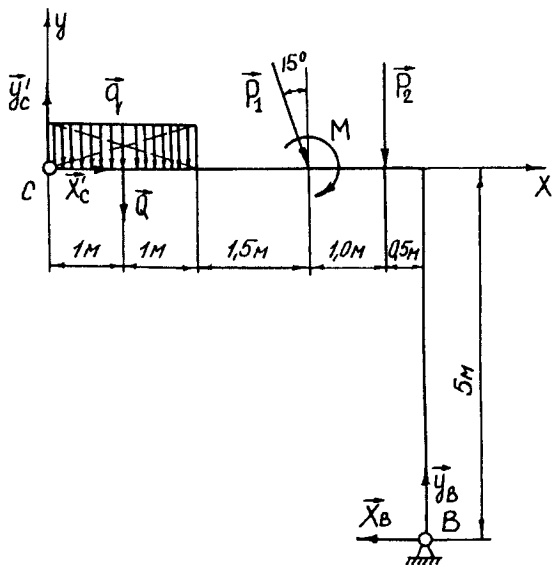


Рис. 3.39

Для частини AC в'язями є шарнірно-нерухома опора A та частина конструкції CB з шарніром C . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язі і прикладемо до частини AC відповідні реакції $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C$ і \bar{Y}_C . Початковий напрям реакцій $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C$ і \bar{Y}_C показаний на рис. 3.38.

Розглянемо далі частину AC як вільне тверде тіло, до якого прикладені сили $\bar{P}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}_C$ і \bar{Y}_C , що утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці A (рис.3.38) та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил (3.14):

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & -X_A + P \sin 30^\circ - X_C &= 0; \\
 \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & -Y_C + P \cos 30^\circ - Y_A &= 0; \\
 \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) &= 0; & -P \sin 30^\circ \cdot 1 + X_C \cdot 5 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

де момент сили \vec{P} відносно точки A визначений на підставі теореми Варіньона.

Для частини CB (рис.3.39) в'язями є шарнірно-нерухома опора B та частина конструкції AC з шарніром C . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язі і прикладемо до частини CB відповідні реакції $\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}'_C$ і \vec{Y}'_C . Реакції \vec{X}'_C і \vec{Y}'_C відповідно до аксіоми про рівність дії та протидії, мають напрям протилежний до напрямку реакцій \vec{X}_C і \vec{Y}_C на рис. 3.38. Початковий напрям реакцій \vec{X}_B і \vec{Y}_B показаний на рис. 3.39.

Розглянемо далі частину CB як вільне тверде тіло до якого прикладені сили $\vec{Q}, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ і пара сил з моментом M , що утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці C (рис. 3.39) та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил (3.14):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & X'_C + P_1 \sin 15^\circ - X_B &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & Y'_C - Q - P_1 \cos 15^\circ - P_2 + Y_B &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) &= 0; & -Q \cdot 1 - M - P_1 \cos 15^\circ \cdot 3,5 - P_2 \cdot 4,5 - X_B \cdot 5 + Y_B \cdot 5 &= 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

де момент сили \vec{P}_1 відносно точки C визначений на підставі теореми Варіньона.

Оскільки реакції шарніра C , на підставі аксіоми про рівність дії та протидії, попарно рівні та напрямлені в протилежні боки, то

$$X_C = X'_C; \quad Y_C = Y'_C. \quad (3.22)$$

Таким чином, ми дістали систему шести рівнянь (3.20)–(3.21), що містять шість невідомих $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{X}_B$ і \vec{Y}_B .

З рівнянь (3.20)–(3.21) з врахуванням рівностей (3.22), знаходимо:

$$X_C = \frac{P \sin 30^\circ \cdot 1}{5} = \frac{10 \cdot 0,5 \cdot 1}{5} = 1 \text{ кН};$$

$$X_A = P \sin 30^\circ - X_C = 10 \cdot 0,5 - 1 = 4 \text{ кН};$$

$$X_B = X'_C + P_1 \sin 15^\circ = X_C + P_1 \sin 15^\circ = 1 + 6 \cdot 0,259 = 2,55 \text{ кН};$$

$$Y_B = \frac{Q \cdot 1 + M + P_1 \cos 15^\circ \cdot 3,5 + P_2 \cdot 4,5 + X_B \cdot 5}{5} =$$

$$= \frac{4 + 7 + 6 \cdot 0,966 \cdot 3,5 + 1,5 \cdot 4,5 + 2,55 \cdot 5}{5} = 10,16 \text{ кН};$$

$$Y_C' = Q + P_1 \cos 15^\circ + P_2 - Y_B = 4 + 6 \cdot 0,966 + 1,5 - 10,16 = 1,14 \text{ кН};$$

$$Y_A = -Y_C' + P \cos 30^\circ = -1,14 + 10 \cdot 0,866 = 7,52 \text{ кН}.$$

Дійсний напрям реакцій $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C = -\vec{X}_C', \vec{Y}_C = -\vec{Y}_C', \vec{X}_B$ і \vec{Y}_B показаний на рис. 3.38 і рис. 3.39.

Проведемо перевірку розрахунків. Для цього необхідно розглянути рівновагу конструкції ACB в цілому. Для конструкції в цілому в'язи є шарнірно-нерухомі опори A і B . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язі і прикладемо до конструкції відомі з попереднього розрахунку реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B$ і \vec{Y}_B (рис. 3.40).

Так як сили $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ і пара сил з моментом M , що діють на конструкцію ACB утворюють довільну плоску систему сил, то вони мусять задовольняти рівняння рівноваги даної системи сил, наприклад рівняння (3.14). побудуємо систему координат з початком у точці C (рис. 3.40) і складемо рівняння (3.14):

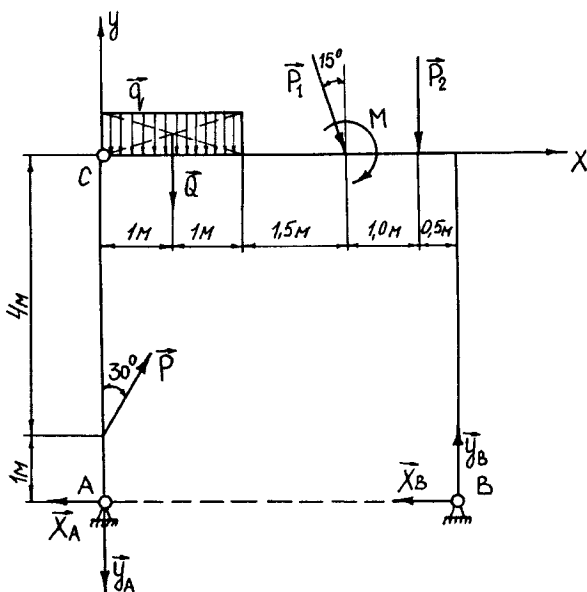


Рис. 3.40

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -X_A + P \sin 30^\circ + P_1 \sin 15^\circ - X_B = 0;$$

$$-4 + 10 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,259 - 2,55 = 0;$$

$$6,55 - 6,55 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -Y_A + P \cos 30^\circ - Q - P_1 \cos 15^\circ - P_2 + Y_B = 0;$$

$$-7,52 + 8,66 - 4 - 5,8 - 1,5 + 10,16 = 0;$$

$$18,82 - 18,82 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -Q \cdot 1 - P_1 \cos 15^\circ \cdot 3,5 - M - P_2 \cdot 4,5 + Y_B \cdot 5 - X_B \cdot 5 +$$

$$+ P \sin 30^\circ \cdot 4 - X_A \cdot 5 = 0;$$

$$-4 - 20,28 - 7 - 6,75 + 50,8 - 12,75 + 20 - 20 = 0;$$

$$50,8 - 50,8 = 0,$$

де моменти сил \vec{P}_1 і \vec{P} відносно точки C визначені на підставі теореми Варіньона.

Як бачимо рівняння рівноваги задовольняються: реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ і тиск в шарнірі $C - \vec{X}'_C = -\vec{X}_C, \vec{Y}'_C = -\vec{Y}_C$ визначені правильно.

Приклад 3.5. Визначити реакції опор та тиск в проміжному шарнірі C складеної балки (рис 3.41). $P_1 = 3,5$ кН; $P_2 = 8$ кН; $q = 2,0$ кН/м; $M_1 = 12$ кН·м; $M_2 = 10$ кН·м.

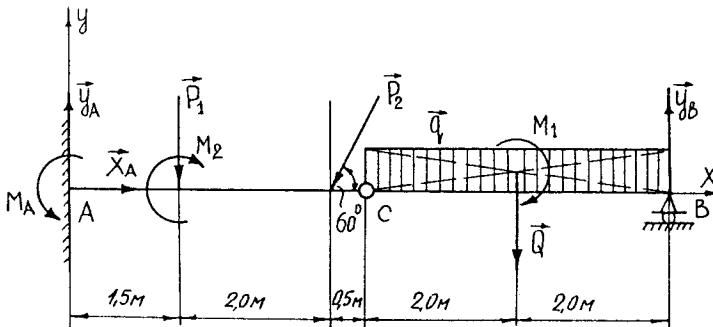


Рис. 3.41

Розв'язання. Невільне тверде тіло, що має прямолінійну вісь і, яке під дією прикладених до нього активних сил може одержувати деформацію згину, називається балкою. Під балкою в статичі розуміють не тільки балки будівельних конструкцій, а й елементи опорних конструкцій машин і апаратів, а також окремі деталі різних машин та механізмів (вали, осі, зубці зубчатих коліс та інше).

Одним з важливих етапів розрахунку балок є етап визначення реакцій в'язей балки. Визначенню реакцій в'язей складеної балки присвячується даний приклад.

Як зазначено вище, визначення реакцій в'язей зчленованих систем можна провести двома способами. Для розв'язання даної задачі застосовуємо другий спосіб, тобто роз'єднаємо балку ACB по внутрішній в'язі (шарнір C) на дві частини AC і CB , і розглянемо рівновагу кожної частини балки окремо (рис. 3.42 і рис. 3.43).

Для частини AC в'язями є жорстке защемлення у площині та частина балки CB з шарніром C . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язі і прикладемо до частини AC відповідні реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A, \vec{X}_C$ і \vec{Y}_C . Початковий напрям цих реакцій показаний на рис. 3.42.

Розглянемо далі частину балки AC як вільне тверде тіло, до якого прикладені сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C$ і пари з моментами M_A, M_2 , що утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці A (рис. 3.42) та складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил (3.14):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & X_A + X_C - P_2 \cos 60^\circ &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & Y_A - P_1 - P_2 \sin 60^\circ + Y_C &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) &= 0; & M_A - P_1 \cdot 1,5 - M_2 - P_2 \sin 60^\circ \cdot 3,5 + Y_C \cdot 4 &= 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

де момент сили \vec{P}_2 відносно точки A визначений на підставі теореми Варіньона.

Для частини CB (рис. 3.43) в'язями є шарнірно-рухома опора B та частина балки AC з шарніром C . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язі і прикладемо до частини CB відповідні

реакції \bar{Y}_B, \bar{X}'_C і \bar{Y}'_C . Реакції \bar{X}'_C і \bar{Y}'_C , відповідно до аксіоми про рівність дії та протидії, мають напрям протилежний до напрямку реакцій \bar{X}_C і \bar{Y}_C на рис. 3.42. Початковий напрям реакції \bar{Y}_B показаний на рис. 3.43.

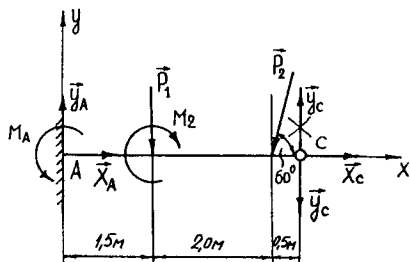


Рис. 3.42

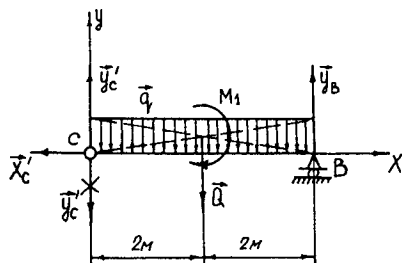


Рис. 3.43

Розглянемо далі частину CB як вільне тверде тіло, до якого прикладені сили \bar{Q} ($Q = 4q = 8$ кН), $\bar{X}'_C, \bar{Y}'_C, \bar{Y}_B$ і пара сил з моментом M_1 , що утворюють довільну плоску систему сил. Побудуємо систему координат з початком у точці C (рис.3.43) та складемо рівняння рівноваги до вільної плоскої системи сил (3.14):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & -X'_C &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & -Y'_C - Q + Y_B &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) &= 0; & -Q \cdot 2 - M_1 + Y_B \cdot 4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Оскільки реакції шарніра C , на підставі аксіоми про рівність дії та протидії, попарно рівні та напрямлені у протилежні боки, то

$$X_C = X'_C; \quad Y_C = Y'_C. \quad (3.25)$$

Таким чином, ми дістали систему шести рівнянь (3.23)–(3.24), що містять шість невідомих $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ і \bar{Y}_B .

З рівнянь (3.23)–(3.24) з врахуванням рівностей (3.25), знаходимо:

$$\begin{aligned} X_C &= X'_C = 0; \\ X_A &= P_2 \cos 60^\circ = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ кН}; \\ Y_B &= \frac{Q \cdot 2 + M_1}{4} = \frac{8 \cdot 2 + 12}{4} = 7 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$Y'_C = -Q + Y_B = -8 + 7 = -1 \text{ кН}$$

(змінюємо напрям сили \bar{Y}'_C на рис. 3.42 і рис. 3.43 на протилежний).

$$Y_A = P_1 + P_2 \sin 60^\circ - Y'_C = 3,5 + 8 \cdot 0,866 - (-1) = 11,43 \text{ кН};$$

$$M_A = P_1 \cdot 1,5 + M_2 + P_2 \sin 60^\circ \cdot 3,5 - (-1) \cdot 4 = \\ = 3,5 \cdot 1,5 + 10 + 8 \cdot 0,866 \cdot 3,5 + 4 = 43,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Проведемо перевірку розрахунків. Для цього необхідно розглянути рівновагу балки ACB в цілому. Для балки в цілому в'язями є жорстке защемлення A та шарнірно-рухома опора B . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей відкинемо в'язі і прикладемо до балки ACB відомі з попереднього розрахунку реакції $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Y}_B$ і пару сил з моментом M_A (рис. 3.41).

Так як сили $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Y}_B$ і пари сил з моментами M_A, M_1, M_2 , що діють на балку утворюють довільну плоску систему сил, то вони мусять задовольняти рівняння рівноваги даної системи сил, наприклад, рівняння (3.14). Побудуємо систему координат з початком у точці A (рис. 3.41) і складемо рівняння (3.14):

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - P_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$4 - 8 \cdot 0,5 = 0;$$

$$4 - 4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 \sin 60^\circ - Q + Y_B = 0;$$

$$11,43 - 3,5 - 8 \cdot 0,866 - 8 + 7 = 0;$$

$$18,43 - 18,43 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad Y_B \cdot 4 - M_1 - Q \cdot 2 + P_2 \sin 60^\circ \cdot 0,5 + P_1 \cdot 2,5 -$$

$$-M_2 + M_A - Y_A \cdot 4 = 0;$$

$$7 \cdot 4 - 12 - 8 \cdot 2 + 8 \cdot 0,866 \cdot 0,5 + 3,5 \cdot 2,5 - 10 + 43,5 - 11,43 \cdot 4 = 0;$$

$$83,7 - 83,7 = 0,$$

де момент сили \vec{P}_2 відносно точки C визначений на підставі теореми Варіньона.

Як бачимо рівняння рівноваги задовольняються: реакції $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A, \vec{Y}_B$ і тиск в шарнірі C $-\vec{X}_C = -\vec{X}'_C, \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C$ визначені правильно.

3.7. Довільна просторова система сил. Теорема про момент рівнодійної системи сил відносно осі (теорема Варіньона).

Вказівки до завдань С6 і С7.

Нехай на тверде тіло діє довільна просторова система сил (рис.3.44). На підставі теореми про паралельне перенесення сили переносимо всі сили в довільну точку O (центр зведення). Маємо систему збіжних сил, що прикладені в точці O , та систему векторів моментів пар сил, що також прикладені в точці O . Складаючи сили та моменти пар сил за правилом паралелограма або векторного многокутника, знайдемо силу \vec{R}_O та пару з моментом \vec{M}_O (рис.3.45). Сила \vec{R}_O носить назву головного вектора системи, а пара з моментом \vec{M}_O – головного момента системи сил. Головний вектор дорівнює геометричній сумі сил системи, а головний момент дорівнює геометричній сумі моментів сил системи відносно центра зведення, тобто

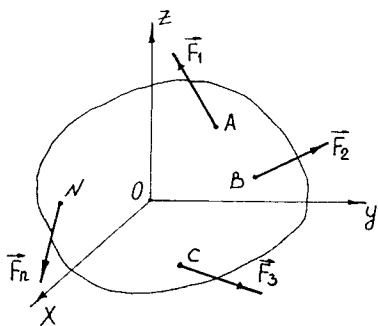


Рис. 3.44

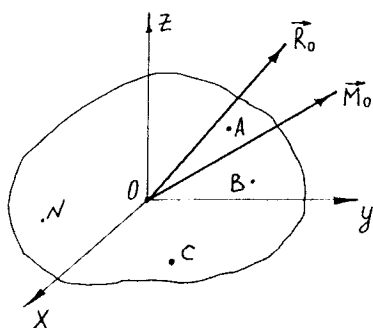


Рис. 3.45

$$\vec{R}_O = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k; \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k).$$

Таким чином, довільна просторова система сил еквівалентна одній силі \vec{R}_O та одній парі сил з моментом \vec{M}_O .

Визначимо числові значення головного вектора \vec{R}_O та головного моменту \vec{M}_O системи за формулами:

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2 + R_{Oz}^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{kz}\right)^2}; \quad (3.26)$$

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k)\right)^2};$$

де

$$\begin{aligned} \bar{R}_{Ox} &= \sum_{k=1}^n F_{kx}; & R_{Oy} &= \sum_{k=1}^n F_{ky}; & R_{Oz} &= \sum_{k=1}^n F_{kz}; \\ M_{Ox} &= \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k); & M_{Oy} &= \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k); & M_{Oz} &= \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k). \end{aligned}$$

(див. підрозділ 3.2).

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно й достатньо, щоб одночасно виконувалися умови

$$\bar{R}_O = \vec{0}; \quad \bar{M}_O = \vec{0}.$$

Тоді з рівностей (3.26) випливає

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) &= 0; & \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) &= 0; & \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Рівняння (3.27) виражають аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил та носять назву рівнянь рівноваги довільної просторової системи сил.

Зауважимо, що при зміні центра зведення, наприклад, якщо взяти за центр зведення довільну точку O_1 , головний вектор \bar{R}_O не змінюється, а головний момент змінюється і визначається за формулою:

$$\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O + \bar{M}_{O_1}(\bar{R}_O). \quad (3.28)$$

Теорема про момент рівнодійної системи сил відносно осі. Якщо довільна просторова система сил має рівнодійну, то момент цієї рівнодійної відносно будь-якої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил цієї системи, відносно тієї самої осі.

Нехай на тверде тіло діє система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, що має рівнодійну \bar{R} . Лінія дії рівнодійної проходить через точку C' (рис.3.46).

Прикладаємо до цієї точки силу \vec{R}' , що дорівнює за модулем силі \vec{R} , але має протилежний напрям. Тоді система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}'$ перебуватиме у стані рівноваги. Для цієї системи виконуватимуться всі умови рівноваги (3.27). Наприклад, сума моментів сил системи відносно координатної осі x дорівнюватиме нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) + M_x(\vec{R}') = 0, \quad (3.29)$$

але тому, що $\vec{R}' = -\vec{R}$ і ці сили направлені вздовж однієї прямої, то $M_x(\vec{R}') = -M_x(\vec{R})$. Підставляючи цю рівність у рівняння (3.29), знайдемо

$$M_x(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k).$$

Задачі С6 і С7 стосуються рівноваги твердого тіла під дією довільної просторової системи сил. При розв'язанні задач про рівновагу твердого тіла, на яке діє довільна система сил у просторі, рекомендуємо таку послідовність виконання роботи:

- 1) виділити тіло, рівновагу якого будемо розглядати;
- 2) зобразити активні сили, які діють на тверде тіло;
- 3) за аксіомою про звільнення від в'язей, умовно відкинути в'язі і замінити їх відповідними реакціями;
- 4) вибрати відповідну прямокутну систему координат і скласти шість рівнянь рівноваги довільної просторової системи сил у формі (3.27);
- 5) розв'язати систему рівнянь і знайти всі невідомі величини;
- 6) зробити аналіз знайденого розв'язку.

Приклад 3.6. Визначити зусилля в стержнях стержневої конструкції, яка підтримує ректифікаційну колону брагоректифікаційного апарата. Конструкція складається з шести стержнів та плити (рис. 3.47 і рис. 3.48). Вага колони дорівнює $P = 250$ кН. Лінія дії сили \vec{P} проходить через центр плити (точка C на рис. 3.48). Вагою стержнів та плити нехтувати.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу плити. Активною силою, що діє на плиту, є сила ваги колони \vec{P} . Плита невідільне тверде тіло. В'язями для неї є невагомні стержні. На підставі аксіоми про звільнення від в'язей, замінимо уявно відкинуті в'язі відповідними реакціями. Початковий напрям реакцій стержнів $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5$ і \vec{S}_6 показаний на рис. 3.48.

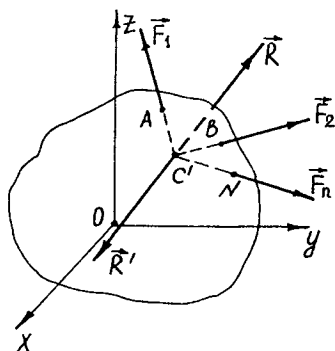


Рис. 3.46

Розглядаючи далі плиту як вільне тверде тіло, що перебуває в рівновазі під дією сил \vec{P} , $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5$ і \vec{S}_6 , довільно розміщених у просторі, складемо шість рівнянь рівноваги цієї системи сил (система координат з початком у точці O подана на рис. 3.48):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; \quad -S_4 \cos \alpha - S_2 \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; \quad -S_2 \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \quad S_1 - S_3 - S_5 - S_6 - S_2 \cos \alpha_1 - S_4 \sin \alpha - P = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) &= 0; \quad -P \frac{a}{2} - S_3 a - S_5 a - S_4 \sin \alpha \cdot a = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) &= 0; \quad P \frac{a}{2} + S_1 a + S_3 a = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) &= 0; \quad S_4 \cos \alpha \cdot a = 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

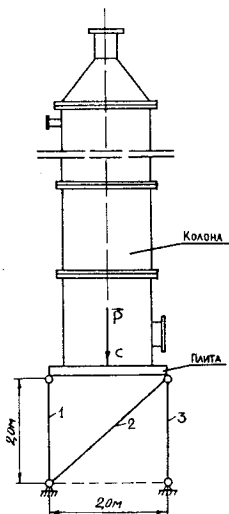


Рис. 3.47

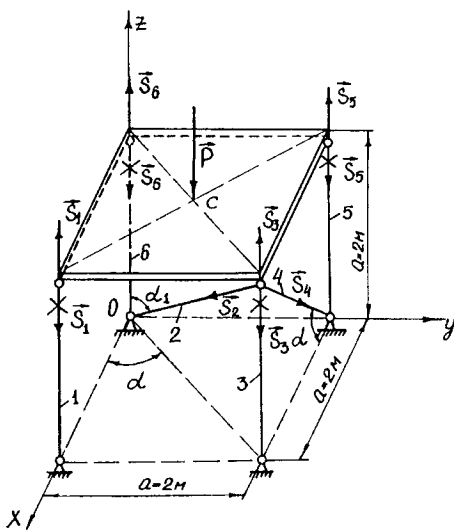


Рис. 3.48

де проекції сили \vec{S}_2 на осі x та y визначені методом подвійного проєкціювання, а момент сили \vec{S}_4 відносно осей x і z на підставі теореми Варіньона.

Примітка 3.4. У випадках, коли кут між вектором сили та віссю координат є невідомим чи його визначити важко, використовують метод подвійного проєкціювання. При використанні цього методу слід:

а) визначити проєкцію сили на площину, де міститься вісь; у даному випадку знаходимо проєкцію сили \vec{S}_2 на площину xOy (рис. 3.48), що дорівнює $(\vec{S}_2)_{xOy} = \vec{S}_2 \sin \alpha$;

б) визначити проєкцію вектора $(\vec{S}_2)_{xOy}$ на вісь або на осі; у даному випадку знайдемо (рис. 3.48):

$$(S_2)_x = (S_2)_{xOy} \cos \alpha = S_2 \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha;$$

$$(S_2)_y = (S_2)_{xOy} \sin \alpha = S_2 \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha.$$

Враховуючи числові значення $a = 2$ м; $\sin \alpha = \sin 45^\circ = 0,707$ і $\cos \alpha = -\cos 45^\circ = 0,707$, система рівнянь (3.30) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} S_2 = S_4 = 0; \\ -S_1 - S_3 - S_5 - S_6 - P = 0; \\ -P - 2S_3 - 2S_5 = 0; \\ P + 2S_1 + 2S_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

З рівнянь системи (3.31) випливає:

$$\begin{aligned} S_2 = S_4 = 0; \\ S_1 = S_3 = S_5 = S_6 = -\frac{P}{4} = -\frac{250}{4} = -62,5 \text{ кН} \end{aligned}$$

(змінюємо напрям сил \vec{S}_1 , \vec{S}_3 , \vec{S}_5 і \vec{S}_6 на рис. 3.48 на протилежний).

Шукані зусилля (внутрішні сили) в стержнях, чисельно дорівнюють реакціям \vec{S}_1 , \vec{S}_3 , \vec{S}_5 , \vec{S}_6 , але протилежно напрямлені до них, тобто стержні 1, 3, 5 і 6 стискаються (рис. 3.48).

Приклад 3.7. Приводний вал шнекового солодоперегрібача має вигляд, як це подано на рис. 3.49. Визначити, на підставі рівноваги вала, сили натягу гілок паса і реакції радіально-упорного A та радіального B підшипників, якщо $P = 3,5$ кН; $Q = 14$ кН; $T = 4,4$ кН; $S_2 = 2S_1$; $\alpha = 30^\circ$; $D = 20$ см; $d = 5$ см.

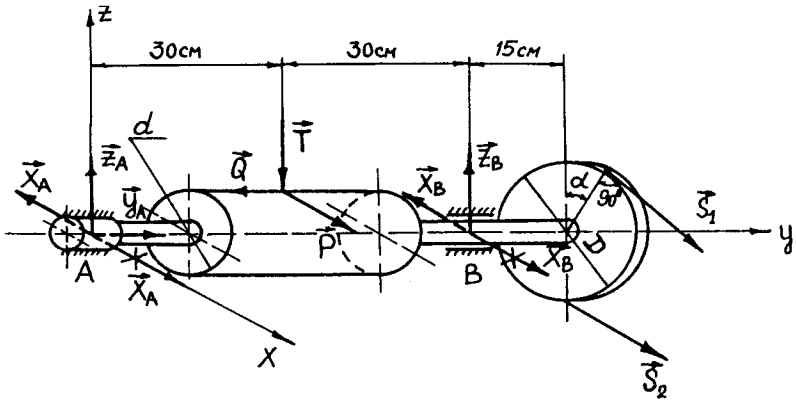


Рис. 3.49

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вала (рис.3.49). Вал невільне тверде тіло. В'язми для вала є підп'ятник A (радіально-упорний підшипник) і циліндричний шарнір B (радіальний підшипник).

На підставі аксіоми про звільнення від в'язей, замінимо уявно відкинуті в'язі відповідними реакціями. Початковий напрям реакцій $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B$ і \vec{Z}_B підшипників A і B показаний на рис. 3.49.

Розглядаючи далі вал як вільне тверде тіло, що перебуває у рівновазі під дією сил $\vec{Q}, \vec{P}, \vec{T}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B$ і \vec{Z}_B довільно розміщених у просторі, складемо шість рівнянь рівноваги цієї системи сил (система координат з початком у точці O подана на рис. 3.49).

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A + P + X_B + S_2 + S_1 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - Q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - T - S_1 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot 2,5 - T \cdot 30 + Z_B \cdot 60 - S_1 \sin \alpha \cdot 75 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad P \cdot 2,5 - S_2 \cdot 10 + S_1 \cdot 10 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \cdot 30 - X_B \cdot 60 - S_2 \cdot 75 - S_1 \cos \alpha \cdot 75 = 0,$$

(3.32)

де $\sin \alpha = \sin 30^\circ = 0,5$; $\cos \alpha = \cos 30^\circ = 0,866$; $S_2 = 2S_1$; моменти сили \vec{S}_1 відносно осей x і z визначені на підставі теореми Вариньона.

Розв'язуючи систему рівнянь (3.32), знайдемо всі невідомі величини:

$$Y_A = Q = 14 \text{ кН};$$

$$S_1 = \frac{P \cdot 2,5}{10} = \frac{3,5 \cdot 2,5}{10} = 0,87 \text{ кН}; \quad S_2 = 2S_1 = 1,74 \text{ кН};$$

$$X_B = \frac{-P \cdot 30 - 2S_1 \cdot 75 - S_1 \cos \alpha \cdot 75}{60} =$$

$$= \frac{-3,5 \cdot 30 - 2 \cdot 0,87 \cdot 75 - 0,87 \cdot 0,866 \cdot 75}{60} = -4,87 \text{ кН}$$

(змінюємо напрям сили \vec{X}_B на рис. 3.49 на протилежний).

$$Z_B = \frac{-Q \cdot 2,5 + T \cdot 30 + S_1 \sin \alpha \cdot 75}{60} =$$

$$= \frac{-14 \cdot 2,5 + 4,4 \cdot 30 + 0,87 \cdot 0,5 \cdot 75}{60} = 2,16 \text{ кН};$$

$$Z_A = T - Z_B + S_1 \sin \alpha = 4,4 - 2,16 + 0,87 \cdot 0,5 = 2,67 \text{ кН};$$

$$X_A = -P - X_B - S_2 - S_1 \cos \alpha =$$

$$= -3,5 + 4,87 - 2 \cdot 0,87 - 0,87 \cdot 0,866 = -1,12 \text{ кН}$$

(змінюємо напрям сили \vec{X}_A на рис. 3.49 на протилежний).

Дійсний напрям реакцій \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{X}_B і \vec{Z}_B показаний на рис. 3.49.

РОЗДІЛ 4. Розрахунково-графічні завдання з кінематики.

4.1. Завдання К1. Рух точки в площині xOy визначається рівняннями $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$, де x, y – в метрах, t – в секундах. Необхідно:

а) визначити рівняння траєкторії руху точки у координатній формі;
б) побудувати траєкторію точки і визначити положення точки в момент часу t ;

в) для моменту часу t визначити і показати на рисунку швидкість і прискорення точки, її дотичне і нормальне прискорення;

г) визначити радіус кривизни траєкторії в момент часу t .

Рівняння руху точки, а також значення моменту часу подані в таблицях К1.А та К1.Б.

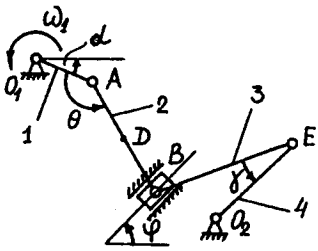
Таблиця К1.А

Варіант	$x = f_1(t)$	t
	м	с
0	$x = 4 \sin \frac{\pi}{6} t$	1
1	$x = 3 - 6 \sin \frac{\pi}{6} t$	$\frac{1}{2}$
2	$x = 3 \sin \frac{\pi t}{6} - 2$	1
3	$x = 4 - 2t$	$\frac{1}{2}$
4	$x = 2t + 4$	1
5	$x = -2t$	$\frac{1}{2}$
6	$x = 2t + 2$	1
7	$x = 12 \cos \frac{\pi}{6} t$	$\frac{1}{2}$
8	$x = 6 \cos \frac{\pi t}{6} - 2$	1
9	$x = 4 - 8 \cos \frac{\pi t}{6}$	$\frac{1}{2}$

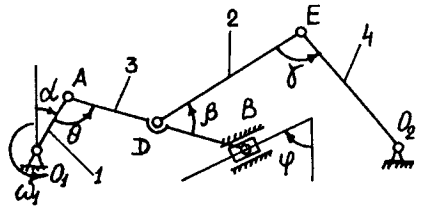
Таблиця К1.Б

Варіант	Значення $y = f_2(t)$		
	Номер варіанта рівняння $x = f_1(t)$		
	0-2	3-6	7-9
0	$4 - 9\cos\frac{\pi t}{6}$	$t^2 - 2$	$-4\cos\frac{\pi t}{3}$
1	$2 - 3\cos\frac{\pi t}{3}$	$8\cos\frac{\pi t}{4}$	$10\sin\frac{\pi t}{6}$
2	$4 - 6\cos^2\frac{\pi t}{6}$	$4 + 2t^2$	$12\sin^2\frac{\pi t}{6}$
3	$12\cos\frac{\pi t}{6}$	$2(t+1)^2$	$2 - 4\sin\frac{\pi t}{6}$
4	$9\cos\frac{\pi t}{3} + 5$	$2 + 2\sin\frac{\pi t}{4}$	$12\cos\frac{\pi t}{3}$
5	$-10\cos\frac{\pi t}{6}$	$3t^2 - 2$	$3\sin\frac{\pi t}{6}$
6	$8\cos\frac{\pi t}{6} - 3$	$(t+1)^3$	$16\sin^2\frac{\pi t}{6} - 14$
7	$-9\cos^2\frac{\pi t}{6}$	$3 - 4\cos\frac{\pi t}{4}$	$6\cos\frac{\pi t}{3}$
8	$6\cos\frac{\pi t}{3} - 4$	$2t^3$	$4 - 9\sin\frac{\pi t}{6}$
9	$2 - 2\cos\frac{\pi t}{6}$	$2\sin\frac{\pi t}{4}$	$8\cos\frac{\pi t}{3} + 6$

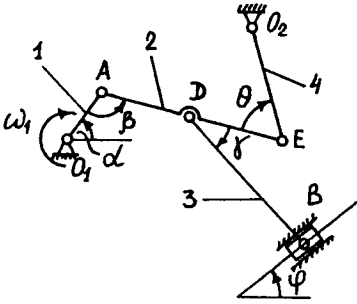
4.2. Завдання К2. Плоский механізм складається з чотирьох стержнів (1-4) і повзуна B , які з'єднані один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами (рис.К2.0 – К2.9). Положення механізму в даний момент часу визначається кутами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Визначити швидкість точок A, B, D і E , а також кутові швидкості стержнів механізму в положенні, що визначається кутами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$, якщо кутова швидкість кривошипа O_1A дорівнює ω .



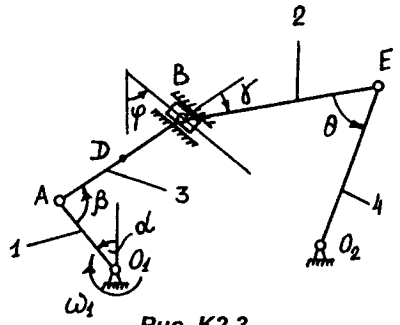
Puc. K2.0



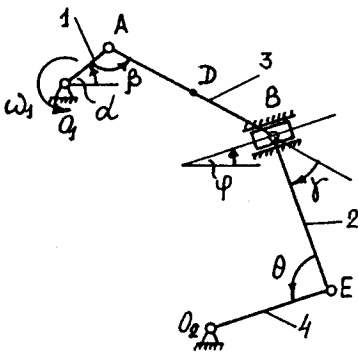
Puc. K2.1



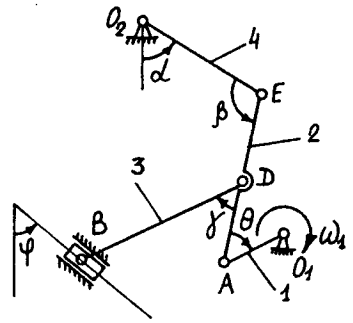
Puc. K2.2



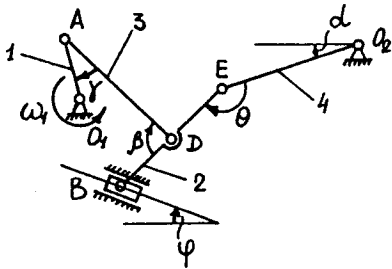
Puc. K2.3



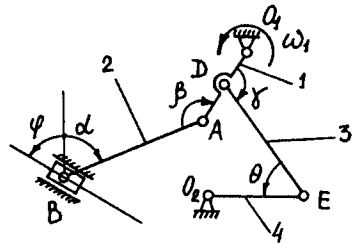
Puc. K2.4



Puc. K2.5



Puc. K2.6



Puc. K2.7

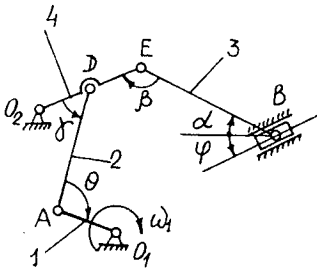


Рис. К2.8

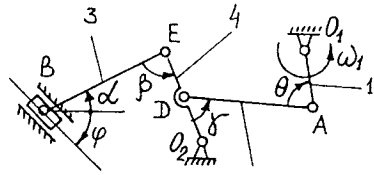


Рис. К2.9

Кути $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$, довжина стержнів l_1, l_2, l_3, l_4 і кутова швидкість кривошипа ω_1 , подані в таблицях К2.А і К2.Б

Таблиця К2.А

Таблиця К2.Б

Ва-ріант	l_1	l_2	l_3	l_4	ω_1	Ва-ріант	α	β	γ	φ	θ
	м	м	м	м			1/с	град.	град.	град.	град.
0	0,4	1,2	1,6	1,0	3	0	30	150	120	0	60
1	0,6	1,4	1,45	0,85	4	1	60	60	60	90	120
2	0,5	1,35	1,5	0,9	5	2	0	120	120	0	60
3	0,35	1,25	1,3	0,95	6	3	90	120	90	90	60
4	0,4	1,2	1,4	0,8	7	4	0	150	30	0	60
5	0,45	1,3	1,45	0,85	8	5	60	150	120	90	30
6	0,55	1,4	1,6	0,9	7	6	30	120	30	0	60
7	0,6	1,25	1,5	0,95	6	7	90	150	120	90	30
8	0,35	1,2	1,4	1,0	5	8	0	60	30	0	120
9	0,45	1,3	1,6	0,9	4	9	30	120	120	0	60

Примітка до рисунків К2.0–К2.9. Побудову схеми механізму необхідно починати із стержня, положення якого визначається кутом a . Всі кути відкладаються відповідно до їх позначення на рис. К2.0–К2.9 (наприклад, кут θ на рис. К2.0 необхідно відкласти від стержня 1 (O_1A) проти ходу стрілки годинника).

Точка D на всіх рисунках перебуває по середині відповідного стержня.

4.3. Завдання К.3. Користуючись умовою завдання К2 визначити прискорення точок A, B, D, E і кутові прискорення всіх ланок механізму, що поданий на рис. К2.0 – К2.9.

4.4. Завдання К4. Тіло N котиться без ковзання по поверхні нерухомого тіла M , маючи нерухому точку O . Визначити миттєву кутову швидкість і кутове прискорення тіла N , якщо його вісь OC обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_0 навколо нерухомої осі Oz , а також швидкість і прискорення точок C , D і E тіла N у положеннях, що подані на рис. К4.0–К4.9.

Всі необхідні для розрахунків дані в таблицях К4.А і К4.Б.

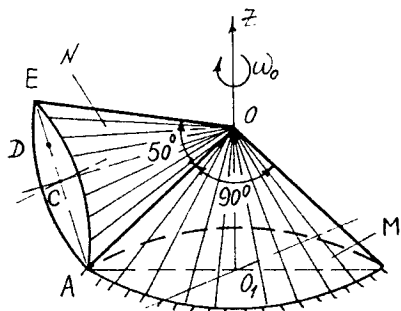


Рис. К4.0

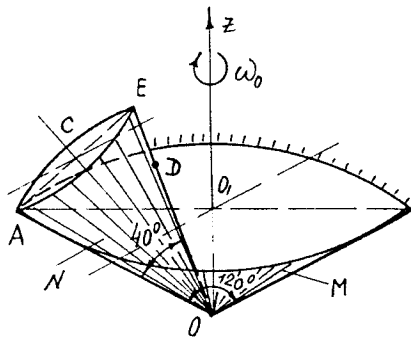


Рис. К4.1

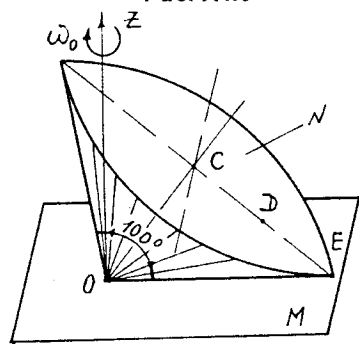


Рис. К4.2

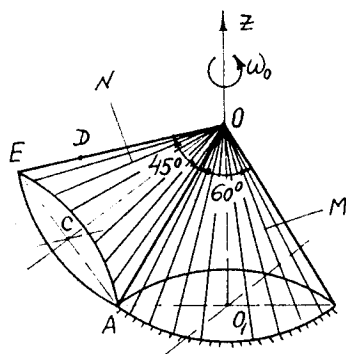


Рис. К4.3

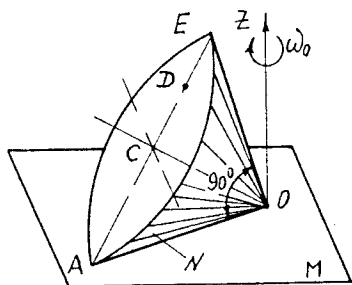


Рис. К4.4

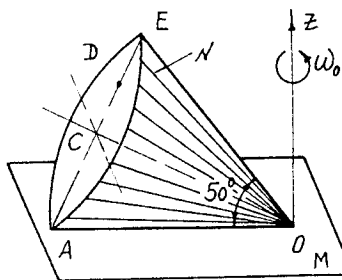


Рис. К4.5

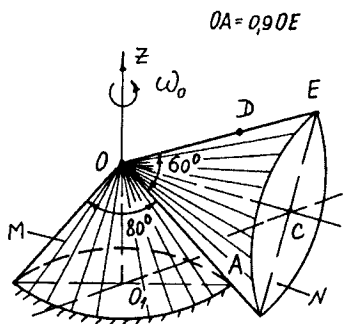


Рис. К4.6

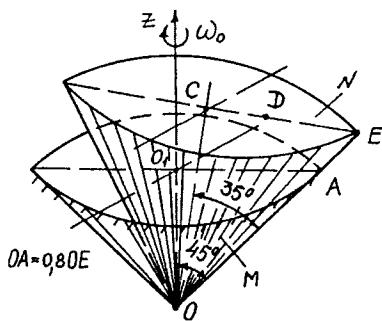


Рис. К4.7

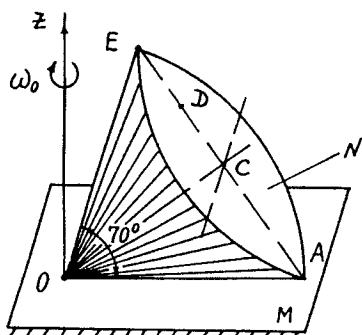


Рис. К4.8

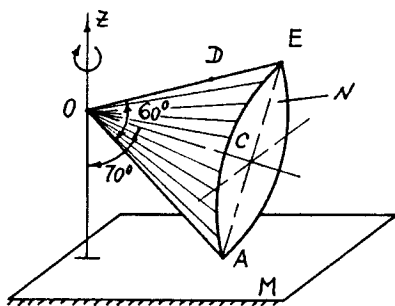


Рис. К4.9

Таблица К4.А

Вариант	<i>OE</i>	<i>ED</i>
	см	см
0	35	20
1	45	15
2	50	10
3	35	12
4	45	18
5	60	25
6	65	20
7	45	16
8	60	20
9	30	25

Таблица К4.Б

Вариант	ω_0
	1/с
0	2,5
1	2,8
2	1,5
3	3,0
4	1,0
5	2,0
6	1,8
7	2,5
8	3,0
9	2,7

4.5. Завдання К5. Задані рівняння відносного руху точки M ($OM = S_r = f_1(t)$) і переносного руху тіла D ($\varphi_e = f_2(t)$), визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M в момент часу t .

Схеми механізмів подані на рис. К5.0 – К5.9, а всі необхідні для розрахунків дані в таблицях К5.А та К5.Б.

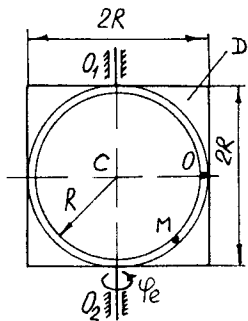


Рис. К5.0

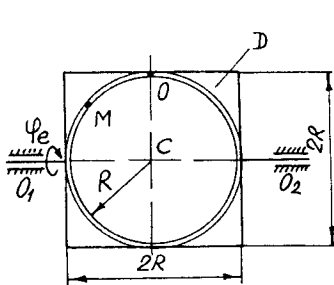


Рис. К5.1

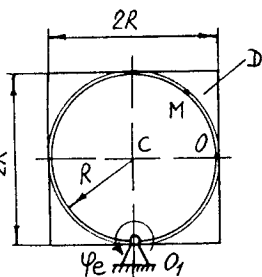


Рис. К5.2

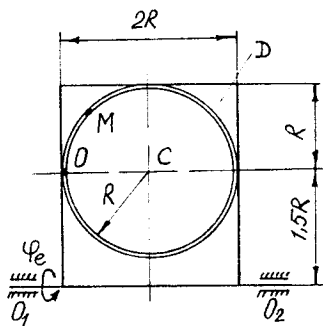


Рис. К5.3

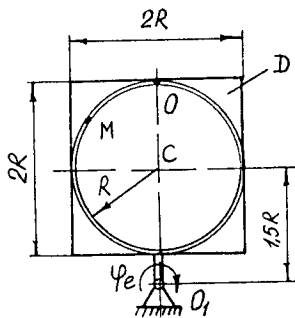


Рис. К5.4

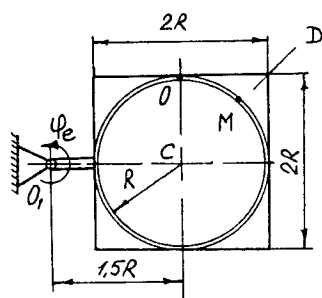


Рис. К5.5

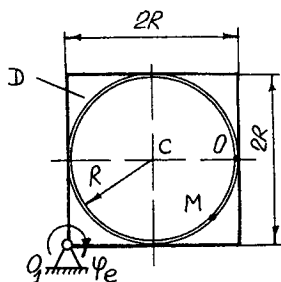


Рис. К5.6

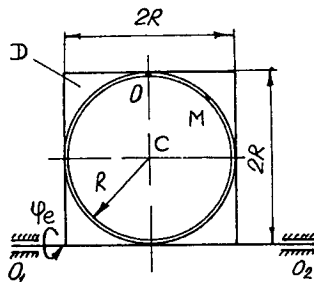


Рис. К5.7

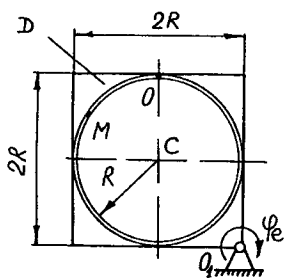


Рис. К5.8

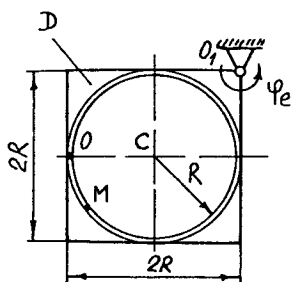


Рис. К5.9

Примітка до рисунків К5.0 – К5.9. На рисунках показаний додатний напрям кута обертання φ_e . При знаку мінус напрям φ_e буде протилежним до показаного.

На рисунках точка M показана у положенні, при якому $OM = S_r > 0$. При $S_r < 0$ точка M перебуває по другу сторону від точки O .

Таблиця К5.А

Варіант	$OM = S_r = f_1(t)$	R
	см	см
0	$6 \sin \frac{\pi t}{3}$	20
1	$10 \sin \frac{\pi t}{6}$	22
2	$5 \cos 2\pi t$	24
3	$2 + 2 \sin \pi t$	25
4	$4 \sin 2\pi t$	18
5	$4t^3 + 2t$	16
6	$3t^2 + t$	21
7	$2,5\pi t^2$	23
8	$6t^3$	20
9	$2\pi \cos \frac{\pi t}{6}$	22

Таблиця К5.Б

Варіант	$\varphi_e = f_2(t)$	t
	рад	с
0	$t^3 - 3t^2$	0,5
1	$t^3 - 2t$	0,3
2	$t^2 - 4t$	0,4
3	$3t^3 - t$	0,35
4	$0,4t^2 + t$	0,55
5	$0,8t^2$	0,6
6	$1,2t - t^2$	0,8
7	$8t^2 - 3t$	0,65
8	$4t - 2t^2$	0,7
9	$t - 0,5t^2$	0,5

РОЗДІЛ 5. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних завдань з кінематики.

5.1. Предмет кінематики. Кінематика точки.

Способи задання руху точки. Швидкість та прискорення точки. Вказівки до завдання К1.

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, без урахування їх мас і сил, що діють на ці тіла.

Кінематика вивчає рух тіл відносно систем відліку.

Системою відліку називається сукупність деякої системи координат, незмінно зв'язаної з деякими абсолютно твердими тілами (тілами відліку), та годинника для вимірювання часу.

Рух тіла відносно обраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити його положення відносно цієї системи у будь-який довільний момент часу.

Задачами кінематики точки є встановлення способів задання руху точки відносно обраної системи відліку і, виходячи з них, визначення кінематичних характеристик її руху (траєкторії, швидкості, прискорення та інше).

Існують три способи задання руху точки у просторі: векторний, координатний і натуральний.

При векторному способі задання руху точки радіус – вектор точки, що рухається, проведений з нерухомого центру (початок системи координат), є векторна функція часу t (рис. 5.1)

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (5.1)$$

Координатний спосіб задання руху точки полягає в тому, що координати точки, що рухається, в будь-якій системі координат виражаються як функції часу t .

Рівняння руху точки в декартовій системі координат мають вигляд (рис. 5.2)

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t). \quad (5.2)$$

Рівняння (5.2) є одночасно і рівняннями траєкторії точки в параметричній формі (параметром є час t).

Зв'язок між векторним і координатним (декартові координати) способами здійснюється на підставі рівності (рис.5.2)

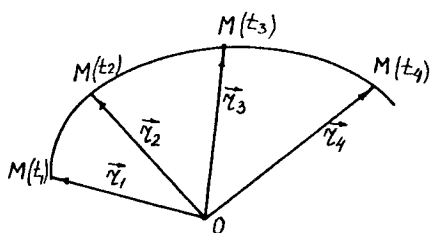


Рис. 5.1

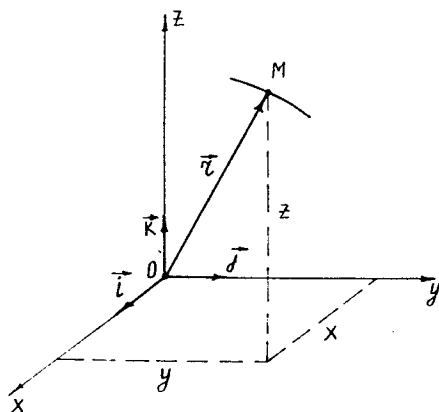


Рис. 5.2

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (5.3)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – одиничні вектори системи координат $Oxyz$.

Натуральний спосіб задання руху точки застосовується якщо наперед відомі: а) траєкторія руху точки; б) початок відліку руху точки на траєкторії; в) напрям додатного і від'ємного відліку руху точки; г) закон руху точки по траєкторії

$$s = s(t), \quad (5.4)$$

де s – дугова координата точки (рис.5.3).

Зв'язок між координатним способом задання руху точки і натуральним здійснюється на підставі рівності

$$s = \pm \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (5.5)$$

де $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$; $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$; $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$; x, y і z – функції (5.2).

Вибір знака перед коренем в рівності (5.5) еквівалентний вибору додатного, або від'ємного напрямку відліку дугової координати при русі точки по траєкторії.

Швидкість точки – це вектор, що дорівнює похідній за часом від радіуса-вектора цієї точки, тобто

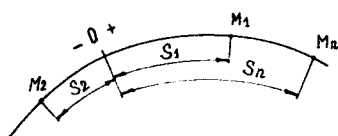


Рис. 5.3

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (5.6)$$

За одиницю швидкості в системі *CI* беруть метр за секунду [м/с].

Нехай точка рухається відносно нерухомої декартової системи координат *Oxyz* згідно рівнянь (5.2).

На підставі рівностей (5.3) і (5.6) маємо

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}, \quad (5.7)$$

де $V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $V_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}$ – проєкції швидкості точки

на осі нерухомої декартової системи координат.

Знаючи (5.7), можна визначити модуль і напрям вектора швидкості точки за формулами:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \quad (5.8)$$

$$\cos(\widehat{\vec{V}, x}) = \frac{\dot{x}}{V}; \quad \cos(\widehat{\vec{V}, y}) = \frac{\dot{y}}{V}; \quad \cos(\widehat{\vec{V}, z}) = \frac{\dot{z}}{V}, \quad (5.9)$$

де $\cos(\widehat{\vec{V}, x})$ і т.д. – напрямлені косинуси вектора \vec{V} .

Рівності (5.8) і (5.9) визначають вектор швидкості точки при координатному способі задання її руху.

При натуральному способі задавання руху точки, вектор її швидкості дорівнює добутку похідній за часом дугової координати точки і одиничного вектора дотичної $\vec{\tau}$ (рис. 5.4)

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}. \quad (5.9, a)$$

Числене значення швидкості визначається за формулою:

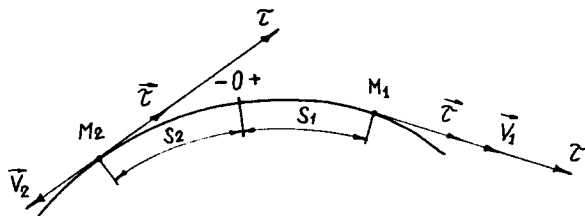


Рис. 5.4

$$V_\tau = \frac{ds}{dt}. \quad (5.10)$$

Якщо на підставі (5.10) величина V_τ отримує додатне значення, то точка рухається у додатному напрямку відліку дугової координати S , якщо значення V_τ від'ємне, то точка рухається у протилежний бік (рис. 5.4).

Прискорення точки – це вектор, що дорівнює похідній за часом від швидкості точки, тобто

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \quad (5.11)$$

За одиницю прискорення в системі CI беруть метр за секунду в квадраті $[м/с^2]$.

Якщо точка рухається відносно нерухомої декартової системи координат $Oxyz$ згідно рівнянь (5.2), то формула (5.11) набуває вигляду

$$\vec{W} = W_x \vec{i} + W_y \vec{j} + W_z \vec{k} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}, \quad (5.12)$$

де $W_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}$, $W_y = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y}$, $W_z = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}$ – проекції прискорення

точки на осі нерухомої декартової системи координат.

Знаючи (5.12) можна визначити модуль і напрям вектора прискорення точки за формулами:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}; \quad (5.13)$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}, x}) = \frac{\ddot{x}}{W}; \quad \cos(\widehat{\vec{W}, y}) = \frac{\ddot{y}}{W}; \quad \cos(\widehat{\vec{W}, z}) = \frac{\ddot{z}}{W}, \quad (5.14)$$

де $\cos(\widehat{\vec{W}, x})$ і т.д. – напрямні косинуси вектора \vec{W} .

Рівності (5.13) і (5.14) визначають вектор прискорення точки при координатному способі задання її руху.

Дамо поняття осей натурального тригранника (натуральних осей). У будь-якій точці просторової кривої можна визначити три взаємно перпендикулярні напрями: дотичної, головної нормалі і бінормалі. Приймаючи ці напрями за координатні осі, введемо одиничні вектори цих осей (рис. 5.5).

Одиничний вектор дотичної $\vec{\tau}$ має напрям у бік зростання дугової координати S . Одиничний вектор \vec{n} , що має напрям у бік угнутості кри-

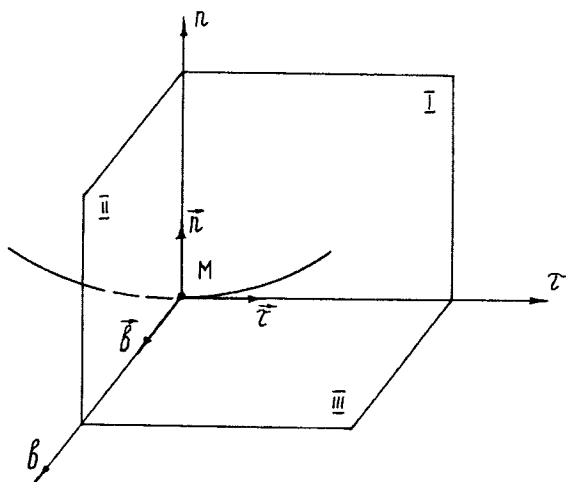


Рис. 5.5

вої, буде одиничним вектором головної нормалі. Напрямок одиничного вектора бінормалі такий, щоб дотична τ , головна нормаль n і бінормаль b , утворювали праву систему координат. Тригранник, що маємо, складений із стичної (I), нормальної (II) і спрямної (III) площин, називається натуральним тригранником. Вектори $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} є одиничними векторами осей натурального тригранника (рис.5.5).

При натуральному способі задавання руху точки, вектор прискорення точки визначається як геометрична сума двох векторів (рис. 5.6):

$$\bar{W} = \bar{W}_\tau + \bar{W}_n. \quad (5.15)$$

Вектор, напрямлений по дотичній називається вектором дотичного прискорення точки

$$\bar{W}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} \bar{\tau}. \quad (5.16)$$

Вектор дотичного прискорення точки характеризує зміну швидкості точки за величиною і числом визначається за формулою:

$$W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}. \quad (5.17)$$

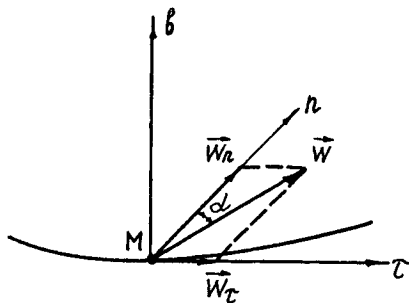


Рис. 5.6

Вектор, напрямлений по головній нормалі називається вектором нормального прискорення точки

$$\vec{W}_n = \frac{V^2}{\rho} \vec{n}. \quad (5.18)$$

Вектор нормального прискорення точки характеризує зміну швидкості точки за напрямом і дорівнює по модулю

$$W_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (5.19)$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії у даній точці.

Так як вектори \vec{W}_τ і \vec{W}_n перпендикулярні між собою, то модуль повного прискорення точки \vec{W} визначається за формулою:

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}. \quad (5.20)$$

Напрямок вектора \vec{W} можна визначити за допомогою кута (рис. 5.6).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|W_\tau|}{W_n}. \quad (5.21)$$

У завданні К1 йдеться про кінематику точки.

Щоб скласти рівняння руху точки, треба виразити її змінні координати як функції часу t . Якщо рух точки визначено рівняннями в декартових координатах (5.2), то для визначення траєкторії точки треба з рівнянь руху виключити час.

Вектор швидкості і вектор прискорення визначають за їх проекціями на осі координат.

Модулі і напрямні косинуси векторів швидкості та прискорення визначають за формулами (5.8), (5.9), (5.13) і (5.14).

Якщо задано траєкторію точки і закон її руху по траєкторії (5.4), то вектор швидкості напрямлений вздовж дотичної до траєкторії, а його проекція на напрям дотичної визначається за формулою (5.10).

Вектор прискорення визначається за його проекціями на натуральні осі. Ці проекції визначаємо за формулами (5.17) і (5.19). Модуль повного прискорення і його напрям визначаємо за формулами (5.20) і (5.21).

Приклад 5.1. Для очистки сухого солоду від домішок при виробництві пива, застосовується хитний грохот, схема якого показана на рис. 5.7.

Скласти рівняння руху точок B і M шатуна кривошипно-шатунного механізму грохоту.

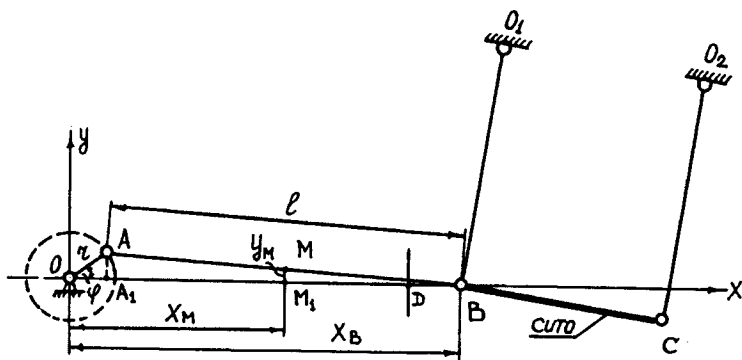


Рис. 5.7

На підставі рівнянь руху точки M визначити траєкторію її руху; вказати на траєкторії точки M , в момент часу $t = 1$ с, положення точки і визначити для цього положення її швидкість, прискорення і радіус кривизни траєкторії, якщо $r = 7$ см; $l = 250$ см; $\varphi = \omega t$, $\omega = 20$ 1/с, $AM = MB$.

При розрахунках прийняти до уваги, що тяги O_1B і O_2C (рис. 5.7) є достатньої довжини, щоб вважати, що точка B здійснює прямолінійний горизонтальний рух.

Розв'язання. Застосуємо координатний (декартові координати) спосіб задавання руху точок B і M шатуна AB (рис. 5.7). Нехай початок координат буде в точці O , вісь Ox напрямлена по горизонталі вправо, а вісь Oy – по вертикалі вгору. Позначимо координати точок B і M через x_B , x_M і y_M і визначимо з рис. 5.7 їх величини як функції часу:

$$x_B = r \cos \varphi + A_1B = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - y_A^2} = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t};$$

$$\begin{aligned} x_M &= r \cos \varphi + A_1M_1 = r \cos \omega t + A_1M_1 = r \cos \omega t + \frac{A_1B}{2} = \\ &= r \cos \omega t + \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}{2}; \end{aligned}$$

$$y_M = \frac{y_A}{2} = \frac{r}{2} \sin \omega t.$$

Перетворюємо рівняння руху точки B :

$$x_B = l \left(\frac{r}{l} \cos \omega t + \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \omega t} \right).$$

Застосуємо до виразу

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \omega t} = \left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \omega t \right]^{\frac{1}{2}}.$$

формулу Ньютона (розкладемо цей вираз у біноміальний ряд), тобто

$$\left[1 - \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \omega t \right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \omega t - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{l} \right)^4 \sin^4 \omega t - \dots$$

і обмежувачись двома першими членами у розкладі (так як величина

$$\left(\frac{r}{l} \right)^4 = \left(\frac{7}{250} \right)^4 = 6,15 \cdot 10^{-7} \text{ є незначна), отримуємо}$$

$$x_B = l \left[\frac{r}{l} \cos \omega t + \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \sin^2 \omega t \right) \right] = \left(\frac{4l^2 - r^2}{4l} \right) + r \cos \omega t + \frac{r^2}{4l} \cos 2\omega t,$$

$$\text{де } \sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}.$$

Таким чином, рух точки B являє собою сполучення двох горизонтальних гармонічних коливань з частотою ω і 2ω відносно точки D з координатою X_D , що дорівнює

$$x_D = \frac{4l^2 - r^2}{4l}.$$

Щоб знайти траєкторію точки M (рис. 5.7), треба з рівнянь руху точки M

$$x_M = r \cos \omega t + \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}{2};$$

$$y_M = \frac{r}{2} \sin \omega t;$$

виключити час t . Для цього з другого рівняння знайдемо $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ і підставимо в перше. Матимемо:

$$\sin \omega t = \frac{2y_M}{r}; \quad \cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{4y_M^2}{r^2}},$$

тоді

$$x_M = r \sqrt{1 - \frac{4y_M^2}{r^2}} + \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}{2} = \sqrt{r^2 - (2y_M)^2} + \frac{\sqrt{l^2 - (2y_M)^2}}{2}.$$

Рівняння траєкторії точки M має вигляд

$$x_M = \sqrt{r^2 - (2y_M)^2} + \frac{\sqrt{l^2 - (2y_M)^2}}{2}.$$

Побудуємо за даними таблиці 5.1 частину траєкторії точки M (рис.5.8).

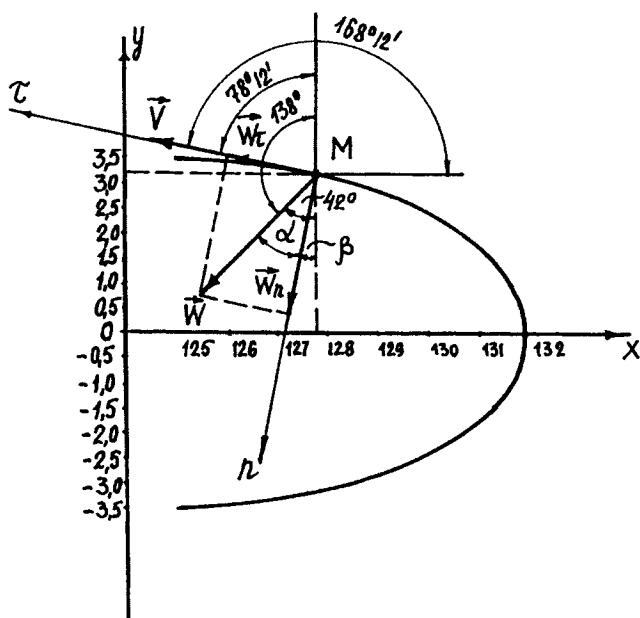


Рис. 5.8

Таблиця 5.1

y_M (см)	x_M (см)
0	132
$\pm 0,5$	131,9
$\pm 1,0$	131,7
$\pm 1,5$	131,3
$\pm 2,0$	130,7
$\pm 2,5$	129,8
$\pm 3,0$	128,4
$\pm 3,2$	127,6
$\pm 3,4$	126,2
$\pm 3,44$	125,5
$\pm 3,5$	125

Визначимо положення точки M на траєкторії в момент часу $t = 1$ с, маємо

$$x_M = r \cos \omega t + \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}{2} = 7 \cos 20 + \frac{\sqrt{250^2 - 7^2 \sin^2 20}}{2} = 127,8 \text{ см};$$

$$y_M = \frac{r}{2} \sin \omega t = \frac{7}{2} \sin 20 = 3,2 \text{ см}.$$

Показуємо положення точки M , в момент часу $t = 1$ с, на рис. 5.8. Знайдемо проєкції швидкості точки M на осі координат

$$\begin{aligned} V_{x_M} = \dot{x}_M &= \frac{dx_M}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r \cos \omega t + \frac{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}{2} \right) = \\ &= -r\omega \left(\sin \omega t + \frac{r \sin 2\omega t}{4\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} \right); \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$V_{y_M} = \dot{y}_M = \frac{dy_M}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{r}{2} \sin \omega t \right) = \frac{r\omega}{2} \cos \omega t. \quad (5.23)$$

Величина швидкості точки M дорівнює

$$y_M = \sqrt{V_{x_M}^2 + V_{y_M}^2} = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = r\omega \sqrt{\left(\sin \omega t + \frac{r \sin 2\omega t}{4\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} \right)^2 + \frac{\cos^2 \omega t}{4}} \quad (5.24)$$

Визначаємо напрямні косинуси вектора \vec{V}

$$\cos(\widehat{\vec{V}, x}) = \frac{\dot{x}_M}{V_M} = - \frac{\left(\sin \omega t + \frac{r \sin 2\omega t}{4\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} \right)}{\sqrt{\left(\sin \omega t + \frac{r \sin 2\omega t}{4\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} \right)^2 + \frac{\cos^2 \omega t}{4}}}; \quad (5.25)$$

$$\cos(\widehat{\vec{V}, y}) = \frac{\dot{y}_M}{V_M} = - \frac{\cos \omega t}{2 \sqrt{\left(\sin \omega t + \frac{r \sin 2\omega t}{4\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} \right)^2 + \frac{\cos^2 \omega t}{4}}}. \quad (5.26)$$

Величину і напрям вектора швидкості точки M в момент часу $t = 1$ с дістанемо, якщо в рівняння (5.22)–(5.26) підставимо числові значення. Матимемо:

$$V_{x_M} = \dot{x}_M = -7 \cdot 20 \left(\sin 20 + \frac{7 \sin 40}{4\sqrt{250^2 - 7^2 \sin^2 20}} \right) = -128,5 \text{ см/с};$$

$$V_{y_M} = \dot{y}_M = \frac{7 \cdot 20}{2} \cos 20 = 26,8 \text{ см/с};$$

$$V = \sqrt{V_{x_M}^2 + V_{y_M}^2} = \sqrt{(-128,5)^2 + (26,8)^2} = 131,3 \text{ см/с};$$

$$\cos(\widehat{\vec{V}, x}) = \frac{\dot{x}_M}{V_M} = -\frac{128,5}{131,3} = -0,9787; \quad (\widehat{\vec{V}, x}) = 168^{\circ}12';$$

$$\cos(\widehat{\vec{V}, y}) = \frac{\dot{y}_M}{V_M} = \frac{26,8}{131,3} = 0,2041; \quad (\widehat{\vec{V}, y}) = 78^{\circ}12'.$$

Вектор швидкості точки M показаний на рис. 5.8.

Щоб визначити прискорення точки M , знайдемо проекції прискорення точки на осі координат:

$$W_{x_M} = \ddot{x}_M = \frac{dV_{x_M}}{dt} = -r\omega^2 \left[\cos \omega t + \frac{r \cos 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{r^3 \sin^2 2\omega t}{4\sqrt{(l^2 - r^2 \sin^2 \omega t)^3}} \right]; \quad (5.27)$$

$$W_{y_M} = \ddot{y}_M = \frac{dV_{y_M}}{dt} = -\frac{r\omega^2}{2} \sin \omega t. \quad (5.28)$$

Величина прискорення точки M дорівнює

$$W_M = \sqrt{W_{x_M}^2 + W_{y_M}^2} = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = r\omega^2 \sqrt{\left[\cos \omega t + \frac{r \cos 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{r^3 \sin^2 2\omega t}{4\sqrt{(l^2 - r^2 \sin^2 \omega t)^3}} \right]^2 + \frac{\sin^2 \omega t}{4}}. \quad (5.29)$$

Визначаємо напрямні косинуси вектора \vec{W}

$$\cos(\widehat{\vec{W}, x}) = \frac{\ddot{x}_M}{W_M} = \frac{\left[\cos \omega t + \frac{r \cos 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{r^3 \sin^2 2\omega t}{4\sqrt{(l^2 - r^2 \sin^2 \omega t)^3}} \right]}{\sqrt{\left[\cos \omega t + \frac{r \cos 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{r^3 \sin^2 2\omega t}{4\sqrt{(l^2 - r^2 \sin^2 \omega t)^3}} \right]^2 + \frac{\sin^2 \omega t}{4}}}; \quad (5.30)$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}}, y) = \frac{\ddot{y}_M}{W_M} = \frac{\sin \omega t}{2 \sqrt{\left(\cos \omega t + \frac{r \cos 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} + \frac{r^3 \sin^2 2\omega t}{4\sqrt{(l^2 - r^2 \sin^2 \omega t)}} \right)^2 + \frac{\sin^2 \omega t}{4}}}. \quad (5.31)$$

Величину і напрям вектора прискорення точки M в момент часу, $t = 1$ с дістанемо, якщо в рівняння (5.27)–(5.31) підставимо числові значення. Маємо:

$$W_{x_M} = \ddot{x}_M = -7 \cdot 20^2 \left[\cos 20 + \frac{7 \cos 40}{2\sqrt{250^2 - 7^2 \sin^2 20}} + \frac{7^3 \sin^2 40}{4\sqrt{250^2 - 7^2 \sin^2 20}} \right] = -1150,2 \text{ см/с}^2;$$

$$W_{y_M} = \ddot{y}_M = -\frac{7 \cdot 20^2}{2} \sin 20 = -1278,1 \text{ см/с}^2;$$

$$W_M = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = \sqrt{(-1150,2)^2 + (-1278,1)^2} = 1719,4 \text{ см/с}^2;$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}}, x) = \frac{\ddot{x}_M}{W_M} = -\frac{1150,2}{1719,4} = -0,6689; \quad (\widehat{\vec{W}}, x) = 228^\circ;$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}}, y) = \frac{\ddot{y}_M}{W_M} = -\frac{1278,1}{1719,4} = -0,7433; \quad (\widehat{\vec{W}}, y) = 138^\circ.$$

Вектор прискорення точки M показаний на рис. 5.8.

Радіус кривизни траєкторії в момент часу $t = 1$ с, визначаємо за формулою:

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{V^2}{W \cos 30^\circ 12'} = \frac{131,3^2}{1719,4 \cdot 0,8643} = 11,6 \text{ см},$$

де

$$W_n = W \cos \alpha = W \cos(42^\circ - \beta) = W \cos[42^\circ - (90^\circ - 78^\circ 12')] = \\ = W \cos(42^\circ - 11^\circ 48') = W \cos 30^\circ 12' \text{ (рис. 5.8).}$$

Зауважимо, що визначення нормального прискорення точки $M-W_n$ можна провести також за формулою:

$$W_n = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - W_\tau^2}, \text{ де } W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}.$$

5.2. Плоскопаралельний рух твердого тіла. Визначення швидкостей точок тіла. Вказівки до завдання К2.

Плоскопаралельним називається такий рух тіла при якому всі точки тіла рухаються паралельно деякій нерухомій площині.

Прикладом плоскопаралельного руху тіла є кочення циліндра по горизонтальній площині таким чином, що його основа залишається весь час паралельною до площини yOz (рис. 5.9).

Розглянемо плоскопаралельний рух твердого тіла. Нехай всі точки тіла переміщуються у площинах, які є паралельними координатній площині xOy (рис. 5.10). З визначення плоскопаралельного руху випливає, що будь-яка пряма CD , яка проведена в тілі перпендикулярно до площини xOy , буде рухатися поступально, тобто траєкторії, швидкості та прискорення всіх точок цієї прямої будуть однаковими.

Для визначення руху тіла необхідно знати рух лише однієї точки на кожній такій прямій. Якщо взяти точки в одній площині Q , яка є пара-

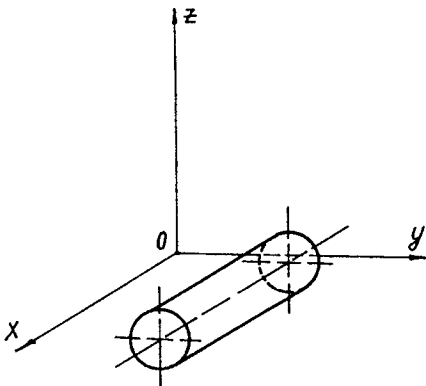


Рис. 5.9

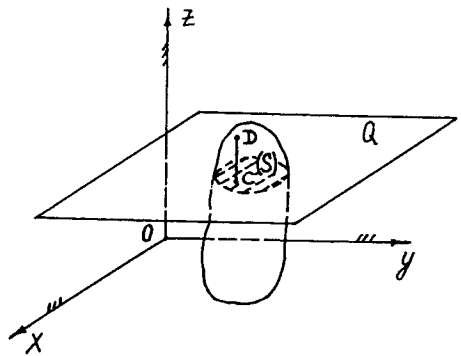


Рис. 5.10

лельною до площини xOy , можна стверджувати, що вивчення плоскопаралельного руху тіла зводиться до вивчення руху плоскої фігури (перерізу S тіла, площиною Q , паралельною нерухомій координатній площині xOy (рис. 5.10).

Положення перерізу S на площині xOy визначається положенням будь-якого відрізка AB (рис. 5.11), що проведений в цьому перерізі. Таким чином, вивчення руху перерізу S на площині xOy зводиться до вивчення руху прямолінійного відрізка AB , з яким переріз незмінно зв'язаний. Але положення відрізка AB визначається положенням його точки A , яка називається полюсом, і кутом φ між цим відрізком та віссю Ox (рис. 5.11). Отже, рух плоскої фігури на площині xOy можна визначити такими рівняннями:

$$\begin{aligned}x_A &= f_1(t); \\y_A &= f_2(t); \\ \varphi &= f_3(t).\end{aligned}\tag{5.32}$$

Ці рівняння називаються рівняннями руху плоскої фігури, або рівняннями плоскопаралельного руху твердого тіла.

Покажемо розклад плоскопаралельного руху твердого тіла на два рухи: поступальний, який визначається першими двома рівняннями (5.32), і обертальний навколо полюса*, який визначається третім рівнянням (5.32). Для цього розглянемо два послідовних положення I і II, які займає переріз S твердого тіла, що рухається в моменти часу t_1 і $t_2 = t_1 + \Delta t$ (рис. 5.12). Неважко побачити, що переріз S , а з ним і все тіло, можна перевести з положення I у положення II наступним чином. Перемістимо спочатку тіло поступально, так, щоб полюс A_1 зайняв положення A_2 (відрізок A_1B_1 займає положення A_2B_2), а потім обернемо переріз S навколо полюса на кут $\Delta\varphi$. Таким же чином можна перемістити тіло з положення II в інше положення III і так далі.

Визначимо швидкість будь-якої точки твердого тіла в плоскопаралельному русі.

Нехай система координат Oxy є нерухомою, а система координат Ax_2y_2 , що має початок в точці A (полюсі) плоскої фігури, рухається поступально. Система координат Ax_1y_1 жорстко зв'язана з плоскою фігурою (рис. 5.13).

* Обертальний рух тіла відбувається навколо осі, що проходить через полюс перпендикулярно до площини xOy . Проте для стислості будемо надалі називати цей рух обертальним навколо полюса.

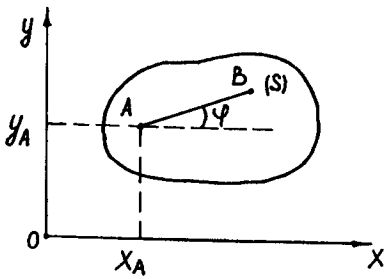


Рис. 5.11

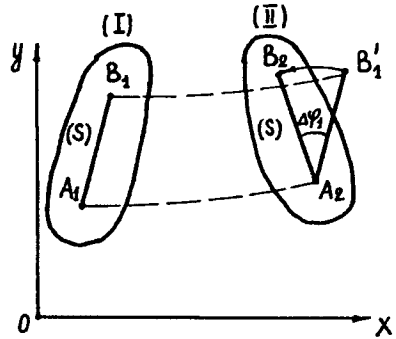


Рис. 5.12

Радіус-вектор \vec{r}_B , який визначає положення довільної точки B тіла відносно нерухомої системи координат Oxy (рис. 5.13), можна задати за допомогою двох векторів: \vec{r}_A , що визначає положення точки A в системі відліку Oxy , і $\vec{\rho}$, що визначає положення довільної точки B в системі відліку Ax_2y_2 ,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}.$$

За визначенням, швидкість точки B дорівнює

$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{\rho}) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \quad (5.33)$$

Похідна $\frac{d\vec{r}_A}{dt}$ в рівнянні (5.33) визначає швидкість точки A (полюса)

\vec{V}_A , а похідна $\frac{d\vec{\rho}}{dt}$ є швидкістю точки B відносно рухомої системи координат Ax_2y_2 .

Позначимо цю швидкість наступним чином

$$\vec{V}_{BA} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Як ми зазначали, рух тіла відносно системи координат Ax_2y_2 являє собою обертання тіла навколо полюса A . Таким чином, швидкість \vec{V}_{BA} є швидкість точки B при обертанні тіла навколо полюса A , тобто

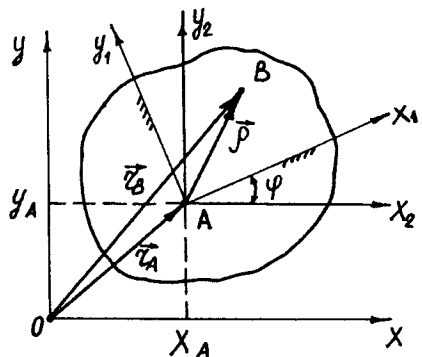


Рис. 5.13

$$\vec{V}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}.$$

Тоді формула (5.33) приймає вигляд

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho} = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (5.34)$$

тобто швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса A і швидкості цієї точки при обертанні плоскої фігури навколо полюса A .

Покажемо, що кутова швидкість обертання плоскої фігури не залежить від вибору полюса. Нехай точки A і B – дві довільні точки плоскої фігури. Нехай полюсу A відповідає кутова швидкість $\vec{\omega}_A$, а полюсу B – кутова швидкість $\vec{\omega}_B$. Визначимо швидкість точки B , прийнявши за полюс точку A

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}.$$

Прийmemo тепер за полюс точку B , знайдемо швидкість точки A

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{\rho}.$$

Складаючи ці дві рівності, отримуємо

$$(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times \vec{\rho} = \vec{0}.$$

Так як вектор $(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B)$ має лінію дії перпендикулярну до площини плоскої фігури, то остання рівність має місце тільки при $(\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B)$. Таким чином, зберігати індекс полюса при позначенні вектора кутової швидкості плоскої фігури недоцільно, тобто

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}.$$

Тоді формула (5.34) приймає вигляд

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (5.35)$$

Так як $\vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$, то величина швидкості точки B відносно полюса A дорівнює

$$V_{BA} = \omega AB. \quad (5.36)$$

Зауважимо також, що вектор \vec{V}_{BA} перпендикулярний до AB (рис. 5.14).

З формули (5.35) випливає наступна теорема: “при плоскопаралельному русі проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з’єднує ці точки дорівнюють одна одній” (рис. 5.14):

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta. \quad (5.37)$$

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури можна визначити також за допомогою миттєвого центра швидкостей. Миттєвим центром швидко-

стей (МЦШ) називається точка P площини плоскої фігури, швидкість якої в даний момент дорівнює нулю.

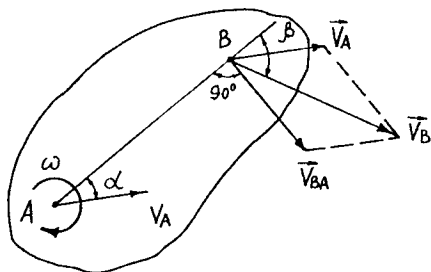


Рис. 5.14

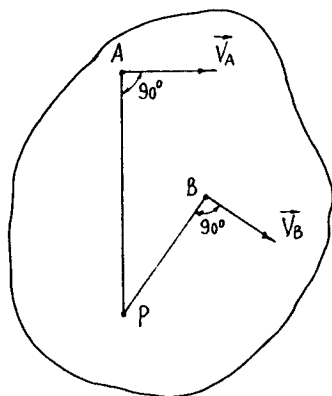


Рис. 5.15

Якщо при плоскопаралельному русі твердого тіла в даний момент часу існує миттєвий центр швидкостей, то рух тіла в даний момент можна розглядати як обертальний рух навколо цього миттєвого центра швидкостей. Отже, швидкість будь-якої точки тіла можна розглядати як швидкість точки в обертальному русі тіла навколо миттєвого центра швидкостей. Таким чином, миттєвий центр швидкостей характеризується тим, що швидкості будь-яких двох точок тіла відносяться як їх відстані до миттєвого центра швидкостей (рис. 5.15):

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}.$$

Миттєва кутова швидкість тіла визначається діленням швидкості будь-якої точки плоскої фігури на відстань до миттєвого центра швидкостей

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}.$$

Якщо відомі напрями швидкостей двох точок плоскої фігури, то миттєвий центр швидкостей перебуває в точці перетину перпендикулярів, проведених з точок A і B до векторів швидкостей цих точок (рис. 5.15).

Якщо вектори швидкостей точок A і B плоскої фігури паралельні один одному, перпендикулярні до відрізка AB , мають однаковий напрям і не рівні між собою, то миттєвий центр швидкостей перебуває на продов-

женні AB в точці перетину з прямою, яка з'єднує кінці векторів швидкостей цих точок (рис. 5.16).

Якщо вектори швидкостей двох точок A і B плоскої фігури паралельні один одному, перпендикулярні до відрізка AB і мають протилежні напрями (рис. 5.17), то миттєвий центр швидкостей лежить на відрізку AB в точці його перетину з відрізком, який з'єднує кінці векторів швидкостей цих точок.

Якщо плоска фігура котиться без ковзання по нерухомій кривій, або прямій (рис. 5.18), то миттєвий центр швидкостей перебуває у точці дотику плоскої фігури з кривою, або прямою.

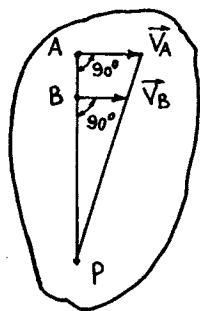


Рис. 5.16

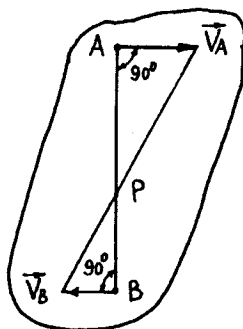


Рис. 5.17

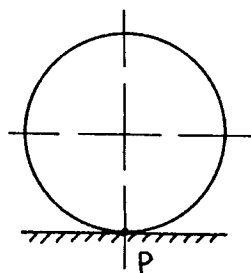


Рис. 5.18

Якщо вектори швидкостей двох точок плоскої фігури паралельні один одному і не перпендикулярні до відрізка, який з'єднує ці точки (рис. 5.19, а), або вектори швидкостей двох точок паралельні, рівні між собою і перпендикулярні до відрізка, який з'єднує ці точки (рис. 5.19, б), то миттєвий центр швидкостей в даний момент часу не існує, або, як говорять, він перебуває у нескінченності. Тоді кутова швидкість плоскої фігури дорівнює нулю, а плоска фігура перебуває у миттєво-поступальному русі.

Із задач, які належать до теми, що розглядається, слід звернути увагу на ті задачі, в яких є плоскі механізми.

Розв'язуючи ці задачі, розглядають послідовно рух окремих ланок механізму, починаючи з тієї ланки, рух якої задано, а потім при переході від однієї ланки до другої визначають швидкості тих точок, які є спільними для цих двох ланок механізму.

Зазначимо, що миттєвий центр швидкостей можна знаходити тільки для кожної ланки окремо; це стосується й кутових швидкостей. При розв'язанні задач, в яких треба визначити швидкості, найдоцільніше зас-

тосувати саме метод визначення миттєвого центра швидкостей , при чому обчислення миттєвих радіусів досить просте. Якщо треба знайти швидкість якої-небудь однієї точки плоскої фігури, то краще застосувати формулу (5.35) , або формулу (5.37). При застосуванні формули (5.35) за полюс треба брати ту точку плоскої фігури, швидкість якої відома або легко визначається з умови задачі. Якщо задача розв'язується за допомогою знаходження миттєвого центра швидкостей, то спочатку треба визначити положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури одним із зазначених способів.

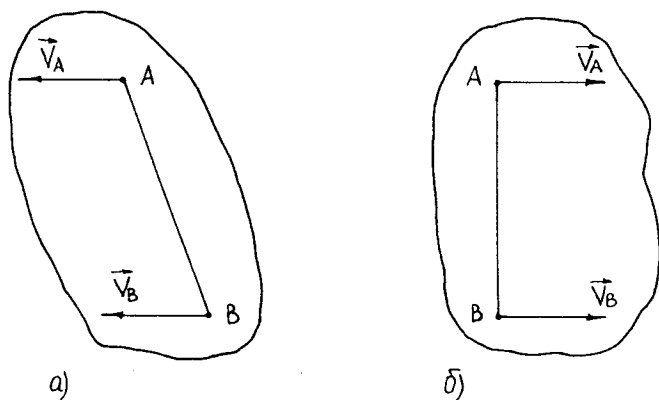


Рис. 5.19

Приклад 5.2. Механізм шокової дробарки з верхнім підвісом щоки (рис. 5.20) складається з нерухої щоки I-I, рухої щоки O_2C , передньої BC та задньої O_1B розпирних плит, шатуна AB та кривошипа OA насадженого на вісь O . Кривошип OA обертається навколо нерухої осі O з кутовою швидкістю ω_0 і передає за допомогою шатуна AB і розпирних плит BC та O_1B рух рухомій щоці O_2C , яка гойдаючись на осі O_2 подрібнює матеріал, що перебуває між щоками.

Визначити кутові швидкості шатуна AB , розпирних плит BC і O_1B , рухої щоки O_2C та швидкості точок B , C і K (перебуває на середині шатуна AB) механізму в момент коли $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ і кривошип OA приймає горизонтальне положення, якщо $l = 80$ см, $OA = 10$ см; $CB = O_1B = 40$ см; $O_2C = 60$ см і кутова швидкість кривошипа $\omega_0 = 10$ 1/с.

Розв'язання. Визначення кутових швидкостей ланок і швидкостей точок плоского механізму можна провести трьома способами.

Спосіб 1. Приймаємо точку A кривошипа OA за полюс (рис. 5.21). Тоді швидкість точки B шагуна AB можна визначити на підставі формули (5.35), як геометричну суму двох швидкостей – швидкості полюса A і швидкості точки B в обертальному русі навколо полюса A :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

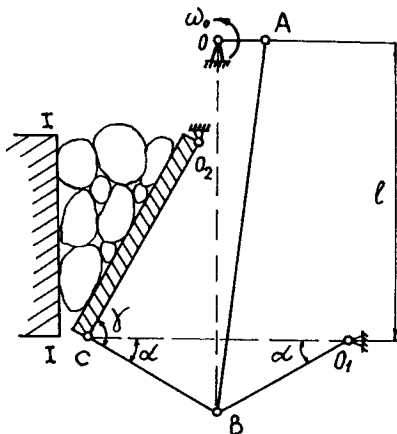


Рис. 5.20

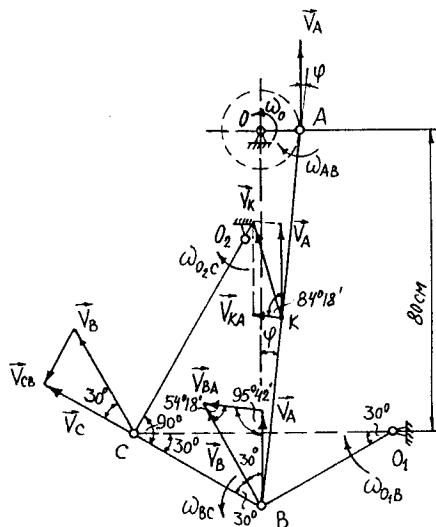


Рис. 5.21

Швидкість полюса A дорівнює (як швидкість точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі)

$$V_A = \omega_0 OA = 10 \cdot 0,1 = 1 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{V}_A має напрям перпендикулярний до OA (рис. 5.21), а вектор \vec{V}_{BA} – перпендикулярний до AB . Напрямок вектора швидкості точки B – \vec{V}_B визначається по руху розпірної плити O_1B , яка гойдається навколо точки O_1 , тобто вектор \vec{V}_B має напрям перпендикулярний O_1B .

На підставі розглянутого, будемо в точці B трикутник швидкостей (рис. 5.21).

Визначаємо кут φ в трикутнику $\triangle OAB$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{80 + 0,5 O_1 B} = \frac{10}{80 + 20} = 0,1;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0,1 = 5^\circ 42'.$$

Знаючи кут φ неважко визначити кути в трикутнику швидкостей: кут між \vec{V}_A і \vec{V}_B – 30° ; кут між \vec{V}_{BA} і \vec{V}_A – $95^\circ 42'$; кут між \vec{V}_B і \vec{V}_{BA} – $54^\circ 18'$.

Для визначення числових значень швидкостей \vec{V}_{BA} і \vec{V}_B запишемо теорему синусів:

$$\frac{V_A}{\sin 54^{\circ}18'} = \frac{V_{BA}}{\sin 30^{\circ}} = \frac{V_B}{\sin 95^{\circ}42'}$$

Звідки

$$V_{AB} = \frac{V_A \sin 30^{\circ}}{\sin 54^{\circ}18'} = \frac{1 \cdot 0,5}{0,8121} = 0,615 \text{ м/с};$$

$$V_B = \frac{V_A \sin 95^{\circ}42'}{\sin 54^{\circ}18'} = \frac{1 \cdot 0,9951}{0,8121} = 1,225 \text{ м/с};$$

Так як $V_{BA} = \omega_{AB} AB$, то звідси маємо величину кутової швидкості шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{V_{BA} \cos 5^{\circ}42'}{OB} = 0,615 \cdot 0,9951 = 0,61 \text{ 1/с.}$$

Визначимо швидкість точки K , яка перебуває по середині шатуна AB (рис. 5.21). Для точки K можна записати формулу (5.35) у вигляді

$$\vec{V}_K = \vec{V}_A + \vec{V}_{KA},$$

де вектор \vec{V}_{KA} перпендикулярний до AB .

Величина швидкості \vec{V}_{KA} дорівнює

$$V_{KA} = \omega_{AB} AK = \frac{0,61}{\cos 5^{\circ}42' \cdot 2} = \frac{0,61}{0,9951 \cdot 2} = 0,305 \text{ м/с.}$$

Будуємо в точці K вектори \vec{V}_A і \vec{V}_{KA} (рис. 5.21). Вектор \vec{V}_K – це діагональ паралелограма, що побудований на векторах \vec{V}_A і \vec{V}_{KA} .

Тоді, на підставі теореми косинусів, величина швидкості \vec{V}_K дорівнює

$$V_K = \sqrt{V_A^2 + V_{KA}^2 + 2V_A V_{KA} \cos(\widehat{\vec{V}_A, \vec{V}_{KA}})} =$$

$$= \sqrt{1^2 + 0,305^2 + 2 \cdot 0,305 \cdot 0,0993} = 1,059 \text{ м/с,}$$

де кут $(\widehat{\vec{V}_A, \vec{V}_{KA}}) = 90^{\circ} - \varphi = 90^{\circ} - 5^{\circ}42' = 84^{\circ}18'$.

Визначаємо кутову швидкість розпірної плити

$$\omega_{O,B} = \frac{V_B}{O_1B} = \frac{1,225}{0,4} = 3,06 \text{ 1/с.}$$

Для визначення швидкості точки C записуємо формулу (5.35) у вигляді

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}$$

Вектор \vec{V}_{CB} перпендикулярний до CB , а вектор \vec{V}_C перпендикулярний до O_2C . Кут між вектором \vec{V}_B і \vec{V}_C дорівнює 30° (рис. 5.21).

Побудуємо трикутник швидкостей в точці C (рис. 5.21). З трикутника маємо

$$V_{CB} = V_B \sin 30^\circ = 1,225 \cdot 0,5 = 0,6125 \text{ м/с};$$

$$V_C = V_B \cos 30^\circ = 1,225 \cdot 0,866 = 1,059 \text{ м/с}.$$

Визначаємо кутові швидкості розпірної плити BC і рухомої щоки O_2C

$$\omega_{BC} = \frac{V_{CB}}{CB} = \frac{0,6125}{0,4} = 1,53 \text{ 1/с};$$

$$\omega_{O_2C} = \frac{V_C}{O_2C} = \frac{1,059}{0,6} = 1,765 \text{ 1/с}.$$

Спосіб 2. Щоб визначити швидкість точки B , застосовуємо теорему про проєкції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки.

Проєціюємо вектори швидкостей точок A і B на пряму AB (напрямок векторів \vec{V}_A і \vec{V}_B визначений при розв'язанні задачі першим способом) рис. 5.22.

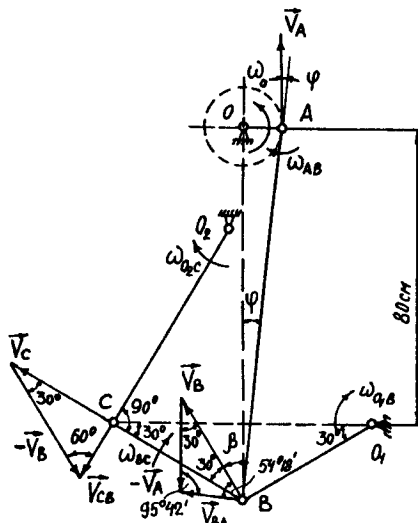


Рис. 5.22

$$V_A \cos \varphi = V_B \cos \beta.$$

Звідси маємо

$$V_B = \frac{V_A \cos \varphi}{\cos \beta} = \frac{1 \cdot 0,9951}{0,8421} = 1,225 \text{ м/с},$$

де $\varphi = 5^\circ 42'$; $\beta = 30^\circ + 5^\circ 42' = 35^\circ 42'$; $V_A = 1 \text{ м/с}$ (див. спосіб 1).

Щоб визначити кутову швидкість шатуна AB , необхідно визначити швидкість \vec{V}_{BA} , вектор \vec{V}_{BA} перпендикулярний до AB .

Записуємо формулу (5.35) для точки B у вигляді

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}.$$

Звідси маємо

$$\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B + (-\vec{V}_A).$$

Отже, щоб визначити \vec{V}_{BA} необхідно побудувати трикутник швидкостей в точці B (рис. 5.22). З трикутника швидкостей визначаємо величину \vec{V}_{BA} , тобто

$$\frac{V_{BA}}{\sin 30^\circ} = \frac{V_B}{\sin 95^\circ 42'},$$

звідси

$$V_{BA} = \frac{V_B \sin 30^\circ}{\sin 95^\circ 42'} = \frac{1,225 \cdot 0,5}{0,8121} = 0,615 \text{ м/с};$$

де кути між \vec{V}_B і $(-\vec{V}_A)$, $(-\vec{V}_A)$ і \vec{V}_{BA} визначені при розв'язанні задачі першим способом.

Тепер визначаємо кутову швидкість шатуна AB , тобто

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{V_{BA} \cos \varphi}{OB} = 0,615 \cos 5^\circ 42' = 0,615 \cdot 0,9951 = 0,61 \text{ 1/с}.$$

Щоб визначити швидкість точки C , застосовуємо теорему про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що з'єднує ці точки.

Проекціюємо вектори швидкостей точок B і C на пряму CB (рис. 5.22)

$$V_C = V_B \cos 30^\circ = 1,225 \cdot 0,866 = 1,059 \text{ м/с},$$

де кут між CB і \vec{V}_B визначений при розв'язанні задачі першим способом.

Щоб визначити кутову швидкість розпірної плити BC , необхідно визначити швидкість \vec{V}_{CB} . Вектор \vec{V}_{CB} перпендикулярний до BC .

Застосуємо формулу (5.35) для точки C у вигляді

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}.$$

Звідси маємо

$$\vec{V}_{CB} = \vec{V}_C + (-\vec{V}_B).$$

Будуємо трикутник швидкостей в точці C (рис. 5.22). З трикутника швидкостей визначаємо величину \vec{V}_{CB} , тобто

$$V_{CB} = V_B \sin 30^\circ = 1,225 \cdot 0,5 = 0,6125 \text{ м/с}.$$

Визначаємо кутові швидкості розпірних плит BC і O_1B , а також рухомої щоки O_2C дорівнюють:

$$\omega_{BC} = \frac{V_{BC}}{BC} = \frac{0,615}{0,4} = 1,53 \text{ 1/с};$$

$$\omega_{O_2C} = \frac{V_C}{O_2C} = \frac{1,059}{0,6} = 1,765 \text{ 1/с};$$

$$\omega_{O_1B} = \frac{V_B}{O_1B} = \frac{1,225}{0,4} = 3,06 \text{ 1/с}.$$

Спосіб 3. Для визначення швидкостей точок B , K і C і кутових швидкостей шатуна, розпірних плит та рухомої щоки побудуємо миттєвий центр швидкостей (МЦШ) для шатуна AB і розпірної плити BC (рис. 5.23). МЦШ шатуна AB перебуває в точці перетину перпендикулярів до векторів швидкостей в точках A та B – точка P_1 . МЦШ розпірної плити BC перебуває в точці перетину перпендикулярів до векторів швидкостей в точках B та C – точка P_2 (рис. 5.23).

Зауважимо, що вектори \vec{V}_A, \vec{V}_B і \vec{V}_C відповідно перпендикулярні до прямих OA, O_1B та O_2C , так як точка A обертається разом з OA навколо точки O , а точки B і C гойдаються навколо точок O_1 і O_2 (рис. 5.23).

Побудувавши миттєвий центр швидкостей P_1 , можна записати

$$\frac{V_A}{AP_1} = \frac{V_B}{BP_1} = \omega_{AB}.$$

Визначаємо миттєві радіуси AP_1 і BP_1 . В трикутнику $\triangle OBP_1$ кут $\angle OP_1B$ дорівнює 30° . Тоді

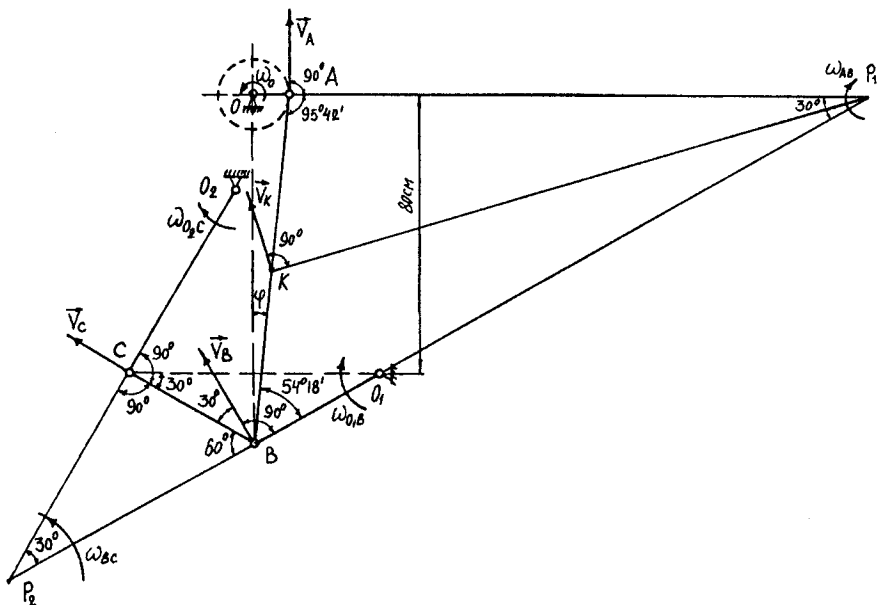


Рис. 5.23

$$BP_1 = 2OB = 2(l + 0,5O_1B) = 2(0,8 + 0,2) = 2 \text{ м};$$

$$AP_1 = OP_1 - OA = BP_1 \cos 30^\circ - OA = 2 \cdot 0,866 - 0,1 = 1,631 \text{ м}.$$

Отже, величина вектора швидкості точки B дорівнює

$$V_B = \frac{V_A BP_1}{AP_1} = \frac{1 \cdot 2}{1,631} = 1,225 \text{ м/с}.$$

Кутова швидкість шатуну AB дорівнює

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{V_B}{BP_1} = \frac{1}{1,631} = 0,61 \text{ 1/с}.$$

Щоб визначити швидкість точки K з'єднуємо МЦШ – точку P_1 з точкою K і поставимо до KP_1 перпендикуляр \vec{V}_K . Напрямок \vec{V}_K повинний бути таким, щоб відповідати обертальній швидкості точки K навколо P_1 (рис. 5.23). Так як

$$\frac{V_A}{AP_1} = \frac{V_K}{KP_1},$$

то

$$V_K = \frac{V_A KP_1}{AP_1}.$$

Знайдемо миттєвий радіус KP_1 . З трикутника ΔAKP_1 на підставі теореми косинусів маємо

$$\begin{aligned} KP_1 &= \sqrt{AP_1^2 + AK^2 - 2AP_1 AK \cos 95^\circ 42'} = \\ &= \sqrt{1,631^2 + 0,502^2 - 2 \cdot 1,631 \cdot 0,502 \cdot 0,0993} = 1,73 \text{ м}, \end{aligned}$$

де $AK = 0,502$ м (див. спосіб 1).

Тоді швидкість точки K дорівнює

$$V_K = \frac{V_A KP_1}{AP_1} = \frac{1 \cdot 1,73}{1,631} = 1,059 \text{ м/с}.$$

Побудувавши миттєвий центр швидкостей P_2 можна записати

$$\frac{V_B}{BP_2} = \frac{V_C}{CP_2} \omega_{BC}.$$

З трикутника ΔBCP_2 , де кут $\angle BP_2C = 30^\circ$, визначаємо миттєві радіуси BP_2 і CP_2

$$BP_2 = \frac{CB}{\sin 30^\circ} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8 \text{ м};$$

$$CP_2 = \frac{CB}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{0,4}{0,5774} = 0,693 \text{ м}.$$

Отже, величина вектора швидкості точки C дорівнює

$$V_C = \frac{V_B CP_2}{BP_2} = \frac{1,225 \cdot 0,693}{0,8} = 1,059 \text{ м/с}.$$

Кутові швидкості розпірних плит BC і O_1B , а також рухомої щоби O_2C дорівнюють:

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP_2} = \frac{1,225}{0,8} = 1,53 \text{ 1/с};$$

$$\omega_{O_1B} = \frac{V_B}{O_1B} = \frac{1,225}{0,4} = 3,06 \text{ 1/с}.$$

$$\omega_{O_2C} = \frac{V_C}{O_2C} = \frac{1,059}{0,6} = 1,765 \text{ 1/с}.$$

5.3. Визначення прискорення точок твердого тіла при плоскопаралельному русі. Вказівки до завдання К3.

Щоб визначити прискорення довільної точки плоскої фігури диференціюємо рівність (5.35) по часу

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt},$$

де $\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \vec{W}_B$, $\frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{W}_A$ – відповідно прискорення точок B і A , $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{V}_{BA}$,

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\epsilon}$ – вектор кутового прискорення. Вектори $\vec{\epsilon}$ і $\vec{\omega}$ перпендикулярні до

площини плоскої фігури.

Таким чином, прискорення довільної точки плоскої фігури визначається як геометрична сума трьох прискорень, а саме: прискорення полюса, обертального і доосьового прискорення обертального руху точки навколо полюса (рис. 5.24)

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{(об)} + \vec{W}_{BA}^{(доос)}, \quad (5.38)$$

де $\vec{W}_{BA}^{(об)} = \vec{\epsilon} \times \vec{\rho}$, $\vec{W}_{BA}^{(доос)} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times \vec{V}_{BA}$.

Модулі прискорення $\vec{W}_{BA}^{(об)}$ і $\vec{W}_{BA}^{(доос)}$ визначаються за формулами:

$$\vec{W}_{BA}^{(об)} = \epsilon \rho = \epsilon AB, \quad (5.38, a)$$

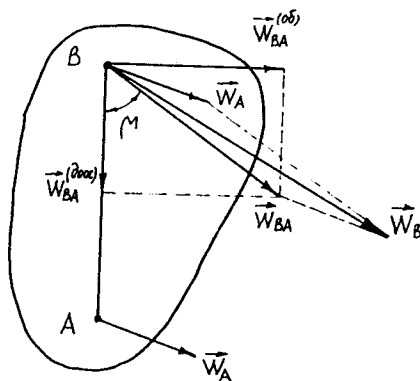


Рис. 5.24

$$\vec{W}_{BA}^{(дооо)} = \omega^2 \rho = \omega^2 AB. \quad (5.38, б)$$

Зауважимо, що геометрична сума прискорення $\vec{W}_{BA}^{(об)}$ і $\vec{W}_{BA}^{(дооо)}$ визначає прискорення обертального руху навколо полюса

$$\vec{W}_{BA} = \vec{W}_{BA}^{(об)} + \vec{W}_{BA}^{(дооо)}. \quad (5.39)$$

Модуль прискорення обертального руху навколо полюса дорівнює

$$W_{BA} = \sqrt{\left(W_{BA}^{(об)}\right)^2 + \left(W_{BA}^{(дооо)}\right)^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (5.40)$$

Кут, який утворює вектор \vec{W}_{BA} з доосьовим прискоренням, визначається за формулою:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (5.41)$$

Зауважимо, що при розв'язанні задач за формулою (5.38), по-перше необхідно визначити кутову швидкість тіла, його кутове прискорення і вибрати полюс. За полюс необхідно вибирати таку точку, прискорення якої легко визначається з умови задачі.

Введемо поняття миттєвого центра прискорень.

Миттєвим центром прискорень називається точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Якщо за полюс взяти миттєвий центр прискорень, то прискорення довільної точки B тіла дорівнює геометричній сумі двох прискорень – обертального і доосьового навколо миттєвого центра прискорень

$$\vec{W}_B = \vec{W}_{BQ}^{(об)} + \vec{W}_{BQ}^{(дооо)} = \vec{W}_{BQ}, \quad (5.42)$$

де Q – миттєвий центр прискорень.

Модуль вектора прискорення дорівнює

$$W_B = W_{BQ} = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (5.43)$$

Напрямок вектора $\vec{W}_B = \vec{W}_{BQ}$ визначається за формулою (5.41). При цьому кут μ при прискореному русі ($\varepsilon > 0$) відлічується у напрямі обертання плоскої фігури, а при сповільненому ($\varepsilon < 0$) – у протилежному напрямі.

Положення миттєвого центра прискорень визначається (рис. 5.25) за формулою:

$$BQ = \frac{W_B}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{W_{BQ}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (5.44)$$

Кут, що утворює пряма BQ і прискорення $\vec{W}_B = \vec{W}_{BQ}$ (рис. 5.25), визначається за формулою (5.41). Якщо кутова швидкість фігури стала, тобто $\omega = const$, то $\varepsilon = 0$ і $\mu = 0$. Тоді напрям вектора $\vec{W}_B = \vec{W}_{BQ}$ збігається з напрямом прямої BQ .

Якщо в даний момент $\omega = 0$, то $\mu = \frac{\pi}{2}$ і вектор \vec{W}_{BQ} перпендикулярний до прямої BQ .

Положення миттєвого центра прискорень можна визначити, знаючи прискорення двох точок плоскої фігури, наприклад, A і B (рис. 5.26). Оскільки

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA},$$

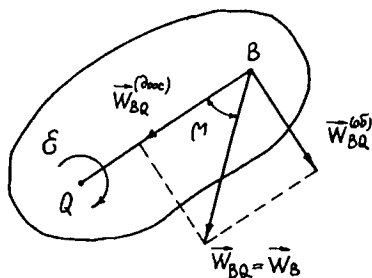


Рис. 5.25

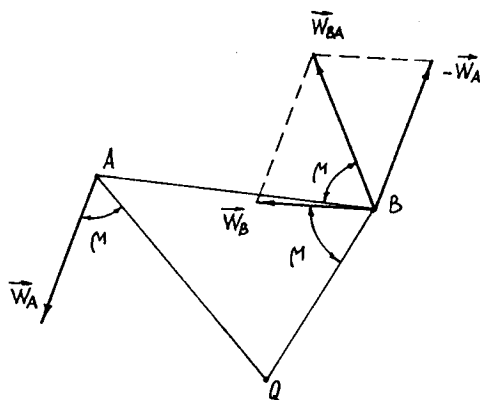


Рис. 5.26

то

$$\vec{W}_{BA} = \vec{W}_B - \vec{W}_A = \vec{W}_B + (-\vec{W}_A).$$

Побудуємо в точці B вектор $(-\vec{W}_A)$. Вимірюючи кут μ , утворений векторами \vec{W}_{BA} і прямою BA , проведемо прямі AQ і BQ під кутом μ до векторів \vec{W}_A і \vec{W}_B . Точка Q перетину прямих AQ і BQ буде миттєвим центром прискорень.

Знаючи положення миттєвого центра прискорень Q і прискорення довільної точки A , знайдемо прискорення другої точки B з відношення

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{AQ}{BQ}. \quad (5.45)$$

Приклад 5.3. Користуючись умовою попередньої задачі (див. приклад 5.2) визначити прискорення точок A , B , C і K і кутові прискорення шатуна AB , розпірних плит BC та O_1B і рухомої шочи O_2C механізму щокрової дробарки з верхнім підвісом шочи (рис. 5.20).

Розв'язання. Кривошип OA обертається навколо осі, що проходить через точку O (рис. 5.27) зі сталою кутовою швидкістю $\omega_0 = 10$ 1/с, тому прискорення точки A дорівнює (рис. 5.27)

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{(\text{доос})},$$

де $W_A^{(\text{доос})}$ – доосьове прискорення точки A .

Величина прискорення \vec{W}_A дорівнює

$$W_A = W_A^{(\text{доос})} = \omega_0^2 \cdot OA = 10^2 \cdot 0,1 = 10 \text{ м/с}.$$

На підставі формули (5.38) прискорення точки B дорівнює

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{(\text{об})} + \vec{W}_{BA}^{(\text{доос})}$$

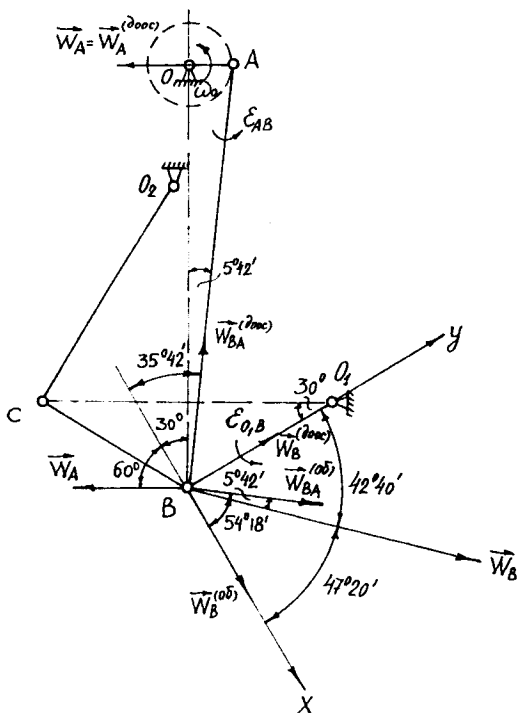


Рис. 5.27

Напрямок векторів, які перебувають у правій частині цього рівняння відомий, тобто: вектор $\vec{W}_A^{(об)}$ перпендикулярний до OB і має напрям від точки B на ліво; вектор $\vec{W}_{BA}^{(об)}$ перпендикулярний до AB , прийемо напрям цього вектора таким, як це подано на рис. 5.27, тобто припустимо, що точка B обертається навколо точки A з обертальним прискоренням проти руху стрілки годинника; вектор $\vec{W}_{BA}^{(дооc)}$ має напрям вздовж прямої AB від B до A (рис. 5.27).

Для визначення напрямку вектора прискорення \vec{W}_B , приймаємо до уваги, що точка B належить також і до розпірної плити O_1B , яка гойдається навколо точки O_1 . Тоді

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^{(об)} + \vec{W}_B^{(дооc)}.$$

Вектор $\vec{W}_B^{(дооc)}$ напрямлений вздовж O_1B від B до O_1 . Вектор $\vec{W}_B^{(об)}$ перпендикулярний до O_1B . Прийемо напрям цього вектора таким, як це подано на рис. 5.27, тобто припустимо, що точка B обертається навколо точки O_1 з обертальним прискоренням проти руху стрілки годинника.

Тоді остаточно маємо

$$\vec{W}_B^{(об)} + \vec{W}_B^{(дооc)} = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{(об)} + \vec{W}_{BA}^{(дооc)}. \quad (5.46)$$

Визначаємо величину прискорень $\vec{W}_B^{(дооc)}$ і $\vec{W}_{BA}^{(дооc)}$, тобто

$$W_B^{(дооc)} = \omega_{O_1B}^2 O_1B = 3,06^2 \cdot 0,4 = 3,745 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{BA}^{(дооc)} = \omega_{AB}^2 AB = \frac{0,61^2}{\cos 5^\circ 42'} = \frac{0,61^2}{0,9951} = 0,374 \text{ м/с}^2,$$

де ω_{O_1B} і ω_{AB} визначені при розв'язанні приклада 5.2.

Для визначення невідомих прискорень $\vec{W}_B^{(об)}$ і $\vec{W}_{BA}^{(об)}$ необхідно рівність (5.46) спроекціювати на довільні взаємоперпендикулярні координатні осі. Побудуємо систему координат Bxy з початком в точці B так, як це показано на рис. 5.27 і спроекціюємо всі вектори рівності (5.46) на ці осі (кути між відповідними векторами прискорень і осями x і y подані на рис. 5.27)

$$W_{Bx} = W_B^{(об)} = -W_A \cos 60^\circ + W_{BA}^{(об)} \cos 54^\circ 18' - W_{BA}^{(дооc)} \cos 35^\circ 42';$$

$$W_{By} = W_B^{(дооc)} = -W_A \sin 60^\circ + W_{BA}^{(об)} \sin 54^\circ 18' + W_{BA}^{(дооc)} \sin 35^\circ 42'.$$

З другого рівняння знаходимо

$$W_{BA}^{(o\bar{o})} = \frac{W_B^{(дооc)} + W_A \sin 60^\circ - W_{BA}^{(дооc)} \sin 35^\circ 42'}{\sin 54^\circ 18'} =$$

$$= \frac{3,745 + 10 \cdot 0,866 - 0,374 \cdot 0,5835}{0,8121} = 15 \text{ м/с}^2.$$

Зауважимо, що так як $W_{BA}^{(o\bar{o})} > 0$, то прийнятий напрям вектора $\vec{W}_{BA}^{(o\bar{o})}$ (рис. 5.27) є дійсним його напрямом. При $\vec{W}_{BA}^{(o\bar{o})} < 0$ напрям вектора $\vec{W}_{BA}^{(o\bar{o})}$ слід змінити на протилежний.

З першого рівняння знаходимо

$$W_B^{(o\bar{o})} = -10 \cdot 0,5 + 15 \cdot 0,5835 - 0,374 \cdot 0,8121 = 3,45 \text{ м/с}^2.$$

Так як $W_B^{(o\bar{o})} > 0$, то вектор $\vec{W}_B^{(o\bar{o})}$ має напрям такий, як це показано на рис. 5.27.

Величину вектора \vec{W}_B визначаємо за формулою:

$$W_B = \sqrt{(W_{Bx})^2 + (W_{By})^2} = \sqrt{(W_B^{(o\bar{o})})^2 + (W_B^{(дооc)})^2} = \sqrt{3,45^2 + 3,745^2} = 5,09 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора \vec{W}_B визначаємо за напрямними косинусами, тобто

$$\cos(\widehat{\vec{W}_B, x}) = \frac{W_{Bx}}{W} = \frac{W_B^{(o\bar{o})}}{W} = \frac{3,45}{5,09} = 0,6778;$$

$$\arccos 0,6778 = 47^\circ 20';$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}_B, y}) = \frac{W_{By}}{W} = \frac{W_B^{(дооc)}}{W} = \frac{3,745}{5,09} = 0,7358;$$

$$\arccos 0,7358 = 42^\circ 40'.$$

Вектор \vec{W}_B показаний на рис. 5.27.

Визначаємо кутові прискорення ланок AB і O_1B механізму:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^{(o\bar{o})}}{AB} = \frac{15,0}{1,005} = 14,92 \text{ 1/с}^2;$$

$$\varepsilon_{O_1B} = \frac{W_B^{(o\bar{o})}}{O_1B} = \frac{3,45}{0,4} = 8,625 \text{ 1/с}^2,$$

де $AB = 1,004$ м (див. приклад 5.2).

Той же результат можна отримати, якщо побудувати багатокутники прискорень за формулами:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{(об)} + \vec{W}_{BA}^{(доос)};$$

$$W_B = \vec{W}_B^{(об)} + \vec{W}_B^{(доос)}.$$

Побудову трикутників прискорень починаємо з довільної точки O (рис. 5.28). Від точки O відкладаємо у деякому масштабі вектор \vec{W}_A . Від кінця вектора \vec{W}_A відкладаємо (у масштабі) вектор $\vec{W}_{BA}^{(доос)}$. Далі, через кінець вектора $\vec{W}_{BA}^{(доос)}$ проведемо пряму перпендикулярну до шатуну AB (рис. 5.28). Таким чином, ми побудували ліву частину рівності

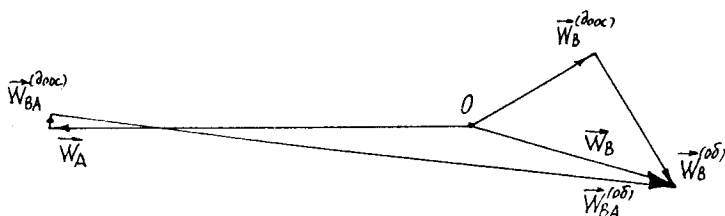


Рис. 5.28

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{(об)} + \vec{W}_{BA}^{(доос)}.$$

Аналогічним чином будуюмо праву частину рівності

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^{(об)} + \vec{W}_B^{(доос)},$$

тобто від точки O відкладаємо (у масштабі) вектор $\vec{W}_B^{(доос)}$ (рис. 5.28). Через кінець вектора $\vec{W}_B^{(доос)}$ проводимо пряму до її перетину з прямою, що проходить через кінець вектора $\vec{W}_{BA}^{(доос)}$, перпендикулярно шатуну AB . Отриману таким чином точку з'єднуємо з точкою O . Вектор, що перебуває на цій прямій і, який має напрям від точки O до точки A і буде шуканим прискоренням точки B , тобто \vec{W}_B .

Заміряючи вектори $\vec{W}_{BA}^{(об)}$, \vec{W}_B і $\vec{W}_B^{(об)}$ на рис. 5.28 отримуємо, з врахуванням масштабу, їх чисельну величину.

Визначимо прискорення точки K . Записуємо для точки K рівність (5.38)

$$\vec{W}_K = \vec{W}_A + \vec{W}_{KA}^{(об)} + \vec{W}_{KA}^{(доос)}.$$

Показуємо вектори \vec{W}_A , $\vec{W}_{KA}^{(об)}$ і $\vec{W}_{KA}^{(доос)}$ на рис. 5.29. Побудуємо взаємперпендикулярні осі Kx , y з початком в точці K (рис. 5.29) і спроектуємо вектори \vec{W}_A , $\vec{W}_{KA}^{(об)}$ і $\vec{W}_{KA}^{(доос)}$ на ці осі, отримуємо

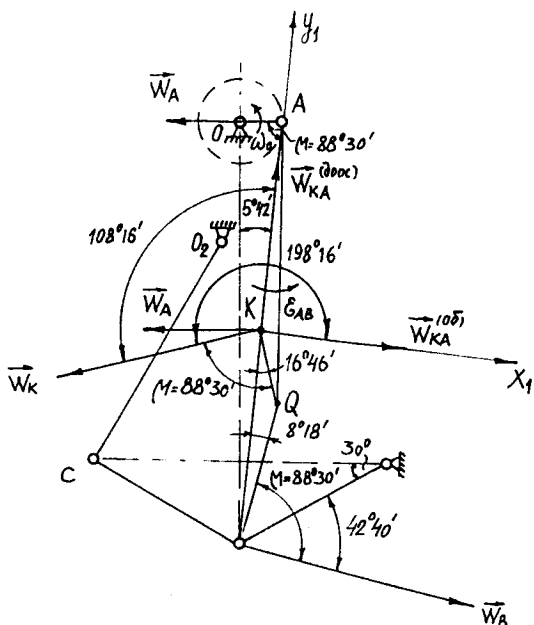


Рис. 5.29

$$W_{Kx_1} = -W_A \cos 5^\circ 42' + W_{KA}^{(ob)};$$

$$W_{Ky_1} = -W_A \sin 5^\circ 42' + W_{KA}^{(doo)}.$$

Визначаємо величину $\vec{W}_{KA}^{(ob)}$ і $\vec{W}_{KA}^{(doo)}$, тобто

$$W_{KA}^{(ob)} = \varepsilon_{AB} \cdot AK = 14,92 \cdot \frac{1}{\cos 5^\circ 42' \times 2} = \frac{14,92}{0,9951 \times 2} = 7,5 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{KA}^{(doo)} = \omega_{AB}^2 \cdot AK = 0,61^2 \cdot \frac{1}{\cos 5^\circ 42' \times 2} = \frac{0,61^2}{0,9951 \times 2} = 0,187 \text{ м/с}^2.$$

Тоді з рівностей отримуємо

$$W_{Kx_1} = -W_A \cos 5^\circ 42' + W_{KA}^{(ob)} = -10 \cdot 0,995 + 7,5 = -2,45 \text{ м/с}^2;$$

$$W_{Ky_1} = -W_A \sin 5^\circ 42' + W_{KA}^{(doo)} = -10 \cdot 0,0993 + 0,187 = -0,806 \text{ м/с}^2.$$

Величина прискорення \vec{W}_K дорівнює

$$W_K = \sqrt{(W_{Kx_1})^2 + (W_{Ky_1})^2} = \sqrt{(-2,45)^2 + (-0,806)^2} = 2,58 \text{ м/с}^2.$$

Напрямні косинуси вектора \vec{W}_K

$$\cos(\widehat{\vec{W}_K, x_1}) = \frac{W_{Kx_1}}{W_K} = -\frac{2,45}{2,58} = -0,9496;$$

$$\arccos(-0,9496) = 198^\circ 16';$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}_K, y_1}) = \frac{W_{Ky_1}}{W_K} = -\frac{0,806}{2,58} = -0,3124;$$

$$\arccos(-0,3124) = 108^\circ 16'.$$

Положення вектора \vec{W}_K показано на рис. 5.29.

Величину і напрям вектора \vec{W}_K можна визначити за допомогою миттєвого центра прискорень. За формулою (5.41) визначаємо кут між вектором і напрямом на миттєвий центр прискорень

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon_{AB}|}{\omega_{AB}^2} = \frac{14,92}{0,61^2} = 40,1;$$

$$\operatorname{arctg} 40,1 = 88^\circ 30'.$$

за формулою (5.44) визначаємо відстань між точкою B і миттєвим центром прискорень

$$BQ = \frac{W_B}{\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}} = \frac{5,09}{\sqrt{14,92^2 + 0,61^2}} = 0,34 \text{ м.}$$

Під кутом μ (кут μ відкладається за напрямом ε_{AB}) до вектора \vec{W}_B через точку B проводимо пряму BQ . З'єднуємо точку Q і точку K (рис. 5.29). Визначаємо кути трикутника ΔKQB (див. рис. 5.29).

Застосовуючи теорему синусів, знайдемо відстань KQ , тобто

$$\frac{BQ}{\sin 16^\circ 46'} = \frac{KQ}{\sin 8^\circ 18'};$$

$$KQ = \frac{BQ \sin 8^\circ 18'}{\sin 16^\circ 46'} = \frac{0,34 \cdot 0,1444}{0,2868} = 0,171 \text{ м.}$$

На підставі формули (5.45), маємо

$$\frac{W_B}{W_K} = \frac{BQ}{KQ}$$

Звідси

$$W_K = \frac{W_B KQ}{BQ} = \frac{5,09 \cdot 0,171}{0,34} = 2,56 \text{ м/с}^2$$

Похибка визначення величини W_K за допомогою миттєвого центра прискорень відносно визначення W_K методом проєкцій, у нашому випадку, дорівнює

$$\frac{2,58 - 2,56}{2,58} \cdot 100\% = 0,8\%$$

Многокутник прискорень для визначення прискорення точки K показаний на рис. 5.30.



Рис. 5.30

Переходимо до визначення прискорення точки C . Для точки C формула (5.38) приймає вигляд

$$\vec{W}_C = \vec{W}_B + \vec{W}_{CB}^{(об)} + \vec{W}_C^{(доос)}$$

Приймаємо до уваги, що точка C належить також і рухомій щогі O_2C , яка гойдається навколо точки O_2 . Тоді

$$\vec{W}_C = \vec{W}_C^{(об)} + \vec{W}_C^{(доос)}$$

Отже, формула (5.38) для точки C остаточно приймає вигляд

$$\vec{W}_C^{(об)} + \vec{W}_C^{(доос)} = \vec{W}_B + \vec{W}_{CB}^{(об)} + \vec{W}_{CB}^{(доос)} \quad (5.47)$$

Визначаємо величину відомих прискорень $\vec{W}_{CB}^{(доос)}$ і $\vec{W}_C^{(доос)}$, тобто

$$W_{CB}^{(доос)} = \omega_{BC}^2 CB = 1,53^2 \cdot 0,4 = 0,936 \text{ м/с}^2;$$

$$W_C^{(доос)} = \omega_{O_2C}^2 O_2C = 1,765^2 \cdot 0,6 = 1,869 \text{ м/с}^2,$$

де ω_{BC} і ω_{O_2C} визначені при розв'язанні приклада 5.2.

Для визначення невідомих прискорень $\vec{W}_C^{(об)}$ і $\vec{W}_{CB}^{(об)}$ необхідно рівність (5.42) спроекціювати на довільні взаємоперпендикулярні координатні осі

Cx_2y_2 . Побудуємо систему координат Cx_2y_2 з початком в точці C так, як це показано на рис. 5.31 і спроекціюємо всі вектори рівності (5.47) на осі Cx_2y_2 (кути між відповідними векторами прискорень і осями x_2 і y_2 подані на рис. 5.31)

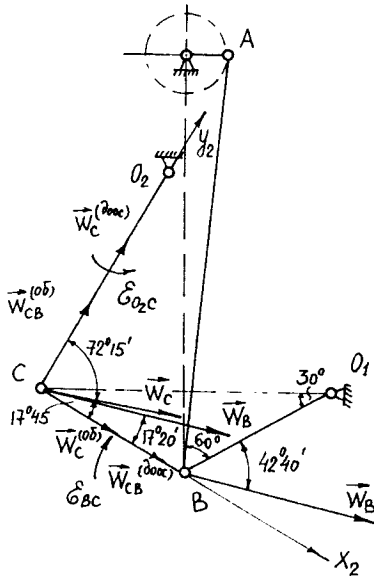


Рис. 5.31

$$W_{Cx_2} = W_C^{(об)} = W_B \cos 17^\circ 20' + W_{CB}^{(дооц)};$$

$$W_{Cy_2} = W_C^{(дооц)} = W_B \sin 17^\circ 20' + W_{CB}^{(об)}.$$

З першого рівняння визначаємо $W_C^{(об)}$, тобто

$$W_C^{(об)} = W_B \cos 17^\circ 20' + W_{CB}^{(дооц)} = 5,09 \cdot 0,9546 + 0,936 = 5,8 \text{ м/с}^2.$$

З другого рівняння визначаємо $W_{CB}^{(об)}$, тобто

$$W_{CB}^{(об)} = W_C^{(дооц)} - W_B \sin 17^\circ 20' = 1,869 - 5,09 \cdot 0,298 = 0,352 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо величину прискорення точки C за формулою:

$$\begin{aligned} W_C &= \sqrt{(W_{Cx_2})^2 + (W_{Cy_2})^2} = \sqrt{(W_C^{(об)})^2 + (W_C^{(дооц)})^2} = \\ &= \sqrt{5,8^2 + 1,869^2} = 6,09 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Визначаємо напрямні косинуси вектора \vec{W}_C , тобто

$$\cos(\widehat{\vec{W}_C, x_2}) = \frac{W_{Cx_2}}{W_C} = \frac{5,8}{6,09} = 0,9524;$$

$$\arccos 0,9524 = 17^\circ 45';$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}_C, y_2}) = \frac{W_{Cy_2}}{W_C} = \frac{1,869}{6,09} = 0,3069;$$

$$\arccos 0,3069 = 72^\circ 15'.$$

Вектор \vec{W}_C показаний на рис. 5.31.

Визначаємо кутові прискорення ланок BC і O_2C механізму

$$\varepsilon_{BC} = \frac{W_{CB}^{(об)}}{BC} = \frac{0,352}{0,4} = 0,88 \text{ 1/c}^2;$$

$$\varepsilon_{O_2C} = \frac{W_C^{(об)}}{O_2C} = \frac{5,8}{0,6} = 9,67 \text{ 1/c}^2.$$

Той же результат можна отримати, якщо побудувати багатокутники прискорень за формулами:

$$\vec{W}_C = \vec{W}_B + \vec{W}_{CB}^{(об)} + \vec{W}_{CB}^{(дооc)};$$

$$\vec{W}_C = \vec{W}_C^{(об)} + \vec{W}_C^{(дооc)}.$$

Многокутник прискорень для визначення прискорення точки C показаний на рис. 5.32 (порядок побудови многокутника, описаний при визначенні прискорення точки B).

Заміряючи вектори $\vec{W}_{CB}^{(об)}$, \vec{W}_C і $\vec{W}_C^{(об)}$ на рис. 5.32 отримуємо (з врахуванням масштабу) їх чисельну величину.

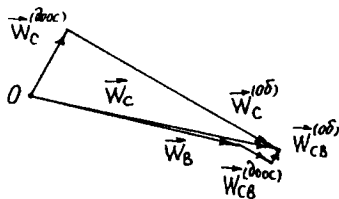


Рис. 5.32

5.4. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої точки (сферичний рух). Кути Ейлера. Швидкість та прискорення точок тіла. Вказівки до завдання К4.

Обертальним рухом тіла навколо нерухомої точки (сферичним рухом) називається такий рух, при якому одна точка тіла за весь час руху залишається нерухомою.

Найпростішим прикладом обертального руху тіла навколо нерухомої точки є дзига, вістря якої, упираючись на нерухому площину, протягом всього часу руху залишається нерухомим.

Положення тіла, що здійснює обертальний рух навколо нерухомої точки, відносно даної нерухомої системи відліку визначається за допомогою кутів Ейлера.

Щоб визначити кути Ейлера, введемо дві системи координат (рис.5.33): нерухому $Oxyz$ і рухому $Ox_1y_1z_1$, незмінно зв'язану з тілом, початок якої збігається з нерухомою точкою O . Координатна площина x_1Oy_1 перетинається з нерухомою площиною xOy вздовж прямої OK . Пряма OK носить назву лінії вузлів. Кут, утворений нерухомою віссю Ox з лінією вузлів, називається кутом прецесії і позначається ψ . Кут утворений лінією вузлів OK з рухомою віссю Ox_1 , називається кутом власного обертання і позначається φ . Кут між осями Oz і Oz_1 називається кутом нутації і позначається θ . Усі кути відліковуються проти руху стрілки годинника, якщо дивитися з кінця додатного напрямку осей Oz , Oz_1 , OK відповідно.

Рівняння руху тіла при його обертанні навколо нерухомої точки мають вигляд

$$\psi = \psi(t); \varphi = \varphi(t); \theta = \theta(t). \quad (5.48)$$

Нехай положення тіла визначається кутами ψ , φ і θ . Тоді переміщення тіла за елементарний проміжок часу dt можна уявити як сукупність поворотів на кути $d\psi$, $d\varphi$ і $d\theta$ навколо осей Oz , Oz_1 і OK відповідно. При складанні, ці три повороти дають істинне елементарне переміщення тіла. Розглянемо спочатку результат додавання поворотів навколо осей Oz і Oz_1 (рис. 5.34). При повороті на кут $d\varphi$ навколо осі Oz_1 будь-яка точка тіла, що лежить в площині z_1Oz (усередині кута z_1Oz), буде мати елементарне переміщення і це переміщення буде перпендикулярне до площини z_1Oz . Численно це переміщення буде дорівнювати $h_1d\varphi$, де h_1 – відстань точки від осі Oz_1 . Одночасно при повороті навколо осі Oz та ж сама точка отримує протилежне за напрям переміщення, яке численно

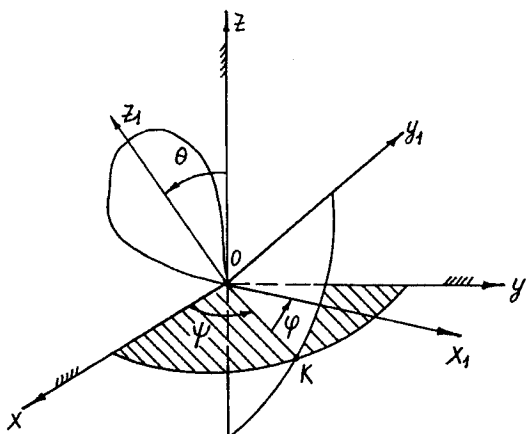


Рис. 5.33

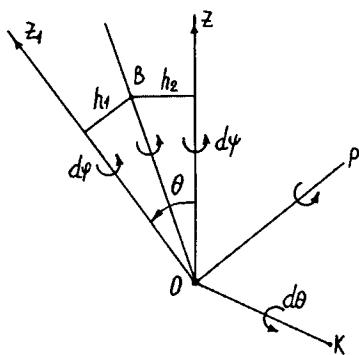


Рис. 5.34

буде дорівнює $h_2 d\psi$. Отже, усередині кута $z_1 Oz$ може бути така точка B , для якої $h_1 d\phi = h_2 d\psi$ і переміщення якої дорівнює нулю (якщо напрям одного з поворотів є протилежний показаному на рис. 5.34 то така точка лежить поза кутом $z_1 Oz$). Звідси, елементарне переміщення тіла яке воно отримує внаслідок поворотів навколо осей Oz_1 і Oz буде таким же, як у тіла, що має дві нерухомі точки O і B , тобто являє собою елементарний поворот навколо осі OB , яка проходить через точку O . Аналогічно прийдемо до висновку, що елементарні повороти навколо осей OB і OK будуть еквівалентні одному елементарному повороту навколо деякої осі OP , яка проходить через точку O (рис. 5.34).

Вісь OP , елементарним поворотом навколо якої, можна перемістити тіло з даного положення в суміжне положення, нескінченно близьке до даного, називається миттєвою віссю обертання.

Таким чином, обертальний рух тіла навколо нерухомої точки складається із серії послідовних елементарних поворотів навколо миттєвих осей обертання, які проходять через цю нерухому точку (рис.5.35).

Кінематичними характеристиками обертального руху тіла навколо нерухомої точки є миттєва кутова швидкість і миттєве кутове прискорення.

Кутова швидкість $\bar{\omega}$ з якою тіло здійснює елементарний поворот навколо миттєвої осі обертання, називається миттєвою кутовою швидкістю, так як вона неперервно змінюється не тільки за величиною, а і за напрямом (рис.5.35).

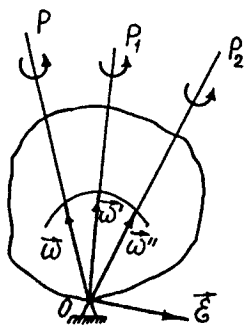


Рис. 5.35

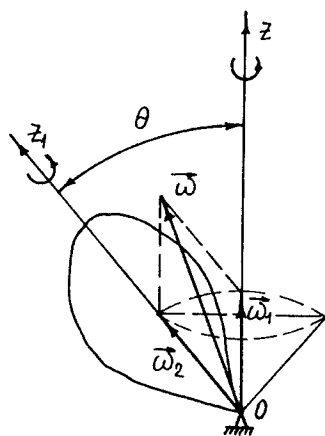


Рис. 5.36

Зауважимо, що при русі тіла, яке має одну нерухому точку, вираз “кутова швидкість” має умовний характер, так як положення тіла визначається не одним, а трьома кутами (рис. 5.33) і, отже, не має ні одного кута, швидкість зміни якого з часом відповідала б введеному вектору $\vec{\omega}$.

Розглянемо рух тіла навколо нерухомої точки O (рис. 5.36), що складається з обертання тіла навколо власної осі симетрії Oz_1 з кутовою швидкістю $\varphi = \omega_2$ і обертання разом з цією віссю навколо нерухомої осі Oz , з кутовою швидкістю $\psi = \omega_1$, описуючи конічну поверхню з кутом θ (рис. 5.36). Якщо при русі тіла кут θ залишається сталим, то рух, що здійснює вісь симетрії Oz_1 , називається регулярною прецесією.

При регулярній прецесії власної осі тіла, що здійснює рух навколо нерухомої точки, абсолютна кутова швидкість тіла (миттєва швидкість) визначається за формулою:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (5.49)$$

Миттєве кутове прискорення $\vec{\epsilon}$ є векторна величина, що дорівнює

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (5.49, a)$$

Якщо вектор $\vec{\omega}$ подати у вигляді

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e},$$

де \vec{e} – одиничний вектор, напрямлений по $\vec{\omega}$.

Тоді з формули (5.49,а) випливає

$$\vec{e} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e} + \omega \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2. \quad (5.50)$$

Складова $\vec{e}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}$ характеризує зміну вектора $\vec{\omega}$ за величиною, а

складова $\vec{e}_2 = \frac{d\vec{e}}{dt}$ – за напрямом.

Отже, на відміну від тіла з нерухомою віссю, де вектор $\vec{\omega}$ і \vec{e} напрямлені вздовж осі обертання, для тіла з одною нерухомою точкою напрями векторів $\vec{\omega}$ і \vec{e} відносно один до одного можуть бути довільними залежно від закону зміни вектора $\vec{\omega}$.

Якщо вектор $\vec{\omega}$ не змінюється з часом за модулем ($\omega = const$), то для визначення \vec{e} можна скористатися формулою:

$$\vec{e} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega}, \quad (5.50, a)$$

де $\vec{\Omega}$ – кутова швидкість обертання вектора $\vec{\omega}$.

Модуль кутового прискорення \vec{e} можна визначити за формулою:

$$\varepsilon = h_{\Omega} \Omega, \quad (5.50, б)$$

де h_{Ω} – найкоротша відстань від кінця вектора $\vec{\omega}$ до осі, по якій напрямлений вектор $\vec{\Omega}$.

Швидкість довільної точки тіла, що здійснює рух навколо нерухомої точки, визначається за формулою:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (5.51)$$

де $\vec{\omega}$ – вектор миттєвої кутової швидкості тіла; \vec{r} – радіус-вектор довільної точки.

Отже, швидкості точок тіла, що має одну нерухома точку, розподіляються так, як би тіло обертається навколо осі, яка співпадає в даний момент часу із миттєвою віссю обертання. Величина швидкості довільної точки тіла в даний момент часу визначається рівністю

$$V = \omega \rho, \quad (5.52)$$

де ρ – найкоротша відстань від точки до миттєвої осі обертання. Вектор швидкості точки має напрям перпендикулярний до площини, що проходить через її радіус-вектор і миттєву вісь обертання (рис.5.37).

Якщо відомі напрями векторів швидкостей двох точок тіла, то положення миттєвої осі обертання можна визначити графічно. З рис. 5.37

впливає, що миттєва вісь обертання перебуває у площині, перпендикулярній до вектора швидкості точки тіла, і проходить через нерухому точку тіла. Таким чином, якщо через точки тіла, вектори швидкостей яких відомі, провести площини перпендикулярні до цих векторів, то лінія перетину цих площин і буде миттєвою віссю обертання.

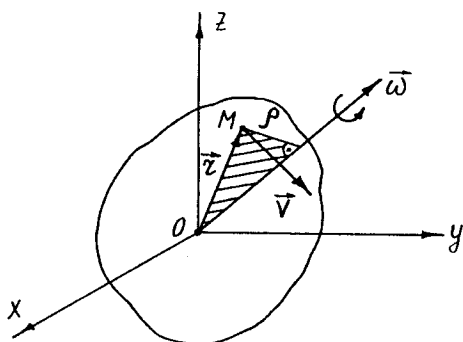


Рис. 5.37

Миттєву вісь обертання можна визначити також, якщо відома одна точка тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. З'єднуючи цю точку з нерухомою точкою тіла, знайдемо миттєву вісь обертання.

Визначимо прискорення довільної точки тіла. Прискорення точки за визначенням дорівнює

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (5.53)$$

Таким чином, прискорення довільної точки тіла \vec{W} складається із двох прискорень:

$$\vec{W}^{(об)} = \vec{\epsilon} \times \vec{r}; \quad (5.54)$$

$$\vec{W}^{(доос)} = \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (5.55)$$

Прискорення $\vec{W}^{(об)}$ називається обертальним прискоренням, а $\vec{W}^{(доос)}$ – доосовим прискоренням. Величина $\vec{W}^{(об)}$ дорівнює

$$\vec{W}^{(об)} = \epsilon r \sin(\widehat{\vec{\epsilon}, \vec{r}}) = \epsilon h, \quad (5.56)$$

де h – найкоротша відстань від точки до вектора $\vec{\epsilon}$.

Обертальне прискорення має напрям перпендикулярний до площини векторів $\vec{\epsilon}$ і \vec{r} в той бік, звідки найкоротший перехід від вектора $\vec{\epsilon}$ до вектора \vec{r} видно проти руху стрілки годинника. Особливо підкреслимо, що через незбіжність векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\epsilon}$ вектор $\vec{W}^{(об)}$ може бути напрямлений відносно вектора швидкості \vec{V} тієї самої точки під будь-яким кутом, залишаючись перпендикулярним до вектора \vec{r} . У цьому суттєва відмінність між обертанням тіла навколо нерухомої осі і рухом тіла, що має одну нерухому точку.

Доосьове прискорення $\vec{W}^{(доос)}$ має напрям по перпендикуляру до площини векторів $\vec{\omega}$ і \vec{V} , тобто по напрямку вектора \vec{d} (рис. 5.38).

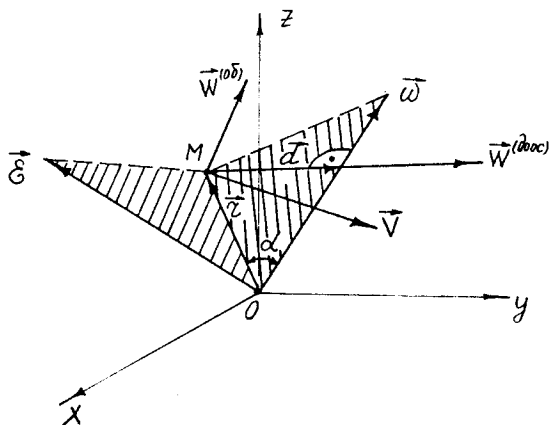


Рис. 5.38

Вектор \vec{d} має початок в точці M і кінець в основі перпендикуляра, що проведений через точку M на миттєву вісь обертання. Модуль вектора $\vec{W}^{(доос)}$ дорівнює

$$\vec{W}^{(доос)} = \omega^2 d, \quad (5.57)$$

так як

$$V = \omega r \sin \alpha = \omega d.$$

Таким чином, прискорення довільної точки твердого тіла дорівнює сумі обертального і доосьового прискорень.

$$\vec{W} = \vec{W}^{(об)} + \vec{W}^{(доос)}. \quad (5.58)$$

При розв'язанні практичних задач по визначенню швидкості та прискорення точок тіла при обертанні навколо нерухомої точки, треба дотримуватися такого порядку:

1) за умовою задачі визначити положення миттєвої осі твердого тіла і визначити величину миттєвої кутової швидкості та показати на рисунку вектор $\vec{\omega}$;

2) визначити миттєве кутове прискорення твердого тіла. Показати на рисунку складові вектора кутового прискорення \vec{E} (у випадку регулярної прецесії складова, що має напрям вздовж миттєвої осі, дорівнює нулю);

3) визначити напрям і величину швидкості і складові прискорення точки твердого тіла; показати ці вектори на рисунку і визначити повне прискорення точки.

Приклад 5.4. Дисківий млин складається із дисків D і E у вигляді чавунних коліс з сталевими ободами, які котяться без ковзання по дну конічної чаші. Кутова швидкість обертання дисків навколо осі O_1O дорівнює $\omega_0 = 1$ 1/с (рис. 5.39). Визначити швидкість і прискорення точок A і B дисків у положенні, що подано на рис. 5.39, якщо $R = 1$ м, а $r = 0,5$ м.

Розв'язання. Розглянемо рух одного з дисків. Диск обертається навколо нерухомої осі OO_1 з кутовою швидкістю ω_0 і одночасно обертається навколо власної осі OA . Під час руху диска точка O осі OO_1 залишається нерухомою. Таким чином, маємо випадок руху твердого тіла навколо нерухомої точки.

Визначимо положення миттєвої осі обертання. Для цього необхідно знати дві точки, швидкість яких у даному положенні диска дорівнює нулю. Такими точками є точка O і точка C (рис. 5.40). Швидкість точки C дорівнює нулю тому, що ця точка є миттєвим центром швидкостей диска при його коченні без ковзання по дну нерухомої конічної чаші (рис. 5.40). Пряма, що проходить через нерухомі точки O і C , буде миттєвою віссю обертання диска – вісь OP (рис. 5.40).

З геометричної точки зору і кінематики руху, обертання диска навколо миттєвої осі обертання OP можна уявити як кочення без ковзання рухомого конуса BOC по нерухомому конусу COC' (рис. 5.40 і рис. 5.41).

Визначимо миттєву кутову швидкість диска. Так як диск обертається

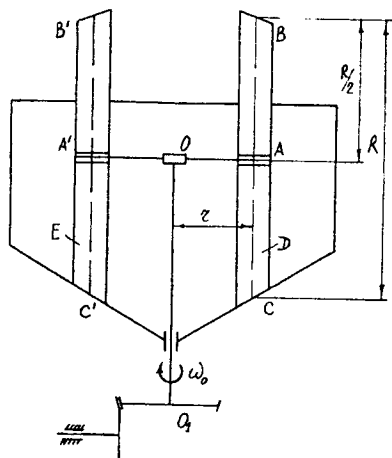


Рис. 5.39

навколо власної осі OA (кутова швидкість $\bar{\omega}_2$ (рис.5.41)) і навколо нерухомої осі OO_1 (кутова швидкість $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_0$ рис. 5.41) і при цьому кут між осями OA і OO_1 (кут θ) не змінюється з часом, то рух, що здійснює вісь OA , називається регулярною прецесією, а кутова швидкість $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_0$ її обертання навколо нерухомої осі OO_1 – кутовою швидкістю прецесії.

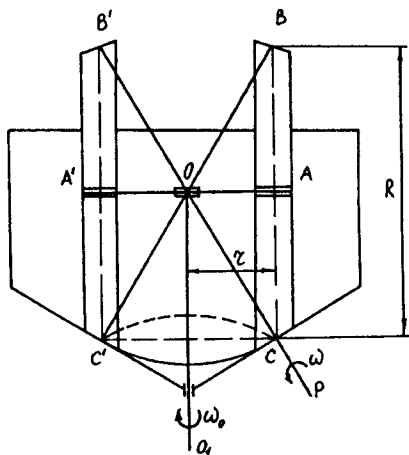


Рис. 5.40

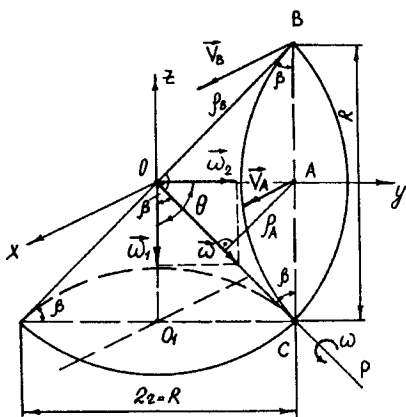


Рис. 5.41

У випадку регулярної прецесії миттєва кутова швидкість диска дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей власного обертання і кутової швидкості прецесії, тобто

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2.$$

Тоді з рис. 5.41 випливає, що

$$\omega = \frac{\omega_1}{\cos \beta} = \frac{\omega_0}{\cos \beta} = \frac{1}{0,4472} = 1,414 \text{ 1/c,}$$

де

$$\cos \beta = \frac{R}{2OC} = \frac{R}{2\sqrt{(0,5R)^2 + r^2}} = \frac{1}{2\sqrt{0,5^2 + 0,5^2}} = 0,707;$$

$$\beta = \arccos 0,707 = 45^\circ.$$

Визначаємо швидкість точок A і B за формулою (5.52):

$$V_A = \omega \rho_A = \frac{\omega R \sin \beta}{2} = \frac{1,414 \cdot 0,707}{2} = 0,5 \text{ м/с};$$

$$V_B = \omega \rho_B = \omega R \sin \beta = 1,414 \cdot 0,707 = 1 \text{ м/с},$$

де ρ_A і ρ_B – відповідно найкоротші відстані від точок A і B до миттєвої осі обертання (рис. 5.41).

Напрямок векторів \vec{V}_A і \vec{V}_B поданий на рис. 5.41 (про напрям векторів швидкостей точок тіла див. рис. 5.37).

Визначаємо кутове прискорення руху. На підставі формули (5.50) маємо

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2,$$

де $\vec{\epsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}$ – показує зміну кутової швидкості за величиною.

Так як ми маємо регулярну прецесію, то $\omega = \text{const}$ і отже $\vec{\epsilon}_1 = \vec{0}$. Тоді

$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_2 = \omega \frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$. Звідси випливає, що вектор $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_2$ має

напрямок перпендикулярний до площі векторів $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}$ в той бік, звідки найкоротший оберт вектора $\vec{\omega}_1$ на вектор $\vec{\omega}$ видно проти ходу стрілки годинника. Вектор $\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_2$ показаний на рис. 5.42.

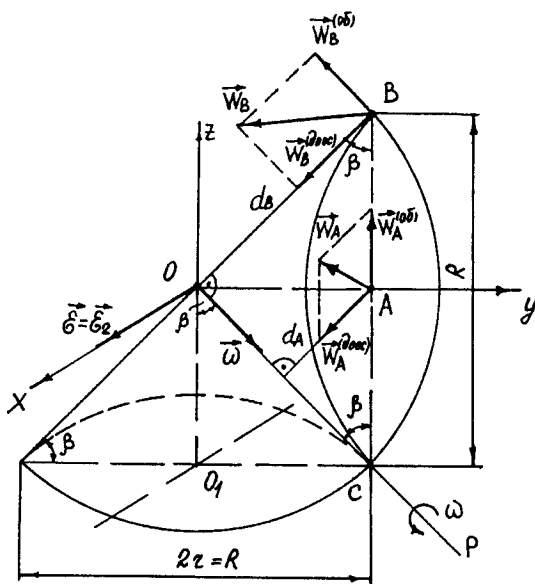


Рис. 5.42

Величина вектора $\vec{\varepsilon}$ дорівнює

$$\varepsilon = \omega_1 \omega \sin(\widehat{\vec{\omega}_1, \vec{\omega}}) = 1 \cdot 1,414 \cdot 0,707 = 1 \text{ л/с}^2.$$

Визначаємо прискорення точок A і B . Прискорення точки A на підставі формули (5.58) дорівнює

$$\vec{W}_A = \vec{W}_A^{(об)} + \vec{W}_A^{(дооc)},$$

де

$$\vec{W}_A^{(об)} = \varepsilon h_A = \varepsilon r = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}^2;$$

$$\vec{W}_A^{(дооc)} = \omega^2 d_A = 1,414^2 \cdot \frac{R \sin \beta}{2} = \frac{1,414^2 \cdot 0,707}{2} = 0,707 \text{ м/с}^2,$$

h_A – найкоротша відстань від точки A до вектора $\vec{\varepsilon}$ (рис. 5.42);

d_A – найкоротша відстань від точки A до миттєвої осі (рис. 5.42).

Вектор $\vec{W}_A^{(об)}$ перпендикулярний до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і \vec{OA} . Напрямок вектора показаний на рис. 5.42 (по AB від A до B). Вектор $\vec{W}_A^{(дооc)}$ має напрям вздовж перпендикуляра d_A від точки A до осі OP (рис. 5.42).

Величина вектора \vec{W}_A дорівнює

$$\begin{aligned} \vec{W}_A &= \sqrt{\left(\vec{W}_A^{(дооc)}\right)^2 + \left(\vec{W}_A^{(об)}\right)^2 - 2\vec{W}_A^{(дооc)}\vec{W}_A^{(об)} \cos\left(\widehat{\vec{W}_A^{(дооc)}, \vec{W}_A^{(об)}}\right)} = \\ &= \sqrt{0,707^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 0,707 \cdot 0,5 \cdot 0,707} = 0,5 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Вектор \vec{W}_A перебуває у площині трикутника $\triangle OBC$ (рис. 5.42).

Прискорення точки B на підставі формули (5.58) дорівнює

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^{(об)} + \vec{W}_B^{(дооc)},$$

де

$$\vec{W}_B^{(об)} = \varepsilon h_B = \varepsilon R \sin 45^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0,707 = 0,707 \text{ м/с}^2;$$

$$\vec{W}_B^{(дооc)} = \omega^2 d_B = 1,414^2 R \sin 45^\circ = 1,414^2 \cdot 0,707 = 1,414 \text{ м/с}^2,$$

h_B – найкоротша відстань від точки B до вектора $\vec{\varepsilon}$ (рис. 5.42);

d_A – найкоротша відстань від точки B до миттєвої осі (рис. 5.42).

Вектор $\vec{W}_B^{(об)}$ перпендикулярний до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і \vec{OB} . Напрямок вектора показаний на рис. 5.42 (перпендикулярно до OB). Вектор $\vec{W}_B^{(дооc)}$ має напрям вздовж OB від B до O (рис. 5.42).

Величина вектора \vec{W}_B дорівнює

$$\vec{W}_B = \sqrt{(\vec{W}_B^{(доок)})^2 + (\vec{W}_B^{(об)})^2} = \sqrt{0,707^2 + 1,414^2} = 1,58 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \vec{W}_B перебуває у площині трикутника ΔOBC (рис.5.42).

5.5. Складний рух точки. Теорема про додавання швидкостей.

Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса).

Вказівки до завдання К5.

Якщо точка одночасно рухається відносно двох (чи більше) систем відліку, одна з яких здійснює рух відносно іншої, яку умовно приймаємо за нерухому, то у таких випадках рух точки буде складним.

Рух точки відносно нерухомої системи відліку називається абсолютним рухом. Абсолютною траєкторією, швидкістю і прискоренням точки називається відповідно її траєкторія, швидкість і прискорення в абсолютному русі.

Рух точки відносно рухомої системи відліку називається відносним рухом. Відповідно відносною траєкторією, швидкістю й прискоренням називається траєкторія, швидкість і прискорення точки у відносному русі.

Переносним рухом називається рух відносно нерухомої системи відліку тієї точки рухомої системи відліку, з якою в даний момент співпадає точка, що рухається. Переносною швидкістю і прискоренням точки в даний момент часу називаються відповідно швидкість і прискорення, які має точка, що незмінно зв'язана в цей момент часу з самою рухомою системою відліку.

Величини, що характеризують абсолютний рух точки, позначатимемо індексом “а”, відносний рух – індексом “r”, а переносний – індексом “e”.

Залежність між абсолютною, відносною і переносною швидкостями точки при її складному русі визначається за теоремою про додавання швидкостей.

Теорема про додавання швидкостей. Абсолютна швидкість \vec{V}_a точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносної \vec{V}_r і переносної \vec{V}_e швидкостей

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e. \quad (5.59)$$

Формула (5.59) встановлює правило паралелограма додавання швидкостей точки при її складному русі.

Величину абсолютної швидкості визначаємо за формулою:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos(\widehat{\vec{V}_r, \vec{V}_e})}. \quad (5.60)$$

В деяких випадках при визначенні абсолютної швидкості точки, доцільно застосовувати формулу (5.59) в проєкціях на нерухомі координатні осі $Oxyz$:

$$V_{a_x} = V_{r_x} + V_{e_x}; \quad V_{a_y} = V_{r_y} + V_{e_y}; \quad V_{a_z} = V_{r_z} + V_{e_z}. \quad (5.61)$$

Величину абсолютної швидкості знаходять за її проєкціями на осі $Oxyz$:

$$V_a = \sqrt{V_{a_x}^2 + V_{a_y}^2 + V_{a_z}^2}, \quad (5.62)$$

а напрям абсолютної швидкості визначається за напрямними косинусами відносно осей $Oxyz$:

$$\cos(\widehat{\vec{V}_a, x}) = \frac{V_{a_x}}{V_a}; \quad \cos(\widehat{\vec{V}_a, y}) = \frac{V_{a_y}}{V_a}; \quad \cos(\widehat{\vec{V}_a, z}) = \frac{V_{a_z}}{V_a}. \quad (5.63)$$

Залежність між прискореннями точки при абсолютному, відносному і переносному рухах визначається за теоремою про додавання прискорень. Ця теорема називається теоремою Коріоліса.

Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса). Абсолютне прискорення точки при складному русі дорівнює векторній сумі відносного, переносного прискорень і прискорення Коріоліса:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_c. \quad (5.64)$$

Коріолісове прискорення обчислюємо за формулою:

$$\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r, \quad (5.65)$$

де $\vec{\omega}_e$ – вектор кутової швидкості переносного руху; \vec{V}_r – вектор відносної швидкості точки.

Величина коріолісового прискорення дорівнює:

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}). \quad (5.66)$$

Напрямок коріолісового прискорення знаходять за правилом визначення напрямку векторного добутку; коріолісове прискорення \vec{W}_c напрямлене перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}_e$ і \vec{V}_r , в той бік, з якого спостерігач бачить поворот від вектора $\vec{\omega}_e$ до вектора \vec{V}_r , на найменший кут проти стрілки годинника.

Напрямок вектора \vec{W}_c можна визначити й іншим способом. Проведемо через точку M площину, перпендикулярну до вектора $\vec{\omega}_e$ і спроекціюємо відносну швидкість \vec{V}_r на цю площину. Якщо проекцію $\vec{V}_r \sin \alpha$ повернемо в площині на 90° навколо точки M у напрямі переносного обертання (рис. 5.43), то дістанемо напрямок вектора \vec{W}_c . Описаний спосіб носить назву правила М. Є. Жуковського.

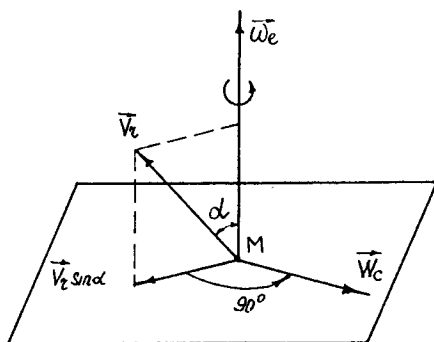


Рис. 5.43

Користуючись теоремою про додавання прискорень, можна застосувати метод проєкцій. Вибираючи нерухому систему координат $Oxyz$ і проєкціюючи рівність (5.64) на кожну з цих осей, знаходимо:

$$\begin{aligned} W_{a_x} &= W_{r_x} + W_{e_x} + W_{c_x}; \\ W_{a_y} &= W_{r_y} + W_{e_y} + W_{c_y}; \\ W_{a_z} &= W_{r_z} + W_{e_z} + W_{c_z}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Величину абсолютного прискорення визначимо за формулою:

$$W_a = \sqrt{W_{a_x}^2 + W_{a_y}^2 + W_{a_z}^2}. \quad (5.68)$$

Напрявні косинуси абсолютного прискорення дістанемо з виразів:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{W}_a, x}) &= \frac{W_{a_x}}{W_a}; \\ \cos(\widehat{\vec{W}_a, y}) &= \frac{W_{a_y}}{W_a}; \\ \cos(\widehat{\vec{W}_a, z}) &= \frac{W_{a_z}}{W_a}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

У випадку переносного поступального руху кутова швидкість цього руху $\omega_e = 0$, прискорення Коріоліса згідно з формулою (5.66) теж дорівнює нулю. Теорема про додавання прискорень при переносному поступальному русі має вигляд

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e. \quad (5.70)$$

При розв'язанні задач складного руху точки слід дотримуватися такої послідовності дій:

1. Розкласти абсолютний рух точки на два складових рухи: переносний і відносний.

2. Вибрати дві системи координат, одну з яких прийняти за нерухому, а другу за рухому, яка здійснює заданий рух відносно нерухомої. Як правило, рухому систему координат пов'язуємо з рухомих тілом.

3. Уявно зупиняючи переносний рух, знайти швидкість і прискорення відносного руху точки за правилами кінематики точки.

4. Уявно зупиняючи відносний рух, знайти швидкість і прискорення переносного руху точки як швидкість і прискорення тієї точки рухомої системи координат, незмінно зв'язаною з рухомих тілом, з якою в даний момент часу співпадає досліджувана точка.

5. Застосовуючи теорему про додавання швидкостей визначити абсолютну швидкість точки.

6. За формулами (5.65) і (5.66) визначити прискорення Коріоліса.

7. На основі теореми про додавання прискорень визначити абсолютне прискорення точки. Зауважимо, що абсолютне прискорення можна знайти геометрично, як замикаючу сторону многокутника, побудованого на векторах відносного, переносного і коріолісового прискорень, або застосувати для його визначення метод проєкцій: досить спроекціювати геометричну рівність (5.64) на три взаємно перпендикулярні осі координат, відповідно до формул (5.67), а потім визначити величину і напрям абсолютного прискорення за формулами (5.68), (5.69).

Приклад 5.1. Барабан 2 тістоподільної машини (рис. 5.44) від його завантажування до його розвантажування здійснює обертальний рух навколо нерухомої горизонтальної осі за законом $\varphi_e = t^2 - 0,96t$, де φ_e – в радіанах; t – в секундах. Закон руху поршня описується рівнянням

$$S_r = 18,25 \sin \frac{t}{4}, \text{ де } S_r \text{ – в сантиметрах; } t \text{ – в секундах.}$$

Визначити абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M поршня в момент часу $t = 1,5$ с, якщо $l_0 = 10$ см (рис. 5.44).

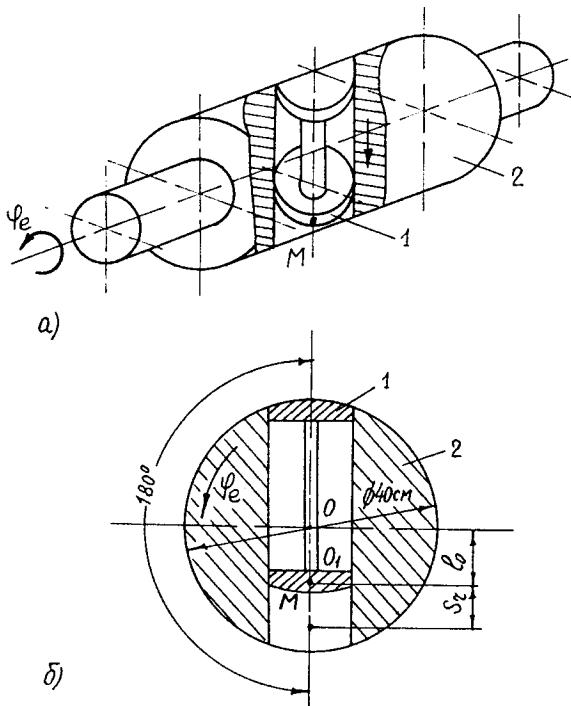


Рис. 5.44

Розв'язання. З'ясуємо спочатку характер руху точки M . Рух точки M відносно нерухокої системи координат Oxy (рис. 5.45) є абсолютним, рух точки M разом з поршнем відносно барабана, що обертається, – відносним, а рух точки M разом з барабаном – переносним.

Визначаємо положення точки M в момент часу $t = 1,5$ с на барабані (рис. 5.45):

$$S_r = 18,25 \sin \frac{t}{4} = 18,25 \sin \frac{1,5}{4} = 18,25 \cdot 0,366 = 6,68 \text{ см.}$$

Положення точки M показано на рис. 5.45.

Абсолютну швидкість точки M знайдемо як геометричну суму відносної та переносної швидкостей

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Оскільки відносний рух точки M є прямолінійний, то величину відносної швидкості точки визначаємо за формулою:

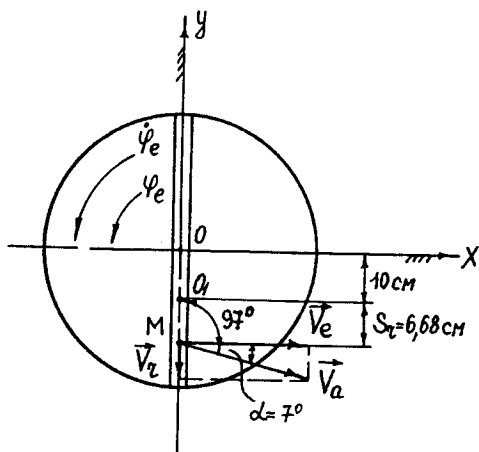


Рис. 5.45

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = \frac{d}{dt} \left(18,25 \sin \frac{t}{4} \right) = \frac{18,25}{4} \cos \frac{t}{4}.$$

В момент часу $t = 1,5$ с відносна швидкість точки дорівнює

$$V_r = \frac{18,25}{4} \cos \frac{1,5}{4} = 4,56 \cdot 0,93 = 4,24 \text{ см/с.}$$

Додатний знак V_r показує, що вектор \vec{V}_r напрямлений у бік зростання S_r (рис. 5.45).

Оскільки переносний рух є обертальним навколо осі O , то вектор переносної швидкості точки M буде перпендикулярним до радіуса обертання OM і напрямлений у бік обертання барабана (рис. 5.45).

Величина переносної швидкості точки M дорівнює:

$$V_e = \dot{\varphi}_e OM = (2t - 0,96) OM = 16,68(2t - 0,96),$$

де

$$\dot{\varphi}_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = \frac{d}{dt} (t^2 - 0,96t) = 2t - 0,96 \text{ 1/с; } OM = 16,68 \text{ см (дєñ. 5.45).}$$

При $t = 1,5$ с маємо

$$V_e = 16,68(2t - 0,96) = 16,68(3 - 0,96) = 34,27 \text{ см/с.}$$

Так як вектори \vec{V}_r і \vec{V}_e взаємно перпендикулярні, то величина абсолютної швидкості визначається за формулою:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{4,24^2 + 34,27^2} = 34,53 \text{ см/с.}$$

Визначимо напрямні косинуси вектора \vec{V}_a (рис. 5.45):

$$\cos(\widehat{\vec{V}_a, x}) = \frac{V_{ax}}{V_a} = \frac{V_e}{V_a} = \frac{34,27}{34,53} = 0,9925; \quad (\widehat{\vec{V}_a, x}) = 7^\circ;$$

$$\cos(\widehat{\vec{V}_a, y}) = -\frac{V_{ay}}{V_a} = -\frac{V_r}{V_a} = -\frac{4,24}{34,53} = -0,1228; \quad (\widehat{\vec{V}_a, y}) = 97^\circ.$$

Застосовуючи теорему Коріоліса, знайдемо абсолютне прискорення точки M .

Величина відносного прискорення визначається за формулою:

$$W_r = \frac{d^2 S_r}{dt^2} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d}{dt} \left(4,56 \cos \frac{t}{4} \right) = -1,14 \sin \frac{t}{4}.$$

В момент часу $t = 1,5$ с відносне прискорення точки M дорівнює

$$W_r = -1,14 \sin \frac{1,5}{4} = -0,418 \text{ см/с}^2.$$

Від'ємний знак W_r показує, що вектор \vec{W}_r напрямлений протилежно вектору \vec{V}_r (див. рис. 5.45 і рис. 5.46), тобто рух точки M відносно барабана сповільнений.

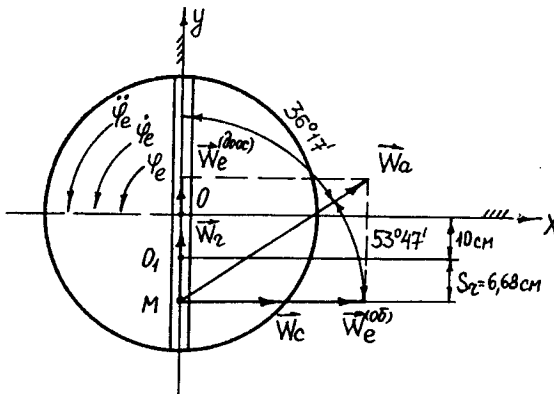


Рис. 5.46

Визначимо переносне прискорення точки M . Оскільки точку M при визначенні переносного прискорення, розглядаємо як точку, що належить барабану який обертається навколо нерухомої осі O , то переносне прискорення точки M дорівнює сумі двох прискорень: обертального $\vec{W}_e^{(об)}$ і доосьового $\vec{W}_e^{(доос)}$.

Величина переносного обертального прискорення визначається за формулою:

$$W_e^{(об)} = \varepsilon_e \rho = \ddot{\varphi}_e OM = 2 \cdot 16,68 = 33,36 \text{ см/с}^2,$$

де

$$\varepsilon_e = \ddot{\varphi}_e = \frac{d\dot{\varphi}_e}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 0,96) = 2 \text{ 1/с}^2; \quad OM = 16,68 \text{ см (дєї. 5.45)}.$$

Переносне обертальне прискорення точки M не залежить від часу t і напрямлено перпендикулярно до радіусу обертання у бік обертання (рис. 5.46).

Переносне доосьове прискорення визначається за формулою:

$$W_e^{(доос)} = \omega_e^2 \rho = \dot{\varphi}_e^2 OM = (2t - 0,96)^2 OM.$$

При $t = 1,5$, с маємо

$$W_e^{(доос)} = (2t - 0,96)^2 \cdot 16,68 = (3 - 0,96)^2 \cdot 16,68 = 69,4 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{W}_e^{(доос)}$ має напрям до осі обертання барабана (рис. 5.46).

Прискорення Коріоліса визначається за формулою:

$$W_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r.$$

Величина прискорення Коріоліса дорівнює

$$W_C = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 2\dot{\varphi}_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 2(2t - 0,96)4,56 \cos \frac{t}{4},$$

де $\sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}) = 1$ (рис.5.45).

При $t = 1,5$ с маємо

$$W_C = 2(3 - 0,96)4,56 \cos \frac{1,5}{4} = 17,3 \text{ см/с}^2.$$

Визначимо напрям прискорення Кориоліса. Оскільки вектор \vec{V}_r перпендикулярний до $\vec{\omega}_e$ (\vec{V}_r лежить у площині xOy , а $\vec{\omega}_e$ перпендикулярний до \vec{V}_r), то для визначення напрямку прискорення Кориоліса треба вектор \vec{V}_r повернути на кут 90° у площині xOy у напрямі переносного руху. Вектор \vec{W}_C лежатиме в площині xOy і буде напрямленим перпендикулярно до радіуса OM (рис. 5.46).

Тепер знайдемо проєкції абсолютного прискорення на осі Ox і Oy (рис. 5.46). Матимемо

$$W_{ax} = W_C + W_e^{(об)} = 17,3 + 33,36 = 50,66 \text{ см/с}^2;$$

$$W_{ay} = W_r + W_e^{(доос)} = 0,418 + 69,4 = 69,82 \text{ см/с}^2.$$

Величина абсолютного прискорення точки M визначається за формулою:

$$W_a = \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2} = \sqrt{50,66^2 + 69,82^2} = 85,6 \text{ см/с}^2.$$

Напрямні косинуси вектора абсолютного прискорення точки M :

$$\cos(\widehat{\vec{W}_a, x}) = \frac{W_{ax}}{W_a} = \frac{50,66}{85,6} = 0,5918; \quad (\widehat{\vec{W}_a, x}) = 53^\circ 43';$$

$$\cos(\widehat{\vec{W}_a, y}) = \frac{W_{ay}}{W_a} = \frac{69,82}{85,6} = 0,8061; \quad (\widehat{\vec{W}_a, y}) = 36^\circ 17'.$$

Вектор \vec{W}_a показаний на рис. 5.46.

Розділ 6. Розрахунково-графічні завдання з динаміки.

6.1. Завдання Д1. Вантаж M , вагою P кН, закріплений за допомогою стержня OM , завдовжки l , до нерухокої точки O описує у горизонтальній (рис. Д1.0 – Д1.5), або у вертикальній (рис. Д1.6 – Д1.9) площині коло, при цьому стержень OM описує конічну поверхню. Кут між стержнем OM і віссю OO_1 , при русі вантажу, дорівнює α . Визначити лінійну швидкість вантажу M і зусилля в стержні OM . Вагою стержня OM знехтувати.

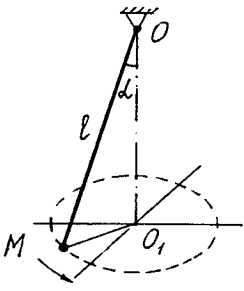


Рис. Д1.0

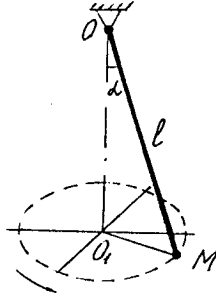


Рис. Д1.1

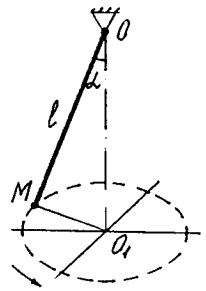


Рис. Д1.2

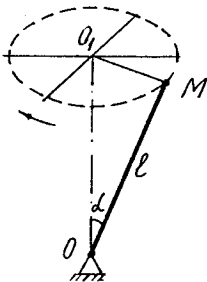


Рис. Д1.3

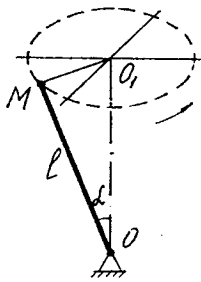


Рис. Д1.4

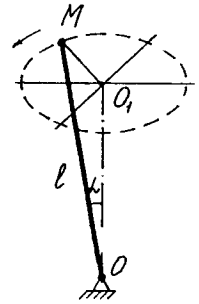


Рис. Д1.5

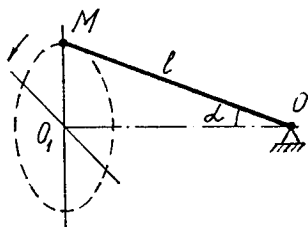


Рис. Д1.6

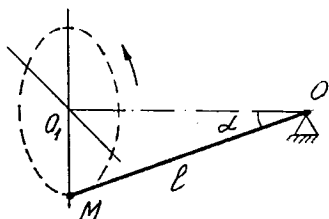


Рис. Д1.7

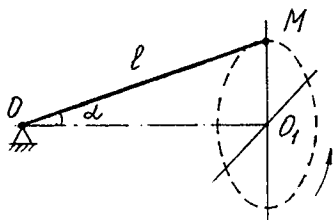


Рис. Д1.8

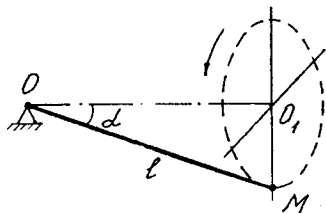


Рис. Д1.9

Числові значення величини сили \bar{P} , довжина стержня l та кута α подані в таблицях Д1.А і Д1.Б. Напрямок руху вантажу показаний на рис. Д1.0 – Д1.9 кутовою стрілкою.

Таблиця Д1.А

Варіант	P
	кН
0	1,2
1	1,5
2	1,8
3	2,0
4	1,6
5	1,9
6	1,3
7	1,4
8	1,7
9	2,1

Таблиця Д1.Б

Варіант	l	α
	м	град.
0	1,0	60°
1	1,2	55°
2	1,3	50°
3	1,4	45°
4	1,5	40°
5	1,6	35°
6	1,7	30°
7	1,8	25°
8	1,9	20°
9	2,0	15°

Вказівки до розв'язання завдання Д1. Розв'язання завдання провести на підставі диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і на підставі принципу Д'Аламбера. Порівняти результати проведених розрахунків.

6.2. Завдання Д2. Кулька M масою m , отримує в точці A початкову швидкість V_0 , рухається в трубі ABC , яка перебуває у вертикальній площині. У точці C кулька залишає трубу ABC і попадає в точку D (рис. Д2.0 – Д2.9).

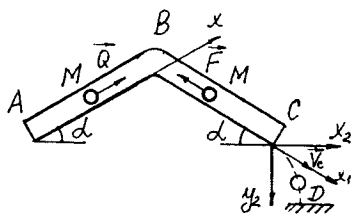


Рис. Д2.0

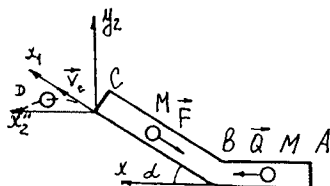


Рис. Д2.1

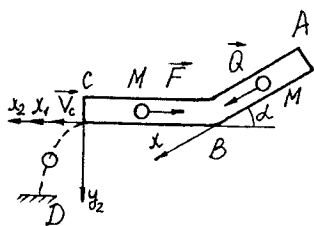


Рис. Д2.2

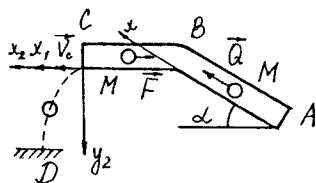


Рис. Д2.3

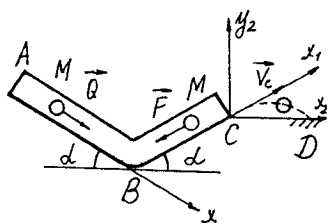


Рис. Д2.4

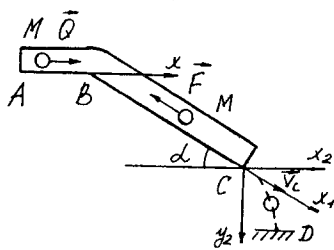


Рис. Д2.5

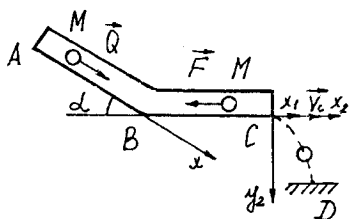


Рис. Д2.6

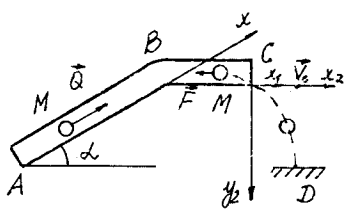


Рис. Д2.7

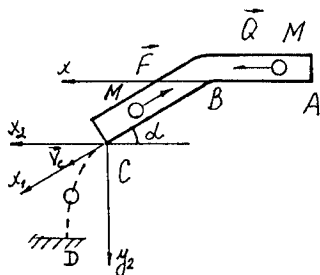


Рис. Д2.8

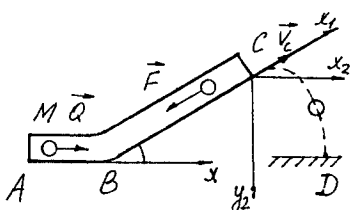


Рис. Д2.9

На ділянці AB на кульку, окрім сили ваги, діє стала сила \vec{Q} (її напрям поданий на рисунках) і сила опору середовища \vec{R} , яка залежить від швидкості руху кульки \vec{V} і має напрям проти руху кульки. Тертям на ділянці AB знехтувати.

У точці B кулька не змінюючи величини своєї швидкості, переходить на ділянку BC труби, де на неї, окрім сили ваги, діє сила тертя (коефіцієнт тертя $f = 0,25$ і змінна сила \vec{F} (її напрям поданий на рисунках).

У точці C кулька маючи швидкість \vec{V}_C , попадає в суцільне середовище, де на неї, окрім сили ваги, діє сила опору суцільного середовища $\vec{R}_1 = -k\vec{V}$ (k – стала додатна величина).

Знаючи відстань $AB = l_1$, або час t_1 руху кульки від точки A до точки B , а також відстань $BC = l_2$, або час t_2 руху кульки від точки B до точки C , визначити рівняння траєкторії руху кульки в суцільному середовищі на ділянці CD , тобто $y_2 = f(x_2)$.

Числові значення величини маси кульки m , кута нахилу ділянок труби α , сил \vec{Q} , \vec{R} і \vec{F} , коефіцієнта k , початкової швидкості V_0 , довжини ділянок l_1 і l_2 , а також часу руху кульки на ділянках t_1 і t_2 подані в таблицях Д2.А і Д2.Б.

Таблиця Д2.А

Варіант	m	α	Q	F	R	k
	кг	град.	Н	Н	Н	Н·с/м
0	2,5	30	5	$4\sin(4t)$	$0,8V^2$	0,3
1	2,0	35	6	$5\cos(4t)$	$0,4V$	0,5
2	5	40	10	$6t^2$	$0,5V^2$	0,2
3	6	45	12	$2\cos(2t)$	$0,3V$	0,35
4	4,5	30	6	$5\sin(2t)$	$0,6V^2$	0,4
5	2,5	35	10	$3t$	$0,5V$	0,3
6	3,5	40	5	$6\cos(4t)$	$0,8V^2$	0,35
7	6,5	45	10	$3\sin(4t)$	$0,4V$	0,45
8	5,5	30	6	$4\cos(2t)$	$0,2V^2$	0,25
9	4,5	35	8	$4\sin(2t)$	$0,5V$	0,35

Таблиця Д2.Б

Варіант	V_0	l_1	l_2	t_1	t_2
	м/с	м	м	с	с
0	15	2,0	–	–	2,0
1	20	–	3,0	2,0	–
2	15	3,0	–	–	1,5
3	15	–	2,0	3,0	–
4	20	2,5	–	–	3,0
5	18	–	4,0	2,0	–
6	20	4,0	–	–	2,0
7	15	–	2,0	3,0	–
8	20	2,0	–	–	3,0
9	18	–	3,0	2,0	–

6.3. Завдання ДЗ. Вантаж M , масою m , закріплений на пружній підвісці, яка складається з двох пружин (рис. ДЗ.0 – ДЗ.9). Жорсткості пружин відповідно дорівнюють c_1 і c_2 . Вантаж рухається вздовж напрямної AB , як це показано на рисунках. На вантаж M , окрім сили ваги, діє сила опору середовища $\vec{R} = -b\vec{V}$. В початковий момент руху, вантаж M мав швидкість V_0 і перебував на відстані x_0 від положення статичної рівноваги, (точка O на рис. ДЗ.0 – ДЗ.9).

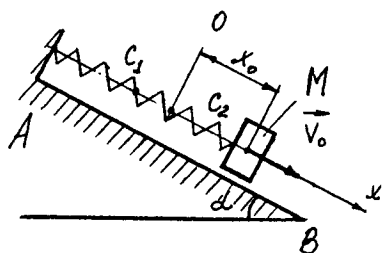


Рис. ДЗ.0

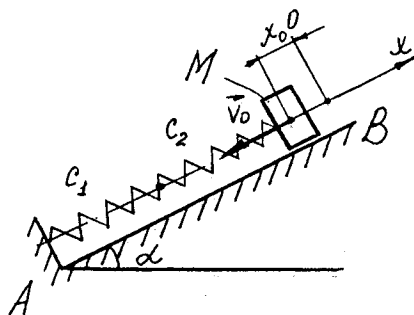


Рис. ДЗ.1

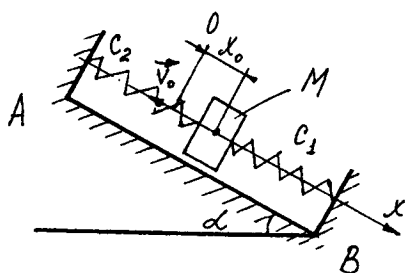


Рис. ДЗ.2

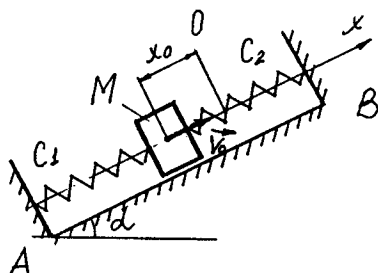


Рис. ДЗ.3

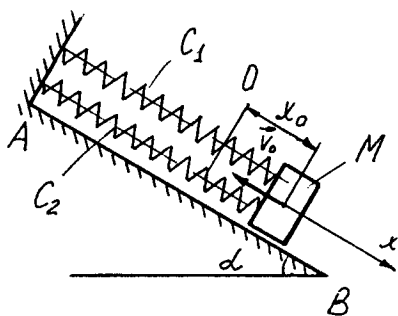


Рис. ДЗ.4

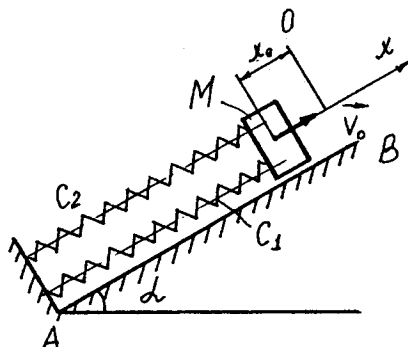


Рис. ДЗ.5

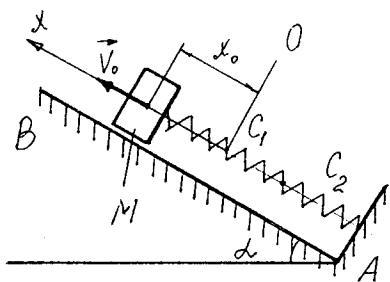


Рис. ДЗ.6

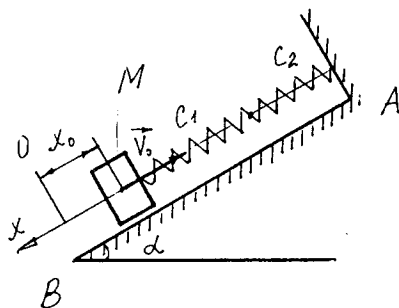


Рис. ДЗ.7

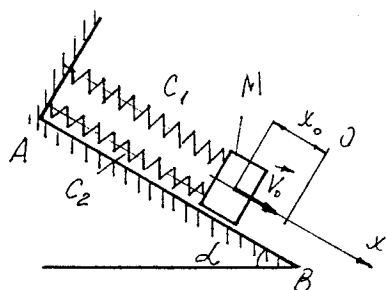


Рис. ДЗ.8

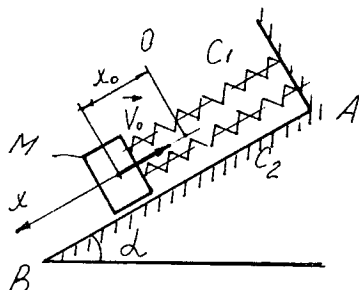


Рис. ДЗ.9

Визначити: 1) рівняння руху вантажу M ; 2) частоту коливання; 3) декремент коливання; 4) амплітуди коливання після трьох і восьми повних коливань вантажу.

Необхідні до розрахунків дані подані в таблицях ДЗ.А і ДЗ.Б.

Таблиця ДЗ.А

Варіант	m	c_1	c_2	x_0
	кг	Н/м	Н/м	м
0	3,0	200	300	0,01
1	4,0	180	200	0,02
2	5,0	150	300	0,01
3	6,0	150	150	0,03
4	3,0	120	180	0,025
5	3,5	160	160	0,015
6	4,0	180	180	0,018
7	4,0	200	200	0,02
8	5,0	300	300	0,03
9	6,0	150	300	0,025

Таблиця ДЗ.Б

Варіант	b	V_0	α
	Н·с/м	м/с	град.
0	6	0,8	35
1	5	0,6	30
2	7	0,7	45
3	8	0,5	60
4	6	0,8	55
5	4	0,9	30
6	5	1,0	45
7	3	0,6	60
8	4	0,7	35
9	5	0,8	40

6.4. Завдання Д4. Кубик M , який розглядається як матеріальна точка, рухається вздовж прямокутного каналу тіла A , що обертається навколо вертикальної осі (рис. Д4.0 – Д4.9). Визначити рівняння відносного руху кубика, прийнявши за початок відліку руху точку O , а також сили тиску кубика на дно і бокові грані каналу. Коефіцієнт тертя між кубиком і дном та гранями каналу дорівнює f .

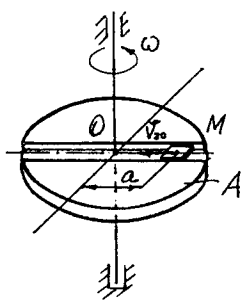


Рис. Д4.0

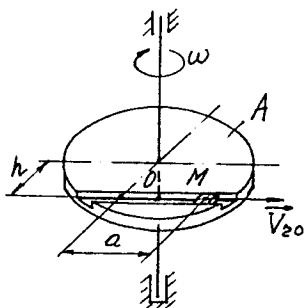


Рис. Д4.1

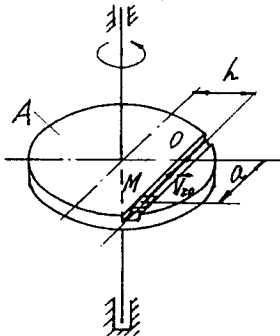


Рис. Д4.2

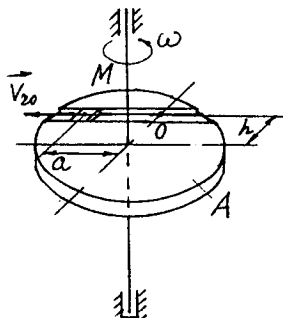


Рис. Д4.3

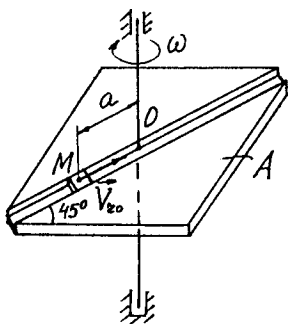


Рис. Д4.4

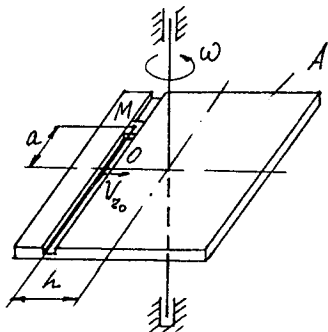


Рис. Д4.5

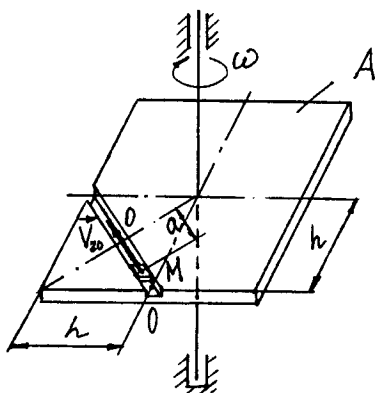


Рис. Д4.6

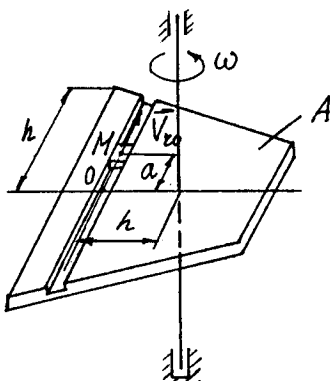


Рис. Д4.7

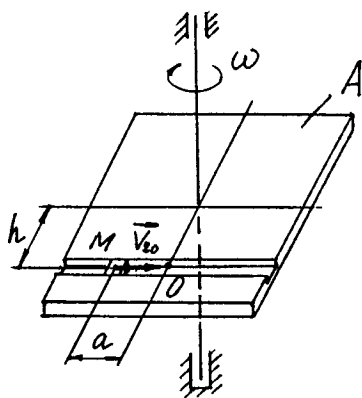


Рис. Д4.8

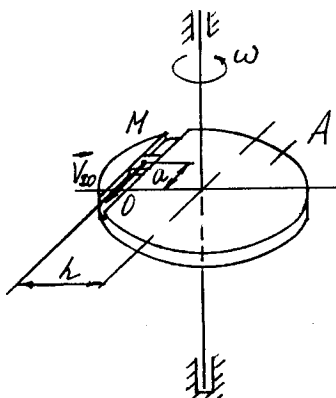


Рис. Д4.9

Числові значення величини маси кубика m , початкових умов руху, a, V_0 , величини кутової швидкості тіла $A - \omega$, коефіцієнта тертя f , та лінійного розміру h подані в таблицях Д4.Ф і Д4.Б.

Таблиця Д4.А

Варіант	m	ω	f
	кг	1/с ²	–
0	0,5	20	0,3
1	0,6	25	0,25
2	0,7	22	0,2
3	0,8	21	0,27
4	0,5	18	0,22
5	0,6	15	0,2
6	0,7	17	0,3
7	0,8	20	0,25
8	0,4	25	0,23
9	0,3	22	0,2

Таблиця Д4.Б

Варіант	a	V_0	h
	м	м/с	м
0	0,1	0,9	0,8
1	0,2	1,2	0,9
2	0,3	1,5	0,7
3	0,1	1,0	0,6
4	0,2	0,85	0,8
5	0,3	0,9	0,9
6	0,15	1,1	0,7
7	0,18	1,3	0,6
8	0,2	1,6	0,8
9	0,25	2,0	0,9

6.5. Завдання Д5. Електричний двигун встановлено на платформі. Платформа підтримується спіральними пружинами, або підвішена на спіральних пружинах, жорсткості яких дорівнюють c_1, c_2, c_3 , так як це показано на рис. Д5.0 – Д5.9. На валу двигуна під прямим кутом до нього закріплено один кінець однорідного стержня D , довжина якого l , а на другий кінець стержня насаджено точковий вантаж E , кутова швидкість вала ω . Маса двигуна, платформи, однорідного стержня D і точкового вантажу E відповідно дорівнює m_1, m_2, m_3, m_4 . Центр ваги двигуна перебуває у точці A , а платформи – в точці B . У початковий момент точка E зі стержнем D займала верхнє вертикальне положення.

Приймаючи, що при русі системи платформа залишається горизонтальною, визначити рівняння руху точки B платформи вздовж вертикалі поза резонансом та при резонансі, якщо у початковий момент часу точка B мала відхилення від положення статичної рівноваги Δ і швидкість \vec{V}_0 (рис. Д5.0 – Д5.9).

Необхідні до розрахунків дані подані в таблицях Д5.А і Д5.Б.

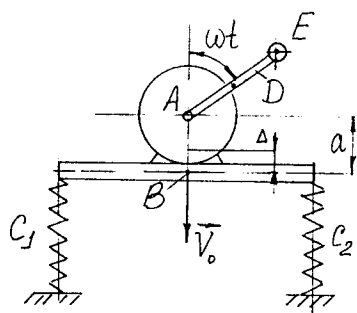


Рис. Д5.0

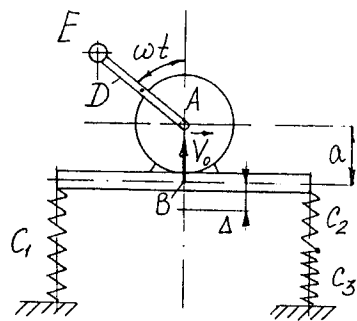


Рис. Д5.1

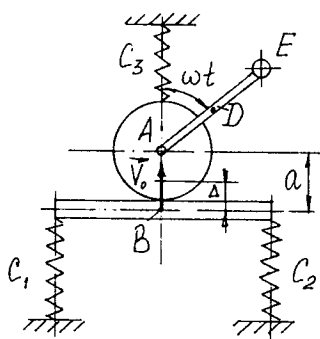


Рис. Д5.2

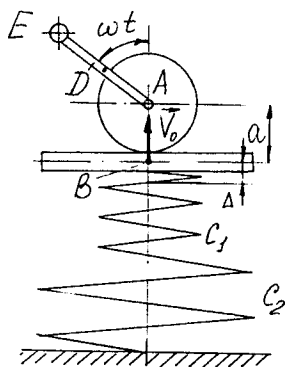


Рис. Д5.3

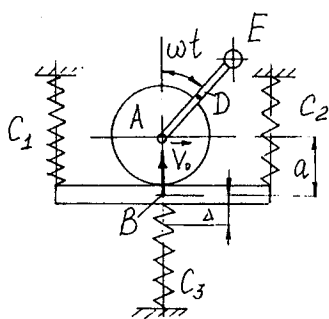


Рис. Д5.4

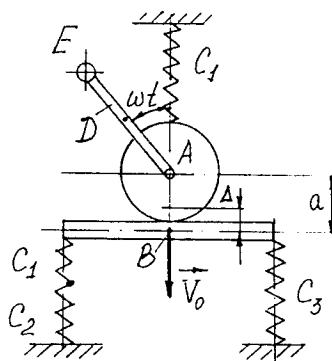


Рис. Д5.5

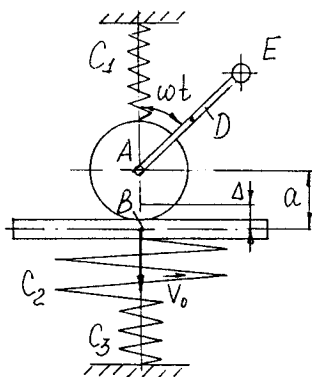


Рис. Д5.6

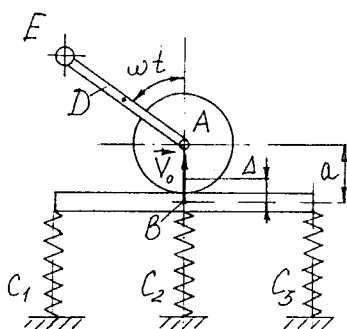


Рис. Д5.7

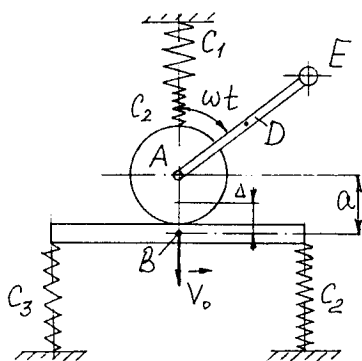


Рис. Д5.8

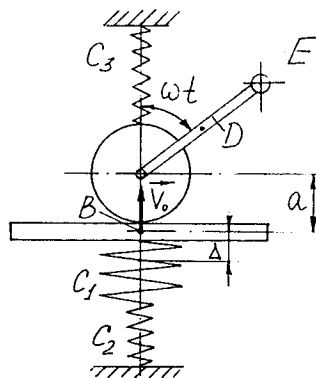


Рис. Д5.9

Таблица Д5.А

Вариант	l	a	c_1	c_2	c_3	ω
	м	м	Н/м	Н/м	Н/м	1/с
1	2	3	4	5	6	7
0	0,013	0,10	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$	25
1	0,012	0,15	$2,5 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	30
2	0,015	0,12	$2,7 \cdot 10^3$	$3,6 \cdot 10^3$	$5,5 \cdot 10^3$	20
3	0,016	0,11	$2,9 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	23

Варіант	l	a	c_1	c_2	c_3	ω
	м	м	Н/м	Н/м	Н/м	1/с
l	2	3	4	5	6	7
4	0,012	0,14	$5,5 \cdot 10^3$	$2,7 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$	24
5	0,011	0,13	$4,5 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	21
6	0,010	0,15	$5 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$	26
7	0,014	0,11	$6 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	28
8	0,015	0,16	$7 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	30
9	0,012	0,2	$2,5 \cdot 10^3$	$4,5 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	25

Таблиця Д5.Б

Варіант	m_1	m_2	m_3	m_4	Δ	V_0
	кг	кг	кг	кг	м	м/с
0	5	25	0,15	0,10	0,07	0,6
1	6	27	0,16	0,09	0,08	0,7
2	7	28	0,18	0,08	0,09	0,8
3	5,5	30	0,15	0,12	0,06	0,9
4	6,5	26	0,16	0,095	0,05	0,5
5	4	24	0,2	0,085	0,075	0,7
6	7,5	22	0,19	0,11	0,085	0,8
7	6	23	0,18	0,07	0,095	0,9
8	5	20	0,17	0,09	0,07	0,3
9	6,5	26	0,14	0,08	0,09	0,4

6.6. Завдання Д6. Тягар D , що має масу m_D , переміщується по похилій площині, нахиленій під кутом β до горизонту, вниз (коефіцієнт тертя ковзання тягара дорівнює f) і приводить в рух барабан A , масою m_A , за допомогою абсолютно гнучкої нитки (рис. Д6.0 – Д6.9). Барабан A являє собою суцільний однорідний циліндр (рис. Д6.1, Д6.3, Д6.5, Д6.7, Д6.9), або циліндр маса якого рівномірно розподілена по його ободу (рис. Д6.0, Д6.2, Д6.4, Д6.6, Д6.8). Радіус барабана A дорівнює R . До барабана A прикладений момент сил опору пропорційний кутовій швидкості барабана $M_{on} = \alpha \omega$.

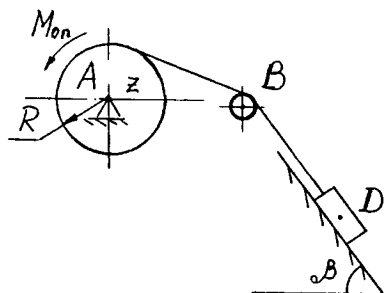


Рис. Д6.8

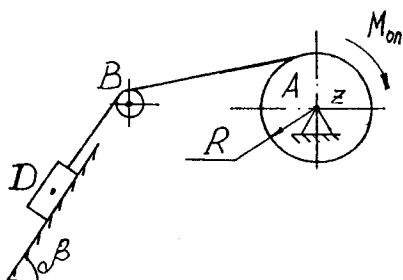


Рис. Д6.9

Визначити (на підставі теореми про зміну кінетичного моменту) закон, за яким змінюється кут повороту барабана A при його обертанні. Вагою нитки, блока B та тертям осі блока знехтувати і вважати, що нитка по блоку B не ковзає.

Числові значення величини маси m_A , маси m_D , радіуса R , коефіцієнта α , кута β і коефіцієнта тертя f подані в таблицях Д6.А і Д6.Б.

Таблиця Д6.А

Ва-ріант	m_D	m_A	R
	кг	кг	м
0	2,2	1,8	1,0
1	3,0	1,7	0,9
2	2,5	2,0	0,8
3	2,6	2,2	0,85
4	2,9	2,4	0,75
5	3,1	2,6	0,45
6	2,1	1,6	0,65
7	2,7	2,5	0,85
8	2,9	2,7	0,8
9	3,3	1,9	0,7

Таблиця Д6.Б

Ва-ріант	α	β	f
	кг·м ² /с	град	—
0	2,5	60	0,19
1	3,3	70	0,2
2	2,5	45	0,3
3	2,8	65	0,33
4	2,4	50	0,28
5	3,4	75	0,25
6	2,9	80	0,3
7	3,1	60	0,25
8	1,9	40	0,20
9	2,3	35	0,28

6.7. Завдання Д7. Механічна система складається з тіла 1 (коефіцієнт тертя тіла 1 по площині $f=0,3$), шківів 2 з радіусами ступенів $R_2 = 0,5$ м, $r_2 = 0,25$ м (маса шківів 2 рівномірно розподілена по його зовнішньому ободу) і тіла 3 (каток який котиться без ковзання; коефіцієнт тертя кочення k або рухомий шків). Радіуси ступенів тіла 3 дорівнюють $R_3 = 0,5$ м, $r_3 = 0,25$ м. Радіус інерції тіла 3 дорівнює ρ (рис. Д7.0 – Д7.9). Тіла системи з'єднані між собою нерозтяжними нитками; участки ниток паралельні відповідним площинам.

Під дією сталої сили \vec{F} система починає рухатися зі стану спокою. При русі системи на шків 2 діє сталий момент сил опору M_2 .

Визначити (на підставі теореми про зміну кінетичної енергії системи) величину сили \vec{F} в той момент часу, коли переміщення і швидкість точки прикладання сили \vec{F} дорівнюють S і V .

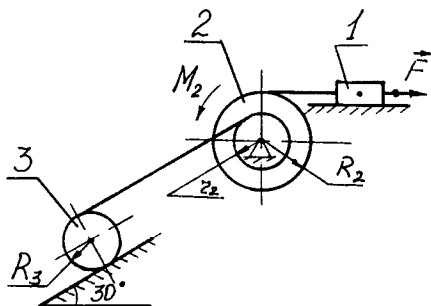


Рис. Д7.0

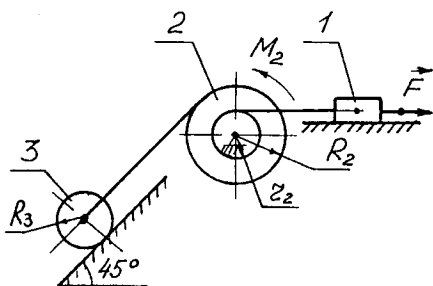


Рис. Д7.1

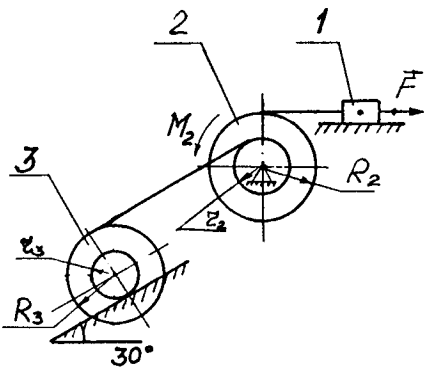


Рис. Д7.2

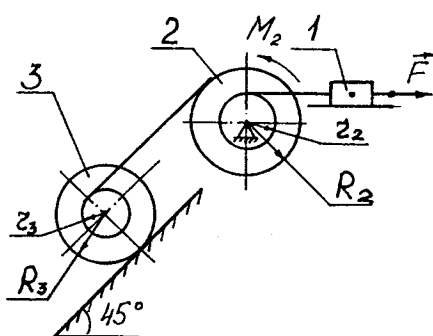


Рис. Д7.3

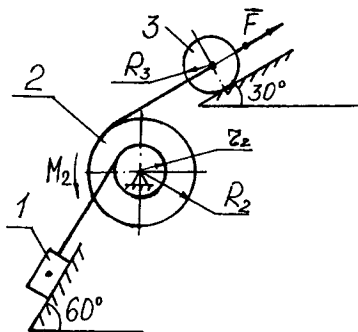


Рис. Д7.4

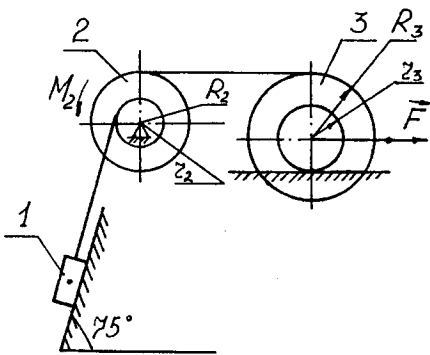


Рис. Д7.5

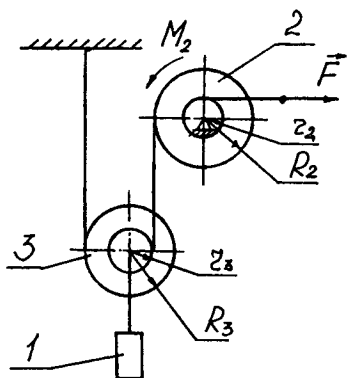


Рис. Д7.6

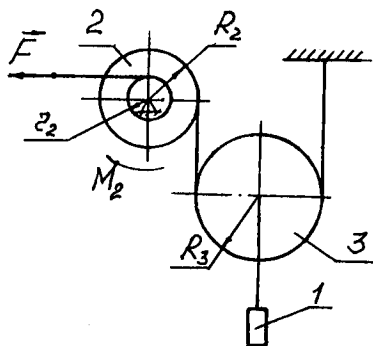


Рис. Д7.7

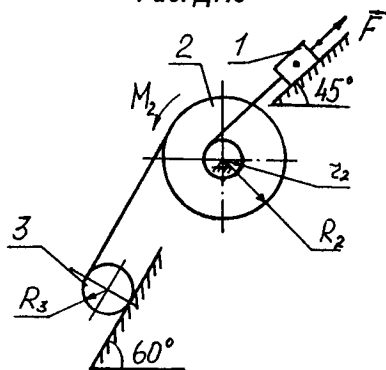


Рис. Д7.8

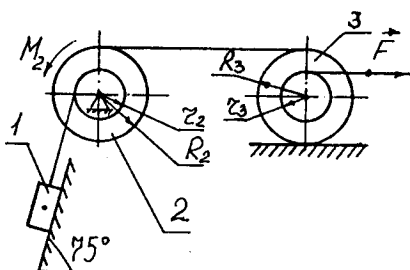


Рис. Д7.9

Необхідні до розрахунків дані подані в таблицях Д7.А і Д7.Б.

Таблиця Д7.А

Варіант	m_1	m_2	m_3
	кг	кг	кг
1	2	3	4
0	4,0	6,0	3,0
1	4,5	6,5	4,0
2	5,0	5,5	6,0
3	5,5	5,0	4,5
4	6,0	4,0	5,0
5	5,5	6,0	4,5
6	4,5	5,5	6,0
7	4,0	5,0	3,5
8	5,0	6,5	4,0
9	6,0	5,0	3,5

Таблиця Д7.Б

Варіант	M_2	S	V
	Н·м	м	м/с
1	2	3	4
0	1,6	1,0	1,5
1	1,7	1,2	2,5
2	1,8	0,8	2,0
3	1,5	0,6	1,7
4	1,4	1,4	1,8
5	1,65	1,6	1,9
6	1,75	1,0	2,1
7	1,85	0,8	1,6
8	1,6	1,6	2,0
9	1,55	1,4	1,7

6.8. Завдання Д8. Механізм (рис. Д8.0 – Д8.9) перебуває у горизонтальній площині в положенні рівноваги під дією прикладених сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 і обертального моменту M . Положення рівноваги механізму визначаються кутами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ і θ . Довжина стержнів 1 і 4 дорівнює $l_1 = 0,4$ м, $l_4 = 0,8$ м (розміри l_2 і l_3 подані в таблиці Д8.Б). Точка E на рис. Д8.2 – Д8.6 перебуває посередині відповідного стержня.

Нехтуючи тертям визначити (на підставі принципу можливих переміщень) величину і напрям сили \vec{F}_2 .

Всі необхідні для розрахунків дані подані в таблицях Д8.А і Д8.Б.

Примітка до рисунків Д8.0–Д8.9. Побудову схеми механізму необхідно починати із стержня, положення якого визначається кутом α . Всі кути відкладаються відповідно до їх позначення на рис. Д8.0 – Д8.9.

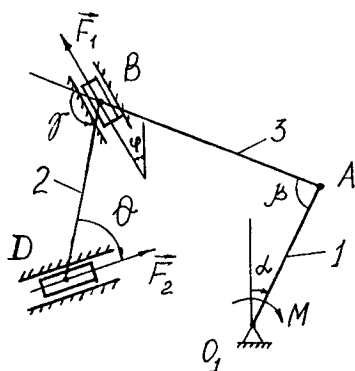


Рис. Д8.0

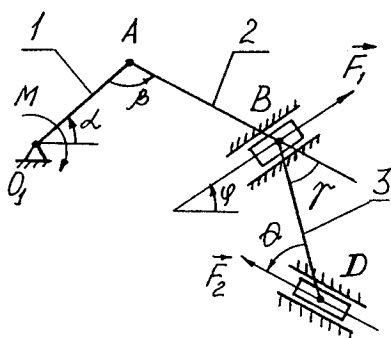


Рис. Д8.1

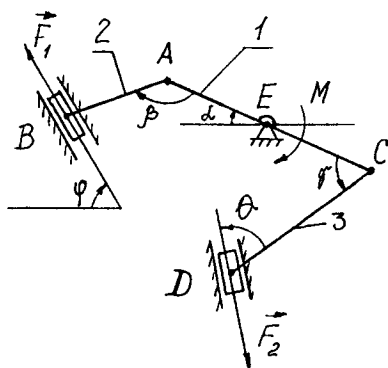


Рис. Д8.2

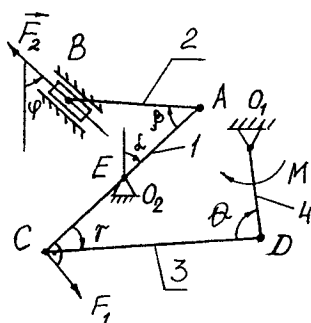


Рис. Д8.3

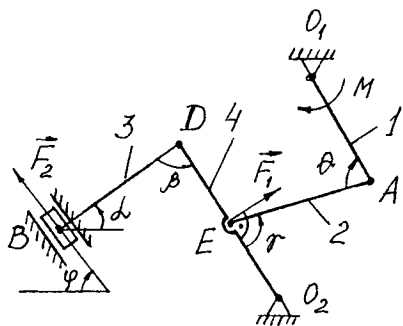


Рис. Д8.4

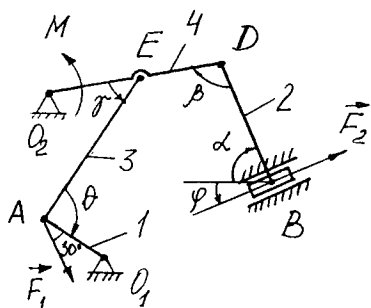


Рис. Д8.5

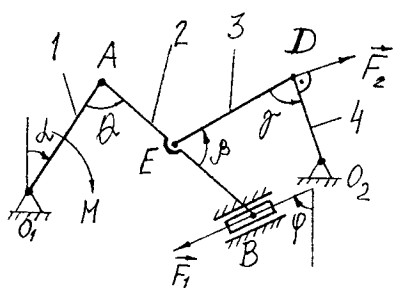


Рис. Д8.6

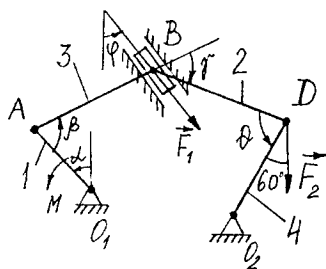


Рис. Д8.7

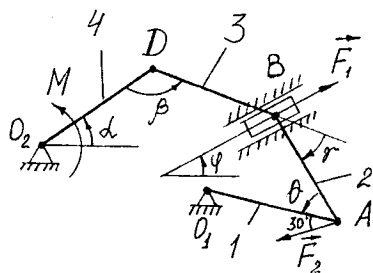


Рис. Д8.8

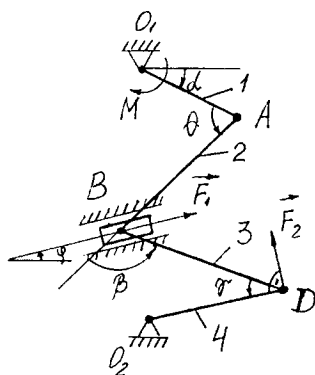


Рис. Д8.9

Таблиця Д8.А

Варіант	α	β	γ	φ	θ
	град.	град.	град.	град.	град.
0	60	60	60	90	120
1	90	120	90	90	60
2	60	150	120	90	30
3	30	150	120	0	60
4	0	120	90	0	45
5	30	120	30	0	60
6	30	120	120	0	60
7	0	150	30	0	60
8	0	60	30	0	120
9	90	150	120	90	30

Таблиця Д8.Б

Варіант	F_1	M	l_2	l_3
	Н	Н·м	м	м
1	2	3	4	5
0	160	260	1,2	1,4
1	180	280	0,8	1,0
2	200	100	1,4	1,6
3	150	250	0,9	0,8
4	140	240	0,8	1,2
5	120	220	1,2	1,6
6	220	180	1,0	1,2
7	210	160	0,9	1,4
8	250	120	1,2	0,9
9	215	140	1,4	0,8

6.9. Завдання Д9. Система (рис. Д9.0 – Д9.9) складається з чотирьох тіл: двох ступінчастих шківів (2 і 3), вантажу і суцільного однорідного циліндричного катка, або двох вантажів (рис. Д9.8, рис. Д9.9). Маса кожного шківів рівномірно розподілена по його зовнішньому ободу. Участки ниток, які з'єднують тіла системи, паралельні відповідним площинам. Під дією сил тяжіння і моментів M_2 і M_3 , прикладених до відповід-

них шківів, система починає рухатися із стану спокою. При русі системи також діють сили тертя ковзання вантажу по нерухомій площині (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$) і момент тертя кочення (коефіцієнт тертя кочення $k = 0,02$ м). Циліндричний каток котиться без ковзання по похилій площині.

Визначити:

1. Напрямок руху системи.

2. На підставі загального рівняння динаміки значення величини, що подана в таблиці Д9.А, якщо $R_1 = 0,25$ м; $R_2 = 0,2$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,4$ м; $r_3 = 0,2$ м.

Всі інші, необхідні для розрахунків дані подані в таблицях Д9.А і Д9.Б, де $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ – відповідно кутове прискорення шківа 2 і 3; W_1, W_4 – відповідно прискорення тіл 1 і 4.

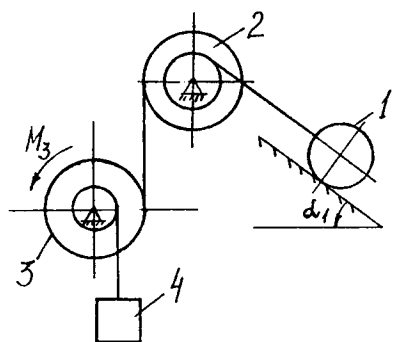


Рис. Д9.0

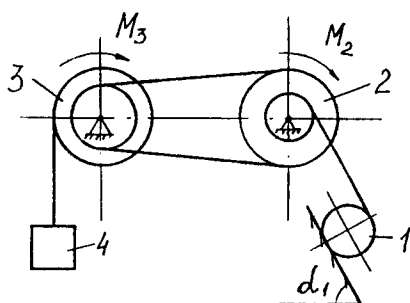


Рис. Д9.1

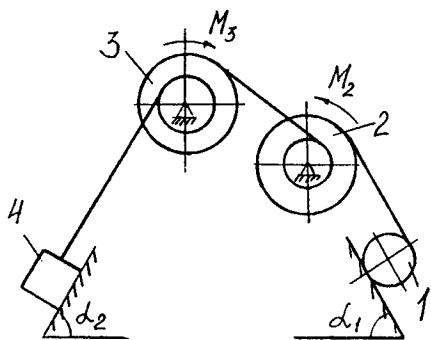


Рис. Д9.2

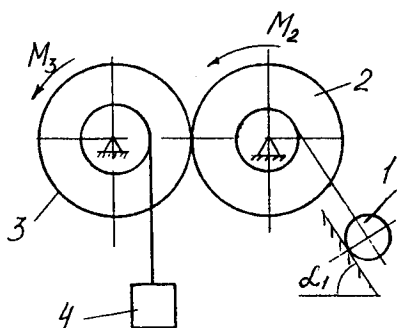


Рис. Д9.3

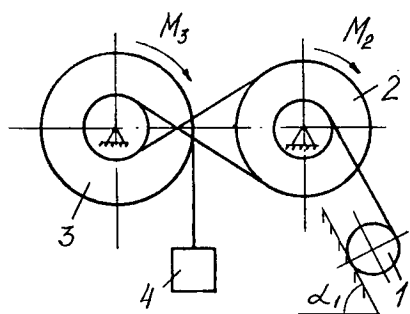


Рис. Д9.4

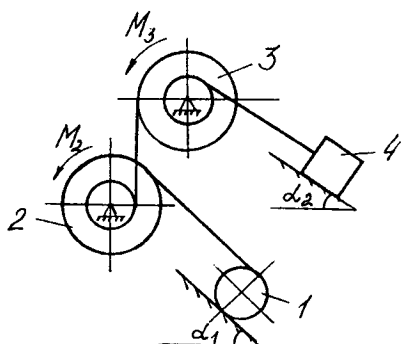


Рис. Д9.5

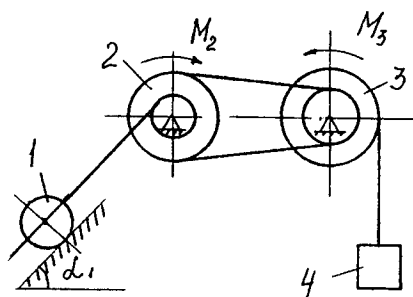


Рис. Д9.6

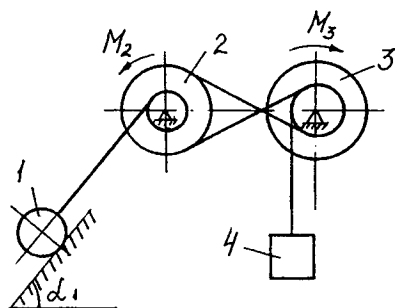


Рис. Д9.7

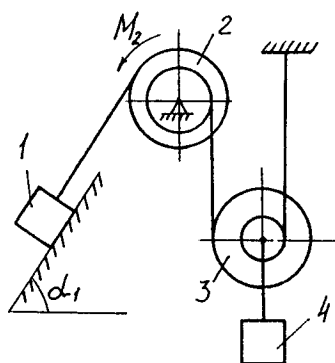


Рис. Д9.8

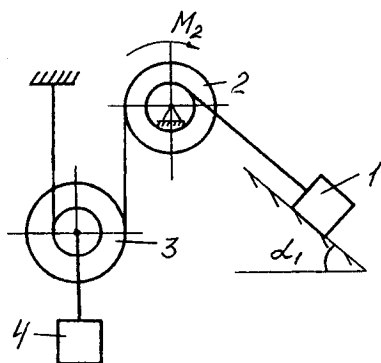


Рис. Д9.9

Таблиця Д9.А

Варіант	m_1	m_2	m_3	m_4	Визначити
	кг	кг	кг	кг	
0	2	3	4	8	ε_2
1	3	2	3	10	ε_3
2	4	4	2	12	ε_2
3	3	2	4	10	ε_3
4	8	3	2	2	W_1
5	10	2	3	3	W_4
6	12	4	2	4	W_1
7	10	2	4	5	W_4
8	4	3	2	10	ε_2
9	3	4	3	12	W_4

Таблиця Д9.Б

Варіант	α_1	α_2	M_2	M_3
	град.	град.	Н·м	Н·м
<i>l</i>	2	3	4	5
0	60	30	1,8	2,1
1	30	60	2,0	2,5
2	45	30	1,6	2,6
3	60	30	1,9	3,0
4	90	45	2,1	2,8
5	60	45	1,5	2,4
6	45	60	1,4	2,2
7	30	45	2,0	2,5
8	30	30	1,6	1,9
9	60	60	1,8	2,1

6.10. Завдання Д10. Система (рис. Д10.0 – Д10.9) складається з чотирьох тіл: двох ступінчастих шківів (2 і 3), вантажа і суцільного однорідного циліндричного катка, або двох вантажів (рис. Д10.0, рис. Д10.1). Маса кожного шківів рівномірно розподілена по його зовнішньому ободу. Участки ниток, які з'єднують тіла системи, паралельні відповідним площинам. Під дією сил тяжіння і моментів M_2 і M_3 , прикладених до відповідних шківів, система починає рухатися із стану спокою. При русі системи також діють сили тертя ковзання вантажу по нерухомій площині (коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$) і момент тертя кочення (коефіцієнт тертя кочення $k = 0,02$ м). Циліндричний каток котиться без ковзання по похилій площині.

Визначити:

1. Напрямок руху системи.
2. На підставі рівняння Лагранжа II роду значення величини, що подана в таблиці Д10.А, якщо $R_1 = 0,25$ м; $R_2 = 0,2$ м і $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,4$ м; $r_3 = 0,2$ м.

Всі інші, необхідні для розрахунків дані подані в таблицях Д10.А і Д10.Б.

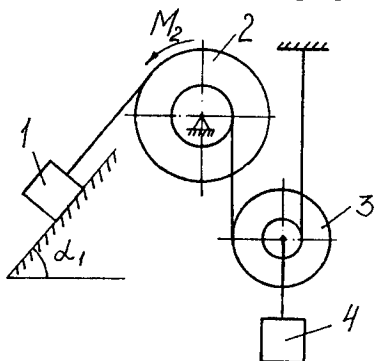


Рис. Д10.0

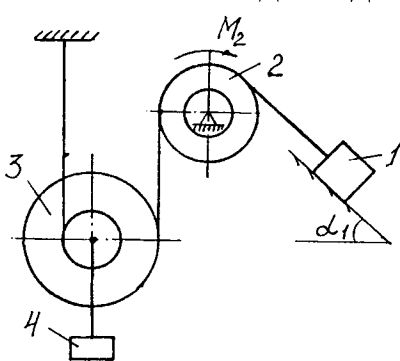


Рис. Д10.1

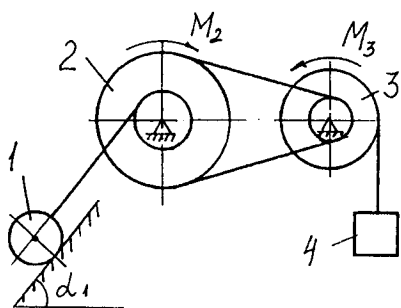


Рис. Д10.2

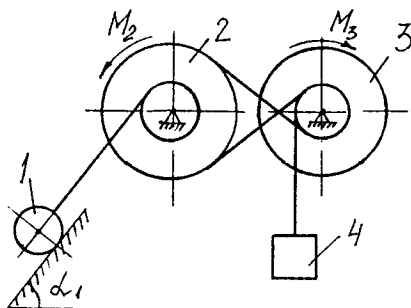


Рис. Д10.3

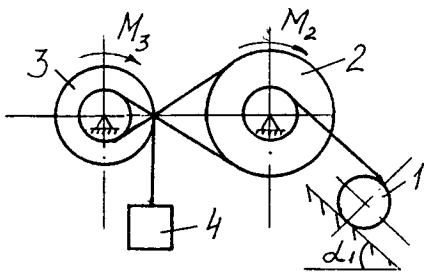


Рис. Д10.4

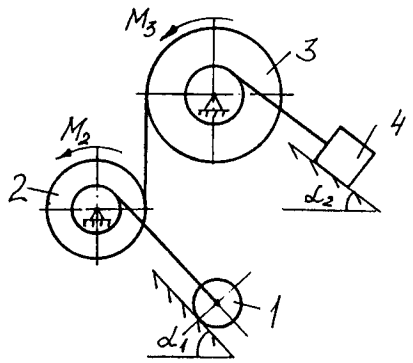


Рис. Д10.5

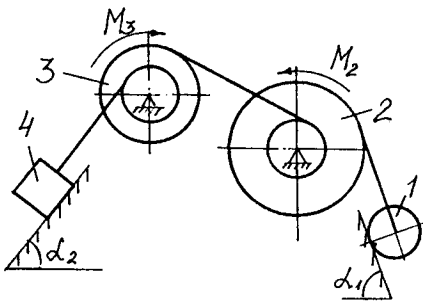


Рис. Д10.6

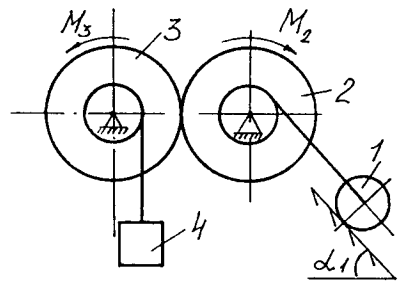


Рис. Д10.7

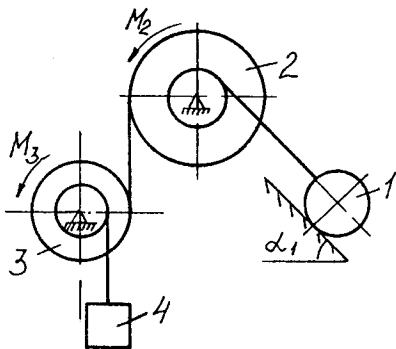


Рис. Д10.8

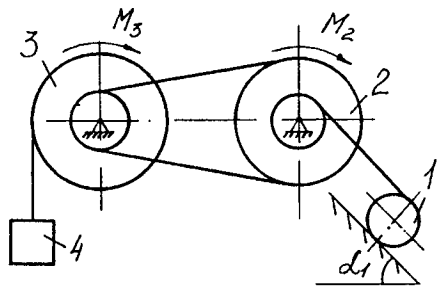


Рис. Д10.9

Таблиця Д10.А

Варіант	m_1	m_2	m_3	m_4	Визначити
	кг	кг	кг	кг	
0	3	4	3	12	W_4
1	4	3	2	10	ε_2
2	10	2	4	5	W_4
3	12	4	2	4	W_1
4	10	2	3	3	W_4
5	8	3	2	2	W_1
6	3	2	4	10	ε_3
7	4	4	2	12	ε_2
8	3	2	3	10	ε_3
9	2	3	4	8	ε_2

Таблиця Д10.Б

Варіант	α_1	α_2	M_2	M_3
	град.	град.	Н·м	Н·м
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
0	60	60	1,8	2,1
1	30	30	1,6	1,9
2	30	45	2,0	2,5
3	45	60	1,4	2,2
4	60	30	1,5	2,4
5	60	45	2,1	2,8
6	60	30	1,9	3,0
7	45	30	1,6	2,6
8	30	60	2,0	2,5
9	30	45	1,8	2,1

РОЗДІЛ 7. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних завдань з динаміки.

7.1. Предмет динаміки. Загальні закони динаміки.

Динаміка – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних об'єктів, з врахуванням сил, що визивають цей рух.

Динаміка – це найбільш загальна частина теоретичної механіки, яка являє собою дослідно-теоретичну наукову дисципліну.

В основу динаміки покладені закони, вперше в найбільш повному і завершеному вигляді сформульовані І. Ньютоном в 1687 р. в книзі “Математичні початки натуральної філософії”.

Перший закон Ньютона в сучасній інтерпретації читається наступним чином: “вільна матеріальна точка продовжує утримуватися у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху, поки вона не буде примушена прикладеними до неї силами змінити цей стан”.

З першого закону випливає, що кінематичним станом матеріальної точки є, або рівномірний прямолінійний рух, або стан спокою. Такий стан матеріальної точки має назву інерціального, а система відліку в якій він має місце – інерціальною.

Якщо рух матеріальної точки відрізняється від рівномірного і прямолінійного, то вона перебуває у взаємодії з тілами, що її оточують.

Кількісною мірою взаємодії матеріальної точки є сила. Сила характеризує напрям та інтенсивність цієї взаємодії.

Кількісне співвідношення між силою і кінематичними величинами, що характеризують взаємодію матеріальної точки з іншими тілами, дає другий закон Ньютона – основний закон динаміки.

Другий закон Ньютона формулюється в двох модифікаціях. Приймаючи за міру механічного руху кількість руху – добуток маси m на швидкість \vec{V} , тобто $m\vec{V}$, І. Ньютон встановлює закон, який в сучасній інтерпретації читається наступним чином: “зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна прикладеній до точки силі і відбувається у напрямку прямої, вздовж якої ця сила діє”. Математичний вираз цього закону має вигляд

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}. \quad (7.1)$$

Вираз (7.1) широко застосовується при дослідженні таких механічних процесів, як удар пружних тіл, рух матеріальної точки змінної маси, рух суцільного середовища та інше.

Інша формулювання другого закону виникла у І. Ньютона на основі багаточисельних досліджень по визначенню співвідношення між силою, що діє на тіло, масою тіла, та прискоренням, яке отримує тіло під дією сили.

Саме ці дослідження дозволили І. Ньютону зробити висновок, який в сучасному вигляді можна сформулювати наступним чином: “сила, що діє на матеріальну точку, надає їй прискорення, яке пропорційне величині цієї сили і має напрям сили”. В аналітичній формі цей закон має вигляд

$$m\vec{W} = \vec{F}, \quad (7.2)$$

де m – маса матеріальної точки;

\vec{W} – вектор прискорення точки;

\vec{F} – сила, що діє на точку.

Ця модифікація другого закону динаміки дозволяє виявити причину появи прискорення матеріальної точки і відповідні до неї кількісні залежності.

Третій закон Ньютона носить назву дії і протидії. В сучасній інтерпретації цей закон читається так: “дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, які є рівні за величиною (модулем) і напрямлені вздовж однієї прямої у протилежні сторони”.

З другим законом та аксіомою про паралелограм сил пов’язаний **четвертий закон Ньютона** – закон незалежності дії сил. В сучасній інтерпретації він формулюється: “якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то точка одержує прискорення, яке дорівнює геометричній сумі тих прискорень, які б вона одержала під дією кожної із цих сил окремо”.

Таким чином, якщо на матеріальну точку діють сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ і кожна з них надає точці відповідні прискорення $\vec{W}_1, \vec{W}_2, \dots, \vec{W}_n$, то прискорення точки буде дорівнювати

$$\vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + \dots + \vec{W}_n.$$

На підставі (7.2) можна записати

$$m\vec{W}_1 = \vec{F}_1, \quad m\vec{W}_2 = \vec{F}_2, \dots, m\vec{W}_n = \vec{F}_n.$$

Складаючи між собою ці рівності, отримуємо

$$m(\vec{W}_1 + \vec{W}_2 + \dots + \vec{W}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n,$$

або на підставі закону незалежності дії сил,

$$m\vec{W} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}, \quad (7.3)$$

де \vec{F} – рівнодійна всіх сил, що прикладені до матеріальної точки.

Отже, рух матеріальної точки під дією сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ буде таким же, як і при дії однієї сили, що дорівнює їх геометричній сумі (рівнодійній).

7.2. Диференціальні рівняння руху вільної та невільної матеріальної точки. Принцип Д'Аламбера.

Матеріальна точка – це найпростіша модель матеріальних об'єктів, рух яких вивчає динаміка.

Під матеріальною точкою розуміють матеріальне тіло, обертальним рухом якого у порівнянні з поступальним, можна знехтувати.

Матеріальна точка називається вільною, якщо на її рух не накладені ніякі обмеження. У противному разі маємо невільну матеріальну точку.

Запишемо рівняння (7.3) у вигляді

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k, \quad (7.4)$$

де $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{W}$ – прискорення матеріальної точки.

Рівняння (7.4) носить назву диференціального рівняння руху вільної матеріальної точки у векторній формі.

Якщо спроекціювати обидві частини рівняння (7.4) на осі декартової системи координат, то отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx}; \\ m \ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky}; \\ m \ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Рівняння (7.5) називаються диференціальними рівняннями руху вільної матеріальної точки в координатній (декартові координати) формі.

Якщо спроекціювати обидві частини рівняння (7.4) на осі натурального тригранника (натуральні осі), то одержимо рівняння

$$\begin{aligned} m \frac{dV_\tau}{dt} &= \sum_{k=1}^n F_{k\tau}; \\ \frac{mV^2}{\rho} &= \sum_{k=1}^n F_{kn}; \\ 0 &= \sum_{k=1}^n F_{kb}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Рівняння (7.6) називаються диференціальними рівняннями руху вільної матеріальної точки в проекціях на осі натурального тригранника.

Розглянемо рух невідільної матеріальної точки M , що має масу m . Нехай під дією сили \vec{F} точка одержує прискорення \vec{W} (рис. 7.1). Очевидно, що лінії дії векторів \vec{F} і \vec{W} не співпадають, як це має місце у випадку руху вільної матеріальної точки.

Розкладемо силу \vec{F} по двох взаємно перпендикулярних напрямках на дві сили \vec{F}' і \vec{F}'' . Напрямок сили \vec{F}' співпадає з напрямком вектора прискорення точки \vec{W} , а лінія дії сили \vec{F}'' є перпендикулярною до цього вектора (рис. 7.1). Сила $\vec{F}' = m\vec{W}$ відповідає фізичному змісту другого закону Ньютона. Сила \vec{F}'' не змінює стан руху точки.

Сила \vec{F}'' має назву “втраченої сили”. Існування “втраченої сили” пояснюється тим, що при русі невідільної матеріальної точки виникає додаткова сила \vec{R} , яка обумовлена наявністю в’язі, що накладена на точку. Сила \vec{R} носить назву сили реакції і за модулем дорівнює “втраченій силі” і має напрям вздовж лінії дії сили \vec{F}'' у протилежному напрямку (рис. 7.1). Таким чином, геометрична сума “втраченої сили” \vec{F}'' і реакції в’язей \vec{R} дорівнює нулю, тобто

$$\vec{F}'' + \vec{R} = \vec{0}. \quad (7.7)$$

Рівняння (7.7) виражає фізичний зміст аксіоми про звільнення від в’язей: “будь-яку невідільну матеріальну точку можна вважати за вільну, якщо уявно відкинути в’язь, що накладена на точку, і до діючої на точку сили \vec{F} додати реакцію в’язі \vec{R} ”.

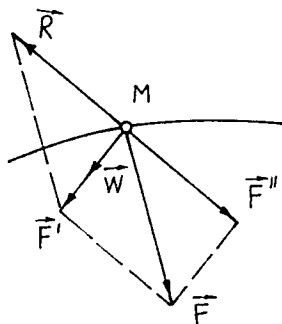


Рис. 7.1.

З рис. 7.1 випливає, що

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{R}. \quad (7.8)$$

Враховуючи рівність (7.8) рівнянню (7.3) можна надати вигляд

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (7.9)$$

де $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ – прискорення матеріальної точки;

\vec{R} – реакція в'язі, що накладена на точку.

Рівняння (7.9) називається диференціальним рівнянням руху невідільної матеріальної точки у векторній формі.

Якщо спроеціювати обидві частини рівняння (7.9) на осі декартової системи координат, або осі натурального тригранника, то відповідно отримуємо: диференціальні рівняння руху (7.10) невідільної матеріальної точки в координатній (декартові координати) формі і в проекціях на осі натурального тригранника (7.11):

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx} + R_x; \\ m \ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky} + R_y; \\ m \ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz} + R_z; \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} m \frac{dV_\tau}{dt} &= \sum_{k=1}^n F_{k\tau} + R_\tau; \\ m \frac{V^2}{\rho} &= \sum_{k=1}^n F_{kn} + R_n; \\ 0 &= \sum_{k=1}^n F_{kb} + R_b. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Розглянемо рух невідільної матеріальної точки. Як вже було зазначено, рух такої точки можна розглядати як вільний, якщо застосовувати аксіому про звільнення від в'язей (рис. 7.2). З рис. 7.2 випливає, що точка M здійснює рух під дією сили $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{R}$. З іншого боку, сила $\vec{F}' = m\vec{W}$

(на підставі другого закону динаміки). Якщо поставити за мету звести стан руху точки до стану спокою, то очевидно, до сил \vec{F} і \vec{R} , що діють на точку, необхідно додати силу $\vec{F}^{in} = -m\vec{W}$ (рис. 7.2).

Сила \vec{F}^{in} , рівна за модулем добутку маси точки на її прискорення і напрямлена протилежно вектору прискорення, називається силою інерції.

Тоді маємо (рис. 7.2)

$$\vec{F}^I + \vec{F}^{in} = \vec{0}$$

або

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}^{in} = \vec{0}. \quad (7.12)$$

Рівність (7.12) виражає принцип Д'Аламбера: "в кожному моменті руху матеріальної точки геометрична сума прикладеної до точки сили \vec{F} , реакції в'язі \vec{R} і сили інерції \vec{F}^{in} дорівнює нулю".

Рівність (7.12) являє собою рівняння руху матеріальної точки, яке записується у формі умови рівноваги сил. В цьому і є зміст методу кінестатики, який дозволяє задачі динаміки розв'язувати методом статички.

7.3. Перша основна задача динаміки матеріальної точки та її розв'язання. Вказівки до завдання Д1.

Перша задача динаміки полягає у визначенні сили, що діє на матеріальну точку, якщо відомий закон її руху та відома її маса, або, якщо на точку діють декілька сил, то визначити одну з них.

Дійсно, якщо, наприклад, відомі рівняння руху точки в декартовій системі координат (5.2):

$$x = f_1(t);$$

$$y = f_2(t);$$

$$z = f_3(t),$$

то проекції сили на осі координат визначаються диференціальними рівняннями руху точки, наприклад рівняннями (7.5), тобто

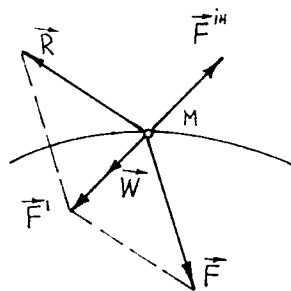


Рис. 7.2.

$$F_x = m \ddot{x} = m \frac{d^2 x}{dt^2};$$

$$F_y = m \ddot{y} = m \frac{d^2 y}{dt^2};$$

$$F_z = m \ddot{z} = m \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Знаючи проекції сили на координатні осі, легко визначити величину сили і її напрямні косинуси.

Якщо рух точки задано натуральним способом, тобто відомий закон руху точки по траєкторії (5.4), початок відліку, додатній та від'ємний напрям руху, то проекції сил на осі натурального тригранника визначаються рівняннями (7.6), тобто

$$F_\tau = m \frac{dV_\tau}{dt};$$

$$F_n = m \frac{mV^2}{\rho};$$

$$F_b = \sum_{k=1}^n F_{kb}.$$

Знаючи проекції сили на натуральні осі, легко визначити величину сили і її напрям.

Таким чином, розв'язання першої задачі динаміки зводиться до визначення прискорення матеріальної точки, яке при відомих рівняннях руху точки (5.2) або (5.4) визначається за правилами кінематики.

Розв'язання першої основної задачі динаміки матеріальної точки слід виконувати в такій послідовності:

1) встановити систему відліку, в якій буде розглядатися рух матеріальної точки і зобразити на рисунку точку в довільному положенні в обраній системі відліку;

2) якщо рух матеріальної точки невільний, то необхідно розглянути також ті тіла (в'язі), які перебувають в контакті з точкою і зобразити їх на рисунку;

3) прикласти до точки всі відомі (активні) сили;

4) користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, відкинути умовно в'язі і замінити їх вплив на матеріальну точку реакціями в'язей;

5) скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки, відповідно до обраної системи відліку, в формі рівнянь (7.5), (7.6) або (7.10), (7.11);

6) визначити по відомому руху матеріальної точки проекції прискорення точки на осі координат системи відліку;

7) розв'язати систему одержаних рівнянь і визначити шукані величини.

Розв'язання першої основної задачі динаміки можна також провести за допомогою принципу Д'Аламбера. Розв'язуючи задачі за допомогою цього принципу застосовують розглянуту схему розв'язання задач до пункту 4 включно, а пункти 5, 6 і 7 замінюють наступними:

5) прикласти до матеріальної точки відповідні сили інерції;

6) побудувати відповідні до обраної системи відліку осі координат з початком в точці, рух якої розглядається;

7) скласти відповідно до отриманої системи збіжних сил рівняння їх рівноваги відносно обраної системи координат;

8) розв'язати систему одержаних рівнянь рівноваги збіжної системи сил і визначити шукані величини.

Приклад 7.1. Для очищення зерна від домішок на пивоварних заводах, застосовується сепаратор, схема якого подана на рис. 7.3. Сепаратор складається з двох ситових кузовів 1, які підвішені на тросах до нерухомої рами 2 в точках A і A_1 ; приводного механізму 3; двох подавальних коробів 4; двох аспіраційних камер 5.

За допомогою приводного механізму 3 кузови 1 здійснюють обертальний рух в горизонтальній площині навколо вертикальних осей, які проходять через нерухомі точки A і A_1 (рис. 7.3).

Визначити допустиму кутову швидкість обертання ситових кузовів, а також допустиму вагу кожного із них, якщо допустиме навантаження на кожний із тросів не повинно перевищувати $T = 2,5$ кН.

Довжина тросів дорівнює $l = 5$ м кут відхилення тросів від вертикалі дорівнює $\alpha = 15^\circ$. Вагою тросів знехтувати.

Розв'язання. Розрахунковою моделлю руху ситового кузова, підвішеного на тросі до нерухомої точки, є конічний математичний маятник, який описує в горизонтальній площині коло, причому нитка утворює з вертикаллю кут α .

Розглянемо рух одного із ситових кузовів, вважаючи його матеріальною точкою M . Так як точка M рухається по відомій траєкторії і ця траєкторія є коло, то доцільно розглядати рух точки в натуральній системі відліку (рис. 7.4).

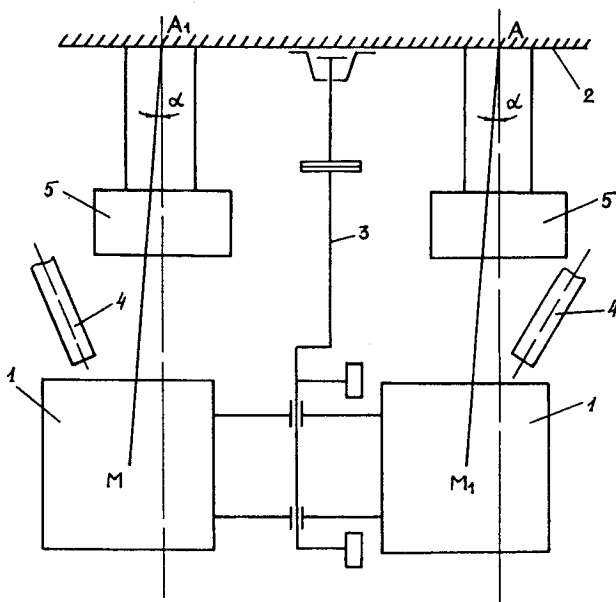


Рис. 7.3.

Матеріальна точка M невільна, оскільки на неї накладена в'язь – невага нерозтяжна нитка AM (рис. 7.4).

Прикладаємо до точки активну силу – силу ваги \vec{P} і користуємось аксіомою про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язь і її вплив на рухому точку M замінимо реакцією \vec{T} , що напрямлена вздовж нитки AM (рис. 7.4).

Отже на точку M діють дві сталі за величиною сили \vec{P} і \vec{T} . Точка здійснює рух по колу радіуса $R = AM \sin \alpha = ls \sin \alpha$ (рис. 7.4).

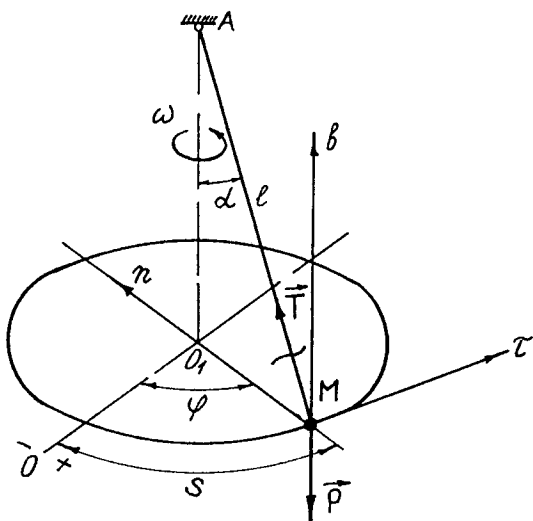


Рис. 7.4.

Побудуємо в точці M осі натурального тригранника та складемо диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на ці осі в формі рівнянь (7.11), тобто

$$\begin{aligned} m \frac{dV_\tau}{dt} &= 0; \\ m \frac{V^2}{\rho} &= T \sin \alpha; \\ 0 &= T \cos \alpha - P. \end{aligned}$$

З першого рівняння одержуємо

$$\frac{dV_\tau}{dt} = 0.$$

Звідси $V_\tau = \text{const}$, тобто рух точки M по траєкторії відбувається із сталою швидкістю (рівномірно).

З третього рівняння визначаємо величину сили \vec{P} , тобто

$$P = T \cos \alpha = 2,5 \cos 15^\circ = 2,5 \cdot 0,9659 = 2,4 \text{ кН.}$$

З другого рівняння визначаємо лінійну швидкість руху точки по траєкторії, тобто

$$V = \sqrt{\frac{T \sin \alpha \cdot \rho}{m}} = \sqrt{\frac{T \sin^2 \alpha \cdot l g}{P}},$$

де $\rho = R = l \sin \alpha$; $m = \frac{P}{g}$.

Так як $V_\tau = \frac{ds}{dt}$, а $s = \varphi R = \varphi l \sin \alpha$, то

$$V_\tau = \frac{d}{dt}(\varphi l \sin \alpha) = l \sin \alpha \cdot \frac{d\varphi}{dt} = l \sin \alpha \cdot \omega,$$

де ω – кутова швидкість обертання конічного математичного маятника навколо нерухомої осі AO_1 (рис. 7.4).

Тоді маємо

$$l \sin \alpha \cdot \omega = \sqrt{\frac{T \sin^2 \alpha \cdot l g}{P}}.$$

Звідси

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{Tl g}{P}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2,5 \cdot 5 \cdot 9,81}{2,4}} = 1,43 \text{ 1/с.}$$

Дамо розв'язання цієї задачі за допомогою принципу Д'Аламбера. Як і в попередньому розв'язанні цієї задачі, розглядаємо рух точки в натуральній системі відліку (рис. 7.5). Прикладаємо до точки активну силу \vec{P} і реакцію нитки \vec{T} , що напрямлена вздовж нитки AM .

Додамо до сил \vec{P} і \vec{T} сили інерції. Так як точка рухається по криволінійній траєкторії, то вона, в загальному випадку, може мати нормальне прискорення \vec{W}_n , яке має напрям вздовж осі n у бік угнутості траєкторії і дотичне прискорення \vec{W}_τ . Лінія дії прискорення \vec{W}_τ співпадає з дотичною віссю τ (рис. 7.5). Відповідно до цих прискорень маємо сили інерції

$$\vec{F}_\tau^{in} = -m\vec{W}_\tau;$$

$$\vec{F}_n^{in} = -m\vec{W}_n.$$

Нормальна сила інерції \vec{F}_n^{in} матеріальної точки має напрям протилежний до її нормального прискорення, а дотична сила інерції \vec{F}_τ^{in} напрямлена у протилежну сторону від дотичного прискорення точки M (рис. 7.5).

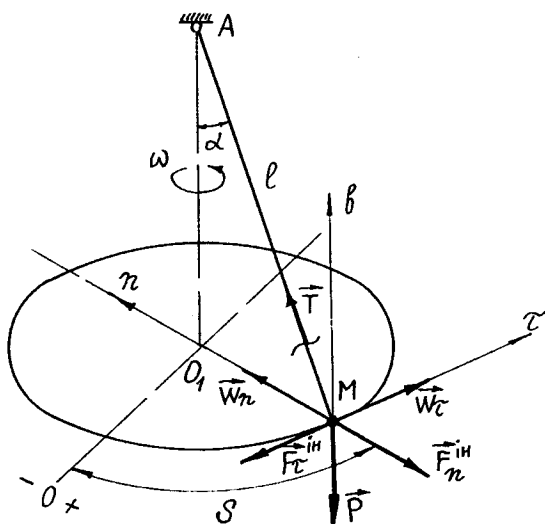


Рис. 7.5.

На підставі принципу Д'Аламбера маємо

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_n^{iu} + \vec{F}_\tau^{iu} = \vec{0}.$$

Проекціюємо це рівняння на осі натурального тригранника, одержуємо

$$\sum_{k=1}^n F_{k\tau} = -F_\tau^{iu} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kn} = T \sin \alpha - F_n^{iu} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kb} = T \cos \alpha - P = 0.$$

З першого рівняння маємо

$$-F_\tau^{iu} = -mW_\tau = -m \frac{dV_\tau}{dt} = 0, \text{ звідси } V_\tau = \text{const}, \text{ тобто точка рухається}$$

із сталою швидкістю (рівномірно).

З третього рівняння одержуємо

$$P = T \cos \alpha = 2,5 \cdot \cos 15^\circ = 2,5 \cdot 0,9659 = 2,4 \text{ кН.}$$

З другого рівняння визначаємо лінійну швидкість точки, тобто

$$T \sin \alpha - F_n^{iu} = 0;$$

$$T \sin \alpha - \frac{mV^2}{\rho} = 0;$$

$$V = \sqrt{\frac{T \sin \alpha \cdot \rho}{m}} = \sqrt{\frac{T \sin^2 \alpha \cdot l g}{P}},$$

$$\text{де } \rho = R = l \sin \alpha; \quad m = \frac{P}{g}.$$

Так як $V_\tau = \frac{ds}{dt}$, а $s = \varphi R = \varphi l \sin \alpha$, то

$$V_\tau = \frac{d}{dt}(\varphi l \sin \alpha) = l \sin \alpha \frac{d\varphi}{dt} = l \sin \alpha \cdot \omega,$$

де ω – кутова швидкість обертання конічного математичного маятника навколо нерухомої осі AO_1 (рис. 7.5).

Тоді маємо

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{T l g}{P}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2,5 \cdot 5 \cdot 9,81}{2,4}} = 1,43 \text{ 1/с.}$$

На закінчення підкреслимо, що сили інерції \vec{F}_n^{in} і \vec{F}_τ^{in} до даної матеріальної точки M не прикладені. Додавання до сил \vec{P} і \vec{T} сил інерції \vec{F}_n^{in} і \vec{F}_τ^{in} , які до точки не прикладені, приводить до того, що рівняння руху точки приймають вигляд рівнянь рівноваги.

7.4. Друга основна задача динаміки матеріальної точки та її розв'язання. Вказівки до завдання Д2.

Друга основна задача динаміки матеріальної точки полягає у визначенні закону руху точки за заданою масою, силами прикладеними до точки, і початковими умовами її руху.

Для розв'язання другої задачі динаміки необхідно двічі інтегрувати диференціальні рівняння руху матеріальної точки (7.5), (7.6) або (7.10), (7.11).

Так як діючі на матеріальну точку сили, в загальному випадку, є змінними величинами, то праві частини рівнянь (7.5), (7.6) або (7.10), (7.11) можуть бути функціями часу, координат точки і її швидкості.

При інтегруванні кожного диференціального рівняння руху точки мають місце дві сталі інтегрування, і тому при інтегруванні трьох диференціальних рівнянь, наприклад, рівнянь (7.5) або (7.10) буде шість сталих.

Нехай рівняння

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \end{aligned} \tag{7.13}$$

є загальним розв'язком рівнянь (7.6) або (7.10), де C_1, C_2, \dots, C_6 – сталі інтегрування.

З рівностей (7.13) випливає, що знання лише одних сил, що діють на матеріальну точку, недостатнє для однозначного визначення закону її руху. Для того щоб однозначно визначити закон руху точки, необхідно ще знати початкові умови її руху. Початковий стан руху матеріальної точки визначається її положенням і її швидкістю в початковий момент часу ($t = 0$).

Так, наприклад, якщо точка рухається в декартовій системі координат, то необхідно знати, в початковий момент руху точки, її координати і проекції швидкості на осі координат, тобто при $t = 0$:

$$x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0; \quad z(0) = z_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0. \quad (7.14)$$

Сукупність даних (7.14) називається початковими умовами руху матеріальної точки.

Для визначення сталих інтегрування необхідно, в момент часу $t = 0$, значенням x, y і z , які визначаються виразами (7.13), надати відповідно значення x_0, y_0 і z_0 . Далі визначивши похідні за часом від функцій (7.13), тобто

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, C_1, C_2, \dots, C_6), \end{aligned} \quad (7.15)$$

і значенням \dot{x}, \dot{y} і \dot{z} при $t = 0$ надати значення \dot{x}_0, \dot{y}_0 і \dot{z}_0 .

Таким чином, отримуємо шість рівнянь для визначення сталих інтегрування

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(0, C_1, C_2, \dots, C_6); & \dot{x}_0 &= \dot{x}_0(0, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ y_0 &= y_0(0, C_1, C_2, \dots, C_6); & \dot{y}_0 &= \dot{y}_0(0, C_1, C_2, \dots, C_6); \\ z_0 &= z_0(0, C_1, C_2, \dots, C_6); & \dot{z}_0 &= \dot{z}_0(0, C_1, C_2, \dots, C_6). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Розв'язуючи рівняння (7.16) відносно C_i , знайдемо

$$\begin{aligned} C_1 &= f_1(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); & C_4 &= f_4(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ C_2 &= f_2(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); & C_5 &= f_5(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ C_3 &= f_3(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); & C_6 &= f_6(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Підставляючи значення сталих інтегрування (7.17) в загальний розв'язок (7.13), отримуємо розв'язок, що відповідає даним початковим умовам:

$$\begin{aligned}
 x &= x \left(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \right); \\
 y &= y \left(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \right); \\
 z &= z \left(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 \right).
 \end{aligned}
 \tag{7.18}$$

Зауважимо, що найбільші труднощі при інтегруванні диференціальних рівнянь руху матеріальної точки мають місце на етапі отримання загального розв'язка (7.13), після чого сталі інтегрування визначаються без особливих труднощів.

Розв'язання другої основної задачі динаміки матеріальної точки слід виконувати в такій послідовності:

1) встановити систему відліку, в якій буде розглядатися рух матеріальної точки, записати початкові умови руху точки і зобразити на рисунку точку в довільному положенні в обраній системі відліку;

2) якщо рух матеріальної точки невільний, то необхідно розглянути також ті тіла (в'язі), які перебувають в контакті з точкою і зобразити їх на рисунку;

3) прикласти до точки всі відомі (активні) сили;

4) користуючись аксіомою про звільнення від в'язей відкинути умов в'язі і замінити їх вплив на матеріальну точку реакціями в'язей;

5) скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки, відповідно до обраної системи відліку, в формі рівнянь (7.5), (7.6) або (7.10), (7.11);

6) провести інтегрування системи диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і за початковими умовами руху точки, визначити сталі інтегрування;

7) з одержаних рівнянь визначити шукані величини.

Приклад 7.2. На складі готової продукції цукрового заводу для переміщення мішків з цукром застосовують різні типи конвеєрного транспорту. Схема одного із них подана на рис. 7.6.

Мішок з цукром масою $m = 50$ кг, почав рухатися від точки A до точки B по конвеєру, який розташований під кутом α до горизонту (рис. 7.6).

В точці B мішок не змінюючи величини своєї швидкості переходить на другий конвеєр, який розташований горизонтально.

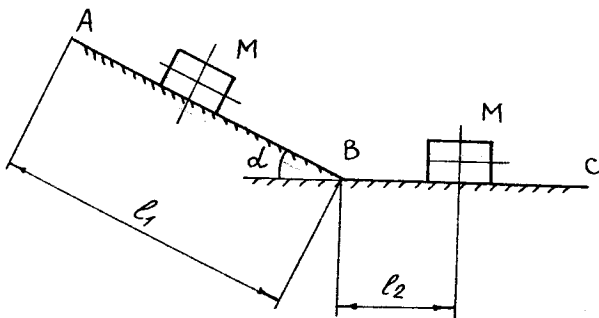


Рис. 7.6.

На ділянці AB на мішок діє сила ваги \vec{P} , сила тертя \vec{F}_T (коефіцієнт тертя $f=0,3$) і сила опору середовища \vec{R} , яка має напрям протилежний до напрямку руху мішка і за величиною дорівнює $R = \mu V^2$, де μ додатна стала величина.

Розглядаючи мішок як матеріальну точку, визначити відстань яку пройде мішок з цукром від точки B до зупинки та необхідний для цього час t_1 , якщо відомо: $\mu = 0,8 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2$; $\alpha = 45^\circ$; $l_1 = 6 \text{ м}$; $Q = 30 \text{ Н}$.

Розв'язання. Для розв'язання задачі, по-перше, розглядаємо рух мішка з цукром на ділянці AB в декартовій системі координат з початком в точці A . Вісь x направляємо вздовж конвеєра, вісь y – перпендикулярно до конвеєра (рис.7.7).

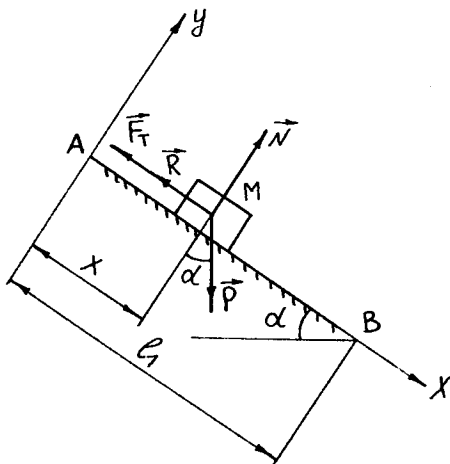


Рис. 7.7.

Розглядаючи мішок з цукром як матеріальну точку M , зображуємо її на рисунку в довільному положенні в системі відліку Axy (рис. 7.7).

Записуємо початкові умови руху точки M на ділянці AB , тобто при $t = 0$: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0$.

До точки M , яка являє собою невільну матеріальну точку, прикладені дві сили: сила \vec{P} (сила ваги) і \vec{R} (сила опору середовища). Користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, умовно відкинемо в'язь (шортка поверхня) і її вплив на точку M замінимо двома реакціями \vec{N} (нормальна реакція) і \vec{F}_T (сила тертя) рис. 7.7.

Запишемо диференціальні рівняння руху точки M в проекціях на осі x і y , тобто

$$m \ddot{x} = P \sin \alpha - F_T - R;$$

$$m \ddot{y} = N - P \cos \alpha.$$

Так як $\ddot{y} = 0$ (точка M не рухається вздовж осі y), то $N - P \cos \alpha = 0$, звідси $N = P \cos \alpha$.

Тоді сила тертя \vec{F}_T дорівнює

$$F_T = fN = fP \cos \alpha.$$

Беручи до уваги значення R і F_T перепишемо перше диференціальне рівняння так

$$m \ddot{x} = P \sin \alpha - fP \cos \alpha - \mu \dot{x}^2.$$

Перетворимо це рівняння так

$$\ddot{x} = A - B \dot{x}^2,$$

де

$$A = g(\sin \alpha - f \cos \alpha); \quad B = \frac{\mu}{m}.$$

Так як для розв'язання задачі необхідно знати швидкість точки M в точці B , і за умовою задачі відстань, яку проходить точка M від A до B відома, то доцільно \ddot{x} подати у вигляді

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\dot{x} d\dot{x}}{dx}.$$

Тоді диференціальне рівняння руху точки M приймає вигляд

$$\frac{\dot{x} d\dot{x}}{dx} = A - Bx^2.$$

Видокремлюємо змінні \dot{x} і x . Матимемо

$$\frac{\dot{x} d\dot{x}}{A - Bx^2} = dx.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$-\frac{1}{2B} \ln(A - Bx^2) + C_1 = x.$$

З початкових умов руху точки M , тобто при $t = 0$: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0$ визначимо довільну сталу інтегрування C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{2B} \ln A.$$

Беручи до уваги значення C_1 , матимемо

$$-\frac{1}{2B} \ln(A - Bx^2) + \frac{1}{2B} \ln A = x.$$

Звідси знайдемо

$$\ln \frac{A}{A - Bx^2} = 2Bx.$$

Запишемо цю рівність так:

$$e^{2Bx} = \frac{A}{A - Bx^2}.$$

Розв'язуючи цю рівність відносно \dot{x} , знайдемо

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{A}{B}(1 - e^{-2Bx})}.$$

Беручи до уваги значення A і B , останню рівність можна записати у вигляді

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{2\mu x}{m}}\right)}.$$

Підставивши в цю рівність числові значення, знайдемо швидкість точки M в точці B , тобто

$$V_B = \dot{x} = \sqrt{\frac{50 \cdot 9,81(0,707 - 0,3 \cdot 0,707)}{0,8} \left(1 - e^{-\frac{2 \cdot 0,8 \cdot 6}{50}}\right)} = 7,28 \text{ м/с}.$$

Тепер розглянемо рух точки M на ділянці BC . Система координат і сили, що діють на точку M при її русі подані на рис. 7.8.

Приймаючи, що вектор початкової швидкості точки M на ділянці BC напрямлений вздовж осі x_1 і за величиною дорівнює V_B , запишемо початкові умови руху точки M : при $t = 0$: $x_1(0) = 0$; $\dot{x}_1(0) = V_B$.

Запишемо диференціальне рівняння руху точки M в проекції на вісь x_1 , тобто

$$m \ddot{x}_1 = -Q - R;$$

$$m \ddot{x}_1 = -Q - \mu \dot{x}_1^2;$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{Q}{m} - \frac{\mu}{m} \dot{x}_1^2.$$

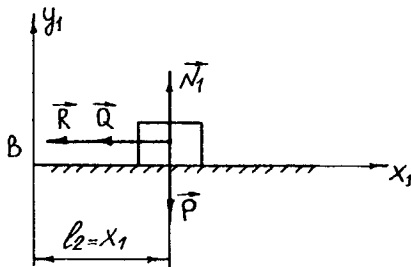


Рис. 7.8.

Позначимо

$$\frac{Q}{m} = a; \frac{\mu}{m} = n.$$

Тоді останнє рівняння приймає вигляд

$$\ddot{x}_1 = -\left(a + n\dot{x}_1^2\right). \quad (7.19)$$

Подаємо \ddot{x}_1 у вигляді

$$\ddot{x}_1 = \frac{d\dot{x}_1}{dt_1}.$$

Тоді диференціальне рівняння руху точки M приймає вигляд

$$\frac{d\dot{x}_1}{dt_1} = -\left(a + n\dot{x}_1^2\right).$$

Відокремлюємо змінні \dot{x}_1 і t_1 . Матимемо

$$\frac{d\dot{x}_1}{-\left(a + n\dot{x}_1^2\right)} = dt_1.$$

Розглянемо інтеграл

$$-\int \frac{d\dot{x}_1}{a + n\dot{x}_1^2} = -\int \frac{d\dot{x}_1}{n\left(\frac{a}{n} + \dot{x}_1^2\right)} = -\frac{1}{n} \int \frac{d\dot{x}_1}{k^2 + \dot{x}_1^2} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} \arctg \frac{\dot{x}_1}{k} + C_2,$$

де $k = \sqrt{\frac{a}{n}}$.

Отже, після інтегрування диференціального рівняння дістанемо,

$$-\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} \arctg \frac{\dot{x}_1}{k} + C_2 = t_1.$$

З початкових умов руху точки M , тобто при $t_1 = 0$: $x_1(0) = 0$; $\dot{x}_1(0) = V_B$ визначимо довільну сталу інтегрування C_2 :

$$C_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{V_B}{k}.$$

Беручи до уваги значення C_2 , n і k , матимемо

$$\frac{m}{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{Q}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\mu}{Q}} \left(V_B - \dot{x}_1 \right) = t_1. \quad (7.20)$$

З рівняння (7.20) визначаємо час t_1 руху точки M від точки B до зупинки $\left(\dot{x}_1 = 0 \right)$, тобто

$$t_1 = \frac{m}{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{Q}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\mu}{Q}} \cdot V_B = \frac{50}{0,8} \sqrt{\frac{0,8}{30}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{0,8}{30}} \cdot 7,28 = 12 \text{ с.}$$

Щоб визначити шлях, який пройде точка M від точки B до зупинки повернемося до диференціального рівняння руху точки (7.19) і подамо \ddot{x}_1 у вигляді

$$\ddot{x}_1 = \frac{d \dot{x}_1}{dt_1} = \frac{d \dot{x}_1}{dt_1} \cdot \frac{d \dot{x}_1}{d \dot{x}_1} = \frac{\dot{x}_1 d \dot{x}_1}{d \dot{x}_1}.$$

Тоді рівняння (7.19) приймає вигляд

$$\frac{\dot{x}_1 d \dot{x}_1}{d \dot{x}_1} = -a + n \dot{x}_1^2.$$

Відокремлюємо змінні \dot{x}_1 і x_1 . Матимемо

$$-\frac{\dot{x}_1 d \dot{x}_1}{a + n \dot{x}_1^2} = dx_1.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$-\frac{1}{2n} \ln \left(a + n \dot{x}_1^2 \right) + C_3 = x_1.$$

З початкових умов руху точки M , тобто при $t_1 = 0$: $x_1(0) = 0$; $\dot{x}_1(0) = V_B$ визначаємо довільну сталу інтегрування C_3 :

$$C_3 = \frac{1}{2n} \ln \left(a + n V_B^2 \right).$$

Беручи до уваги значення C_3 , матимемо

$$-\frac{1}{2n} \ln \left(a + n \dot{x}_1^2 \right) + \frac{1}{2n} \ln \left(a + n V_B^2 \right) = x_1.$$

Перетворюємо цей вираз так

$$x_1 = \frac{1}{2n} \ln \frac{a + n V_B^2}{a + n \dot{x}_1^2}.$$

Підставляючи сюди значення a , n , V_B і $\dot{x}_1 = 0$ (так як точка зупиняється), знайдемо відстань від точки B , яку долає точка M до своєї зупинки:

$$\begin{aligned} l_2 = x_1 &= \frac{1}{2 \frac{\mu}{m}} \ln \frac{\frac{Q}{m} + \frac{\mu}{m} V_B^2}{\frac{Q}{m}} = \frac{m}{2\mu} \ln \frac{(Q + \mu V_B^2)m}{mQ} = \frac{m}{2\mu} \ln \frac{(Q + \mu V_B^2)}{Q} = \\ &= \frac{50}{2 \cdot 0,8} \ln \frac{(30 + 0,8 \cdot 7,28^2)}{30} = 27,5 \text{ м.} \end{aligned}$$

Приклад 7.3. На цукрових заводах вода після миття цукрових буряків подається у відстійник (рис. 7.9), де тверді частинки осаджуються на дно відстійника і вода очищується.

Прийнявши силу опору середовища, під час осаджування частинки кулеподібної форми, рівною $\vec{R} = -k\vec{V}$ (k – додатня стала величина) визначити рівняння руху частинки, якщо початкова швидкість її руху напрямлена горизонтально і за величиною дорівнює V_0 .

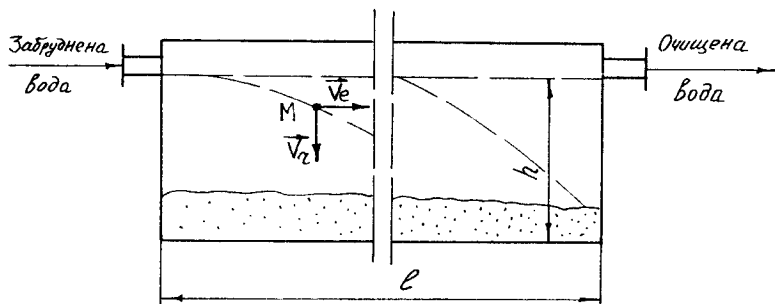


Рис. 7.9.

Розв'язання. Розташуємо початок O системи координат Oxy в початковому положенні частинки M , що осаджується. Вісь Oy – напрямлемо вертикально вниз, вісь Ox – горизонтально. Точку M зображуємо на рисунку в довільному положенні в системі відліку Oxy (рис. 7.10).

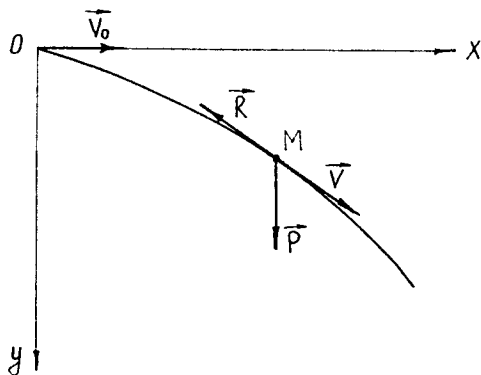


Рис. 7.10.

Записуємо початкові умови руху точки M , тобто при $t = 0$: $x(0) = 0$;
 $\dot{x}(0) = V_0$ і $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

Записуємо диференціальні рівняння руху точки M в проекціях на осі x і y , тобто

$$m \ddot{x} = P_x - kV_x;$$

$$m \ddot{y} = P_y - kV_y.$$

Беручи до уваги значення P_x, P_y, V_x і V_y перепишемо диференціальні рівняння так

$$m \ddot{x} = -k \dot{x};$$

$$m \ddot{y} = P - k \dot{y}.$$

Подамо \ddot{x} і \ddot{y} відповідно у вигляді

$$\ddot{x} = \frac{d \dot{x}}{dt}; \quad \ddot{y} = \frac{d \dot{y}}{dt}.$$

Тоді диференціальні рівняння руху точки M приймають вигляд

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = -k\dot{x};$$

$$m \frac{d\dot{y}}{dt} = P - k\dot{y}.$$

Відокремлюємо змінні \dot{x}, \dot{y} і t . Матимемо

$$\frac{m d\dot{x}}{\dot{x}} = -k dt; \quad \frac{m d\dot{y}}{P - k\dot{y}} = dt.$$

Після інтегрування рівнянь дістанемо

$$m \ln \dot{x} = -kt + C_1; \quad -\frac{m}{k} \ln(P - k\dot{y}) = t + C_2.$$

З початкових умов руху точки M , тобто при $t=0: x(0)=0; \dot{x}(0)=V_0$ і $y(0)=0; \dot{y}(0)=0$ визначаємо довільні сталі інтегрування C_1 і C_2 :

$$C_1 = m \ln V_0; \quad C_2 = -\frac{m}{k} \ln P.$$

Таким чином

$$m \ln \dot{x} = -kt + m \ln V_0;$$

$$-\frac{m}{k} \ln(P - k\dot{y}) = t - \frac{m}{k} \ln P$$

або

$$\ln \frac{\dot{x}}{V_0} = -\frac{kt}{m}; \quad \ln \frac{P - k\dot{y}}{P} = -\frac{kt}{m}.$$

Звідси знайдемо

$$\dot{x} = V_0 e^{-\frac{kt}{m}}; \quad \dot{y} = \frac{P}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right).$$

Подамо \dot{x} і \dot{y} відповідно у вигляді

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

Тоді останні рівняння приймають вигляд

$$\frac{dx}{dt} = V_0 e^{-\frac{kt}{m}}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{P}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right).$$

Відокремлюємо змінні x, y і t і інтегруємо, отримуємо

$$x = -\frac{V_0 m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} + C_3; \quad y = \frac{P}{k} t + \frac{Pm}{k^2} e^{-\frac{kt}{m}} + C_4.$$

З початкових умов руху точки M , тобто при $t=0$: $x(0)=0$; $\dot{x}(0)=V_0$ і $y(0)=0$; $\dot{y}(0)=0$ визначимо довільні сталі інтегрування C_3 і C_4 :

$$C_3 = \frac{V_0 m}{k}; \quad C_4 = -\frac{Pm}{k^2},$$

таким чином

$$x = \frac{V_0 m}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right); \quad y = \frac{mg}{k} \left[t - \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \right]. \quad (7.21)$$

Рівняння (7.21) – це рівняння руху твердої частинки при осаджуванні.

Зауважимо, що для визначення рівняння траєкторії твердої частинки при її осаджуванні необхідно з рівнянь (7.21) виключити час t (див. приклад 5.1).

7.5. Вільні і згасаючі коливання матеріальної точки.

Вказівки до завдання ДЗ.

Нехай на матеріальну точку M діє сила \vec{F} , яка намагається повернути точку M в її початкове положення і, яка за величиною пропорційна відхиленню точки M від початкового положення (відновлювальна сила). Якщо рух точки M відбувається вздовж осі x , а точка O – початкове положення точки M (рис. 7.11), то проекція відновлювальної сили на вісь x дорівнює

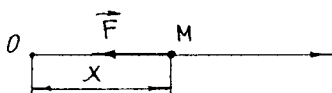


Рис. 7.11.

$$F_x = -cx, \quad (7.22)$$

де c – коефіцієнт пропорційності.

Диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m \ddot{x} = -cx$$

або

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (7.23)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{m}.$$

Характеристичним рівнянням для диференціального рівняння (7.23) буде рівняння

$$r^2 + k^2 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння дорівнюють

$$r_{1,2} = \pm ik.$$

Загальним розв'язком рівняння (7.23) буде

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \quad (7.24)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Введемо нові сталі a і α , беручи

$$C_1 = a \cos \alpha; \quad C_2 = a \sin \alpha.$$

Тоді маємо

$$x = a \cos \alpha \sin kt + a \sin \alpha \cos kt$$

або

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (7.25)$$

Сталі a і α (або C_1 і C_2) визначаються за початковими умовами руху матеріальної точки.

Таким чином, під дією відновлювальної сили матеріальна точка здійснює рух за синусоїдним законом, тобто здійснює гармонічний коливальний рух. Такі коливання носять назву вільних коливань.

В рівнянні (7.25) a – амплітуда коливання, тобто абсолютна величина найбільшого відхилення точки від її початкового положення; $(kt + \alpha)$ – фаза коливання, α – початкова фаза коливання; k – колова частота коливання (число коливань матеріальної точки за 2π секунд)

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (7.26)$$

Колова частота коливання від початкових умов руху матеріальної точки не залежить. Ця властивість називається ізохронністю, а коливання – ізохронними.

Періодом коливання T матеріальної точки називається найменший проміжок часу, по закінченню якого точка має ту ж саму координату x і ту ж саму проекцію швидкості \dot{x} . Період коливання визначається за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (7.27)$$

Графік вільних коливань показаний на рис. 7.12, де подані початкове відхилення точки x_0 , амплітуда коливання a , а також період коливання T .

Розглянемо вплив сили опору середовища на вільні коливання матеріальної точки. Якщо окрім відновлювальної сили \vec{F} на матеріальну точку M діє сила опору середовища \vec{R} , яка пропорційна першій степені швидкості точки і має протилежний до вектора швидкості точки напрям (рис. 7.13), то проекція сили \vec{R} на вісь x дорівнює

$$R_x = -b\dot{x}$$

і диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x}$$

або

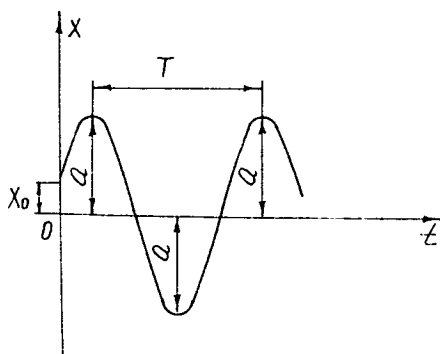


Рис. 7.12.

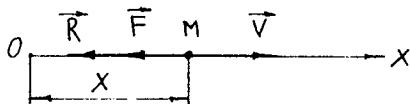


Рис. 7.13.

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0, \quad (7.28)$$

де

$$k^2 = \frac{c}{m}; \quad h = \frac{b}{2m}.$$

Характеристичним рівнянням для рівняння (7.28) буде рівняння

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (7.28) відповідно до теорії диференціальних рівнянь, залежить від коренів характеристичного рівняння, тобто

$$r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}. \quad (7.29)$$

Тут мають місце три випадки.

Випадок I. $h < k$ ("малий" опір середовища). Корені (7.29) дорівнюють

$$r_{1,2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2}. \quad (7.30)$$

Загальний розв'язок рівняння (7.28) має вигляд

$$x = e^{-ht} (C_1 \sin k^*t + C_2 \cos k^*t), \quad (7.31)$$

де $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$; C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Введемо нові сталі a і α за допомогою формул

$$C_1 = a \cos \alpha; \quad C_2 = a \sin \alpha.$$

Тоді отримуємо

$$x = ae^{-ht} \sin(k^*t + \alpha). \quad (7.32)$$

З рівняння (7.32) випливає, що $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (так як $e^{-ht} \rightarrow 0$), тобто рух матеріальної точки є згасаючим. Цей згасаючий рух матеріальної точки носить коливальний характер. На рис. 7.14 показаний графік згасаючих коливань матеріальної точки.

З рис. 7.14 випливає, що рух матеріальної точки не є періодичним, так як величина ae^{-ht} змінна і убуває по експоненціальному закону. Але по аналогії з вільними коливаннями при згасаючих коливаннях також вводять у розгляд колову частоту коливання, період і амплітуду.

Колова частота згасаючих коливань матеріальної точки визначається за формулою:

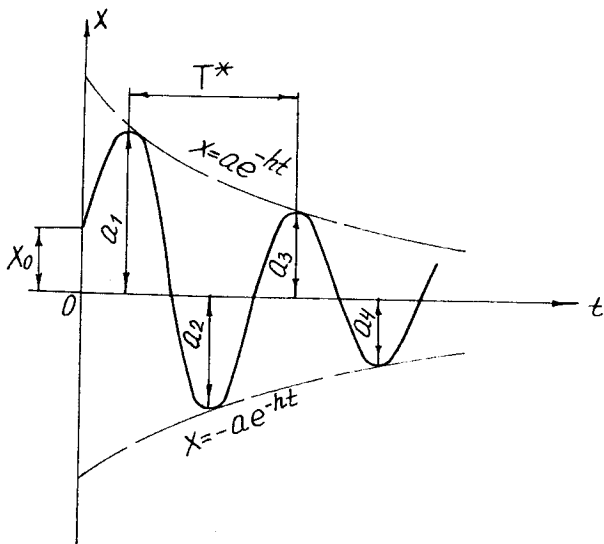


Рис. 7.14.

$$k^* = \sqrt{k^2 - h^2}. \quad (7.33)$$

Період згасаючих коливань матеріальної точки визначається за формулою:

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}. \quad (7.34)$$

Амплітуда коливання a_1, a_2, a_3, \dots убуває за кожний полуперіод за законом геометричної прогресії (рис. 7.14), знаменник якої дорівнює

$$q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = e^{\frac{-hT^*}{2}}. \quad (7.35)$$

Величина q називається декрементом коливання. Логарифмічним декрементом коливання називається логарифм відношення двох суміжних амплітуд, які відрізняються за часом на $\frac{T^*}{2}$, тобто

$$\ln \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{hT^*}{2}. \quad (7.36)$$

Випадок II. $h > k$ ("великий" опір середовища). Корені (7.29) дорівнюють

$$r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}. \quad (7.37)$$

Загальний розв'язок рівняння (7.28) має вигляд

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (7.38)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

З рівняння (7.38) випливає, що рух точки не носить коливального характеру, точка здійснює так званий аперіодичний згасаючий рух, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0. \quad (7.39)$$

Випадок III. $h = k$ (граничний випадок). Корені (7.29) дорівнюють

$$r_{1,2} = -h. \quad (7.40)$$

Загальний розв'язок рівняння (7.28) має вигляд

$$x = (C_1 t + C_2) e^{-ht}, \quad (7.41)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

З рівняння (7.41) випливає, що і в граничному випадку рух точки не носить коливального характеру, а є згасаючим аперіодичним рухом.

Розв'язання задач на вільні і згасаючі коливання матеріальної точки слід виконувати в такій послідовності:

- 1) встановити систему відліку з початком у положенні статичної рівноваги матеріальної точки;
- 2) записати початкові умови руху матеріальної точки;
- 3) прикласти до точки всі відомі (активні) сили;
- 4) користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, відкинути умовно в'язі і замінити їх вплив на матеріальну точку реакціями в'язей;
- 5) скласти диференціальні рівняння руху точки в проекції на відповідну вісь;
- 6) проінтегрувати диференціальне рівняння руху матеріальної точки і за початковими умовами руху точки, визначити сталі інтегрування.

Для визначення колової частоти k і k^* і періоду коливання T і T^* немає потреби в інтегруванні диференціального рівняння руху матеріальної точки. Достатньо, скласти диференціальне рівняння руху визначити коефіцієнт k^2 при x , коефіцієнт $2h$ при \dot{x} і визначити колову частоту і період за формулами (7.26), (7.33), (7.27) і (7.34).

При складанні диференціального рівняння руху матеріальної точки, точку необхідно зображувати на рисунку у довільному положенні, яке відповідає додатній координаті. При цьому припускаючи, що матеріальна точка рухається у бік зростання цієї координати.

Розглядаючи задачі про вільні коливання матеріальної точки при відсутності сили опору середовища, можна провести розв'язок задачі у загальному вигляді і потім підставити в нього чисельні величини. Якщо розглядається задача про згасаючі коливання, то необхідно підставити чисельні величини в диференціальне рівняння і визначити h і k , так як в залежності від їх співвідношення доводиться записувати загальний розв'язок рівняння, або в тригонометричних, або в гіперболічних функціях.

Приклад 7.4. При рівномірному спуску платформи навантаженої мішками з цукром вагою $P = 50$ кН зі швидкістю $V = 1,5$ м/с (рис. 7.15) раптово відбулася затримка верхнього кінця тросу, на якому спускається платформа, так як трос затиснуло в обоймі блока. Затримка тросу спричиняє коливання платформи на тросі. Нехтуючи масою тросу і вважаючи, що сила опору повітря пропорційна швидкості $\vec{R} = -b\vec{V}$, де b – додатна стала величина, визначити коефіцієнт h , який характеризує силу опору середовища, найбільше зусилля в тросі при коливанні платформи, а також зусилля в тросі після п'яти повних коливань платформи, якщо період коливання $T^* = 0,21$ с і коефіцієнт жорсткості тросу $c = 4,6 \cdot 10^6$ Н/м.

Розв'язання. Розглянемо коливання платформи вважаючи її матеріальною точкою M підвішеною на пружині, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює жорсткості тросу, тобто $c = 4,6 \cdot 10^6$ Н/м.

Примітка 7.1. При розв'язанні практичних задач на коливання матеріальної точки, зустрічаються випадки коли матеріальна точка спирається, або підвішена до декількох пружин одночасно (рис. 7.16).

При розрахунках ці пружини замінюють однією пружиною з еквівалентною жорсткістю – $c_{екв}$.

У випадку двох паралельних пружин (рис. 7.16,а):

$$c_{екв} = c_1 + c_2.$$

У випадку двох послідовних пружин (рис. 7.16,б):

$$c_{екв} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

У випадку, коли точка перебуває між двома пружинами (рис. 7.16,в):

$$c_{екв} = c_1 + c_2.$$

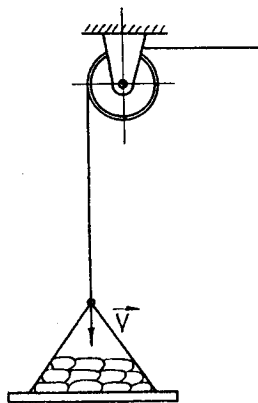


Рис. 7.15.

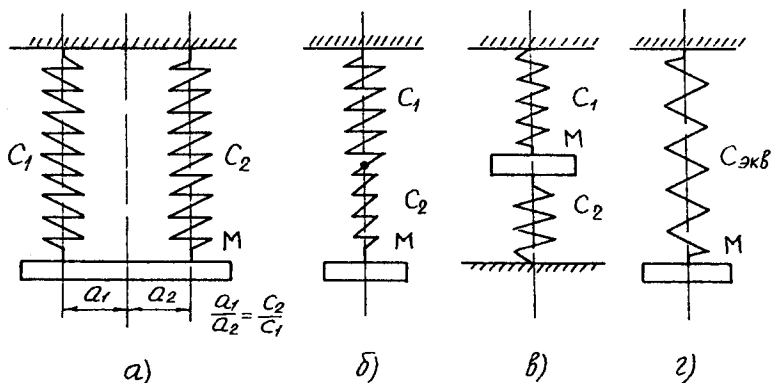


Рис. 7.16.

На матеріальну точку M діє сила ваги \vec{P} , сила опору середовища \vec{R} і сила пружності \vec{F} .

Початок координат O системи відліку виберемо в положенні статичної рівноваги матеріальної точки M на пружині. Вісь x спрямовуємо по вертикальній прямій, вздовж якої рухається точка M , вниз (рис. 7.17).

На рис. 7.17 l_0 – довжина недеформованої пружини; Δct – статична деформація пружини, тобто деформація при якій сила ваги матеріальної точки M зрівноважується пружною силою $P = c\Delta ct$; x – відхилення точки M від положення статичної рівноваги при коливаннях; λ – повна деформація пружини.

Записуємо початкові умови руху точки M , тобто при $t = 0$: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V$, так як в момент виникнення коливання точка M перебувала у положенні статичної рівноваги і рухалася зі швидкістю V .

Складемо диференціальне рівняння руху точки M в проекції на вісь x , тобто

$$m \ddot{x} = P - F - R.$$

Беручи до уваги значення сили пружності $F = \lambda c = (\Delta ct + x)c$ і сили опору середовища $R = bx$ останнє рівняння можна записати так

$$m \ddot{x} = P - \Delta ct \cdot c - cx - b \dot{x}.$$

Після спрощення, матимемо

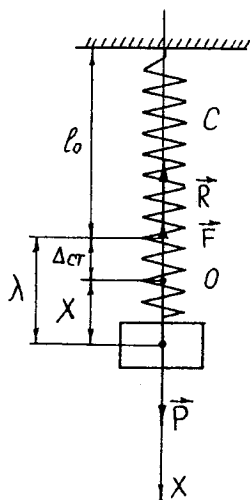


Рис. 7.17.

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = 0, \quad (7.42)$$

$$\text{де } 2h = \frac{b}{m}; k^2 = \frac{c}{m}.$$

Це рівняння є диференціальним рівнянням згасаючих коливань матеріальної точки.

Період згасаючих коливань визначається за формулою (7.34), тобто

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

Звідси визначаємо коефіцієнт, що характеризує силу опору середовища, тобто

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{k^2 - \frac{4\pi^2}{(T^*)^2}} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{4\pi^2}{(T^*)^2}} = \sqrt{\frac{4,6 \cdot 10^6 \cdot 9,81}{50000} - \frac{4 \cdot 3,14^2}{0,21^2}} = \\ &= \sqrt{902,52 - 894,29} = 2,87 \text{ л/с}, \end{aligned}$$

де

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{cg}{P} = \frac{4,6 \cdot 10^6 \cdot 9,81}{5000} = 902,52 \text{ л/с}; T^* = 0,21 \text{ с}.$$

Визначаємо величину k , тобто

$$k = \sqrt{902,52} = 30,04 \text{ л/с}.$$

Характеристичним рівнянням для рівняння (7.42) буде рівняння:

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є:

$$r_1 = -h + i\sqrt{k^2 - h^2};$$

$$r_2 = -h - i\sqrt{k^2 - h^2},$$

оскільки $k > h$, тобто відновлююча сила більша за силу опору, що й забезпечує коливальний характер руху матеріальної точки. Загальний розв'язок диференціального рівняння (7.42) запишеться так

$$x = e^{-ht} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - h^2} t \right). \quad (7.43)$$

Для визначення найбільшого зусилля в тросі, необхідно визначити x_{\max} , так як

$$T_{\max} = F_{\max} = c(\Delta cm + x_{\max}),$$

де T_{\max} – зусилля в тросі; F_{\max} – сила пружності пружини; x_{\max} – відхилення точки від положення статичної рівноваги.

Визначаємо Δcm , тобто

$$\Delta cm = \frac{P}{c} = \frac{50000}{4,6 \cdot 10^6} = 0,0109 \text{ м.}$$

Визначаємо рівняння зміни швидкості руху матеріальної точки при коливаннях (визначаємо похідну за часом від рівності (7.43))

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -he^{-ht} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - h^2} t \right) + \\ & + e^{-ht} \left(-C_1 \sqrt{k^2 - h^2} \sin \sqrt{k^2 - h^2} t + C_2 \sqrt{k^2 - h^2} \cos \sqrt{k^2 - h^2} t \right). \end{aligned} \quad (7.44)$$

За початковими умовами руху точки, тобто при $t = 0$: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V$, визначаємо з рівнянь (7.43) і (7.44) сталі інтегрування C_1 і C_2 , тобто

$$C_1 = 0; \quad C_2 = \frac{V}{\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

Тоді маємо

$$x = e^{-ht} \frac{V}{\sqrt{k^2 - h^2}} \sin \sqrt{k^2 - h^2} t. \quad (7.45)$$

Рівняння (7.45) – це рівняння руху точки при коливанні.

З рівності (7.45) випливає, що x_{\max} дорівнює

$$x_{\max} = a_1 = \frac{V}{\sqrt{k^2 - h^2}} = \frac{1,5}{\sqrt{902,52 - 8,24}} = \frac{1,5}{29,9} = 0,05 \text{ м.}$$

Найбільше зусилля в тросі дорівнює

$$T_{\max} = F_{\max} = c(\Delta cm + x_{\max}) = 4,6 \cdot 10^6 (0,0109 + 0,05) = 280 \text{ кН.}$$

Щоб визначити зусилля в тросі після п'яти повних коливань платформи необхідно визначити величину одинадцятої амплітуди за формулою:

$$a_n = a_{11} = a_1 e^{\frac{-ht^*}{2}(n-1)} = 0,05 e^{\frac{-2,87 \cdot 0,21 \cdot 10}{2}} = \frac{0,05}{20,36} = 0,0024 \text{ м,}$$

де $a_1 = x_{\max} = 0,05$ м.

Тоді зусилля в тросі після п'яти повних коливань дорівнює

$$T = c(\Delta cm + a_{11}) = 4,6 \cdot 10^6 (0,0109 + 0,0024) = 61,2 \text{ кН.}$$

7.6. Відносний рух матеріальної точки. Переносна і коріолісова сили інерції. Вказівки до завдання Д4.

Якщо матеріальна точка рухається відносно рухомої системи відліку, яка в свою чергу рухається відносно нерухомої (інерціальної), то така точка здійснює складний рух. Для дослідження складного руху точки вводяться дві системи координат: система координат, яка зв'язана з нерухомим тілом і рухома система координат, яка зв'язана з тілом, що рухається. Рух точки відносно рухомої системи координат при її складному русі називається відносним рухом.

Розглянемо складний рух точки M (рис. 7.18), який здійснюється під дією рівнодійної сили \vec{F} і виведемо основне рівняння динаміки відносного руху точки. На рис. 7.18 система координат $Oxyz$ зв'язана з нерухомим тілом (точніше з умовно нерухомим тілом) а система координат $Ox_1y_1z_1$ – з тілом, яке здійснює довільний рух відносно нерухомого тіла.

Рух точки M відносно нерухомої системи координат $Oxyz$ (абсолютний рух) описується основним рівнянням динаміки

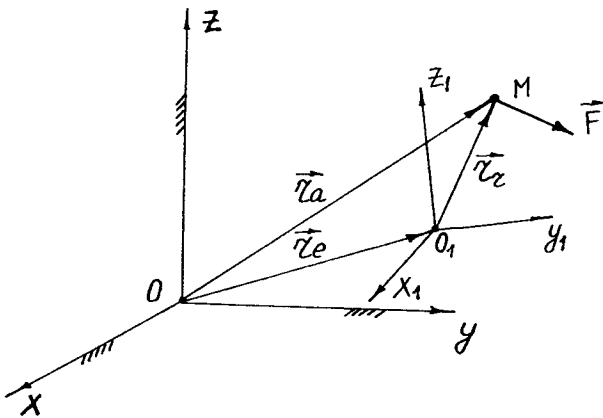


Рис. 7.18.

$$m\vec{W} = \vec{F}, \quad (7.46)$$

де $\vec{W} = \vec{W}_a$ – абсолютне прискорення точки.

Визначимо абсолютне прискорення точки за теоремою додавання прискорень (теорема Коріоліса)

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + W_c, \quad (7.47)$$

де \vec{W}_r – відносне прискорення точки;

\vec{W}_e – переносне прискорення точки;

W_c – коріолісове прискорення точки.

Підставляючи рівність (7.47) в рівняння (7.46) та зробивши відповідні перетворення, дістанемо

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + (-m\vec{W}_e) + (-m\vec{W}). \quad (7.48)$$

З рівняння (7.48) випливає, що у відносному русі крім прикладеної до точки рівнодійної активних сил і реакцій в'язей \vec{F} до точки слід приєднати ще дві додаткові сили, які спостерігаються тільки в рухомій системі відліку. Одну з цих сил називають переносною силою інерції і позначають

$$\vec{F}_e^{in} = -m\vec{W}_e \quad (7.49)$$

Переносна сила інерції точки в її відносному русі має напрям протилежний до вектора переносного прискорення точки і за величиною дорівнює добутку маси точки на модуль переносного прискорення точки, тобто

$$F_e^{in} = mW_e \quad (7.50)$$

Другу додаткову силу в рівнянні (7.48) позначають \vec{F}_c^{in} і називають коріолісовою силою інерції

$$\vec{F}_c^{in} = -m\vec{W}_c \quad (7.51)$$

Коріолісова сила інерції має напрям прямо протилежний вектору коріолісового прискорення точки і за величиною дорівнює добутку маси точки на модуль коріолісового прискорення, тобто

$$F_c^{in} = mW_c \quad (7.52)$$

Таким чином, рівняння (7.48), на підставі розглянутого, приймає вигляд

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{F}_e^{in} + \vec{F}_c^{in}. \quad (7.53)$$

Рівняння (7.53) носить назву основного рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки. З рівняння (7.53) випливає, що для того щоб скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки в будь-якій

системі відліку, що рухається за довільним законом відносно нерухомої системи відліку, у формі другого закону Ньютона, необхідно до рівнодійної активних сил, діючих на точку і реакцій в'язей приєднати переносну і коріолісову сили інерції.

Якщо спроекціювати рівняння (7.53) на рухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 7.18), отримуємо диференціальні рівняння відносного руху точки в координатній формі:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_r &= F_{x_1} + F_{e_{x_1}}^{in} + F_{c_{x_1}}^{in}; \\ m \ddot{y}_r &= F_{y_1} + F_{e_{y_1}}^{in} + F_{c_{y_1}}^{in}; \\ m \ddot{z}_r &= F_{z_1} + F_{e_{z_1}}^{in} + F_{c_{z_1}}^{in}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Приклад 7.5. У відцентрових бурякорізках з нерухомими ножами для здійснення обертального руху коренів буряка застосовують диск з трьома криволінійними або прямолінійними лопатками, що виступають над поверхнею диска. Диск обертається навколо вертикальної осі. При обертанні диска буряк ковзає вздовж лопаток і обертається по колу, зустрічаючи різальну кромку ножа.

Розглянемо диск з трьома прямолінійними лопатками, що обертається навколо нерухомої осі z зі сталою кутовою швидкістю ω (рис 7.19). На поверхні диска перебуває корінь буряка маси m . При обертанні диска корінь буряка ковзає вздовж лопатки. У початковий момент часу корінь перебуває у спокої на відстані a від осі обертання диска z .

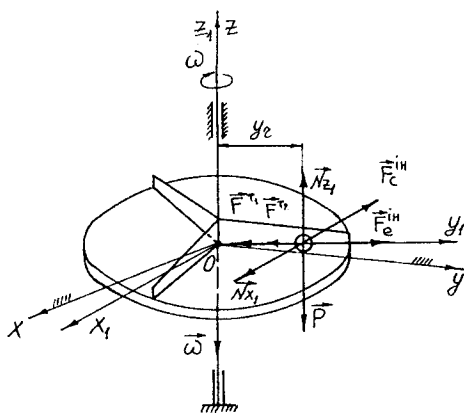


Рис. 7.19.

Визначити рівняння руху кореня буряка вздовж лопатки, а також сили тиску кореня на поверхню диска і лопатку.

При розрахунках врахувати коефіцієнт тертя ковзання кореня буряка f .

Розв'язання. Зв'яжемо з диском координатні осі $Ox_y z_1$, прийнявши початок координат у центрі диска (рис. 7.19). Положення кореня буряка на диску (на рис. 7.19 матеріальна точка M) будемо визначати координатою y_r .

Система координат $Ox_y z_1$ обертається разом з диском і, таким чином, не є інерціальною, тому рух точки M відносно диска буде описуватися диференціальним рівнянням (7.53).

При рівномірному обертанні диска переносне прискорення \vec{W}_e точки M складається тільки із одної доосової складової, модуль (величина) якої дорівнює $\omega^2 y_r$. Отже, переносна сила інерції \vec{F}_e^{in} за модулем дорівнює $F_e^{in} = m\omega^2 y_r$ і має напрям вздовж осі y_1 як це показано на рис. 7.19.

Так як відносна швидкість кореня буряка $\vec{V}_r = \dot{y}_r \vec{i}_1$, то коріолісове прискорення $\vec{W}_C = 2 \dot{y}_r (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)$ має напрям паралельний осі x_1 у бік зростання координати x_1 (рис. 7.19). Коріолісова сила інерції дорівнює за модулем $F_C^{in} = 2m\omega \dot{y}_r$ і має напрям паралельний до осі x_1 у бік зменшування координати x_1 (рис. 7.19).

Розглянемо сили тертя кореня буряка. При русі кореня у бік зростання y_r виникає сила тертя \vec{F}^{T_1} між коренем і поверхнею диска. Ця сила має напрям у протилежний бік від напрямку відносної швидкості кореня, тобто вздовж осі y_1 наліво (рис. 7.19). За модулем сила \vec{F}^{T_1} дорівнює $F^{T_1} = fN_{z_1}$.

Під дією коріолісової сили інерції \vec{F}_C^{in} корінь буряка тисне на поверхню лопатки. Тут виникає сила тертя \vec{F}^{T_2} , що дорівнює $F^{T_2} = fN_{x_1}$. Ця сила тертя має напрям також у протилежний бік від напрямку відносної швидкості кореня. Таким чином, обидві сили тертя мають один і той же напрям (рис. 7.19).

Так як до точки M прикладені: сила ваги \vec{P} , сила тертя \vec{F}^{T_1} , \vec{F}^{T_2} , нормальні реакції поверхні диска і лопатки \vec{N}_{x_1} , \vec{N}_{z_1} , то, у даному випадку, рівняння (7.53) приймає вигляд

$$m\vec{W}_r = \vec{P} + \vec{F}^{T_1} + \vec{F}^{T_2} + \vec{N}_{x_1} + \vec{N}_{z_1} + \vec{F}_e^{in} + \vec{F}_C^{in}. \quad (7.55)$$

Спроекціюємо векторне рівняння (7.55) на осі x_1, y_1 і z_1 , дістанемо

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_r &= N_{x_1} - F_c^{in}; \\ m \ddot{y}_r &= F_e^{in} - F^{T_1} - F^{T_2}; \\ m \ddot{z}_r &= N_{z_1} - P. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Відносний рух кореня буряка відбувається вздовж осі y_1 . Тому $x_r = z_r = 0$. Отже, $\ddot{x}_r = \ddot{z}_r = 0$ і рівняння (7.56) приймають вигляд

$$\begin{cases} 0 = N_{x_1} - 2m\omega \dot{y}_r; \\ \ddot{y}_r = \omega^2 y_r - \frac{f N_{x_1}}{m} - \frac{f N_{z_1}}{m}; \\ 0 = N_{z_1} - mg. \end{cases} \quad (7.57)$$

З першого і третього рівнянь (7.57) здобудемо

$$N_{x_1} = 2m\omega \dot{y}_r; \quad N_{z_1} = mg. \quad (7.58)$$

Підставляючи значення (7.58) в друге рівняння (7.57), здобудемо

$$\ddot{y}_r + 2f\omega \dot{y}_r - \omega^2 y_r = -fg. \quad (7.59)$$

Рівняння (7.59) – це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок рівняння (7.57) має вигляд

$$y_r = y_{1r} + y_{2r}, \quad (7.60)$$

де y_{1r} – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння;
 y_{2r} – частинний розв'язок рівняння (7.59).

Права частина рівняння (7.59) стала, тому шукаємо частинний розв'язок y_{2r} у вигляді сталої $y_{2r} = A$. Підставимо це значення y_{2r} , а також $\dot{y}_{2r} = \ddot{y}_{2r} = 0$ в рівняння (7.59) і розв'яжемо його відносно A , матимемо

$$y_{2r} = A = \frac{fg}{\omega^2}. \quad (7.61)$$

Характеристичне рівняння однорідного диференціального рівняння

$$\ddot{y}_r + 2f\omega \dot{y}_r - \omega^2 y_r = 0$$

має вигляд

$$r^2 + 2f\omega r - \omega^2 = 0.$$

Корні цього рівняння дорівнюють

$$\begin{aligned} r_1 &= -f\omega + \sqrt{f^2\omega^2 + \omega^2} = -f\omega + \omega\sqrt{1+f^2}; \\ r_2 &= -f\omega - \sqrt{f^2\omega^2 + \omega^2} = -f\omega - \omega\sqrt{1+f^2}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Загальний розв'язок y_{1r} має вигляд

$$y_{1r} = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \quad (7.63)$$

Підставляючи значення (7.61) і (7.63) в рівність (7.60) здобудемо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (7.59)

$$y_r = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{fg}{\omega^2} = C_1 e^{(-f\omega + \omega\sqrt{1+f^2})t} + C_2 e^{(-f\omega - \omega\sqrt{1+f^2})t} + \frac{fg}{\omega^2}. \quad (7.64)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначимо з початкових умов руху кореня, тобто при $t=0$: $y_r(0) = a$, $\dot{y}_r(0) = 0$. Для цього треба визначити швидкість руху кореня як функцію часу. Диференціюючи рівняння (7.64), одержуємо

$$\dot{y}_r = r_1 C_1 e^{r_1 t} + r_2 C_2 e^{r_2 t} = r_1 C_1 e^{(-f\omega + \omega\sqrt{1+f^2})t} + r_2 C_2 e^{(-f\omega - \omega\sqrt{1+f^2})t}. \quad (7.65)$$

Підставляючи початкові умови в рівняння (7.64) і (7.65) дістанемо два рівняння відносно шуканих сталих

$$a = C_1 + C_2 + \frac{fg}{\omega^2};$$

$$0 = r_1 C_1 + r_2 C_2.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, матимемо:

$$C_1 = -\frac{r_2}{r_1 - r_2} \left(a - \frac{fg}{\omega^2} \right); \quad C_2 = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \left(a - \frac{fg}{\omega^2} \right).$$

Підставляючи знайдені сталі в рівняння (7.64) і (7.65), знайдемо

$$y_r = -\frac{r_2}{r_1 - r_2} \left(a - \frac{fg}{\omega^2} \right) e^{r_1 t} + \frac{r_1}{r_1 - r_2} \left(a - \frac{fg}{\omega^2} \right) e^{r_2 t} + \frac{fg}{\omega^2} =$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \left(a - \frac{fg}{\omega^2} \right) (r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}) + \frac{fg}{\omega^2}; \quad (7.66)$$

$$\dot{y}_r = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \left(a - \frac{fg}{\omega^2} \right) (e^{r_2 t} - e^{r_1 t}). \quad (7.67)$$

Рівняння (7.66) – це рівняння руху кореня буряка вздовж лопатки диска. Для визначення сил тиску кореня на поверхню диска і лопатки, необхідно визначити нормальні реакції N_{x_1} і N_{z_1} . З рівнянь (7.58) випливає, що:

$$N_{z_1} = mg; \quad N_{x_1} = 2m\omega \dot{y}_r.$$

Підставляючи в останнє рівняння вираз (7.67), матимемо

$$N_{x_1} = \frac{2m\omega r_1 r_2}{r_1 - r_2} \left(a - \frac{fg}{\omega^2} \right) (e^{r_2 t} - e^{r_1 t}),$$

де r_1 і r_2 визначаються за формулами (7.62).

Шукані сили тиску кореня буряка на поверхню диска і лопатки за величиною дорівнюють величині відповідних нормальних реакцій N_{x_1} , N_{z_1} і мають протилежний до них напрям (див. рис. 7.19).

7.7. Система матеріальних точок. Центр мас системи матеріальних точок. Властивості внутрішніх сил системи матеріальних точок. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок.

Системою матеріальних точок (механічною системою) називається сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв'язані.

Системи матеріальних точок поділяються на незмінні та змінні. Система називається незмінною, якщо відстань між будь-якими точками системи залишається сталою при її русі. Якщо відстань між точками системи змінюється при русі системи, то система носить назву змінної.

Розглянемо систему, яка складається з n матеріальних точок (рис. 7.20). Позначимо маси точок відповідно m_1, m_2, \dots, m_n . Положення точок системи відносно декартової системи координат $Oxyz$ визначається радіус – векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Геометрична точка C , яка визначається радіус – вектором

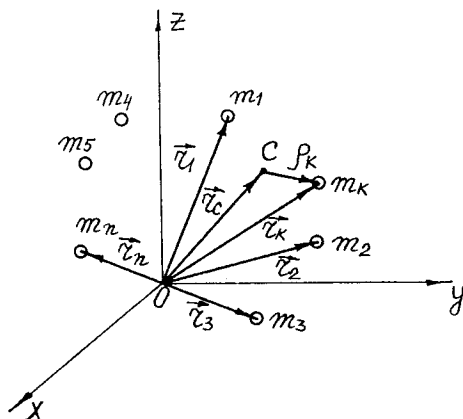


Рис. 7.20

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad (7.68)$$

називається центром мас системи матеріальних точок.

Якщо спроекціювати векторну рівність (7.68) на осі декартової системи координат, то матимемо рівності для визначення декартових координат центра мас системи матеріальних точок:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (7.69)$$

Величина $\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k$ в рівності (7.68) називається статичним моментом маси системи матеріальних точок відносно полюса O . Величини

$\sum_{k=1}^n m_k x_k$, $\sum_{k=1}^n m_k y_k$, $\sum_{k=1}^n m_k z_k$, в рівностях (7.69) називаються відповідно статичними моментами маси системи матеріальних точок відносно площин декартової системи координат yOz , xOz і xOy .

Якщо прийняти за полюс центр мас системи C , а радіус – вектор “ k ”-ої точки, масою m_k , відносно центра мас системи C позначити $\bar{\rho}_k$ (рис. 7.20), то

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{\rho}_k = \sum_{k=1}^n m_k \bar{\rho}_c = \bar{0},$$

так як $\bar{\rho}_c = \bar{0}$, тобто статичний момент маси системи матеріальних точок відносно її центра мас дорівнює нулю.

Статичний момент маси системи відносно будь-якої площини, що проходить через центр мас системи, також дорівнює нулю.

При русі системи матеріальних точок, точки системи взаємодіють, як з точками, що належать даній системі, так і з точками інших систем або тіл. Сили, з якими на точки даної системи діють точки або тіла, що не належать до даної системи, називаються зовнішніми силами. Їх позначають, наприклад, $\bar{F}^{(e)}$. Сили взаємодії між точками системи, що розглядається називаються внутрішніми. Їх позначають, наприклад, $\bar{F}^{(i)}$.

Розглянемо властивості внутрішніх сил системи матеріальних точок. На підставі третього закону Ньютона, геометрична сума сил взаємодії між двома точками даної системи, наприклад, точками M_1 і M_2 (рис. 7.21) дорівнює нулю

$$\bar{F}_1^{(i)} + \bar{F}_2^{(i)} = \bar{0}.$$

Головний вектор внутрішніх сил $\bar{R}_O^{(i)}$ буде складатися з векторної суми таких пар сил, так як уся система складається з пар взаємодіючих точок. Таким чином,

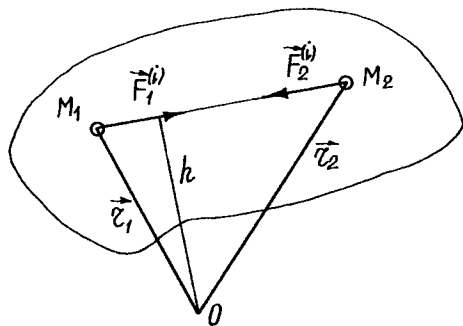


Рис. 7.21

$$\vec{R}_O^{(i)} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(i)} = \vec{0}, \quad (7.70)$$

тобто геометрична сума всіх внутрішніх сил системи (головний вектор внутрішніх сил) дорівнює нулю.

Якщо спроеціювати векторну рівність (7.70) на осі декартової системи координат, то матимемо три скалярних вирази:

$$R_x^{(i)} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^{(i)} = 0; \quad R_y^{(i)} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^{(i)} = 0; \quad R_z^{(i)} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^{(i)} = 0, \quad (7.71)$$

з яких випливає, що алгебраїчна сума проєкцій всіх внутрішніх сил системи на будь-яку вісь декартової системи координат дорівнює нулю.

Розглянемо, чому дорівнює геометрична сума моментів сил $\vec{F}_1^{(i)}$ і $\vec{F}_2^{(i)}$ відносно довільної точки O (рис. 7.21). Неважко побачити, що має місце рівність

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1^{(i)}) + \vec{M}_O(\vec{F}_2^{(i)}) = \vec{0}, \quad (7.72)$$

так як обидві сили мають однакові плечі відносно точки O і взаємопротилежний напрям. Головний момент внутрішніх сил $\vec{M}_O^{(i)}$ відносно довільної точки O буде складатися з геометричної суми таких пар моментів, так як уся система складається з пар взаємодіючих точок. Отже,

$$\vec{M}_O^{(i)} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^{(i)}) = \vec{0}, \quad (7.73)$$

тобто геометрична сума моментів усіх внутрішніх сил системи відносно довільної точки простору (головний момент внутрішніх сил) дорівнює нулю.

Якщо спроеціювати векторну рівність (7.73) на осі декартової системи координат, то матимемо три скалярних вирази:

$$M_x^{(i)} = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k^{(i)}) = 0; \quad M_y^{(i)} = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k^{(i)}) = 0; \quad (7.74)$$

$$M_z^{(i)} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^{(i)}) = 0$$

з яких випливає, що алгебраїчна сума моментів всіх внутрішніх сил системи відносно будь-якої осі декартової системи координат дорівнює нулю.

Розглянемо рух системи матеріальних точок, що складається з n точок (рис. 7.20) відносно нерухомої декартової системи координат $Oxyz$.

Нехай на кожну точку системи діють, як зовнішні, так і внутрішні сили. Позначимо рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на “ k ”-у точку через $\vec{F}_k^{(e)}$ і $\vec{F}_k^{(i)}$. Тоді розглядаючи кожну точку системи як вільну, що рухається під дією сил $\vec{F}_k^{(e)}$ і $\vec{F}_k^{(i)}$, застосуємо до неї основне рівняння динаміки:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_1^{(i)}; \\ \dots\dots\dots \\ m_n \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n^{(e)} + \vec{F}_n^{(i)}. \end{array} \right. \quad (7.74, \text{а})$$

Якщо спроекціювати векторну систему рівнянь (7.74,а) на декартові осі координат, матимемо

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= \sum_{k=1}^n F_{kx}^{(e)} + \sum_{k=1}^n F_{kx}^{(i)}; \\ m_k \ddot{y}_k &= \sum_{k=1}^n F_{ky}^{(e)} + \sum_{k=1}^n F_{ky}^{(i)}; \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (7.75) \\ m_k \ddot{z}_k &= \sum_{k=1}^n F_{kz}^{(e)} + \sum_{k=1}^n F_{kz}^{(i)}. \end{aligned}$$

Якщо спроекціювати дану векторну систему рівнянь (7.74,а) на будь-які інші осі координат, то отримаємо диференціальні рівняння руху в проекціях на ці осі координат.

Векторні рівняння (7.74,а) або еквівалентні їм скалярні рівняння (7.75) являють собою диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок.

Зауважимо, що розв’язання першої основної задачі динаміки (визначення рівнодійної сил, прикладених до кожної точки системи, за рівнянням їх руху) аналогічна відповідній задачі динаміки однієї матеріальної точки і не викликає математичних ускладнень при застосуванні рівнянь (7.75). Розв’язання ж другої, основної задачі динаміки (визначення законів руху точок матеріальної системи за даними зовнішніми силами) зустрічає значні математичні труднощі. Система диференціальних рівнянь руху механічної системи (7.75) має $6n$ невідомих величин: $3n$ шуканих координат точок системи і $3n$ проекцій невідомих внутрішніх сил. Складність визначення $6n$ невідомих із системи рівнянь (7.75) по-пер-

ше, складається з того, що невідомі, як правило, аналітичні вирази внутрішніх сил і реакцій в'язей.

В теоретичній механіці розроблені методи, які дають можливість подолати згадані труднощі застосування диференціальних рівнянь (7.75).

З цією метою вводяться у розгляд деякі векторні і скалярні величини, які характеризують рух всієї системи матеріальних точок (так звані міри руху). До них відносяться вектор кількості і вектор моменту кількості руху, а також кінетична енергія системи матеріальних точок.

7.8. Кількість руху матеріальної точки і системи матеріальних точок. Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок.

При поступальному русі системи матеріальних точок мірою руху є векторна величина – кількість руху.

Кількість руху окремої матеріальної точки є вектор, що дорівнює добутку маси точки на її швидкість

$$\vec{q}_k = m_k \vec{V}_k. \quad (7.76)$$

Проекції вектора \vec{q}_k на осі декартової системи координат відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} q_{kx} &= m_k V_{kx} = m_k \dot{x}_k; \\ q_{ky} &= m_k V_{ky} = m_k \dot{y}_k; \\ q_{kz} &= m_k V_{kz} = m_k \dot{z}_k. \end{aligned} \quad (7.77)$$

За одиницю кількості руху точки в системі CI приймають [Н·с].

Кількість руху системи матеріальних точок є вектор, що дорівнює векторній сумі кількостей руху окремих точок системи, тобто

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n \vec{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k. \quad (7.78)$$

Проекції кількості руху механічної системи на осі декартової системи координат відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= \sum_{k=1}^n m_k V_{kx} = \sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_k; \\
 Q_y &= \sum_{k=1}^n m_k V_{ky} = \sum_{k=1}^n m_k \dot{y}_k; \\
 Q_z &= \sum_{k=1}^n m_k V_{kz} = \sum_{k=1}^n m_k \dot{z}_k.
 \end{aligned}
 \tag{7.79}$$

У деяких випадках більш доцільно кількість руху системи матеріальних точок визначати за формулою:

$$\vec{Q} = M \vec{V}_c,
 \tag{7.80}$$

де $M = \sum_{k=1}^n m_k$ – маса системи матеріальних точок;

\vec{V}_c – вектор швидкості центра мас системи матеріальних точок.
Дійсно

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_c \right) = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_c}{dt} = M \vec{V}_c,$$

$$\text{так як } \vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \text{ то } \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k.$$

З формули (7.80) випливає: “кількість руху системи матеріальних точок дорівнює добутку маси системи на швидкість центра мас системи матеріальних точок”.

Дію сили \vec{F} на матеріальну точку масою m за проміжок часу dt можна охарактеризувати елементарним імпульсом сили $\vec{F} dt$. Імпульс сили за кінцевий проміжок часу дорівнює

$$\vec{S} = \int_{t=0}^t \vec{F} dt.
 \tag{7.81}$$

Проекції імпульсу сили на осі декартової системи координат визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}
 S_x &= \int_{t=0}^t F_x dt; \\
 S_y &= \int_{t=0}^t F_y dt; \\
 S_z &= \int_{t=0}^t F_z dt.
 \end{aligned}
 \tag{7.82}$$

За одиницю імпульсу сили в системі CI приймають [Н·с].

Перетворимо диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок (7.74,а) у вигляд

$$\left\{ \begin{aligned}
 m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} &= \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_1^{(i)} \\
 \dots\dots\dots \\
 m_n \frac{d\vec{V}_n}{dt} &= \vec{F}_n^{(e)} + \vec{F}_n^{(i)}.
 \end{aligned} \right.
 \tag{7.83}$$

Складаючи почленно рівняння (7.83), матимемо

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(i)}.$$

На підставі першої властивості внутрішніх сил маємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(i)} = \vec{0}.$$

Тому останнє рівняння приймає вигляд

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)}$$

або

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)}.$$

Приймаючи до уваги рівність (7.78), остаточно маємо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)}. \quad (7.84)$$

В проекціях на осі нерухомої декартової системи координат векторна рівність (7.84) еквівалентна трьом скалярним:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^{(e)}; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^{(e)}; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^{(e)}. \quad (7.85)$$

Рівності (7.84) і (7.85) є математичними виразами теореми про зміну кількості руху системи матеріальних точок в диференціальній векторній формі (7.84) і в диференціальній скалярній формі (7.85).

З рівності (7.84) випливає: “перша похідна по часу від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює геометричній сумі (головному вектору) всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи”.

З рівності (97.85) випливає: “перша похідна по часу від проекції кількості руху системи матеріальних точок на будь-яку вісь нерухомої декартової системи координат, дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, на ту ж саму вісь.

Теорему про зміну кількості руху системи матеріальних точок можна подати в інтегральній векторній або скалярній формах.

Перетворимо рівність (7.84). Для цього необхідно помножити обидві частини рівності на dt і проінтегрувати у межах від t_0 до t , тобто

$$\int_{t_0}^t d\vec{Q} = \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t F_k^{(e)} dt.$$

звідси маємо

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S}^{(e)}, \quad (7.86)$$

де Q – кількість руху системи матеріальних точок в момент часу t ;

Q_0 – кількість руху системи матеріальних точок в момент часу t_0 ;

$\vec{S}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t \vec{F}_k^{(e)} dt$ – головний вектор імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи.

Векторна рівність (7.86) еквівалентна трьом скалярним рівностям в проекціях на нерухомі осі декартової системи координат

$$\begin{aligned}
 Q_x - Q_{ox} &= S_x^{(e)}; \\
 Q_y - Q_{oy} &= S_y^{(e)}; \\
 Q_z - Q_{oz} &= S_z^{(e)}.
 \end{aligned}
 \tag{7.87}$$

Таким чином, маємо математичні вирази теореми про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній векторній (7.86) і скалярній (7.87) формах.

З рівняння (7.86) випливає: “зміна кількості руху системи матеріальних точок за будь-який фіксований проміжок часу дорівнює геометричній сумі (головному вектору) імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи за той же проміжок часу”.

З рівнянь (7.87) випливає: “зміна кількості руху системи матеріальних точок в проекції на будь-яку нерухому вісь декартової системи координат за будь-який фіксований проміжок часу дорівнює проекції головного вектора імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, на ту ж саму вісь за той же проміжок часу”.

З теореми про зміну кількості руху системи матеріальних точок випливає:

1. Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну кількості руху системи матеріальних точок, так як рівняння (7.84) – (7.87) не містять внутрішніх сил.

2. У тих випадках, коли геометрична сума всіх зовнішніх сил системи матеріальних точок $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} = \vec{0}$, або одна з проекцій геометричної суми всіх зовнішніх сил системи на осі декартової системи координат, напри-

клад $\sum_{k=1}^n F_{kx}^{(e)}$, дорівнює нулю, то в першому випадку вектор кількості руху системи $\vec{Q} = \overline{const}$ є сталим за величиною і напрямом; у другому – сталою величиною є проекція кількості руху системи $Q_x = const$ на дану вісь.

Розглянуті в пункті 2 положення носять назву закону збереження кількості руху системи матеріальних точок.

7.9. Теорема про рух центра мас системи матеріальних точок.

Вказівки до завдання Д5.

Наслідком теореми про зміну кількості руху системи матеріальних точок є теорема про рух центра мас системи. Дійсно, підставляючи в

рівність (7.84) замість вектора \bar{Q} його значення за формулою (7.80), матимемо

$$M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{(e)}$$

або

$$M\bar{W}_c = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{(e)}. \quad (7.88)$$

Рівність (7.88) є математичним виразом теореми про рух центра мас системи матеріальних точок: “центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на точки системи”.

Векторна рівність (7.88) еквівалентна трьом скалярним рівностям в проекціях на нерухомі осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_c &= \sum_{k=1}^n F_{kx}^{(e)}; \\ M \ddot{y}_c &= \sum_{k=1}^n F_{ky}^{(e)}; \\ M \ddot{z}_c &= \sum_{k=1}^n F_{kz}^{(e)}. \end{aligned} \quad (7.89)$$

Значення та наслідки теореми про рух центра мас системи.

1. Теорема про рух центра мас системи дає обґрунтування методам динаміки точки.
2. Внутрішніми силами безпосередньо не можна змінити характер руху центра мас системи, так як рівняння (7.88) і (7.89) їх не містять.
3. Якщо геометрична сума всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, дорівнює нулю, то центр мас системи матеріальних точок перебуває у спокої або рухається рівномірно та прямолінійно

$$\bar{V}_c = \text{const.}$$

4. Якщо алгебраїчна сума проекцій всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, на будь-яку нерухому вісь декартової системи координат дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас системи матеріальних точок на цю вісь не змінюється, наприклад,

$$V_{cx} = \dot{x}_c = const.$$

Розглянуті в пунктах 3 і 4 положення носять назву закону збереження руху центра мас системи матеріальних точок.

Теорема про рух центра мас системи матеріальних точок застосовується в таких випадках:

1. Під час вивчення поступального руху системи, оскільки в цьому випадку всі точки системи мають в даний момент однакові швидкості і прискорення, і тому поступальний рух системи матеріальних точок повністю визначається рухом центра мас.

2. У випадку складного руху, коли розглядають поступальну складову руху разом з центром мас, оскільки складний рух системи матеріальних точок завжди можна розкласти на переносний поступальний рух разом з центром мас і відносний рух відносно центра мас.

3. У тих випадках, коли мають місце закони збереження руху центра мас системи матеріальних точок.

4. При визначенні руху однієї з точок системи за даним рухом решти точок і за даними зовнішніми силами.

5. При знаходженні головного вектора зовнішніх сил (геометричної суми зовнішніх сил), у тому числі реакцій в'язей за даними законами руху точок системи.

Методика розв'язування задач при застосуванні теореми про рух центра мас системи матеріальних точок така:

а) визначити, які матеріальні точки треба включити в систему, рух якої розглядається (тобто вказати об'єкт руху);

б) визначити в'язі, що накладені на точки системи, що розглядається;

в) користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, відкинути в'язі, замінивши їх дію на точки реакціями;

г) скласти схему зовнішніх сил, включаючи і реакції в'язей, прикладених до виділеної системи точок;

д) вибрати систему координат і скласти диференціальні рівняння руху центра мас системи (7.89) в проєкціях на осі декартових координат. Для цього слід записати координати центрів мас усіх точок системи і двічі продиференціювати по часу;

е) визначити початкові умови руху центра мас системи матеріальних точок;

ж) проінтегрувати диференціальні рівняння і визначити сталі інтегрування на основі початкових умов, після чого записати закон руху центра мас системи;

з) дослідити результат розв'язання задачі і зробити, якщо це можливо, узагальнюючий висновок.

Приклад 7.6. Для просіювання борошна застосовується вібраційний грохот, який складається з корпусу A (короб з ситом), що підтримується спіральними пружинами, коефіцієнт жорсткості яких дорівнює c , та з двох дисків K і L , які змонтовані на корпусі (рис. 7.22). Диски обертаються зі сталою кутовою швидкістю ω навколо горизонтальних осей O_1 і O_2 , перпендикулярних до площини рисунку. Маса $m_1 = m_2 = m$ дисків зосереджені в точках C_1 і C_2 (рис. 7.22). Диски обертаються у протилежні сторони так, що в будь-який момент часу точки C_1 і C_2 розташовуються симетрично відносно вертикальної осі і у початковий момент займають нижнє положення. Маса корпусу A дорівнює m_3 .

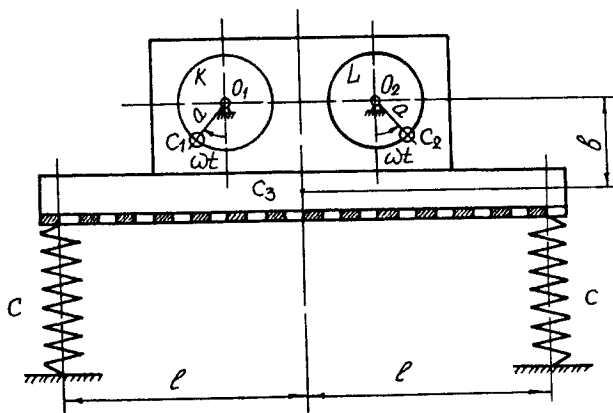


Рис. 7.22

Визначити рівняння руху центра мас C_3 корпусу A вздовж вертикалі, якщо у початковий момент точка C_3 перебувала у положенні статичної рівноваги, а її швидкість, рівна за модулем V_0 , мала напрям по вертикалі вниз.

Розв'язання. Замінюємо дві паралельні пружини однією пружиною з еквівалентною жорсткістю (див. параграф 7.5, наприклад 7.4, примітка 7.1) рис. 7.23

$$c_{\text{екв}} = 2c.$$

Дана система складається з корпусу A і двох дисків K та L . В'язю для цієї системи буде спіральна пружина з еквівалентною жорсткістю $c_{\text{екв}} = 2c$. Отже, до зовнішніх сил, що діють на систему, належать сили:

сила \vec{P}_1 – сила ваги диска K ; \vec{P}_2 – сила ваги диска L ; \vec{P}_3 – сила ваги корпусу A ; \vec{F}_{np} – сила пружності спіральної пружини, яка дорівнює $F_{np} = 2c\lambda$, де λ – повна деформація пружини. Сили \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 і \vec{F}_{np} утворюють плоску систему паралельних сил (рис. 7.23).

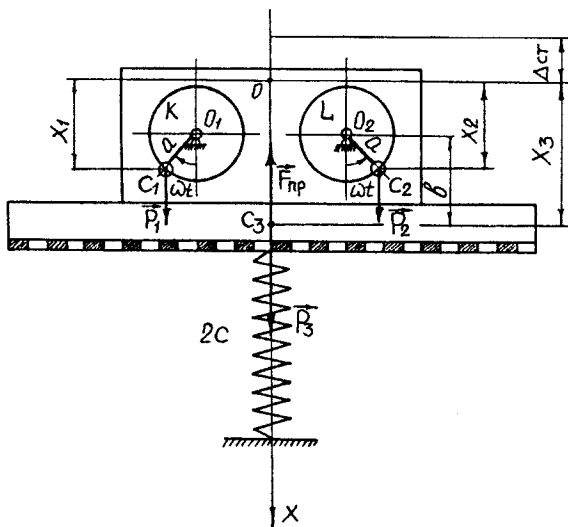


Рис. 7.23

Виберемо початок відліку руху O на осі x (рис. 7.23) у положенні статичної рівноваги центра ваги C_3 корпусу A . В цьому положенні пружина має деформацію Δct , тобто

$$\Delta ct = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{2c}.$$

Розглянемо поступальний рух системи вздовж вертикалі Ox . Застосуємо теорему про рух центра мас системи в проекції на вісь Ox

$$M \ddot{x}_c = \sum_{k=1}^n F_{kx}^{(e)}$$

або

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_c = P_1 + P_2 + P_3 - 2c(\Delta ct + x_3),$$

де $F_{np} = 2c(\Delta ct + x_3)$, так як точка C_3 зображена на рис. 7.23 в момент її переміщення із положення статичної рівноваги на x_3 вниз; при цьому деформація пружини $\lambda = \Delta ct + x_3$.

Беручи до уваги значення Δct , останнє рівняння подамо у вигляді

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_c = -2cx_3. \quad (7.90)$$

Координату центра мас системи визначаємо за формулою:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Виразимо x_1 і x_2 через x_3 . Так як диски обертаються зі сталою кутовою швидкістю ω , то кут повороту дисків дорівнює $\varphi = \omega t$. З рис. 7.23 випливає

$$x_1 = x_2 = x_3 - b + a \cos \varphi = x_3 - b + a \cos \omega t.$$

Тоді

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{m_1(x_3 - b + a \cos \omega t) + m_2(x_3 - b + a \cos \omega t)}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \\ &= \frac{m_1 x_3 - m_1 b + m_1 a \cos \omega t}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_2 x_3 - m_2 b + m_2 a \cos \omega t + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \\ &= x_3 - \frac{b(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{a(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Продиференціювавши двічі останню рівність за часом, матимемо:

$$\ddot{x}_c = \ddot{x}_3 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} a \omega^2 \cos \omega t.$$

Підставляючи цю рівність в рівняння (7.90), дістанемо

$$\ddot{x}_3 + \frac{2c}{m_1 + m_2 + m_3} x_3 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} a \omega^2 \cos \omega t.$$

За умовою задачі $m_1 = m_2 = m$, тому

$$\ddot{x}_3 + \frac{2c}{2m + m_3} x_3 = \frac{2m}{2m + m_3} a \omega^2 \cos \omega t. \quad (7.91)$$

Рівняння (7.91) – це диференціальне рівняння руху центра ваги C_3 корпусу A вздовж вертикалі. З іншого боку, рівняння (7.91) є диферен-

ціальним рівнянням вимушених коливань центра C_3 корпусу A при відсутності сил опору.

Введемо позначення

$$\frac{2c}{2m + m_3} = k^2; \quad \frac{2m}{2m + m_3} a\omega^2 = h.$$

Тоді рівняння (7.91) набуває вигляду

$$\ddot{x}_3 + k^2 x_3 = h \cos \omega t. \quad (7.92)$$

Загальний розв'язок рівняння (7.92) має вигляд

$$x_3 = x_3' + x_3'',$$

де x_3' – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, тобто $\ddot{x}_3 + k^2 x_3 = 0$;

x_3'' – частинний розв'язок рівняння (7.92).

Характеристичним рівнянням однорідного рівняння $\ddot{x}_3 + k^2 x_3 = 0$ буде

$$r^2 + k^2 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є

$$r_{1,2} = \pm ki.$$

Загальний розв'язок x_3' запишеться відповідно до теорії диференціальних рівнянь так:

$$x_3' = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Так як рівняння (7.91) є диференціальним рівнянням вимушених коливань, то щоб знайти, в якому вигляді шукати частинний розв'язок цього рівняння, треба порівняти величини k і ω – частоту власних і вимушених коливань. При $\omega \neq k$ частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x_3'' = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Визначимо:

$$\dot{x}_3'' = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t;$$

$$\ddot{x}_3'' = -A\omega^2 \cos \omega t + B\omega^2 \sin \omega t.$$

Підставивши значення \ddot{x}_3'' і x_3'' в рівняння (7.92), дістанемо

$-A\omega^2 \cos \omega t + B\omega^2 \sin \omega t + k^2 A \cos \omega t + k^2 B \sin \omega t = h \cos \omega t$,
звідси знайдемо значення довільних сталих A і B :

$$A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}; \quad B = 0.$$

Отже, частинний розв'язок x_3'' приймає вигляд

$$x_3'' = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (7.92) приймає вигляд

$$x_3 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (7.93)$$

Залишається визначити сталі інтегрування C_1 і C_2 із початкових умов руху. Для цього продиференціюємо рівняння (7.93) по часу, матимемо

$$\dot{x}_3 = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt - \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (7.94)$$

Підставивши в рівняння (7.93) $t = 0, x_3 = 0$ (за умовою задачі, в початковий момент точка C_3 перебувала у положенні статичної рівноваги) і в рівняння (7.94) $t = 0, \dot{x}_3 = V_0$ (за умовою задачі, в початковий момент точка C_3 мала швидкість, що дорівнювала V_0 і мала напрям по вертикалі вниз), знаходимо

$$C_1 = -\frac{h}{k^2 - \omega^2}, \quad C_2 = \frac{V_0}{k}.$$

Підставляючи ці значення C_1 і C_2 в рівність (7.93), одержуємо шукане рівняння руху центра мас C_3 корпусу A вздовж вертикалі поза резонансом ($k \neq \omega$)

$$x_3 = -\frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t,$$

де

$$k = \sqrt{\frac{2c}{2m + m_3}}, \quad h = \frac{2m}{2m + m_3} a \omega^2.$$

Визначимо рівняння руху центра мас C_3 корпусу A при резонансі, тобто коли $\omega = k$. В цьому випадку, частинний розв'язок x_3'' необхідно шукати у вигляді

$$x_3'' = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t.$$

Для визначення A і B знаходимо

$$\dot{x}_3'' = A \cos \omega t - A\omega t \sin \omega t + B \sin \omega t + B\omega t \cos \omega t;$$

$$x_3'' = -2A\omega \sin \omega t - A\omega^2 t \cos \omega t + 2B\omega \cos \omega t - B\omega^2 t \sin \omega t.$$

Підставляючи значення \ddot{x}_3'' і x_3'' в рівняння (7.92), матимемо з врахуванням, що $\omega = k$

$$\begin{aligned} -2A\omega \sin \omega t - A\omega^2 t \cos \omega t + 2B\omega \cos \omega t - B\omega^2 t \sin \omega t + \\ + A\omega^2 t \cos \omega t + B\omega^2 t \sin \omega t = h \cos \omega t. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$2B\omega = h;$$

$$-2A\omega = 0.$$

Звідси $B = \frac{h}{2\omega}$; $A = 0$.

Отже, розв'язок x_3'' має вигляд

$$x_3'' = \frac{h}{2\omega} t \sin \omega t.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (7.92) при резонансі набуває вигляду

$$x_3 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{2\omega} t \sin \omega t.$$

Так як $k = \omega$, то

$$x_3 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{2\omega} t \sin \omega t.$$

Визначаємо \dot{x}_3

$$\dot{x}_3 = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t + \frac{h}{2\omega} \sin \omega t + \frac{h}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Підставивши в два останніх рівняння початкові умови: $t = 0$, $x_3 = 0$,

$\dot{x}_3 = V_0$, знаходимо

$$C_1 = 0; C_2 = \frac{V_0}{\omega}.$$

Отже, рівняння руху центра C_3 корпусу A при резонансі остаточно приймає вигляд

$$x_3 = \left(\frac{V_0}{\omega} + \frac{h}{2\omega} t \right) \sin \omega t,$$

де

$$\omega = k = \sqrt{\frac{2c}{2m + m_3}}, \quad h = \frac{2m}{2m + m_3} a \omega^2.$$

7.10. Момент кількості руху матеріальної точки і системи матеріальних точок. Теорема про зміну моменту кількості руху системи матеріальних точок. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла. Вказівки до завдання Дб.

Мірою обертального руху системи матеріальних точок відносно довільної точки (центра) або осі є векторна величина – момент кількості руху або кінетичний момент.

Момент кількості руху окремої матеріальної точки відносно довільного центра O дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки на кількість її руху (по аналогії з моментом сили) рис. 7.24.

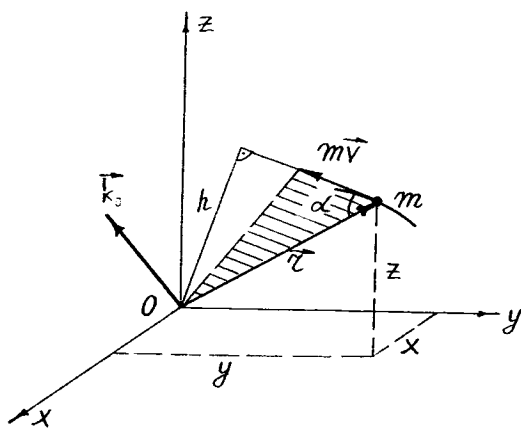


Рис. 7.24

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{V}. \quad (7.95)$$

По модулю вектор \vec{k}_O дорівнює

$$|\vec{k}_O| = |\vec{r} \times m\vec{V}| = mVr \sin \alpha = mVh,$$

де h – перпендикуляр побудований з точки, відносно якої визначається момент кількості руху до лінії дії вектора кількості руху (плече моменту кількості руху) рис. 7.24.

Для системи матеріальних точок, моментом кількості руху системи, або кінетичним моментом системи відносно довільної точки (центра) O , називається геометрична сума моментів кількості руху всіх точок системи відносно цієї довільної точки, тобто

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k. \quad (7.96)$$

Вектор кількості руху системи матеріальних точок \vec{K}_O прикладений в точці, відносно якої він визначається.

За одиницю моменту кількості руху матеріальної точки, або системи матеріальних точок в системі CI приймають $\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$.

Проекції кількості руху системи матеріальних точок на осі декартової системи координат відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{k=1}^n m_k \left(y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k \right); \\ K_y &= \sum_{k=1}^n m_k \left(z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k \right); \\ K_z &= \sum_{k=1}^n m_k \left(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k \right). \end{aligned} \quad (7.97)$$

де x_k, y_k, z_k – відповідні координати “ k ”-ої матеріальної точки системи;

$\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$ – відповідні проекції швидкості “ k ”-ої матеріальної точки на осі координат.

Визначимо момент кількості руху твердого тіла відносно нерухомої осі обертання (рис. 7.25). Як відомо, тверде тіло розглядається як сис-

тема матеріальних точок, відстань між якими в процесі руху тіла не змінюється, тому момент кількості руху твердого тіла відносно нерухомої осі обертання визначається за формулою (7.97), тобто

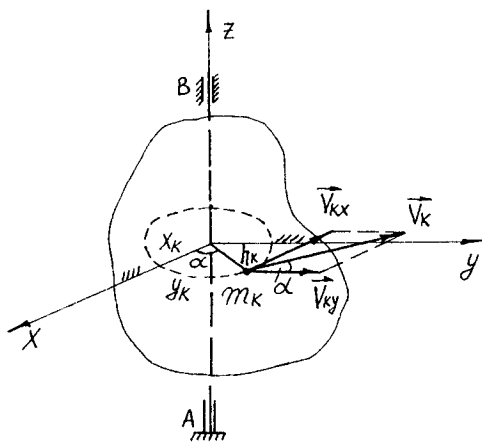


Рис. 7.25

$$\begin{aligned}
 K_z &= \sum_{k=1}^n m_k \left(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k \right) = \sum_{k=1}^n m_k \left(h_k \cos \alpha \cdot V_k \cos \alpha + h_k \sin \alpha \cdot V_k \sin \alpha \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^n m_k \left(h_k^2 \cos^2 \alpha \cdot \omega_z + h_k^2 \sin^2 \alpha \cdot \omega_z \right) = \sum_{k=1}^n m_k \omega_z h_k^2 = \omega_z \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = J_z \omega_z,
 \end{aligned} \tag{7.98}$$

де

$$\begin{aligned}
 x_k &= h_k \cos \alpha; \\
 y_k &= h_k \sin \alpha; \\
 \dot{x}_k &= V_{kx} = -V_k \sin \alpha; \\
 \dot{y}_k &= V_{ky} = V_k \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

$V_k = \omega_z h_k$ (ω_z – кутова швидкість обертання твердого тіла навколо осі z ; h_k – відстань “ k ”-ої точки твердого тіла до осі обертання).

Величина $I_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2$ у формулі (7.98) носить назву моменту інерції твердого тіла відносно осі z . Момент інерції тіла відносно осі характеризує міру інертності тіла при його обертальному русі.

Таким чином, з формули (7.98) випливає, що момент кількості руху твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, відносно осі обертання, дорівнює добутку кутової швидкості обертання тіла навколо цієї осі і моменту інерції тіла відносно тієї ж осі.

Дамо значення моментів інерції однорідних твердих тіл найпростішої форми відносно центральної осі, які зустрічаються при розв'язанні практичних задач:

1. Момент інерції тонкого однорідного стержня масою m і довжиною l відносно центральної осі z (рис. 7.26):

$$I_z = \frac{ml^2}{12}. \quad (7.99)$$

2. Момент інерції тонкого однорідного кільця масою m і радіусом R відносно центральної осі z (рис. 7.27)

$$I_z = mR^2. \quad (7.100)$$

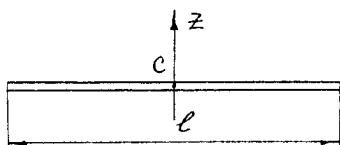


Рис. 7.26

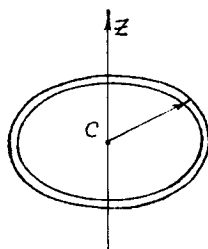


Рис. 7.27

3. Момент інерції тонкого однорідного диска і циліндра масою m і радіусом R відносно центральної осі z (рис. 7.28, рис. 7.29)

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (7.101)$$

При обчисленні моментів інерції відносно осі слід також мати на увазі теорему Гюйгенса, за якою визначаються моменти інерції відносно паралельних осей:

$$I_{z'} = I_z + md^2, \quad (7.102)$$

де I_z – момент інерції відносно центральної осі, яка проходить через центр мас C .

$I_{z'}$ – момент інерції відносно осі z' , паралельній осі z .

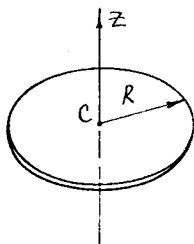


Рис. 7.28

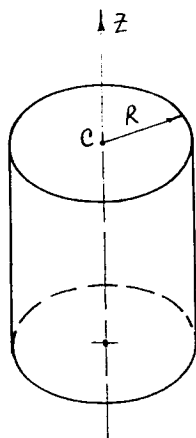


Рис. 7.29

За одиницю моменту інерції відносно осі в системі CI приймають $[\text{кг} \cdot \text{м}^2]$. Продиференціюємо вираз (7.96) за часом:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{K}_O}{dt} &= \frac{d\left(\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k\right)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{d(\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{V}_k + \\ &+ \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \frac{d(m_k \bar{V}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \frac{d(m_k \bar{V}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}, \end{aligned} \quad (7.103)$$

де $\sum_{k=1}^n \frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{V}_k = 0$.

Враховуючи рівняння (7.74 а) перетворимо вираз (7.103):

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(e)} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)}), \quad (7.104)$$

де $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^{(i)} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(i)}) = \vec{0}$, див. формулу (7.73).

Векторне рівняння (7.104) є математичним виразом теореми про зміну моменту кількості руху системи матеріальних точок відносно довільно-

го центра (точки): “похідна за часом від вектора моменту кількості руху системи матеріальних точок відносно довільного нерухомого центра (точки) дорівнює геометричній сумі моментів всіх зовнішніх сил, які діють на точки системи, відносно того ж центра (точки)”.

В проекціях на нерухомі осі декартової системи координат, початок яких співпадає з центром O , рівність (7.104) еквівалентна трьом скалярним виразам:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^n M_x (\bar{F}_k^{(e)}); \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^n M_y (\bar{F}_k^{(e)}); \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^{(e)}). \quad (7.105)$$

Наслідки з теореми про зміну моменту кількості руху системи матеріальних точок:

1. Внутрішніми силами безпосередньо не можна змінити момент кількості руху системи матеріальних точок, так як рівняння (7.104) і (7.105) їх не містять.

2. Якщо геометрична сума усіх моментів зовнішніх сил, що діють на точки системи, відносно довільного нерухомого центра (точки), дорівнює нулю, то момент кількості руху системи матеріальних точок відносно того ж центра не змінюється ні за модулем ні за напрямом, тобто

$$\bar{K}_O = \overline{const.}$$

3. Якщо алгебраїчна сума всіх моментів зовнішніх сил, що діють на точки системи, відносно будь-якої нерухомої осі декартової системи координат дорівнює нулю, то момент кількості руху системи матеріальних точок відносно тієї ж осі не змінюється в процесі руху.

Розглянуті в пунктах 2 і 3 положення носять назву закону збереження моменту кількості руху системи матеріальних точок.

Теорема про зміну моменту кількості руху системи матеріальних точок широко застосовується при вивченні обертального руху системи матеріальних точок і зокрема при вивченні обертального руху твердого тіла.

Нехай тверде тіло здійснює обертальний рух відносно нерухомої осі z . Диференціальне рівняння руху тіла на підставі теореми про зміну моменту кількості руху, приймає вигляд

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^{(e)}), \quad (7.106)$$

$$\text{де } \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega_z}{dt} \quad (\varphi - \text{кут повороту твердого тіла}).$$

За допомогою диференціального рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі можна розв'язувати як прямі, так і обернені задачі динаміки. У прямих задачах за даним моментом інерції твердого тіла I_z відносно осі обертання і законом обертання твердого тіла $\varphi = \varphi(t)$ визначають головний момент зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла відносно осі обертання. В обернених задачах за даними моментами зовнішніх сил відносно осі обертання, моментом інерції, а також за початковими умовами руху складають рівняння обертання твердого тіла.

Схема розв'язання задач динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі така:

- 1) вибрати осі координат і задати напрям однієї з них (осі z) вздовж осі обертання твердого тіла;
- 2) провести аналіз всіх зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла (включаючи і сили реакції в'язей), а також зобразити їх на розрахунковій схемі;
- 3) обчислити суму моментів всіх зовнішніх сил відносно осі обертання;
- 4) скласти диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі;
- 5) розв'язати пряму або обернену задачу залежно від умови задачі;
- 6) дослідити розв'язок, щоб визначити область його застосування.

Приклад 7.7. Вакуум – фільтр неперервної дії (рис. 7.30) складається з барабана 1, фільтрованої тканини 2, коробка для сушла 3 і натяжного пристрою з роликками. Ролики 4, 5 і 6 забезпечують підтримку

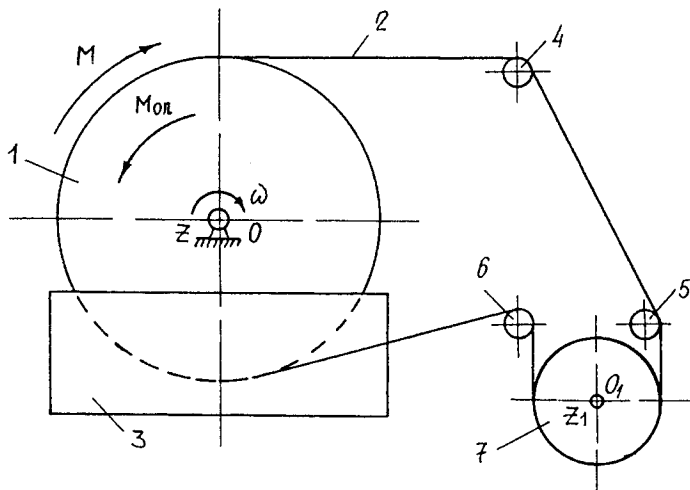


Рис. 7.30

фільтрованої тканини з осадом при роботі фільтра, а ролик 7 забезпечує її натяг.

На барабан 1 діє обертальний момент M і момент сил опору пропорційний кутовій швидкості барабана $M_{om} = -\alpha\omega$, де α – стала величина.

Нехтуючи масою фільтрованої тканини і осаду та вважаючи, що проковзування фільтрованої тканини по барабану і по роликах відсутнє, визначити закон, за яким змінюється кут повороту барабана $\varphi = \varphi(t)$, якщо маса барабана m , радіус барабана R , радіус інерції барабана ρ , а ролик 7 являє собою суцільний однорідний диск масою m_1 , радіус якого дорівнює r . В початковий момент руху система (вакуум-фільтр) перебувала у спокої.

Розв'язання. Для розв'язання задачі застосовуємо диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі (7.106)

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^{(e)}),$$

де I_z – момент інерції твердого тіла відносно осі обертання;

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} \text{ – кутове прискорення твердого тіла;}$$

$$\sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^{(e)}) \text{ – алгебраїчна сума моментів всіх зовнішніх сил,}$$

що прикладені до твердого тіла, відносно осі обертання тіла.

До барабана 1 прикладено (рис. 7.31): обертальний момент M , момент сил опору M_{om} , сила ваги барабана \bar{P} , реакції осі барабана \bar{X}_O, \bar{Y}_O , реакції фільтрованої тканини \bar{T}_1 і \bar{T}_2 .

Обчислюємо момент зовнішніх сил, які прикладені до барабана (рис. 7.31):

$$\sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^{(e)}) = M + (T_1 - T_2)R - M_{om} = M + (T_1 - T_2)R - \alpha \dot{\varphi},$$

де $\dot{\varphi} = \omega$ – кутова швидкість барабана.

Момент інерції барабана відносно осі обертання z дорівнює

$$I_z = m\rho^2.$$

Значення моменту $\sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^{(e)})$ і моменту інерції I_z підставляємо в

рівняння (7.106), матимемо

$$m\rho^2 \ddot{\varphi} = M + (T_1 - T_2)R - \alpha \dot{\varphi}, \quad (7.107)$$

де $\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt}$ – кутове прискорення барабана 1.

В рівнянні (7.107) реакції фільтрованої тканини T_1 і T_2 нам невідомі. Для виключення T_1 і T_2 розглянемо рух ролика 7 (рис. 7.32). Ролик здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі z_1 . Складемо диференціальне рівняння руху ролика, тобто

$$I_{z_1} \ddot{\varphi}_1 = \sum_{k=1}^n M_{z_1} (\bar{F}_k^{(e)}), \quad (7.108)$$

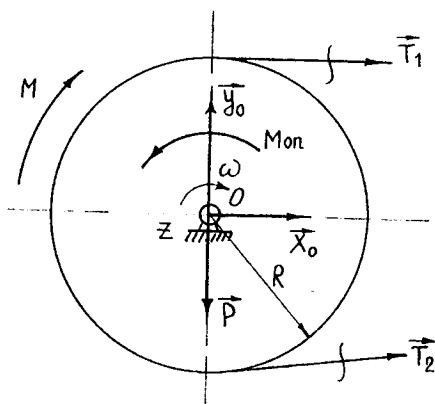


Рис. 7.31

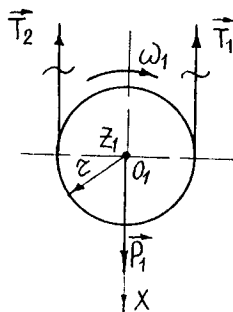


Рис. 7.32

де $\ddot{\varphi}_1 = \frac{d\omega_1}{dt}$ – кутове прискорення ролика 7.

На ролик 7 діють (рис. 7.32): сила ваги \bar{P}_1 і реакції фільтрувальної тканини \bar{T}_1 і \bar{T}_2 . Обчислюємо момент сил, які прикладені до ролика 7:

$$\sum_{k=1}^n M_{z_1} (\bar{F}_k^{(e)}) = (T_2 - T_1)r.$$

Момент інерції ролика відносно осі обертання z_1 дорівнює

$$I_{z_1} = \frac{m_1 r^2}{2}.$$

Значення моменту $\sum_{k=1}^n M_{z_1}(\vec{F}_k^{(e)})$ і моменту інерції I_{z_1} підставляємо в рівняння (7.108), матимемо

$$\frac{m_1 r^2}{2} \ddot{\varphi}_1 = (T_2 - T_1) r. \quad (7.109)$$

Так як вісь z_1 нерухома, то з рівняння рівноваги сил, що діють на ролик, тобто

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad P_1 - T_1 - T_2 = 0,$$

матимемо

$$P_1 = T_1 + T_2. \quad (7.110)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (7.109)–(7.110), дістанемо

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{P_1}{2} - \frac{m_1 r \ddot{\varphi}_1}{4}; \\ T_2 &= \frac{P_1}{2} - \frac{m_1 r \ddot{\varphi}_1}{4}. \end{aligned} \quad (7.111)$$

Враховуючи, що за умовою задачі фільтровальна тканина рухається без ковзання, тобто всі її точки мають однакові за величиною швидкості, матимемо

$$\omega R = \dot{\varphi}_1 r, \quad \text{або} \quad \dot{\varphi} R = \dot{\varphi}_1 r,$$

де $\omega = \dot{\varphi}_1$ – кутова швидкість ролика 7.

Диференціюючи останній вираз за часом, матимемо

$$\ddot{\varphi} R = \ddot{\varphi}_1 r,$$

звідси

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi} \frac{R}{r}. \quad (7.112)$$

Беручи до уваги рівності (7.111) і (7.112) рівнянню (7.107) надамо вигляду

$$\frac{\ddot{\varphi}}{2}(2m\rho^2 + m_1R^2) = M - \alpha\dot{\varphi},$$

або

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{2m\rho^2 + m_1R^2} (M - \alpha\dot{\varphi}). \quad (7.113)$$

Так як $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$, то диференціальне рівняння (7.113) можна записати так

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{2}{2m\rho^2 + m_1R^2} (M - \alpha\dot{\varphi}).$$

Позначимо в цьому рівнянні величину $\frac{2}{2m\rho^2 + m_1R^2}$ так

$$\frac{2}{2m\rho^2 + m_1R^2} = n.$$

Тоді диференціальне рівняння набере вигляду

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = n(M - \alpha\dot{\varphi}). \quad (7.114)$$

Відокремимо змінні $\dot{\varphi}$ і t , матимемо

$$\frac{d\dot{\varphi}}{n(M - \alpha\dot{\varphi})} = dt.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$-\frac{1}{n\alpha} \ln(M - \alpha\dot{\varphi}) + C_1 = t. \quad (7.115)$$

Сталу інтегрування C_1 визначимо на підставі початкових умов руху:

$t = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$, тоді з останнього рівняння дістанемо

$$C_1 = \frac{1}{n\alpha} \ln M .$$

Отже рівняння (7.115) набере вигляду

$$\frac{1}{n\alpha} \ln M - \frac{1}{n\alpha} \ln \left(M - \alpha \dot{\varphi} \right) = t .$$

Перетворюємо останнє рівняння:

$$\ln \frac{M}{M - \alpha \dot{\varphi}} = n\alpha t ;$$

$$e^{n\alpha t} = \frac{M}{M - \alpha \dot{\varphi}} ,$$

звідси знайдемо

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{\alpha} (1 - e^{-n\alpha t}) \quad (7.116)$$

Так як $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$, то рівняння (7.116) набере вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{\alpha} (1 - e^{-n\alpha t}) .$$

Відокремимо змінні φ і t , матимемо

$$d\varphi = \frac{M}{\alpha} (1 - e^{-n\alpha t}) dt .$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$\varphi = \frac{Mt}{\alpha} - \frac{M}{\alpha^2 n} e^{-n\alpha t} + C_2 . \quad (7.117)$$

Сталу інтегрування C_2 визначимо на підставі початкових умов руху: $t = 0, \varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0$, тоді з рівняння (7.117) дістанемо

$$C_2 = \frac{M}{\alpha^2 n} .$$

З врахуванням значення C_2 рівняння (7.117) набере вигляду

$$\varphi = \frac{Mt}{\alpha} + \frac{M}{\alpha^2 n} (1 - e^{-n\alpha t}),$$

або беручи до уваги значення n , остаточно матимемо

$$\varphi = \frac{Mt}{\alpha} + \frac{M(2m\rho^2 + m_1 R^2)}{2\alpha^2} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha t}{2m\rho^2 + m_1 R^2}} \right). \quad (7.118)$$

Рівняння (7.118) шуканий закон, за яким змінюється кут повороту барабана 1 вакуум – фільтра при його роботі з часом.

7.11. Кінетична енергія матеріальної точки і системи матеріальних точок. Кінетична енергія твердого тіла.

Кінетична енергія – міра механічного руху, яка характеризує його здатність перетворюватися в еквівалентну кількість іншого виду руху (теплоту, електрику, тощо).

Кінетична енергія окремої матеріальної точки дорівнює півдобутку маси точки на квадрат її швидкості, тобто

$$\frac{mV^2}{2}.$$

Кінетична енергія завжди додатна величина і в системі CI має розмірність $[Н \cdot м]$.

Кінетична енергія системи матеріальних точок дорівнює сумі кінетичних енергій всіх точок системи:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}. \quad (7.119)$$

У випадку складного руху системи її кінетичну енергію визначають за теоремою Кеніга: “кінетична енергія системи матеріальних точок в її складному русі дорівнює сумі кінетичних енергій центра мас, маса якого дорівнює масі системи, і кінетичної енергії системи матеріальних точок в її русі відносно системи координат, яка рухається поступально, з початком у центрі мас”:

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{rk}^2}{2}, \quad (7.120)$$

де V_{rk} – відносна швидкість “ k ”-ої матеріальної точки відносно центра мас;

V_c – швидкість центра мас.

Визначимо кінетичну енергію твердого тіла. У випадку поступального руху твердого тіла всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, тому $V_k = V_c$ і на підставі формули (7.119) матимемо

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_c^2}{2} = \frac{M V_c^2}{2}. \quad (7.121)$$

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла при його поступальному русі визначається так же, як кінетична енергія окремої точки, якщо за цю точку прийняти центр мас твердого тіла C , маса якого дорівнює масі всього тіла.

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі, швидкість будь-якої точки тіла масою m_k дорівнює $V_k = \omega h_k$ (рис. 7.33), де h_k – найкоротша відстань від точки з масою m_k до осі обертання; ω – кутова швидкість обертання твердого тіла. Тоді на підставі формули (7.119) матимемо

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k (\omega h_k)^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k h_k^2 \omega^2}{2} = \frac{J_z \omega^2}{2}, \quad (7.121, \text{а})$$

де J_z – момент інерції твердого тіла відносно осі обертання.

Отже, кінетична енергія твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі, дорівнює півдобутку момента інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла.

При плоскопаралельному русі твердого тіла кінетичну енергію тіла можна визначити за допомогою теореми Кеніга за формулою:

$$T = \frac{M V_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}, \quad (7.122)$$

де J_c – момент інерції твердого тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла C перпендикулярно до нерухомої площини.

З формули (7.122) випливає, що при плоскопаралельному русі твердого тіла кінетична енергія тіла складається з кінетичної енергії тіла при його поступальному русі зі

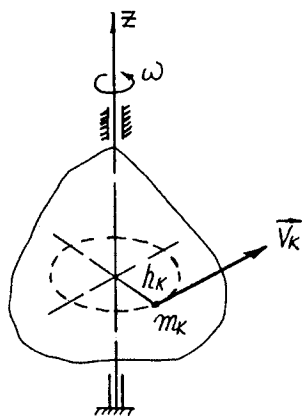


Рис. 7.33

швидкістю центра мас і кінетичної енергії тіла при його обертанні навколо осі, що проходить через центр мас C тіла перпендикулярно до нерухомої площини, з кутовою швидкістю ω .

Зазначимо, що у випадку плоскопаралельного руху кінетичну енергію твердого тіла можна також визначити за формулою:

$$T = \frac{J_{\text{мц}} \omega^2}{2}, \quad (7.123)$$

де $J_{\text{мц}}$ – момент інерції твердого тіла відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкостей перпендикулярно до нерухомої площини; ω – миттєва кутова швидкість.

Момент інерції $J_{\text{мц}}$ визначається за формулою (7.102)

$$J_{\text{мц}} = J_c + Md^2 = J_c + \frac{P}{g} d^2,$$

де J_c – момент інерції твердого тіла відносно центра мас;
 d – відстань між осями, що проходить через миттєвий центр і центр мас тіла.

Остаточно

$$T = \frac{1}{2} \left(J_c + \frac{P}{g} d^2 \right) \omega^2. \quad (7.124)$$

Якщо механічна система складається з декількох твердих тіл, то кінетична енергія такої системи дорівнює сумі кінетичних енергій кожного твердого тіла, що входить до складу цієї системи, тобто

$$T = \sum_{k=1}^n T_k, \quad (7.125)$$

де T_k – кінетична енергія окремого твердого тіла, що входить до складу даної механічної системи.

7.12. Робота сили. Потужність. Робота сили ваги, робота пружної сили, робота моменту пружних сил.

Нехай матеріальна точка M рухається вздовж прямої AB під дією сталою за модулем і за напрямом сили \vec{F} (рис. 7.34). Будемо вважати, що точка M рухається від положення M_1 до положення M_2 . Позначимо кут між вектором сили \vec{F} і вектором швидкості \vec{V} точки M через α . Тоді роботою сталої сили \vec{F} на прямолінійному відрізку M_1M_2 називається-

ся добуток величини сили F на величину переміщення $S = M_1M_2$ точки M і на косинус кута між ними:

$$A = Fs \cos \alpha . \quad (7.126)$$

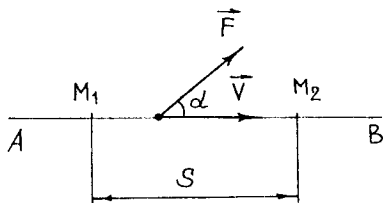


Рис. 7.34

З формули (7.126) випливає, що при $\alpha < \pm \frac{\pi}{2}$ робота сили додатна, а при $\alpha > \pm \frac{\pi}{2}$ робота сили від'ємна. Якщо $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, то робота сили \vec{F} на переміщенні s дорівнює нулю.

Наведене визначення роботи сили має місце тільки у випадку сталої сили коли точка прикладання сили переміщується прямолінійно.

У випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної сили, щоб визначити роботу сили розіб'ємо відрізок кривої M_1M_2 на n довільних малих відрізків довжиною Δs_k (рис. 7.35). Вважаючи кожний відрізок прямолінійним відрізком і, що при переміщенні точки M вздовж цього відрізка сила \vec{F}_k залишається сталою за величиною і напрямом, на підставі формули (7.126) знайдемо приблизне значення роботи сили \vec{F} на переміщенні точки від положення M_1 до положення M_2 (рис. 7.35)

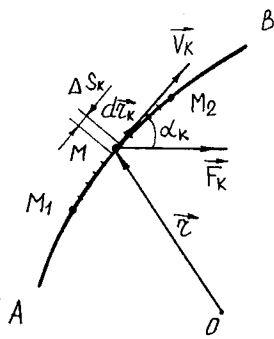


Рис. 7.35

$$A \approx \sum_{k=1}^n F_k \cos \alpha_k \Delta s_k .$$

Точне значення роботи дорівнює

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta s_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n F_k \cos \alpha_k \Delta s_k = \int_{M_1M_2} F \cos \alpha ds . \quad (7.127)$$

Отриманий інтеграл носить назву криволінійного інтеграла першого роду по дузі M_1M_2 (рис. 7.35).

За формулою (7.127) визначається робота змінної сили на криволінійному переміщенні матеріальної точки при натуральному способі визначення її руху, якщо можна виразити добуток $F \cos \alpha$ як функцію довжини дуги s . Як правило, це важко виконати, в зв'язку з математичними труднощами, тому при обчисленні роботи сили звичайно користуються криволінійним інтегралом другого роду.

Перетворимо формулу (7.127). Для цього введемо у розгляд поняття елементарної роботи сили.

Під елементарною роботою сили розуміють вираз, який знаходиться під знаком інтеграла (7.127), тобто

$$d^1 A = F \cos \alpha \, ds. \quad (7.128)$$

З кінематики відомо, що $ds = |d\vec{r}|$, де $d\vec{r}$ – елементарний приріст радіуса – вектора точки \vec{r} (елементарне переміщення точки), тому

$$d^1 A = F \cos \alpha \cdot |d\vec{r}|$$

або

$$d^1 A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (7.129)$$

Беручи до уваги розклад векторів \vec{F} і $d\vec{r}$ по осях декартової системи координат, тобто

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k};$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k},$$

перетворюємо формулу (7.129) у вигляд

$$d^1 A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (7.130)$$

Вирази (7.128), (7.129) і (7.130) відповідно визначають елементарну роботу сили при векторному, координатному (декартові координати) і натуральному способах задавання руху точки.

Зауважимо, що елементарну роботу сили позначають символом $d^1 A$, оскільки елементарна робота тільки в окремих випадках є повним диференціалом деякої функції координат.

Інтегруючи вираз (7.130) матимемо

$$A = \int_{M_1, M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (7.131)$$

Отриманий інтеграл називається криволінійним інтегралом другого роду (всі функції F_x , F_y і F_z визначаються на кривій $M_1 M_2$, а диференціали координат dx , dy , dz зв'язані між собою через її рівняння).

За формулою (7.131) визначається робота змінної сили на криволінійному переміщенні матеріальної точки при координатному способі визначення її руху, якщо сила \vec{F} залежить від положення точки.

Якщо сила, що діє на матеріальну точку є рівнодійною декількох сил, тобто $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$, то елементарна робота рівнодійної сили визначається на підставі теореми: “елементарна робота рівнодійної сили дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт складових сил”. Дійсно, так як $d^1 A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, то підставляючи сюди замість \vec{F} геометричну суму сил, матимемо

$$\begin{aligned} d^1 A &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = \\ &= d^1 A_1 + d^1 A_2 + \dots + d^1 A_n. \end{aligned} \quad (7.132)$$

З розглянутої теореми випливає, що повна робота рівнодійної сили на деякому кінцевому переміщенні по криволінійній траєкторії дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому ж кінцевому переміщенні, тобто

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n. \quad (7.133)$$

За одиницю роботи сили в системі *CI* приймають [Дж], або [Н·м].

Потужність *N* характеризує швидкість виконання роботи в часі і визначається за формулою:

$$N = \frac{d^1 A}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}, \quad (7.134)$$

де \vec{V} – швидкість точки.

Таким чином, потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили \vec{F} , що прикладена до точки і вектора швидкості \vec{V} цієї точки.

З формули (7.131) випливає, що від джерела із заданою потужністю можна отримати велику силу тільки при малій швидкості.

Одиницею вимірювання потужності в системі *CI* є [Вт], або [Н·м/с].

Розглянемо обчислення роботи сили прикладеної до матеріальної точки в деяких частинних випадках.

Робота сили ваги. Нехай матеріальна точка вагою \vec{P} (рис.7.36) рухається по траєкторії в околі Земної поверхні із положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Проекції сили \vec{P} на осі декартової системи координат (зв'язаної з Землею), відповідно дорівнюють (рис. 7.36)

$$P_x = 0; P_y = 0; P_z = -P.$$

Елементарна робота сили ваги \vec{P} на підставі (7.130) дорівнює

$$d^1 A = P_z dz = -P dz.$$

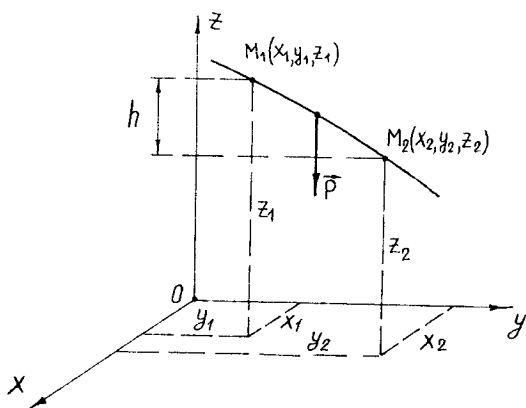


Рис. 7.36

Повна робота сили \vec{P} на підставі (7.131) дорівнює

$$A = \int_{z_1}^{z_2} -P dz = -P(z_2 - z_1) = \pm Ph. \quad (7.134 \text{ а})$$

Отже, робота сили ваги матеріальної точки дорівнює добутку сили ваги на різницю висот кінцевого і початкового положень точки і не залежить від форми траєкторії точки. Якщо матеріальна точка M наближається до земної поверхні, то робота сили ваги буде додатна. Якщо матеріальна точка M віддаляється від земної поверхні, то робота сили ваги від'ємна. Якщо висоти початкового і кінцевого положень матеріальної точки M однакові (при русі точки по замкненій траєкторії), то робота сили дорівнює нулеві.

Робота пружної сили ($F_x = -cx$) при прямолінійному переміщенні точки M вздовж осі x від положення x_1 до положення x_2 (рис. 7.37) обчислюється аналогічно обчислюванню роботи сили ваги за формулою (7.131), тобто

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -c \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2). \quad (7.135)$$

Робота від'ємна, якщо точка M рухається в бік зростання величини сили \vec{F} і додатна, якщо точка M рухається в бік спаду величини сили \vec{F} .

Робота пружної сили ($\vec{F} = -c\vec{r}$) при кінцевому переміщенні по криволінійній траєкторії M_1M_2 (рис. 7.38) пропорційна різниці квадратів величин кінцевого і початкового радіусів – векторів точки

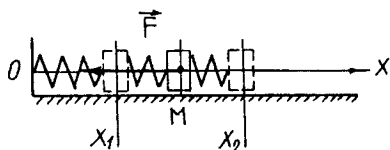


Рис. 7.37

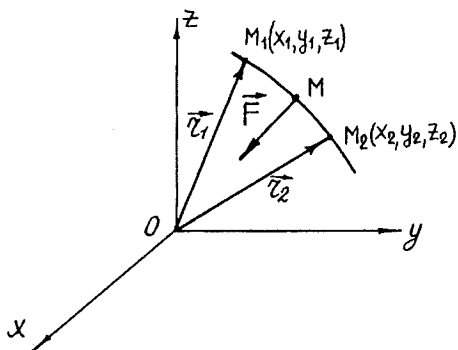


Рис. 7.38

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -c \int_{M_1}^{M_2} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{c}{2} (r_2^2 - r_1^2). \quad (7.136)$$

Таким чином, аналогічно роботі сили ваги, робота пружної сили залежить від початкового і кінцевого положень точки M і не залежить від форми кривої, по якій переміщується матеріальна точка M .

Робота момента пружних сил ($M_z = -c\varphi$) дорівнює

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi = -c \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi d\varphi = -\frac{c}{2} (\varphi_2^2 - \varphi_1^2), \quad (7.137)$$

де φ_1 – початковий кут закручування;

φ_2 – кінцевий кут закручування.

7.13. Робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла.

Робота внутрішніх сил твердого тіла.

При поступальному русі твердого тіла елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює добутку головного вектора зовнішніх сил $\vec{R}_O^{(e)}$ на елементарне переміщення центра мас $d\vec{r}_c$ твердого тіла.

Дійсно, так як при поступальному русі усі точки тіла мають однакові елементарні переміщення, які дорівнюють переміщенню центра мас тіла, то матимемо

$$\begin{aligned} d^l A &= \vec{F}_1^{(e)} \cdot d\vec{r}_c + \vec{F}_2^{(e)} \cdot d\vec{r}_c + \dots + \vec{F}_n^{(e)} \cdot d\vec{r}_c = \\ &= (\vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)} + \dots + \vec{F}_n^{(e)}) \cdot d\vec{r}_c = \vec{R}_O^{(e)} \cdot d\vec{r}_c. \end{aligned} \quad (7.138)$$

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює добутку головного момента зовнішніх сил відносно осі обертання M_z на елементарний кут повороту $d\varphi$ твердого тіла.

Дійсно, елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює

$$d^1 A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} \cdot d\vec{r}_k,$$

де $d\vec{r}_k$ – елементарне переміщення довільної точки B_k твердого тіла; $\vec{F}_k^{(e)}$ – зовнішня сила, яка прикладена до точки (рис. 7.39).

Перетворимо попередній вираз, матимемо

$$d^1 A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} dt = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} \cdot \vec{V}_k dt.$$

Так як $\vec{V}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$, то

$$d^1 A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) dt,$$

де \vec{r}_k – радіус – вектор точки B_k (рис. 7.39).

На підставі властивості скалярно-векторного добутку матимемо

$$d^1 A = \vec{\omega} dt \cdot \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)}.$$

Так як $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, а $\omega dt = d\varphi$, то остаточно матимемо

$$d^1 A = d\varphi \vec{k} \cdot \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)} = M_z d\varphi, \quad (7.139)$$

де $\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(e)}$ – головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки O , яка лежить на осі Oz (рис. 7.39).

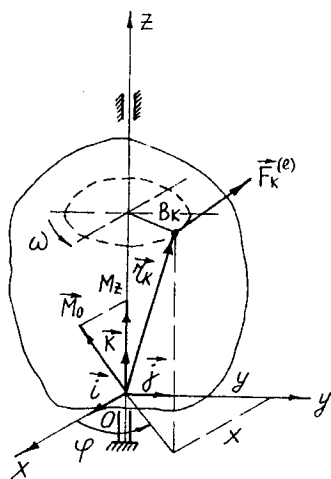


Рис. 7.39

Повна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі, дорівнює

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi. \quad (7.140)$$

Якщо на тіло діють сталі зовнішні сили, то з (7.140) випливає:

$$A = M_z (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (7.141)$$

де φ_1 і φ_2 – відповідно початковий і кінцевий кут повороту твердого тіла.

Потужність зовнішніх сил у випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі дорівнює

$$N = \frac{d'A}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega. \quad (7.142)$$

Отже, потужність зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі дорівнює добутку головного момента зовнішніх сил відносно осі обертання M_z на кутову швидкість ω твердого тіла.

У випадку плоскопаралельного руху твердого тіла елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює роботі головного вектора $\vec{R}_O^{(e)}$ зовнішніх сил на елементарному переміщенні $d\vec{r}_c$ центра мас тіла, тобто $\vec{R}_O^{(e)} \cdot d\vec{r}_c$, складеної з елементарною роботою зовнішніх сил при обертанні тіла навколо осі, що проходить через центр мас C тіла перпендикулярно до нерухомої площини, тобто $M_c d\varphi$.

Дійсно, при плоскопаралельному русі твердого тіла переміщення довільної точки тіла дорівнює (рис. 7.40)

$$d\vec{r}_k = d\vec{r}_c + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) dt,$$

$$\text{або } d\vec{r}_k = d\vec{r}_c + (\vec{\omega} dt \times \vec{\rho}_k).$$

Тоді

$$\begin{aligned} d'A &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} \cdot d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} \cdot d\vec{r}_c + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} \cdot (\vec{\omega} dt \times \vec{\rho}_k) = \\ &= \vec{R}_O^{(e)} \cdot d\vec{r}_c + \vec{\omega} dt \cdot \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^{(e)} = \vec{R}_O^{(e)} \cdot d\vec{r}_c + M_c d\varphi, \end{aligned} \quad (7.143)$$

Так як

$$\bar{\omega} dt \cdot \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^{(e)} = \omega dt M_C = \omega dt M_C \cos(\widehat{\bar{\omega} dt, \bar{M}_C}) = \frac{d\varphi}{dt} dt M_C = M_C d\varphi,$$

$$\text{де } \cos(\widehat{\bar{\omega} dt, \bar{M}_C}) = 1.$$

При будь-якому русі твердого тіла сума робіт всіх внутрішніх сил тіла дорівнює нулю.

Дійсно, нехай $\bar{F}_1^{(i)}$ і $\bar{F}_2^{(i)}$ – внутрішні сили взаємодії між точками A і B твердого тіла (рис. 7.41).

На підставі третього закону Ньютона

$$\bar{F}_2^{(i)} = -\bar{F}_1^{(i)}.$$

Складемо суму потужностей сил $\bar{F}_1^{(i)}$ і $\bar{F}_2^{(i)}$, матимемо

$$N_k^{(i)} = \bar{F}_1^{(i)} \cdot \bar{V}_A + \bar{F}_2^{(i)} \cdot \bar{V}_B = \bar{F}_1^{(i)} \cdot \bar{V}_A - \bar{F}_1^{(i)} \cdot \bar{V}_B = \bar{F}_1^{(i)} \cdot (\bar{V}_A - \bar{V}_B),$$

де \bar{V}_A і \bar{V}_B швидкості точок A і B відповідно.

З кінематики відомо, що

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B + \bar{V}_{AB} = \bar{V}_B + \bar{\omega} \times B\bar{A},$$

де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість твердого тіла.

Тоді

$$N_k^{(i)} = \bar{F}_1^{(i)} \cdot (\bar{V}_B + \bar{\omega} \times B\bar{A} - \bar{V}_B) = \bar{F}_1^{(i)} \cdot (\bar{\omega} \times B\bar{A}) = 0,$$

так як вектори $\bar{F}_1^{(i)}$ і $(\bar{\omega} \times B\bar{A})$ взаємно перпендикулярні.

Сума потужностей всіх внутрішніх сил твердого тіла також дорівнює

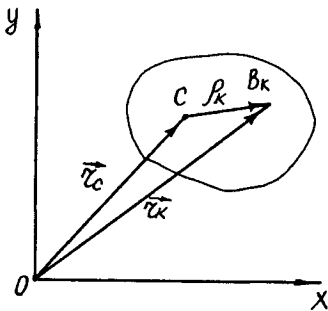


Рис. 7.40

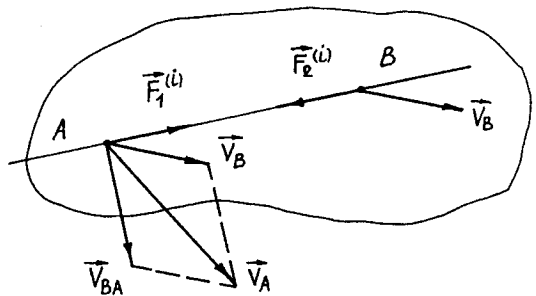


Рис. 7.41

нулю, так як тверде тіло можна вважати системою, що складається з пар взаємодіючих точок, тобто

$$\sum_{k=1}^n N_k^{(i)} = 0.$$

Так як сума потужностей зовнішніх сил твердого тіла дорівнює нулю, то буде дорівнювати нулю і сума робіт цих сил, тобто

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(i)} = 0. \quad (7.144)$$

7.14. Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок. Вказівки до завдання Д7.

Розглянемо рух системи матеріальних точок. Прикладемо до “ k ”-ої матеріальної точки масою m_k рівнодійну зовнішніх $\vec{F}_k^{(e)}$ і рівнодійну внутрішніх сил $\vec{F}_k^{(i)}$. Запишемо диференціальне рівняння руху “ k ”-ої точки у вигляді

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \vec{F}_k^{(e)} + \vec{F}_k^{(i)}.$$

Помножимо скалярно обидві частини цього рівняння на диференціал радіус – вектора “ k ”-ої точки $d\vec{r}_k$, матимемо

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot d\vec{r}_k = \vec{F}_k^{(e)} \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^{(i)} \cdot d\vec{r}_k$$

або

$$m_k \vec{V}_k \cdot d\vec{V}_k = \vec{F}_k^{(e)} \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^{(i)} \cdot d\vec{r}_k.$$

Так як $m_k \vec{V}_k \cdot d\vec{V}_k = d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right)$, то дістанемо

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \vec{F}_k^{(e)} \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^{(i)} \cdot d\vec{r}_k.$$

Для всіх точок системи матимемо

$$d\left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(e)} \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{(i)} \cdot d\vec{r}_k$$

або

$$dT = \sum_{k=1}^n d' A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n d' A_k^{(i)}. \quad (7.145)$$

Формула (7.145) математичний вираз теореми про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок в диференціальній формі: “диференціал кінетичної енергії системи матеріальних точок дорівнює сумі елементарних робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи”.

Якщо проінтегрувати обидві частини рівняння (7.145), тобто

$$\int_{T_0}^T dT = \sum_{k=1}^n \int_{M_0}^M d' A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \int_{M_0}^M d' A_k^{(i)},$$

то матимемо

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n A_k^{(i)}, \quad (7.146)$$

де T_0 , T – кінетична енергія системи матеріальних точок відповідно у початковому і кінцевому положеннях системи; $\sum_{k=1}^n A_k^{(e)}$, $\sum_{k=1}^n A_k^{(i)}$ – відпо-

відно сума робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи при переміщенні системи від положення M_0 до положення M .

Формула (7.146) математичний вираз теореми про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок в інтегральній формі: “зміна кінетичної енергії системи матеріальних точок на її кінцевому переміщенні з одного положення в інше дорівнює сумі робіт на цьому ж переміщенні усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи”.

На відміну від розглянутих теорем динаміки системи матеріальних точок (теорема про рух центра мас, теорема про зміну кількості і моменту кількості руху), це єдина теорема, яка враховує роботу не тільки зовнішніх, а й внутрішніх сил системи.

Зазначимо, що в загальному випадку руху системи матеріальних точок, робота внутрішніх сил не дорівнює нулю, але є такі системи, для котрих сума робіт внутрішніх сил, прикладених до точок системи на будь-якому її переміщенні дорівнює нулю. До таких систем відносяться незмінні системи.

Незмінною системою матеріальних точок називається система, в якій відстань між точками прикладання внутрішніх сил при русі системи не змінюється. Зокрема, такими системами будуть тверде тіло і системи, які складаються з твердих тіл, з'єднаних між собою жорсткими нерозтяжними стержнями, або нерозтяжними нитками. Для цих систем на підставі формул (7.144), (7.145) і (7.146) матимемо

$$dT = \sum_{k=1}^n d^I A_k^{(e)}, \quad (7.147)$$

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^{(e)}. \quad (7.148)$$

Теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок застосовують у тих випадках, коли в число даних і шуканих величин входять: інерційні характеристики точок системи (маси і моменти інерції); швидкості точок системи (лінійні і кутові); сили, моменти сил і пар, прикладених до точок системи; переміщення точок системи (лінійні, кутові).

Зазначимо також, що застосування цієї теореми найбільш ефективно тоді, коли сили і моменти сил та пар сил стали або залежать від координат точок системи.

Розв'язання задач за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії проводять в такій послідовності:

1) визначають кількість матеріальних точок (тіл), що входять до системи;

2) розглядають схему сил, як зовнішніх, так і внутрішніх, що діють на точки системи;

3) вибирають систему координат та переміщення системи, для якого слід застосувати теорему про зміну кінетичної енергії;

4) досліджують, виконують внутрішні сили роботу чи ні;

5) обчислюють суму робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил на переміщеннях точок системи (у випадку незмінної системи тільки суму робіт зовнішніх сил);

6) обчислюють кінетичну енергію механічної системи (точок та тіл, які входять до системи) в початковому і кінцевому положеннях системи. При цьому лінійні швидкості окремих точок системи треба, користуючись співвідношення кінематики, виразити як функцію швидкості однієї або кількох точок;

7) складають рівняння, що відповідає теоремі про зміну кінетичної енергії, і визначають невідому величину.

Приклад 7.8. Підвісний конвеєр для транспортування штучних вантажів між цехами м'ясокомбінату складається з напрямної рейки 1, двохкаткових візків 2 і вантажних люльок 3 (рис. 7.42). Люльки 3 підвішені до візків 2 за допомогою шарнірів C . Усі візки з'єднані між собою тяговим ланцюгом.

Маса вантажу з люлькою дорівнює $m = 60$ кг, маса катка візка 2, який має діаметр $d = 0,1$ м, дорівнює $m_1 = 5$ кг. Коефіцієнт тертя кочення катка дорівнює $k = 0,0015$ м.

Визначити силу S , яку необхідно прикласти до тягового ланцюга при переміщенні одного візка з завантаженою люлькою від положення A (завантаження люльки) до положення B (розвантаження люльки) рис. 7.42, якщо відстань між точками A і B дорівнює $l_1 + l_2 = 16 + 16$ м, висота підйому люльки з вантажем дорівнює $H = 4,8$ м, швидкість люльки в положенні A дорівнює нулю, а в положенні B дорівнює $V_B = 0,2$ м/с. Тертям в шарнірах C , тертям тягового ланцюга по напрямній рейці і його вагою знехтувати. Катки вважати однорідними круглими дисками. Кочення катків відбувається без ковзання.

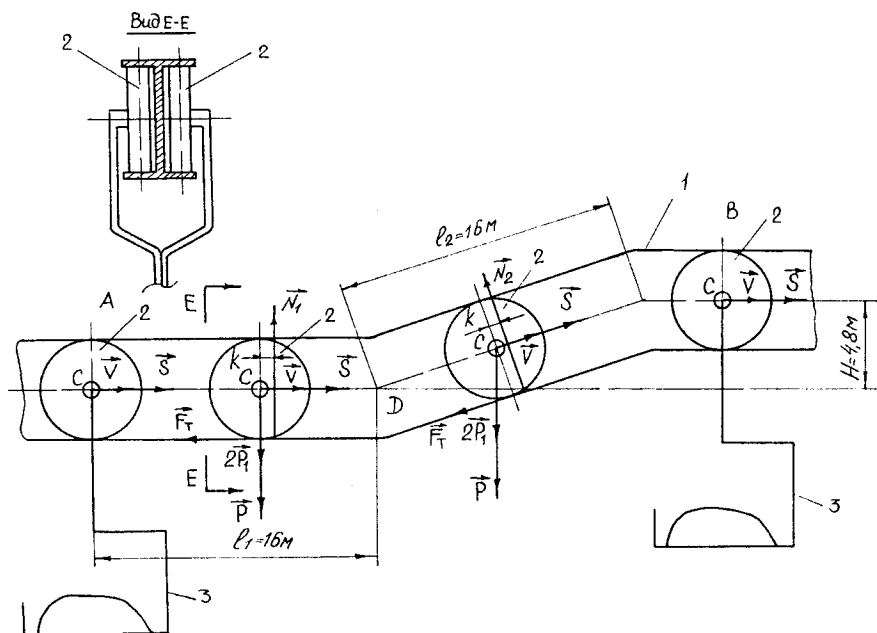


Рис. 7.42

Розв'язання Застосовуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n A_k^{(i)}.$$

Система, що розглядається, складається з твердих тіл і тертям в шарнірі C нехтують, тому

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(i)} = 0.$$

Так як у початковому положенні A система перебуває у спокої, то $T_0 = 0$. Отже, теорема про зміну кінетичної енергії системи набуде вигляду

$$T = \sum_{k=1}^n A_k^{(e)}. \quad (7.149)$$

Кінетична енергія системи T в кінцевому положенні системи B (рис. 7.42) дорівнює сумі кінетичних енергій твердих тіл, які входять до складу системи, тобто

$$T = T_1 + 2T_2, \quad (7.150)$$

де T_1 – кінетична енергія люльки з вантажем; T_2 – кінетична енергія катка.

Люлька з вантажем здійснює поступальний рух. Кінетична енергія такого тіла визначається за формулою (7.121), тобто

$$T_1 = \frac{mV_C^2}{2},$$

де V_C – швидкість точки C люльки (рис. 7.42).

Так як у положенні B – $V_C = V_B$, то остаточно маємо

$$T_1 = \frac{mV_B^2}{2},$$

де m – маса люльки з вантажем.

Каток здійснює плоскопаралельний рух, тому кінетична енергія катка визначається за формулою (7.122), тобто

$$T_2 = \frac{m_1 V_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

де m_1 – маса катка; V_C – швидкість центра мас катка; J_C – момент інерції катка відносно осі, що проходить через центр мас катка C ; ω – кутова швидкість катка.

Так як у положенні B – $V_C = V_B$, а між лінійною швидкістю центра катка C і кутовою швидкістю катка при його коченні без ковзання існує

залежність $\omega = \frac{2V}{d}$, то вираз T_2 набуває вигляду

$$T_2 = \frac{m_1 V_B^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} = \frac{3m_1 V_B^2}{4},$$

$$\text{де } J_C = \frac{m_1 \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2} = \frac{m_1 d^2}{8}.$$

Значення T_1 і T_2 підставляємо в рівність (7.150), дістанемо

$$T = T_1 + 2T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{6m_1 V_B^2}{4} = \frac{V_B^2}{2} (m + 3m_1). \quad (7.151)$$

Визначимо суму робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до системи на переміщенні від положення A до положення B (рис. 7.42), тобто

$$\sum_{k=1}^n A_k^{(e)} = A(\vec{P}) + A(2\vec{P}_1) + A(Nk) + A(\vec{S}),$$

де $A(\vec{P})$ – робота сили ваги вантажу з люлькою; $A(2\vec{P}_1)$ – робота сил ваги катків; $A(Nk)$ – робота моменту сил опору кочення; $A(\vec{S})$ – робота шуканої сили.

Робота сили тертя \vec{F}^T дорівнює нулю, так як сила \vec{F}^T прикладена в миттєвому центрі швидкостей катка (рис. 7.42).

Робота сили ваги \vec{P} дорівнює (рис. 7.42):

$$A(\vec{P}) = -P \sin \alpha \cdot l_2 = -PH = -mgH.$$

Робота сил ваги $2\vec{P}_1$ дорівнює (рис. 7.42):

$$A(2\vec{P}_1) = -2P_1 \sin \alpha \cdot l_2 = -2P_1 H = -2m_1 gH.$$

Робота моменту сил опору кочення (рис. 7.42):

$$A(Nk) = -(P + 2P_1)k\varphi_1 - (P + 2P_1)\cos \alpha \cdot k\varphi_2,$$

де $(P + 2P_1)k\varphi_1$ – робота моменту сил опору кочення на горизонтальній ділянці; $(P + 2P_1)\cos\alpha \cdot k\varphi_2$ – робота моменту сил опору кочення на похилій ділянці; $\varphi_1 = \frac{2l_1}{d}$; $\varphi_2 = \frac{2l_2}{d}$ (на підставі виразу $\omega = \frac{2V}{d}$, так як тут лінійні і кутові переміщення співвідносяться, як лінійні і кутові швидкості).

$$\text{Отже, } A(Nk) = -(m + 2m_1)kg \frac{2l_1}{d} - (m + 2m_1)g \cos\alpha \cdot k \frac{2l_2}{d}.$$

Робота шуканої сили \bar{S} дорівнює (рис. 7.42):

$$A(\bar{S}) = S(l_1 + l_2).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k^{(e)} &= -mgH - 2m_1gH - (m + 2m_1)gk \frac{2l_1}{d} - \\ &\quad - (m + 2m_1)g \cos\alpha \cdot k \frac{2l_2}{d} + S(l_1 + l_2) = \\ &= 60 \cdot 9,81 \cdot 4,8 - 2 \cdot 5 \cdot 9,81 \cdot 4,8 - (60 + 2 \cdot 5)9,81 \cdot 0,0015 \frac{2 \cdot 16}{0,1} - \\ &\quad - (60 + 2 \cdot 5)9,81 \cdot 0,954 \cdot 0,0015 \cdot \frac{2 \cdot 16}{0,1} + \\ &\quad + S(16 + 16) = 32S - 3940,2, \end{aligned} \quad (7.152)$$

$$\text{де } \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4,8}{16}\right)^2} = 0,954.$$

Значення кінетичної енергії системи (7.151) і значення суми робіт всіх зовнішніх сил, прикладених до системи (7.152) підставляємо в рівність (7.149), матимемо

$$\frac{V_B^2}{2}(m + 3m_1) = 32S - 3940,2,$$

звідси дістанемо

$$S = \left(3940,2 + \frac{V_B^2}{2} (m + 3m_1) \right) \frac{1}{32} = \left(3940,2 + \frac{0,2^2}{2} (60 + 3 \cdot 5) \right) \frac{1}{32} = 123,2 \text{ Н.}$$

7.15. Вступ до аналітичної механіки. Аналітичне визначення в'язей. Кількість ступенів вільності механічної системи. Можливі переміщення. Ідеальні в'язі.

Якщо кожна точка механічної системи може зайняти будь-яке положення у просторі і мати будь-яку швидкість, то така система носить назву вільної. Класичним прикладом вільної механічної системи є сонячна планетна система.

Якщо внаслідок яких-небудь обмежень (умов) точки механічної системи не можуть зайняти довільні положення у просторі і мати довільні швидкості, то така система називається невольною.

Обмеження (умови), які не дозволяють точкам механічної системи займати довільні положення у просторі і мати довільні швидкості, називають в'язями. В'язі накладають обмеження на зміну координат і швидкостей точок. Аналітично ці обмеження записуються у вигляді рівнянь або нерівностей, наприклад:

$$f_i \left(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t \right) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h). \quad (7.153)$$

У випадку знака рівності в рівнянні (7.153) в'язь носить назву утримуючої; якщо має місце знак нерівності, то в'язь називається неутримуючою.

Прикладом утримуючої в'язі є жорсткий стержень довжиною l , який зв'язує дві матеріальні точки (рис. 7.43). Рівняння в'язі має вигляд :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.$$

Якщо замість стержня між точками M_1 і M_2 (рис. 7.43) помістити гнучку нерозтяжну нитку, то точки отримують можливість зближення. У цьому випадку в'язь буде неутримуючою і обмеження на координати точок записуються у вигляді нерівності

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \leq l^2.$$

Надалі будемо розглядати тільки утримуючі в'язі.

Якщо рівняння утримуючої в'язі містить явно час t , то в'язь називається нестационарною, наприклад

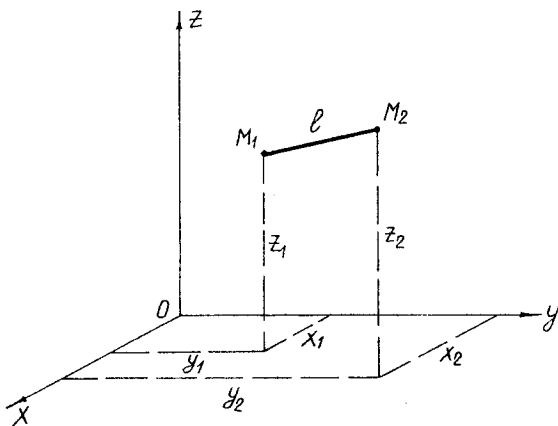


Рис. 7.43

$$f_i \left(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Стационарні в'язі – це в'язі, до рівнянь яких час t явно не входить, тобто

$$f_i \left(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

В'язь, рівняння якої не містить похідних від координат

$$f_i \left(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

називається геометричною або голономною.

В'язь, рівняння якої має вигляд

$$f_i \left(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

носить назву кінематичної.

Кінематичні в'язі можуть бути голономними або неголономними. До голономних в'язей належать ті з кінематичних, які шляхом інтегрування можуть бути приведені до геометричних. Всі інші кінематичні в'язі, рівняння яких не можуть бути проінтегровані, називаються неголономними.

Надалі будемо розглядати системи з голономними в'язями.

Розглянемо приклади голономних в'язей. Для точок M_1 і M_2 кривошипно-шатунного механізму (рис. 7.44) рівняння в'язей мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 x &= x_2 = z_2 = 0; \\
 x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= r^2; \\
 (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= l^2,
 \end{aligned}$$

де x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 – відповідно координати точок M_1 і M_2 .

Розглянемо систему, яка складається з двох фрикційних коліс (рис. 7.45). Рівняння в'язі має вигляд

$$\dot{\varphi}_2 - \varphi_1 \frac{R}{r} = 0.$$

В'язь кінематична голономна, так як інтегруючи рівняння в'язі одержуємо

$$\varphi_2 - \varphi_1 \frac{R}{r} = C_1 \text{ -- тобто рівняння геометричної в'язі.}$$

Кількістю ступенів вільності голономної системи називається кількість незалежних параметрів, які цілком однозначно визначають її положення, тобто положення кожної точки системи.

Нехай система складається з “ n ” матеріальних точок. Положення кожної точки m_k відносно інерційної системи відліку $Oxuz$ визначається за допомогою трьох координат x_k, y_k, z_k , а положення усіх точок – $3n$ координатами.

Будемо вважати, що рух системи обмежений “ h ” голономними і утримуючими в'язями

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

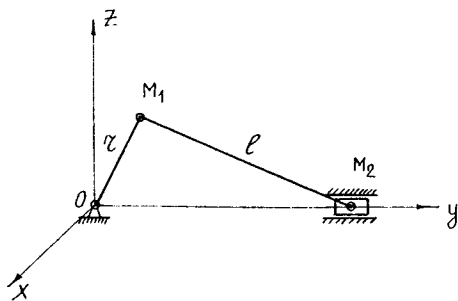


Рис. 7.44

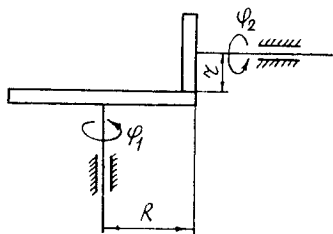


Рис. 7.45

Так як $3n$ координат x_k, y_k, z_k задовольняють h рівняннями в'язей, то вони не є незалежними. Очевидно, що кількість незалежних координат, тобто кількість ступенів вільності, що визначають положення системи, буде дорівнювати

$$S = 3n - h. \quad (7.154)$$

Можливим переміщенням механічної системи називаються уявні нескінченно малі переміщення точок системи, що допускаються в'язями, накладеними на точки системи, в фіксований момент часу.

Можливі переміщення позначають $\delta s, \delta \vec{r}, \delta \varphi$, тощо.

Можливі переміщення, на відміну від дійсних, які позначають $ds, d\vec{r}, d\varphi$, визначаються тільки в'язями системи і не залежать від діючих на точки сил.

Розглянемо математичний маятник, що має сталу довжину l , рух якого відбувається у площині xOy (рис. 7.46). Рівняння в'язі (припускаємо, що нитка натягнута) буде:

$$x^2 + y^2 = l^2, \text{ де } l = \text{const.}$$

Це стаціонарна голономна в'язь. При русі маятника точка M рухається по колу радіусом R . З положення M_0 , яке займає точка в даний момент часу, уявно дамо нескінченно мале переміщення $\delta \vec{r}$, що має напрям по дотичній до кола. Це і буде одне з можливих переміщень математичного маятника. Очевидно, що змінюючи величину і напрям $\delta \vec{r}$ вздовж дотичної, ми можемо здійснити безліч можливих переміщень (рис. 7.46). Зауважимо, що дійсне переміщення маятника $d\vec{r}$ буде також напрямленим вздовж дотичної до кола, тобто воно буде співпадати з одним із можливих переміщень. Отже при голономних стаціонарних в'язях дійсне переміщення є одним із можливих.

У випадку голономних нестаціонарних в'язей, щоб встановити можливі переміщення, необхідно уявно зупинити систему і розглянути малі переміщення, які можуть бути допущені в'язями в даний фіксований момент часу. Тому при нестаціонарних в'язях дійсне переміщення не є одним із можливих.

Як ми вже зазначали, в загальному випадку для точок і тіл механічної системи можуть існувати безліч можливих переміщень. Проте для кожної системи, можна визначити такі незалежні між собою переміщення, що будь-які другі можливі переміщення будуть визначатися через ці незалежні. Наприклад, для точок кривошипно-шатунного механізму (рис. 7.47) можливим переміщенням кривошипа OA буде його поворот

на малий кут $\delta\varphi$, а можливими переміщеннями точок A і B будуть переміщення $\delta\vec{r}_A$ і $\delta\vec{r}_B$ (рис. 7.47). Серед цих можливих переміщень одне незалежне, а інші визначаються через це незалежне переміщення. При визначенні залежності між можливими переміщеннями слід користуватися міркуваннями кінематики.

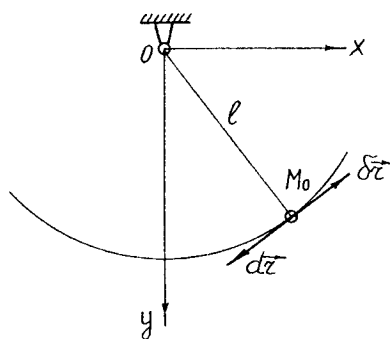


Рис. 7.46

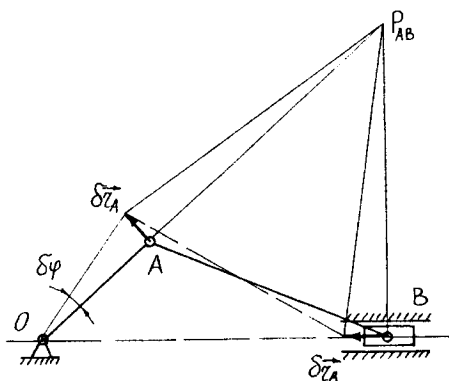


Рис. 7.47

Наприклад, коли розглядаються можливі переміщення кінців незмінного відрізка, то ці переміщення зв'язані між собою на підставі теорема про рівність проєкцій можливих переміщень кінців відрізка на напрям цього відрізка. Якщо система складається з твердих тіл, частина яких або всі вони здійснюють плоскопаралельний рух, то для знаходження залежності між можливими переміщеннями окремих точок цих тіл можна в кожний даний момент розглядати цей рух як обертальний навколо миттєвого центра швидкостей (обертання) і скористатися теоремою: “можливі переміщення двох точок твердого тіла при плоскопаралельному русі відносяться як їх відстані до миттєвого центра швидкостей (обертання)”. При цьому можливе переміщення кожної точки тіла напрямлене перпендикулярно до прямої, що сполучає дану точку з миттєвим центром швидкостей (обертання), і напрямлене в бік миттєвого обертання.

На підставі розглянутого залежності між можливими переміщеннями кривошипно-шатунного механізму (рис. 7.47) мають вигляд

$$\delta r_A = OA \delta\varphi; \quad \delta r_B = \frac{OA \cdot P_{AB} B}{P_{AB} A} \delta\varphi.$$

Таким чином, можливі переміщення точок A і B кривошипно-шатунного механізму однозначно визначаються через одне незалежне переміщення $\delta\varphi$.

Кількість незалежних між собою можливих переміщень точок системи називається кількістю ступенів вільності системи. Розглянутий вище кривошипно-шатунний механізм має один ступінь вільності.

Тепер розглянемо поняття ідеальних в'язей. Ідеальними в'язями називаються такі в'язі, для яких сума робіт їх реакцій на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.

Ідеальними в'язями є, наприклад, в'язі без тертя. Так, абсолютно гладенька поверхня є ідеальною в'яззю. Реакція абсолютно гладенької поверхні перпендикулярна до цієї поверхні. При ковзанні тіла по гладенькій поверхні можливі переміщення будуть перебувати у дотичній до поверхні площині. Так як реакція поверхні перпендикулярна до можливого переміщення, то робота реакції на цьому переміщенні дорівнює нулю.

Якщо поверхня шорстка, то її повна реакція \vec{R} складається з нормальної реакції \vec{N} і сили тертя \vec{F}^T (рис. 7.48). У випадку ковзання тіла по цій поверхні робота реакцій \vec{N} і \vec{F}^T не буде дорівнювати нулю, так як робота сили тертя не дорівнює нулю, тобто

$$\delta A = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}^T \cdot \delta \vec{r} \neq 0.$$

Тому, при ковзанні тіла по шорсткій поверхні, в'язь (шорстка поверхня) не буде ідеальною.

Проте шорстка поверхня може бути ідеальною в'яззю у випадку кочення будь-якого тіла по цій поверхні без ковзання (при умові нерухомості поверхні і відсутності тертя кочення). У цьому випадку реакція в'язі також складається з нормальної і дотичної складових, але можливе переміщення точки прикладання цих реакцій, тобто миттєвого центра швидкостей, дорівнює нулю.

Тому, якщо в'яззю є шорстка нерухома поверхня, то при коченні по цій поверхні тіла (тертя кочення відсутнє) робота реакції в'язі буде дорівнювати нулю, і в цьому випадку в'язь буде ідеальною.

Ідеальними в'язями є також гнучкі нерозтяжні нитки і ідеальні стержні (тертя в шарнірах відсутнє). Дійсно, розглянемо як приклад

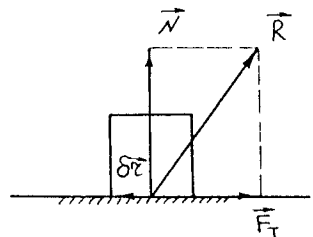


Рис. 7.48

випадок, коли дві матеріальні точки M_1 і M_2 з'єднані між собою жорстким невагомим ідеальним стержнем (рис. 7.49).

Нехай стержень буде розтягнутий, тоді його реакції мають напрям такий, як це показано на рис. 7.49. Окрім того $|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2|$.

Як ми вже зазначали при плоскопаралельному русі стержня проєкції переміщень його кінців на напрям стержня рівні, тобто

$$\delta x_1 = \delta x_2 .$$

Тому сума робіт реакцій стержня дорівнює нулю

$$\delta A = R_1 \delta x_1 - R_2 \delta x_2 = 0 .$$

Таким чином, жорсткий невагомий ідеальний стержень є ідеальною в'яззю. Аналогічний результат отримуємо у випадку в'язі у вигляді гнучкої невагомої нерозтяжної нитки.

Ідеальною в'яззю є також нерухомий шарнір без тертя (рис. 7.50). Якщо тертя відсутнє робота реакції шарніра дорівнює

$$\delta A = \vec{R}_O \cdot \delta \vec{r}_O .$$

Так як точка O нерухома, отже, її можливі переміщення δr_O дорівнює нулю і $\delta A = 0$. Тому шарнір без тертя являє собою ідеальну в'язь.

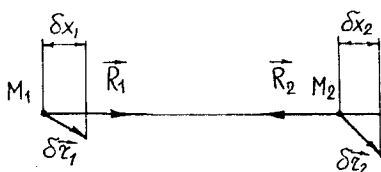


Рис. 7.49

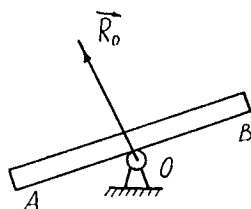


Рис. 7.50

7.16. Принцип можливих переміщень (загальне рівняння статки). Вказівки до завдання Д8.

Принцип можливих переміщень – це принцип механіки, який встановлює необхідні і достатні умови рівноваги (спокою) механічної системи.

Нехай на механічну систему накладені h голономних стаціонарних в'язей

$$f_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Диференціальні рівняння руху цієї невіЛЬНОЇ системи мають вигляд

$$m_k \vec{W}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7.155)$$

де k – номер точки; \vec{W}_k – прискорення точки; m_k – маса точки; \vec{F}_k і \vec{R}_k – відповідно рівнодійна всіх активних сил і реакцій в'язей, прикладених до “ k ”-ої точки.

Під рівновагою (спокоєм) механічної системи розуміють такий її стан, в якому вона буде перебувати весь час, якщо в початковий момент часу, маючи швидкості всіх точок рівними нулю, перебувала в цьому стані. Звідси випливає, що в положенні рівноваги системи швидкості і прискорення всіх її точок дорівнюють нулю, тобто

$$\vec{V}_k = \vec{0}; \quad \vec{W}_k = \vec{0} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

або на підставі рівнянь (7.155)

$$\vec{V}_k = \vec{0}; \quad \vec{F}_k + \vec{R}_k = \vec{0} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (7.156)$$

Рівняння (7.156) – це умови рівноваги механічної системи, на яку накладені голономні стаціонарні в'язі. Застосування цих умов вимагає урахування реакцій в'язей які, як правило, заздалегідь невідомі і це є стримуючим фактором широкого застосування цих умов.

Широке застосування при дослідженні рівноваги механічних систем з голономними стаціонарними в'язями одержали інші умови, а саме умови, що складають зміст принципу можливих переміщень, так як при їх застосуванні не має потреби вводити до розгляду невідомі реакції ідеальних в'язей.

Дамо формулювання принципу можливих переміщень.

Необхідною і достатньою умовою рівноваги голономної механічної системи з ідеальними в'язями, є рівність нулю роботи всіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні точок системи, тобто

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (7.157)$$

Окрім того, у відповідності до визначення рівноваги $V_k(t_0) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), де t_0 – початковий момент часу.

Наведені умови рівноваги механічної системи і складають зміст принципу можливих переміщень.

Доведемо необхідність цих умов. Нехай система перебуває у положенні рівноваги. При цьому виконуються умови (7.156). Помножимо

скалярно другий вираз цих умов на $\delta \vec{r}_k$ вектор можливого переміщення “ k ”-ої точки, тобто

$$\delta \vec{r}_k \cdot (\vec{F}_k + \vec{R}_k) = 0.$$

Складаючи всі ці вирази, матимемо

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Так як в’язі ідеальні, то $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$ і, таким чином

$$\sum \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Швидкості всіх точок при цьому дорівнюють нулю за припущенням.

Щоб довести достатність умов (7.157) необхідно показати, що при їх виконанні система буде перебувати у рівновазі.

Припускаємо, що умови (7.157) виконані, але, незважаючи на це, система під дією прикладених до неї сил почала рухатися із стану спокою. Так як в’язі, що накладені на точки системи стаціонарні, то дійсне переміщення системи за час dt буде співпадати з одним із можливих переміщень $\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_n$.

Так як переміщення окремих точок системи із стану спокою відбуваються за напрямом рівнодійних \vec{F}_k і \vec{R}_k , то при цьому буде здійснена додатна робота, тобто

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \cdot \delta \vec{r}_k > 0$$

або

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0.$$

Так як в’язі ідеальні, то $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$ і, таким чином

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0.$$

Несумісність цієї нерівності з прийнятим допущенням (7.157) доводить достатність умов принципу можливих переміщень.

Принцип можливих переміщень дає змогу визначити положення рівноваги невіЛЬНОї механічної системи, не вводючи до розгляду невідомі реакції ідеальних в'язей.

Принцип можливих переміщень може бути застосований і для визначення реакцій ідеальних в'язей. Для цього, на підставі аксіоми про звільнення від в'язей, необхідно умовно відкинути в'язь і замінити її дію реакцією, а потім включити цю реакцію в число активних сил.

Якщо в'язі, що накладені на систему не ідеальні, то безпосередньо принцип можливих переміщень до таких систем непридатний. Але в цьому випадку, наприклад при русі точок по шорстким поверхням, слід реакції поверхонь розкласти на нормальні складові і сили тертя. Потім прийняти, що в'язі ідеальні, а сили тертя віднести до активних сил.

Схема розв'язання задач за допомогою принципу можливих переміщень така:

- 1) виділити об'єкт рівноваги;
- 2) при наявності неідеальних в'язей віднести відповідні сили тертя до активних сил, після чого в'язі розглядати як ідеальні;
- 3) проаналізувавши систему всіх активних сил, включаючи сили тертя неідеальних в'язей, вказати їх на розрахунковій схемі;
- 4) у випадку визначення реакції в'язі, слід умовно відкинути в'язь, замінивши її дію шуканою реакцією в'язі;
- 5) визначити кількість ступенів вільності системи;
- 6) вибрати незалежні можливі переміщення точок системи за кількістю, що дорівнює кількості ступенів вільності;
- 7) надати системі можливе переміщення, яке відповідає одному із ступенів вільності системи. Виразити можливі переміщення точок прикладання сил залежно від заданого можливого переміщення;
- 8) обчислити суму елементарних робіт усіх сил (заданих, реакцій неідеальних в'язей, шуканої сили реакції в'язі (на відповідних можливих переміщеннях точок їх прикладання і цю суму прирівняти до нуля;
- 9) прирівняти до нуля коефіцієнти при незалежних переміщеннях, що містяться в рівнянні елементарних робіт. Це дає змогу скласти систему рівнянь рівноваги, кількість яких дорівнює кількості незалежних можливих переміщень, тобто кількості ступенів вільності системи;

10) розв'язати складену систему рівнянь рівноваги і визначити шукані величини;

11) проаналізувати розв'язки з метою визначення області їх застосування.

Приклад 7.9. Подрібнення вапнякового каменю на цукрових заводах здійснюється за допомогою шокових дробарок. Схема механізму шокової дробарки подана на рис. 7.51.

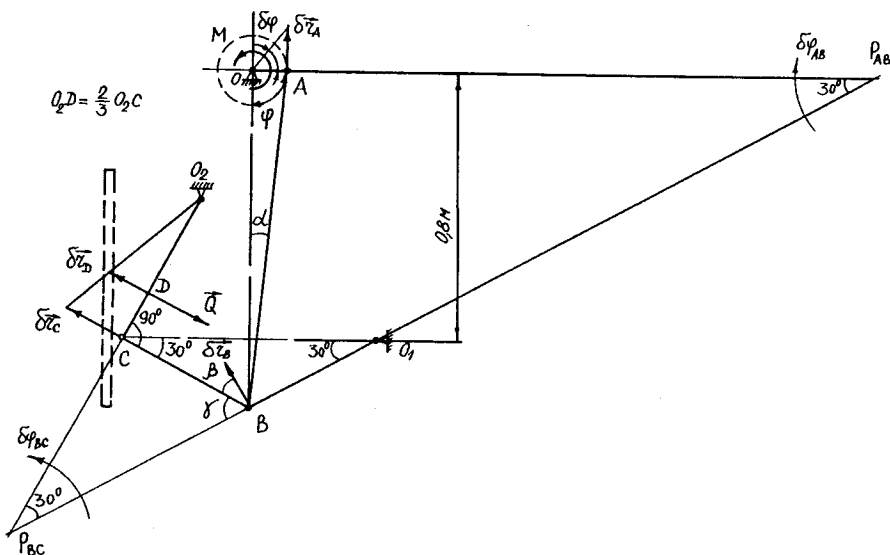


Рис. 7.51

Визначити величину сили \bar{Q} (рівнодійна сил, що діють з боку подрібнюваного матеріалу на робочу шоку дробарки O_2C), якщо механізм дробарки перебуває в рівновазі в положенні поданому на рис. 7.51 і на кривошип OA діє обертальний момент $M = 16$ кН·м. Крім того відомо,

що $OA = 0,1$ м, $BC = BO_2 = 0,4$ м, $O_2D = \frac{2}{3} O_2C$. Тертям в шарнірах механізму дробарки знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу механізму дробарки, що перебуває під дією сили \bar{Q} і обертального моменту M . Механізм дробарки має один ступінь вільності.

Примітка 7.2. При визначенні кількості ступенів вільності плоских механізмів необхідно уявити, що механізм рухається. Потім уявно зупи-

нити поступальний або обертальний рух будь-якої однієї ланки механізму, якщо при цьому механізм зупиняється, то механізм має один ступінь вільності.

Якщо після зупинки поступального або обертального руху однієї ланки механізм може продовжувати рух, але, коли потім буде зупинений рух будь-якої іншої ланки, механізм зупиняється, то він має два ступені вільності і так далі.

Положення механізму визначається кутом φ (рис. 7.51). Надамо системі можливе переміщення, при якому кут φ зміниться на $\delta\varphi$. При цьому точка A отримує можливе переміщення $\delta\vec{r}_A$, а точки B , C і D відповідно $\delta\vec{r}_B$, $\delta\vec{r}_C$ і $\delta\vec{r}_D$ (вектори $\delta\vec{r}_A$, $\delta\vec{r}_B$, $\delta\vec{r}_C$ і $\delta\vec{r}_D$ перпендикулярні до стержнів OA , O_1B і O_2C).

Так як тертям в шарнірах нехтуємо, то в'язі, що накладені на систему ідеальні. Застосовуючи принцип можливих переміщень, складемо рівняння елементарних робіт прикладених сил на можливих переміщеннях:

$$M\delta\varphi - Q\delta r_D = 0.$$

Другий член рівняння від'ємний, оскільки при даному напрямі $\delta\varphi$ лінійне можливе переміщення $\delta\vec{r}_D$ відбувається в напрямі, протилежному дії сили \vec{Q} (рис. 7.51).

Беручи за незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$, виразимо лінійне переміщення δr_D через $\delta\varphi$.

Переміщення δr_A знайдемо за формулою:

$$\delta r_A = OA\delta\varphi = 0,1\delta\varphi.$$

Для визначення δr_B знайдемо положення миттєвого центра обертання стержня AB в точці P_{AB} перетину перпендикулярів, побудованих з точок A і B до відповідних можливих переміщень $\delta\vec{r}_A$ і $\delta\vec{r}_B$ (рис. 7.51). З рис. 7.51 випливає

$$\delta r_A = \delta\varphi_{AB} AP_{AB},$$

звідси

$$\delta\varphi_{AB} = \frac{\delta r_A}{AP_{AB}} = \frac{0,1\delta\varphi}{OP_{AB} - OA} = \frac{0,1\delta\varphi}{1,732 - 0,1} = 0,0613\delta\varphi,$$

де OP_{AB} визначається із $\triangle OP_{AB}B$, тобто

$$OP_{AB} = \sqrt{(BP_{AB})^2 - (OB)^2} = \sqrt{2^2 - 1} = 1,732 \text{ м.}$$

Переміщення $\delta\vec{r}_B$ дорівнює

$$\delta r_B = \delta\varphi_{AB} BP_{AB} = 0,0613\delta\varphi \cdot 2 = 0,123\delta\varphi,$$

де BP_{AB} визначається із $\triangle OP_{AB}B$, тобто $BP_{AB} = 2$ м, так як $OB = 1$ м, а кут $\angle OP_{AB}B = 30^\circ$. Зв'язок між переміщеннями δr_B і δr_C можна визначити аналогічно попередньому, так як точка P_{BC} миттєвий центр обертання стержня BC (рис. 7.51), або на підставі теореми про рівність проєкцій можливих переміщень кінців відрізка на напрям цього відрізка, тобто

$$\delta r_B \cos \beta = \delta r_C.$$

З рис. 7.51 випливає, що $\beta = 90^\circ - \gamma$, де γ визначається з $\triangle CBP_{AB}$, тобто $\gamma = 60^\circ$. Тоді $\beta = 30^\circ$.

Отже, переміщення δr_C дорівнює

$$\delta r_C = \delta r_B \cos 30^\circ = 0,123\delta\varphi \cos 30^\circ = 0,123 \cdot 0,866\delta\varphi = 0,106\delta\varphi.$$

Зв'язок між переміщеннями δr_C і δr_D знайдемо із співвідношення (рис. 7.51)

$$\frac{\delta r_C}{O_2C} = \frac{\delta r_D}{O_2D},$$

звідси

$$\delta r_D = \frac{\delta r_C O_2D}{O_2C} = \frac{2\delta r_C O_2C}{3O_2C} = \frac{2}{3} \delta r_C = \frac{2 \cdot 0,106\delta\varphi}{3} = 0,0707\delta\varphi.$$

Підставляючи знайдене значення δr_D в рівняння елементарної роботи, дістанемо

$$\begin{aligned} M\delta\varphi - 0,0707 \cdot Q\delta\varphi &= 0; \\ \delta\varphi(M - 0,0707Q) &= 0. \end{aligned}$$

Так як $\delta\varphi \neq 0$, то

$$M - 0,0707Q = 0,$$

звідси

$$Q = \frac{M}{0,0707} = \frac{1600}{0,0707} = 22631 \text{ Н} \approx 22,6 \text{ кН}.$$

7.17. Загальне рівняння динаміки. Вказівки до завдання Д9.

Принцип можливих переміщень є загальним методом розв'язання задач статyki.

Проте можна застосувати принцип можливих переміщень і для розв'язання задач динаміки, якщо його об'єднати з принципом Д'Аламбера.

За принципом Д'Аламбера при русі механічної системи активні сили \vec{F}_k і сили реакції в'язей \vec{R}_k , що діють на точки системи, а також приєднані до них сили інерції \vec{F}_k^{in} в будь-який момент часу утворюють зрівноважену систему сил, тобто

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{in} = \vec{0} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (7.158)$$

де n – число точок системи.

За принципом можливих переміщень робота цієї зрівноваженої системи сил, що діють на точки системи з ідеальними і утримуючими в'язями на будь-якому можливому переміщенні системи $\delta \vec{r}_k$ дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{in}) \cdot \delta \vec{r}_k = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{F}_k^{in}) \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

За визначенням ідеальних в'язей остання сума дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Тому остаточно маємо

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{F}_k^{in}) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (7.159)$$

Це рівняння, що являє собою синтез двох принципів – принципу Д'Аламбера і принципу можливих переміщень – називається загальним рівнянням динаміки і формулюється так: “при русі механічної системи з ідеальними і утримуючими в'язями, в будь-який момент часу сума елементарних робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю”.

Методика застосування загального рівняння динаміки відрізняється від методики застосування загального рівняння статички тільки тим, що додатково доводиться визначати елементарну роботу сил інерції тіл системи.

Загальне рівняння динаміки дає змогу скласти диференціальні рівняння руху механічної системи.

Для цього необхідно скласти окремо для кожного незалежного можливого переміщення системи рівняння виду (7.159), тобто стільки рівнянь, скільки система має ступенів вільності.

Приклад 7.10. Хитний живильник зерна (рис. 7.52) складається з приводу, що являє собою кривошипно-шатунний механізм і бункера E (маса бункера з зерном дорівнює m_1). Бункер спирається на два нерухомих ролика D радіусом R_D і масою m_D (маса кожного ролика рівномірно розподілена на його ободу) і на два прикріплених до бункера котка C радіусом R_C і масою m_C (котки являють собою суцільні однорідні циліндри).

Визначити кутову швидкість кривошипа OA в положенні живильника, що подано на рис. 7.52, якщо до кривошипа прикладений обертальний момент M , а до роликів D і котків C моменти тертя кочення (коефіцієнт тертя кочення дорівнює k). Довжина кривошипа $OA = r$, довжина шатуна $AB = l = 10r$. Вважати, що у положенні живильника, що розглядається вага бункера з зерном рівномірно розподілена між роликами D і котками C . Масою кривошипа і шатуна, а також тертям в шарнірах знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо систему в заданому положенні (рис. 7.52). Прикладемо до тіл системи активні сили $\vec{P}_E, \vec{P}_C, \vec{P}_D$ і обертальний момент M .

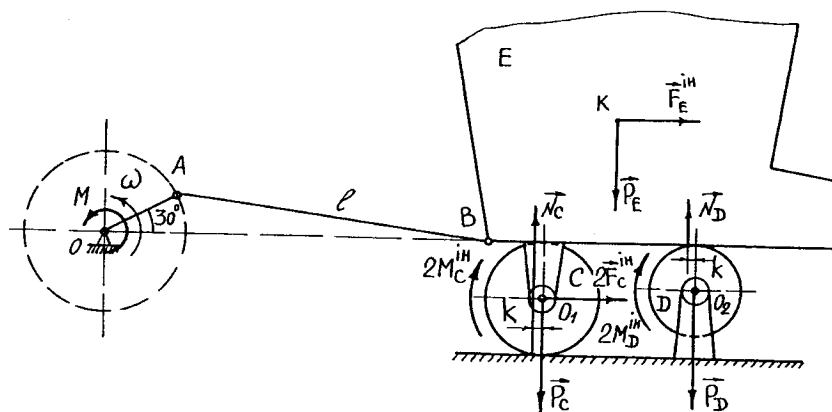


Рис. 7.52

Додавши моменти сил опору при коченні котків $C - M_{om}^C = 2N_C k$ і роликів $D - M_{om}^D = 2N_D k$ до числа активних сил, будемо вважати, що на систему накладені тільки ідеальні в'язі.

Прикладемо, згідно із загальним рівнянням динаміки, до тіл системи відповідні сили інерції (рис. 7.52). До бункера E , який рухається поступально, силу інерції \vec{F}_E^{in} в точці K ; до котків C , які здійснюють плоскопаралельний рух, силу інерції $2\vec{F}_C^{in}$ в точці O_1 і момент сил інерції $2M_C^{in}$; до роликів D , які обертаються відносно нерухомої осі, момент сил інерції $2M_C^{in}$.

Так як система має один ступінь вільності, то надамо системі одне незалежне можливе переміщення і складемо загальне рівняння динаміки.

За незалежне можливе переміщення системи виберемо $\delta\varphi$ кут повороту кривошипа OA . Тоді можливим переміщенням точки K буде δr_K , точки $B - \delta \vec{r}_B$, котків $C - \delta \vec{r}_C$ і $\delta\varphi_C$, а роликів $D - \delta\varphi_D$ (рис. 7.53).

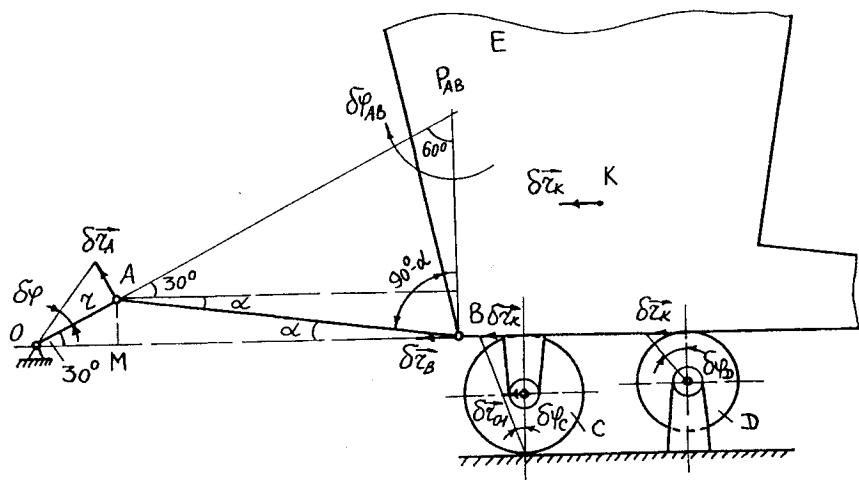


Рис. 7.53

Складемо загальне рівняння динаміки, тобто рівняння елементарних робіт всіх заданих сил, сил інерції, а також моментів сил опору кочення (див. рис. 7.52 і рис. 7.53):

$$M\delta\varphi - F_E^{in}\delta r_K - 2F_C^{in}\delta r_{O_1} - 2M_C^{in}\delta\varphi_C - 2M_D^{in}\delta\varphi_D - 2N_C k\delta\varphi_C - 2N_D k\delta\varphi_D = 0.$$

Виразимо можливі переміщення $\delta r_K, \delta r_{O_1}, \delta\varphi_C$ і $\delta\varphi_D$ через $\delta\varphi$.

З рис. 7.53 випливає, що $\delta r_A = OA\delta\varphi = r\delta\varphi$; $\delta r_B = \delta\varphi_{AB}BP_{AB}$, де

$$\delta\varphi_{AB} = \frac{\delta r_A}{P_{AB}} = \frac{r\delta\varphi}{AP_{AB}} \quad (\text{так як точки } O \text{ і } P_{AB} \text{ миттєві центри обертання кривошипа } OA \text{ і шатуна } AB).$$

Визначаємо BP_{AB} і AP_{AB} . Із трикутника ΔMAB матимемо $\sin\alpha = \frac{AM}{l} = \frac{0,5r}{10r} = 0,05$, тоді $\alpha = 2,87^\circ$. Із трикутника $\Delta AP_{AB}B$ матимемо

$$\frac{BP_{AB}}{\sin(30^\circ + \alpha)} = \frac{l}{\sin 60^\circ} = \frac{AP_{AB}}{\sin(90^\circ - \alpha)},$$

звідси

$$BP_{AB} = \frac{l \sin(30^\circ + \alpha)}{\sin 60^\circ} = \frac{10r \sin 32,87^\circ}{\sin 60^\circ} = 6,27r;$$

$$AP_{AB} = \frac{l \cos \alpha}{\sin 60^\circ} = \frac{10r \cos 2,87^\circ}{\sin 60^\circ} = 11,53r.$$

Тоді

$$\delta\varphi_{AB} = \frac{r\delta\varphi}{AP_{AB}} = \frac{r\delta\varphi}{11,53r} = 0,087\delta\varphi;$$

$$\delta r_B = \delta\varphi_{AB}BP_{AB} = 0,087 \cdot 6,27r\delta\varphi = 0,544r\delta\varphi.$$

Можливе переміщення δr_k дорівнює $\delta r_k = \delta r_B$; так як точки B і K належать бункеру E , який рухається поступально.

Можливі переміщення δr_{O1} , $\delta\varphi_C$ і $\delta\varphi_D$ відповідно дорівнюють (рис. 7.53):

$$\delta r_{O1} = \frac{\delta r_k}{2} = \frac{\delta r_B}{2} = \frac{0,544r\delta\varphi}{2} = 0,272r\delta\varphi;$$

$$\delta\varphi_C = \frac{\delta r_{O1}}{R_C} = \frac{0,272r\delta\varphi}{R_C};$$

$$\delta\varphi_D = \frac{\delta r_k}{R_D} = \frac{0,544r\delta\varphi}{R_D}.$$

Визначимо відповідні сили інерції в залежності від шуканої кутової швидкості кривошипа ω .

Сила інерції F_E^{in} дорівнює

$$F_E^{in} = m_1 W_k = m_1 W_B,$$

де $W_k = W_B$, так як бункер рухається поступально.

Визначаємо прискорення точки B (рис. 7.54). Точка B належить шатуну AB . Шатун AB рухається плоскопаралельно, тому прискорення точки B дорівнює:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{доос} + \vec{W}_{BA}^{об}.$$

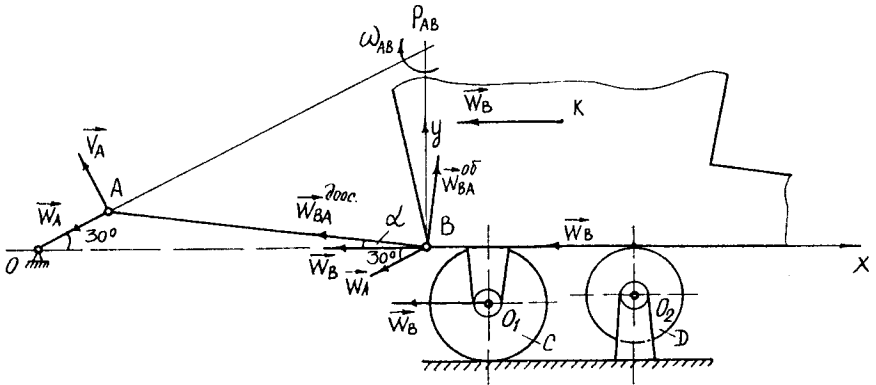


Рис. 7.54

Проекціюємо це рівняння на вісь x (рис. 7.54), дістанемо

$$-W_B = -W_A \cos 30^\circ - W_{BA}^{доос} \cos \alpha,$$

звідси

$$\begin{aligned} W_B &= W_A \cos 30^\circ + W_{BA}^{доос} \cos \alpha = \omega^2 r \cos 30^\circ + \omega_{BA}^2 \cdot 10r \cos \alpha = \\ &= \omega^2 r \cdot 0,866 + 0,087^2 \cdot 10r \omega^2 \cdot 0,999 = 0,942 \omega^2 r, \end{aligned}$$

де $\omega_{AB} = 0,087\omega$, так як тут кутові швидкості співвідносяться як відповідні можливі переміщення ($\delta\varphi_{AB} = 0,087\delta\varphi$).

Враховуючи W_B остаточно знайдемо F_E^{in} , тобто

$$F_E^{in} = m_1 W_B = 0,942 m_1 r \omega^2.$$

Визначаємо силу інерції F_C^{in} :

$$F_C^{in} = m_C W_{O_1} = m_C W_B = 0,942 m_C r \omega^2.$$

Визначаємо момент сил інерції котка C :

$$M_C^{in} = J_C \varepsilon_C = \frac{W_B m_C R_C^2}{2 R_C} = \frac{0,942 m_C r \omega^2 R_C}{2} = 0,471 m_C r \omega^2 R_C,$$

де ε_C – кутове прискорення котка; I_C – момент інерції котка.

Визначаємо момент сил інерції ролика D :

$$M_D^m = J_D \varepsilon_D = \frac{W_B}{R_D} m_D R_D^2 = 0,942 m_D r \omega^2 R_D,$$

де ε_D – кутове прискорення ролика; I_D – момент інерції ролика.

Визначаємо нормальні реакції N_C і N_D . За умовою задачі

$$N_C = \frac{m_1 g}{4} + m_c g = \frac{g(m_1 + 4m_c)}{4};$$

$$N_D = \frac{m_1 g}{4}.$$

Підставивши знайдені вирази в рівняння елементарних робіт, дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{M \delta\varphi}{r} - 0,942 m_1 r \omega^2 \cdot 0,544 \delta\varphi - 2 \cdot 0,942 m_c r \omega^2 \cdot 0,272 \delta\varphi - \\ - 2 \cdot 0,471 m_c r \omega^2 \cdot 0,272 \delta\varphi - 2 \cdot 0,942 m_D r \omega^2 \cdot 0,544 \delta\varphi - \\ - 2 \cdot \frac{g(m_1 + 4m_c)k}{4} \cdot \frac{0,272 \delta\varphi}{R_C} - 2 \cdot \frac{m_1 g k}{4} \cdot \frac{0,544 \delta\varphi}{R_D} = 0, \end{aligned}$$

або

$$\delta\varphi \left(\frac{M}{r} - 0,5 m_1 r \omega^2 - 0,5 m_c r \omega^2 - 0,26 m_c r \omega^2 - m_D r \omega^2 - \right. \\ \left. \frac{0,14 g(m_1 + 4m_c)k}{R_C} - \frac{0,27 m_1 g k}{R_D} \right) = 0.$$

Так як $\delta\varphi \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{M}{r} - 0,5 m_1 r \omega^2 - 0,5 m_c r \omega^2 - 0,26 m_c r \omega^2 - m_D r \omega^2 - \\ - \frac{0,14 g(m_1 + 4m_c)k}{R_C} - \frac{0,27 m_1 g k}{R_D} = 0, \end{aligned}$$

звідси

$$\omega^2 = \frac{M R_C R_D - 0,14 R_D g r (m_1 + 4m_c) k - 0,27 m_1 g r k R_C}{r R_C R_D (0,5 m_1 r + 0,76 m_c r + m_D r)}$$

7.18. Узагальнені координати. Узагальнені сили. Рівняння Лагранжа II роду. Вказівки до завдання Д10.

В параграфі 7.15 показано, що положення механічної системи з h голономними в'язями визначається S незалежними декартовими координатами (7.154).

Декартові координати не єдині можливі параметри, що визначають положення точок системи. Так, наприклад, положення всіх точок кривошипно-шатунного механізму (рис. 7.55) будуть відомими, якщо задати один параметр – кут повороту кривошипа φ . Положення твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух визначається заданням трьох параметрів x_A , y_A і φ (рис. 7.56). Розглянуті параметри називаються узагальненими координатами.

Отже, узагальненими координатами механічної системи називаються незалежні параметри системи q_1, q_2, \dots, q_S , які однозначно визначають положення всіх точок системи.

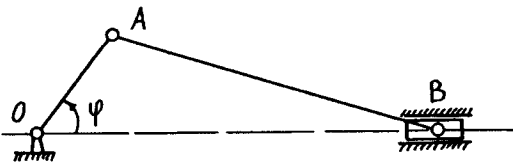


Рис. 7.55

У випадку системи, яка підпорядкована голономним, ідеальним і утримуючим в'язям кількість незалежних узагальнених координат дорівнює кількості ступенів вільності системи S .

В загальному випадку узагальнені координати можуть мати різний геометричний і механічний зміст. Вони можуть бути лінійними і кутовими величинами, а також параметрами, що

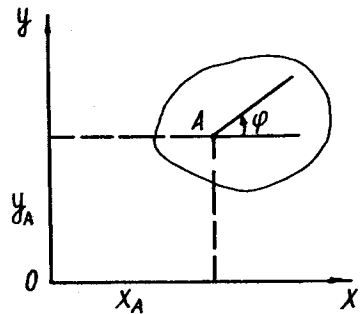


Рис. 7.56

мають розмірність площі, об'єма і інших фізичних характеристик системи.

Введемо поняття узагальненої сили. Розглянемо вільну матеріальну точку, на яку діє сила \vec{F} . Надамо цій точці можливе переміщення $\delta \vec{r} = \vec{i} \delta x + \vec{j} \delta y + \vec{k} \delta z$ і визначимо елементарну роботу сили \vec{F} на цьому переміщенні

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z, \quad (7.160)$$

де F_x, F_y, F_z – відповідно проекції сили \vec{F} на осі декартової системи координат; $\delta x, \delta y, \delta z$ – відповідно проекції можливого переміщення $\delta \vec{r}$ на осі декартової системи координат.

Зауважимо, що так як можливе переміщення точки являє собою уявне нескінченно мале переміщення в даний момент (тобто при фіксованому значенні аргумента – часу t), то воно є варіацією відповідних координат точки.

Варіацією функції δy називається приріст функції, обумовлений зміною виду функції, при фіксованому значенні аргумента (рис. 7.57).

На відміну від варіації δy , диференціал функції dy є головною частиною приросту функції, що утворюється за рахунок приросту аргумента dx (рис. 7.57).

Правила варіювання функцій зовнішнє подібні відповідним правилам диференціювання функцій.

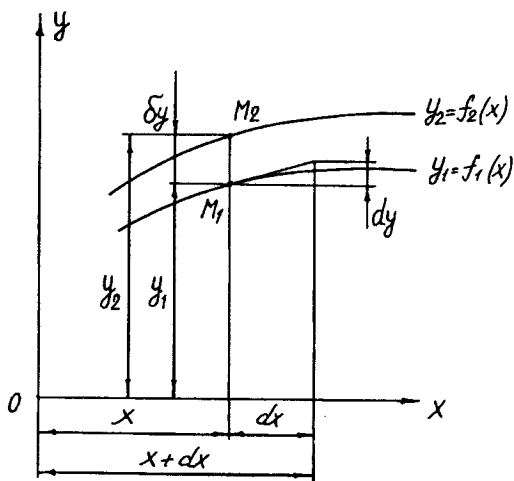


Рис. 7.57

З формули (7.160) випливає, що коефіцієнти при варіаціях δx , δy , δz є складові сили \vec{F} по координатних осях.

Тепер розглянемо систему з S узагальненими координатами q_1, q_2, \dots, q_S . Дано координатам нескінченно малий приріст $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$. Цим варіаціям відповідає деяке можливе переміщення системи $\delta \vec{r}$. Обчислимо елементарну роботу діючих на систему сил на цьому переміщенні

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k, \quad (7.161)$$

де \vec{F}_k – рівнодійна активних сил; \vec{R}_k – рівнодійна реакцій в'язей, що діє на “ k ”-у точку.

Якщо в'язі ідеальні, то

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Тоді рівняння (7.161) набуває вигляду

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \quad (7.162)$$

Положення кожної точки системи є однозначною функцією узагальнених координат, тобто

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_S) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Звідси

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_S} \delta q_S = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (7.163)$$

Підставляючи цей вираз в рівність (7.162), матимемо

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_S} \delta q_S,$$

або

$$\delta A = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j, \quad (7.164)$$

де

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \quad (j=1, 2, 3, \dots, S). \quad (7.165)$$

По аналогії з (7.160) коефіцієнти Q_1, Q_2, \dots, Q_S називаються узагальненими силами.

Отже, узагальненими силами механічної системи з ідеальними в'язями називаються коефіцієнти при варіаціях узагальнених координат у виразі елементарної роботи активних сил на можливому переміщенні системи, що відповідає цим варіаціям.

Кількість узагальнених сил дорівнює кількості узагальнених координат, тобто кількості ступенів вільності системи. Узагальнена сила в різних випадках має різну розмірність

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}.$$

Якщо узагальнена координата має розмірність довжини, то узагальнена сила має розмірність сили (в звичному розумінні); якщо узагальнена координата є кутовою величиною, то узагальнена сила має розмірність моменту сил, тобто вона може бути різною залежно від вибору узагальненої координати.

При визначенні узагальнених сил користуються трьома способами:

Перший спосіб. Узагальнену силу визначають за формулою:

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \quad (j=1, 2, \dots, S), \quad (7.166)$$

де $F_{kx}; F_{ky}; F_{kz}$ – проекції сили \vec{F}_k на осі декартової системи координат. S – кількість ступенів вільності системи.

Другий спосіб. Найбільш поширений. Обчислення узагальненої сили проводять за такою схемою:

- 1) визначають кількість ступенів вільності системи S ;
- 2) вибирають узагальнену координату;
- 3) аналізують систему активних сил, прикладених до точок системи, і зображують їх на розрахунковій схемі;
- 4) якщо серед в'язей, накладених на систему, є також і неідеальні (з тертям), то до числа активних сил слід додати сили тертя;
- 5) надають точкам системи незалежні можливі переміщення в кількості, що дорівнює кількості ступенів вільності механічної системи;
- 6) складають вираз елементарної роботи всіх активних сил, включаючи і реакції неідеальних в'язей на незалежних можливих переміщеннях точок системи:

$$\delta A = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j,$$

де S – кількість ступенів вільності системи.

Узагальнена сила Q_j дорівнює коефіцієнту при варіації в попередньому виразі.

Третій спосіб. Якщо всі сили, які діють на механічну систему, потенціальні, то вибравши узагальнені координати, треба обчислити потенціальну енергію Π системи як функцію від узагальнених координат. Узагальнену силу обчислюють за формулою:

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}.$$

Розглянемо загальне рівняння динаміки в узагальнених координатах. Запишемо рівняння (7.159)

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{F}_k^{in}) \cdot \delta \bar{r}_k = 0$$

або

$$\sum_{k=1}^n \left(\bar{F}_k - m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \right) \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Підставивши в це рівняння значення $\delta \bar{r}_k$ з рівності (7.163), дістанемо

$$\sum_{k=1}^n \left(\bar{F}_k - m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \right) \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Перетворимо цей вираз так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} - \bar{F}_k \right) \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j &= \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^n \left(m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} - \bar{F}_k \right) \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^S \left[\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \end{aligned}$$

Беручи до уваги рівність (7.165), дістанемо

$$\sum_{j=1}^S \left[\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (7.167)$$

Перетворимо перший член рівняння (7.167) так:

$$m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \bar{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \quad (7.168)$$

в чому легко перекоонатися простою перевіркою, застосувавши правило диференціювання добутку.

На підставі тотожностей Лагранжа:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_j}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

які дістанемо наступним чином: першу тотожність – диференціюючи вираз $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s)$ по часу t , а потім по узагальненій швидкості $\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}$; другу – шляхом порівняння похідних $\frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_j}$ і $\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}$, проведемо перетворення виразу (7.168):

$$m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \bar{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_k \bar{V}_k \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right).$$

Цей вираз підставляємо в рівність (7.167), дістанемо

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right) \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

або

$$\sum_{j=1}^s \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum \frac{m_k V_k^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum \frac{m_k V_k^2}{2} - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

Беручи до уваги визначення кінетичної енергії системи

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2},$$

матимемо

$$\sum_{j=1}^S \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0.$$

Оскільки δq_j довільні і незалежні, то останній вираз набуває вигляду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1,2,\dots,S), \quad (7.169)$$

де T – кінетична енергія механічної системи; \dot{q}_j – узагальнена швидкість; q_j – узагальнена координата; Q_j – узагальнена сила; S – кількість ступенів вільності механічної системи.

Система рівнянь (7.169) і є загальним рівнянням динаміки в узагальнених координатах, або, як прийнято її називати, рівняння Лагранжа II роду; кількість рівнянь дорівнює кількості ступенів вільної системи.

Методика застосування рівнянь Лагранжа II роду.

Складання рівнянь Лагранжа II роду рекомендується робити в такій послідовності:

1. Визначити кількість ступенів вільності механічної системи.
2. Вибрати узагальнені координати.

При поступальному русі системи за узагальнені координати слід брати декартові координати центра мас системи. При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі, за узагальнену координату беруть кут повороту, а при плоскопаралельному русі твердого тіла за узагальнені координати доцільно взяти координати центра мас тіла і кут повороту тіла навколо центра мас.

3. Визначити узагальнені сили відповідно до вибраних узагальнених координат.

4. Визначити кінетичну енергію системи в абсолютному русі, виразивши її як функцію узагальнених координат і швидкостей.

5. Обчислити частинні похідні кінетичної енергії по узагальненим швидкостям \dot{q}_j , тобто $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, а потім обчислити їх похідні за часом: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$.

6. Визначити частинні похідні кінетичної енергії по узагальненим координатам

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

7. Знайдені у пунктах 3,5,6 результати підставити в рівняння Лагранжа II роду.

Приклад 7.11. Хитний живильник зерна (рис. 7.58) складається з привода, що являє собою кривошипно-шатунний механізм і бункера E (маса бункера з зерном дорівнює m_b). Бункер спирається на два нерухомих ролика D радіусом R_D і масою m_D (маса кожного ролика рівномірно розподілена по його ободу) і на два прикріплених до бункера котка C радіусом R_C і масою m_C (котки являють собою суцільні однорідні циліндри).

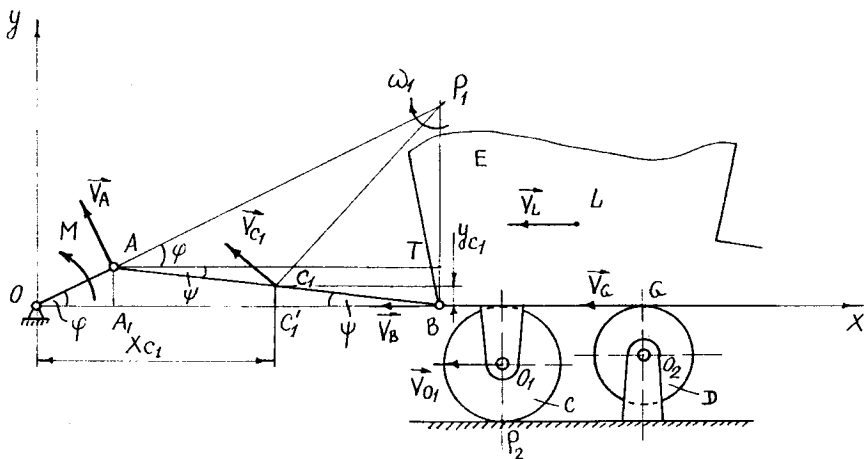


Рис. 7.58

Скориставшись рівнянням Лагранжа II роду, скласти диференціальне рівняння руху живильника і визначити з нього кутове прискорення кривошипа OA в момент коли кут φ між кривошипом OA і віссю x (рис. 7.58) дорівнює $\varphi = 90^\circ$, якщо: маса кривошипа OA дорівнює m_{OA} ; маса шатуна AB дорівнює m_{AB} ; обертальний момент, прикладений до кривошипа OA , дорівнює M ; довжина кривошипа $OA = r$; довжина шатуна $AB = l = 10r$; коефіцієнт тертя кочення роликів D і котків C дорівнює k .

Кривошип OA і шатун AB при розрахунках вважати тонкими однорідними стержнями, а також вважати, що вага бункера з зерном рівномірно розподілена між роликками D і котками C . Тертям в шарнірах $O, A,$

B , O_1 і O_2 знехтувати. Ролики D і котки C котяться без ковзання.

Розв'язання. Дана механічна система має один ступінь вільності. За узагальнену координату приймаємо кут повороту кривошипа OA , тобто кут φ (див. рис. 7.58). Рівняння Лагранжа II роду для узагальненої координати φ приймає вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

Визначимо кінетичну енергію системи як функцію узагальненої координати φ і узагальненої швидкості $\dot{\varphi}$. Кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що складають систему

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + 2T_4 + 2T_5,$$

- де T_1 – кінетична енергія кривошипа OA ;
 T_2 – кінетична енергія шатуна AB ;
 T_3 – кінетична енергія бункера E з зерном;
 T_4 – кінетична енергія котка C ;
 T_5 – кінетична енергія ролика D .

Кривошип OA здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Кінетична енергія кривошипа OA дорівнює

$$T_1 = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m_{OA} r^2 \dot{\varphi}^2,$$

де $J_0 = \frac{1}{3} m_{OA} r^2$ – момент інерції кривошипа відносно осі обертання.

Шатун AB здійснює плоскопаралельний рух. Кінетична енергія шатуна AB визначається за формулою:

$$T_2 = \frac{m_{AB} V_{C_1}^2}{2} + \frac{J_{C_1} \omega_1^2}{2},$$

- де V_{C_1} – швидкість центра мас шатуна AB ;
 J_{C_1} – момент інерції шатуна AB відносно осі, що проходить через центр мас шатуна C_1 перпендикулярно до площини рисунка (рис. 7.58);
 ω_1 – кутова швидкість шатуна AB .

Визначимо швидкості V_{C_1} і ω_1 . З рис. 7.58 випливає:

$$V_A = \omega_{OA} r = \dot{\varphi} r;$$

$$\omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{\dot{\varphi} r}{AP_1}.$$

Визначаємо AP_1 . З трикутника $\Delta AP_1 T$ випливає, що

$$AP_1 = \frac{AT}{\cos \varphi},$$

а з трикутника ΔATB маємо $AT = AB \cos \psi$, тоді

$$AP_1 = \frac{AB \cos \psi}{\cos \varphi}.$$

$\cos \psi$ визначаємо за формулою:

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{100}} = \frac{1}{10} \sqrt{100 - \sin^2 \varphi} \approx 1,$$

де $\sin \psi = \frac{r \sin \varphi}{AB} = \frac{\sin \varphi}{10}$ (див. рис. 7.58 трикутники ΔOAA_1 і ΔBAA_1),

а величиною $\sin^2 \varphi$ в порівнянні з числом 100 можна знехтувати.

Остаточно:

$$AP_1 = \frac{AB}{\cos \varphi} = \frac{10r}{\cos \varphi}.$$

Враховуючи значення AP_1 , визначимо кутову швидкість шатуна AB , тобто

$$\omega_1 = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{\dot{\varphi} \cos \varphi}{10}.$$

Швидкість центра мас V_{C_1} шатуна AB обчислимо за формулою:

$$V_{C_1} = \sqrt{\dot{x}_{C_1}^2 + \dot{y}_{C_1}^2},$$

де $\dot{x}_{C_1}^2$ і $\dot{y}_{C_1}^2$ – відповідні проекції вектора \vec{V}_{C_1} на осі координат Ox (рис. 7.58).

З рис. 7.58 випливає:

$$x_{C_1} = r \cos \varphi + AC_1 \cos \psi \approx r \cos \varphi + 5r = (5 + \cos \varphi)r;$$

$$y_{C_1} = C_1 C'_1 = \frac{AA_1}{2} = \frac{r}{2} \sin \varphi.$$

Похідні за часом від x_{C_1} і y_{C_1} відповідно дорівнюють

$$\dot{x}_{C_1} = -\dot{\varphi} r \sin \varphi;$$

$$\dot{y}_{C_1} = \dot{\varphi} \frac{r}{2} \cos \varphi.$$

Враховуючи значення \dot{x}_{C_1} і \dot{y}_{C_1} , визначаємо V_{C_1} , тобто

$$\begin{aligned} V_{C_1} &= \sqrt{\dot{x}_{C_1}^2 + \dot{y}_{C_1}^2} = \sqrt{\left(-\dot{\varphi} r \sin \varphi\right)^2 + \left(\dot{\varphi} \frac{r}{2} \cos \varphi\right)^2} = \frac{r \dot{\varphi}}{2} \sqrt{\cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{\dot{\varphi} r}{2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

Обчислимо момент інерції шатуна AB , тобто

$$J_{C_1} = \frac{m_{AB} l^2}{12} = \frac{m_{AB} (10r)^2}{12}.$$

Отже, з врахуванням значень V_{C_1} , J_{C_1} і ω_1 кінетична енергія шатуна AB дорівнює

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_{AB} V_{C_1}^2}{2} + \frac{J_{C_1} \omega_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_{AB} \frac{\dot{\varphi}^2 r^2}{4} (1 + 3 \sin^2 \varphi) + \frac{m_{AB} (10r)^2}{24} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{10^2} = \\ &= \frac{m_{AB} r^2}{24} (3 + 8 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Бункер E з зерном здійснює поступальний рух, тому кінетична енергія бункера визначається за формулою:

$$T_3 = \frac{m_6 V_L^2}{2},$$

де V_L – швидкість центра мас бункера E з зерном.

Так як бункер E рухається поступально, то $V_L = V_B$. Швидкість V_B визначимо із співвідношення (див. рис. 7.58)

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP_1}{BP_1},$$

звідси

$$V_B = \frac{V_A BP_1}{AP_1} = \frac{V_A BP_1 \cos \varphi}{10r}.$$

З рис. 7.58 випливає

$$\begin{aligned} BP_1 &= AP_1 \sin \varphi + OA \sin \varphi = (AP_1 + OA) \sin \varphi = \\ &= \left(\frac{10r}{\cos \varphi} + r \right) \sin \varphi = r \operatorname{tg} \varphi (10 + \cos \varphi). \end{aligned}$$

Враховуючи значення BP_1 і V_A остаточно визначаємо швидкість точки B

$$V_B = \frac{V_A BP_1 \cos \varphi}{10r} = \dot{\varphi} r \left(1 + \frac{\cos \varphi}{10} \right) \sin \varphi \approx r \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

так як величиною $\frac{\cos \varphi}{10}$ в порівнянні з одиницею можна знехтувати.

Остаточно:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_6 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Коток C здійснює плоскопаралельний рух. Кінетичну енергію такого тіла визначають за формулою:

$$T_4 = \frac{m_C V_{O_1}^2}{2} + \frac{J_{O_1} \omega_C^2}{2},$$

де V_{O_1} – швидкість центра мас котка C ;

J_{O_1} – момент інерції котка C відносно осі, що проходить через центр мас котка перпендикулярно до площини рисунка (рис. 7.58);

ω_C – кутова швидкість котка C .

Швидкість центра мас котка C дорівнює

$$V_{O_1} = V_B = r \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Момент інерції котка C дорівнює

$$J_{O_1} = \frac{m_C R_C^2}{2}.$$

Кутова швидкість котка C дорівнює

$$\omega_C = \frac{V_{O_1}}{R_C} = \frac{r \dot{\varphi} \sin \varphi}{R_C}.$$

Отже, враховуючи V_{O_1} , J_{O_1} і ω_C , дістанемо значення кінетичної енергії котка C , тобто

$$T_4 = \frac{m_C r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{m_C R_C^2 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2 R_C^2} = m_C r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Ролик D здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Кінетична енергія ролика D дорівнює

$$T_5 = \frac{J_{O_2} \omega_D^2}{2},$$

де $J_{O_2} = m_D R_D^2$ – момент інерції ролика відносно осі обертання;

$$\omega_D = \frac{V_G}{R_D} = \frac{V_B}{R_D} = \frac{r \dot{\varphi} \sin \varphi}{R_D} \text{ – кутова швидкість ролика } D \text{ (див. рис. 7.58).}$$

Таким чином, остаточно кінетична енергія ролика D дорівнює

$$T_5 = \frac{m_D R_D^2 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2 R_D^2} = \frac{m_D r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2}.$$

Шукана кінетична енергія всієї системи дорівнює:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_{OA} r^2 \dot{\varphi}^2}{6} + \frac{m_{AB} r^2 \dot{\varphi}^2 (3 + 8 \sin^2 \varphi)}{24} + \frac{m_6 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2} + \\ &\quad + 2m_C r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + m_D r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi = \\ &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left[\frac{m_{OA} r^2}{3} + \frac{m_{AB} r^2 (3 + 8 \sin^2 \varphi)}{12} + m_6 r^2 \sin^2 \varphi + 4m_C r^2 \sin^2 \varphi + 2m_D r^2 \sin^2 \varphi \right] = \\ &= \frac{J_{36} \dot{\varphi}^2}{2}. \end{aligned}$$

де

$$J_{in} = \left[\frac{m_{OA} r^2}{3} + \frac{m_{AB} r^2 (3 + 8 \sin^2 \varphi)}{12} + m_a r^2 \sin^2 \varphi + 4m_c r^2 \sin^2 \varphi + 2m_D r^2 \sin^2 \varphi \right] -$$

зведений момент інерції системи.

Визначимо узагальнену силу Q_φ . Для цього прикладемо до тіл системи всі активні сили і моменти, включаючи і реакції неідеальних в'язей, що діють на систему (рис. 7.59). Надамо системі незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$ у бік додатної зміни узагальної координати φ (можливі переміщення точок і тіл системи показані на рис. 7.59). Складемо вираз елементарної роботи всіх активних сил, включаючи і реакції неідеальних в'язей на можливих переміщеннях точок і тіл системи (рис. 7.59):

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta A(M) + \delta A(\bar{P}_{OA}) + \delta A(\bar{P}_{AB}) + \delta A(2N_C k) + \delta A(2N_D k) = \\ &= M \delta\varphi - P_{OA} \delta y_{C_2} - P_{AB} \delta y_{C_1} - 2N_C k \delta\varphi_C - 2N_D k \delta\varphi_D. \end{aligned}$$

Елементарна робота сил \bar{P}_C , \bar{P}_E і \bar{P}_D дорівнює нулю, так як сили \bar{P}_C і \bar{P}_E перпендикулярні до можливих переміщень $\delta\vec{r}_{O_1}$ і $\delta\vec{r}_L$, а точка прикладання сили \bar{P}_D нерухома (рис. 7.59).

Виразимо можливі переміщення δy_{C_2} , δy_{C_1} , $\delta\varphi_C$ і $\delta\varphi_D$ у виразі елементарних робіт через незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$.

Можливе переміщення δy_{C_2} виражається через $\delta\varphi$ наступним чином

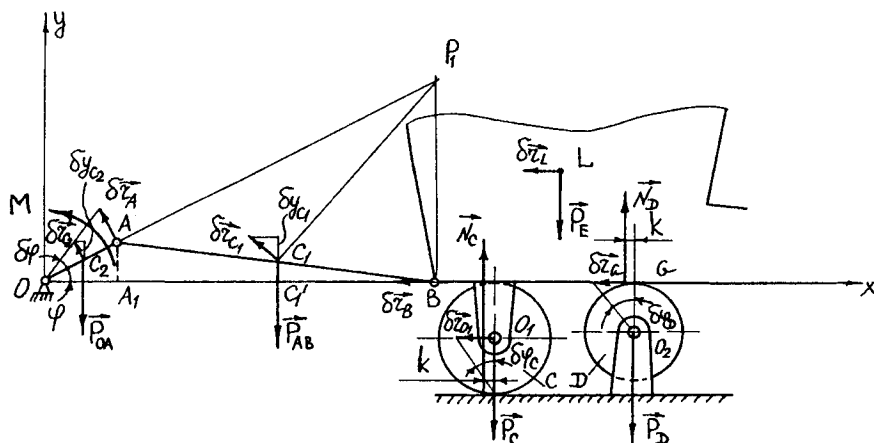


Рис. 7.59

$$\delta y_{C_2} = \frac{\partial y_{C_2}}{\partial \varphi} \delta \varphi = \frac{\partial \left(\frac{r}{2} \sin \varphi \right)}{\partial \varphi} \delta \varphi = \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi,$$

де y_{C_2} – координата точки C_2 (рис. 7.59).

Можливе переміщення δy_{C_1} виражається через $\delta \varphi$ наступним чином (рис. 7.59)

$$\delta y_{C_1} = \delta y_{C_2} = \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi.$$

Для визначення можливих переміщень $\delta \varphi_C$ і $\delta \varphi_D$ через $\delta \varphi$ необхідно обчислити можливе переміщення δr_B . З рис. 7.59 випливає

$$\delta r_B = \frac{\delta r_{A B P_1}}{A P_1} = \frac{r \delta \varphi \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi (10 + \cos \varphi)}{10r} = r \delta \varphi \sin \varphi \left(1 + \frac{\cos \varphi}{10} \right) \approx r \sin \varphi \delta \varphi,$$

так як величиною $\frac{\cos \varphi}{10}$ в порівнянні з одиницею можна знехтувати.

Тоді (див. рис. 7.59):

$$\delta \varphi_C = \frac{\delta r_{O_1}}{R_C} = \frac{\delta r_B}{R_C} = \frac{r \sin \varphi}{R_C} \delta \varphi;$$

$$\delta \varphi_D = \frac{\delta r_G}{R_D} = \frac{\delta r_B}{R_D} = \frac{r \sin \varphi}{R_D} \delta \varphi.$$

З врахуванням розглянутих перетворень вираз елементарних робіт набуває вигляду

$$\begin{aligned} \delta A &= M \delta \varphi - P_{O_A} \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi - P_{A_B} \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi - \frac{P_E k}{2} \frac{r \sin \varphi}{R_C} \delta \varphi - \frac{P_E k}{2} \frac{r \sin \varphi}{R_D} \delta \varphi = \\ &= \delta \varphi \left[M - (m_{O_A} + m_{A_B}) \frac{r g}{2} \cos \varphi - \frac{(R_C + R_D)}{R_C R_D} m_\delta g k \sin \varphi \right]. \end{aligned}$$

Узагальнену силу дістанемо як коефіцієнт при $\delta \varphi$ у виразі для елементарної роботи:

$$Q_\varphi = M - \frac{(m_{O_A} + m_{A_B}) r g \sin \varphi}{2} - \frac{(R_C + R_D) m_\delta g k \sin \varphi}{R_C R_D}.$$

Обчислимо тепер частинні похідні від кінетичної енергії системи за узагальненою швидкістю і узагальненою координатою:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{J_{3\alpha} \dot{\varphi}^2}{2} \right) = J_{3\alpha} \dot{\varphi};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{m_{OA} r^2}{3} + \frac{m_{AB} r^2 (3 + 8 \sin^2 \varphi)}{12} + m_{\delta} r^2 \sin^2 \varphi + 4m_C r^2 \sin^2 \varphi + 2m_D r^2 \sin^2 \varphi \right] \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \left(\frac{4}{3} m_{AB} + m_{\delta} + 2m_C + m_D \right) \frac{\dot{\varphi}^2 r^2}{2} \sin 2\varphi.$$

Підставляючи знайдені значення похідних і узагальненої сили в рівняння Лагранжа II роду, дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(J_{3\alpha} \dot{\varphi} \right) - \left(\frac{4}{3} m_{AB} + m_{\delta} + 2m_C + m_D \right) \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{2} \sin 2\varphi = \\ = M - \frac{(m_{OA} + m_{AB}) r g \sin \varphi}{2} - \frac{(R_C + R_D) m_{\delta} g k \sin \varphi}{R_C R_D} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} J_{3\alpha} \ddot{\varphi} - \left(\frac{4}{3} m_{AB} + m_{\delta} + 2m_C + m_D \right) \frac{r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi}{2} = M - \frac{(m_{OA} + m_{AB}) r g \sin \varphi}{2} - \\ - \frac{(R_C + R_D) m_{\delta} g k \sin \varphi}{R_C R_D}. \end{aligned}$$

Одержане рівняння є диференціальним рівнянням руху хитного живильника зерна.

Визначимо кутове прискорення кривошипа OA в момент коли кут $\varphi = 90^\circ$. У цьому випадку диференціальне рівняння руху живильника набуває вигляду

$$J_{3\alpha} \ddot{\varphi} = M - \frac{(m_{OA} + m_{AB}) r g}{2} - \frac{(R_C + R_D) m_{\delta} g k}{R_C R_D},$$

звідси

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J_{\text{ж}}} \left[M - \frac{(m_{OA} + m_{AB})rg}{2} - \frac{(R_C + R_D)m_{\delta}gk}{R_C R_D} \right],$$

де

$$\begin{aligned} J_{\text{ж}} &= \left(\frac{m_{OA}r^2}{3} + \frac{11m_{AB}r^2}{12} + m_{\delta}r^2 + 4m_Cr^2 + 2m_Dr^2 \right) = \\ &= r^2 \left(\frac{m_{OA}}{3} + \frac{11m_{AB}}{12} + m_{\delta} + 4m_C + 2m_D \right). \end{aligned}$$

Список літератури

1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Б., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1984. – Т. 1–2.
2. Бутенин Н. В., Луиц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1985. – Т. 1–2.
3. Лойцянский Л. Г., Лурье А. А. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1982. – Т. 1–2.
4. Павловский М. А., Акинфиева Л. Ю., Бойчук О. Ф. Теоретическая механика. – К.: Вища шк., 1985. – Ч. 1–2.
5. Петрук А. А., Бережницкий Б. С., Цидило И. В. Теоретическая механика. Программа, методические указания и контрольные задания. – Ивано-Франковск.: ИФИНГ, 1990.
6. Савин Г. Н., Кильчевский Н. А., Путьята Т. В. Курс теоретической механики. – К.: ГИТЛ, 1963.
7. Статика. Виконання розрахунково-графічних завдань з дисципліни “Теоретична механіка” з використанням персональних комп’ютерів типу IBM PC / Бондаренко А. А., Переяславцев О. М., Штефан Є. В. та інш. – К.: НМК ВО, 1993.
8. Теоретична механіка. Програма, робочий план, методичні вказівки до вивчення курсу і розв’язування задач / Бойко Н. К., Вржижевський Л. Ф., Издебська Г. А. та інш. – К.: Вища шк., 1974.
9. Теоретическая механика. Методические указания и контрольные задания / Под ред. проф. С. М. Тарга. – М.: Высш. шк., 1983.
10. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1966.
11. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. проф. А. А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985.

Придбати видання **“НОВОЇ КНИГИ”**
можна, зробивши замовлення
www.povaknyha.com.ua
за тел/факс (0432) 52-34-80, 52-34-81, 43-18-32
поштою: 21029, м. Вінниця, Квятека, 20
E-mail: newbook1@vinnitsa.com
та у регіонах

- Дніпропетровськ** *“Книжковий всесвіт”*
☎ (056) 740-10-38
м. Дніпропетровськ, просп. Карла Маркса, 67,
торгівельний центр “Гранд Плаза”
“Галерея книги”
☎ (0562) 36-05-38
м. Дніпропетровськ, вул. Московська, 15
Обласний бібліотечний колектор
☎ (0562) 778-25-37
м. Дніпропетровськ, пр. Кірова, 22
- Донецьк** *ООО “Будинок книги”*
☎ (0622) 90-58-88, 55-44-76
м. Донецьк, вул. Артема, 147-а
- Дрогобич** *ДПРТ “Мистецтво”*
☎ (03244) 2-23-67
м. Дрогобич, пл. Ринок, 7
- Житомир** *Магазин “Знання”*
☎ (0412) 37-27-74
м. Житомир, вул. Київська, 17/1
- Запоріжжя** *Магазин “Лектос”*
☎ (0612) 49-09-96
м. Запоріжжя, вул. Леніна, 142
- Ів.-Франківськ** *Магазин “Букініст”*
☎ (03422) 2-38-28
м. Ів.-Франківськ, вул. Незалежності, 19
- Київ** *Книжковий ринок “Петрівка”*
ряд 63, місце 9

- Кременчук** **“Буквоїд”**
☎ (0536) 79-19-88
м. Кременчук, вул. Першотравнева, 44,
торгівельний комплекс “Фокстрот”
- Кривий Ріг** **Магазин “Книжник”**
☎ (0564) 65-41-96
м. Кривий Ріг,
пр. 200 років Кривому Рогу, 7а
КП “Букініст”
☎ (0564) 92-37-32
м. Кривий Ріг, пл. Визволення, 1
- Луцьк** **Книгарня “Освіта”**
☎ (0332) 72-46-14
м. Луцьк, просп. Волі, 8
- Львів** **Магазин “Медкнига”**
☎ (0322) 72-36-34
м. Львів, площа Ринок, 15
Львівський державний медичний університет
☎ (0322) 75-89-42
м. Львів, вул. Пекарська, 69, теоретичний корпус,
книжний лоток
**Львівський національний університет
ім. І. Франка**
Книгарня
☎ (0322) 96-44-49
м. Львів, вул. Університетська, 1
- Полтава** **Магазин “Планета”**
☎ (05322) 7-20-19
м. Полтава, вул. Жовтнева, 60-а
- Одеса** **“Книжкова перлина”**
☎ (0482) 35-84-04, 35-84-05
м. Одеса, вул. Дерибасівська, 14
“Книжкове диво”
☎ (048) 728-76-84
м. Одеса, Єкатеринська, 22

- Симферополь** *“Мудрий лис”*
м. Симферополь, вул. Маяковського, 12
- Суми** *Будинок книги “Кобзар”*
☎ (0542) 22-51-17
м. Суми, вул. Кірова, 8
- Тернопіль** *Магазин “Просвіта”*
☎ (0352) 22-24-33, 21-40-91
м. Тернопіль, вул. Руська, 14
- Харків** *Книжковий магазин “BOOKS”*
☎ (0572) 14-04-70
м. Харків, вул. Сумська, 51
- Херсон** *ЦУМ, 2 поверх, відділ “Учбова книга”*
☎ (0552) 26-21-71
м. Херсон, просп. Ушакова, 49
Університет, 2 поверх, “Учбова книга”
☎ (0552) 26-21-71
м. Херсон, вул. 40-річчя Жовтня, 27
- Хмельницький** *Магазин “Книжковий світ”*
☎ (03822) 6-60-73
м. Хмельницький, вул. Подільська, 25
- Черкаси** *Магазин “Світ”*
☎ (0472) 47-92-20
м. Черкаси, вул. Байди Вишневецького, 38
- Чернівці** *Магазин “Книга”*
☎ (03722) 2-18-11
м. Чернівці, вул. Шептицького, 25

З приводу придбання книг
звертатися у відділ маркетингу видавництва “НОВА КНИГА”
тел/факс (0432) 52-34-80
тел (0432) 52-34-81, 43-18-32

E-mail: newbook1@vinnitsa.com

yan_serg@ua.fm

або м. Київ Книжковий ринок “Петрівка” ряд 63, місце 9

Більш детальна інформація: www.novaknyha.com.ua

Навчальний посібник

А. А. Бондаренко, О. О. Дубінін, О. М. Переяславцев

**ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

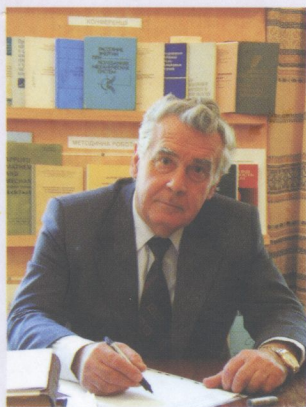
Українською мовою

Редактор Л. В. Кузьміч
Комп'ютерна верстка О. І. Морозюк
Свідоцтво ДК № 103

Підписано до друку 12.04.04.
Формат 60x90_{1/16}. Папір офсетний. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 18. Обл.-вид. арк. 19,81. Наклад 500 прим. Зам. № 83

Видавництво “Нова книга”
21100, м. Вінниця, вул. Стеценка, 46/85
тел. (0432) 52-34-80, 52-34-81
E-mail: newbook1@vinnitsa.com
www.novaknyha.com.ua

Віддруковано з готових діапозитивів
на ДП “Державна картографічна фабрика”
12100, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 19



Бондаренко Анатолій Андрійович, народився в 1932 році на Чернігівщині, в м. Прилуки. Вищу освіту здобув у Київському політехнічному інституті, який закінчив в 1955р. Працював в інституті механіки НАН України, з 1984 р. завідувач кафедри теоретичної механіки і опору матеріалів Національного університету харчових технологій. Заслужений працівник освіти України, доцент, канд.техн.наук. Відомий учений в галузі динаміки елементів конструкцій, коливань механічних систем з урахуванням розсіяння енергії, демпфуючих властивостей конструкційних матеріалів, динамічної стійкості оболонкових конструкцій, ударостійкості одно- та багатошарових оболонок і пластин. Автор та співавтор 200 наукових праць, більше 10 авторських свідоцтв на винаходи, 4 монографій, 2 навчальних посібників.



Дубінін Олег Олександрович, народився в 1936 році в м. Москва. Вищу освіту здобув у Київському політехнічному інституті, який закінчив в 1958 р. З 1962 р. працює в Національному університеті харчових технологій на кафедрі теоретичної механіки і опору матеріалів, доцент, канд.техн.наук. В 1978–1981 рр. був відряджений в республіку Малі, де читав лекції з курсів „Теоретична механіка”, „Опір матеріалів” та „Будівельна механіка” (французькою мовою) студентам Вищої інженерної школи в м. Бамако. Учений в галузі статички і динаміки елементів конструкцій та статички і динаміки суцільного середовища. Автор та співавтор більше 70 наукових і методичних праць, навчального посібника.



Переяславцев Олександр Миколайович, народився в 1941 році на Уралі, в м. Свердловськ. Вищу освіту здобув у Київському технологічному інституті харчової промисловості, який закінчив в 1969 р. З 1972 р. працює в Національному університеті харчових технологій на кафедрі теоретичної механіки та опору матеріалів, доцент, канд.техн.наук. В 1986–1989 рр. був відряджений в АНДР (Алжир), де читав лекції з курсу „Теоретична механіка” (французькою мовою) студентам університету м. Константін. Учений в галузі статички і динаміки елементів конструкцій, коливань механічних систем та статички і динаміки суцільного середовища. Автор та співавтор більше 60 наукових та методичних праць, 2 навчальних посібників.

НОВА КНИГА
ВИДАВНИЦТВО