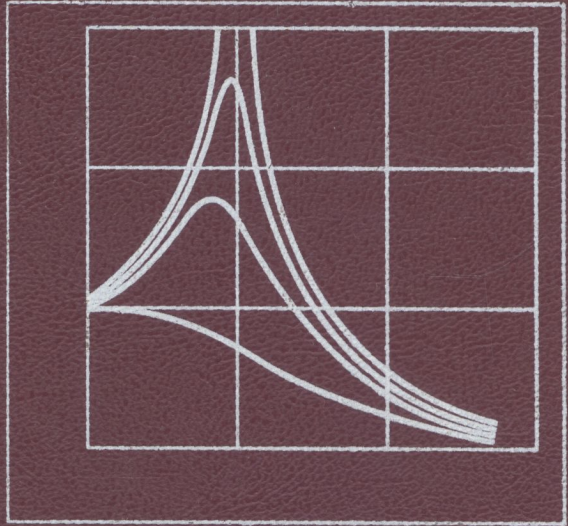


А. А. БОНДАРЕНКО
О. О. ДУБІНІН
О. М. ПЕРЕЯСЛАВЦЕВ

Теоретична МЕХАНІКА



ДИНАМІКА



ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

А.А. Бондаренко, О.О. Дубінін, О.М. Переяславцев

Серія "ВИЩА ОСВІТА ХХІ СТОЛІТТЯ"

531(075)
Б 81

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

А. А. БОНДАРЕНКО
О. О. ДУБІНІН
О. М. ПЕРЕЯСЛАВЦЕВ

Теоретична МЕХАНІКА

ПІДРУЧНИК
У двох частинах

Частина 2
ДИНАМІКА

Допущено Міністерством освіти і науки України

НТБ ВНТУ



432913

531(075) Б 81 2004

Бондаренко А. А. Теоретична механіка

АБОЧЕМЕНТ-2



Київ
"Знання"

2004

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
Б81

Допущено Міністерством освіти і науки України для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-3075 від 11.07.2001 р.)

Рецензенти:

О.О. Горошко, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного університету імені Тараса Шевченка;

О.О. Рассказов, доктор технічних наук, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки Українського національного транспортного університету, професор

432913

Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М.

Б81 Теоретична механіка: Підручник: У 2 ч. — Ч. 2: Динаміка. — К.: Знання, 2004. — 590 с. — (Вища освіта XXI століття).

ISBN 966-8148-02-9

Це фундаментальний підручник з теоретичної механіки. Українською мовою такого типу підручник видається вперше. За змістом він відповідає програмі навчальної дисципліни “Теоретична механіка” для вищих навчальних закладів і складається із двох частин: частина 1 — “Статика. Кінематика”; частина 2 — “Динаміка”. Крім основних розділів курсу теоретичної механіки до підручника включено нові розділи, у яких розглядаються основи статички, кінематики і динаміки суцільного середовища. Значне місце відводиться розв’язку практичних задач. Всього у підручнику розглянуто 406 задач. Майже половина із них відповідають практичним потребам виробництва і подані з розв’язками і детальним аналізом цих розв’язків.

Розраховано насамперед на студентів механічних спеціальностей. Підручник буде корисний всім, хто вивчає теоретичну механіку, а також аспірантам, викладачам механіки вищих навчальних закладів, інженерно-технічним працівникам.

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 966-8148-02-9

© А.А. Бондаренко, О.О. Дубінін,
О.М. Переяславцев, 2004
© Видавництво “Знання”, 2004

НТБ ВНТУ
м. Вінниця

ЗМІСТ

Передмова	11
Розділ III. ДИНАМІКА	13
Глава 16. Динаміка матеріальної точки	13
16.1. Вступ до динаміки. Задачі динаміки	13
16.2. Загальні закони динаміки матеріальної точки	15
16.3. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	18
16.4. Аксиома про звільнення від в'язей. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки	19
16.5. Принцип Д'Аламбера для невідної матеріальної точки	21
16.6. Дві задачі динаміки матеріальної точки і їх розв'язання	23
16.7. Методика розв'язання задач динаміки матеріальної точки. Приклади розв'язання задач і типові задачі для самостійної пробки та самоконтролю	30
16.8. Вступ. Прямолинійні коливання матеріальної точки	56
16.8.1. Вільні коливання матеріальної точки	57
16.9. Згасаючі коливання матеріальної точки	60
16.10. Змушені коливання матеріальної точки за відсутності опору середовища. Резонанс	63
16.11. Змушені коливання матеріальної точки за наявності опору середовища	68

16.12. Методика розв'язання задач про коливальний рух матеріальної точки. Приклади розв'язання задач і типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю	73
16.13. Диференціальне рівняння відносного руху матеріальної точки	96
16.14. Окремі випадки відносного руху матеріальної точки. Принцип відносності класичної механіки	100
16.15. Відносна рівновага матеріальної точки на поверхні Землі. Сила тяжіння	101
16.16. Методика розв'язання задач динаміки відносного руху матеріальної точки. Приклади розв'язання задач і типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю	103
Запитання для самоперевірки	108
Глава 17. Загальні відомості про механічну систему. Дві задачі динаміки механічної системи	110
17.1. Вільна механічна система. Внутрішні й зовнішні сили. Властивості внутрішніх сил	110
17.2. Невільна механічна система. В'язі. Поняття про рівняння в'язей. Класифікація сил, прикладених до системи. Поняття про кількість ступенів вільності системи	111
17.3. Диференціальні рівняння руху механічної системи	113
17.4. Дві задачі динаміки механічної системи	115
Запитання для самоперевірки	116
Глава 18. Центр мас механічної системи. Геометрія мас	117
18.1. Центр мас механічної системи	117
18.2. Моменти інерції механічної системи	118
18.3. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей	122
18.4. Момент інерції системи відносно довільної осі, що проходить через дану точку	123
18.5. Поняття про еліпсоїд інерції	124
18.6. Обчислення моментів інерції однорідних твердих тіл	125
18.7. Приклади розв'язання задач з визначення положення центра мас механічної системи і її моментів інерції. Методичні вказівки Запитання для самоперевірки	127 134
Глава 19. Загальні теореми динаміки	135
19.1. Кількість руху матеріальної точки і механічної системи. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки і механічної системи	135
19.2. Теорема Ейлера	139
19.3. Теорема про рух центра мас механічної системи	141
19.4. Момент кількості руху матеріальної точки і механічної системи (кінетичний момент)	142
19.5. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і механічної системи	145

19.6. Теорема про зміну моменту кількості відносного руху механічної системи щодо центра мас	147
19.7. Кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи. Кінетична енергія твердого тіла	150
19.8. Робота сили. Потужність. Робота сили ваги, пружної сили, моменту пружних сил	154
19.9. Елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла	158
19.10. Робота внутрішніх сил твердого тіла	161
19.11. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і механічної системи	162
19.12. Приклади застосування загальних теорем при розв'язанні задач динаміки механічної системи. Методичні вказівки і типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю	164
Запитання для самоперевірки	190
Глава 20. Потенціальне силове поле	192
20.1. Поняття силового поля, силової функції, еквіпотенціальних поверхонь і силової лінії	192
20.2. Приклади потенціальних силових полів	194
20.2.1. Поле сили тяжіння	194
20.2.2. Поле сили пружності	195
20.3. Властивості силової функції і потенціальних сил	196
20.4. Критерії існування потенціального силового поля	198
20.5. Потенціальна енергія	199
20.6. Силова функція і потенціальна енергія системи. Робота потенціальних сил, що діють на механічну систему	200
20.7. Механічна енергія. Закон збереження механічної енергії	203
20.7.1. Закон збереження механічної енергії матеріальної точки	203
20.7.2. Закон збереження механічної енергії механічної системи	204
20.7.3. Закон збереження механічної енергії механічної системи, що здійснює рух у непотенціальному силовому полі	204
Запитання для самоперевірки	206
Глава 21. Принцип Д'Аламбера для механічної системи	207
21.1. Принцип Д'Аламбера і метод кінетостатики	207
21.2. Визначення головного вектора і головного моменту сил інерції твердого тіла	209
21.3. Приклади розв'язання задач динаміки механічної системи за допомогою принципу Д'Аламбера. Методичні вказівки	213
Запитання для самоперевірки	219
Глава 22. Динаміка твердого тіла	220
22.1. Поступальний рух твердого тіла. Диференціальні рівняння руху	220
22.2. Обертальний рух твердого тіла. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Теорема про зміну кінетичної енергії твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі	221

22.3. Фізичний маятник. Малі коливання фізичного маятника	223
22.4. Експериментальне визначення моментів інерції твердих тіл	225
22.5. Визначення реакцій опор нерухомої осі твердого тіла, що обертається навколо цієї осі	229
22.6. Плоскопаралельний рух твердого тіла. Диференціальні рівняння руху	236
22.7. Момент кількості руху (кінетичний момент) твердого тіла, що обер- тається навколо нерухомої точки відносно точки обертання	237
22.8. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки	239
22.9. Диференціальні рівняння руху твердого тіла, що обертається нав- коло нерухомої точки (динамічні рівняння Ейлера)	240
22.10. Динамічні рівняння руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки і перебуває тільки під дією сили тяжіння	242
22.11. Кінематичні рівняння Пуассона	243
22.12. Інтегрування диференціальних рівнянь руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки	244
22.13. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки (випадок Ейлера — Пуансо)	246
22.14. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки (випадок Лагранжа — Пуассона)	251
22.15. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки (випадок Ковалевської)	255
22.16. Диференціальне рівняння руху вільного твердого тіла	256
22.17. Методика розв'язання задач динаміки твердого тіла. Приклади розв'язання задач і типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю	258
Запитання для самоперевірки	283
Глава 23. Теорія гіроскопів	285
23.1. Поняття про гіроскоп	285
23.2. Основні припущення наближеної теорії гіроскопів	286
23.3. Теорема Резаля	288
23.4. Особливості руху власної осі обертання гіроскопа	289
23.5. Гіроскопічний момент	291
23.6. Регулярна прецесія важкого гіроскопа згідно з наближеною теорією	292
23.7. Визначення гіроскопічного моменту за точною теорією у випадку регулярної прецесії	293
23.8. Регулярна прецесія гіроскопа за інерцією	295
23.9. Регулярна прецесія важкого гіроскопа згідно з точною теорією ...	296
23.10. Застосування гіроскопів у техніці	297
23.11. Приклади розв'язання задач наближеної теорії гіроскопів	300
Запитання для самоперевірки	307
Глава 24. Теорія удару	309
24.1. Загальні положення	309

24.2.	Дослідне визначення коефіцієнта відновлення	311
24.3.	Дія ударної сили на матеріальну точку	314
24.4.	Теорема про зміну кількості руху і руху центра мас механічної системи при ударі	315
24.5.	Теорема про зміну кінетичного моменту при ударі	316
24.6.	Теорема Кельвіна. Визначення роботи ударних сил, прикладених до матеріальної точки при ударі	319
24.7.	Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі	320
24.7.1.	Перша теорема Карно для випадку миттєвого накладання непружних в'язей	320
24.7.2.	Друга теорема Карно для випадку миттєвого зняття в'язей	321
24.7.3.	Загальна теорема Карно	322
24.8.	Прямий центральний удар двох тіл	324
24.9.	Центр удару	328
24.10.	Приклади розв'язання задач динаміки механічної системи при дії ударних сил (миттєво прикладених сил)	331
	Запитання для самоперевірки	343
Глава 25.	Динаміка точки і тіла змінної маси	345
25.1.	Диференціальне рівняння руху точки змінної маси	345
25.2.	Вступ до динаміки тіла змінної маси	349
25.3.	Теорема про рух центра мас тіла змінної маси	349
25.4.	Теорема про зміну кількості руху тіла змінної маси	353
25.5.	Кінетичний момент тіла змінної маси відносно довільного нерухомого центра (точки). Кінетичний момент тіла змінної маси, що обертається навколо нерухомої осі	355
25.6.	Теорема про зміну кінетичного моменту тіла змінної маси відносно нерухомого центра (точки). Диференціальне рівняння обертального руху тіла змінної маси навколо нерухомої осі	357
25.7.	Кінетична енергія тіла змінної маси	360
25.8.	Теорема про зміну кінетичної енергії тіла змінної маси	361
25.9.	Приклади розв'язання задач динаміки тіла змінної маси	362
	Запитання для самоперевірки	377
Глава 26.	Елементи аналітичної механіки	378
26.1.	Аналітичне визначення в'язей. Кількість ступенів вільності механічної системи. Можливі переміщення. Ідеальні в'язі	378
26.2.	Принцип можливих переміщень	383
26.3.	Загальне рівняння динаміки (принцип Д'Аламбера — Лагранжа)	386
26.4.	Узагальнені координати. Узагальнені сили. Рівняння Лагранжа II роду	387
26.5.	Приклади застосування принципу можливих переміщень, загального рівняння динаміки і рівняння Лагранжа II роду при розв'язанні задач. Методичні вказівки. Типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю	397
	Запитання для самоперевірки	429

Глава 27. Малі коливання механічних систем з одним та двома ступенями вільності	430
27.1. Рівняння Лагранжа II роду голономної системи	430
27.2. Рівняння Лагранжа II роду механічної системи, підпорядкованої ідеальним в'язям	432
27.3. Рівняння Лагранжа II роду консервативної системи	435
27.4. Рівняння Лагранжа II роду дисипативної системи	437
27.5. Кінетична енергія та дисипативна функція системи в узагальнених величинах	439
27.6. Узагальнені умови рівноваги механічної системи. Види рівноваги. Стійка рівновага	441
27.7. Теорема Діріхле — Ляпунова	442
27.8. Кінетична, потенціальна енергія та дисипативна функція механічної системи при її русі в околі положення стійкої рівноваги	445
27.9. Вільні незгасаючі коливання механічної системи з одним ступенем вільності	447
27.10. Вільні згасаючі коливання механічної системи з одним ступенем вільності	450
27.11. Змушені коливання механічної системи з одним ступенем вільності за наявності сил опору. Явище резонансу	453
27.12. Вільні коливання механічної системи з двома ступенями вільності	457
27.13. Головні координати механічної системи	460
27.14. Вільні згасаючі коливання механічної системи з двома ступенями вільності	463
27.15. Змушені коливання механічної системи з двома ступенями вільності. Динамічний гаситель змушених коливань	466
27.16. Методика та приклади розв'язання задач з теорії малих коливань механічної системи з одним і двома ступенями вільності	472
Запитання для самоперевірки	537
Глава 28. Основи динаміки суцільного середовища	540
28.1. Диференціальні рівняння руху суцільного середовища	540
28.2. Диференціальне рівняння руху ідеальної рідини	543
28.3. Рівняння Ейлера в функції компонентів вихру для об'ємних сил, що мають потенціал	545
28.4. Інтеграл Бернуллі	548
28.5. Інтеграл Лагранжа — Коші	551
28.6. Теорема про зміну моменту кількості руху суцільного середовища	552
28.7. Теорема про зміну кінетичної енергії суцільного середовища	554
28.8. Приклади розв'язання задач динаміки ідеальної рідини	556
Запитання для самоперевірки	569
Основні етапи розвитку теоретичної механіки	570
Література	588

ПЕРЕДМОВА

Динаміка (від грец. *dynamis* — сила) — найважливіша частина теоретичної механіки, в якій вивчаються рух матеріальної точки, системи матеріальних точок і твердого тіла з урахуванням сил, що діють на них. У динаміці синтезуються та узагальнюються всі положення статyki і кінематики і встановлюються найбільш загальні властивості механічного руху матеріальних систем.

Динаміка, як і теоретична механіка в цілому, є однією з наукових основ сучасного природознавства і техніки.

Підручник “Динаміка” має метою наблизити курс до програмного навчального матеріалу вищих технічних навчальних закладів і складається з трьох частин: динаміка матеріальної точки, динаміка механічної системи і твердого тіла та основи динаміки суцільного середовища.

У першій частині (динаміка матеріальної точки) викладено обов’язкову для всіх навчальних програм теорію руху матеріальної точки під дією сил, дві задачі динаміки точки, теорію коливань матеріальної точки, теорію відносного руху точки. Наведено приклади та методик розв’язання багатьох задач і запитання для самоперевірки.

У другій частині (динаміка механічної системи та твердого тіла) наведено загальні відомості про механічну систему, поняття про в’язі, дві задачі динаміки механічної системи тощо. Детально розглянуто теореми динаміки матеріальної точки і механічної системи. Значну увагу приділено тлумаченню потенціального силового поля, критеріям його існування, потенціальній енергії і силовим функціям.

Для вивчення питань динаміки твердого тіла застосовано концентричне викладання. На першому концентрі розглядаються: обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, плоскопаралельний рух тіла, зрівноважування сил інерції тіла, що обертається, й елементарна теорія гіроскопа. На другому концентрі вивчаються рівняння Ейлера і розглядається низка гіроскопічних проблем. Детально розглядаються загальні положення та теореми теорії удару, наводяться теорії динаміки точки і тіла змінної маси. Елементи аналітичної механіки викладаються в класичному стилі. Завершує курс розділ, присвячений теорії малих коливань з одним і двома ступенями вільності.

У третій частині викладено основи динаміки суцільного середовища. Подано диференціальні рівняння руху суцільного середовища, ідеальної рідини, а також рівняння Ейлера у функції компонентів вихру для об'ємних сил, що мають потенціал, інтеграл Бернуллі та Лагранжа—Коші. Викладено теореми про зміну моменту кількості руху та теорему про зміну кінетичної енергії суцільного середовища.

Наведено приклади розв'язання задач динаміки (115 типових задач зі збірника задач І.В. Мещерського та 83 задачі з практики переробних галузей промисловості) та запитання для самоперевірки.

На закінчення викладено основні етапи розвитку теоретичної механіки.

Підручник “Динаміка” розрахований на студентів денної та заочної форм навчання технічних вузів за повною і скороченою програмами з теоретичної механіки, а також може бути використаний аспірантами та інженерно-технічними працівниками переробних галузей промисловості.

Розділ III. ДИНАМІКА

Глава 16

ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

16.1. Вступ до динаміки. Задачі динаміки

Динаміка — розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що прикладені до цих об'єктів.

З визначення динаміки випливає, що відміна між статикою, кінематикою і динамікою полягає в тому, що в статисти розглядаються задачі про еквівалентні перетворення системи сил, що діють на матеріальні об'єкти, і задачі про рівновагу матеріальних об'єктів під дією прикладених до них сил. У кінематиці рух матеріальних об'єктів вивчається тільки з геометричного погляду, незалежно від сил, що спричиняють цей рух. Таким чином, у статисти і кінематиці залишається осторонь зв'язок між силами, що діють на матеріальні об'єкти, і рухом об'єктів. Цей зв'язок ураховується тільки в динаміці, предметом якої є вивчення руху матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що діють на них.

В основі динаміки лежать закони І. Ньютона: закон інерції; основний закон динаміки (встановлює співвідношення між силою, що діє на матеріальний об'єкт, масою об'єкта та прискоренням, яке отримує матеріальний об'єкт під дією сили); закон рівності дії і протидії; закон незалежності дії сил, з яких як логічні наслідки випливають усі рівняння і теореми, необхідні для розв'язання задач динаміки.

У динаміці розглядаються два типи задач про матеріальні об'єкти, що рухаються поступально, розв'язання яких проводиться за допомогою основного закону динаміки. Задачі першого типу полягають в тому, що, знаючи рух матеріального об'єкта, потрібно визначити сили, що діють на нього. Класичним прикладом розв'язання такої задачі є відкриття І. Ньютоном зако-

ну всесвітнього тяжіння: знаючи закони руху планет Сонячної системи, встановлені І. Кеплером¹, на підставі обробки результатів спостережень, І. Ньютон довів, що цей рух відбувається під дією сили, обернено пропорційній квадрату відстані між планетою і Сонцем. У техніці з такими задачами стикаються при визначенні сил, з якими матеріальні об'єкти, що рухаються, діють на в'язі, а також при визначенні внутрішніх зусиль у різних деталях машин і механізмів, коли закони руху цих машин (механізмів) відомі.

Задачі другого типу є в динаміці основними і полягають в тому, щоб за силами, що діють на матеріальний об'єкт, визначити закон його руху. Для розв'язання цих задач потрібно знати початкові умови руху об'єкта, тобто його початкове положення в системі відліку і його швидкість у момент початку руху під дією заданих сил. Прикладом зазначених задач можуть бути такі: за величиною і напрямом початкової швидкості матеріального об'єкта, кинутого під кутом до горизонту, і за діючими на об'єкт при його русі силам визначити закон руху матеріального об'єкта, зокрема його траєкторію, горизонтальну дальність польоту, час руху до кінцевої цілі; за відомою швидкістю матеріального об'єкта в момент початку гальмування і силою гальмування знайти час руху і шлях до зупинки; за силою пружності пружного тіла і вагою матеріального об'єкта, який спирається на пружне тіло або підвішений до нього, визначити закон коливань матеріального об'єкта.

Задачі динаміки про матеріальний об'єкт, що рухається непоступально, а також про різні механічні системи розв'язуються за допомогою рівнянь, які є наслідком основного закону динаміки. Зокрема, для матеріального об'єкта, що обертається навколо нерухомої осі, таким наслідком основного закону динаміки є диференціальне рівняння обертального руху, яке встановлює співвідношення між обертальним моментом, прикладеним до матеріального об'єкта, моментом інерції об'єкта відносно осі обертання та кутовим прискоренням, яке отримує матеріальний об'єкт під дією моменту. Якщо буде відомим закон обертання матеріального об'єкта, то на підставі цього рівняння можна визначити невідомий обертальний момент (задача першого типу); якщо буде відомим обертальний момент і початкові умови руху (початкове положення об'єкта і його початкова кутова швидкість), то можна знайти закон обертання матеріального об'єкта (задача другого типу).

Під час вивчення руху механічних систем застосовують загальні теореми динаміки, які також є наслідком основного закону динаміки. До них належать теореми про рух центра мас, про зміну кількості і моменту кількості руху, а також про зміну кінетичної енергії системи. Інший шлях розв'язання задач динаміки пов'язаний із застосуванням принципів механіки, тобто принципу Д'Аламбера і принципу можливих переміщень, і отриманих за їх допомогою рівнянь руху, зокрема рівняння Лагранжа² II роду.

¹ Йоганн Кеплер (1571—1630) — німецький астроном і математик.

² Жозеф Луї Лагранж (1736—1813) — французький математик і механік, член Берлінської (1759), Паризької (1772), почесний член Петербурзької (1776) академії наук.

Основний закон динаміки і всі наслідки з нього справедливі тільки стосовно руху матеріальних об'єктів відносно інерційної системи відліку, якою для руху в Сонячній системі з високим ступенем точності є геліоцентрична система відліку, а при розв'язанні більшості інженерних задач — система відліку, зв'язана із Землею. При вивченні руху матеріальних об'єктів відносно неінерційних систем відліку, тобто систем, які зв'язані з тілами, що рухаються прискорено, рівняння руху об'єктів можна складати також у формі основного закону динаміки, якщо до діючих на об'єкт сил додати переносну і коріолісову сили інерції. З такими задачами ми маємо справу при вивченні впливу обертання Землі на рух матеріальних об'єктів, а також при вивченні руху різноманітних приборів і пристроїв, встановлених на тілах, що рухаються.

Крім вивчення руху матеріальних об'єктів під дією прикладених до них сил, у динаміці розглядаються спеціальні задачі: теорія удару, механіка тіл змінної маси, теорія гіроскопів, теорія механічних коливань та ін. За допомогою законів та теорем динаміки вивчається також рух суцільного середовища, зокрема рідини і газів.

16.2. Загальні закони динаміки матеріальної точки

В основі динаміки точки, і взагалі динаміки, лежать закони, вперше в найбільш повному і завершеному вигляді сформульовані І. Ньютоном у 1687 р. у книзі “Математичні початки натуральної філософії”.

Перший закон Ньютона (закон інерції). Перший закон Ньютона — закон інерції — описує один з можливих механічних рухів — рух матеріальної точки в умовах повної її ізоляції від впливу на неї інших матеріальних об'єктів.

Закон інерції формулюється так: *ізольована матеріальна точка продовжує утримуватися у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки вона не буде примушена прикладеними до неї силами змінити цей стан.*

З першого закону випливає, що кінематичним станом ізольованої матеріальної точки є або рівномірний прямолінійний рух, або стан спокою. Такий стан матеріальної точки називається *інерціальним*, а система відліку, в якій він має місце, — *інерціальною*.

Досліди і спостереження свідчать, що геліоцентрична система відліку, тобто система декартових координат з початком у центрі Сонця й осями, напрямленими на “нерухомі” зірки, дуже близька до інерціальної.

У переважній більшості технічних задач динаміки за інерціальну можна взяти систему відліку, незмінно зв'язану з поверхнею Землі. У цьому випадку нехтують добовим обертанням Землі, приблизно приймаючи, що закон інерції виконується і в такій системі відліку (див. параграф 16.13).

Якщо рух матеріальної точки в інерціальній системі відліку відрізняється від рівномірного і прямолінійного, то вона перебуває у взаємодії з матеріальними об'єктами, що її оточують.

Мірою взаємодії матеріальних об'єктів є сила. Сила характеризує інтенсивність та напрям цієї взаємодії.

Кількісне співвідношення між силою і кінематичними величинами, що характеризують взаємодію матеріальної точки з іншими матеріальними об'єктами, визначає другий закон Ньютона.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки). Є два формулювання другого закону. Взевши за міру механічного руху кількість руху, тобто добуток маси m на швидкість $\vec{V} - m\vec{V}$, І. Ньютон установлює: *зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна силі, що прикладена до точки, і відбувається у напрямі прямої, вздовж якої ця сила діє.* Математичний вираз цього закону має вигляд

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}. \quad (16.1)$$

Вираз (16.1) широко застосовується при дослідженні таких механічних процесів, як удар пружних тіл, рух матеріальної точки змінної маси, рух суцільного середовища, та ін.

Інше формулювання другого закону стало результатом численних досліджень з визначення співвідношення між силою, що діє на матеріальний об'єкт, масою об'єкта та прискоренням, яке отримує об'єкт під дією сили. Саме ці дослідження дали змогу І. Ньютону зробити такий висновок: *сила, що діє на вільну матеріальну точку, надає їй прискорення, яке в інерціальній системі відліку пропорційне величині цієї сили і має напрям сили.*

В аналітичній формі цей закон має вигляд

$$m\vec{W} = \vec{F}, \quad (16.2)$$

де m — маса матеріальної точки; \vec{W} — прискорення точки; \vec{F} — сила, що діє на точку.

Зауважимо, що сила \vec{F} у рівнянні (16.2) називається *активною*, тобто такою, яка при дії на вільну матеріальну точку надає їй прискорення.

Другий закон Ньютона у вигляді (16.2) встановлює причину появи прискорення матеріальної точки і відповідні кількісні співвідношення величин.

Маса матеріальної точки — це фізична величина, яка характеризує інертні та гравітаційні властивості матеріальної точки. Дійсно, з рівняння (16.2) випливає: щоб надати матеріальній точці задане прискорення, до неї треба прикласти тим більшу силу, чим більша її маса. Тому чим більша маса точки, тим більше вона чинить опір зміні її руху від рівномірного і прямолінійного. Отже, маса в рівнянні (16.2) є мірою інертності матеріальної точки і називається *інертною*.

У теорії гравітації Ньютона маса є джерелом поля тяжіння. Величина сили тяжіння визначається за законом тяжіння

$$F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (16.3)$$

де f — універсальна гравітаційна стала; m_1 і m_2 — маси взаємодіючих точок; r — відстань між точками.

З формули (16.3) можна здобути залежність між масою точки m і її вагою P у полі тяжіння Землі:

$$P = mg, \quad (16.4)$$

де $g = \frac{fM}{r^2}$ — прискорення вільного падіння (M — маса Землі; $r \approx R$ — радіус Землі).

Маса, що визначається співвідношеннями (16.3) і (16.4), називається *гравітаційною*.

У принципі звідси не випливає, що маса, яка створює поле тяжіння, визначає й інерцію тієї самої точки. Проте досліди свідчать, що інертна маса будь-якої матеріальної точки дорівнює її гравітаційній масі. Цей закон природи називається *принципом еквівалентності*.

Оскільки прискорення g , що входить до формули (16.4), має різні значення в різних місцях земної поверхні (див. параграф 16.15), то вага даної точки не є сталою величиною, тоді як її маса залишається завжди сталою.

Третій закон Ньютона (закон дії і протидії): *дві матеріальні точки діють одна на одну із силами, рівними за величиною (модулем), і напрямлені вздовж однієї прямої у протилежні боки.*

З третього закону випливає, що джерело появи сили — це взаємодія матеріальної точки з іншою точкою або тілами; якщо матеріальна точка A діє на матеріальну точку B із силою \vec{F}_A , то матеріальна точка B діє на матеріальну точку A з силою \vec{F}_B , причому $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$. Якщо позначити маси точок A і B через m_A і m_B , а їх прискорення — через \vec{W}_A і \vec{W}_B , то на підставі другого закону Ньютона матимемо

$$\vec{F}_A = m_A \vec{W}_A \quad \text{і} \quad \vec{F}_B = m_B \vec{W}_B, \quad \text{або} \quad m_A \vec{W}_A = -m_B \vec{W}_B.$$

Звідси випливає відношення $\left| \frac{\vec{W}_A}{\vec{W}_B} \right| = \frac{m_B}{m_A}$, тобто прискорення, які надають

одна одній дві матеріальні точки, за величиною (модулем) обернено пропорційні масам цих точок і напрямлені вздовж прямої, що з'єднує ці точки, в протилежні боки.

Четвертий закон Ньютона (закон незалежної дії сил): *якщо на матеріальну точку діють кілька сил, то точка отримує прискорення, яке дорівнює*

геометричній сумі тих прискорень, які б вона мала під дією кожної із цих сил окремо.

З четвертого закону випливає, що якщо на матеріальну точку діють сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ і кожна з них надає точці відповідні прискорення $\vec{W}_1, \vec{W}_2, \dots, \vec{W}_n$, то прискорення точки буде $\vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + \dots + \vec{W}_n$.

На підставі виразу (16.2) можна записати

$$m\vec{W}_1 = \vec{F}_1, \quad m\vec{W}_2 = \vec{F}_2, \quad \dots, \quad m\vec{W}_n = \vec{F}_n.$$

Складаючи між собою ці рівності, здобудемо

$$m(\vec{W}_1 + \vec{W}_2 + \dots + \vec{W}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n,$$

або на підставі закону незалежної дії сил матимемо

$$m\vec{W} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{F}, \quad (16.5)$$

де \vec{F} — рівнодійна всіх сил, що діють на матеріальну точку.

Отже, рух матеріальної точки під дією сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ буде таким самим, як і при дії однієї сили, що дорівнює їх геометричній сумі (рівнодійній).

Рівняння (16.5) називається *основним рівнянням динаміки вільної матеріальної точки*.

16.3. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Матеріальна точка називається вільною, якщо на її рух не накладені ніякі обмеження, тобто у довільний момент часу вона може займати довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість.

Запишемо рівняння (16.5) у такому вигляді:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (16.6)$$

де $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{W}$ — прискорення матеріальної точки; \vec{F} — рівнодійна сил, що діють на матеріальну точку.

Рівняння (16.6) називається *диференціальним рівнянням руху вільної матеріальної точки у векторній формі*.

Якщо спроекціювати обидві частини рівняння (16.6) на нерухомі осі декартової системи координат, то здобудемо рівняння

$$\begin{aligned}
 m \ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx}; \\
 m \ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky}; \\
 m \ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz},
 \end{aligned}
 \tag{16.7}$$

де \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} — відповідно проекції вектора прискорення точки на осі координат; $\sum_{k=1}^n F_{kx}$, $\sum_{k=1}^n F_{ky}$, $\sum_{k=1}^n F_{kz}$ — відповідно проекції вектора рівнодійної сил, що діють на точку на осі координат.

Рівняння (16.7) називаються *диференціальними рівняннями руху вільної матеріальної точки в координатній (декартові координати) формі*.

Якщо спроеціювати обидві частини рівняння (16.6) на осі натурального тригранника (натуральні осі), то одержимо рівняння:

$$\begin{aligned}
 m \frac{dV_\tau}{dt} &= \sum_{k=1}^n F_{k\tau}; \\
 \frac{mV^2}{\rho} &= \sum_{k=1}^n F_{kn}; \\
 0 &= \sum_{k=1}^n F_{kb},
 \end{aligned}
 \tag{16.8}$$

де $\frac{dV_\tau}{dt}$, $\frac{V^2}{\rho}$ — відповідно проекції вектора прискорення точки на натуральні осі координат; $\sum_{k=1}^n F_{k\tau}$, $\sum_{k=1}^n F_{kn}$, $\sum_{k=1}^n F_{kb}$ — відповідно проекції вектора рівнодійної сил, що діють на точку, на натуральні осі координат.

Рівняння (16.8) називаються *диференціальними рівняннями руху вільної матеріальної точки в проєкціях на натуральні осі координат*.

16.4. Аксиома про звільнення від в'язей. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Матеріальна точка називається невільною, якщо внаслідок накладання в'язей (див. розділ "Статика", параграф 1.8) вона не може у довільний момент часу займати довільне положення в системі відліку і мати довільну швидкість, оскільки здійснює рух по деякій поверхні або кривій, чи рухається в деякій заданій області системи відліку.

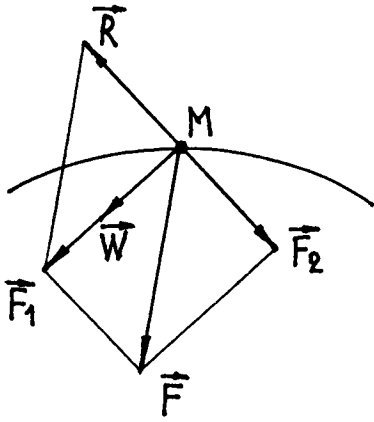


Рис. 16.1

Розглянемо рух невільної матеріальної точки M . Нехай рівнодійна сил, що діють на точку, дорівнює \vec{F} . Оскільки точка невільна, то очевидно, що лінія дії вектора \vec{F} не буде збігатися з лінією дії вектора прискорення точки \vec{W} , як це відбувається у випадку руху вільної матеріальної точки (рис. 16.1).

Розкладемо силу \vec{F} по двох взаємно перпендикулярних напрямках на дві сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 . Напрямок сили \vec{F}_1 збігається з напрямком вектора прискорення \vec{W} точки, а лінія дії сили \vec{F}_2 буде перпендикулярною до вектора \vec{W} (рис. 16.1). Сила \vec{F}_1 надає точці прискорення і на підставі другого закону Ньютона становить: $\vec{F}_1 = m\vec{W}$. Сила \vec{F}_2 не змінює стан руху точки, оскільки діє на в'язь, що накладена на точку. Під дією сили \vec{F}_2 виникає сила реакції в'язі \vec{R} . Сила \vec{R} , на підставі третього закону Ньютона, дорівнює за модулем силі \vec{F}_2 і напрямлена вздовж лінії дії сили \vec{F}_2 у протилежний до неї бік. Отже, геометрична сума сил \vec{F}_2 і \vec{R} дорівнює нулю:

$$\vec{F}_2 + \vec{R} = \vec{0}. \quad (16.9)$$

Рівність (16.9) виражає фізичний зміст аксіоми про звільнення від в'язей, тобто, не змінюючи стану руху невільної матеріальної точки, її можна розглядати як вільну, якщо уявно відкинути накладену на точку в'язь і до сили, що діє на точку \vec{F} (рівнодійної активних сил), додати реакцію відкинутої в'язі \vec{R} .

З рис. 16.1 випливає, що на точку діє сила \vec{F}_1 , яка дорівнює геометричній сумі сил \vec{F} і \vec{R} :

$$\vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{R}. \quad (16.10)$$

Підставляючи в рівняння (16.6) замість \vec{F} силу \vec{F}_1 , що визначається формулою (16.10), збудуємо

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{R}. \quad (16.11)$$

Рівняння (16.11) називається *диференціальним рівнянням руху невільної матеріальної точки у векторній формі*.

Якщо спроекціювати обидві частини рівняння (16.11) на осі нерухомої декартової системи координат або натуральні осі, то відповідно здобудемо диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки в координатній формі і в проєкціях на осі натурального тригранника:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= \sum_{k=1}^n F_{kx} + R_x; \\ m \ddot{y} &= \sum_{k=1}^n F_{ky} + R_y; \\ m \ddot{z} &= \sum_{k=1}^n F_{kz} + R_z. \end{aligned} \quad (16.12)$$

$$\begin{aligned} m \frac{dV_\tau}{dt} &= \sum_{k=1}^n F_{k\tau} + R_\tau; \\ \frac{mV^2}{\rho} &= \sum_{k=1}^n F_{kn} + R_n; \\ 0 &= \sum_{k=1}^n F_{kb} + R_b. \end{aligned} \quad (16.13)$$

На підставі розглянутого можна надати остаточного змісту поняттю “активна сила”. *Активна сила при дії на вільну матеріальну точку надає точці прискорення, а при дії на невільну точку надає їй прискорення і спричинює реакцію в’язі, що накладена на точку*.

16.5. Принцип Д’Аламбера для невільної матеріальної точки

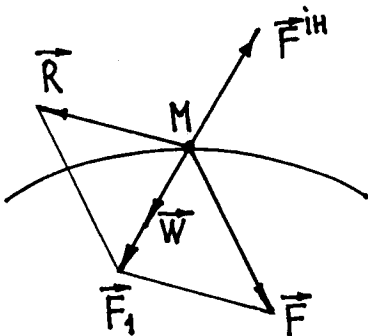


Рис. 16.2

Розглянемо рух матеріальної точки M . Точка здійснює невільний рух під дією сили \vec{F} . Застосуємо до точки аксіому про звільнення від в’язей, тобто уявно відкинемо в’язь і дію в’язі на точку замінимо реакцією в’язі \vec{R} . Отже, на матеріальну точку M діють дві сили: \vec{F} і \vec{R} (рис. 16.2).

Складаючи сили \vec{F} і \vec{R} , здобудемо силу \vec{F}_1 , тобто

$$\vec{F}_1 = \vec{F} + \vec{R}. \quad (16.14)$$

З іншого боку, сила \vec{F}_1 на підставі другого закону Ньютона

$$\vec{F}_1 = m\vec{W}.$$

Якщо поставити за мету звести рух матеріальної точки M до стану спокою, то, очевидно, для цього достатньо додати до сил, що діють на точку, силу $\vec{F}^{\text{ін}}$, яка дорівнює за модулем силі \vec{F}_1 і напрямлена вздовж лінії дії сили \vec{F}_1 у протилежний до неї бік. Отже,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}^{\text{ін}} = \vec{0}. \quad (16.15)$$

Сила $\vec{F}^{\text{ін}}$, яка дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення і напрямлена протилежно до вектора прискорення точки, називається *д'Аламберовою¹ силою інерції*:

$$\vec{F}^{\text{ін}} = -m\vec{W}. \quad (16.16)$$

Проекціюючи векторну рівність (16.16) на осі декартової системи координат, здобудемо проекції сили інерції на ці осі:

$$F_x^{\text{ін}} = -m\ddot{x}; \quad F_y^{\text{ін}} = -m\ddot{y}; \quad F_z^{\text{ін}} = -m\ddot{z}. \quad (16.16a)$$

Аналогічно, проекціюючи рівність (16.16) на натуральні осі, дістанемо проекції сили інерції на дотичну, головну нормаль і бінормаль:

$$F_\tau^{\text{ін}} = -mW_\tau = -m \frac{dV_\tau}{dt}; \quad F_n^{\text{ін}} = -mW_n = -\frac{mV^2}{\rho}; \quad F_b^{\text{ін}} = -mW_b = 0. \quad (16.16b)$$

Складові сили інерції $\vec{F}_\tau^{\text{ін}}$ і $\vec{F}_n^{\text{ін}}$ мають напрям уздовж дотичної і головної нормалі і називаються відповідно *дотичною (тангенціальною) і нормальною силами інерції*. Ці сили напрямлені протилежно до відповідних прискорень \vec{W}_τ і \vec{W}_n . Нормальна сила інерції $\vec{F}_n^{\text{ін}}$ називається ще *відцентровою силою інерції*.

Враховуючи рівність (16.14), виразу (16.15) надамо вигляду

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}^{\text{ін}} = \vec{0}. \quad (16.17)$$

Рівняння (16.17) є математичним відображенням принципу Д'Аламбера: *в кожний момент руху матеріальної точки геометрична сума прикладеної до точки сили \vec{F} , реакції в'язі \vec{R} і сили інерції $\vec{F}^{\text{ін}}$ дорівнює нулю.*

Рівняння (16.17) є рівнянням руху матеріальної точки, яке записується у формі умови рівноваги сил. Таким чином, задачі динаміки можуть бути розв'язані методами статички. В цьому і полягає так званий *метод кінестатички*.

¹ Жан Лерон Д'Аламбер (1717—1783) — французький математик, механік і філософ, член Паризької (1741), Петербурзької (1764) та ін. академій наук.

На відміну від сил, джерелом появи яких є взаємодія даної матеріальної точки з іншими точками або тілами, д'аламберова сила інерції не має такого джерела, тобто третій закон Ньютона щодо неї не діє. Д'аламберову силу інерції введено умовно, щоб рівнянню руху надати вигляду рівняння рівноваги.

16.6. Дві задачі динаміки матеріальної точки і їх розв'язання

Відповідно до задач динаміки в динаміці вільної матеріальної точки розв'язуються дві задачі: пряма (перша задача) і обернена (основна) задача.

1. Пряма задача динаміки вільної матеріальної точки. Знаючи масу матеріальної точки і закон її руху, визначити силу, що діє на цю точку (або рівнодійну сил, що діють на точку).

2. Обернена (основна) задача динаміки вільної матеріальної точки. Знаючи масу матеріальної точки, прикладені до точки сили і початкові умови руху точки, визначити закон руху точки.

Перша задача динаміки вільної матеріальної точки розв'язується шляхом диференціювання рівнянь руху точки. Дійсно, якщо, наприклад, відомі рівняння руху вільної матеріальної точки в декартовій системі координат:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t),$$

то проекції сили на осі координат визначаються з диференціальних рівнянь руху точки, тобто з рівнянь (16.7):

$$\begin{aligned} F_x &= m \ddot{x} = m \frac{d^2 x}{dt^2}; \\ F_y &= m \ddot{y} = m \frac{d^2 y}{dt^2}; \\ F_z &= m \ddot{z} = m \frac{d^2 z}{dt^2}. \end{aligned} \tag{16.18}$$

Знаючи проекції сили на осі координат, можна визначити величину сили і її напрямні косинуси за формулами:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \tag{16.19}$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}, x}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\widehat{\vec{F}, y}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\widehat{\vec{F}, z}) = \frac{F_z}{F}. \tag{16.20}$$

Якщо рух матеріальної точки задано натуральним способом, тобто відома траєкторія руху точки і закон її руху по траєкторії:

$$S = S(t),$$

то проєкції сили \vec{F} , що діє на точку, на осі натурального тригранника (натуральні осі) визначаються з рівнянь (16.8):

$$F_\tau = m \frac{dV_\tau}{dt}; F_n = \frac{mV^2}{\rho}; F_b = \sum_{k=1}^n F_{kb} = 0. \quad (16.21)$$

Знаючи проєкції сили \vec{F} на осі натурального тригранника, величину сили \vec{F} і її напрямні косинуси визначають за формулами:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2 + F_b^2}; \quad (16.22)$$

$$\cos(\widehat{\vec{F}, \tau}) = \frac{F_\tau}{F}; \quad \cos(\widehat{\vec{F}, n}) = \frac{F_n}{F}; \quad \cos(\widehat{\vec{F}, b}) = \frac{F_b}{F}. \quad (16.23)$$

Для розв'язання другої задачі динаміки вільної матеріальної точки потрібно двічі інтегрувати диференціальні рівняння руху точки.

Сили, що діють на матеріальну точку, можуть бути сталими або змінними. Змінна сила може: 1) змінюватися за визначеним законом з часом; 2) залежати від положення точки, яке визначається її радіусом-вектором; 3) залежати від швидкості точки, що рухається. В загальному випадку змінна сила, що діє на точку, або, точніше, рівнодійна кількох сил, може одночасно залежати від усіх трьох розглянутих параметрів, тобто

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V}).$$

Отже, праві частини диференціальних рівнянь руху матеріальної точки можуть містити сталі сили, сили, що є функціями часу, положення точки та її швидкості. Так, якщо рух точки буде задано координатним способом, то диференціальні рівняння (16.7) можуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= F_x + F_x(t) + F_x(x) + F_x(\dot{x}); \\ m \ddot{y} &= F_y + F_y(t) + F_y(y) + F_y(\dot{y}); \\ m \ddot{z} &= F_z + F_z(t) + F_z(z) + F_z(\dot{z}). \end{aligned} \quad (16.24)$$

При інтегруванні кожного диференціального рівняння руху матеріальної точки наявні дві сталі інтегрування, і тому при інтегруванні трьох диференціальних рівнянь (16.24) буде шість сталих.

Нехай рівняння

$$\begin{aligned}x &= x(t, c_1, \dots, c_6); \\y &= y(t, c_1, \dots, c_6); \\z &= z(t, c_1, \dots, c_6)\end{aligned}\tag{16.25}$$

є загальним розв'язком рівнянь (16.24), де c_1, \dots, c_6 — сталі інтегрування.

З рівностей (16.25) випливає, що знання лише одних сил, що діють на матеріальну точку, недостатньо для однозначного визначення закону її руху. Для того щоб однозначно визначити закон руху точки, потрібно ще знати початкові умови її руху. Початковий стан руху матеріальної точки визначається її положенням та її швидкістю в початковий момент часу ($t = 0$).

Якщо точка рухається в декартовій системі координат, то необхідно знати її координати і проєкції швидкості на осі координат у початковий момент руху:

$$\begin{aligned}t = 0; x(0) = x_0; y(0) = y_0; z(0) = z_0; \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \dot{z}(0) = \dot{z}_0.\end{aligned}\tag{16.26}$$

Сукупність даних (16.26) називається *початковими умовами руху матеріальної точки*.

Для визначення сталих інтегрування потрібно в момент часу $t = 0$ значенням x, y і z , які визначаються виразами (16.25), надати відповідно значення x_0, y_0 і z_0 . Далі, визначивши похідні за часом від функції (16.25):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, \dots, c_6); \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, \dots, c_6); \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, \dots, c_6),\end{aligned}\tag{16.27}$$

і значенням \dot{x}, \dot{y} і \dot{z} при $t = 0$ надати значення \dot{x}_0, \dot{y}_0 і \dot{z}_0 .

Таким чином, отримуємо шість рівнянь для визначення сталих інтегрування:

$$\begin{aligned}x_0 &= x(0, c_1, \dots, c_6); \dot{x}_0 = \dot{x}(0, c_1, \dots, c_6); \\ y_0 &= y(0, c_1, \dots, c_6); \dot{y}_0 = \dot{y}(0, c_1, \dots, c_6); \\ z_0 &= z(0, c_1, \dots, c_6); \dot{z}_0 = \dot{z}(0, c_1, \dots, c_6).\end{aligned}\tag{16.28}$$

Розв'язуючи рівняння (16.28) відносно c_i , знайдемо:

$$\begin{aligned} c_1 &= f_1(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); & c_4 &= f_4(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ c_2 &= f_2(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); & c_5 &= f_5(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ c_3 &= f_3(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); & c_6 &= f_6(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (16.29)$$

Підставляючи значення сталих інтегрування (16.29) у загальний розв'язок (16.25), отримуємо розв'язок, що відповідає початковим умовам:

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (16.30)$$

Одержані рівняння визначають єдиний розв'язок системи диференціальних рівнянь (16.24). При цьому зауважимо, що інтегрування цієї системи пов'язане з певними математичними труднощами і може бути здійснено в квадратурах (шляхом обчислення інтегралів) тільки в деяких окремих випадках руху матеріальної точки.

1. Вільний рух матеріальної точки в однорідному полі сил тяжіння за відсутності опору повітря в околі поверхні Землі.

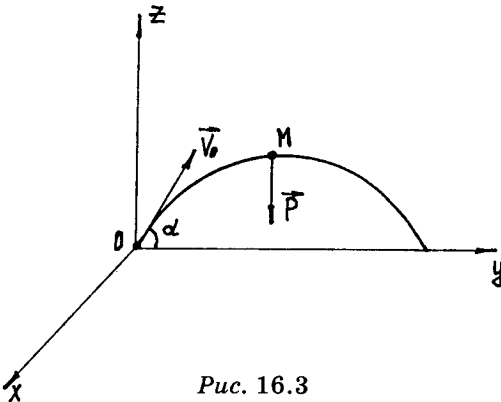


Рис. 16.3

Нехай точка M , маса якої дорівнює m , рухається в однорідному полі сил тяжіння під дією тільки однієї сили тяжіння \vec{P} . Побудуємо розрахункову схему руху точки M (рис. 16.3). За обраної системи відліку диференціальні рівняння руху точки M записуються так:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = 0; \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Інтегруючи ці рівняння, здобудемо перші інтеграли руху точки M :

$$\dot{x} = c_1; \quad \dot{y} = c_2; \quad \dot{z} = -\int mgdt + c_3.$$

Інтегруючи ще раз отримані вирази, здобудемо загальний розв'язок диференціальних рівнянь руху точки M :

$$x = \int c_1 dt + c_4; \quad y = \int c_2 dt + c_5; \quad z = -\int (\int mg dt + c_3) dt + c_6.$$

Сталі інтегрування c_1, c_2, \dots, c_6 у кожному конкретному випадку руху точки M визначаються з початкових умов її руху.

2. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що змінюється з часом, тобто $\vec{F}(t)$.

Для того щоб матеріальна точка рухалася вздовж прямої лінії, необхідно і достатньо, щоб вектор сили, що діє на неї, був би під час руху паралельним вектору початкової швидкості точки. Якщо ж початкова швидкість точки дорівнює нулю, то рух буде здійснюватися вздовж прямої, напрям якої збігається з напрямом вектора сили.

Якщо пряму, вздовж якої рухається матеріальна точка, взяти за вісь x , то диференціальне рівняння руху точки набирає вигляду

$$m \ddot{x} = F_x(t),$$

звідки

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F_x(t).$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи цей вираз, здобудемо

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int F_x(t) dt + c_1.$$

Інтегруючи ще раз останній вираз, матимемо

$$x = \frac{1}{m} \int (\int F_x(t) dt + c_1) dt + c_2,$$

де c_1 і c_2 — сталі інтегрування, що визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

3. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від положення точки, тобто $\vec{F}(\vec{r})$.

Якщо пряму, вздовж якої рухається матеріальна точка, взяти за вісь x , то диференціальне рівняння руху точки набирає вигляду

$$m \ddot{x} = F_x(x).$$

Введемо $\ddot{x} = \frac{\dot{x} d\dot{x}}{dx}$; тоді диференціальне рівняння руху точки матиме вигляд

гляд

$$m \frac{\dot{x} d\dot{x}}{dx} = F_x(x).$$

Помножуючи цей вираз на dx і проводячи відповідні перетворення, збудемо

$$d\left(\dot{x}^2\right) = \frac{2}{m} F_x(x) dx.$$

Після інтегрування знайдемо

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} \int F_x(x) dx + c_1,$$

звідки

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \int F_x(x) dx + c_1},$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \int F_x(x) dx + c_1}.$$

Після відокремлення змінних та інтегрування цього рівняння, остаточно збудемо

$$t = \pm \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int F_x(x) dx + c_1}} + c_2.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно x , знайдемо залежність x від часу і сталих інтегрування. Сталі інтегрування c_1 і c_2 визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

4. Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від швидкості точки, тобто $\bar{F}(\bar{V})$.

Якщо пряму, вздовж якої рухається матеріальна точка, взяти за вісь x , то диференціальне рівняння руху точки набирає вигляду

$$m \ddot{x} = F_x(\dot{x}).$$

Подамо два способи інтегрування диференціального рівняння руху точки.

1. Запишемо диференціальне рівняння руху у вигляді

$$m \frac{d \dot{x}}{dt} = F_x(\dot{x}).$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи цей вираз, здобудемо

$$\int \frac{m d \dot{x}}{F_x(\dot{x})} + c_1 = t.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно \dot{x} , знайдемо швидкість точки як функцію часу:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varphi(t),$$

або

$$dx = \varphi(t) dt.$$

Інтегруючи цей вираз, матимемо

$$x = \int \varphi(t) dt + c_2.$$

Сталі інтегрування c_1 і c_2 визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

2. Запишемо диференціальне рівняння руху точки у вигляді

$$m \frac{\dot{x} d \dot{x}}{dx} = F_x(\dot{x}).$$

Відокремлюючи змінні, здобудемо

$$\frac{m \dot{x} d \dot{x}}{F_x(\dot{x})} = dx.$$

Звідси, інтегруючи, матимемо

$$m \int \frac{\dot{x} d \dot{x}}{F_x(\dot{x})} + c_1 = x.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно \dot{x} , знайдемо швидкість точки як функцію від x :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \psi(x),$$

або

$$\frac{dx}{\psi(x)} = dt.$$

Інтегруючи цей вираз, матимемо

$$t = \int \frac{dx}{\psi(x)} + c_2.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно x , знайдемо залежність x від часу і сталих інтегрування. Сталі інтегрування c_1 і c_2 визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

Якщо точка здійснює невільний рух, то перша задача динаміки, як правило, зводиться до визначення реакції в'язі, що накладена на точку, при відомому русі точки і діючих на неї активних сил.

Друга (основна) задача динаміки при невільному русі матеріальної точки поділяється на дві задачі й полягає в тому, щоб, знаючи діючі на матеріальну точку активні сили, визначити: а) закон руху точки; б) реакцію накладеної в'язі.

Обидві задачі динаміки невільної матеріальної точки розв'язуються за допомогою диференціальних рівнянь (16.12) або (16.13).

16.7. Методика розв'язання задач динаміки матеріальної точки.

Приклади розв'язання задач і типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю¹

Розв'язання першої задачі динаміки матеріальної точки слід виконувати в такій послідовності:

1) встановити систему відліку, в якій буде розглядатися рух матеріальної точки, і зобразити на рисунку точку в довільному положенні в обраній системі відліку;

2) якщо рух матеріальної точки невільний, то необхідно розглянути також ті тіла (в'язі), які перебувають в контакті з точкою, і зобразити їх на рисунку;

¹ Тут і далі типові задачі взято зі збірника задач з теоретичної механіки І.В. Мещерського (М.: Наука, 1986. — 448 с.).

- 3) прикласти до точки всі відомі активні сили;
 - 4) користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, умовно відкинути в'язь і замінити її вплив на матеріальну точку реакцією в'язі;
 - 5) відповідно до обраної системи відліку скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки;
 - 6) визначити за відомим рухом матеріальної точки проекції прискорення точки на осі координат системи відліку;
 - 7) розв'язати систему одержаних рівнянь і визначити шукані величини.
- При розв'язанні задачі за допомогою принципу Д'Аламбера застосовують розглянуту вище схему розв'язання першої задачі динаміки точки до пункту 4 включно, а пункти 5, 6 і 7 замінюють такими:
- 5) прикласти до матеріальної точки відповідні сили інерції;
 - 6) побудувати відповідно до обраної системи відліку осі координат з початком у точці, рух якої розглядається;
 - 7) скласти відповідно до отриманої системи збіжних сил рівняння їх рівноваги відносно обраної системи координат;
 - 8) розв'язати систему одержаних рівнянь рівноваги збіжної системи сил і визначити шукані величини.

Приклад 16.1. Для очищення зерна від домішок на пивоварних заводах застосовується сепаратор, схему якого подано на рис. 16.4. Сепаратор складається з двох ситових кузовів 1, підвішених на тросах до нерухої рами 2 в точках A і A_1 і привідного механізму 3; двох подавальних коробів 4; двох аспіраційних камер 5.

За допомогою привідного механізму 3 кузови 1 здійснюють обертальний рух у горизонтальній площині навколо вертикальних осей, які проходять через нерухомі точки A і A_1 .

Визначити допустиму кутову швидкість обертання ситових кузовів, а також допустиму вагу кожного із них, якщо допустиме навантаження на кожний із тросів не повинно перевищувати $T = 2,5$ кН.

Довжина тросів $l = 5$ м; кут відхилення тросів від вертикалі $\alpha = 15^\circ$. Вагою тросів знехтувати.

Розв'язання. Розрахунковою моделлю руху ситового кузова, підвішеного на тросі до нерухої точки, є конічний математичний маятник, який описує в горизонтальній площині коло, при цьому трос утворює з вертикаллю кут α .

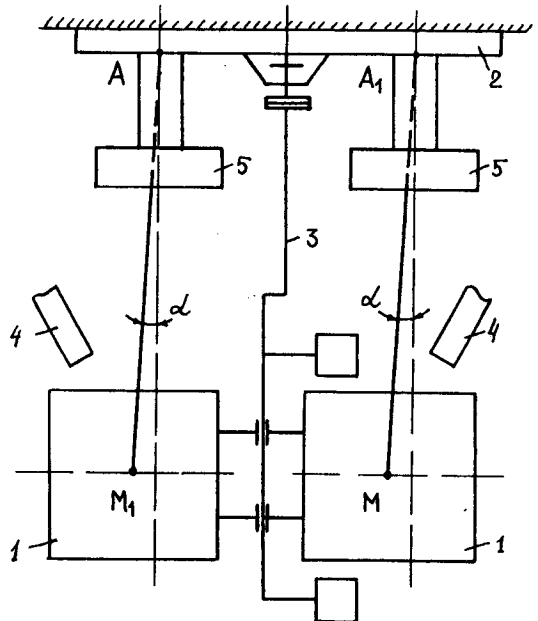


Рис. 16.4

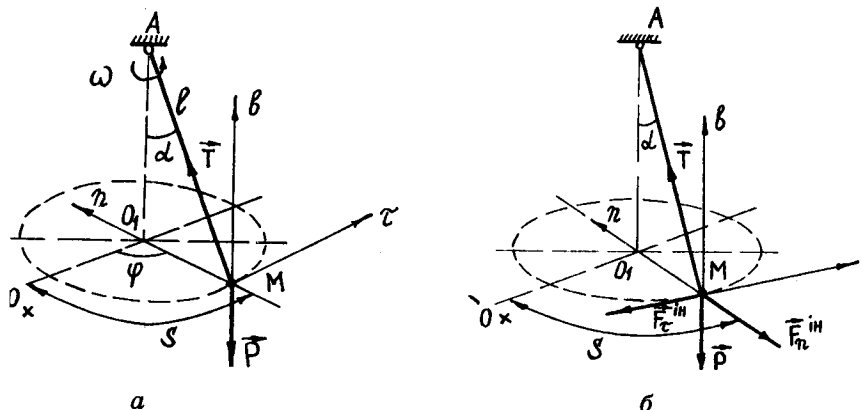


Рис. 16.5

Розглянемо рух одного із ситових кузовів, вважаючи його матеріальною точкою M (рис. 16.5). Оскільки точка M рухається по колу, то доцільно розглядати рух точки M у натуральних осях координат.

Матеріальна точка M невільна, оскільки на неї накладена в'язь — невагома нерозтяжна нитка AM .

Прикладемо до точки силу ваги \vec{P} і, користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, уявно відкинемо в'язь і її вплив на рухому точку M замінимо реакцією \vec{T} , яка напрямлена вздовж нитки AM .

Отже, на точку M діють дві сили: \vec{P} і \vec{T} . Точка здійснює рух по колу радіуса $R = AM \sin \alpha = l \sin \alpha$.

Побудуємо в точці M осі натурального тригранника та складемо диференціальні рівняння руху матеріальної точки в проекціях на ці осі:

$$m = \frac{dV_\tau}{dt} = 0; \quad \frac{mV^2}{\rho} = T \sin \alpha; \quad 0 = T \cos \alpha - P.$$

З першого рівняння одержуємо $\frac{dV_\tau}{dt} = 0$.

Звідси $V_\tau = \text{const}$, тобто рух точки M по траєкторії відбувається зі сталою швидкістю (рівномірною).

З третього рівняння визначаємо величину сили \vec{P} :

$$P = T \cos \alpha = 2,5 \cos 15^\circ = 2,5 \cdot 0,9659 = 2,4 \text{ кН.}$$

З другого рівняння дістаємо лінійну швидкість руху точки по траєкторії:

$$V = \sqrt{\frac{T \sin \alpha \cdot \rho}{m}} = \sqrt{\frac{T \sin^2 \alpha \cdot lg}{P}},$$

де $\rho = R = l \sin \alpha$; $m = \frac{P}{g}$.

Оскільки $V = \frac{dS}{dt}$, а $S = \varphi R = \varphi l \sin \alpha$, то

$$V = \frac{d}{dt} (\varphi l \sin \alpha) = l \sin \alpha \frac{d\varphi}{dt} = l \sin \alpha \cdot \omega,$$

де ω — кутова швидкість обертання конічного математичного маятника навколо нерухомої осі AO_1 .

Отже, маємо

$$l \sin \alpha \cdot \omega = \sqrt{\frac{T \sin^2 \alpha \cdot lg}{P}},$$

звідки

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{Tlg}{P}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2,5 \cdot 5 \cdot 9,81}{2,4}} = 1,43 \frac{1}{c}.$$

Подамо розв'язання цієї задачі за допомогою принципу Д'Аламбера. Як і в попередньому розв'язанні, розглянемо рух точки в натуральних осях координат (рис. 16.5, б). Прикладемо до точки активну силу \vec{P} і реакцію нитки \vec{T} , яка напрямлена вздовж нитки AM .

Додамо до сил \vec{P} і \vec{T} сили інерції. Оскільки точка рухається по криволінійній траєкторії, то вона в загальному випадку може мати нормальне прискорення \vec{W}_n , яке має напрям вздовж осі n у бік угнутості траєкторії, і дотичне прискорення \vec{W}_τ . Лінія дії прискорення \vec{W}_τ збігається з дотичною віссю τ . Відповідно до цих прискорень маємо сили інерції:

$$\vec{F}_\tau^{\text{ін}} = -m\vec{W}_\tau; \quad \vec{F}_n^{\text{ін}} = -m\vec{W}_n.$$

Нормальна сила інерції $\vec{F}_n^{\text{ін}}$ матеріальної точки має напрям, протилежний до її нормального прискорення, а дотична сила інерції $\vec{F}_\tau^{\text{ін}}$ напрямлена у протилежний бік від дотичного прискорення точки.

На підставі принципу Д'Аламбера маємо

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_n^{\text{ін}} + \vec{F}_\tau^{\text{ін}} = \vec{0}.$$

Проекціюємо це рівняння на осі натурального тригранника:

$$\sum_{k=1}^n F_{k\tau} = -F_\tau^{\text{ін}} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kn} = T \sin \alpha - F_n^{\text{ін}} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kb} = T \cos \alpha - P = 0.$$

З першого рівняння знаходимо

$$-F_\tau^{\text{ін}} = -mW_\tau = -m \frac{dV_\tau}{dt} = 0,$$

звідси $V_\tau = \text{const}$, тобто точка рухається зі сталою швидкістю (рівномірно).

З третього рівняння одержуємо

$$P = T \cos \alpha = 2,5 \cdot \cos 15^\circ = 2,5 \cdot 0,9659 = 2,4 \text{ кН.}$$

З другого рівняння визначаємо лінійну швидкість точки:

$$T \sin \alpha - F_n^{\text{ін}} = 0; \quad T \sin \alpha - \frac{mV^2}{\rho} = 0;$$

$$V = \sqrt{\frac{T \sin \alpha \cdot \rho}{m}} = \sqrt{\frac{T \sin^2 \alpha \cdot lg}{P}},$$

де $m = \frac{P}{g}$; $\rho = R = l \sin \alpha$.

Оскільки $V = \frac{dS}{dt}$, а $S = \varphi R = \varphi l \sin \alpha$, то

$$V = \frac{d}{dt}(\varphi l \sin \alpha) = l \sin \alpha \cdot \frac{d\varphi}{dt} = l \sin \alpha \cdot \omega,$$

де ω — кутова швидкість обертання конічного математичного маятника навколо нерухомої осі AO_1 (рис. 16.5, б).

Тоді маємо

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{Tlg}{P}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2,5 \cdot 5 \cdot 9,81}{2,4}} = 1,43 \frac{1}{\text{с}}.$$

Розв'язання другої (основної) задачі динаміки матеріальної точки слід виконувати в такій послідовності:

1) встановити систему відліку, в якій буде розглядатися рух матеріальної точки; записати початкові умови руху точки і зобразити на рисунку точку в довільному положенні в обраній системі відліку;

2) якщо рух матеріальної точки невільний, то необхідно розглянути також ті тіла (в'язі), які перебувають в контакті з точкою, і зобразити їх на рисунку;

3) прикласти до точки всі активні сили;

4) користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, відкинути умовно в'язь і замінити її вплив на матеріальну точку реакцією в'язі;

5) скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки відповідно до обраної системи відліку;

6) провести інтегрування системи диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і за початковими умовами руху точки визначити сталі інтегрування;

7) з одержаних рівнянь визначити шукані величини і проаналізувати отримані результати.

Приклад 16.2. На складі готової продукції цукрового заводу для переміщення мішків з цукром застосовують різні типи конвеєрного транспорту. Схему одного із них зображено на рис. 16.6.

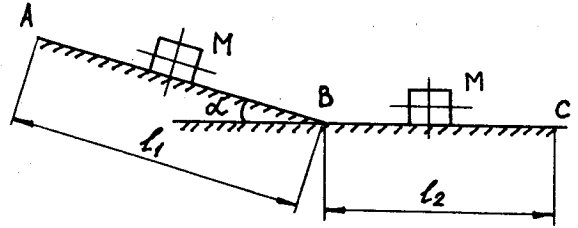


Рис. 16.6

Мішок із цукром масою $m = 50$ кг почав рухатися від точки A до точки B по конвеєру, який розташований під кутом α до горизонту.

У точці B мішок не змінює своєї швидкості і продовжує рухатися до точки C по конвеєру, який розташований горизонтально.

На ділянці AB на мішок діють сила ваги \vec{P} , сила тертя \vec{F}^T (коефіцієнт тертя $f = 0,3$) і сила опору середовища \vec{R} , яка має напрям, протилежний до напрямку руху мішка, і за величиною становить $R = \mu V^2$, де μ — додатна стала величина.

На ділянці BC на мішок діють сила ваги \vec{P} , сила опору середовища \vec{R} і стала за величиною сила \vec{Q} , що має напрям, протилежний до напрямку руху мішка.

Розглядаючи мішок як матеріальну точку, визначити відстань, на яку переміститься мішок з цукром від точки B до зупинки, та необхідний для цього час t_1 , якщо відомо:

$$\mu = 0,8 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2}; \quad \alpha = 45^\circ; \quad l_1 = 6 \text{ м}; \quad Q = 30 \text{ Н}.$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі, по-перше, розглянемо рух мішка з цукром на ділянці AB у декартовій системі координат з початком у точці A . Вісь x напрямляємо вздовж конвеєра, вісь y — перпендикулярно до конвеєра (рис. 16.7).

Розглядаючи мішок з цукром як матеріальну точку M , зображуємо її на рисунку у довільному положенні в системі відліку Axy .

Записуємо початкові умови руху точки M на ділянці AB :

$$t = 0; \quad x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0.$$

До точки M , яка є невільною матеріальною точкою, прикладено дві сили: \vec{P} (сила ваги) і \vec{R} (сила опору середовища). Користуючись аксіомою про звільнення від в'язей,

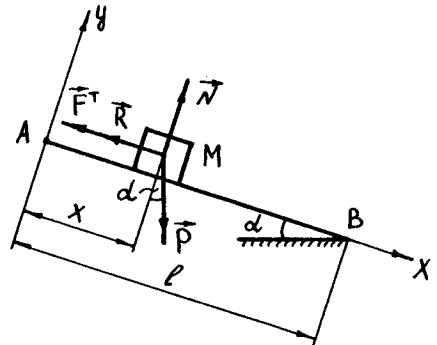


Рис. 16.7

умовно відкинемо в'язь (шорстка поверхня) і її вплив на точку M замінимо двома реакціями: \vec{N} (нормальна реакція) і \vec{F}^r (сила тертя).

Запишемо диференціальні рівняння руху точки M у проекціях на осі x і y :

$$m \ddot{x} = P \sin \alpha - F^r - R;$$

$$m \ddot{y} = N - P \cos \alpha.$$

Оскільки $\ddot{y} = 0$ (точка M не рухається вздовж осі y), то $N - P \cos \alpha = 0$, звідки $N = P \cos \alpha$.

Тоді сила тертя

$$F^r = fN = fP \cos \alpha.$$

Веручи до уваги значення R і F^r , перепишемо перше диференціальне рівняння так:

$$m \ddot{x} = P \sin \alpha - fP \cos \alpha - \mu \dot{x}^2.$$

Перетворимо це рівняння у такий спосіб:

$$\ddot{x} = A - B \dot{x}^2,$$

де $A = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$; $B = \frac{\mu}{m}$.

Оскільки для розв'язання задачі необхідно знати швидкість точки M у точці B і за умовою задачі відстань, яку проходить точка M від A до B , відома, то доцільно \ddot{x} подати у такому вигляді:

$$\ddot{x} = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{x} d\dot{x}}{dx}.$$

Тоді диференціальне рівняння руху точки M набирає вигляду

$$\frac{\dot{x} d\dot{x}}{dx} = A - B \dot{x}^2.$$

Відокремлюємо змінні \dot{x} і x . Отримуємо

$$\frac{\dot{x} d\dot{x}}{A - B \dot{x}^2} = dx.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$-\frac{1}{2B} \ln(A - B \dot{x}^2) + c_1 = x.$$

За початковими умовами руху точки M $\left[t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0 \right]$ визначимо довільну сталу інтегрування c_1 :

$$c_1 = \frac{1}{2B} \ln A.$$

Беручи до уваги значення c_1 , матимемо

$$-\frac{1}{2B} \ln(A - B \dot{x}^2) + \frac{1}{2B} \ln A = x,$$

звідки знайдемо

$$\ln \frac{A}{A - B \dot{x}^2} = 2Bx.$$

Запишемо цю рівність так:

$$e^{2Bx} = \frac{A}{A - B \dot{x}^2}.$$

Розв'язуючи рівність відносно \dot{x} , знайдемо

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{A}{B} (1 - e^{-2Bx})}.$$

Беручи до уваги значення A і B , останню рівність можна записати у вигляді

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{2\mu x}{m}} \right)}.$$

Підставивши числові значення, знайдемо швидкість точки M у точці B :

$$V_B = \dot{x} = \sqrt{\frac{50 \cdot 9,81(0,707 - 0,3 \cdot 0,707)}{0,8} \left(1 - e^{-\frac{2 \cdot 0,8 \cdot 6}{50}} \right)} = 7,28 \text{ м/с.}$$

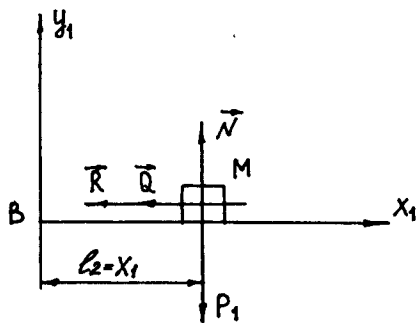


Рис. 16.8

Тепер розглянемо рух точки M на ділянці BC (рис. 16.6). Система координат і сили, що діють на точку M при її русі, зображено на рис. 16.8.

Беручи, що вектор початкової швидкості точки M на ділянці BC напрямлений вздовж осі x_1 і за величиною дорівнює V_B , записуємо початкові умови руху точки M :

$$t = 0; x_1(0) = 0; \dot{x}_1(0) = V_B.$$

Запишемо диференціальне рівняння руху

точки M у проекції на вісь x_1 :

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= -Q - R; \\ m \ddot{x}_1 &= -Q - \mu \dot{x}_1^2; \\ \ddot{x}_1 &= -\frac{Q}{m} - \frac{\mu}{m} \dot{x}_1^2. \end{aligned}$$

Позначимо $\frac{Q}{m} = a$; $\frac{M}{m} = n$.

Тоді останнє рівняння набирає вигляду

$$\ddot{x}_1 = -\left(a + n \dot{x}_1^2\right). \quad (1)$$

Подаємо \ddot{x}_1 у вигляді

$$\ddot{x}_1 = \frac{d \dot{x}_1}{dt_1}.$$

Тоді диференціальне рівняння точки M набирає вигляду

$$\frac{d \dot{x}_1}{dt_1} = -\left(a + n \dot{x}_1^2\right).$$

Відокремлюємо змінні \dot{x}_1 і t_1 . Отримуємо $-\frac{d \dot{x}_1}{\left(a + n \dot{x}_1^2\right)} = dt_1$.

Розглянемо інтеграл

$$-\int \frac{d\dot{x}_1}{(a + n\dot{x}_1^2)} = -\int \frac{d\dot{x}_1}{n\left(\frac{a}{n} + \dot{x}_1^2\right)} = -\frac{1}{n} \int \frac{d\dot{x}_1}{k^2 + \dot{x}_1^2} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}_1}{k} + c_2,$$

де $k = \sqrt{\frac{a}{n}}$.

Отже, після інтегрування диференціального рівняння дістанемо

$$-\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}_1}{k} + c_2 = t_1.$$

За початковими умовами руху точки M $\left[t = 0; x_1(0) = 0; \dot{x}_1(0) = V_B \right]$ визначимо довільну сталу інтегрування c_2 :

$$c_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{V_B}{k}.$$

Беручи до уваги значення c_2 , n і k , матимемо

$$\frac{m}{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{Q}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\mu}{Q}} \cdot (V_B - \dot{x}_1) = t_1. \quad (2)$$

З рівняння (2) дістанемо час t_1 руху точки M від точки B до зупинки $\left| \dot{x}_1 = 0 \right|$:

$$t_1 = \frac{m}{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{Q}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\mu}{Q}} \cdot V_b = \frac{50}{0,8} \sqrt{\frac{0,8}{30}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{0,8}{30}} \cdot 7,28 = 12 \text{ с.}$$

Щоб визначити шлях, який пройде точка M від точки B до зупинки, повернемося до диференціального рівняння руху точки (1) і подамо \ddot{x}_1 у вигляді

$$\ddot{x}_1 = \frac{d\dot{x}_1}{dt_1} = \frac{dx_1}{dt_1} \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} = \frac{\dot{x}_1 d\dot{x}_1}{dx_1}.$$

Тоді рівняння (1) набирає вигляду

$$\frac{\dot{x}_1 d \dot{x}_1}{dx_1} = -\left(a + n \dot{x}_1^2\right).$$

Відокремлюємо змінні \dot{x}_1 і x_1 . Отримуємо

$$-\frac{\dot{x}_1 d \dot{x}_1}{a + n \dot{x}_1^2} = dx_1.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$-\frac{1}{2n} \ln\left(a + n \dot{x}_1^2\right) + c_3 = x_1.$$

За початковими умовами руху M $\left[t = 0; x_1(0) = 0; \dot{x}_1(0) = V_B\right]$ визначаємо довільну сталу інтегрування c_3 :

$$c_3 = \frac{1}{2n} \ln(a + nV_B^2).$$

Беручи до уваги значення c_3 , матимемо

$$-\frac{1}{2n} \ln\left(a + n \dot{x}_1^2\right) + \frac{1}{2n} \ln(a + nV_B^2) = x_1.$$

Перетворюємо цей вираз так:

$$x_1 = \frac{1}{2n} \ln \frac{a + nV_B^2}{a + n \dot{x}_1^2}.$$

Підставляючи значення a , n , V_B і $\dot{x}_1 = 0$ (оскільки точка зупиняється), знайдемо відстань від точки B , яку подолає точка M до своєї зупинки:

$$l_2 = x_1 = \frac{m}{2\mu} \ln \frac{(Q + \mu V_B^2)}{Q} = \frac{50}{2 \cdot 0,8} \ln \frac{(30 + 0,8 \cdot 7,28^2)}{30} = 27,5 \text{ м.}$$

Приклад 16.3. На цукрових заводах вода після миття цукрових буряків подається у відстійник (рис. 16.9), де тверді частинки осідають на дно відстійника і вода очищується.

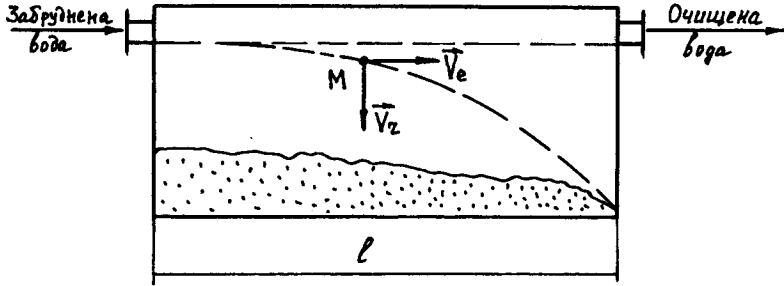


Рис. 16.9

Взявши силу опору середовища під час осідання частинки кулеподібної форми $\vec{R} = -k\vec{V}$ (k — додатна стала величина), визначити рівняння руху частинки, якщо початкова швидкість її руху напрямлена горизонтально і за величиною дорівнює V_0 .

Розв'язання. Розташовуємо початок O системи координат Oxy у початковому положенні частинки M , що осідає. Вісь Oy напрямляємо вертикально вниз, вісь Ox — горизонтально. Точку M зображуємо на рисунку в довільному положенні в системі відліку Oxy (рис. 16.10).

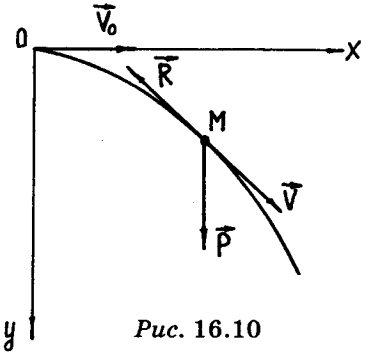


Рис. 16.10

Записуємо початкові умови руху точки M : $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V_0$ і $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$.

Записуємо диференціальні рівняння руху точки M у проекціях на осі x і y :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= P_x - k\dot{x}; \\ m\ddot{y} &= P_y - k\dot{y}. \end{aligned}$$

Подамо \ddot{x} і \ddot{y} у вигляді

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}; \quad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}.$$

Тоді диференціальні рівняння руху точки M набирають вигляду

$$\begin{aligned} m \frac{d\dot{x}}{dt} &= -k\dot{x}; \\ m \frac{d\dot{y}}{dt} &= P - k\dot{y}. \end{aligned}$$

Відокремлюємо змінні \dot{x} , \dot{y} і t . Отримуємо:

$$\frac{m d\dot{x}}{\dot{x}} = -k dt; \quad \frac{m d\dot{y}}{P - k\dot{y}} = dt.$$

Після інтегрування рівнянь дістанемо:

$$m \ln \dot{x} = -kt + c_1; \quad -\frac{m}{k} \ln(P - k\dot{y}) = t + c_2.$$

За початковими умовами руху точки M $\left[t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = V_0; \right.$

$\left. y(0) = 0; \dot{y}(0) = 0 \right]$ визначаємо довільні сталі інтегрування c_1 і c_2 :

$$c_1 = m \ln V_0; \quad c_2 = -\frac{m}{k} \ln P.$$

Таким чином,

$$m \ln \dot{x} = -kt + m \ln V_0; \\ -\frac{m}{k} \ln(P - k\dot{y}) = t - \frac{m}{k} \ln P,$$

або

$$\ln \frac{\dot{x}}{V_0} = -\frac{kt}{m}; \quad \ln \frac{P - k\dot{y}}{P} = -\frac{kt}{m}.$$

Звідси знайдемо

$$\dot{x} = V_0 e^{-\frac{kt}{m}}; \quad \dot{y} = \frac{P}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right).$$

Подано \dot{x} і \dot{y} у вигляді

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}.$$

Тоді останні рівняння набувають вигляду

$$\frac{dx}{dt} = V_0 e^{-\frac{kt}{m}}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{P}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right).$$

Відокремлюємо змінні x , y , і t та інтегруємо:

$$x = -\frac{V_0 m}{k} e^{-\frac{kt}{m}} + c_3; \quad y = \frac{P}{k} t + \frac{Pm}{k^2} e^{-\frac{kt}{m}} + c_4.$$

За початковими умовами руху точки M $\left[t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = V_0 \text{ і } y(0) = 0; \dot{y}(0) = 0 \right]$ визначаємо довільні сталі інтегрування c_3 і c_4 :

$$c_3 = \frac{V_0 m}{k}; \quad c_4 = -\frac{Pm}{k^2}.$$

Отже,

$$x = \frac{V_0 m}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right); \quad y = \frac{mg}{k} \left[t - \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \right].$$

Типові задачі динаміки матеріальної точки для самостійної проробки та самоконтролю

Задача 16.1. У вагоні потяга, який спочатку рухається по прямолінійно-му шляху, а потім по закругленому зі швидкістю 20 м/с, зважують деякий вантаж на пружинних вагах; ваги в першому випадку показують 50 Н, а на закругленні — 51 Н. Визначити радіус закруглення шляху.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.11. Диференціальні рівняння руху вантажу (точки M) мають вигляд:

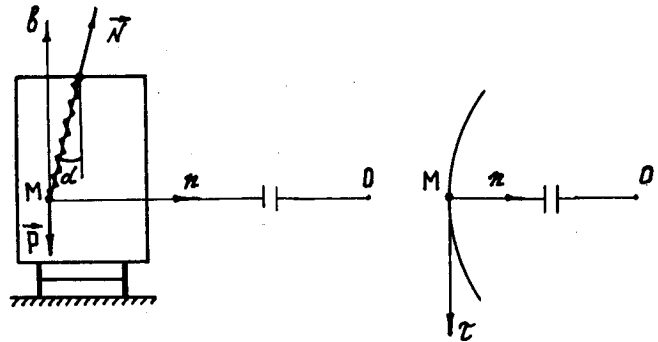


Рис. 16.11

$$\frac{m dV_{\tau}}{dt} = 0; \quad \frac{mV^2}{R} = N \sin \alpha; \quad 0 = N \cos \alpha - P.$$

Звідси матимемо: $R = \frac{mV^2}{N \sin \alpha}$, де $N = 51$ Н; $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{P}{N} \right)^2}$; $V_{\tau} = \text{const}$.

Задача 16.2. Вантаж, маса якого дорівнює 0,2 кг, підвешений до кінця нитки завдовжки 1 м; унаслідок поштовху вантажу надано горизонтальної швидкості 5 м/с. Знайти натяг нитки безпосередньо після поштовху.

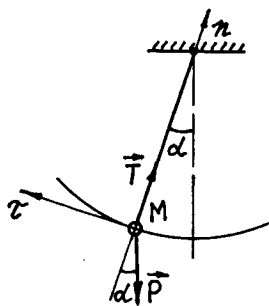


Рис. 16.12

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.12. Диференціальні рівняння руху вантажу (точки M)

$$\text{мають вигляд: } m \frac{dV_{\tau}}{dt} = -P \sin \alpha; \quad \frac{mV^2}{l} = T - P \cos \alpha.$$

$$\text{Звідси при } \alpha = 0 \text{ матимемо: } T = \frac{mV^2}{l} + P; \quad V_{\tau} = \text{const.}$$

Задача 16.3. Автомобіль, маса якого дорівнює 1000 кг, рухається по опуклому мосту зі швидкістю $V = 10$ м/с. Радіус кривини у середині моста $\rho = 50$ м. Визначити силу тиску автомобіля на міст у момент проходження автомобіля через середину моста.

Розв'язання. Застосуємо принцип Д'Аламбера. Розрахункову схему зображено на рис. 16.13. Рівняння рівноваги автомобіля (точки M) має вигляд

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad F^{in} + N - P = 0.$$

$$\text{Звідси матимемо: } N = P - F^{in} = P - mW_n, \text{ де } W_n = \frac{mV^2}{\rho}.$$

Задача 16.4. Решето рудозбагачувального грохоту здійснює вертикальні гармонічні коливання з амплітудою $a = 5$ см. Знайти найменшу частоту k коливань решета, за якої шматки руди, що лежать на решеті, будуть відокремлюватися від нього і підкидатися угору.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.14. Диференціальне рівняння руху руди (точки M) має вигляд

$$m \ddot{y} = N - P.$$

$$\text{Оскільки руда підкидається, то } N = 0 \text{ і маємо } \ddot{y} = -g.$$

$$\text{Тоді } -ak^2 \sin kt = -g.$$

$$\text{Звідси } k_{\min} = \sqrt{\frac{g}{a \sin kt}}, \text{ де } \sin kt = 1.$$

Задача 16.5. Рух матеріальної точки, маса якої становить 0,2 кг, визначається рівняннями $x = 3 \cos 2\pi t$ см, $y = 4 \sin \pi t$ см (t — в секундах). Визначити проєкції сили, що діє на точку, залежно від її координат.

Розв'язання. Диференціальні рівняння руху точки мають вигляд $m \ddot{x} = F_x; \quad m \ddot{y} = F_y.$

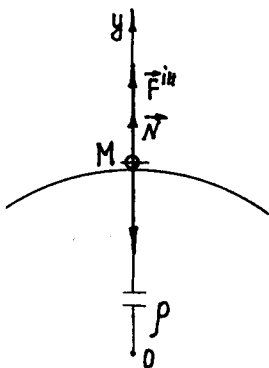


Рис. 16.13

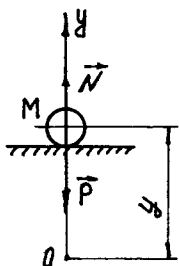


Рис. 16.14

Звідси $F_x = -0,0789x$ Н; $F_y = -0,0197y$ Н, де $\ddot{x} = -0,394x$, $\ddot{y} = -0,099y$.

Задача 16.6. Завантажена вагонетка, маса якої становить 700 кг, спускається по канатній залізниці з уклоном $\alpha = 15^\circ$, маючи швидкість $V = 1,6$ м/с. Визначити натяг каната при рівномірному спуску і при гальмуванні вагонетки. Час гальмування $t = 4$ с, загальний коефіцієнт опору руху $f = 0,015$. При гальмуванні вагонетка рухається рівносповільнено.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.15. Диференціальне рівняння руху вагонетки (точки M) має вигляд

$$m \ddot{x} = P \sin \alpha - T - P \cos \alpha \cdot f.$$

Звідси матимемо

$$T = P(\sin \alpha - \cos \alpha \cdot f) - m \ddot{x}.$$

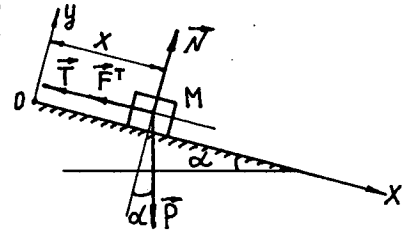


Рис. 16.15

При рівномірному спуску $\ddot{x} = 0$; при рівносповільненому — $\ddot{x} = -\frac{V}{t}$.

Задача 16.7. Визначити відхилення α від вертикалі й силу тиску N вагона на рейку підвісної дороги при русі вагона по закругленню радіуса $R = 30$ м зі швидкістю $V = 1,0$ м/с. Маса вагона становить 1500 кг.

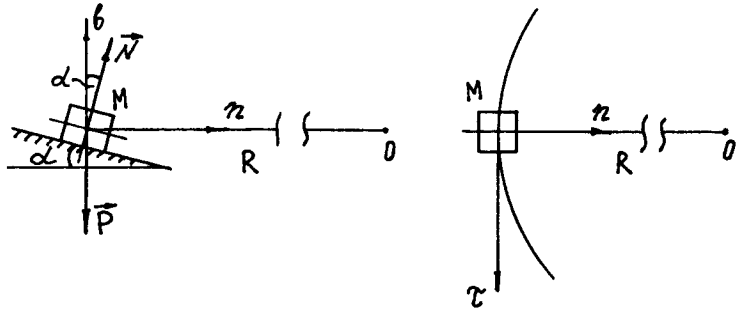


Рис. 16.16

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.16. Диференціальні рівняння руху

вагона (точки M) мають вигляд: $\frac{mdV_\tau}{dt} = 0$; $\frac{mV^2}{R} = N \sin \alpha$; $0 = N \cos \alpha - P$.

Звідси матимемо: $\alpha = \arctg \frac{V^2}{Rg}$; $N = \frac{P}{\cos \alpha}$; $V_\tau = \text{const}$.

Задача 16.8. Вантаж, маса якого 600 кг, піднімається за допомогою колесорота по похилому шурфу з кутом нахилу 60° до горизонту. Коефіцієнт тертя при русі вантажу $f = 0,2$. Колесорот має радіус $R = 0,2$ м і обертається за законом $\varphi = 0,4t^3$. Знайти натяг троса як функцію часу і значення цього натягу через 2 с після початку підйому.

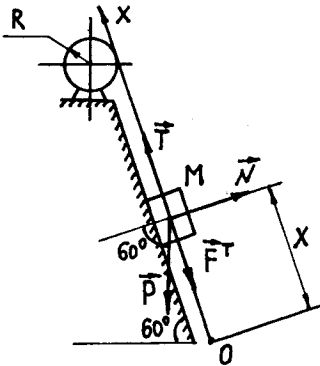


Рис. 16.17

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.17. Диференціальне рівняння руху вантажу (точки M) має вигляд $m \ddot{x} = T - P(f \cos 60^\circ + \sin 60^\circ)$.

Звідси матимемо $T = m \left[\ddot{x} + g(f \cos 60^\circ + \sin 60^\circ) \right]$, де

$$\ddot{x} = \ddot{\varphi} R = 2,4 R t.$$

Задача 16.9. Вантаж M , вага якого становить 10 Н, підвішений за допомогою троса до стелі. Довжина троса $l = 2$ м. Вантаж із тросом здійснює гармонічні коливання відповідно до рівняння

$\varphi = \frac{\pi}{6} \sin 2\pi t$, де φ — кут відхилення троса від вертикалі, рад; t — час, с. Визначити натяг троса у верхньому T_1 і нижньому T_2 положеннях.

Розв'язання. Застосуємо принцип Д'Аламбера. Розрахункову схему наведено на рис. 16.18. Рівняння рівноваги вантажу мають вигляд:

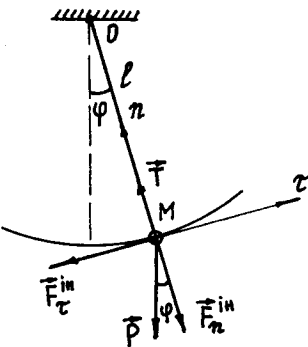


Рис. 16.18

$$\sum_{k=1}^n F_{kt} = 0; \quad -F_{\tau}^{\text{in}} - P \sin \varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kn} = 0; \quad T - P \cos \varphi - F_n^{\text{in}} = 0.$$

Звідси матимемо $T = P \cos \varphi \left(1 + \frac{\dot{\varphi}^2 l}{g \cos \varphi} \right)$. При $\varphi = 0$ $T_2 = P \left(1 + \frac{\pi^4 l}{9g} \right)$; при

$\varphi = \varphi_{\text{max}}$ $T_1 = P \cos \varphi_{\text{max}}$, де $\dot{\varphi} = 0$; $\varphi_{\text{max}} = \frac{\pi}{6}$.

Задача 16.10. Велосипедист, рухаючись зі швидкістю 5 м/с, описує криву радіусом 10 м. Знайти кут нахилу середньої площини велосипеда до вертикалі, а також найменший коефіцієнт тертя між шинами велосипеда і полотном дороги, за якого буде забезпечена стійкість велосипеда.

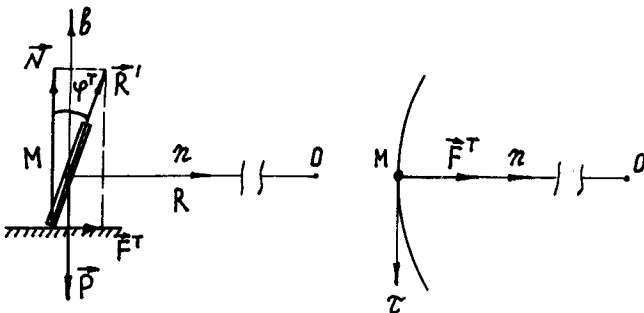


Рис. 16.19

Знайти кут нахилу середньої площини велосипеда до вертикалі, а також найменший коефіцієнт тертя між шинами велосипеда і полотном дороги, за якого буде забезпечена стійкість велосипеда.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.19. Диференціальні

рівняння руху велосипедиста (точки M) мають вигляд: $\frac{m dV_x}{dt} = 0$; $\frac{mV^2}{R} = F^r$;

$$0 = P - N. \text{ Звідси } f = \frac{V^2}{gR}, \text{ оскільки } F^r = Nf; \varphi^r = \arctg f.$$

Задача 16.11. Важке тіло спускається по гладенькій поверхні, яка має нахил до горизонту. Кут нахилу $\alpha = 30^\circ$. Знайти, за який час тіло пройде шлях 9,6 м, якщо у початковий момент його швидкість дорівнювала 2 м/с.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.20. Початкові умови руху тіла (точки M): $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 2$ м/с. Диференціальне рівняння руху тіла точки M має вигляд

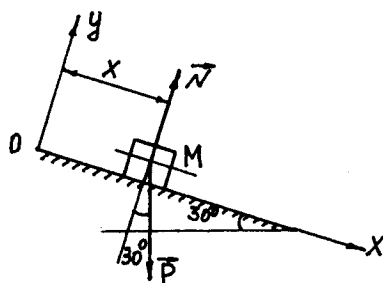


Рис. 16.20

$$m \ddot{x} = P \sin 30^\circ.$$

Після інтегрування матимемо: $\dot{x} = g \sin 30^\circ t + c_1$; $x = \frac{g \sin 30^\circ}{2} t^2 + c_1 t + c_2$,

де $c_1 = 2$; $c_2 = 0$. Тоді $x = \frac{g \sin 30^\circ}{2} t^2 + 2t$, звідки

$$t^2 + 0,816t - 3,92 = 0; t = -0,408 \pm \sqrt{(-0,408)^2 + 3,92}; t = 1,61 \text{ с.}$$

Задача 16.12. Тіло, маса якого m , унаслідок одержаного поштовху пройшло по шорсткій горизонтальній поверхні за 5 с відстань $S = 24,5$ м і зупинилося. Визначити коефіцієнт тертя f .

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.21. Початкові умови руху тіла (точки M): $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V_0$. Диференціальне рівняння руху тіла точки M має вигляд $m \ddot{x} = -F^r$, де $F^r = Pf$.

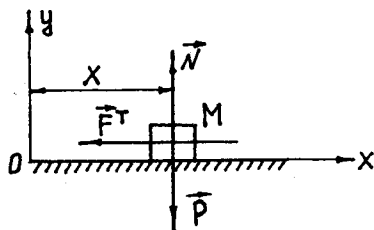


Рис. 16.21

Після інтегрування матимемо: $\dot{x} = -gft + c_1$; $x = -\frac{gf}{2} t^2 + c_1 t + c_2$, де $c_1 = V_0$;

$c_2 = 0$. Звідси $V_0 = \frac{24,5}{5} + \frac{9,81 \cdot 5}{2} f = 4,9 + 24,52f$ м/с. Отже, при $\dot{x} = 0$ матимемо $0 = -gft + V_0$, звідки $f = 0,2$.

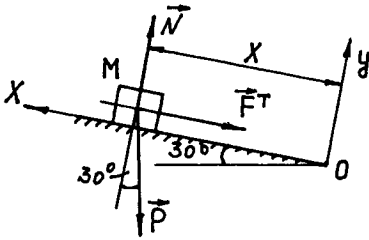


Рис. 16.22

$t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V_0 = 1,5$ м/с. Диференціальне рівняння руху точки M має вигляд

$$m \ddot{x} = -P \sin 30^\circ - F^r,$$

де $F^r = P \cos 30^\circ \cdot f$.

Після інтегрування матимемо:

$$\dot{x} = -g(\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ)t + c_1; \quad x = -\frac{g(\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ)}{2}t^2 + c_1t + c_2,$$

де $c_1 = V_0$; $c_2 = 0$.

$$\text{Звідси } t = \frac{V_0}{g(\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ)}; \quad x = -\frac{g(\sin 30^\circ + f \cos 30^\circ)}{2}t^2 + V_0t.$$

Задача 16.14. Літак A летить на висоті 4000 м над землею з горизонтальною швидкістю 140 м/с. На якій відстані x по горизонталі від точки B необхідно скинути без початкової відносної швидкості вантаж, щоб він упав у точку B ? Опором повітря знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.23. Початкові

умови руху вантажу (точки M): $t = 0$; $x(0) = 0$;

$$\dot{x}(0) = V_0 = 140 \text{ м/с}; \quad y(0) = 4000 \text{ м}; \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Диференціальні рівняння руху вантажу точки M мають вигляд $m \ddot{x} = 0$; $m \ddot{y} = -P$.

Після інтегрування матимемо: $\dot{x} = c_1$;

$$x = c_1t + c_2; \quad \dot{y} = -gt + c_3; \quad y = -\frac{gt^2}{2} + c_3t + c_4,$$

де $c_1 = 140$ м/с; $c_2 = 0$; $c_3 = 0$; $c_4 = 4000$ м.

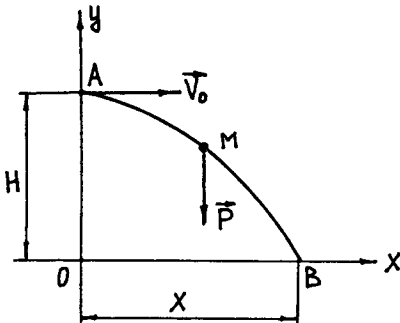


Рис. 16.23

$$\text{Тоді } t = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000}{9,81}} = 28,6 \text{ с; } x = 140t = 140 \cdot 28,6 = 4000 \text{ м.}$$

Задача 16.15. Найбільша горизонтальна дальність снаряда — L . Визначити горизонтальну дальність l при куті кидання $\alpha = 30^\circ$ і висоту h траєкторії у цьому випадку. Опором повітря знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис.

16.24. Початкові умови руху снаряда (точки M):

$$t = 0; x(0) = 0; y(0) = 0; \dot{x}(0) = V_0 \cos \alpha;$$

$$\dot{y}(0) = V_0 \sin \alpha.$$

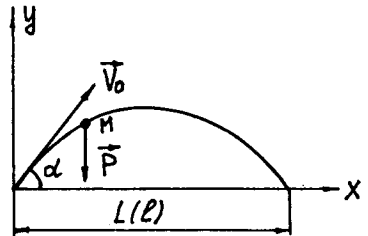


Рис. 16.24

Диференціальні рівняння руху снаряда (точки M) мають вигляд:

$$m \ddot{x} = 0; m \ddot{y} = -P.$$

Після інтегрування матимемо:

$$\dot{x} = c_1; x = c_1 t + c_2; \dot{y} = -gt + c_3; y = -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4,$$

де $c_1 = V_0 \cos \alpha$; $c_2 = 0$; $c_3 = V_0 \sin \alpha$; $c_4 = 0$.

З рівнянь $L = V_0 \cos 45^\circ \cdot t$; $-\frac{gt^2}{2} + V_0 \sin 45^\circ \cdot t = 0$ визначаємо V_0 :

$$V_0 = \sqrt{\frac{gL}{2 \cos^2 45^\circ}}.$$

З рівнянь $l = V_0 \cos 30^\circ \cdot t$; $-\frac{gt^2}{2} + V_0 \sin 30^\circ \cdot t = 0$ визначаємо l :

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2} L.$$

Визначаємо t_1 , за якого $h = h_{\max}$, тобто $t_1 = \frac{\sqrt{3}L}{4V_0 \cos 30^\circ}$, де $V_0 = \sqrt{\frac{gL}{2 \cos^2 45^\circ}}$.

З рівняння $y = -\frac{g}{2} t_1^2 + V_0 \sin 30^\circ \cdot t_1$ визначаємо h : $h = \frac{L}{8}$.

Задача 16.16. Визначити кут нахилу ствола гармати до горизонту, якщо ціль розміщена на відстані $l = 32$ км, а початкова швидкість снаряда $V_0 = 600$ м/с. Опором повітря знехтувати.

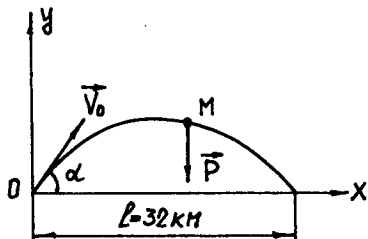


Рис. 16.25

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.25. Початкові умови руху снаряда (точки M):

$$t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = V_0 \cos \alpha; y(0) = 0;$$

$$\dot{y}(0) = V_0 \sin \alpha.$$

Диференціальні рівняння руху снаряда (точки

M) мають вигляд: $m \ddot{x} = 0; m \ddot{y} = -P$.

Після інтегрування матимемо:

$$\dot{x} = c_1; x = c_1 t + c_2; \dot{y} = -gt + c_3; y = -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4,$$

де $c_1 = V_0 \cos \alpha; c_2 = 0; c_3 = V_0 \sin \alpha; c_4 = 0$.

З рівняння $x = V_0 \cos \alpha \cdot t$ визначаємо t : $t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$, де $x = l$.

З рівняння $-\frac{gt^2}{2} + V_0 \sin \alpha \cdot t = 0$ знаходимо $\sin 2\alpha = \frac{gl}{V_0^2}$. Оскільки величина синуса однакова для кута 2α і кута $2\alpha_1 = 180 - 2\alpha$, то маємо: $\alpha_1 = 30,34^\circ = 30^\circ 20'; \alpha_2 = 59,66^\circ = 59^\circ 40'$.

Задача 16.17. Водій трамвая, вимикаючи поступово реостат, збільшує потужність вагонного двигуна так, що сила тяги зростає від 0 пропорційно часу, збільшуючись на 1200 Н за кожен секунду. Знайти залежність пройденого шляху від часу руху вагона, якщо маса вагона 10 000 кг, опір тертя сталий і дорівнює 0,02 ваги вагона, а початкова швидкість дорівнює нулю.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.26. Початкові умови руху трамвая (точки M):

$$t = \frac{0,02P}{1200} = 1,635 \text{ с}; x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0, \text{ оскільки}$$

трамвай буде рухатися за умови, що $1200t \geq 0,02P$.

Диференціальне рівняння руху трамвая (точки M)

має вигляд $m \ddot{x} = at - 0,02P$.

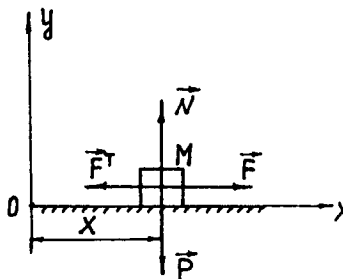


Рис. 16.26

Після інтегрування матимемо:

$$\dot{x} = \frac{0,12(t-1,635)^2}{2} + c_1; x = \frac{0,06(t-1,635)^3}{3} + c_1 t + c_2,$$

де $c_1 = 0; c_2 = 0$. Тоді закон руху трамвая $x = 0,02(t-1,635)^3$ м.

Задача 16.18. Матеріальна точка, маса якої m , здійснює прямолінійний рух під дією сили $F = F_0 \cos \omega t$, де F_0 і ω — сталі. У початковий момент точка мала швидкість $\dot{x}_0 = V_0$. Знайти рівняння руху точки.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.27. Початкові умови руху точки M : $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V_0$.

Диференціальне рівняння руху точки M має вигляд $m \ddot{x} = F_0 \cos \omega t$.

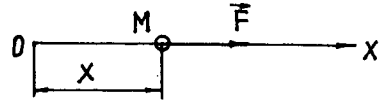


Рис. 16.27

Після інтегрування матимемо: $\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + c_1$; $x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t + c_1 t + c_2$,

де $c_1 = V_0$; $c_2 = \frac{F_0}{m\omega^2}$. Закон руху точки має вигляд $x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + V_0 t$.

Задача 16.19. Знайти найбільшу швидкість падіння кулі, маса якої $m = 10$ кг, а радіус $R = 8$ см. Сила опору повітря $R = k\sigma V^2$, де k — коефіцієнт, що залежить від форми тіла і має значення для кулі $0,24 \text{ Н}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4$; σ — площа проекції кулі на площину, перпендикулярну до напрямку її руху; V — швидкість руху.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.28. Диференціальне рівняння руху кулі (точки M) має вигляд

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = P - k\sigma \dot{x}^2.$$

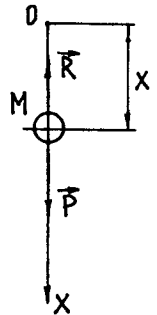


Рис. 16.28

На підставі необхідної умови існування екстремуму матимемо $\frac{d\dot{x}}{dt} = 0$,

або $P - k\sigma \dot{x}^2 = 0$, звідки $V_{\max} = \dot{x}_{\max} = \sqrt{\frac{P}{k\sigma}}$.

Задача 16.20. Сила опору води при русі корабля є пропорційною квадрату швидкості і дорівнює 1200 Н при швидкості 1 м/с. Сила упора гвинтів направлена у бік швидкості і змінюється

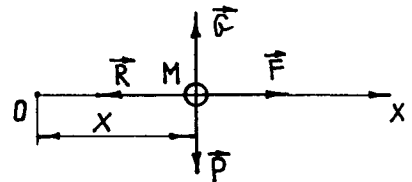


Рис. 16.29

за законом $T = 12 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{V}{33}\right)$, де V — швидкість корабля, м/с. Визначити

найбільшу швидкість, яку може розвинути корабель.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.29. Диференціальне рівняння руху корабля (точки M) має вигляд

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = 12 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{\dot{x}}{33} \right) - 1200 \dot{x}^2.$$

На підставі необхідної умови існування екстремуму матимемо $\frac{d\dot{x}}{dt} = 0$,

$$\text{або } 12 \cdot 10^5 \left(1 - \frac{\dot{x}}{33} \right) - 1200 \dot{x}^2 = 0.$$

Звідси $V_{\max} = \dot{x}_{\max} = -15,15 + \sqrt{(-15,15)^2 + 1000} = 19,9 \text{ м/с}$.

Задача 16.21. На яку висоту h і за який час t підніметься тіло, вага якого P , кинуте вертикально вгору зі швидкістю V_0 , якщо опір повітря визначається формулою $k^2 P V^2$, де V — швидкість тіла.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.30. Початкові умови

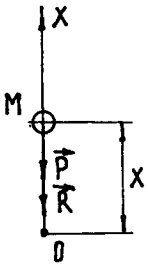


Рис. 16.30

руху тіла (точки M): $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V_0$. Диференціальне

рівняння руху тіла (точки M) має вигляд $m \ddot{x} = -P - k^2 P \dot{x}^2$.

Для визначення h диференціальному рівнянню надаємо ви-

гляду $\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\left(A + B \dot{x}^2 \right)$, де $A = g$; $B = k^2 g$.

Після інтегрування матимемо $x = -\frac{1}{2B} \ln \left| A + B \dot{x}^2 \right| + c_1$,

де $c_1 = \frac{1}{2B} \ln \left| A + B \dot{x}_0^2 \right|$. При $\dot{x} = 0$ $h = x = \frac{1}{2k^2 g} \ln \left(1 + k^2 V_0^2 \right)$.

Для визначення t диференціальному рівнянню надаємо вигляду

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\left(A + B \dot{x}^2 \right),$$

де $A = g$; $B = k^2 g$. Вираз $\left(A + B \dot{x}^2 \right)$ подаємо у вигляді $B \left(n^2 + \dot{x}^2 \right)$, де $n^2 = \frac{A}{B}$.

Після інтегрування матимемо $-\frac{1}{nB} \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}}{n} + c_2 = t$, де $c_2 = \frac{1}{nB} \operatorname{arctg} \frac{V_0}{n}$.

При $\dot{x} = 0$ $t = \frac{1}{kg} \operatorname{arctg} (kV_0)$.

Задача 16.22. Літак, маса якого дорівнює 10^4 кг, приземлюється на горизонтальне поле на лижах. Льотчик підводить літак до поверхні без вертикальної швидкості і вертикального прискорення у момент приземлення. Сила лобового опору пропорційна квадрату швидкості і дорівнює 10 Н при швидкості 1 м/с. Підйомна сила пропорційна квадрату швидкості і дорівнює 30 Н при швидкості 1 м/с. Визначити довжину l і час t пробігу літака до зупинки, взявши коефіцієнт тертя $f = 0,1$.

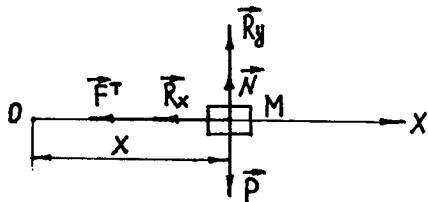


Рис. 16.31

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.31. Початкові умови руху літака

(точки M): $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{P}{30}} = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 9,81}{30}} = 57,18$ м/с, оскільки

$R_y = 30 \dot{x}^2$ і при приземленні $R_y = P$. Диференціальне рівняння руху літака

(точки M) має вигляд $m \ddot{x} = -(R_x + F^T)$, де $R_x = 10 \dot{x}^2$, $F^T = (P - R_y)f$.

Для визначення l диференціальному рівнянню надаємо вигляду

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\left(A + B \dot{x}^2\right),$$

де $A = 0,981$; $B = 0,7 \cdot 10^{-3}$.

Після інтегрування матимемо

$$x = -\frac{1}{2B} \ln \left| A + B \dot{x}^2 \right| + c_1,$$

де $c_1 = \frac{1}{2B} \ln \left| A + B \dot{x}_0^2 \right|$. При $\dot{x} = 0$ $l = x = \frac{1}{2B} \ln \frac{A + B \dot{x}_0^2}{A}$.

Для визначення t диференціальному рівнянню надаємо вигляду

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\left(A + B \dot{x}^2\right),$$

де $A = 0,981$; $B = 0,7 \cdot 10^{-3}$. Вираз $\left(A + B \dot{x}^2\right)$ подаємо у вигляді $B \left(n^2 + \dot{x}^2\right)$,

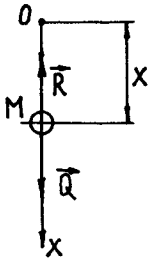
де $n^2 = \frac{A}{B}$.

Після інтегрування матимемо $-\frac{1}{nB} \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}}{n} + c_2 = t$, де $c_2 = \frac{1}{nB} \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}_0}{n}$.

При $\dot{x} = 0$ $t = \frac{1}{Bn} \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}_0}{n}$.

Задача 16.23. Підводний човен, що не має ходу, отримавши незначну від'ємну плавучість Q , почав занурюватися у глибину, рухаючись поступально. Опір води при незначній від'ємній плавучості можна взяти пропорційним першому ступеню швидкості занурювання і таким, що дорівнює kSV , де k — коефіцієнт пропорційності; S — площа горизонтальної проекції човна; V — величина швидкості занурювання. Маса човна дорівнює m . Визначити швидкість занурювання V , якщо при $t = 0$ швидкість $V_0 = 0$.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.32.



Початкові умови руху човна (точки M): $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0$.

Диференціальне рівняння руху човна (точки M) має вигляд

$$m \ddot{x} = Q - R, \text{ де } R = kS \dot{x}.$$

Для інтегрування диференціальному рівнянню надаємо ви-

гляд $\frac{d\dot{x}}{dt} = A - B\dot{x}$, де $A = \frac{Q}{m}$; $B = \frac{kS}{m}$.

Рис. 16.32

Після інтегрування матимемо $-\frac{1}{B} \ln |A - B\dot{x}| + c_1 = t$, де $c_1 = \frac{1}{B} \ln A$.

Остаточо $V = \dot{x} = \frac{Q}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kSt}{m}} \right)$.

Задача 16.24. Визначити рух важкої кульки вздовж уявного прямолінійного каналу, що проходить через центр Землі, якщо взяти, що сила притягання усередині земної кулі пропорційна відстані до точки, що рухається від центра Землі, й напрямлена до цього центра; кулька починає рух з поверхні Землі без початкової швидкості. Вказати також швидкість кульки при проходженні через центр Землі та час руху до цього центра. Радіус Землі $R = 6,37 \cdot 10^6$ м, прискорення сили тяжіння на поверхні Землі взяти $g = 9,8$ м/с².

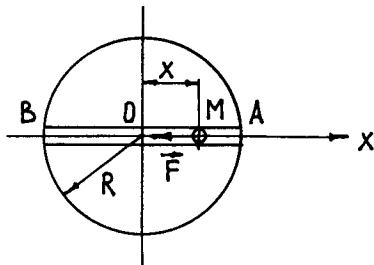


Рис. 16.33

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.33. Початкові умови руху кульки (точки M): $t = 0$; $x(0) = R$; $\dot{x}(0) = 0$.

Диференціальне рівняння руху кульки (точки M) має вигляд $m \ddot{x} = -\bar{F}$, де

$$F = \frac{mg}{R} x.$$

Для інтегрування диференціальне рівняння подаємо у вигляді $\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -a^2 x$,

$$\text{де } a = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Після інтегрування матимемо $\frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{a^2 x^2}{2} + c_1$, де $c_1 = \frac{a^2 R}{2}$. При $x = 0$

$$V = \dot{x} = -aR = -\sqrt{gR}.$$

Для визначення $x(t)$ і часу руху кульки до центра Землі рівнянню

$$\dot{x} = -a\sqrt{R^2 - x^2} \text{ надаємо вигляду } \frac{dx}{dt} = -a\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Після інтегрування матимемо $at = \arccos \frac{x}{R} + c_2$, де $c_2 = 0$. Отже,

$$x = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot t. \text{ Звідси при } x = 0 \text{ матимемо } t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Задача 16.25. У вертикальній трубі, яка розміщена в центрі круглого басейну і щільно закрита зверху, на висоті 1 м у бічній поверхні зроблені отвори, з яких викидаються похилі струмені води під різними кутами

φ до горизонту ($\varphi < \frac{\pi}{2}$); початкова швидкість струменів $V_0 = \sqrt{\frac{4g}{3 \cos \varphi}}$ м/с;

висота труби 1 м. Визначити найменший радіус R басейну, за якого уся вода, що викидається трубою, падає у басейн, якою б малою не була висота його стінок.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.34. Початкові умови руху елемента струменя води (точки M): $t = 0$;

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = V_0 \cos \varphi; y(0) = h; \dot{y}(0) = V_0 \sin \varphi.$$

Диференціальні рівняння руху елемента струменя води (точки M) мають вигляд: $m \ddot{x} = 0$;

$$m \ddot{y} = -P.$$

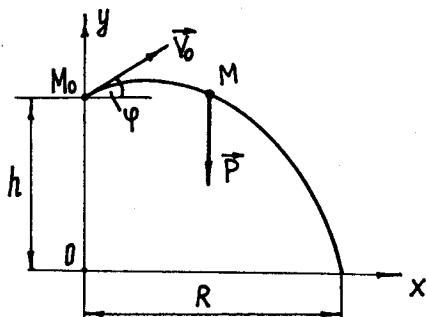


Рис. 16.34

Після інтегрування матимемо: $\dot{x} = c_1$; $x = V_0 t \cos \varphi + c_2$; $\dot{y} = -gt + c_3$;
 $y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin \varphi + c_4$, де $c_1 = V_0 \cos \varphi$; $c_2 = 0$; $c_3 = V_0 \sin \varphi$; $c_4 = h$.

Отже, рівняння руху елемента струменя води мають вигляд:

$$x = V_0 t \cos \varphi; \quad y = h + V_0 t \sin \varphi - \frac{gt^2}{2}.$$

Траєкторія руху елемента струменя води: $y = 1 + xt \operatorname{tg} \varphi - \frac{3x^2}{8 \cos \varphi}$. Звідси

$$R^2 - \frac{8}{3} R \sin \varphi - \frac{8}{3} \cos \varphi = 0, \text{ де } R = R(\varphi), \text{ оскільки } x_{\max} \text{ при } y = 0.$$

Диференціюємо останній вираз за φ , матимемо: $-R(\varphi) \frac{8}{3} \cos \varphi + \frac{8}{3} \sin \varphi = 0$,
 звідки $R(\varphi) = \operatorname{tg} \varphi$.

З рівняння $\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi \cdot \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \cos \varphi = 0$ здобудемо: $\cos \varphi = \frac{1}{3}$;
 $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, тоді $R = \operatorname{tg} \varphi = 2\sqrt{2}$ м.

16.8. Вступ. Прямолінійні коливання матеріальної точки

Коливання — це рухи або процеси, які періодично повторюються через певні проміжки часу. Коливання властиві багатьом явищам природи: пульсує випромінювання зірок; з високим ступенем періодичності обертаються планети Сонячної системи; рух Місяця спричинює припливи і відпливи на Землі; вітри збурюють коливання і хвилі на поверхні водоймищ тощо.

У техніці коливання або виконують визначені функції (маятник, коливальний контур, генератор коливання та ін.), або виникають як неминучий вияв фізичних властивостей (вібрації частин машин і споруд, нестійкість і вихрові потоки при русі тіл у рідинах і газах тощо). За деяких умов коливання можуть сягати величин, небезпечних для міцності машин і споруд або шкідливих для відбування певних процесів. Необхідність виявлення цих умов і встановлення того, яким чином коливання можна утримати в допустимих межах, є однією з причин вивчення теорії прямолінійних коливань матеріальної точки. Іншою причиною є те, що в теорії прямолінійних коливань матеріальної точки відображена друга (основна) задача динаміки матеріальної точки, тобто задача, коли за відомими силами, що діють на точку, і за початковими умовами її руху визначається закон руху точки. Отже, при вив-

ченні прямолінійного коливального руху матеріальної точки набувають навичок інтегрування диференціальних рівнянь руху точки залежно від характеру сил, що спричиняють її коливання. При цьому розрізняють коливання *вільні*, або *власні*, *згасаючі* й *змушені*.

Під час вивчення вільних коливань буде розглянутий випадок інтегрування диференціального рівняння руху матеріальної точки, коли на точку діє сила, що залежить від положення точки. При вивченні згасаючих коливань буде розглянуто випадок, коли на точку крім сили, що залежить від положення точки, буде діяти ще сила, що залежить від швидкості точки. Під час вивчення змушених коливань матеріальної точки за відсутності опору середовища буде розглянуто випадок, коли крім зазначених вище сил на матеріальну точку буде діяти ще змінна в часі періодична сила.

При вивченні змушених коливань матеріальної точки за наявності опору середовища буде розглянуто випадок інтегрування диференціального рівняння руху матеріальної точки, коли на неї одночасно діятимуть три сили: сила, що залежить від положення точки, сила опору середовища, що залежить від швидкості точки, і сила, що є періодичною функцією часу.

16.8.1. Вільні коливання матеріальної точки

Вільними, або *власними*, *коливаннями матеріальної точки називається рух точки, який відбувається під дією відновлювальної сили.*

Джерелом відновлювальної сили можуть бути різні пружні тіла, з якими взаємодіє дана точка, наприклад розтягнена або стиснена пружина. *Відновлювальна сила, величина якої пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги, називається силою пружності.* На підставі закону Гука¹ сила пружності

$$\vec{F} = -c\vec{\Delta}, \quad (16.31)$$

де c — коефіцієнт жорсткості (пружності); $\vec{\Delta}$ — відхилення точки від положення рівноваги.

Нехай точка M рухається під дією відновлювальної сили \vec{F} уздовж осі x , а точка O означає її положення рівноваги (рис. 16.35,а).

Розв'яжемо другу (основну) задачу динаміки матеріальної точки, тобто визначимо закон руху точки.

Диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь x має вигляд

$$m \ddot{x} = -cx, \quad (16.32)$$

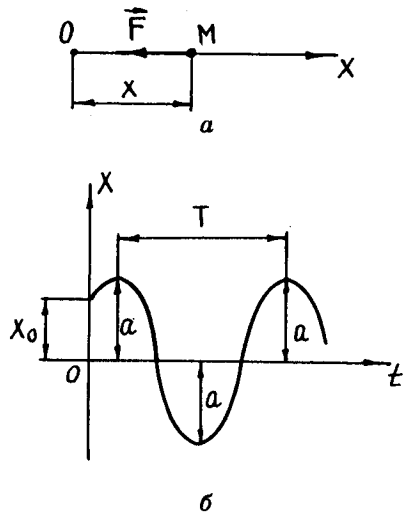


Рис. 16.35

¹ Роберт Гук (1635—1703) — англійський природознавець, член Лондонського королівського товариства.

або

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (16.33)$$

де $k^2 = \frac{c}{m}$.

Рівняння (16.33) називається *диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки*. Щоб проінтегрувати це однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, необхідно скласти характеристичне рівняння

$$r^2 + k^2 = 0 \quad (16.34)$$

і визначити його корені: $r_{1,2} = \pm ik$. Оскільки корені суто уявні, то загальний розв'язок рівняння (16.33) має вигляд

$$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt, \quad (16.35)$$

де c_1 і c_2 — сталі інтегрування.

Введемо нові сталі a і α , взявши, що $c_1 = a \cos \alpha$; $c_2 = a \sin \alpha$. Підставляючи значення c_1 і c_2 у рівняння (16.35), здобудемо

$$x = a \cos \alpha \sin kt + a \sin \alpha \cos kt,$$

або

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (16.36)$$

Таким чином, під дією відновлювальної сили матеріальна точка рухається за синусоїдним законом, тобто здійснює гармонічний коливальний рух (рис. 16.35,б).

У рівнянні (16.36) a — амплітуда коливання, тобто абсолютна величина найбільшого відхилення точки від її положення рівноваги; $(kt + \alpha)$ — фаза коливання, де α — початкова фаза коливання; k — колова частота коливання (власна частота) — кількість коливань матеріальної точки за 2π секунд:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (16.37)$$

Як видно з рівності (16.37), колова частота не залежить від початкових умов руху матеріальної точки.

Амплітуда і початкова фаза вільних коливань матеріальної точки визначаються на підставі початкових умов руху точки.

Визначимо швидкість руху точки, тобто продиференціюємо рівняння (16.36) за часом:

$$\dot{x} = ak \cos(kt + \alpha). \quad (16.38)$$

За початковими умовами руху точки — при $t = 0$; $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ — з рівнянь (16.36) і (16.38) визначимо початкову фазу і амплітуду вільних коливань матеріальної точки (радимо читачу зробити це самостійно):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}; \quad a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{k}\right)^2}. \quad (16.39)$$

Періодом коливання T матеріальної точки називається найменший проміжок часу, по закінченні якого точка має ту саму координату x і ту саму проекцію швидкості \dot{x} . Оскільки значення синуса повністю повторюється через 2π , то по закінченні періоду коливання фаза коливання також змінюється на 2π . Отже, з рівняння (16.36) матимемо

$$[k(t+T) + \alpha] - (kt + \alpha) = 2\pi,$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (16.40)$$

З рівності (16.40) випливає, що період вільних коливань матеріальної точки не залежить від початкових умов руху точки.

Величина ν , обернена до періоду коливання, тобто $\nu = \frac{1}{T}$, визначає кількість коливань матеріальної точки за одну секунду і називається частотою коливань.

Частота коливань ν у системі СІ вимірюється в герцах [Гц].

З розглянутого можна зробити такі загальні висновки.

1. Вільні (власні) коливання матеріальної точки повністю визначаються амплітудою, коловою частотою, початковою фазою і періодом коливання.
2. Вільні коливання матеріальної точки відбуваються за синусоїдним законом, тобто вони є гармонічними.
3. Амплітуда та початкова фаза вільних коливань залежать від початкових умов коливання.
4. Колова частота і період вільних коливань матеріальної точки не залежать від початкових умов коливання, а визначаються властивістю відновлювальної сили (коефіцієнтом жорсткості c і масою точки m).
5. Вільні коливання матеріальної точки можуть виникнути тільки за початкових умов, відмінних від нульових.
6. Вільні коливання матеріальної точки, якщо вони виникли, продовжуються під дією відновлювальної сили без зміни параметрів коливання як завгодно довго, поки інші сили не змінять характер цих коливань.

16.9. Згасаючі коливання матеріальної точки

Розглянемо вплив середовища на вільні коливання матеріальної точки.

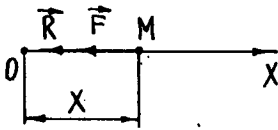


Рис. 16.36

Нехай на матеріальну точку M окрім відновлювальної сили $\vec{F} = -c\vec{\Delta}$ буде діяти ще сила опору середовища \vec{R} (рис. 16.36). Візьмемо, що величина сили \vec{R} пропорційна першому ступеню швидкості точки. Напрявлена сила \vec{R} у протилежний від вектора швидкості точки \vec{V} бік

$$\vec{R} = -b\vec{V}, \quad (16.41)$$

де b — коефіцієнт опору середовища.

Диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь x має вигляд

$$m \ddot{x} = -cx - b \dot{x},$$

або

$$\ddot{x} + 2h \dot{x} + k^2 x = 0, \quad (16.42)$$

де $h = \frac{b}{2m}$ — коефіцієнт, що характеризує властивості середовища з опором;

$$k^2 = \frac{c}{m}.$$

Як буде доведено далі, рух точки, що описується рівнянням (16.42), є згасаючим, тому рівняння (16.42) називається *диференціальним рівнянням згасаючих коливань*.

Для інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (16.42) складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\begin{aligned} r^2 + 2hr + k^2 &= 0; \\ r_{1,2} &= -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (16.43)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння залежить від коренів характеристичного рівняння, тобто рівностей (16.43). Тут можуть бути три випадки.

Випадок 1. $h < k$ (малий опір середовища). Корені (16.43)

$$r_{1,2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2}. \quad (16.44)$$

Загальний розв'язок рівняння (16.42) має вигляд

$$x = e^{-ht} (c_1 \sin k^* t + c_2 \cos k^* t), \quad (16.45)$$

де c_1 і c_2 — сталі інтегрування; $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$.

Випадок 2. $h > k$ (великий опір середовища). Корені (16.43)

$$r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}. \quad (16.46)$$

Загальний розв'язок рівняння (16.42) має вигляд

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad (16.47)$$

де c_1 і c_2 — сталі інтегрування; e — число: $e = 2,718$.

Випадок 3. $h = k$ (граничний випадок). Корені (16.43)

$$r_{1,2} = -h. \quad (16.48)$$

Загальний розв'язок рівняння (16.42) має вигляд

$$x = (c_1 t + c_2) e^{-ht}, \quad (16.49)$$

де c_1 і c_2 — сталі інтегрування.

З рівнянь (16.47) і (16.49) випливає, що у випадках, коли $h > k$ і $h = k$, рух матеріальної точки не має коливального характеру, точка здійснює так званий аперіодичний згасаючий рух (рис. 16.37). Аналіз аперіодичного згасаючого руху матеріальної точки виходить за рамки курсу, що розглядається.

Розглянемо докладно випадок малого опору середовища. Перетворимо загальний розв'язок (16.45) у більш зручний для аналізу вигляд. Для цього введемо нові сталі a і α за допомогою формул:

$c_1 = a \cos \alpha$; $c_2 = a \sin \alpha$. Підставляючи ці значення в рівняння (16.45), здобуємо

$$x = a e^{-ht} (\cos \alpha \sin k^* t + \sin \alpha \cos k^* t),$$

або

$$x = a e^{-ht} \sin(k^* t + \alpha), \quad (16.50)$$

де $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$.

З рівняння (16.50) випливає, що рух точки має коливальний характер, оскільки координата x набуває або додатного, або від'ємного значення. При цьому множник e^{-ht} показує, що коливання будуть згасати (рис. 16.38).

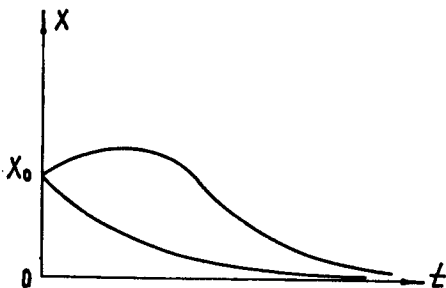


Рис. 16.37

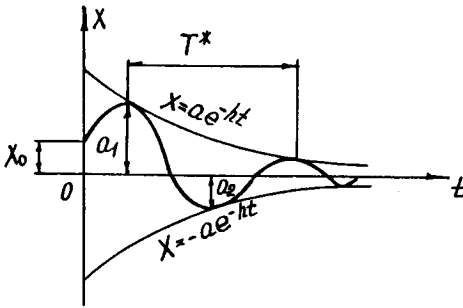


Рис. 16.38

Амплітуда і початкова фаза згасаючих коливань матеріальної точки визначаються на основі початкових умов руху точки.

Визначимо швидкість руху точки, тобто продиференціюємо рівняння (16.50) за часом:

$$\dot{x} = -ahe^{-ht} \sin(k^*t + \alpha) + ak^*e^{-ht} \cos(k^*t + \alpha). \quad (16.51)$$

За початковими умовами руху точки — $t = 0$; $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ — з рівнянь (16.50) і (16.51) визначимо початкову фазу і амплітуду вільних коливань матеріальної точки (радимо читачу зробити це самостійно):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k^* x_0}{\dot{x}_0 + hx_0}; \quad a = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + hx_0)^2}{(k^*)^2}}. \quad (16.52)$$

З рис. 16.38 випливає, що рух матеріальної точки не є періодичним, оскільки величина ae^{-ht} зменшується за експоненціальним законом.

За аналогією з вільними коливаннями матеріальної точки при вивченні згасаючих коливань також упроваджують поняття колової частоти коливання, періоду й амплітуди коливання.

Колова частота згасаючих коливань матеріальної точки визначається за формулою

$$k^* = \sqrt{k^2 - h^2}. \quad (16.53)$$

Період згасаючих коливань матеріальної точки

$$T^* = \frac{2\pi}{k^*} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \left(\frac{h}{k}\right)^2}} \approx T. \quad (16.54)$$

Формула (16.54) показує, що період згасаючих коливань матеріальної точки дещо більший за період вільних коливань точки [див. формулу (16.40)]. Проте при малому опорі середовища можна вважати, що період T^* дорівнює періоду вільних коливань T .

Амплітуда згасаючих коливань $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ зменшується за кожний період за законом геометричної прогресії, знаменник якої

$$q = \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-h(t_i+T^*)} \sin[k^*(t_i+T^*) + \alpha]}{ae^{-ht_i} \sin(k^*t_i + \alpha)} = \frac{ae^{-h(t_i+T^*)}}{ae^{-ht_i}} = e^{-hT^*}. \quad (16.55)$$

Величина q називається *декрементом коливання*. *Логарифмічним декрементом коливання називається логарифм співвідношення двох суміжних амплітуд, які відрізняються за часом на T^** :

$$\ln \frac{a_i}{a_{i+1}} = hT^*. \quad (16.56)$$

Отже, малий опір середовища, в якому здійснюються коливання, приводить до незначного збільшення періоду коливання матеріальної точки порівняно з випадком вільних коливань і до зменшення амплітуди коливання з часом. Зменшення амплітуди коливання відбувається за експоненціальним законом.

16.10. Змушені коливання матеріальної точки за відсутності опору середовища. Резонанс

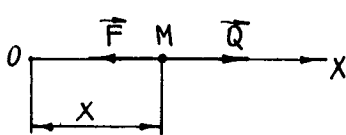


Рис. 16.39

Розглянемо рух матеріальної точки M під дією відновлювальної сили \bar{F} і збурювальної сили \bar{Q} (рис.16.39):

$$\bar{Q} = \bar{H} \sin(pt + \beta), \quad (16.57)$$

де \bar{H} — максимальна збурювальна сила; p — частота збурювальної сили; β — початкова фаза збурювальної сили.

Диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь x має вигляд

$$m \ddot{x} = -cx + H \sin(pt + \beta),$$

або

$$\ddot{x} + k^2 x = H_0 \sin(pt + \beta), \quad (16.58)$$

де $k^2 = \frac{c}{m}$; $H_0 = \frac{H}{m}$.

Рівняння (16.58) називається *диференціальним рівнянням змушених коливань матеріальної точки за відсутності опору середовища*.

Загальний розв'язок рівняння (16.58) складається із загального розв'язку однорідного рівняння $\ddot{x} + k^2 x = 0$ і частинного розв'язку рівняння (16.58):

$$x = x_1 + x_2. \quad (16.59)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння такий (див. параграф 16.8):

$$x_1 = a \sin(kt + \alpha). \quad (16.60)$$

З теорії розв'язання неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами відомо: якщо права частина рівняння має вигляд

$$f(t) = M \sin(\varphi t + \delta), \quad (16.61)$$

то у випадку, коли φi не є коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок необхідно шукати у вигляді

$$x_2 = A \sin(\varphi t + \gamma), \quad (16.62)$$

де A і γ — сталі.

Якщо φi є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок необхідно шукати у вигляді

$$x_2 = At \sin(\varphi t + \gamma). \quad (16.63)$$

Нехай частоти вільного коливання матеріальної точки і збурювальної сили не збігаються, тобто $k \neq p$, тоді корені характеристичного рівняння $r^2 + k^2 = 0$ не дорівнюють pi , отже, частинний розв'язок рівняння (16.58) шукаємо у вигляді

$$x_2 = A \sin(pt + \gamma). \quad (16.64)$$

Диференціюємо двічі вираз (16.64) за часом:

$$\dot{x}_2 = Ap \cos(pt + \gamma);$$

$$\ddot{x}_2 = -Ap^2 \sin(pt + \gamma).$$

Значення \ddot{x}_2 і x_2 підставляємо в рівняння (16.58):

$$-Ap^2 \sin(pt + \gamma) + Ak^2 \sin(pt + \gamma) = H_0 \sin(pt + \beta).$$

Введемо позначення $pt + \gamma = \delta$; тоді $pt = \delta - \gamma$ і $pt + \beta = \delta - \gamma + \beta = \delta + (\beta - \gamma)$.
З урахуванням розглянутого останнє рівняння набирає вигляду

$$-Ap^2 \sin \delta + Ak^2 \sin \delta = H_0 \sin \delta \cos(\beta - \gamma) + H_0 \cos \delta \sin(\beta - \gamma).$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\sin \delta$ і $\cos \delta$ в останньому рівнянні, здобудемо:

$$-Ap^2 + Ak^2 = H_0 \cos(\beta - \gamma); H_0 \sin(\beta - \gamma) = 0.$$

Звідси визначаємо A і γ :

$$\sin(\beta - \gamma) = 0; (\beta - \gamma) = 0; \gamma = \beta; A = \frac{H_0}{k^2 - p^2}.$$

Значення A і γ підставляємо в рівняння (16.64):

$$x_2 = \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \beta). \quad (16.65)$$

Підставляючи вирази (16.60) і (16.65) у рівність (16.59), матимемо

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{H_0}{k^2 - p^2} \sin(pt + \beta). \quad (16.66)$$

Сталі a і α в рівнянні (16.66) визначаються на підставі початкових умов руху точки. Отже, рух матеріальної точки при дії на точку відновлювальної і збудовальної сил складається з двох гармонічних коливань: вільних коливань з частотою k і змущених коливань з частотою збудовальної сили p .

Проведемо аналіз змущених коливань, які не залежать від початкових умов руху, тобто другого доданка в рівнянні (16.66).

Початкова фаза змущених коливань збігається з початковою фазою збудовальної сили. Фаза змущених коливань $(pt + \beta)$ залежить від p і k . Якщо частота власних коливань більша за частоту збудовальної сили $k > p$, то фаза змущених коливань збігається з фазою збудовальної сили. Якщо $p > k$, то має місце зсув фаз на величину π , тобто фаза змущених коливань відстає від фази збудовальної сили на величину π .

Амплітуда змущених коливань не залежить від початкових умов руху точки і становить

$$A = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|}. \quad (16.67)$$

Перетворимо вираз (16.67), враховуючи, що $k^2 = \frac{c}{m}$, $H_0 = \frac{H}{m}$ і $x_{\text{cr}} = \frac{H}{c}$ — величина відхилення точки від положення рівноваги при дії на неї максимальної збудовальної сили:

$$A = \frac{H_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{H}{m|k^2 - p^2|} = \frac{x_{\text{cr}} c}{m|k^2 - p^2|} = \frac{k^2 x_{\text{cr}}}{|k^2 - p^2|} = \frac{x_{\text{cr}}}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|}. \quad (16.68)$$

Введемо коефіцієнт динамічності μ — величину, що показує, у скільки разів амплітуда коливання більша, ніж відхилення точки від положення рівноваги, при дії на неї максимальної збурювальної сили:

$$\mu = \frac{A}{x_{\text{ст}}} = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|}. \quad (16.69)$$

З рівності (16.69) випливає: якщо відношення $\frac{p}{k}$ прямує до одиниці, то

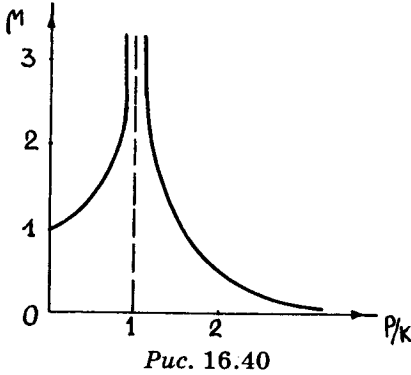


Рис. 16.40

відбувається різка зміна коефіцієнта динамічності. На рис. 16.40 зображено графік

зміни коефіцієнта динамічності зі зміною $\frac{p}{k}$.

Визначимо амплітуду змущених коливань при $p = k$. Як було зазначено вище, при $p = k$ частинний розв'язок рівняння (16.58) необхідно шукати у вигляді

$$x_2 = At \sin(pt + \gamma). \quad (16.70)$$

Диференціюємо двічі вираз (16.70) за часом:

$$\dot{x}_2 = A \sin(pt + \gamma) + Atp \cos(pt + \gamma);$$

$$\ddot{x}_2 = Ap \cos(pt + \gamma) + Ap \cos(pt + \gamma) - Atp^2 \sin(pt + \gamma).$$

Значення \ddot{x}_2 і x_2 підставляємо в рівняння (16.58):

$$Ap \cos(pt + \gamma) + Ap \cos(pt + \gamma) - Atp^2 \sin(pt + \gamma) + Atk^2 \sin(pt + \gamma) = H_0 \sin(pt + \beta).$$

Введемо позначення $pt + \gamma = \delta$; тоді $pt = \delta - \gamma$ і $pt + \beta = \delta - \gamma + \beta = \delta + (\beta - \gamma)$.

З урахуванням розглянутого рівняння набуває вигляду

$$2Ap \cos \delta - Atp^2 \sin \delta + Atk^2 \sin \delta = H_0 \sin \delta \cos(\beta - \gamma) + H_0 \cos \delta \sin(\beta - \gamma).$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\sin \delta$ і $\cos \delta$ та зважаючи на те що $p = k$, здобудемо:

$$2Ap = H_0 \sin(\beta - \gamma); \quad H_0 \cos(\beta - \gamma) = 0.$$

Звідси визначаємо A і γ :

$$\cos(\beta - \gamma) = 0; \quad \beta - \gamma = \frac{\pi}{2}; \quad \gamma = \beta - \frac{\pi}{2}; \quad A = \frac{H_0}{2p}.$$

Значення A і γ підставляємо в рівняння (16.70):

$$x_2 = \frac{H_0}{2p} t \sin\left(pt + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{H_0 t}{2p} \cos(pt + \beta). \quad (16.71)$$

З виразу (16.71) випливає, що при $p = k$ амплітуда змушених коливань збільшується пропорційно часу:

$$A = \frac{H_0}{2p} t. \quad (16.72)$$

Явище, що виникає при збіганні частоти збурювальної сили і частоти власних коливань, називається **резонансом**. Графік руху матеріальної точки при резонансі зображено на рис. 16.41.

Частота і період змушених коливань при резонансі дорівнюють частоті й періоду вільних коливань точки. Фаза змушених коливань при резонансі відстає від

фази збурювальної сили на величину $\frac{\pi}{2}$.

З розглянутого можна зробити такі загальні висновки.

1. Змушені коливання матеріальної точки за відсутності опору середовища відбуваються з частотою і початковою фазою збурювальної сили.

2. Змушені коливання матеріальної точки за відсутності опору середовища відбуваються за гармонічним законом збурювальної сили і не залежать від початкових умов коливання.

3. При $k > p$ фаза змушених коливань матеріальної точки за відсутності опору середовища збігається з фазою збурювальної сили; при $p > k$ має місце зсув фаз (відставання) на величину π .

4. При $p = k$ виникає резонанс. При резонансі амплітуда змушених коливань матеріальної точки за відсутності опору середовища зростає з часом за лінійним законом.

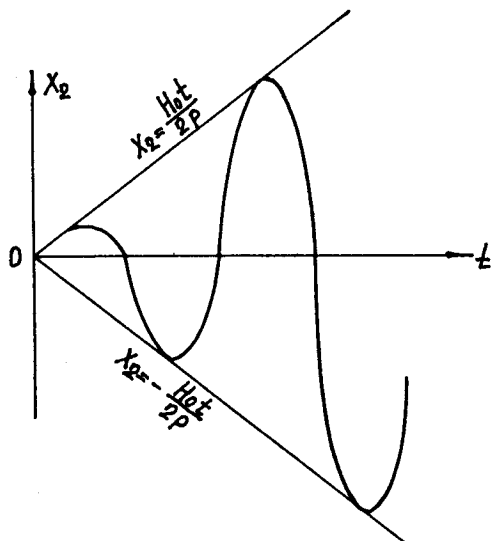


Рис. 16.41

Частота і період змушених коливань за відсутності опору при резонансі дорівнюють частоті й періоду вільних коливань матеріальної точки. Фаза змушених коливань при резонансі відстає від фази збурювальної сили на величину $\frac{\pi}{2}$.

16.11. Змушені коливання матеріальної точки за наявності опору середовища

Розглянемо вплив середовища на змушені коливання матеріальної точки.

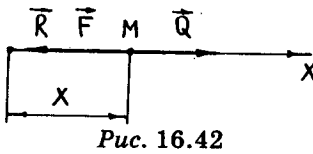


Рис. 16.42

Нехай на матеріальну точку окрім відновлювальної сили $\vec{F} = -c\vec{\Delta}$ і збурювальної сили $\vec{Q} = \vec{H} \sin(pt + \beta)$ діятиме ще сила опору середовища $\vec{R} = -b\vec{V}$ (рис. 16.42). Тоді диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь x матиме вигляд

$$m \ddot{x} = -cx - b \dot{x} + H \sin(pt + \beta),$$

або

$$\ddot{x} + 2h \dot{x} + k^2 x = H_0 \sin(pt + \beta), \quad (16.73)$$

$$\text{де } h = \frac{b}{2m}; \quad k^2 = \frac{c}{m}; \quad H_0 = \frac{H}{m}.$$

Рівняння (16.73) називається *диференціальним рівнянням змушених коливань матеріальної точки за наявності опору середовища*.

Загальний розв'язок рівняння (16.73) складається із загального розв'язка однорідного рівняння $\ddot{x} + 2h \dot{x} + k^2 x = 0$ і частинного розв'язку рівняння (16.73):

$$x = x_1 + x_2. \quad (16.74)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння при $h < k$ (див. параграф 16.9) такий:

$$x_1 = ae^{-ht} \sin(k^*t + \alpha), \quad (16.75)$$

де a і α — сталі інтегрування.

Частинний розв'язок рівняння (16.73) будемо шукати у вигляді (див. параграф 16.10)

$$x_2 = A \sin(pt + \gamma), \quad (16.76)$$

де A і γ — сталі.

Диференціюємо двічі вираз (16.76) за часом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= Ap \cos(pt + \gamma); \\ \ddot{x}_2 &= -Ap^2 \sin(pt + \gamma).\end{aligned}$$

Значення \ddot{x}_2 , \dot{x}_2 і x_2 підставляємо в рівняння (16.73):

$$-Ap^2 \sin(pt + \gamma) + 2hAp \cos(pt + \gamma) + Ak^2 \sin(pt + \gamma) = H_0 \sin(pt + \beta).$$

Введемо позначення $pt + \gamma = \delta$; тоді $pt = \delta - \gamma$ і $pt + \beta = \delta - \gamma + \beta = \delta + (\beta - \gamma)$.

З урахуванням розглянутого рівняння набирає вигляду

$$-Ap^2 \sin \delta + 2hAp \cos \delta + Ak^2 \sin \delta = H_0 \sin \delta \cos(\beta - \gamma) + H_0 \cos \delta \sin(\beta - \gamma).$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\sin \delta$ і $\cos \delta$ в останньому рівнянні, здобудемо:

$$-Ap^2 + Ak^2 = H_0 \cos(\beta - \gamma); \quad 2hAp = H_0 \sin(\beta - \gamma).$$

Звідси визначаємо A і γ :

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{2hp}{k^2 - p^2}; \quad A = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}}. \quad (16.77)$$

Значення A і γ підставляємо у рівняння (16.76):

$$x_2 = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}} \sin(pt + \gamma), \quad (16.78)$$

де γ визначається з першого виразу (16.77).

Підставляючи вирази (16.75) і (16.78) у рівність (16.74), матимемо

$$x = ae^{-ht} \sin(k^*t + \alpha) + \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}} \sin(pt + \gamma). \quad (16.79)$$

Сталі a і α в рівнянні (16.79) визначаються на підставі початкових умов руху точки. Таким чином, рух матеріальної точки при дії на точку відновлювальної сили, збурювальної сили і сили опору середовища складається з двох коливань: згасаючих коливань із частотою $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$ і змушених коливань. Змушені коливання не згасають. Частота змушених коливань дорівнює частоті збурювальної сили. Період змушених коливань

$$T = \frac{2\pi}{p}. \quad (16.80)$$

Фаза змушених коливань матеріальної точки відстає від фази збудовальної сили на величину $(\beta - \gamma)$, що називається *зсувом фази*. Величина зсуву фази визначається за формулою

$$\operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{2hp}{k^2 - p^2} = \frac{2 \frac{h}{k} \frac{p}{k}}{1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2}. \quad (16.81)$$

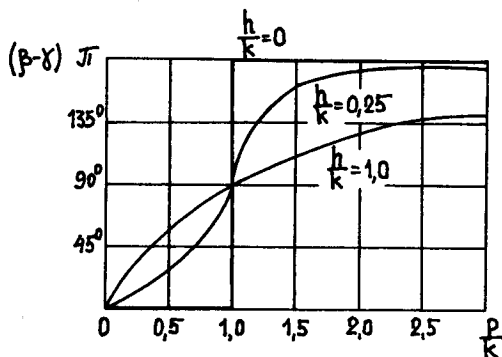


Рис. 16.43

З формули (16.81) випливає, що $(\beta - \gamma)$ залежить від відношення p/k , що характеризує збудовальну силу, і від відношення h/k , що характеризує опір середовища. На рис. 16.43 наведено залежність зсуву фази змушених коливань відносно збудовальної сили залежно від p/k і h/k .

Амплітуда змушених коливань визначається за формулою

$$A = \frac{H_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}}. \quad (16.82)$$

Беручи до уваги те, що $H_0 = \frac{H}{m}$, $k^2 = \frac{c}{m}$ і $x_{\text{ст}} = \frac{H}{c}$, перетворимо вираз (16.82) так:

$$A = \frac{x_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{h^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}}. \quad (16.83)$$

Введемо коефіцієнт динамічності, тобто величину, що показує, у скільки разів амплітуда коливання більша, ніж відхилення точки від положення рівноваги, при дії на неї максимальної збудовальної сили:

$$\mu = \frac{A}{x_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4 \frac{h^2}{k^2} \cdot \frac{p^2}{k^2}}}. \quad (16.84)$$

На рис. 16.44 зображено криві, що визначають залежність коефіцієнта динамічності від відношення p/k . Кожній з кривих відповідає певне значення h/k .

З рис. 16.44 випливає, що коефіцієнт динамічності зі зростанням опору середовища зменшується. При $\frac{p}{k}$, в

околі $\frac{p}{k} = 1$, вплив опору середовища на коефіцієнт динамічності істотний.

Якщо за відсутності опору середовища явище резонансу виявляється у прямуванні коефіцієнта динамічності

до нескінченності (криві $\frac{h}{k} = 0$ на рис. 16.40), то за наявності опору середовища

коефіцієнт динамічності має скінченну величину (криві $\frac{h}{k} \neq 0$ на рис. 16.44).

Амплітуда коливання за наявності опору середовища при резонансі, тобто при $p = k$, на підставі формули (16.82)

$$A = \frac{H_0}{2hp}. \tag{16.85}$$

Визначимо, за якої частоти збудовувальної сили амплітуда коливання, що визначається за формулою (16.82), має максимальне значення. Для цього продиференціюємо вираз $(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2$ за p і отриманий результат прирівняємо до нуля:

$$\frac{d}{dp} \left[(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2 \right] = 2(k^2 - p^2)(-2p) + 4h^2 \cdot 2p = 0,$$

звідки матимемо корені: $p_1 = 0$; $p_2 = \sqrt{k^2 - 2h^2}$; $p_3 = -\sqrt{k^2 - 2h^2}$.

Оскільки $p > 0$, то корені p_1 і p_3 відкидаємо. Знайдемо другу похідну від виразу $(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2$:

$$\frac{d^2}{dp^2} \left[(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2 \right] = 8h^2 + 12p^2 - 4k^2.$$

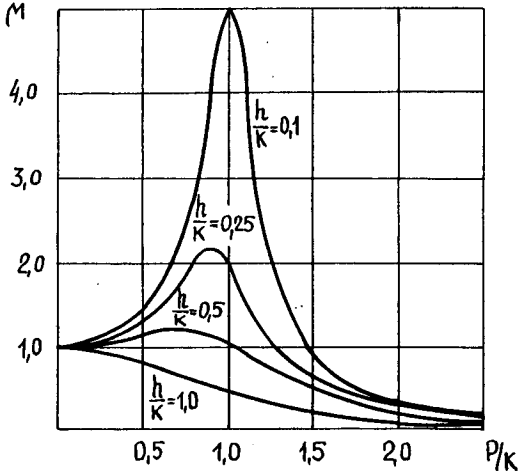


Рис. 16.44

Для $p_2 = \sqrt{k^2 - 2h^2}$ при $\frac{h}{k} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{d^2}{dp^2} \left[(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2 \right] > 0,$$

і, отже, вираз $(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2$ має мінімум, а амплітуда — максимум.

Підставляючи значення p_2 у формулу (16.82), здобудемо максимальне значення амплітуди при даному опорі середовища:

$$A_{\max} = \frac{H_0}{2h\sqrt{k^2 - h^2}}. \quad (16.86)$$

Максимальна амплітуда змущених коливань може мати місце тільки за умови, що $\frac{h}{k} < \frac{\sqrt{2}}{2}$; вона визначається за формулою (16.86).

З розглянутого можна зробити такі загальні висновки.

1. Змущені коливання матеріальної точки за наявності опору середовища відбуваються з частотою збурювальної сили і не залежать від початкових умов коливань. Отже, їх неможливо збурити тільки за допомогою початкових умов. Щоб коливання виникли, має діяти збурювальна сила.

2. Амплітуда і зсув фаз змущених коливань матеріальної точки за наявності опору середовища залежать від частоти вільних коливань k , частоти збурювальної сили p і коефіцієнта, що характеризує властивості середовища з опором h . Чим більший коефіцієнт h за інших рівних умов, тим менша амплітуда змущених коливань матеріальної точки.

3. Зсув фаз при резонансі $\left(\frac{p}{k} = 1\right)$ дорівнює $\pi/2$ при будь-яких відношеннях h/k .

4. У випадку резонансу амплітуда змущених коливань матеріальної точки за наявності опору середовища не зростає пропорційно часу, як це відбувається при змущених коливаннях матеріальної точки за відсутності опору середовища, а має скінченну величину. Для цього достатньо наявності будь-якого малого опору середовища.

16.12. Методика розв'язання задач про коливальний рух матеріальної точки. Приклади розв'язання задач і типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю

Розв'язання задач про коливальний рух матеріальної точки слід виконувати в такій послідовності:

- 1) встановити систему відліку з початком у положенні статичної рівноваги матеріальної точки;
- 2) записати початкові умови руху матеріальної точки;
- 3) прикласти до точки всі активні сили;
- 4) користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, умовно відкинути в'язь і замінити її вплив на матеріальну точку реакцією в'язі;
- 5) скласти диференціальне рівняння руху точки в проекції на відповідну вісь;
- 6) проінтегрувати диференціальне рівняння руху матеріальної точки і за початковими умовами руху точки визначити сталі інтегрування;
- 7) з одержаних рівнянь визначити шукані величини і проаналізувати отримані результати.

Для визначення колової частоти k і k^* , періоду колювання T і T^* немає потреби в інтегруванні відповідних диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. Достатньо тільки скласти ці рівняння і визначити коефіцієнти при x і при \dot{x} .

При складанні диференціального рівняння руху матеріальної точки точку необхідно зображати на рисунку в довільному положенні, що відповідає додатній координаті. При цьому припускають, що матеріальна точка рухається у бік збільшення цієї координати.

Розглядаючи задачу про вільні колювання матеріальної точки за відсутності сили опору середовища, можна розв'язати задачу в загальному вигляді і потім підставити в нього числові значення. Якщо розглядається задача про згасаючі колювання, то необхідно підставити числові значення в диференціальне рівняння та визначити h і k , оскільки залежно від їх співвідношення доводиться записувати загальний розв'язок рівняння або в тригонометричних, або в гіперболічних функціях.

Приклад 16.4. Вантаж, вага якого Q , падаючи з висоти $h = 1$ м без початкової швидкості, ударяється об середину пружної горизонтальної балки перекриття продуктового цеху цукрового заводу (рис. 16.45). Кінці балки закріплено. Скласти рівнян-

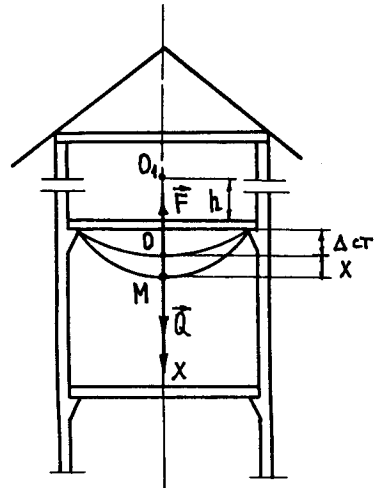


Рис. 16.45

ня подальшого руху вантажу на балці, відносячи рух до осі, проведеної вертикально з положення статичної рівноваги вантажу на балці, якщо статичний прогин балки в її середині при зазначеному навантаженні дорівнює 0,5 см; масою балки знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо рух вантажу, який вважатимемо матеріальною точкою (точка M на рис. 16.45). На вантаж діють сила ваги \bar{Q} і сила пружності \bar{F} . Нехай M_0 — початкове положення вантажу, за якого балка не має прогину. Вісь Ox напрямляємо по вертикальній прямій, уздовж якої рухається вантаж, униз. Початок координат виберемо в положенні статичної рівноваги вантажу на балці.

Записуємо початкові умови руху вантажу (точки M): $t = 0$; $x(0) = -\Delta_{\text{ст}}$; $\dot{x}(0) = \sqrt{2gh}$, оскільки кінцева швидкість вантажу в момент його удару об балку дорівнює початковій швидкості руху вантажу разом з балкою.

Складемо диференціальне рівняння руху вантажу (точки M) у проекції на вісь x :

$$m \ddot{x} = Q - F, \text{ або } \frac{Q}{g} \ddot{x} = Q - F.$$

Беручи до уваги значення сили пружності $F = c(\Delta_{\text{ст}} + x)$, останнє рівняння можна записати так:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (1)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{cg}{Q}.$$

Характеристичним рівнянням для рівняння (1) буде

$$r^2 + k^2 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є

$$r_{1,2} = \pm ik.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1) такий:

$$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt. \quad (2)$$

Визначимо швидкість руху вантажу в довільний момент часу t (диференціюємо за часом рівність (2):

$$\dot{x} = kc_1 \cos kt - kc_2 \sin kt. \quad (3)$$

За початковими умовами руху вантажу визначаємо сталі інтегрування:

$$c_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{k}; \quad c_2 = -\Delta_{\text{ст}}. \quad (4)$$

Отже, закон коливального руху вантажу на підставі рівностей (2) і (4) матиме вигляд

$$x = \frac{\sqrt{2gh}}{k} \sin kt + \Delta_{\text{ст}} \sin kt.$$

Визначаємо k і c_1 :

$$k = \sqrt{\frac{cg}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,005}} = 44,3 \frac{1}{\text{с}}; \quad c_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{k} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81}}{44,3} = 0,1 \text{ м},$$

де $\frac{Q}{c} = \Delta_{\text{ст}}.$

Підставляючи числові значення у вираз (2), знайдемо

$$x = 0,1 \sin 44,3t - 0,005 \cos 44,3t \text{ м}.$$

Період коливань T визначаємо за формулою

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{44,3} = 0,14 \text{ с}.$$

Щоб визначити амплітуду коливань, перетворимо вираз (2): введемо замість c_1 і c_2 нові сталі інтегрування A і α :

$$c_1 = A \cos \alpha; \quad c_2 = A \sin \alpha. \quad (5)$$

Враховуючи рівність (5), рівняння (2) перепишемо так:

$$x = A \sin(kt + \alpha).$$

Згідно з формулами (5) амплітуда і початкова фаза відповідно такі:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,005^2} = 0,1 \text{ м} = 10 \text{ см};$$

$$\alpha = \arctg \frac{0,1}{0,005} = \arctg 20 = 87,14^\circ.$$

Зазначимо, що порівняно зі статичним відхиленням вантажу від положення статичної рівноваги динамічне відхилення в 20 разів більше.

Приклад 16.5. При рівномірному спуску платформи, навантаженої мішками з цукром вагою $P = 50$ кН, зі швидкістю $V = 1,5$ м/с (рис. 16.46) раптово

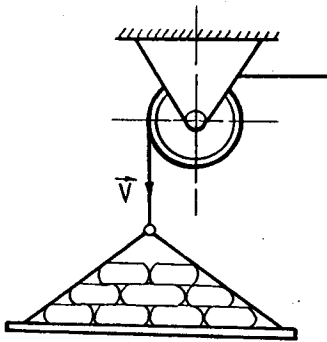


Рис. 16.46

відбулася затримка верхнього кінця троса, на якому спускалася платформа, оскільки трос затиснуло в обоймі блока. Затримка троса спричинила коливання платформи на тросі. Нехтуючи масою троса і вважаючи, що сила опору повітря пропорційна швидкості $\vec{R} = -b\vec{V}$, де b — додатна стала величина, визначити коефіцієнт h , який характеризує силу опору середовища, найбільше зусилля в тросі при коливанні платформи, а також зусилля в тросі після п'яти повних коливань платформи, якщо період коливання $T^* = 0,21$ с і коефіцієнт жорсткості троса $c = 4,6 \cdot 10^6$ Н/м.

Розв'язання. Розглянемо коливання платформи, вважаючи її матеріальною точкою M , підвішеною на пружині, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює жорсткості троса, тобто $c = 4,6 \cdot 10^6$ Н/м.

Примітка. При розв'язанні практичних задач про коливання матеріальної точки трапляються випадки, коли матеріальна точка одночасно спирається на кілька пружин або підвішена до них (рис. 16.47).

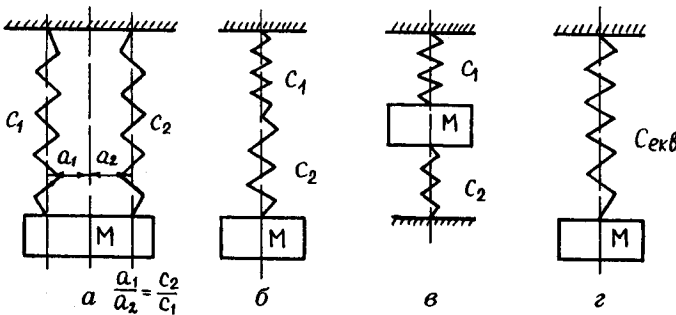


Рис. 16.47

При розрахунках ці пружини замінюють однією пружиною з еквівалентною жорсткістю — $c_{\text{екв}}$ (рис. 16.47, г).

У випадку двох паралельних пружин (рис. 16.47, а)

$$c_{\text{екв}} = c_1 + c_2.$$

У випадку двох послідовних пружин (рис. 16.47, б)

$$c_{\text{екв}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}.$$

У випадку, коли точка лежить між двома пружинами (рис. 16.47, в),

$$c_{\text{екв}} = c_1 + c_2.$$

На матеріальну точку M діють сила ваги \vec{P} , сила опору середовища \vec{R} і сила пружності \vec{F} . Початок координат O системи відліку виберемо в положенні статичної рівноваги матеріальної точки M на пружині. Вісь x напрямляємо по вертикальній прямій, уздовж якої рухається точка M , униз (рис. 16.48).

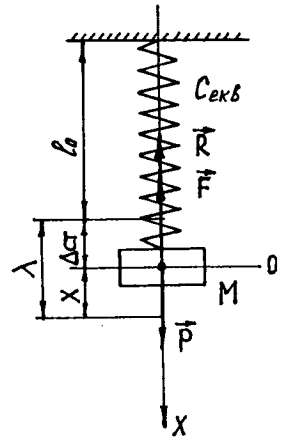


Рис. 16.48

На рис. 16.48 l_0 — довжина недеформованої пружини; $\Delta_{ст}$ — статична деформація пружини, тобто деформація, за якої сила ваги матеріальної точки M зрівноважується пружною силою $P = c\Delta_{ст}$; x — відхилення точки M від положення статичної рівноваги при коливаннях; λ — повна деформація пружини.

Записуємо початкові умови руху точки M : $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V$, оскільки в момент виникнення коливання точка M перебувала в положенні статичної рівноваги і рухалася зі швидкістю V .

Складемо диференціальне рівняння руху точки M у проекції на вісь x :

$$m \ddot{x} = P - F - R.$$

Беручи до уваги значення сили пружності $F = \lambda c = (\Delta_{ст} + x)c$ і сили опору середовища $R = b \dot{x}$, останнє рівняння можна записати так:

$$m \ddot{x} = P - \Delta_{ст} c - cx - b \dot{x}.$$

Після спрощення матимемо

$$\ddot{x} + 2h \dot{x} + k^2 x = 0, \tag{1}$$

де $2h = \frac{b}{m}$; $k^2 = \frac{c}{m}$.

Це рівняння є диференціальним рівнянням згасаючих коливань матеріальної точки.

Період згасаючих коливань визначається за формулою

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

Звідси визначаємо коефіцієнт, що характеризує силу опору середовища:

$$h = \sqrt{k^2 - \frac{4\pi^2}{(T^*)^2}} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{4\pi^2}{(T^*)^2}} = \sqrt{\frac{4,6 \cdot 10^6 \cdot 9,81}{50\,000} - \frac{4 \cdot 3,14^2}{0,21^2}} =$$

$$= \sqrt{902,52 - 894,29} = 2,87 \frac{1}{c},$$

де $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{cg}{P} = \frac{4,6 \cdot 10^6 \cdot 9,81}{50\,000} = 902,52 \frac{1}{c^2}$; $T^* = 0,21$ с.

Визначаємо величину k :

$$k = \sqrt{902,52} \approx 30 \frac{1}{c}.$$

Характеристичним рівнянням для рівняння (1) буде

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є:

$$r_1 = -h + i\sqrt{k^2 - h^2}; \quad r_2 = -h - i\sqrt{k^2 - h^2},$$

оскільки $k > h$, тобто відновлювальна сила більша за силу опору, що й забезпечує коливальний характер руху матеріальної точки.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (1) виглядатиме так:

$$x = e^{-ht} \left(c_1 \cos \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t \right). \quad (2)$$

Для визначення найбільшого зусилля в тросі необхідно визначити x_{\max} , оскільки

$$T_{\max} = F_{\max} = c(\Delta_{\text{ст}} + x_{\max}),$$

де T_{\max} — зусилля в тросі; F_{\max} — сила пружності пружини; x_{\max} — відхилення точки від положення статичної рівноваги.

Визначаємо $\Delta_{\text{ст}}$:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{P}{c} = \frac{50\,000}{4,6 \cdot 10^6} = 0,0109 \text{ м.}$$

Визначаємо закон зміни швидкості руху матеріальної точки при коливаннях [диференціюємо за часом рівність (2)]:

$$\dot{x} = -he^{-ht} \left(c_1 \cos \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t \right) +$$

$$+ e^{-ht} \left(-c_1 \sqrt{k^2 - h^2} \sin \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t + c_2 \sqrt{k^2 - h^2} \cos \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t \right). \quad (3)$$

За початковими умовами руху точки $\left[t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = V \right]$ визначаємо з рівнянь (2) і (3) сталі інтегрування c_1 і c_2 :

$$c_1 = 0; c_2 = \frac{V}{\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

Тоді маємо

$$x = e^{-ht} \frac{V}{\sqrt{k^2 - h^2}} \sin \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t. \quad (4)$$

Рівняння (4) — це рівняння руху точки при коливанні.

Визначаємо x_{\max} . Диференціюємо вираз (4) за часом і прирівнюємо його до нуля:

$$\dot{x} = -he^{-ht} \frac{V}{\sqrt{k^2 - h^2}} \sin \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t + e^{-ht} V \cos \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t = 0,$$

звідки знаходимо час t , тобто $t = 0,0493$ с, за якого $x = x_{\max}$ (пропонуємо читачу визначити час t самостійно).

Значення t підставляємо в рівність (4):

$$x_{\max} = a_1 = e^{-2,87 \cdot 0,0493} \frac{1,5}{\sqrt{902,52 - 8,24}} \sin \sqrt{902,52 - 8,24} \cdot t = 0,0432 \text{ м.}$$

Найбільше зусилля в тросі

$$T_{\max} = F_{\max} = c(\Delta_{\text{ст}} + x_{\max}) = 4,6 \cdot 10^6 (0,0109 + 0,0432) = 248,9 \text{ кН.}$$

Щоб визначити зусилля в тросі після п'яти повних коливань платформи, необхідно визначити величину одинадцятої амплітуди за формулою

$$a_n = a_{11} = a_1 e^{\frac{hT^*}{2}(n-1)} = 0,0432 e^{\frac{2,87 \cdot 0,21}{2} \cdot 10} = 0,0432 \cdot 0,049 = 0,0021 \text{ м.}$$

Тоді зусилля в тросі після п'яти повних коливань

$$T = c(\Delta_{\text{ст}} + a_{11}) = 4,6 \cdot 10^6 (0,0109 + 0,0021) = 59,8 \text{ кН.}$$

Приклад 16.6. Щоб визначити в'язкість рідини, Кулон¹ застосував такий метод: підвісивши на пружині тонку пластинку M , він змушував її коливатися спочатку в повітрі, а потім у тій рідині, в'язкість якої треба було визна-

¹ Шарль Огюстен Кулон (1736—1806) — французький фізик, член Паризької академії наук.

чити, і знаходив тривалість T одного розмаху (T_1 — у першому випадку і T_2 — у другому). Сила тертя між пластинкою і рідиною може бути визначена як $2S\alpha V$ (у грамах), де $2S$ — поверхня пластинки; α — коефіцієнт в'язкості; V — її швидкість. Нехтуючи тертям між пластинкою і повітрям, треба визначити коефіцієнт α за знайденими з досліду величинами T_1 і T_2 , якщо вага пластинки дорівнює P (у грамах).

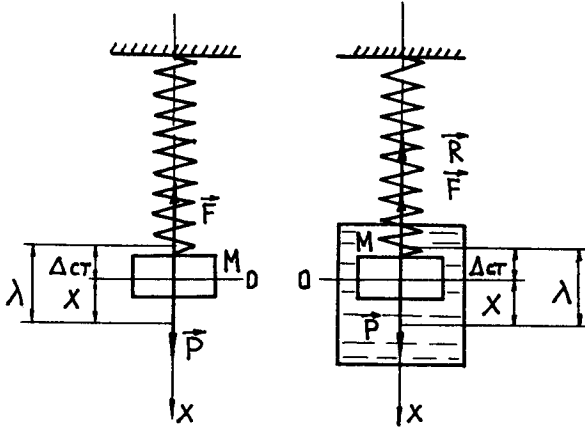


Рис. 16.49

Розв'язання. Розглянемо рух пластинки M , вважаючи її матеріальною точкою як у повітрі, так і в рідині. Розрахункові схеми руху пластинки у першому і другому випадках зображено на рис. 16.49.

У повітрі на точку M діятимуть стала сила ваги P і змінна сила пружності $F_{\text{пр}} = c\lambda$. У рідині на точку M крім зазначених сил діятиме також сила опору рідини — змінна сила $R = 2dSV$.

Початкові умови руху точки M для двох випадків такі: $t = 0$

$x(0) = -\Delta_{\text{ст}}$; $\dot{x}(0) = 0$, оскільки початок координат вибрано у положенні статичної рівноваги.

Складемо диференціальне рівняння руху точки M у проекціях на вісь Ox при русі в повітрі:

$$m \ddot{x} = P - F,$$

у рідині

$$m \ddot{x} = P - F - R.$$

Беручи до уваги що $c\Delta_{\text{ст}} = P$ (у положенні статичної рівноваги), а $F = c(x + \Delta_{\text{ст}})$, матимемо

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (1)$$

де $k^2 = \frac{c}{m}$.

Аналогічно до руху в рідині

$$m \ddot{x} = -c(x + \Delta_{\text{ст}}) - 2\alpha S \dot{x} + P,$$

або

$$\ddot{x} + 2h \dot{x} + k^2 x = 0, \quad (2)$$

де $h = \frac{S\alpha}{m}$.

Вираз (1) є диференціальним рівнянням вільних коливань матеріальної точки. Період вільних коливань визначається за формулою

$$T = \frac{2\pi}{k}, \text{ або } 2T_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}},$$

де $T_1 = \frac{T}{2}$ (час розмаху коливання).

Рівняння (2) є диференціальним рівнянням згасаючих коливань матеріальної точки. Характеристичним рівнянням для нього буде

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є

$$r_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2},$$

оскільки з умов досліду $k > h$, тобто відновлювальна сила більша за силу опору, що забезпечує коливальний характер руху матеріальної точки. Загальний розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$x = e^{-ht} \left(c_1 \cdot \sin \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t + c_2 \cos \sqrt{k^2 - h^2} \cdot t \right).$$

Період згасаючих коливань

$$T = 2T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}},$$

де $T_2 = \frac{T}{2}$ (час розмаху коливання).

Беручи до уваги рівності $k^2 = \frac{c}{m}$ і $h = \frac{S\alpha}{m}$, останню рівність можна записати у вигляді

$$T_2 = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \frac{S^2\alpha^2}{m^2}}}.$$

Підставляючи в цю рівність замість k^2 значення $\frac{\pi^2}{T_1^2}$, дістанемо

$$T_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi^2}{T_1^2} - \frac{S^2 \alpha^2}{m^2}}}$$

Розв'язуючи цю рівність відносно α , знайдемо

$$\alpha = \frac{\pi P}{Sg} \sqrt{\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2}}$$

Приклад 16.7. Для просіювання борошна застосовується вібраційний грохот, який складається з корпусу A (короб із ситом), що підтримується спіральними пружинами, коефіцієнт жорсткості яких дорівнює c , та з двох дисків K і L , які змонтовані на корпусі (рис. 16.50). Диски обертаються зі сталою кутовою швидкістю ω навколо горизонтальних осей O_1 і O_2 , перпендикулярних до площини рисунка.

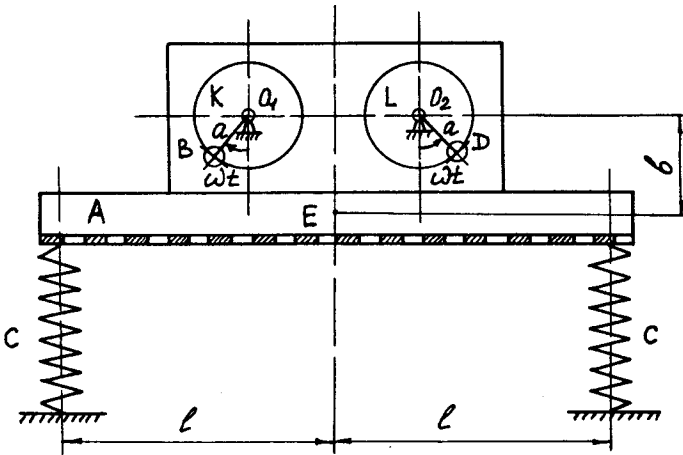


Рис. 16.50

Маси $m_1 = m_2 = m$ дисків зосереджені в точках B і D (рис. 16.50). Диски обертаються у протилежні боки так, що в будь-який момент часу точки B і D розташовуються симетрично відносно вертикальної осі Y у початковий момент займають нижнє положення. Маса корпусу A дорівнює m_3 . Визначити рівняння руху центра ваги E корпусу A вздовж вертикалі, якщо в

початковий момент точка E перебувала в положенні статичної рівноваги, а її швидкість, яка дорівнює за модулем V_0 , була напрямлена по вертикалі вниз.

Розв'язання. Оскільки необхідно визначити рух короба із ситом вздовж вертикалі, то розрахунковою моделлю його буде рух матеріальної точки E , що спирається на пружину з еквівалентною жорсткістю $c_{\text{екв}} = 2c$ (див. приклад 16.5).

Диференціальне рівняння руху точки E складемо за допомогою принципу Д'Аламбера, тобто до діючих на точку E сил \vec{P} і \vec{F} додамо сили інерції $\vec{F}_1^{\text{ін}} = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{W}_E$

і $\vec{F}_2^{\text{ін}} = (m_1 + m_2)\vec{W}_{B(D)}^{\text{доос}} \cos \omega t$ (рис. 16.51):

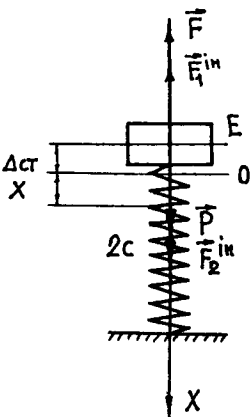


Рис. 16.51

$$-\vec{F}_1^{\text{ін}} + \vec{F}_2^{\text{ін}} + P - F = 0.$$

Беручи до уваги що $F_1^{\text{ін}} = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_E$, $F_2^{\text{ін}} = (m_1 + m_2)\omega^2 a \cos \omega t$, $F = 2c(\Delta_{\text{ст}} + x)$, $P = 2c\Delta_{\text{ст}}$, останньому рівнянню надаємо вигляду

$$\ddot{x}_E + k^2 x_E = h \cos \omega t, \quad (1)$$

$$\text{де } k^2 = \frac{2c}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2c}{2m + m_3}; \quad h = \frac{(m_1 + m_2)\omega^2 a}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2m\omega^2 a}{2m + m_3}.$$

Записуємо початкові умови руху точки E : $t = 0$; $x_E(0) = 0$; $\dot{x}_E(0) = V_0$, оскільки за умовою задачі у початковий момент часу точка E перебувала у положенні статичної рівноваги, мала швидкість V_0 і була напрямлена по вертикалі вниз.

Загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$x_E = x'_E + x''_E,$$

де x'_E — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, тобто $\ddot{x}_E + k^2 x_E = 0$; x''_E — частинний розв'язок рівняння (1).

Характеристичним рівнянням однорідного рівняння $\ddot{x}_E + k^2 x_E = 0$ буде $r^2 + k^2 = 0$.

Коренями характеристичного рівняння є

$$r_{1,2} = \pm ik.$$

Загальний розв'язок x'_E відповідно до теорії диференціальних рівнянь виглядатиме так:

$$x'_E = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt,$$

де c_1 і c_2 — сталі інтегрування.

Оскільки рівняння (1) є диференціальним рівнянням змушених коливань, то щоб знайти, в якому вигляді шукати частинний розв'язок цього рівняння, треба порівняти величини k і ω — частоту власних і змушених коливань. При $\omega \neq k$ частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x''_E = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Визначимо:

$$\begin{aligned} \dot{x}_E' &= -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t; \\ \ddot{x}_E'' &= -A\omega^2 \cos \omega t + B\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Підставивши значення \ddot{x}_E'' і \dot{x}_E' в рівняння (1), дістанемо

$$-A\omega^2 \cos \omega t + B\omega^2 \sin \omega t + k^2 A \cos \omega t + k^2 B \sin \omega t = h \cos \omega t,$$

звідки знайдемо значення довільних сталих A і B :

$$A = \frac{h}{k^2 - \omega^2}; \quad B = 0.$$

Отже, частинний розв'язок x_E'' набирає вигляду

$$x_E'' = \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (1) набирає вигляду

$$x_E = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (2)$$

Залишається визначити сталі інтегрування c_1 і c_2 за початковими умовами руху. Для цього продиференціюємо рівняння (2) за часом:

$$\dot{x}_E = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt - \frac{h\omega}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (3)$$

Підставивши в рівняння (2) і (3) початкові умови, дістанемо:

$$c_1 = -\frac{h}{k^2 - \omega^2}; \quad c_2 = \frac{V_0}{k}.$$

Підставляючи значення c_1 і c_2 у рівняння (2), одержуємо шукане рівняння руху точки E корпусу A вздовж вертикалі поза резонансом ($k \neq \omega$):

$$x_E = -\frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt + \frac{h}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t,$$

де $k = \sqrt{\frac{2c}{2m + m_3}}$; $h = \frac{2m}{2m + m_3} a\omega^2$.

Визначимо рівняння руху точки E корпусу A при резонансі, тобто коли $\omega = k$. У цьому випадку частинний розв'язок x_E'' потрібно шукати у вигляді

$$x_E'' = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t.$$

Для визначення A і B знаходимо:

$$\dot{x}_E' = A \cos \omega t - A\omega t \sin \omega t + B \sin \omega t + B\omega t \cos \omega t;$$

$$\ddot{x}_E'' = -2A\omega \sin \omega t - A\omega^2 t \cos \omega t + 2B\omega \cos \omega t - B\omega^2 t \sin \omega t.$$

Підставляючи значення \ddot{x}_E'' і x_E'' в рівняння (1), з урахуванням того, що $\omega = k$, матимемо

$$-2A\omega \sin \omega t - A\omega^2 t \cos \omega t + 2B\omega \cos \omega t - B\omega^2 t \sin \omega t + A\omega^2 t \cos \omega t + B\omega^2 t \sin \omega t = h \cos \omega t.$$

Звідси дістанемо:

$$2B\omega = h; \quad -2A\omega = 0.$$

$$\text{Отже, } B = \frac{h}{2\omega}; \quad A = 0.$$

Таким чином, розв'язок x_E'' має вигляд

$$x_E'' = \frac{h}{2\omega} t \sin \omega t.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (1) при резонансі набирає вигляду

$$x_E = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{h}{2\omega} t \sin \omega t.$$

Оскільки $k = \omega$, то

$$x_E = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{h}{2\omega} t \sin \omega t.$$

Визначимо \dot{x}_E' :

$$\dot{x}_E' = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t + \frac{h}{2\omega} \sin \omega t + \frac{h}{2\omega} t \cos \omega t.$$

Підставивши в два останніх рівняння початкові умови, здобудемо

$$c_1 = 0; c_2 = \frac{V_0}{\omega}.$$

Отже, рівняння руху точки E корпусу A при резонансі остаточно набирає вигляду

$$x_E = \left(\frac{V_0}{\omega} + \frac{h}{2\omega} t \right) \sin \omega t,$$

$$\text{де } \omega = k = \sqrt{\frac{2c}{2m + m_3}}; h = \frac{2m}{2m + m_3} a \omega^2.$$

Типові задачі коливального руху матеріальної точки для самостійної проробки та самоконтролю

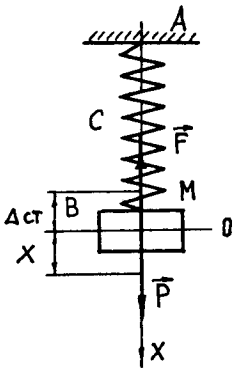


Рис. 16.52

Задача 16.26. Пружина AB закріплена одним кінцем у точці A . Для її подовження на 1 м необхідно прикласти в точці B при статичному навантаженні силу 19,6 Н. У деякий момент до нижнього кінця B недеформованої пружини підвішують гирю M , маса якої 0,1 кг, і опускають її без початкової швидкості. Нехтуючи масою пружини, записати рівняння подальшого руху гирі та вказати амплітуду і період коливань. Рух гирі належить до осі, що проведена вертикально вниз з положення статичної рівноваги гирі.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.52.

Початкові умови руху гирі (точки M): $t = 0; x(0) = -\Delta_{\text{ст}};$

$\dot{x}(0) = 0$. Диференціальне рівняння руху гирі (точки M) має

вигляд $\ddot{x} + k^2 x = 0$, де $k^2 = \frac{c}{m} = 196 \frac{1}{\text{с}^2}$. Після інтегрування матимемо:

$$x = c_1 \sin 14t + c_2 \cos 14t; \dot{x} = c_1 k \cos kt - c_2 k \sin kt, \text{ де } c_2 = -\Delta_{\text{ст}} = -\frac{P}{c} = -0,05; c_1 = 0.$$

$$\text{Тоді } x = -0,05 \cos 14t \text{ м; } a = 0,05 \text{ м; } T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14} = 0,45 \text{ с.}$$

Задача 16.27. Визначити період вільних коливань фундаменту машини, якщо вона розміщена на пружному ґрунті. Маса фундаменту з машиною $m = 90$ т, площа підшви фундаменту $S = 15 \text{ м}^2$, коефіцієнт жорсткості ґрунту $c = \lambda S$, де $\lambda = 30 \text{ Н/см}^3$ (питома жорсткість ґрунту).

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.53. Початкові умови руху фундаменту з машиною (точки M):
 $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) \neq 0$. Диференціальне рівняння руху має

$$\text{вигляд } \ddot{x} + k^2 x = 0, \text{ де } k^2 = \frac{\lambda S}{m} = \frac{30 \cdot 10^6 \cdot 15}{9 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Період коливання фундаменту з машиною

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{\sqrt{5 \cdot 10^3}} = 0,089 \text{ с.}$$

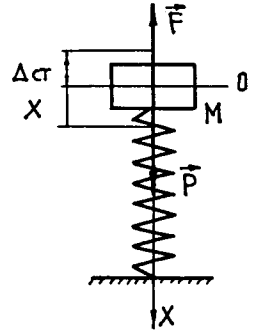


Рис. 16.53

Задача 16.28. Вантаж, маса якого $m_1 = 2$ кг, підвішений до пружини з коефіцієнтом жорсткості $c = 98$ Н/м і перебуває в рівновазі. У деякий момент до нього додали вантаж масою $m_2 = 0,8$ кг. Визначити рівняння руху і період коливання двох вантажів.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.54. Початкові умови руху вантажів: $t = 0$;

$$x(0) = -\Delta_{\text{ст}_2} = -\frac{P}{c} = -\frac{0,8 \cdot 9,81}{98} = -0,08 \text{ м}; \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Диференціальне рівняння руху вантажів має вигляд

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \text{ де } k^2 = \frac{c}{m_1 + m_2} = \frac{98}{2,8} = 35 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Після інтегрування матимемо:

$$x = c_1 \sin 5,916t + c_2 \cos 5,916t; \quad \dot{x} = 5,916c_1 \cos 5,916t - 5,916c_2 \sin 5,916t,$$

$$\text{де } c_1 = 0; \quad c_2 = -\Delta_{\text{ст}_2} = -0,08.$$

$$\text{Тоді } x = -0,08 \cos 5,916t \text{ м}; \quad T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{5,916} = 1,062 \text{ с.}$$

Задача 16.29. Знайти рівняння руху вантажу, який підвісили до двох недеформованих паралельних пружин (подовження пружин однакові) і надали йому початкової швидкості V_0 , що має напрям угору. Маса вантажу дорівнює m . Жорсткості пружин дорівнюють відповідно c' і c'' .

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.55. Жорсткість еквівалентної пружини $c_{\text{екв}} = c' + c''$. Початкові умови руху: $t = 0$;

$$x(0) = -\frac{P}{c_{\text{екв}}} = -\frac{mg}{c' + c''}; \quad \dot{x}(0) = -V_0.$$

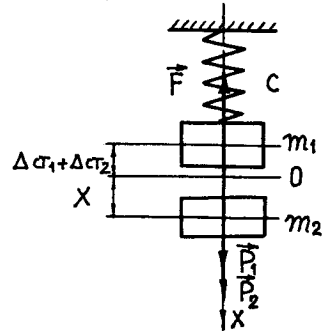


Рис. 16.54

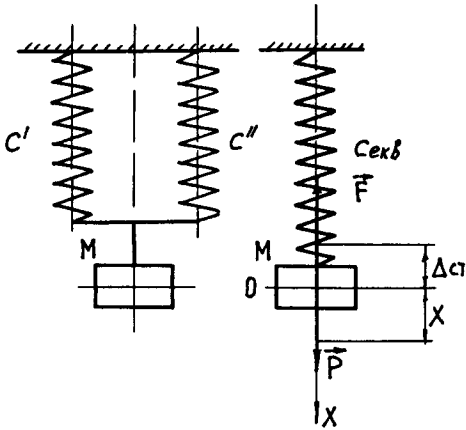


Рис. 16.55

$$\text{де } c_1 = -V_0 \sqrt{\frac{m}{c' + c''}}; \quad c_2 = -\frac{mg}{c' + c''}.$$

$$\text{Тоді } x = -V_0 \sqrt{\frac{m}{c' + c''}} \sin \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t - \frac{mg}{c' + c''} \cos \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t.$$

Задача 16.30. Знайти рівняння руху вантажу, затиснутого між двома пружинами з різними коефіцієнтами жорсткості c' і c'' , якщо в положенні рівноваги йому надали початкової швидкості V_0 , що напрямлена вниз.

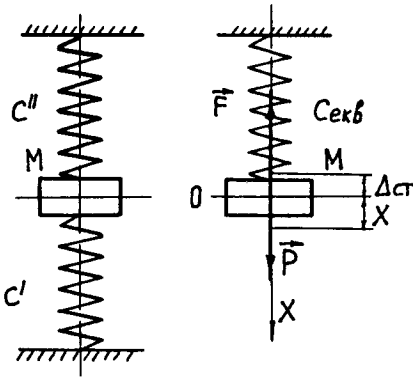


Рис. 16.56

Диференціальне рівняння руху вантажу має вигляд $m \ddot{x} + k^2 x = 0$,

$$\text{де } k^2 = \frac{c_{\text{екв}}}{m} = \frac{c' + c''}{m}.$$

Після інтегрування матимемо:

$$x = c_1 \sin \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t + c_2 \cos \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t;$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = & c_1 \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cos \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t - \\ & - c_2 \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \sin \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t, \end{aligned}$$

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.56. Жорсткість еквівалентної пружини $c_{\text{екв}} = c' + c''$. Початкові умови руху:

$$t = 0; \quad x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = V_0.$$

Диференціальне рівняння руху вантажу має вигляд $\ddot{x} + k^2 x = 0$, де

$$k^2 = \frac{c_{\text{екв}}}{m} = \frac{c' + c''}{m}.$$

Після інтегрування матимемо:

$$x = c_1 \sin \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t + c_2 \cos \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t;$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cos \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t - c_2 \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \sin \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t,$$

де $c_1 = V_0 \sqrt{\frac{m}{c' + c''}}$; $c_2 = 0$. Тоді $x = V_0 \sqrt{\frac{m}{c' + c''}} \sin \sqrt{\frac{c' + c''}{m}} \cdot t$.

Задача 16.31. Знайти рівняння руху вантажу, який підвісили до двох послідовно розташованих пружин з різними коефіцієнтами жорсткості c' і c'' . У початковий момент вантаж розміщувався нижче положення рівноваги на відстані x_0 і йому надали швидкості V_0 , що напрямлена вгору. Маса вантажу дорівнює m .

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.57. Жорсткість еквівалентної пружини $c_{\text{екв}} = \frac{c'c''}{c' + c''}$. Початкові умови руху: $t = 0$;

$x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = -V_0$. Диференціальне рівнян-

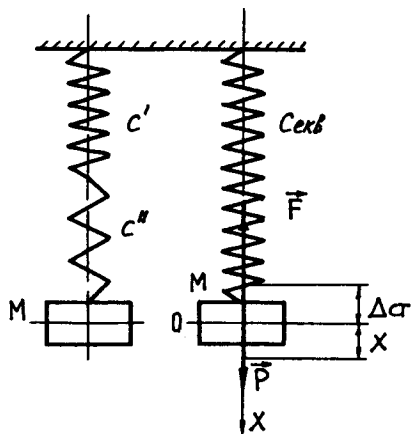


Рис. 16.57

ня руху вантажу має вигляд $\ddot{x} + k^2 x = 0$, де $k^2 = \frac{c'c''}{(c' + c'')m}$.

Після інтегрування матимемо: $x = c_1 \sin \sqrt{\frac{c'c''}{(c' + c'')m}} \cdot t + c_2 \cos \sqrt{\frac{c'c''}{(c' + c'')m}} \cdot t$;

$$\dot{x} = c_1 \sqrt{\frac{c'c''}{(c' + c'')m}} \cos \sqrt{\frac{c'c''}{(c' + c'')m}} \cdot t - c_2 \sqrt{\frac{c'c''}{(c' + c'')m}} \sin \sqrt{\frac{c'c''}{(c' + c'')m}} \cdot t,$$

де $c_1 = -V_0 \sqrt{\frac{(c' + c'')m}{c'c''}}$; $c_2 = x_0$.

Тоді $x = -V_0 \sqrt{\frac{(c' + c'')m}{c'c''}} \sin \sqrt{\frac{c'c''}{(c' + c'')m}} \cdot t + x_0 \cos \sqrt{\frac{c'c''}{(c' + c'')m}} \cdot t$.

Задача 16.32. Визначити коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини, якщо вантаж, маса якого m , прикріплений до стрижня, масою якого можна знехтувати. Стрижень в точці O спирається на шарнірно-нерухому опору і прикріплюється трьома вертикальними пружинами до фундаменту. Коефіцієнти жорсткості пружин c_1, c_2, c_3 . Пружини прикріплені до стрижня на відстанях a_1, a_2, a_3 від шарніра. Вантаж M прикріплений до стрижня на відстані b від шарніра. У положенні рівноваги стрижень горизонтальний. Еквівалентна пружина прикріплюється до стрижня на відстані b від шарніра (рис. 16.58).

Розв'язання. Умова еквівалентності: $c_1 \lambda_1 a_1 + c_2 \lambda_2 a_2 + c_3 \lambda_3 a_3 = c_{\text{екв}} \lambda \nu$,

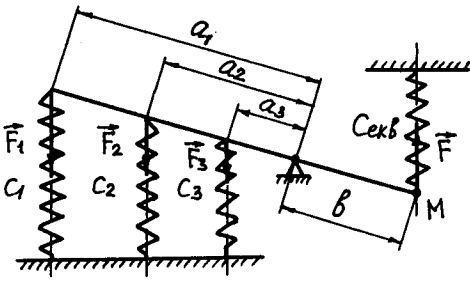


Рис. 16.58

де $c_{\text{екв}}$ — жорсткість еквівалентної пружини; $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — деформація відповідних пружин. Оскільки $\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\lambda_1}{a_1} = \frac{\lambda_2}{a_2} = \frac{\lambda_3}{a_3}$, то

Оскільки $\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\lambda_1}{a_1} = \frac{\lambda_2}{a_2} = \frac{\lambda_3}{a_3}$, то

$$\frac{c_1 \lambda a_1^2}{\nu} + \frac{c_2 \lambda a_2^2}{\nu} + \frac{c_3 \lambda a_3^2}{\nu} = c_{\text{екв}} \lambda \nu, \text{ звідки}$$

$$c_{\text{екв}} = \frac{c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2}{\nu^2}.$$

Задача 16.33. Тіло, маса якого $m = 5$ кг, підвішене на пружині, коефіцієнт жорсткості якої дорівнює 2 кН/м. Опір середовища пропорційний швидкості. Амплітуда після чотирьох коливань зменшилася в 12 разів. Визначити період і логарифмічний декремент коливань.

Розв'язання. З рівності $a_n = a_1 e^{-hT^*(n-1)}$, де $n = 9$; $a_n = \frac{1}{12}$; $a_1 = 1$, визначаємо

мо hT^* : $hT^* = -\frac{1}{8} \ln \frac{1}{12} = 0,3106$. Період коливань $T^* = \frac{2\pi}{k^*}$, де $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$;

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{2000}{5} = 400 \frac{1}{\text{с}^2}; \quad h^2 = \frac{(0,3106)^2}{(T^*)^2}. \text{ Остаточно маємо } T^* = 0,314 \text{ с.}$$

Задача 16.34. За умовою попередньої задачі знайти рівняння руху тіла, якщо його підвісили до недеформованої пружини і відпустили без початкової швидкості.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на

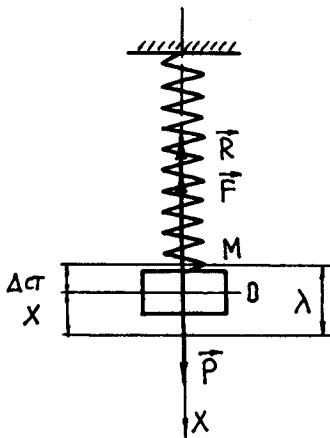


Рис. 16.59

рис. 16.59. Початкові умови руху: $t = 0$; $x(0) =$

$$= -\Delta_{\text{ст}} = -\frac{P}{c} = -\frac{5 \cdot 9,81}{2000} = -0,0245 \text{ м}; \quad \dot{x}(0) = 0. \text{ Дифференціальне рівняння руху має вигляд}$$

$$\ddot{x} + 2hx + k^2 x = 0,$$

де $k = 20 \frac{1}{\text{с}}$; $h = 0,99 \frac{1}{\text{с}}$. Після інтегрування матимемо:

$$x = e^{-0,99t} (c_1 \sin k^* t + c_2 \cos k^* t);$$

$$\dot{x} = -0,98 e^{-0,99t} (c_1 \sin k^* t + c_2 \cos k^* t) +$$

$$+ e^{-0,99t} (c_1 k^* \cos k^* t - c_2 k^* \sin k^* t),$$

де $k^* = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{400 - 0,98} = 19,97 \frac{1}{c}$; $c_1 = -0,0012$; $c_2 = -0,0245$.

Тоді $x = e^{-0,99t} (-0,0012 \sin 19,97t - 0,0245 \cos 19,97t)$ м.

Задача 16.35. Тіло, маса якого $m = 6$ кг, підвішене на пружині і за відсутності опору здійснює коливання з періодом $T = 0,4\pi$ с, а якщо діє опір, пропорційний першому ступеню швидкості, — з періодом $T_1 = 0,5\pi$ с. Знайти коефіцієнт пропорційності α у виразі сили опору $\vec{R} = -\alpha \vec{V}$ і визначити рух тіла, якщо у початковий момент пружина була розтягнена з положення рівноваги на 4 см і відпущена без початкової швидкості.

Розв'язання. Розрахункову схему наведено на рис. 16.60.

Початкові умови руху тіла: $t = 0$; $x(0) = 0,04$ м; $\dot{x}(0) = 0$.

Диференціальне рівняння руху тіла має вигляд

$$\ddot{x} + 2hx + k^2x = 0, \text{ де } 2h = \frac{\alpha}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Визначаємо k і h :

$$k = \frac{2\pi}{0,4\pi} = 5 \frac{1}{c}; \quad h = \sqrt{k^2 - 16} = \sqrt{25 - 16} = 3 \frac{1}{c}.$$

$$\text{Тоді } \alpha = 2hm = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}.$$

Після інтегрування матимемо:

$$x = e^{-3t} (c_1 \sin k^*t + c_2 \cos k^*t);$$

$$\dot{x} = -3e^{-3t} (c_1 \sin k^*t + c_2 \cos k^*t) + e^{-3t} (k^*c_1 \cos k^*t - k^*c_2 \sin k^*t),$$

де $k^* = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \frac{1}{c}$, $c_1 = 0,03$; $c_2 = 0,04$.

Тоді $x = e^{-3t} (0,03 \sin 4t + 0,04 \cos 4t)$, або $x = ae^{-3t} \sin(4t + \alpha)$ м,

де $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$; $\text{tg} \alpha = \frac{c_2}{c_1}$.

Задача 16.36. Гиря M підвішена на пружині AB , верхній кінець якої здійснює гармонічні коливання по вертикальній прямій з амплітудою a і частотою n так, що $O_1C = a \sin nt$ см. Визначити змушені коливання гирі M , якщо маса гирі дорівнює 400 г, від дії сили 39,2 Н пружина подовжується на 1 м, $a = 2$ см, $n = 7$ рад/с.

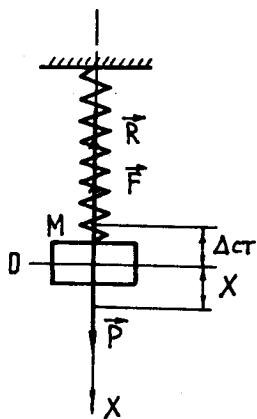


Рис. 16.60

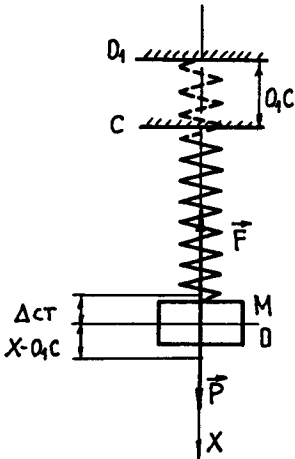


Рис. 16.61

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис.

16.61. Початкові умови руху гирі: $t = 0$; $x(0) = 0$;

$\dot{x}(0) = 0$. Диференціальне рівняння руху гирі має ви-

гляд $\ddot{x} + k^2 x = \frac{ac}{m} \sin nt$, де $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{39,2}{0,4}} = 9,9 \frac{1}{c^2}$;

$n = 7 \frac{1}{c}$; $k \neq n$.

Загальний розв'язок: $x = x_1 + x_2$; розв'язок $x_1 = c_1 \sin 9,9t + c_2 \cos 9,9t$; розв'язок $x_2 = A \sin nt +$

$+ B \cos nt$. Тоді $\dot{x}_2 = An \cos nt - Bn \sin nt$; $\ddot{x}_2 = -An^2 \sin nt -$

$- Bn^2 \cos nt$.

Після підстановки x_2 і \ddot{x}_2 у диференціальне рівняння дістанемо

$$A = \frac{ac}{m(k^2 - n^2)} = \frac{0,02 \cdot 39,2}{0,4(98 - 49)} = 0,04 \text{ м}; B = 0.$$

Закон змушених коливань гирі: $x_2 = 0,04 \sin 7t$ м.

Задача 16.37. Вантаж, маса якого $m = 24,5$ кг, висить на пружині, жорсткість якої дорівнює 392 Н/м. На вантаж починає діяти сила $Q(t) = 156,8 \sin 4t$ Н. Визначити закон руху вантажу.

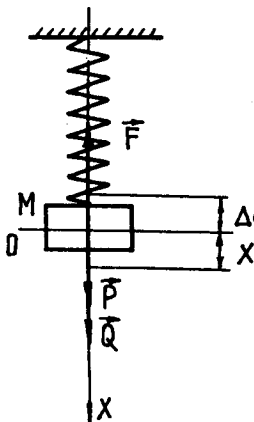


Рис. 16.62

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис.

16.62. Початкові умови руху вантажу: $t = 0$; $x(0) = 0$;

$\dot{x}(0) = 0$. Диференціальне рівняння руху вантажу має

вигляд $\ddot{x} + k^2 x = 6,4 \sin 4t$, де $k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{392}{24,5}} = 4 \frac{1}{c}$;

$p = 4 \frac{1}{c}$; $k = p$.

Загальний розв'язок: $x = x_1 + x_2$; розв'язок

$x_1 = c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t$; розв'язок $x_2 = At \sin 4t + Bt \cos 4t$.

Тоді $\dot{x}_2 = A \sin 4t + 4At \cos 4t + B \cos 4t - 4Bt \sin 4t$;

$$\ddot{x}_2 = 8A \cos 4t - 8B \sin 4t - 16At \sin 4t - 16Bt \cos 4t.$$

Після підстановки x_2 і \ddot{x}_2 в диференціальне рівняння дістанемо

$$A = 0; B = -\frac{6,4}{8} = -0,8.$$

Тоді загальний розв'язок: $x = c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t - 0,8t \cos 4t$;

$$\dot{x} = 4c_1 \cos 4t - 4c_2 \sin 4t - 0,8 \cos 4t + 0,8t \sin 4t, \text{ де } c_2 = 0; c_1 = 0,2.$$

Закон руху вантажу: $x = 0,2 \sin 4t - 0,8t \cos 4t$ м.

Задача 16.38. Вантаж на пружині здійснює коливання, рух якого описується диференціальним рівнянням

$$m \ddot{x} + cx = 5 \cos \omega t + 2 \cos 3\omega t.$$

Знайти закон руху вантажу, якщо у початковий момент його переміщення і швидкість дорівнювали нулю; визначити також, за яких значень ω спостерігається резонанс.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.63. Початкові умови руху вантажу: $t = 0; x(0) = 0$;

$\dot{x}(0) = 0$. Диференціальне рівняння руху вантажу має ви-

$$\text{гляд } \ddot{x} + k^2 x = \frac{5}{m} \cos \omega t + \frac{2}{m} \cos 3\omega t, \text{ де } k = \sqrt{\frac{c}{m}}; k \neq \omega; k \neq 3\omega.$$

Загальний розв'язок: $x = x_1 + x_2' + x_2''$; розв'язок

$$x_1 = c_1 \sin \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t + c_2 \cos \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t; x_2' = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \text{ Тоді}$$

$$\dot{x}_2' = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t; \ddot{x}_2' = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t.$$

Після підстановки x_2' і \ddot{x}_2' у диференціальне рівняння дістанемо:

$$A = 0; B = \frac{5}{m(k^2 - \omega^2)}. \text{ Тоді } x_2' = \frac{5}{m(k^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Розв'язок $x_2'' = A_1 \sin 3\omega t + B_1 \cos 3\omega t$; тоді $\dot{x}_2'' = 3\omega A_1 \cos 3\omega t - 3\omega B_1 \sin 3\omega t$;

$$\ddot{x}_2'' = -9\omega^2 A_1 \sin 3\omega t - 9\omega^2 B_1 \cos 3\omega t.$$

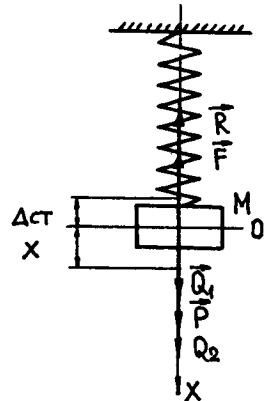


Рис. 16.63

Після підстановки x_2'' і x_2'''' у диференціальне рівняння дістанемо:

$$A_1 = 0; B_1 = \frac{2}{m(k^2 - 9\omega^2)}. \text{ Тоді } x_2'' = \frac{2}{m(k^2 - 9\omega^2)} \cos 3\omega t.$$

Отже,

$$x = c_1 \sin \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t + c_2 \cos \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t + \frac{5}{m(k^2 - \omega^2)} \cos \omega t + \frac{2}{m(k^2 - 9\omega^2)} \cos 3\omega t.$$

Тоді

$$\dot{x} = c_1 \sqrt{\frac{c}{m}} \cos \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t - c_2 \sqrt{\frac{c}{m}} \sin \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t - \frac{5\omega}{m(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t - \frac{6\omega}{m(k^2 - 9\omega^2)} \sin 3\omega t,$$

$$\text{де } c_1 = 0; c_2 = -\left(\frac{2}{m(k^2 - \omega^2)} + \frac{5}{m(k^2 - 9\omega^2)} \right).$$

Остаточно маємо

$$x = \frac{47m\omega^2 - 7c}{(c - m\omega^2)(c - 9m\omega^2)} \cos \sqrt{\frac{c}{m}} \cdot t + \frac{5}{c - m\omega^2} \cos \omega t + \frac{2}{c - 9m\omega^2} \cos 3\omega t,$$

$$\text{оскільки } k^2 = \frac{c}{m}.$$

Резонанс при $\sqrt{\frac{c}{m}} = \omega$ і $\sqrt{\frac{c}{m}} = 3\omega$.

Задача 16.39. Матеріальна точка, маса якої $m = 2$ кг, підвішена до пружини, коефіцієнт жорсткості якої $c = 4$ кН/м. На точку діє збурювальна сила $S = 120 \sin(pt + \delta)$ Н і сила опору

$R = 0,5\sqrt{mc} \cdot V$ Н. Чому дорівнює найбільше значення A_{\max} амплітуди змушених коливань? За якої частоти p амплітуда змушених коливань досягне найбільшого значення?

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.64. Диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = H_0 \sin(pt + \delta), \text{ де } h = \frac{0,5\sqrt{mc}}{2m} = \frac{0,5\sqrt{8000}}{4} =$$

$$= 11,18 \frac{1}{c}; k = \sqrt{\frac{4000}{2}} = 44,72 \frac{1}{c}; \frac{h}{k} = 0,25; H_0 = \frac{120}{m} = 60 \text{ Н.}$$

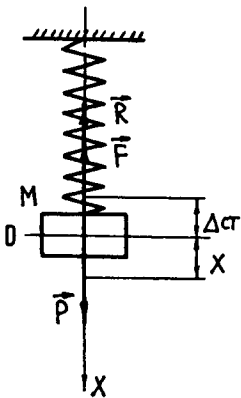


Рис. 16.64

Оскільки $\frac{h}{k} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то p , за якої $A = A_{\max}$, становить: $p = \sqrt{k^2 - 2h^2} =$
 $= \sqrt{2000 - 2 \cdot 11,18^2} = 41,83 \frac{1}{\text{с}}$; при цьому

$$A_{\max} = \frac{H_0}{2h\sqrt{k^2 - h^2}} = \frac{60}{2 \cdot 11,18\sqrt{2000 - 125}} = 0,062 \text{ м.}$$

Задача 16.40. За умовою попередньої задачі знайти рівняння руху точки, якщо у початковий момент часу її положення і швидкість становили:

$x_0 = 2$ см; $V_0 = 3$ см/с. Частота $p = 30 \frac{1}{\text{с}}$, початкова фаза $\delta = 0$. Початок координат — у положенні статичної рівноваги.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.64. Початкові умови руху точки: $t = 0$; $x(0) = x_0 = 0,02$ м; $\dot{x}(0) = V_0 = 0,03$ м/с.

Диференціальне рівняння руху точки має вигляд $\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = H_0 \sin 30t$, де $h = 11,18 \frac{1}{\text{с}}$; $k = 44,72 \frac{1}{\text{с}}$; $H_0 = 60$ Н; $k \neq p$.

Загальний розв'язок: $x = x_1 + x_2$; розв'язок $x_1 = e^{-11,18t}(c_1 \sin 43,3t + c_2 \cos 43,3t)$; $x_2 = A \sin 30t + B \cos 30t$. Тоді $\dot{x}_2 = 30A \cos 30t - 30B \sin 30t$; $\ddot{x}_2 = -900A \sin 30t - 900B \cos 30t$.

Після підстановки x_1 , \dot{x}_2 і \ddot{x}_2 у диференціальне рівняння дістанемо: $A = 0,0398$; $B = -0,0242$.

Отже, $x = e^{-11,18t}(c_1 \sin 43,3t + c_2 \cos 43,3t) + 0,0398 \sin 30t - 0,0242 \cos 30t$, або $x = e^{-11,18t}(c_1 \sin 43,3t + c_2 \cos 43,3t) + 0,0466 \sin(30t - 0,174\pi)$;

$$\dot{x} = -11,18e^{-11,18t}(c_1 \sin 43,3t + c_2 \cos 43,3t) + e^{-11,18t}[43,3c_1 \cos 43,3t - 43,3c_2 \sin 43,3t + 1,398 \cos(30t - 0,174\pi)],$$

де $c_1 = -0,01547$; $c_2 = 0,0442$; $\sqrt{A^2 + B^2} = 0,0466$; $\text{arctg} \frac{B}{A} = -0,174\pi$.

Остаточно

$$x = e^{-11,18t}(0,0442 \cos 43,3t - 0,01547 \sin 43,3t) + 0,0466 \sin(30t - 0,174\pi) \text{ м.}$$

16.13. Диференціальне рівняння відносного руху матеріальної точки

Якщо матеріальна точка здійснює рух відносно системи відліку, яка у свою чергу рухається відносно нерухомої (інерціальної), то рух точки називається *складним рухом* (див. розділ “Кінематика”, параграф 13.1).

Для дослідження складного руху точки вводяться дві системи координат: система координат, зв’язана з нерухомим тілом (інерціальна система відліку), і рухома система координат, зв’язана з тілом, що рухається (неінерціальна система відліку).

Рух точки відносно інерціальної системи відліку називається *абсолютним рухом*. Рух точки відносно неінерціальної системи відліку називається *відносним рухом*. Рух неінерціальної системи відліку відносно інерціальної називається *переносним рухом*.

Поставимо собі за мету визначити відносний рух точки, тобто рух точки в неінерціальній системі відліку.

Вільний рух точки відносно інерціальної системи відліку описується основним рівнянням динаміки

$$m\vec{W} = \vec{F}, \quad (16.87)$$

де $\vec{W} = \vec{W}_a$ — абсолютне прискорення точки.

Визначимо абсолютне прискорення точки за теоремою про додавання прискорень (теорема Коріоліса) (див. розділ “Кінематика”, параграф 13.3):

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_c, \quad (16.88)$$

де \vec{W}_r — відносне прискорення точки; \vec{W}_e — переносне прискорення точки; \vec{W}_c — коріолісове прискорення точки.

Підставляючи рівність (16.88) у рівняння (16.87), дістанемо

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + (-m\vec{W}_e) + (-m\vec{W}_c). \quad (16.89)$$

Введемо позначення

$$\vec{F}_e^{\text{in}} = -m\vec{W}_e; \quad \vec{F}_c^{\text{in}} = -m\vec{W}_c, \quad (16.90)$$

де вектори \vec{F}_e^{in} і \vec{F}_c^{in} відповідно називаються *переносною* і *коріолісовою силами інерції* або *ейлеровими силами інерції*.

З формул (16.90) випливає, що переносна сила інерції точки в її відносному русі має напрям, протилежний до вектора переносного прискорення точки, і за величиною дорівнює добутку маси точки і модуля переносного прискорення точки:

$$F_e^{\text{in}} = mW_e. \quad (16.91)$$

Коріолісова сила інерції напрямлена прямо протилежно до вектора коріолісового прискорення точки і за величиною дорівнює добутку маси точки і модуля коріолісового прискорення:

$$F_c^{\text{in}} = mW_c. \quad (16.92)$$

Сила \vec{F} у рівнянні (16.87) є мірою механічної взаємодії даної точки з тілами, що її оточують. Величина і напрям сили \vec{F} не залежать від того, в якій системі розглядається рух точки, вони скрізь однакові.

Ейлерови сили інерції \vec{F}_e^{in} і \vec{F}_c^{in} виникають тільки в неінерціальній системі відліку і зникають при переході до інерціальної системи. Крім того, сили інерції \vec{F}_e^{in} і \vec{F}_c^{in} змінюються при переході від однієї неінерціальної системи відліку до іншої, що впливає з визначення переносного і коріолісового прискорень. Ейлерови сили інерції не мають джерела виникнення, тобто інших точок або тіл, взаємодія з якими приводила б до їх появи; інакше кажучи, третій закон Ньютона для них не діє.

На підставі розглянутого рівняння (16.87) набирає вигляду

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{F}_e^{\text{in}} + \vec{F}_c^{\text{in}}. \quad (16.93)$$

Якщо рух точки буде невольним, то рівняння (16.93) набирає вигляду

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_e^{\text{in}} + \vec{F}_c^{\text{in}}, \quad (16.94)$$

де \vec{R} — реакція накладеної на точку в'язі.

Рівняння (16.93) і (16.94) називаються відповідно *основними рівняннями динаміки вільного і невольного відносного руху* матеріальної точки. З рівнянь випливає: для того щоб скласти диференціальні рівняння руху вільної або невольної матеріальної точки в будь-якій неінерціальній системі відліку у формі основного закону динаміки, необхідно до рівнодійної активних сил, що діють на точку, і якщо точка невольна, — до реакції в'язей приєднати переносну і коріолісову сили інерції.

Якщо спроекціювати рівняння (16.93) і (16.94) на осі неінерціальної системи відліку, здобудемо диференціальні рівняння вільного і невольного відносного руху точки в координатній формі:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_r &= \sum_{k=1}^n F_{kx_r} + F_{ex_r}^{\text{in}} + F_{cx_r}^{\text{in}}; \\ m \ddot{y}_r &= \sum_{k=1}^n F_{ky_r} + F_{ey_r}^{\text{in}} + F_{cy_r}^{\text{in}}; \end{aligned} \quad (16.95)$$

$$\begin{aligned}
 m \ddot{z}_r &= \sum_{k=1}^n F_{kz_r} + F_{ez_r}^{\text{in}} + F_{cz_r}^{\text{in}}; \\
 m \ddot{x}_r &= \sum_{k=1}^n F_{kx_r} + R_{x_r} + F_{ex_r}^{\text{in}} + F_{cx_r}^{\text{in}}; \\
 m \ddot{y}_r &= \sum_{k=1}^n F_{ky_r} + R_{y_r} + F_{ey_r}^{\text{in}} + F_{cy_r}^{\text{in}}; \\
 m \ddot{z}_r &= \sum_{k=1}^n F_{kz_r} + R_{z_r} + F_{ez_r}^{\text{in}} + F_{cz_r}^{\text{in}}.
 \end{aligned}
 \tag{16.96}$$

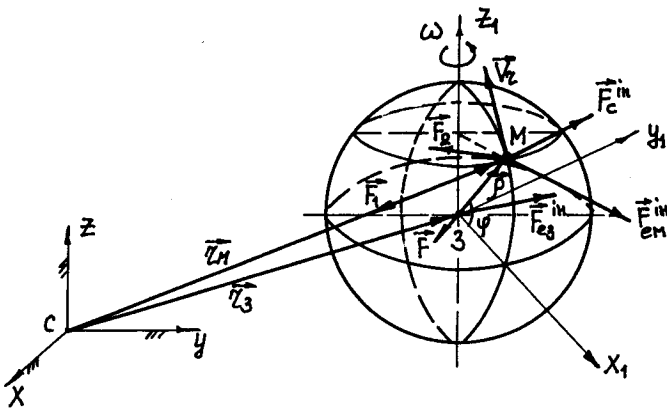


Рис. 16.65

Доведемо на підставі диференціального рівняння відносного руху матеріальної точки (16.94), що систему відліку, зв'язану із Землею, з достатньою для практики точністю можна вважати інерціальною. Для цього розглянемо рух матеріальної точки M по поверхні або в околі Землі в геліоцентричній системі відліку $Sxyz$ (рис. 16.65). Землю в першому і достатньо

близькому наближенні будемо вважати однорідною, рівновеликою за об'ємом і масою кулею, що має радіус $6,37 \cdot 10^6$ м і масу $5,98 \cdot 10^{24}$ кг.

Нехай точка M рухається по меридіану Землі. Візьмемо цей рух точки за відносний, рух Землі разом із системою координат $Zx_1y_1z_1$ відносно нерухомої системи $Sxyz$ — за переносний.

На точку M діють сила притягання до центра Землі \vec{F} ; сила притягання до центра Сонця \vec{F}_1 ; сила взаємодії точки M з тілами на поверхні Землі \vec{F}_2 .

На підставі рівняння (16.94) до сил \vec{F} , \vec{F}_1 і \vec{F}_2 необхідно додати переносну \vec{F}_e^{in} і коріолісову \vec{F}_{e3}^{in} сили інерції:

$$\vec{F}_e^{\text{in}} = \vec{F}_{e3}^{\text{in}} + \vec{F}_{eM}^{\text{in}} = -m(\vec{W}_{e3} + \vec{W}_{eM}) = -m\vec{W}_{e3} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho});$$

$$\vec{F}_c^{\text{in}} = -m\vec{W}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}_r,$$

де \vec{F}_{e3}^{in} — сила інерції переносного поступального руху точки M разом із центром Землі відносно системи відліку $Sxyz$; \vec{F}_{eM}^{in} — сила інерції переносного обертального руху точки M разом із Землею при її обертанні навколо

власної осі z_1 ; $\vec{W}_{e3} = -f \frac{m_c}{(r_3)^3} \vec{r}_3$ — прискорення точки M при її переносному поступальному русі по орбіті разом із центром Землі; $\vec{W}_{eM} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ — переносне доосьове прискорення точки M ; f — універсальна гравітаційна стала; m і m_c — відповідно маси точки M і Сонця; $\vec{\rho}$ — радіус-вектор, що визначає положення точки M у неінерціальній системі відліку $Zx_1y_1z_1$; \vec{r}_3 — радіус-вектор, що визначає положення центра Землі в інерціальній системі відліку $Sxyz$; \vec{W}_c — коріолісове прискорення точки M ; \vec{V}_r — відносна швидкість точки M ; $\vec{\omega}$ — кутова швидкість обертання Землі навколо власної осі.

Підставивши сили \vec{F} , \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , $\vec{F}_e^{\text{ін}}$ і $\vec{F}_c^{\text{ін}}$ у рівняння (16.94), здобудемо

$$m\vec{W}_r = \left[\vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \right] + \left(\vec{F}_1 - m\vec{W}_{e3} \right) + \vec{F}_2 - 2m\vec{\omega} \times \vec{V}_r,$$

де $\vec{F} = -f \frac{mm_3}{\rho^3} \vec{\rho}$; $\vec{F}_1 = -f \frac{mm_c}{(r_M)^3} \vec{r}_M$; m_3 — маса Землі; \vec{r}_M — радіус-вектор, що визначає положення точки M в інерціальній системі відліку $Sxyz$.

В останньому рівнянні вираз $(\vec{F}_1 - m\vec{W}_{e3}) \approx \vec{0}$. Дійсно, беручи $\vec{r}_M \approx \vec{r}_3$, що впливає з припущення про однорідність гравітаційного поля Сонця в околі Землі (гравітаційне поле надає одного і того самого прискорення всім тілам, незалежно від того, в яких точках поля розміщені ці тіла), матимемо

$$(\vec{F}_1 - m\vec{W}_{e3}) = \left(-f \frac{mm_c}{(r_M)^3} \vec{r}_M - m\vec{W}_{e3} \right) = \left(-f \frac{mm_c}{(r_3)^3} \vec{r} - m\vec{W}_{e3} \right) = m\vec{W}_{e3} - m\vec{W}_{e3} = \vec{0}.^1$$

Отже, диференціальне рівняння руху точки M набирає вигляду

$$m\vec{W}_r = \left[\vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \right] + \vec{F}_2 - 2m\vec{\omega} \times \vec{V}_r.$$

З рівняння випливає, що при русі матеріальної точки по поверхні або в околі Землі система відліку з початком у центрі Землі і така, що не бере участі у добовому обертанні Землі (геоцентрична система), практично є інерціальною, оскільки рівняння руху в ній мають вигляд (16.11). Система ж відліку, що жорстко зв'язана з Землею і бере участь у добовому обертанні разом із Землею, не буде інерціальною.

Дамо оцінку сил інерції, що розміщені у правій частині диференціального рівняння відносного руху точки M по поверхні або в околі Землі. Максимальна величина сили інерції переносного обертального руху точки M разом

¹ Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Динамика. — К.: Вища шк., 1990. — С. 103.

із Землею при її обертанні навколо власної осі $\vec{F}_{eM}^{\text{ін}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ становить 0,34 % сили притягання до центра Землі \vec{F} . Коріолісова сила інерції $\vec{F}_c^{\text{ін}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{V}_r$ за величиною, навіть при відносній швидкості точки $V_r = 1000$ м/с, становить тільки 1 % від сили \vec{F} . Тому в більшості інженерних розрахунків при вивченні руху матеріальної точки по поверхні або в околі Землі систему відліку, що жорстко зв'язана із Землею, можна також вважати інерціальною.

Урахування впливу обертання Землі має практичне значення при значних швидкостях відносного руху або для рухів, що мають значну тривалість.

Розглянемо деякі явища, що відбуваються на поверхні Землі або в околі Землі і пояснюються впливом обертання Землі навколо власної осі.

У північній півкулі тіла, що рухаються вздовж земної поверхні в будь-якому напрямі, внаслідок обертання Землі будуть відхилятися праворуч від прямого руху. В південній півкулі відхилення буде відбуватися ліворуч.

Цим пояснюється те, що в північній півкулі праві береги рік круті, а ліві — пологі (ріки руйнують праві береги). Аналогічні явища спостерігаються і при русі потягів: права по ходу потяга рейка зношується швидше ніж ліва.

Вільно падаюче тіло в околі Землі внаслідок обертання Землі відхиляється від вертикалі на схід, а тіло, кинуте вгору, — на захід. Величини цих відхилень малі й помітні тільки за значних висот падіння або підйому.

16.14. Окремі випадки відносного руху матеріальної точки.

Принцип відносності класичної механіки

Розглянемо окремі випадки відносного руху матеріальної точки.

1. Матеріальна точка рухається рівномірно і прямолінійно відносно неінерціальної системи відліку.

У цьому випадку відносна швидкість \vec{V}_r стала, тобто $\vec{V}_r = \overline{\text{const}}$ і відносне прискорення точки $\vec{W}_r = \vec{0}$. На підставі рівняння (16.94) матимемо

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_e^{\text{ін}} + \vec{F}_c^{\text{ін}} = \vec{0}. \quad (16.97)$$

2. Матеріальна точка перебуває у стані спокою відносно неінерціальної системи відліку.

У цьому випадку відносна швидкість і прискорення точки дорівнюють нулю, тобто $\vec{V}_r = \vec{0}$, $\vec{W}_r = \vec{0}$. На підставі рівняння (16.94) матимемо

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_e^{\text{ін}} = \vec{0}. \quad (16.98)$$

Рівняння (16.98) визначає умову відносного спокою матеріальної точки.

3. Неінерціальна система відліку здійснює поступальний рух відносно інерціальної системи відліку.

У цьому випадку коріолісове прискорення дорівнює нулю, тобто $\vec{W}_c = \vec{0}$, і, отже, коріолісова сила інерції також дорівнює нулю, тобто $\vec{F}_c^{in} = \vec{0}$. Тоді рівняння (16.94) набирає вигляду

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_e^{in}. \quad (16.99)$$

4. Неінерціальна система відліку рухається поступально, рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної системи відліку.

У цьому випадку переносне і коріолісове прискорення дорівнюють нулю, тобто $\vec{W}_e = \vec{0}$ (оскільки $\vec{V}_e = \text{const}$), $\vec{W}_c = \vec{0}$ (оскільки $\vec{\omega}_e = \vec{0}$). Тому рівняння (16.93) набирає вигляду

$$m\vec{W}_r = \vec{F}. \quad (16.100)$$

Порівнюючи рівняння (16.100) і рівняння (16.2), можна дійти висновку, що при поступальному, рівномірному і прямолінійному русі рухомої системи відліку відносно нерухомої (інерціальної) системи відліку рівняння відносного руху матеріальної точки збігається з рівнянням абсолютного руху цієї точки. Отже, відносний рух матеріальної точки відносно рухомої системи відліку відбувається так, неначе вона є нерухомою (інерціальною). Це твердження становить зміст принципу відносності класичної механіки: *ніякими механічними експериментами не можна виявити, перебуває дана система відліку у спокої чи здійснює поступальний, рівномірний і прямолінійний рух.*

16.15. Відносна рівновага матеріальної точки на поверхні Землі.

Сила тяжіння

Розглянемо відносний спокій матеріальної точки, що розміщена на поверхні Землі. Земля обертається навколо власної осі з кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{\pi}{43082} = 0,0000729 \frac{1}{\text{с}}.$$

Припустимо, що в точці M на поверхні Землі зважують будь-яке тіло (матеріальну точку) за допомогою, наприклад, пружинних ваг (рис. 16.66). Відповідно до умови відносного спокою (16.98) на матеріальну точку будуть діяти сила притягання до центра Землі \vec{F} , реакція пружини \vec{R} , яка згідно із зако-

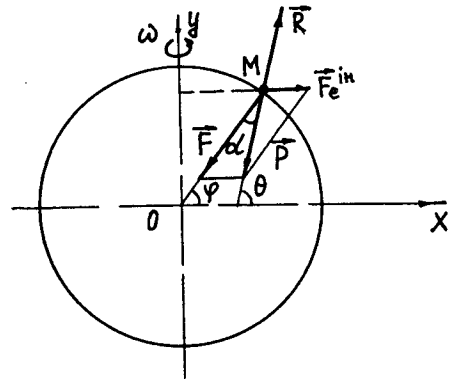


Рис. 16.66

ном дії і протидії дорівнює силі ваги \vec{P} матеріальної точки, оскільки при зважуванні вимірюється саме ця сила, тобто

$$\vec{P} = -\vec{R}; \quad (16.101)$$

сила інерції переносного руху $\vec{F}_e^{\text{ін}}$.

Тоді на підставі рівняння (16.98) і рівності (16.101) матимемо

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_e^{\text{ін}}. \quad (16.102)$$

Отже, з рівняння (16.102) випливає, що сила ваги \vec{P} на Землі є рівнодією двох сил: сили притягання \vec{F} і сили інерції переносного руху $\vec{F}_e^{\text{ін}}$, що виникає внаслідок обертання Землі навколо власної осі, тому при розв'язанні задач статички ніякі додаткові поправки для врахування обертання Землі не вводяться (див. розділ "Статика").

Кут φ між лінією дії сили притягання \vec{F} і площиною екватора (рис. 16.66) називається *геоцентричною широтою місцевості*, а кут θ , тобто кут між лінією дії сили ваги \vec{P} і площиною екватора, — *географічною широтою місцевості*.

Визначимо, наскільки величина сили ваги \vec{P} відрізняється від сили притягання \vec{F} . Спроеціюємо рівняння (16.102) на вісь, що збігається з напрямом вектора \vec{P} (рис. 16.66), матимемо

$$P = F \cos \alpha - F_e^{\text{ін}} \cos(\varphi + \alpha), \quad (16.103)$$

де α — кут між лініями дії векторів \vec{F} і \vec{P} .

Згідно із законом всесвітнього тяжіння величина сили \vec{F}

$$F = f \frac{Mm}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} m = 9,8265m,$$

де f — гравітаційна стала; M — маса Землі; $r = R$ — радіус Землі.

Величина сили інерції переносного руху $\vec{F}_e^{\text{ін}}$

$$F_e^{\text{ін}} = mR\omega^2 \cos \varphi = 6,37 \cdot 10^6 \left(\frac{\pi}{43082} \right)^2 m \cos \varphi \approx 0,034m \cos \varphi,$$

де ω — кутова швидкість обертання Землі.

Підставляючи значення F і $F_e^{\text{ін}}$ у рівняння (16.103) і нехтуючи величиною кута α , здобудемо

$$P \approx (9,8265 - 0,034 \cos^2 \varphi) m. \quad (16.104)$$

З формули (16.104) випливає, що найбільше значення сила \vec{P} має на полюсі, а найменше — на екваторі. Для широти Києва ($\varphi = 50^{\circ}27'$) з формули (16.104) знаходимо $g \approx 9,812 \text{ м/с}^2$.

Якщо спроекціювати сили \vec{F} , \vec{P} і $\vec{F}_e^{\text{ін}}$ на вісь, перпендикулярну до лінії дії сили \vec{P} (рис. 16.66), то можна визначити різницю між географічною і геоцентричною широтами:

$$F \sin \alpha = F_e^{\text{ін}} \sin(\varphi + \alpha),$$

звідки

$$\text{tg } \alpha \approx \frac{0,034 \sin 2\varphi}{2(9,8265 - 0,034 \cos^2 \varphi)}. \quad (16.105)$$

Для широти Києва з формули (16.105) дістанемо $\alpha \approx 5,86'$.

З розглянутого випливає, що сила ваги \vec{P} за величиною мало відрізняється від сили притягання \vec{F} і напрям вертикалі (лінії дії сили \vec{P}) утворює з напрямом сили \vec{F} дуже малий кут α .

16.16. Методика розв'язання задач динаміки відносного руху матеріальної точки. Приклади розв'язання задач і типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю

Розв'язання задач динаміки відносного руху матеріальної точки слід виконувати в такій послідовності:

- 1) розкласти абсолютний рух матеріальної точки на відносний і переносний; вибрати нерухому і рухому системи відліку;
- 2) записати початкові умови відносного руху матеріальної точки;
- 3) прикласти до точки всі активні сили;
- 4) застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, відкинути умовно в'язь і замінити її вплив на матеріальну точку реакцією в'язі;
- 5) прикласти до точки переносну і коріолісову сили інерції;
- 6) скласти диференціальні рівняння відносного руху точки в проекціях на рухомі осі координат;
- 7) проінтегрувати диференціальні рівняння відносного руху точки і за початковими умовами руху точки визначити сталі інтегрування;
- 8) з одержаних рівнянь визначити шукані величини.

Приклад 16.8. У відцентрових бурякорізках з нерухомими ножами для здійснення обертального руху коренів буряка застосовують диск з трьома

криволінійними або прямолінійними лопатками, що виступають над поверхнею диска. Диск обертається навколо вертикальної осі. При обертанні диска буряк ковзає вздовж лопаток по диску до його периферії і обертається по колу, зустрічаючи різальну кромку ножа.

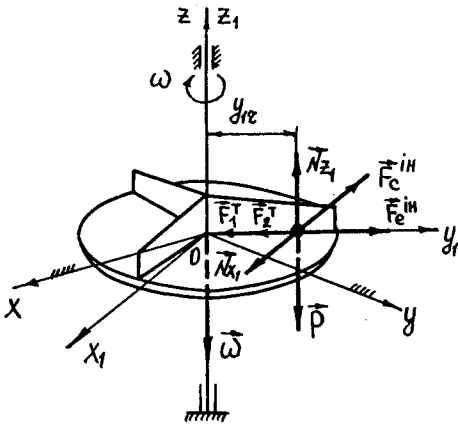


Рис. 16.67

Розглянемо диск з трьома прямолінійними лопатками, що обертається навколо осі z_i зі сталою кутовою швидкістю ω (рис. 16.67). На поверхні диска розміщений корінь буряка масою m . При обертанні диска корінь буряка ковзає по диску і вздовж лопаток. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f .

Скласти диференціальне рівняння відносного руху кореня буряка.

Розв'язання. Зв'яжемо з диском координатні осі $Ox_1y_1z_1$, взявши початок координат у центрі диска. Положення кореня буряка на диску (на рис. 16.67 — матері-

альна точка M) будемо визначати координатою y_{1r} .

Система координат $Ox_1y_1z_1$ обертається разом з диском і, таким чином, не є інерціальною, тому рух точки M відносно диска буде описуватися диференціальним рівнянням відносного руху точки.

При рівномірному обертанні диска переносне прискорення \vec{W}_c точки M складається тільки з однієї доосьової складової, величина якої $W_c = \omega^2 y_{1r}$. Отже, переносна сила інерції $F_c^{\text{in}} = m\omega^2 y_{1r}$, і напрямлена вздовж осі y_1 , як це зображено на рис. 16.67.

Оскільки відносна швидкість кореня буряка $\vec{V}_r = \dot{y}_{1r} \vec{l}_1$, то вектор коріолісового прискорення $\vec{W}_c = 2\dot{y}_{1r} (\vec{\omega} \times \vec{l}_1)$ напрямлений паралельно осі x_1 у бік зростання координати x_1 . Отже, коріолісова сила інерції $F_c^{\text{in}} = 2m\omega \dot{y}_{1r}$, і напрямлена паралельно осі x_1 у протилежний бік до додатного напрямку осі x_1 .

Розглянемо сили тертя, що діють на корінь буряка. Під дією сили ваги кореня \vec{P} корінь буряка тисне на поверхню диска, і при русі кореня у бік зростання координати y_{1r} виникає сила тертя \vec{F}_1^{tr} . Ця сила має напрям, протилежний до напрямку вектора відносної швидкості кореня, тобто вздовж осі y_1 ліворуч. За модулем сила $\vec{F}_1^{\text{tr}} = fN_2$.

Під дією коріолісової сили інерції \vec{F}_c^{in} корінь буряка тисне на поверхню лопатки. Виникає сила тертя \vec{F}_2^{tr} , що становить: $\vec{F}_2^{\text{tr}} = fN_{x_1}$. Ця сила тертя має

напрямок також протилежний до напрямку вектора відносної швидкості кореня. Отже, обидві сили тертя мають один і той самий напрямок (рис. 16.67).

Таким чином, на корінь буряка при його відносному русі діють такі сили: сила ваги кореня \vec{P} , сили тертя \vec{F}_1^r , \vec{F}_2^r , реакції поверхонь \vec{N}_{x_1} , \vec{N}_{z_1} , переносна \vec{F}_e^{in} і коріолісова \vec{F}_c^{in} сили інерції (рис. 16.67). Рівняння динаміки відносного руху кореня буряка має вигляд

$$m\vec{W}_r = \vec{P} + \vec{F}_1^r + \vec{F}_2^r + \vec{N}_{x_1} + \vec{N}_{z_1} + \vec{F}_e^{in} + \vec{F}_c^{in}.$$

Проекціюючи це рівняння на осі x_1 , y_1 і z_1 , дістанемо:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{1r} &= N_{x_1} - F_c^{in}; \\ m\ddot{y}_{1r} &= F_e^{in} - F_1^r - F_2^r; \\ m\ddot{z}_{1r} &= N_{z_1} - P. \end{aligned}$$

Відносний рух кореня буряка відбувається вздовж осі y_1 , тому $x_{1r} = z_{1r} = 0$.

Отже, $\ddot{x}_{1r} = \ddot{z}_{1r} = 0$ і останні рівняння набирають вигляду:

$$\begin{aligned} 0 &= N_{x_1} - 2m\omega\dot{y}_{1r}; \\ \ddot{y}_{1r} &= \omega^2 y_{1r} - \frac{fN_{x_1}}{m} - \frac{fN_{z_1}}{m}; \\ 0 &= N_{z_1} - mg. \end{aligned}$$

З першого і третього рівнянь здобудемо:

$$N_{x_1} = 2m\omega\dot{y}_{1r}; \quad N_{z_1} = mg.$$

Підставляючи ці значення в друге рівняння, дістанемо диференціальне рівняння відносного руху кореня буряка:

$$\ddot{y}_{1r} + 2f\omega\dot{y}_{1r} - \omega^2 y_{1r} = -fq.$$

Приклад 16.9. Розглянемо задачу про відносну рівновагу матеріальної частинки, об'єм якої v і густина ρ , у шарі рідини, що рівномірно обертається навколо нерухомої осі (рис. 16.68). Густина рідини дорівнює ρ_p . Ця задача важлива для розуміння процесу центрифугування, який має широке застосування в харчовій промисловості.

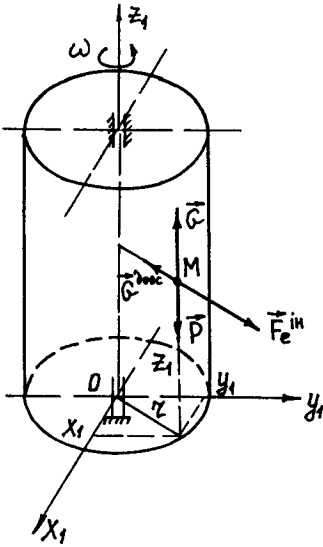


Рис. 16.68

Розв'язання. Розглянемо сили, що діють на матеріальну частинку: сила ваги \vec{P} частинки, що за величиною становить: $P = \rho \nu g$; переносна сила інерції $\vec{F}_e^{\text{ін}}$, що за величиною становить: $F_e^{\text{ін}} = \rho \nu \omega^2 r$; архімедова піднімальна сила \vec{G} , величина якої $G = \rho_p \nu g$; архімедова доосьова сила $\vec{G}^{\text{доос}}$, величина якої $G^{\text{доос}} = \rho_p \nu \omega^2 r$.

Згідно з умовою відносного спокою (16.98) геометрична сума сил, що діють на матеріальну частинку, має дорівнювати нулю:

$$\vec{P} + \vec{G} + \vec{F}_e^{\text{ін}} + \vec{G}^{\text{доос}} = \vec{0}.$$

Проекціюючи це рівняння на декартові осі координат $Ox_1y_1z_1$ (система координат $Ox_1y_1z_1$ обертається разом з рідиною), здобудемо:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx_1} = 0; \quad \rho \nu \omega^2 x_1 - \rho_p \nu \omega^2 x_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky_1} = 0; \quad \rho \nu \omega^2 y_1 - \rho_p \nu \omega^2 y_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz_1} = 0; \quad \rho_p \nu g - \rho \nu g = 0,$$

звідки матимемо:

$$(\rho - \rho_p) \nu \omega^2 x_1 = 0; \quad (1)$$

$$(\rho - \rho_p) \nu \omega^2 y_1 = 0; \quad (2)$$

$$(\rho - \rho_p) \nu g = 0. \quad (3)$$

З рівнянь (1) — (3) випливає:

1. Якщо густина матеріальних частинок ρ , що обертаються разом з рідиною, більша ніж густина рідини, тобто $\rho > \rho_p$, то при центрифугуванні матеріальні частинки будуть тонути і відкидатися до периферії.

2. Якщо густина матеріальних частинок ρ , що обертаються разом з рідиною, менша ніж густина рідини, тобто $\rho < \rho_p$, то при центрифугуванні матеріальні частинки будуть спливати і рухатися до осі обертання.

Так, в маслоробних центрифугах зерна масла, що утворилися, є більш легкими, ніж водяниста сироватка, що їх оточує; тому зерна масла спливають угору і збираються в околі осі центрифуги. В цукрових центрифугах частинки цукру, що відцентрифуговані з цукровим утфелем, опускаються на дно центрифуги і рухаються до стінок корпусу.

Типові задачі динаміки відносного руху матеріальної точки для самостійної проробки та самоконтролю

Задача 16.41. Горизонтальна трубка OD рівномірно обертається навколо вертикальної осі AB з кутовою швидкістю ω (рис. 16.69). Усередині трубки розташовано тіло M . Визначити швидкість V тіла відносно трубки в момент його вильоту, якщо у початковий момент $V = 0$, $x = x_0$, довжина трубки дорівнює L . Тертям знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 16.69. Початкові умови руху тіла M : $t = 0$; $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = 0$. Диференціальне рівняння відносного руху тіла M має ви-

гляд $\ddot{x}_1 = \omega^2 x_1$, де $\ddot{x}_1 = \frac{\dot{x}_1 d \dot{x}_1}{dx_1}$.

Після інтегрування здобудемо $\dot{x}_1^2 = \omega^2 x_1^2 + 2c$, де

$c = -\frac{\omega^2 x_0^2}{2}$. Тоді при $x_1 = L$ матимемо

$V = \omega \sqrt{L^2 - x_0^2}$.

Задача 16.42. За умовою попередньої задачі визначити час руху тіла в трубці.

Розв'язання. Перший інтеграл диференціального рівняння руху тіла M

має вигляд $\dot{x}_1 = \omega \sqrt{x_1^2 - x_0^2}$, де $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$.

Після інтегрування здобудемо

$\ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 - x_0^2}) + c_2 = \omega t$,

де $c_2 = -\ln x_0$. Тоді при $x_1 = L$ матимемо

$t = \frac{1}{\omega} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}$.

Задача 16.43. За умовою задачі 16.41 скласти диференціальне рівняння руху тіла в трубці, якщо коефіцієнт тертя між тілом і трубкою дорівнює f .

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 16.70. Диференціальне рівняння руху тіла M

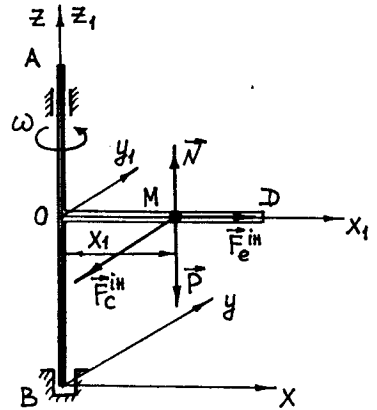


Рис. 16.69

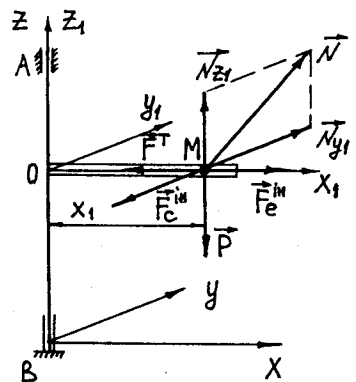


Рис. 16.70

має вигляд $m \ddot{x}_1 = F_e^{\text{ін}} - F^T$, де $F_e^{\text{ін}} = m\omega^2 x_1$; $F^T = f\sqrt{(N_{z_1})^2 + (N_{y_1})^2}$; $N_{z_1} = mg$;

$$N_{y_1} = 2\omega \dot{x}_1.$$

$$\text{Остаточню } \ddot{x}_1 = \omega^2 x_1 - f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 \dot{x}_1^2}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Як формулюється закон інерції?
2. Як формулюється основний закон динаміки?
3. Що називається масою матеріальної точки? Які властивості фізичних тіл ураховуються поняттям маси?
4. Як формулюється закон дії і протидії?
5. Як формулюється закон незалежної дії сил?
6. Як вивести диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки при трьох способах задання її руху?
7. Який фізичний зміст аксіоми про звільнення матеріальної точки від в'язі?
8. Як вивести диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки при трьох способах задання її руху?
9. Як формулюється принцип Д'Аламбера для невільної матеріальної точки? Яке значення він має?
10. Що таке д'аламберова сила інерції і як вона визначається?
11. Як формулюються дві задачі динаміки вільної матеріальної точки? За допомогою яких математичних операцій їх розв'язують і як саме?
12. Скільки сталих інтегрування містить загальний розв'язок диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, якщо вона рухається в просторі, на площині, вздовж прямої?
13. Що таке початкові умови руху матеріальної точки і як їх записують при трьох способах задання руху точки?
14. Як формулюються дві задачі динаміки невільної матеріальної точки?
15. У чому полягає відміна між диференціальними рівняннями відносно й абсолютного руху матеріальної точки?
16. Що таке переносна і коріолісова сили інерції і як вони визначаються?
17. Як записуються рівняння відносного спокою матеріальної точки?
18. У чому полягає сутність принципу відносності класичної механіки?
19. Під дією якої сили відбуваються вільні коливання матеріальної точки?
20. Як записується диференціальне рівняння вільних коливань матеріальної точки?
21. Від яких факторів залежать частота, період, амплітуда і початкова фаза вільних коливань матеріальної точки?

22. За яким законом змінюється амплітуда згасаючих коливань? Що таке декремент коливання?
23. Який вигляд має графік вільних і згасаючих коливань?
24. За якими формулами визначається період вільних і згасаючих коливань?
25. Який вигляд має диференціальне рівняння змушених коливань матеріальної точки і який його загальний розв'язок?
26. З яких рухів складається рух матеріальної точки, на яку діють відновлювальна і збурювальна сили?
27. За якими формулами визначаються частота і період змушених коливань матеріальної точки?
28. Від яких факторів залежить амплітуда змушених коливань матеріальної точки?
29. Що таке коефіцієнт динамічності і яка його залежність від відношення p/k ?
30. В якому випадку при дії на матеріальну точку гармонічної збурювальної сили виникає резонанс? У чому полягає це явище?
31. Який вплив чинить опір середовища на амплітуду, фазу і період змушених коливань?
32. За якою формулою визначається амплітуда змушених коливань за наявності опору середовища?

Глава 17

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО МЕХАНІЧНУ СИСТЕМУ. ДВІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

17.1. Вільна механічна система. Внутрішні й зовнішні сили. Властивості внутрішніх сил

Механічною системою, або системою матеріальних точок, називається сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв'язані.

Система матеріальних точок називається вільною, якщо в будь-який момент часу всі точки системи можуть займати довільні положення в системі відліку і мати довільні швидкості.

При русі вільної механічної системи точки системи взаємодіють як з матеріальними точками, що належать цій системі, так і з матеріальними точками або тілами, що не належать до її складу. *Сили, з якими матеріальні точки даної системи взаємодіють з матеріальними точками або тілами, що не належать до даної системи, називаються зовнішніми силами. Сили взаємодії між матеріальними точками даної механічної системи називаються внутрішніми.* Зовнішні сили позначають великою літерою латинського алфавіту з верхнім індексом “e”, наприклад \vec{F}^e , а внутрішні — з верхнім індексом “i”, наприклад \vec{F}^i .

Отже, сили, що діють на точки вільної механічної системи при її русі, можна поділити на зовнішні \vec{F}^e і внутрішні \vec{F}^i .

Розглянемо властивості внутрішніх сил механічної системи. Згідно із третім законом Ньютона геометрична сума сил взаємодії між двома точками даної системи, наприклад точками M_1 і M_2 (рис. 17.1), дорівнює нулю:

$$\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i = \vec{0}.$$

Головний вектор внутрішніх сил \vec{R}_O^i буде складатися з векторної суми таких сил, тому

$$\vec{R}_O^i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = \vec{0}, \quad (17.1)$$

тобто геометрична сума усіх внутрішніх сил системи (головний вектор внутрішніх сил) дорівнює нулю.

Розглянемо, чому дорівнює геометрична сума

моментів сил \vec{F}_1^i і \vec{F}_2^i відносно довільної точки O (рис. 17.1). Неважно побачити, що має місце рівність

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1^i) + \vec{M}_O(\vec{F}_2^i) = \vec{0}, \quad (17.2)$$

оскільки обидві сили мають однакові плечі відносно точки O і взаємно протилежний напрям. Головний момент внутрішніх сил \vec{M}_O^i відносно довільної точки O буде складатися з геометричної суми таких моментів. Тому

$$\vec{M}_O^i = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O^i(\vec{F}_k^i) = \vec{0}, \quad (17.3)$$

тобто геометрична сума моментів усіх внутрішніх сил системи відносно довільної точки (головний момент внутрішніх сил) дорівнює нулю.

Зауважимо: якщо головний вектор \vec{R}_O^i і головний момент \vec{M}_O^i внутрішніх сил механічної системи дорівнюють нулю, це не означає, що внутрішні сили взаємно зрівноважуються і не впливають на рух системи, оскільки ці сили прикладені до різних точок і можуть спричинити взаємні переміщення цих точок (рис. 17.1).

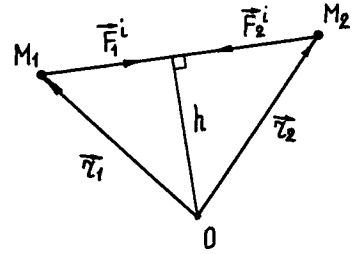


Рис. 17.1

17.2. Невільна механічна система. В'язі. Поняття про рівняння в'язей. Класифікація сил, прикладених до системи. Поняття про кількість ступенів вільності системи

Механічна система, або система матеріальних точок, називається **невільною**, якщо внаслідок яких-небудь обмежень (умов) точки системи не можуть займати довільні положення в системі відліку і мати довільні швидкості.

Умови, що обмежують рух точок системи, називаються **в'язями**. Аналітично в'язі можна записати у вигляді рівнянь або нерівностей, які називаються **рівняннями в'язей**. Так, уявімо дві матеріальні точки M_1 і M_2 (рис. 17.2), з'єднані жорстким невагомим стрижнем. Стрижень не дозволяє точкам ні зближуватися, ні віддалятися. Отже, стрижень є в'яззю, накладеною на

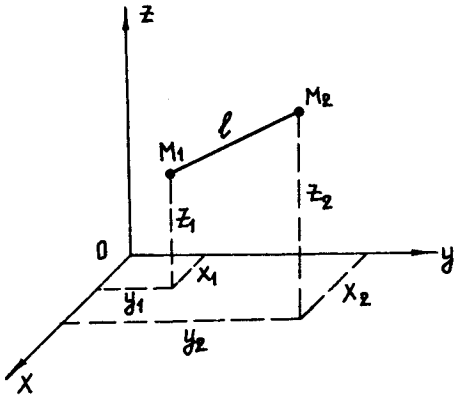


Рис. 17.2

точки. Якщо координати точок відповідно x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 , а довжина стрижня l , то рівняння в'язі, що розглядається, має вигляд

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0. \quad (17.4)$$

В'язь, що описується рівнянням (17.4), є голономною, утримувальною і стаціонарною. Більш докладні відомості про класифікацію в'язей і їх рівняння викладено в главі 26.

Сили, що діють на точки механічної системи з боку тіл, що здійснюють в'язі, як відомо, називаються *реакціями в'язей* і вводяться на підставі аксіоми про звільнення від в'язей (див. параграф 16.4).

При русі невідільної механічної системи точки системи взаємодіють з тілами, що її оточують. Якщо внаслідок такої взаємодії точки системи отримують прискорення, то мірою цієї взаємодії будуть активні (задані) сили. Поряд з розглянутими взаємодіями мають місце також взаємодії з тілами, що здійснюють в'язі. Мірою такої взаємодії будуть реакції в'язей. *Отже, сили, що діють на точки невідільної механічної системи, можна поділити на активні (задані) сили \vec{F} і реакції в'язей \vec{R} .*

З розглянутого випливає (див. також параграф 17.1), що сили, прикладені до точок механічної системи, класифікують за двома ознаками. За першою ознакою сили поділяють на зовнішні та внутрішні, а за другою — на активні сили та реакції в'язей.

Таким чином, будь-яка сила, що діє на точку механічної системи, за наведеною класифікацією сил є зовнішньою або внутрішньою і одночасно вона є активною силою або реакцією в'язі, тобто поділ сил на внутрішні й зовнішні не залежить від того, є сила активною чи вона є реакцією в'язі.

Якщо розглянути рух вільної механічної системи, то положення кожної точки системи можна визначити, наприклад, трьома декартовими координатами x, y, z . Тоді положення системи, що складається з n матеріальних точок, буде визначатися $3n$ координатами.

Якщо розглянути рух невідільної механічної системи, яка складається з n матеріальних точок і на яку накладено h в'язей вигляду (17.4), то положення такої системи буде визначатися кількістю незалежних параметрів:

$$S = 3n - h. \quad (17.5)$$

Кількість незалежних параметрів S , які цілком однозначно визначають положення точок механічної системи, називається *кількістю ступенів вільності системи*. Так, у випадку вільної механічної системи кількість

ступенів вільності дорівнює $3n$, а у випадку невільної механічної системи — $3n - h$.

У розглянутому вище прикладі — системі двох матеріальних точок, що з'єднанні голономною, утримувальною і стаціонарною в'яззю ($n = 2$), — кількість в'язей дорівнює одиниці ($h = 1$). Отже, ця система має $S = 3n - h = 5$ ступенів вільності.

17.3. Диференціальні рівняння руху механічної системи

Відповідно до класифікації сил, що діють на точки механічної системи при її русі, складемо диференціальні рівняння руху механічної системи.

Нехай вільна механічна система складається з n матеріальних точок і рухається відносно інерціальної системи відліку. Позначимо рівнодіїні зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на k -ту точку системи, через \vec{F}_k^e і \vec{F}_k^i . Тоді, розглядаючи кожну точку системи як вільну, що рухається під дією сил \vec{F}_k^e і \vec{F}_k^i , застосуємо до неї рівняння (16.2):

$$m_k \vec{W}_k = \vec{F}_k.$$

Беручи до уваги те що $\vec{W}_k = \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2}$, $\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$ і система складається з n матеріальних точок, матимемо:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i; \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i; \\ \dots\dots\dots \\ m_n \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{array} \right. \quad (17.6)$$

Рівняння (17.6) називаються *диференціальними рівняннями руху вільної механічної системи у векторній формі*.

Якщо спроекціювати векторну систему рівнянь (17.6) на осі нерухомої декартової системи координат, здобудемо систему з $3n$ скалярних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_j \ddot{x}_j = \sum_{k=1}^n F_{kx_j}^e + \sum_{k=1}^n F_{kx_j}^i; \\ m_j \ddot{y}_j = \sum_{k=1}^n F_{ky_j}^e + \sum_{k=1}^n F_{ky_j}^i; \\ m_j \ddot{z}_j = \sum_{k=1}^n F_{kz_j}^e + \sum_{k=1}^n F_{kz_j}^i, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (17.7)$$

Рівняння (17.7) називаються *диференціальними рівняннями руху вільної механічної системи в проєкціях на осі нерухомої декартової системи координат*.

Нехай невільна механічна система складається з n матеріальних точок і рухається відносно інерціальної системи відліку. Застосуємо аксіому про звільнення від в'язей і замінимо їх відповідними реакціями. Позначимо рівнодійні активних сил і реакції в'язей (із числа зовнішніх і внутрішніх сил), що діють на k -ту точку системи, через \vec{F}_k і \vec{R}_k . Тоді, розглядаючи кожену точку системи як вільну, що рухається під дією сил \vec{F}_k і \vec{R}_k , застосуємо до неї рівняння (16.11):

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k + \vec{R}_k.$$

Через те що система складається з n матеріальних точок, матимемо:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{R}_1; \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2 + \vec{R}_2; \\ \dots \dots \dots \\ m_n \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n + \vec{R}_n. \end{cases} \quad (17.8)$$

Рівняння (17.8) називаються *диференціальними рівняннями руху невільної механічної системи у векторній формі*.

Якщо спроекціювати векторну систему рівнянь (17.8) на осі нерухомої декартової системи координат, здобудемо систему з $3n$ скалярних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m_j \ddot{x}_j = \sum_{k=1}^n F_{kx_j} + \sum_{k=1}^n R_{kx_j}; \\ m_j \ddot{y}_j = \sum_{k=1}^n F_{ky_j} + \sum_{k=1}^n R_{ky_j}; \\ m_j \ddot{z}_j = \sum_{k=1}^n F_{kz_j} + \sum_{k=1}^n R_{kz_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (17.9)$$

Рівняння (17.9) називаються *диференціальними рівняннями руху невільної механічної системи в проекціях на осі нерухомої декартової системи координат*.

17.4. Дві задачі динаміки механічної системи

Відповідно до двох задач динаміки в динаміці механічної системи розв'язуються дві задачі: пряма (перша задача) і обернена (друга задача).

1. Пряма задача динаміки вільної механічної системи. Знаючи кінематичні рівняння руху точок механічної системи і їх маси, визначити рівнодійні сил, що діють на точки системи.

2. Обернена (основна) задача динаміки вільної механічної системи. Знаючи сили, що діють на точки механічної системи (зовнішні і внутрішні), маси точок і початкові умови їх руху, визначити закон руху усіх точок системи.

Якщо механічна система невільна, то прямою і оберненою задачами динаміки невільної механічної системи будуть такі.

1. Пряма задача динаміки невільної механічної системи. Знаючи кінематичні рівняння руху точок механічної системи, їх маси і активні сили, прикладені до точок системи (із числа зовнішніх і внутрішніх сил), визначити рівнодійні реакцій в'язей, накладені на точки системи (із числа зовнішніх і внутрішніх сил).

2. Обернена (основна) задача динаміки невільної механічної системи. Знаючи активні сили, що діють на точки системи, рівняння накладених в'язей, початкові умови руху точок і їх маси, визначити закон руху кожної точки системи і реакції накладених в'язей.

Розв'язання прямої задачі динаміки механічної системи, тобто визначення невідомих сил, що діють на точки системи, за допомогою рівнянь (17.7) або (17.9) не викликає принципових утруднень, якщо кількість невідомих сил не перевищує кількості рівнянь, необхідних для їх визначення. Порядок її розв'язання аналогічний порядку розв'язання першої задачі динаміки точки.

Розв'язання оберненої (основної) задачі динаміки вільної механічної системи шляхом інтегрування диференціальних рівнянь (17.7) викликає значні труднощі. Вони полягають у тому, що рівняння (17.7) можуть містити невідомі внутрішні сили, які необхідно попередньо виключити з рівнянь. Крім

того, система може складатися зі значної кількості точок. Зрештою процес інтегрування системи рівнянь (17.7) у загальному вигляді сам по собі трудомісткий.

Задача інтегрування диференціальних рівнянь невіЛЬНОЇ механічної системи (17.9) поряд із розглянутими труднощами викликає такі, що зумовлені наявністю в'язей.

По-перше, не всі координати точок системи є незалежними, оскільки вони можуть бути зв'язані співвідношеннями (17.4), тому не всі рівняння системи (17.9) будуть незалежними.

По-друге, реакції в'язей є невідомими величинами і в процесі інтегрування рівнянь (17.9) самі підлягають визначенню.

Таким чином, вся подальша побудова динаміки спрямована на уникнення розглянутих труднощів або на пошук шляхів їх подолання.

Запитання для самоперевірки

1. В яких випадках механічна система називається вільною, невіЛЬНОЮ?
2. Як класифікують сили в динаміці механічної системи?
3. Які властивості мають внутрішні сили?
4. Запишіть диференціальні рівняння руху вільної механічної системи.
5. Запишіть диференціальні рівняння руху невіЛЬНОЇ механічної системи.
6. Сформулюйте дві задачі динаміки вільної і невіЛЬНОЇ механічної системи.

Глава 18

ЦЕНТР МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ. ГЕОМЕТРІЯ МАС

18.1. Центр мас механічної системи

При русі механічної системи (системи матеріальних точок) значну роль відіграє не тільки маса системи, а й розподіл мас у системі. Однією з характеристик розподілу мас у системі є центр мас.

Розглянемо механічну систему, яка складається з n матеріальних точок (рис. 18.1). Позначимо маси точок відповідно m_1, m_2, \dots, m_n . Положення точок системи відносно нерухомої системи відліку, що визначається декартовою системою координат $Oxyz$, будемо визначати радіусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$.

Геометрична точка C , яка визначається радіусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k, \quad (18.1)$$

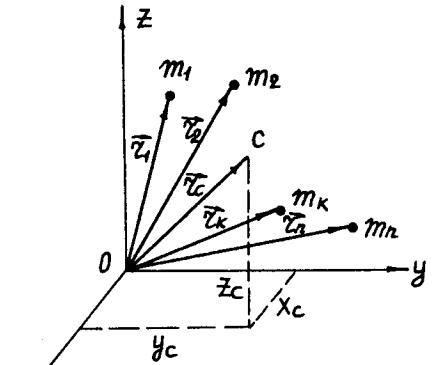


Рис. 18.1

називається центром мас механічної системи матеріальних точок.

У формулі (18.1) $M = \sum_{k=1}^n m_k$ — маса механічної системи.

Якщо спроекціювати векторну рівність (18.1) на осі координат, то матимемо скалярні рівності для визначення декартових координат центра мас механічної системи:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (18.2)$$

Формули (18.2) аналогічні формулам, що визначають координати центра ваги твердого тіла (див. розділ “Статика”, параграф 6.1), звідки випливає, що методи визначення центра мас твердого тіла як незмінної механічної системи також аналогічні.

Незважаючи на те що положення центра мас збігається з положенням центра ваги твердого тіла, ці поняття не є тотожними. Поняття центра ваги має сенс тільки для твердого тіла, що розміщено в однорідному полі тяжіння. Поняття ж про центр мас як характеристика розподілу мас у системі має сенс для будь-яких механічних систем і не залежить від того, діють на точки системи які-небудь сили чи ні.

Положення центра мас механічної системи не залежить від того, в якій системі відліку воно визначається, тобто центр мас є інваріантним відносно вибору системи відліку.

Дамо кілька практичних рекомендацій для визначення положення центра мас механічної системи. Якщо маси механічної системи розташовані симетрично відносно деякої площини, то центр мас розміщений у цій площині. Якщо ж маси системи розташовані симетрично відносно двох площин, то центр мас розміщений на лінії їх перетину.

При симетричному розташуванні мас механічної системи відносно трьох площин центр мас розміщений у точці перетину цих площин.

Якщо дві матеріальні точки механічної системи лежать на прямій лінії, то центр мас цих точок розміщений також на цій прямій і поділяє відстань між точками на відрізки, обернено пропорційні масам даних точок.

18.2. Моменти інерції механічної системи

Центр мас характеризує розподіл мас системи невичерпно. Розглянемо інші характеристики. До них належать моменти інерції відносно осі, точки і площини, які відповідно характеризують розподіл мас даної системи відносно осі, точки і площини.

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок. Для введення понять моментів інерції побудуємо декартову систему координат з початком в довільній точці O (рис. 18.2).

Моментом інерції механічної системи відносно будь-якої осі (осьовим моментом інерції) називається скалярна величина, що дорівнює сумі добутків маси кожної точки на квадрат її відстані до цієї осі:

$$\begin{aligned}
 J_x &= \sum_{k=1}^n m_k h_{kx}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2); \\
 J_y &= \sum_{k=1}^n m_k h_{ky}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2); \\
 J_z &= \sum_{k=1}^n m_k h_{kz}^2 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2).
 \end{aligned}
 \tag{18.3}$$

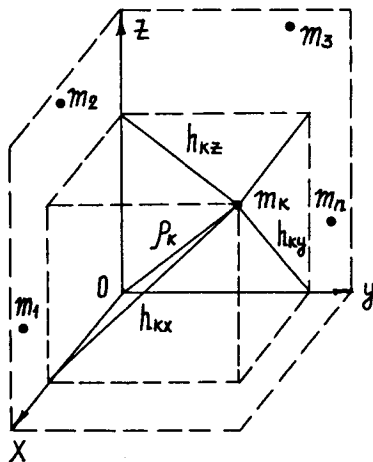


Рис. 18.2

При неперервному розподілі мас суми у формулах (18.3) переходять в інтеграли по всій масі M тіла. Так, при обчисленні моментів інерції однорідного твердого тіла (незмінної механічної системи) тверде тіло можна поділити на елементарні об'єми dv , кожний з яких має координати x, y, z , і масу $dm = \rho dv$, де ρ — густина елементарного об'єму dv . Тоді суми вигляду $\sum m_k (y_k^2 + z_k^2)$, $\sum m_k (z_k^2 + x_k^2)$, $\sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$ при граничному переході перетворюються в інтеграли, поширені на об'єм, що займає тіло:

$$\begin{aligned}
 J_x &= \iiint \rho (y^2 + z^2) dv = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm; \\
 J_y &= \iiint \rho (z^2 + x^2) dv = \int_{(M)} (z^2 + x^2) dm; \\
 J_z &= \iiint \rho (x^2 + y^2) dv = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm.
 \end{aligned}
 \tag{18.4}$$

Отже, формули (18.4) визначають осьові моменти інерції твердого тіла.

Полярним моментом інерції механічної системи, або моментом інерції системи відносно точки, називається скалярна величина, що дорівнює сумі добутків маси кожної точки на квадрат її відстані до полюса (точки). Якщо за полюс взяти початок координат (рис. 18.2), то матимемо

$$J_O = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2).
 \tag{18.5}$$

У випадку однорідного твердого тіла формула (18.5) набирає вигляду

$$J_O = \int_{(M)} (x^2 + y^2 + z^2) dm.
 \tag{18.6}$$

Зв'язок між полярним і осьовими моментами інерції виражається такою рівністю:

$$\begin{aligned} J_x + J_y + J_z &= \sum_{k=1}^n m_k \left[(y_k^2 + z_k^2) + (z_k^2 + x_k^2) + (x_k^2 + y_k^2) \right] = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 2J_O. \end{aligned} \quad (18.7)$$

Моменти інерції відносно трьох взаємно перпендикулярних осей мають такі властивості.

1. Момент інерції відносно будь-якої з осей завжди менший за суму моментів інерції відносно двох інших осей, але більший за їх різницю. Звідси випливає, що осьові моменти інерції відносно трьох взаємно перпендикулярних осей не можна задати довільним чином, вони мають задовольняти такі співвідношення:

$$J_z < J_x + J_y; \quad J_z > J_x - J_y.$$

2. Сума моментів інерції відносно трьох взаємно перпендикулярних осей не залежить від напрямку цих осей.

Осьові моменти інерції механічної системи можна ще визначити за формулою

$$J = Mi^2, \quad (18.8)$$

де i — радіус інерції механічної системи відносно осі, тобто відстань від осі до точки, в якій необхідно зосередити масу всієї системи, щоб момент інерції цієї точки відносно даної осі дорівнював моменту інерції системи відносно тієї самої осі.

Відцентровими моментами інерції механічної системи називаються скалярні величини, що дорівнюють алгебричній сумі добутків маси кожної точки на добуток її відповідних координат (рис. 18.2):

$$\begin{aligned} J_{xy} = J_{yx} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k; \\ J_{yz} = J_{zy} &= \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k; \\ J_{zx} = J_{xz} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Відцентрові моменти інерції однорідного твердого тіла визначаються за формулами

$$J_{xy} = \int_{(M)} xy dm; \quad J_{yz} = \int_{(M)} yz dm; \quad J_{zx} = \int_{(M)} zx dm. \quad (18.10)$$

На відміну від осьових моментів інерції відцентрові моменти інерції залежать не тільки від напрямку координатних осей, а й від положення початку координат. Тому часто кажуть про відцентрові моменти інерції в даній точці, маючи на увазі початок координат, який збігається з цією точкою.

Планарним моментом інерції механічної системи, або моментом інерції відносно площини, називається скалярна величина, що дорівнює сумі добутків маси кожної точки на квадрат її відстані до площини:

$$\begin{aligned} J_{xOy} &= \sum_{k=1}^n m_k z_k^2; \\ J_{yOz} &= \sum_{k=1}^n m_k x_k^2; \\ J_{xOz} &= \sum_{k=1}^n m_k y_k^2. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Планарні моменти інерції однорідного твердого тіла визначаються за формулами:

$$J_{xOy} = \int_{(M)} z^2 dm; \quad J_{yOz} = \int_{(M)} x^2 dm; \quad J_{xOz} = \int_{(M)} y^2 dm. \quad (18.12)$$

Між планарними і полярним моментами інерції є зв'язок:

$$J_{xOy} + J_{yOz} + J_{xOz} = J_O. \quad (18.13)$$

Осьові, полярний, відцентрові і планарні моменти інерції вимірюються в $[\text{кг} \cdot \text{м}^2]$.

Осьові, полярний і планарні моменти інерції завжди додатні. На відміну від них відцентрові моменти інерції можуть мати будь-який знак, а також можуть дорівнювати нулю. Якщо відносно деякої системи координат відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, то осі цієї системи координат називаються *головними осями інерції*. Якщо початок такої системи координат збігається з центром мас механічної системи, то вони називаються *головними центральними осями інерції*.

Якщо механічна система має площину матеріальної симетрії (під симетрією розуміють не тільки геометричну, а й симетрію у розподіленні густини), то для усіх її точок вісь, що є перпендикулярною до площини симетрії, буде *головною віссю інерції*.

Якщо механічна система має вісь матеріальної симетрії, то ця вісь є *головною центральною віссю інерції* і називається *віссю динамічної симетрії*.

18.3. Теорема про моменти інерції відносно паралельних осей

Розглянемо теорему про моменти інерції відносно паралельних осей, яка має широке практичне застосування: *момент інерції механічної системи відносно деякої осі дорівнює сумі моменту інерції цієї системи відносно паралельної до неї осі, що проходить через центр мас системи, і добутку маси системи на квадрат відстані між осями.*

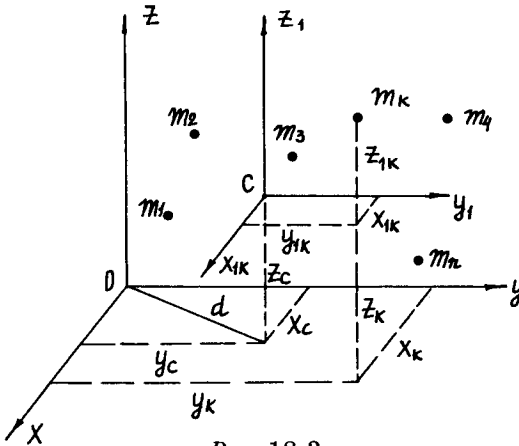


Рис. 18.3

Припустимо, що механічна система складається з n матеріальних точок (рис. 18.3) і центр мас цієї системи розміщений у точці C . Нехай також положення точок системи визначені відносно системи координат $Ox_1y_1z_1$. Побудуємо систему координат з центром у центрі мас системи C , тобто $Cx_1y_1z_1$ так, щоб осі цієї системи координат були паралельними осям системи координат $Ox_1y_1z_1$. Тоді момент інерції механічної системи відносно осі (осьовий момент), наприклад осі z , на підставі формули (18.3) буде

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) = \sum_{k=1}^n m_k \left[(x_C + x_{1k})^2 + (y_C + y_{1k})^2 \right] = \\ = \sum_{k=1}^n m_k (x_{1k}^2 + y_{1k}^2) + 2x_C \sum_{k=1}^n m_k x_{1k} + 2y_C \sum_{k=1}^n m_k y_{1k} + x_C^2 \sum_{k=1}^n m_k + y_C^2 \sum_{k=1}^n m_k.$$

Оскільки точка C є центром мас механічної системи, то $\sum_{k=1}^n m_k x_{1k} = \sum_{k=1}^n m_k y_{1k} = 0$

(дійсно, $x_{1C} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_{1k}}{\sum_{k=1}^n m_k} = 0$; $y_{1C} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_{1k}}{\sum_{k=1}^n m_k} = 0$), і отже, остання рівність наби-

рає вигляду

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_{1k}^2 + y_{1k}^2) + (x_C^2 + y_C^2) \sum_{k=1}^n m_k,$$

або

$$J_z = J_C + Md^2, \quad (18.14)$$

де $J_C = J_{z_1}$ — момент інерції механічної системи відносно осі, що проходить через центр мас системи і є паралельною осі z ; M — маса системи; d — відстань між осями z і z_1 (рис. 18.3).

З теореми про моменти інерції відносно паралельних осей випливає: якщо існує система паралельних осей, то вісь, для якої момент інерції має найменше значення, проходить через центр мас механічної системи.

18.4. Момент інерції системи відносно довільної осі, що проходить через дану точку

Нехай механічна система складається з n матеріальних точок (рис. 18.4). Візьмемо довільну точку O і побудуємо декартову систему координат з початком в точці O , тобто систему $Oxyz$. Проведемо через початок координат пряму L , положення якої відносно осей координат будемо визначати кутами α , β і γ (рис. 18.4).

Момент інерції механічної системи відносно прямої L буде визначатися за формулою (18.3)

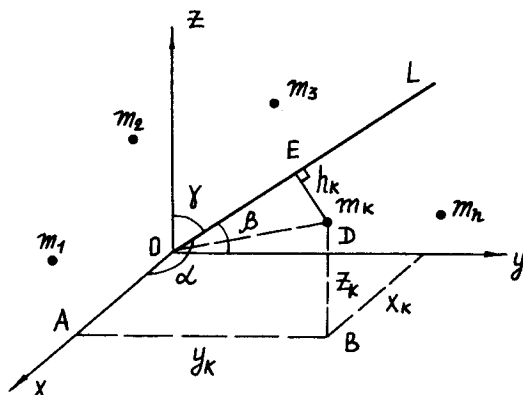


Рис. 18.4

$$J_L = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2. \tag{18.15}$$

З рис. 18.4 випливає, що

$$h_k^2 = OD^2 - OE^2.$$

Величину OD^2 знайдемо за формулою

$$OD^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2.$$

Для визначення величини OE^2 помічаємо, що $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{OD}$. Проекцію цю векторну суму на пряму L і беручи до уваги те, що $|\vec{OA}| = x_k$, $|\vec{AB}| = y_k$, $|\vec{BD}| = z_k$, а проекція вектора \vec{OD} на пряму L дорівнює OE , здобудемо

$$OE = x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma.$$

Підставляючи значення OD^2 і OE у вираз h_k^2 , матимемо

$$h_k^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2.$$

Помножимо вираз $(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$ на величину $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$, що дорівнює одиниці:

$$h_k^2 = (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2.$$

Розкриваючи дужки і беручи до уваги те що

$$(x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2 = x_k^2 \cos^2 \alpha + y_k^2 \cos^2 \beta + z_k^2 \cos^2 \gamma + 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta + 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma + 2x_k z_k \cos \alpha \cos \gamma,$$

останньому виразу надамо вигляду

$$h_k^2 = (y_k^2 + z_k^2) \cos^2 \alpha + (z_k^2 + x_k^2) \cos^2 \beta + (x_k^2 + y_k^2) \cos^2 \gamma - 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta - 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma - 2z_k x_k \cos \gamma \cos \alpha.$$

Підставляючи цей вираз у формулу (18.15) і беручи до уваги формули (18.3) і (18.9), остаточно здобудемо

$$J_L = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha. \quad (18.16)$$

Формула (18.16) дає можливість визначити момент інерції механічної системи відносно довільної осі, що проходить через дану точку.

18.5. Поняття про еліпсоїд інерції

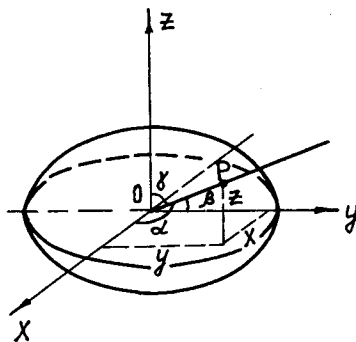


Рис. 18.5

Момент інерції механічної системи відносно прямої L визначається за формулою (18.16).

Розглянемо зміну моменту інерції J_L при зміні кутів α , β , γ , тобто при зміні положення прямої L відносно системи координат (рис.18.5).

На прямій L візьмемо точку P таким чином, щоб виконувалась умова

$$OP = \frac{1}{\sqrt{J_L}}, \quad (18.17)$$

де J_L — момент інерції системи відносно прямої L .

Виразимо напрямні косинуси прямої L через координати точки P і довжину відрізка OP :

$$\cos \alpha = \frac{x}{OP} = x\sqrt{J_L}; \quad \cos \beta = \frac{y}{OP} = y\sqrt{J_L}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{OP} = z\sqrt{J_L}.$$

Значення $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ підставимо у вираз (18.16):

$$J_L = J_x J_L x^2 + J_y J_L y^2 + J_z J_L z^2 - 2J_{xy} J_L xy - 2J_{yz} J_L yz - 2J_{zx} J_L zx.$$

Скорочуючи рівняння на J_L , здобудемо рівняння геометричного місця точок P :

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx = 1. \quad (18.18)$$

Рівняння визначає поверхню другого порядку. Якщо всі точки механічної системи розташовані в кінцевій області системи відліку і не розміщені на одній прямій, то поверхня є еліпсоїдом. Цей еліпсоїд називається *еліпсоїдом інерції*. Центр еліпсоїда розташований у початку координат. Три осі симетрії еліпсоїда інерції називаються *головними осями інерції механічної системи в точці, що збігається з початком координат*. Моменти інерції відносно цих осей називаються *головними моментами інерції*.

Серед усіх еліпсоїдів, побудованих для різних точок, відокремлюють той, що побудований для центра мас механічної системи. Такий еліпсоїд називається *центральним*, а його головні осі — *головними центральними осями інерції*.

Необхідною умовою того, щоб будь-яка вісь була головною, є відсутність у рівнянні (18.18) відцентрових моментів інерції.

При визначенні головних центральних осей і головних осей інерції необхідно взяти до уваги таке.

1. Якщо механічна система має вісь матеріальної симетрії, то ця вісь буде її головною центральною віссю інерції.

2. Якщо механічна система має площину симетрії, то в усіх точках цієї площини одна з головних осей інерції має напрям уздовж перпендикуляра до цієї площини.

18.6. Обчислення моментів інерції однорідних твердих тіл

1. Визначити момент інерції однорідного тонкого стрижня, довжина якого дорівнює l , а маса — m , відносно осі z , що проходить через центр мас стрижня і є перпендикулярною до стрижня (рис. 18.6).

На підставі формули (18.4) маємо

$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = \int_{(M)} y^2 dm.$$

Оскільки $dm = \frac{m}{l} dy$, то

$$J_z = \int_{(M)} y^2 dm = \frac{m}{e} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} y^2 dm = \frac{m}{e} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{24} + \frac{ml^2}{24} = \frac{ml^2}{12}.$$

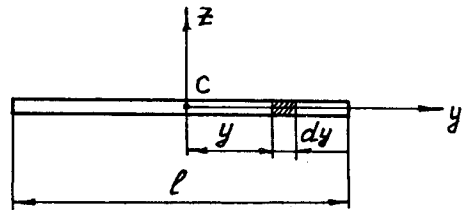


Рис. 18.6

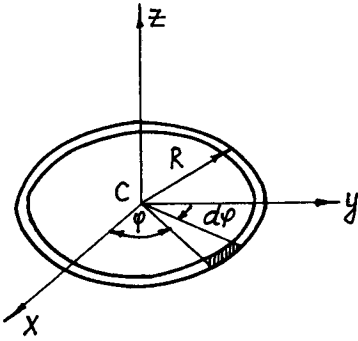


Рис. 18.7

2. Визначити момент інерції тонкого однорідного кільця, радіус якого дорівнює R , а маса — m , відносно осі z , що проходить через центр мас кільця і є перпендикулярною до площини кільця (рис. 18.7).

На підставі формули (18.4) маємо

$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm.$$

Оскільки $dm = \frac{m}{2\pi} d\varphi$, $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, то

$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm = \frac{m}{2\pi} \int R^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{mR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{mR^2}{2\pi} \varphi \Big|_0^{2\pi} = mR^2.$$

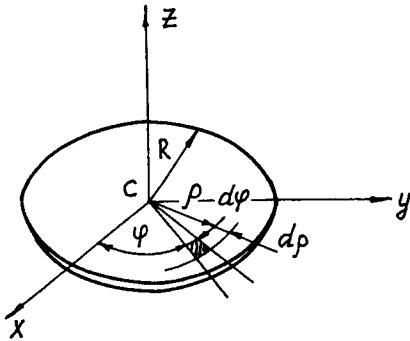


Рис. 18.8

3. Визначити момент інерції тонкого однорідного диска, радіус якого дорівнює R , а маса — m , відносно осі z , що проходить через центр мас диска і є перпендикулярною до площини диска (рис. 18.8).

На підставі формули (18.4) маємо

$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm.$$

Оскільки

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} \rho d\rho d\varphi, \quad x = \rho \sin \varphi, \quad y = \rho \cos \varphi, \text{ то}$$

$$J_z = \frac{m}{\pi R^2} \int_{(M)} \rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \rho d\rho d\varphi = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{m}{4\pi R^2} \rho^4 \Big|_0^R \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{mR^2}{2}.$$

4. Визначити момент інерції тонкого однорідного диска, радіус якого дорівнює R , а маса — m , відносно взаємно перпендикулярних осей x і y , що проходять через центр мас диска і лежать у площині диска (рис. 18.8).

На підставі формули (18.4) маємо

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm.$$

Оскільки $dm = \frac{m}{\pi R^2} \rho d\rho d\varphi$, $z = 0$, $y = \rho \cos \varphi$, то

$$\begin{aligned}
 J_x &= \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm = \frac{m}{\pi R^2} \int_{(M)} \rho^2 \cos^2 \varphi d\rho d\varphi = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\
 &= \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi d\varphi}{2} \right) = \frac{m}{4\pi R^2} \rho^4 \Big|_0^R \left(\frac{\varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) = \\
 &= \frac{mR^2}{4\pi} (\pi + 0) = \frac{mR^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, що $J_y = J_x = \frac{mR^2}{4}$.

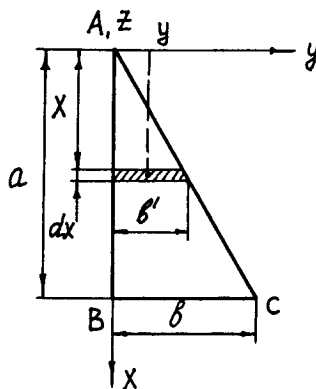


Рис. 18.9

5. Визначити момент інерції тонкої однорідної пластини у вигляді прямокутного трикутника ΔABC , маса якої дорівнює m , відносно осі z , що проходить через точку A і є перпендикулярною до площини пластини. Катети ΔABC відповідно дорівнюють a і b (рис. 18.9).

На підставі формули (18.4) маємо

$$J_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) dm.$$

Оскільки

$$dm = \frac{2m}{ab} b' dx = \frac{2m}{ab} \cdot \frac{bx}{a} dx = \frac{2m}{a^2} x dx, \quad y = \frac{bx}{2a}, \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned}
 J_z &= \int_{(M)} \left(x^2 + \frac{b^2 x^2}{4a^2} \right) \frac{2m}{a^2} x dx = \frac{2m}{a^2} \int_0^a x^3 dx + \frac{mb^2}{2a^4} \int_0^a x^3 dx = \\
 &= \frac{2m}{a^2} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^a + \frac{mb^2}{2a^4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^a = \frac{m}{4} (2a^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

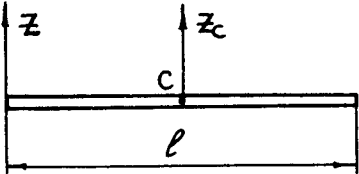
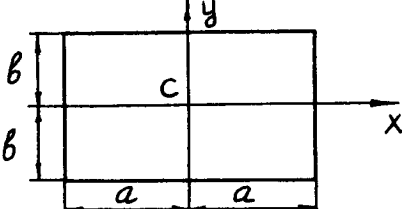
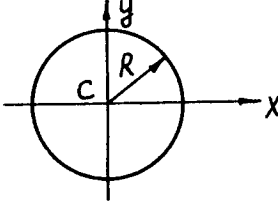
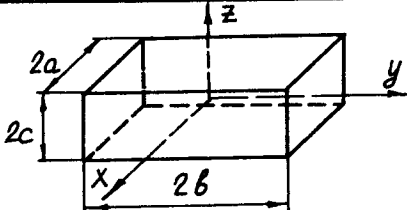
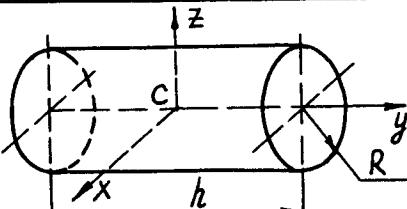
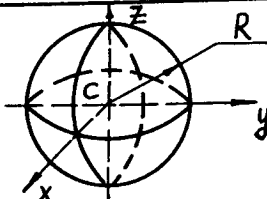
Моменти інерції найбільш поширених однорідних твердих тіл подано в табл. 18.1.

18.7. Приклади розв'язання задач з визначення положення центра мас механічної системи і її моментів інерції. Методичні вказівки

Приклад 18.1. Колінчастий вал (рис. 18.10) складається із трьох колін. Коліна розташовані під кутом 120° один до одного. Визначити положення центра мас вала, якщо маси колін зосереджені в точках A , B і D і становлять $m_A = m_B = m_D = m$. Масами інших частин вала знехтувати.

Розв'язання. Застосовуючи формули (18.2), здобудемо:

Таблиця 18.1. Моменти інерції однорідних твердих тіл

Тверде тіло	Момент інерції
	$J_z = \frac{1}{12} ml^2; \quad J_{z_c} = \frac{1}{3} ml^2$
	$J_x = \frac{1}{3} mb^2; \quad J_y = \frac{1}{3} ma^2;$ $J_{z_c} = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$
	$J_x = J_y = \frac{1}{4} mR^2;$ $J_{z_c} = \frac{1}{2} mR^2$
	$J_x = \frac{1}{3} m(b^2 + c^2); \quad J_y = \frac{1}{3} m(a^2 + c^2);$ $J_z = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$
	$J_x = J_z = \frac{1}{4} m \left(\frac{1}{3} h^2 + R^2 \right);$ $J_y = \frac{1}{2} mR^2$
	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mR^2$

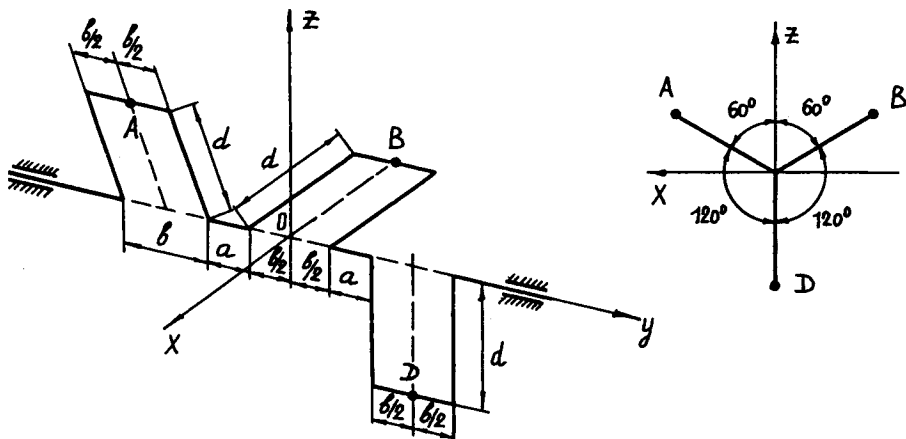


Рис. 18.10

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{m_A d \sin 60^\circ - m_B d \sin 60^\circ + m_D \cdot 0}{m_A + m_B + m_D} = 0;$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{-m_A (a+b) + m_D (a+b) + m_B \cdot 0}{m_A + m_B + m_D} = 0;$$

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{m_A d \cos 60^\circ + m_B d \cos 60^\circ - m_D d}{m_A + m_B + m_D} = 0.$$

Отже, $x_c = y_c = z_c = 0$. Центр мас вала збігається з початком системи координат.

Приклад 18.2. Знайти рівняння руху центра мас шарнірного паралелограма $OABO_1$, а також рівняння траєкторії його центра мас, якщо кривошип OA обертається зі сталою кутовою швидкістю ω . Ланки паралелограма — однорідні стрижні. $OA = O_1B = 0,5AB = a$ (рис. 18.11).

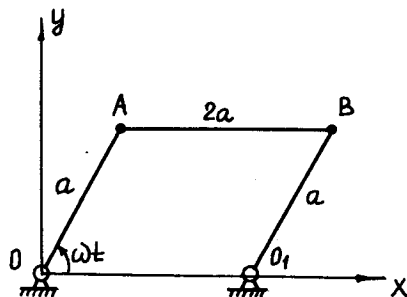


Рис. 18.11

Розв'язання. При розв'язанні задач, в яких потрібно визначити рівняння траєкторії центра мас механічної системи, рекомендується додержуватися такого порядку.

1. Побудувати відповідну систему відліку.
2. Визначити координати центра мас механічної системи відносно системи відліку як функції часу.
3. Виключити з одержаних кінематичних рівнянь руху центра мас механічної системи час t .

Побудуємо систему декартових координат (систему відліку) з початком у точці O (рис. 18.11).

Застосовуючи формули (18.2), здобудемо

$$x_C = \frac{m_{OA} \cdot 0,5a \cos \omega t + m_{AB} (a \cos \omega t + a) + m_{OB} (0,5a \cos \omega t + 2a)}{m_{OA} + m_{AB} + m_{OB}}.$$

Оскільки $m_{OA} = m_{OB} = m$, а $m_{AB} = 2m$, то

$$x_C = \frac{4ma + 3ma \cos \omega t}{4m} = a + \frac{3}{4} a \cos \omega t;$$

$$y_C = \frac{m_{OA} \cdot 0,5a \sin \omega t + m_{AB} a \sin \omega t + m_{OB} \cdot 0,5a \sin \omega t}{m_{OA} + m_{AB} + m_{OB}} = \frac{3}{4} a \sin \omega t.$$

Виключаємо з рівнянь $x_C = a + \frac{3}{4} a \cos \omega t$, $y_C = \frac{3}{4} a \sin \omega t$ час t , тобто

$$\frac{(x_C - a)^2}{\left(\frac{3}{4} a\right)^2} = \cos^2 \omega t$$

+

$$\frac{y_C^2}{\left(\frac{3}{4} a\right)^2} = \sin^2 \omega t$$

$(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left(\frac{3}{4} a\right)^2$ — коло, що має радіус $\frac{3}{4} a$. Центр кола має координати $(a, 0)$.

Приклад 18.3. Обчислити момент інерції сталевого вала, який має радіус 5 см і масу 100 кг відносно його твірної. Вал вважати однорідним суцільним циліндром.

Розв'язання. Момент інерції вала відносно осі, що проходить через його центр мас паралельно твірній, визначається за формулою (див. табл. 18.1)

$$J_C = J_z = \frac{mR^2}{2}.$$

Момент інерції вала відносно його осі, що збігається з твірною J_z , обчислимо за формулою (18.14):

$$J_z = J_z + md^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = 1,5mR^2.$$

Оскільки $R = 5$ см, а $m = 100$ кг, то матимемо

$$J_z = 1,5mR^2 = 1,5 \cdot 100 \cdot 5^2 = 3750 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Приклад 18.4. Обчислити момент інерції тонкого однорідного полудиска, який має масу m і радіус R відносно осі, що проходить уздовж його діаметра (рис. 18.12).

Розв'язання. На підставі формули (18.4) маємо

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm.$$

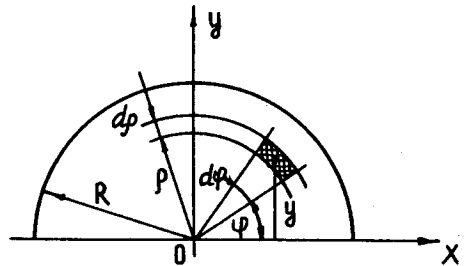


Рис. 18.12

Оскільки $dm = \frac{2m}{\pi R^2} \rho d\rho d\varphi$, $z = 0$, $y = \rho \sin \varphi$, то

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{2m}{\pi R^2} \int_{(M)} \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho d\varphi = \frac{2m}{\pi R^2} \left(\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{2m}{\pi R^2} \left[\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R \left(0,5 \int_0^\pi d\varphi - 0,5 \int_0^\pi \cos 2\varphi d\varphi \right) \right] = \frac{2m}{\pi R^2} \left[\frac{R^4}{4} \left(0,5\varphi \Big|_0^\pi - 0,5 \sin 2\varphi \Big|_0^\pi \right) \right] = \\ &= \frac{2m}{\pi R^2} \left[\frac{R^4}{4} (0,5\pi - 0) \right] = \frac{mR^2}{4}. \end{aligned}$$

Приклад 18.5. Тонкий однорідний стрижень AB , довжина якого дорівнює $2l$, а маса — m , закріплений центром O до вертикальної осі, утворюючи з нею кут α (рис. 18.13). Обчислити моменти інерції стрижня J_x , J_y і відцентровий момент інерції J_{xy} . Осі координат зображено на рис. 18.13.

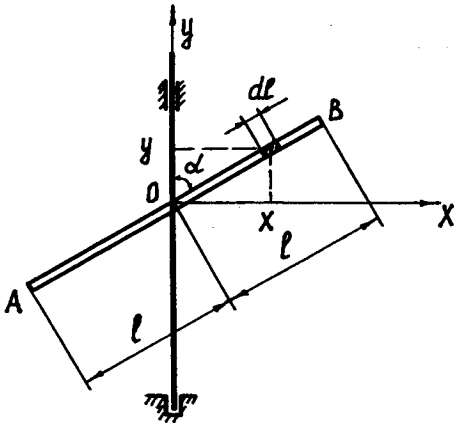


Рис. 18.13

Розв'язання. На підставі формул (18.4) маємо:

$$J_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2) dm.$$

$$\text{Оскільки } dm = \frac{m}{2l} dl = \frac{m dy}{2l \cos \alpha}, \quad z = 0,$$

то

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{m}{2l \cos \alpha} \int_{(M)} y^2 dy = \frac{m}{2l \cos \alpha} \int_{-l \cos \alpha}^{+l \cos \alpha} y^2 dy = \\ &= \frac{m y^3}{6l \cos \alpha} \Big|_{-l \cos \alpha}^{+l \cos \alpha} = \frac{m l^2}{3} \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Оскільки } dm = \frac{m}{2l} dl = \frac{m dx}{2l \sin \alpha}, \quad z = 0, \quad \text{то}$$

$$J_y = \frac{m}{2l \sin \alpha} \int_{(M)} x^2 dx = \frac{m}{2l \cos \alpha} \int_{-l \sin \alpha}^{+l \sin \alpha} x^2 dx = \frac{m x^3}{6l \sin \alpha} \Big|_{-l \sin \alpha}^{+l \sin \alpha} = \frac{m l^3}{3} \sin^2 \alpha.$$

На підставі формули (18.10) маємо

$$J_{xy} = \int_{(M)} xy dm.$$

$$\text{Оскільки } dm = \frac{m dx}{2l \sin \alpha}, \quad y = \frac{x \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{то}$$

$$J_{xy} = \frac{m \cos \alpha}{2l \sin^2 \alpha} \int_{(M)} x^2 dx = \frac{m \cos \alpha \cdot x^3}{6l \sin^2 \alpha} \Big|_{-l \sin \alpha}^{+l \sin \alpha} = \frac{m l^2}{6} \sin 2\alpha.$$

Приклад 18.6. На рис. 18.14 зображено однорідний круглий диск, маса якого дорівнює m . Диск ексцентрично насаджений на вісь z , перпендикулярну до його площини. Радіус диска дорівнює R , а ексцентриситет $OC = a$, де C — центр мас диска. Обчислити осьові моменти J_x, J_y, J_z і відцентрові J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} моменти інерції диска. Осі координат наведено на рис. 18.14.

Розв'язання. На підставі даних табл. 18.1 моменти інерції диска відносно головних центральних осей такі:

$$J_{x_c} = J_{y_c} = \frac{mR^2}{4}; \quad J_{z_c} = \frac{mR^2}{2}.$$

Моменти інерції диска відносно осей $Oxyz$, що є паралельними до осей $Cx_c y_c z_c$, знайдемо за формулою (18.14)

$$J_x = J_{x_c} + Md^2.$$

Оскільки вісь x збігається з віссю x_c , то $d = 0$. Отже,

$$J_x = J_{x_c} = \frac{mR^2}{4};$$

$$J_y = J_{y_c} + ma^2 = \frac{mR^2}{4} + ma^2 = m \left(\frac{R^2}{4} + a^2 \right);$$

$$J_z = J_{z_c} + ma^2 = \frac{mR^2}{2} + ma^2 = m \left(\frac{R^2}{2} + a^2 \right).$$

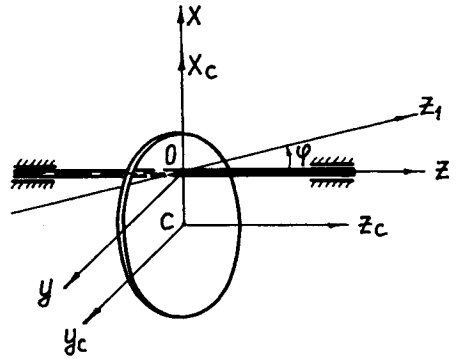


Рис. 18.14

Вісь z перпендикулярна до площини матеріальної симетрії диска, і тому вона є головною віссю інерції в точці O . Вісь x також є головною віссю інерції, оскільки вона є віссю симетрії диска. Отже, відцентрові моменти інерції диска відносно осей $Oxyz$ дорівнюють нулю:

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Приклад 18.7. За умовами попереднього прикладу обчислити момент інерції диска відносно осі z_1 , що лежить у вертикальній площині xOz і утворює з віссю z кут φ (рис. 18.14).

Розв'язання. Момент інерції диска відносно осі z_1 визначимо за формулою (18.16)

$$J_{z_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{xz} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Оскільки

$$J_x = \frac{mR^2}{4}, J_y = m \left(\frac{R^2}{4} + a^2 \right), J_z = m \left(\frac{R^2}{2} + a^2 \right), J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0,$$

$\cos \alpha = \cos(90 - \varphi) = \sin \varphi$, $\cos \beta = \cos 90^\circ = 0$, $\cos \gamma = \cos \varphi$, то

$$J_{z_1} = \frac{mR^2}{4} \sin^2 \varphi + m \left(\frac{R^2}{2} + a^2 \right) \cos^2 \varphi.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що характеризує центр мас механічної системи і як визначається його положення?
2. Які величини називають осьовими, полярними, планарними і відцентровими моментами інерції? Що вони характеризують і як визначаються?
3. Що таке радіус інерції системи?
4. Які осі називають головними осями інерції, а які — головними центральними осями інерції механічної системи?
5. За яких умов деяка вісь буде головною віссю інерції системи?
6. Як формулюється теорема про моменти інерції відносно паралельних осей?
7. Як визначити момент інерції механічної системи відносно осі, що проходить через дану точку?
8. Що являє собою еліпсоїд інерції і які осі називаються головними осями інерції механічної системи в даній точці?
9. За якою формулою визначається момент інерції однорідного тонкого стрижня відносно осі, що проходить через центр мас стрижня і є перпендикулярною до стрижня?
10. За якою формулою визначається момент інерції тонкого однорідного кільця відносно осі, що проходить через центр мас кільця і є перпендикулярною до площини кільця?
11. За якою формулою визначається момент інерції тонкого однорідного диска відносно осі, що проходить через центр мас диска і є перпендикулярною до площини диска?

Глава 19

ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

19.1. Кількість руху матеріальної точки і механічної системи.

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки і механічної системи

Застосування загальних теорем динаміки при розв'язанні задач як динаміки матеріальної точки, так і динаміки механічної системи у ряді випадків дає змогу, не інтегруючи диференціальні рівняння руху точки або системи, встановити кількісні співвідношення між фізичними величинами, що характеризують рух матеріальної точки або механічної системи.

Кожна із загальних теорем динаміки має певний фізичний зміст, який відображає певну область явищ природи і ґрунтується на векторній або скалярній величині, що називається *мірою механічного руху*. Першою такою мірою є векторна величина, що називається *кількістю руху*.

Запишемо основне рівняння динаміки матеріальної точки:

$$m\vec{W} = \vec{F}.$$

Оскільки $m = \text{const}$, а $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, то останньому рівнянню можна надати вигляду $\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}$, звідки випливає, що

$$d(m\vec{V}) = \vec{F}dt. \tag{19.1}$$

Векторна величина в рівності (19.1), яка дорівнює добутку $m\vec{V}$, називається *кількістю руху матеріальної точки*, а векторна величина, яка дорівнює добутку $\vec{F}dt$, — *елементарним імпульсом сили*.

За одиницю кількості руху точки й імпульсу сили в системі CI обрано $[\text{Н} \cdot \text{с}]$.

Рівність (19.1) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі: *елементарна зміна кількості руху матеріальної точки дорівнює елементарному імпульсу рівнодійної всіх сил, що діють на точку*.

Інтегруючи вираз (19.1) в означених межах

$$\int_{V_0}^V d(m\vec{V}) = \int_0^t \vec{F} dt,$$

одержимо

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \vec{S}, \quad (19.2)$$

де $\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt$ — імпульс рівнодійної всіх сил, що діють на точку, за скінченний проміжок часу.

Рівняння (19.2) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі, або теореми імпульсів: *зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної всіх сил, що діють на точку, за той самий проміжок часу*.

Проекціюючи векторні вирази (19.1) і (19.2) на осі нерухомої декартової системи координат, здобудемо скалярні вирази розглянутої теореми:

$$d(m\dot{x}) = \sum_{k=1}^n F_{kx} dt; \quad d(m\dot{y}) = \sum_{k=1}^n F_{ky} dt; \quad d(m\dot{z}) = \sum_{k=1}^n F_{kz} dt; \quad (19.3)$$

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = S_x; \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = S_y; \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = S_z, \quad (19.4)$$

$$\text{де } S_x = \sum_{k=1}^n \int_0^t F_{kx} dt; \quad S_y = \sum_{k=1}^n \int_0^t F_{ky} dt; \quad S_z = \sum_{k=1}^n \int_0^t F_{kz} dt.$$

Кількістю руху механічної системи є вектор, що дорівнює векторній сумі кількостей руху окремих точок системи:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k. \quad (19.5)$$

Проекції кількості руху механічної системи на осі нерухомої декартової системи координат відповідно становлять:

$$Q_x = \sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_k; \quad Q_y = \sum_{k=1}^n m_k \dot{y}_k; \quad Q_z = \sum_{k=1}^n m_k \dot{z}_k. \quad (19.6)$$

У деяких випадках кількість руху механічної системи доцільніше визначати за формулою

$$\vec{Q} = M\vec{V}_C, \quad (19.7)$$

де $M = \sum_{k=1}^n m_k$ — маса механічної системи; \vec{V}_C — вектор швидкості центра мас механічної системи.

Дійсно,

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_C \right) = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_C}{dt} = M\vec{V}_C,$$

оскільки $\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$, звідки $\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_C = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k$.

З формули (19.7) випливає: *кількість руху механічної системи дорівнює добутку маси системи на швидкість центра мас системи.*

Надамо диференціальним рівнянням руху механічної системи (17.6) вигляд

$$\begin{cases} m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^i \\ \dots\dots\dots \\ m_n \frac{d\vec{V}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i, \end{cases} \quad (19.8)$$

де \vec{V}_k — швидкість k -ї точки системи.

Складаючи почленно рівняння (19.8), матимемо

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i.$$

На підставі першої властивості внутрішніх сил маємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = \vec{0}.$$

Тому останнє рівняння набирає вигляду

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e,$$

або

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e.$$

Беручи до уваги рівність (19.5), остаточно матимемо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (19.9)$$

У проєкціях на осі нерухомої декартової системи координат векторна рівність (19.9) еквівалентна трьом скалярним:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e. \quad (19.10)$$

Рівності (19.9) і (19.10) є математичними виразами теореми про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній векторній (19.9) і в диференціальній скалярній (19.10) формах.

З рівності (19.9) випливає: *перша похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює геометричній сумі (головному вектору) всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи.*

З рівності (19.10) випливає: *перша похідна за часом від проєкції кількості руху механічної системи на будь-яку вісь нерухомої декартової системи координат дорівнює алгебричній сумі проєкцій всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, на ту саму вісь.*

Теорему про зміну кількості руху механічної системи можна подати в інтегральній векторній або скалярній формах.

Перетворимо рівність (19.9). Для цього необхідно помножити обидві частини рівності на dt і проінтегрувати в межах від 0 до t :

$$\int_0^t d\vec{Q} = \sum_{k=1}^n \int_0^t \vec{F}_k^e dt,$$

звідки маємо

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S}^e, \quad (19.11)$$

де \vec{Q} — кількість руху механічної системи в момент часу t ; \vec{Q}_0 — кількість руху механічної системи в момент часу $t = 0$; $\vec{S}^e = \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t \vec{F}_k^e dt$ — головний вектор імпульсів усіх зовнішніх сил, що діють на точки системи.

Векторна рівність (19.11) еквівалентна трьом скалярним рівностям у проєкціях на нерухомі осі декартової системи координат:

$$Q_x - Q_{ox} = S_x^e; \quad Q_y - Q_{oy} = S_y^e; \quad Q_z - Q_{oz} = S_z^e. \quad (19.12)$$

Таким чином, маємо математичні вирази теореми про зміну кількості руху механічної системи в інтегральній векторній (19.11) і скалярній (19.12) формах.

З рівняння (19.11) випливає: *зміна кількості руху механічної системи за будь-який фіксований проміжок часу дорівнює геометричній сумі (головному вектору) імпульсів усіх зовнішніх сил, що діють на точки системи за той самий проміжок часу.*

З рівнянь (19.12) випливає: *приріст кількості руху механічної системи в проекції на будь-яку нерухому вісь декартової системи координат за будь-який фіксований проміжок часу дорівнює проекції головного вектора імпульсів усіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, на ту саму вісь за той самий проміжок часу.*

З теореми про зміну кількості руху механічної системи випливає таке.

1. Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну кількості руху механічної системи, оскільки рівняння (19.9) — (19.12) не містять внутрішніх сил.

2. У тих випадках, коли геометрична сума всіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$, дорівнює нулю або одна з проекцій геометричної суми всіх зовнішніх сил на осі декартової системи координат, наприклад $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e$, дорівнює нулю, то в першому випадку вектор кількості руху системи \vec{Q} є сталим за величиною і напрямом, а у другому — сталою величиною є проекція кількості руху системи Q_x на дану вісь.

Розглянуті в пункті 2 положення називаються *законом збереження кількості руху механічної системи.*

19.2. Теорема Ейлера¹

Розглянемо застосування теореми про зміну кількості руху механічної системи для дослідження усталеного руху суцільного середовища.

Нехай суцільне середовище (рідина, газ) тече по трубі змінного перерізу. Відокремимо об'єм середовища v між двома плоскими поперечними перерізами, перпендикулярними до осі труби, площі яких дорівнюють σ_1 і σ_2 (рис. 19.1). Нехай середня швидкість середовища в перерізі σ_1 дорівнює \vec{V}_1 , а в перерізі σ_2 — \vec{V}_2 . Вектори \vec{V}_1 і \vec{V}_2 перпендикулярні до відповідних перерізів.

¹ Леонард Ейлер (1707—1783) — швейцарський математик, механік, фізик та астроном, член Петербурзької академії наук.

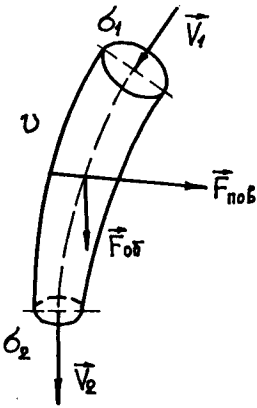


Рис. 19.1

Розглянемо зовнішні сили, що діють на об'єм середовища v . Сили поділяються на об'ємні, або масові, та поверхневі. Об'ємні сили діють на всі частинки об'єму v середовища, як, наприклад, сили ваги. Поверхневі сили діють тільки на частинки середовища, які лежать на зовнішній поверхні об'єму v , що розглядається. До таких сил належать сили тиску на поверхні об'єму v з боку стінок труби, а також сили тертя між поверхнею об'єму v і стінками труби¹.

Позначимо головний вектор зовнішніх об'ємних сил $\vec{F}_{об}^e$, а головний вектор зовнішніх поверхневих сил — $\vec{F}_{пов}^e$. Тоді, застосовуючи до середовища, що рухається, теорему про зміну кількості руху механічної системи у вигляді (19.9), матимемо

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}_{об}^e + \vec{F}_{пов}^e. \quad (19.13)$$

Визначимо елементарну зміну кількості руху $d\vec{Q}$ об'єму v за час dt . При русі середовища за одиницю часу через перерізи σ_1 і σ_2 відповідно проходять маси $\rho_1\sigma_1V_1$ і $\rho_2\sigma_2V_2$, де ρ_1 і ρ_2 — густина рідини в перерізах σ_1 і σ_2 . Оскільки рух середовища усталений, то через кожний переріз в одиницю часу проходить рівна кількість маси:

$$m_c = \rho_1\sigma_1V_1 = \rho_2\sigma_2V_2,$$

де m_c — секундна маса середовища — маса, що проходить через даний переріз труби в одиницю часу. Вимірюється m_c у системі СІ в $\left[\frac{\text{кг}}{\text{с}}\right]$.

Отже, за одиницю часу через перерізи σ_1 і σ_2 проходять однакові маси m_c . Елементарні кількості руху цих мас будуть дорівнювати $m_c dt \vec{V}_1$ і $m_c dt \vec{V}_2$. Тоді елементарна зміна кількості руху $d\vec{Q}$ маси середовища за час dt буде визначатися за формулою

$$d\vec{Q} = m_c dt \vec{V}_2 - m_c dt \vec{V}_1.$$

Звідси

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m_c \vec{V}_2 - m_c \vec{V}_1, \quad (19.14)$$

¹ Про об'ємні (масові) та поверхневі сили див. також у розділі "Статика", параграф 9.1.

де $m_c \vec{V}_1$, $m_c \vec{V}_2$ — секундні кількості руху середовища відповідно в перерізах σ_1 і σ_2 .

Порівнюючи вирази (19.13) і (19.14), здобудемо

$$\vec{F}_{об}^e + \vec{F}_{пов}^e + m_c \vec{V}_1 - m_c \vec{V}_2 = \vec{0}. \quad (19.15)$$

Рівняння (19.15) є математичним виразом теореми Ейлера: *геометрична сума головних векторів об'ємних і поверхневих сил, а також секундних кількостей руху суцільного середовища, яке проходить через два поперечних перерізи труби, дорівнює нулю, якщо вектори секундних кількостей руху мають напрям усередину об'єма середовища, що відокремлюється.*

Якщо спроекціювати векторне рівняння (19.15) на нерухомі осі декартової системи координат, здобудемо скалярні вирази теореми Ейлера:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx(об)}^e + \sum_{k=1}^n F_{kx(пов)}^e + m_c V_{1x} - m_c V_{2x} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky(об)}^e + \sum_{k=1}^n F_{ky(пов)}^e + m_c V_{1y} - m_c V_{2y} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz(об)}^e + \sum_{k=1}^n F_{kz(пов)}^e + m_c V_{1z} - m_c V_{2z} &= 0. \end{aligned} \quad (19.16)$$

19.3. Теорема про рух центра мас механічної системи

Наслідком теореми про зміну кількості руху механічної системи є теорема про рух центра мас системи. Дійсно, підставляючи в рівність (19.9) замість вектора \vec{Q} його значення за формулою (19.7), матимемо

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e,$$

або

$$M \vec{W}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (19.17)$$

Рівність (19.17) є математичним виразом теореми про рух центра мас механічної системи: *центр мас механічної системи рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на точки системи.*

Векторна рівність (19.17) еквівалентна трьом скалярним рівностям у проєкціях на нерухомі осі декартової системи координат:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e. \quad (19.18)$$

Значення та наслідки теореми про рух центра мас системи такі.

1. Теорема про рух центра мас системи дає обґрунтування методам динаміки точки.

2. Внутрішніми силами безпосередньо не можна змінити характер руху центра мас системи, оскільки рівняння (10.17) і (10.18) їх не містять.

3. Якщо геометрична сума всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, дорівнює нулю, то центр мас механічної системи перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно, тобто $\vec{V}_C = \text{const}$.

4. Якщо алгебрична сума проєкцій всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, на будь-яку нерухому вісь декартової системи координат дорівнює нулю, то проєкція вектора швидкості центра мас механічної системи на цю вісь не змінюється, наприклад $V_{Cx} = \dot{x}_C = \text{const}$.

Розглянуті в пунктах 3 і 4 положення називаються *законом збереження руху центра мас механічної системи*.

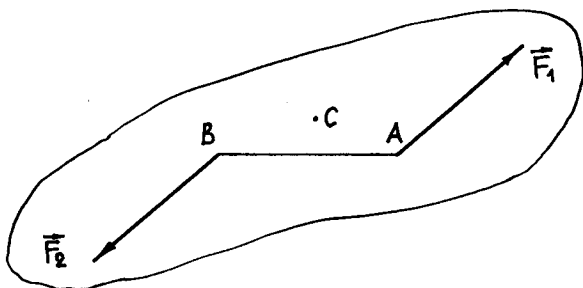


Рис. 19.2

Доведемо на підставі закону збереження руху центра мас механічної системи розглянуте в розділі “Статика” твердження, що пара сил, яка діє на тверде тіло, намагається надати йому обертання (див. розділ “Статика”, параграф 3.3). Дійсно, якщо на вільне тверде тіло діє пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) (рис. 19.2), то геометрична сума

цих зовнішніх сил буде дорівнювати нулю $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0})$. Отже, центр мас твердого тіла C , якщо він був нерухомим, і при дії пари сил має залишатися нерухомим. Таким чином, де б до вільного твердого тіла не була прикладена пара сил, тіло почне обертатися навколо свого центра мас.

19.4. Момент кількості руху матеріальної точки і механічної системи (кінетичний момент)

Мірою обертального руху механічної системи відносно довільного центра (точки) або осі є векторна величина — *момент кількості руху, або кінетичний момент*.

Момент кількості руху окремої матеріальної точки відносно довільного нерухомого центра O дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки на кількість її руху (за аналогією з моментом сили) (рис. 19.3):

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{V}. \quad (19.19)$$

За модулем вектор \vec{k}_O такий:

$$|\vec{k}_O| = |\vec{r} \times m\vec{V}| = mVr \sin \alpha = mVh,$$

де h — перпендикуляр, побудований з точки, відносно якої визначається момент кількості руху, до лінії дії вектора кількості руху (плече моменту кількості руху).

Для механічної системи моментом кількості руху системи, або кінетичним моментом системи відносно довільного нерухомого центра (точки) O , називається геометрична сума моментів кількості руху всіх точок системи відносно цього довільного центра (точки):

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n \vec{k}_{Ok}. \quad (19.20)$$

Вектор моменту кількості руху механічної системи \vec{K}_O прикладений в центрі, відносно якого він визначається.

За одиницю моменту кількості руху матеріальної точки або механічної системи в системі СІ беруть $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} \right]$.

Розкладемо вектор \vec{K}_O по осях нерухомої системи координат з початком в довільному центрі (точці) O :

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ m \dot{x}_k & m \dot{y}_k & m \dot{z}_k \end{vmatrix} = \left[\sum_{k=1}^n m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) \right] \vec{i} + \\ &+ \left[\sum_{k=1}^n m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) \right] \vec{j} + \left[\sum_{k=1}^n m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) \right] \vec{k}. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо проєкції вектора моменту кількості руху (кінетичного моменту) \vec{K}_O механічної системи на нерухомі декартові осі координат:

$$K_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k);$$

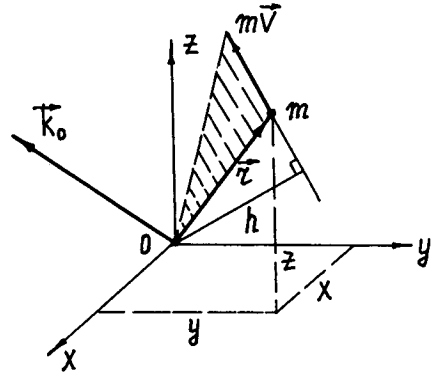


Рис. 19.3

$$K_y = \sum_{k=1}^n m_k \left(z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k \right); \quad (19.21)$$

$$K_z = \sum_{k=1}^n m_k \left(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k \right),$$

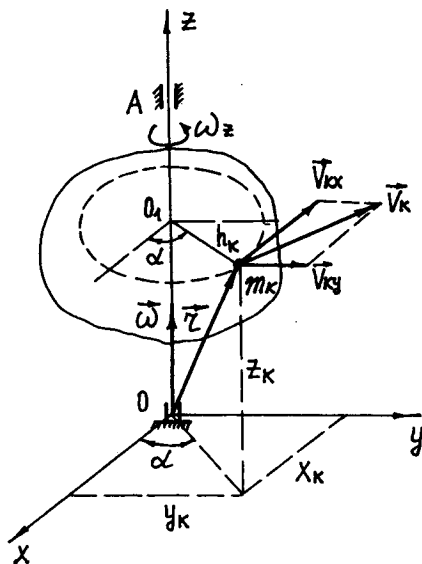


Рис. 19.4

де x_k, y_k, z_k — відповідні координати k -ї матеріальної точки системи; $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$ — відповідні проекції вектора швидкості k -ї матеріальної точки на осі координат.

Визначимо момент кількості руху (кінетичний момент) твердого тіла відносно нерухомої осі обертання (рис. 19.4). Як відомо, тверде тіло розглядається як система матеріальних точок, відстань між якими в процесі руху тіла не змінюється, тому момент кількості руху твердого тіла відносно нерухомої осі обертання визначається за формулою (19.21)

$$\begin{aligned} K_z &= \sum_{k=1}^n m_k \left(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \left(h_k \cos \alpha \cdot V_k \cos \alpha + h_k \sin \alpha \cdot V_k \sin \alpha \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \left(h_k^2 \cos^2 \alpha \cdot \omega_z + h_k^2 \sin^2 \alpha \cdot \omega_z \right) = \sum_{k=1}^n m_k \omega_z h_k^2 = \\ &= \omega_z \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = J_z \omega_z, \end{aligned} \quad (19.22)$$

де $x_k = h_k \cos \alpha$; $y_k = h_k \sin \alpha$; $\dot{x}_k = V_{kx} = -V_k \sin \alpha$; $\dot{y}_k = V_{ky} = V_k \cos \alpha$; $V_k = \omega_z h_k$ (ω_z — кутова швидкість обертання твердого тіла навколо осі z ; h_k — відстань k -ї точки твердого тіла до осі обертання).

Таким чином, з формули (19.22) випливає, що момент кількості руху (кінетичний момент) твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, відносно осі обертання дорівнює добутку кутової швидкості обертання тіла навколо цієї осі на момент інерції тіла відносно тієї самої осі.

19.5. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і механічної системи

Помножимо зліва обидві частини основного рівняння динаміки матеріальної точки на радіус-вектор, який визначає положення матеріальної точки в інерціальній системі відліку відносно довільного центра (точки) O :

$$\vec{r} \times m\vec{W} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Оскільки $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, $\vec{r} \times m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{V}) = \frac{d\vec{k}_O}{dt}$ і $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F})$, то останнє рівняння набуває вигляду

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}). \quad (19.23)$$

Векторне рівняння (19.23) є математичним виразом теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної точки: *похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно деякого нерухомого центра O дорівнює моменту рівнодійної всіх сил, що діють на точку, відносно того самого центра O .*

Векторній рівності (19.23) відповідають три скалярні рівності, тобто

$$\frac{dk_x}{dt} = M_x(\vec{F}_k); \quad \frac{dk_y}{dt} = M_y(\vec{F}_k); \quad \frac{dk_z}{dt} = M_z(\vec{F}_k). \quad (19.24)$$

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок. Застосуємо до точок системи аксіому про звільнення від в'язей і замінимо в'язі відповідними реакціями. Позначимо рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на k -ту точку системи, через \vec{F}_k^e і \vec{F}_k^i . Застосуємо до кожної точки системи теорему про зміну моменту кількості руху:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{k}_{O_1}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_1^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_1^i); \\ \frac{d\vec{k}_{O_2}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_2^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_2^i); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\vec{k}_{O_n}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_n^e) + \vec{M}_O(\vec{F}_n^i). \end{cases}$$

Складаючи рівняння почленно, збудуємо

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\vec{k}_{O_k}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^i).$$

Беручи до уваги те, що $\sum_{k=1}^n \frac{d\vec{k}_{O_k}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \vec{k}_{O_k} = \frac{d\vec{K}_O}{dt}$, а $\sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^i) = \vec{0}$, останньому рівнянню надамо вигляду

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^e). \quad (19.25)$$

Векторне рівняння (19.25) є математичним виразом теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи відносно нерухомого довільного центра (точки): *похідна за часом від вектора моменту кількості руху механічної системи (кінетичного моменту) відносно довільного нерухомого центра (точки) дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, відносно того самого центра (точки).*

У проекціях на нерухомі осі декартової системи координат, початок яких збігається з центром O , векторна рівність (19.25) еквівалентна трьом скалярним виразам:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k^e); \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k^e); \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e). \quad (19.26)$$

Наслідки теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи такі.

1. Внутрішніми силами безпосередньо не можна змінити кінетичний момент механічної системи, оскільки рівняння (19.25) і (19.26) їх не містять.

2. Якщо геометрична сума всіх моментів зовнішніх сил, що діють на точки механічної системи, відносно довільного нерухомого центра (точки) дорівнює нулю, то кінетичний момент механічної системи відносно того самого центра не змінюється ні за модулем, ні за напрямом, тобто

$$\vec{K}_O = \text{const.}$$

3. Якщо алгебрична сума всіх моментів зовнішніх сил, що діють на точки механічної системи, відносно будь-якої нерухомої осі декартової системи координат дорівнює нулю, то кінетичний момент механічної системи відносно цієї самої осі не змінюється в процесі руху.

Розглянуті в пунктах 2 і 3 положення називаються *законом збереження кінетичного моменту (моменту кількості руху) механічної системи.*

Із закону збереження кінетичного моменту механічної системи випливає, що внутрішні сили не можуть змінити кінетичний момент механічної системи, але момент кількості руху окремих частин системи або кутові швидкості

під дією цих сил можуть змінюватися. Так, кінетичний момент фігуриста (або балерини), який (яка) обертається навколо вертикальної осі z , буде сталою величиною: $K_z = J_z \omega = \text{const}$, оскільки $\sum_{k=1}^n M_z (\vec{F}_k^e) = 0$. Проте, змінюючи рухом рук значення моменту інерції J_z , фігурист може змінювати кутову швидкість обертання ω .

Поняття кінетичного моменту механічної системи широко застосовується в динаміці твердого тіла, особливо в теорії гіроскопів (див. главу 23).

19.6. Теорема про зміну моменту кількості відносного руху механічної системи щодо центра мас

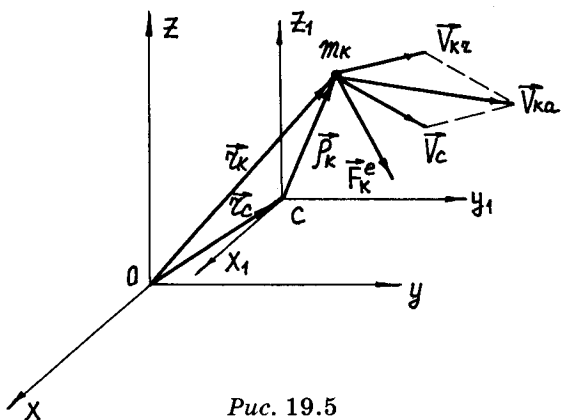


Рис. 19.5

Нехай механічна система здійснює поступальний рух разом із системою координат $Cx_1y_1z_1$ (C — центр мас системи) відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$ і обертається навколо осі, що проходить через центр мас C системи (рис. 19.5).

З рис. 19.5 випливає, що радіус-вектор довільної точки механічної системи визначається за формулою

$$\vec{r}_k = \vec{r}_C + \vec{\rho}_k,$$

де \vec{r}_C — радіус-вектор центра мас C у системі відліку $Oxyz$; $\vec{\rho}_k$ — радіус-вектор довільної точки, що має масу m_k , у системі відліку $Cx_1y_1z_1$.

Абсолютна швидкість довільної точки системи

$$\vec{V}_{ka} = \vec{V}_C + \vec{V}_{kr},$$

де \vec{V}_C — вектор швидкості центра мас механічної системи; \vec{V}_{kr} — вектор відносної швидкості довільної точки механічної системи.

Враховуючи значення \vec{r}_k і \vec{V}_{ka} , момент кількості руху (кінетичний момент) механічної системи відносно нерухомого центра O буде визначатися за формулою

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \sum_{k=1}^n (\vec{r}_C + \vec{\rho}_k) \times (m_k \vec{V}_C + m_k \vec{V}_{kr}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \vec{r}_C \times m_k \vec{V}_C + \sum_{k=1}^n \vec{r}_C \times m_k \vec{V}_{kr} + \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k \vec{V}_C + \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k \vec{V}_{kr}. \end{aligned}$$

Проаналізуємо кожен доданок здобутого виразу:

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_C \times m_k \vec{V}_C = \vec{r}_C \times \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_C = \vec{r}_C \times \vec{V}_C \sum_{k=1}^n m_k = \vec{r}_C \times M \vec{V}_C,$$

де M — маса механічної системи;

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_C \times m_k \vec{V}_{kr} = \vec{r}_C \times \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_{kr} = \vec{0};$$

оскільки $\vec{\rho}_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k}{M} = \vec{0}$ ($\vec{\rho}_C$ — радіус-вектор центра мас механічної системи в системі відліку $Cx_1y_1z_1$), то

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k = \vec{0}; \text{ тоді } \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k \right) = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_{kr} = \vec{0};$$

$$\sum_{k=1}^n \rho_k \times m_k \vec{V}_C = \left(\sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k \right) \times \vec{V}_C = \vec{0},$$

оскільки $\sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k = M \vec{\rho}_C$, де $\vec{\rho}_C = \vec{0}$;

$$\sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k \vec{V}_{kr} = \vec{K}_{Cr},$$

де \vec{K}_{Cr} — момент кількості відносного руху механічної системи відносно центра мас C .

З урахуванням розглянутого маємо

$$\vec{K}_O = \vec{r}_C \times M \vec{V}_C + \vec{K}_{Cr}, \quad (19.27)$$

Формула (19.27) визначає залежність між моментом кількості абсолютно го руху механічної системи відносно нерухомого центра і моментом кількості відносного руху механічної системи відносно центра мас системи: *момент кількості абсолютного руху \vec{K}_O відносно нерухомого центра O дорівнює сумі моменту щодо того самого центра кількості руху центра мас механічної системи, припускаючи, що в ньому зосереджена вся маса системи, і моменту щодо центра мас кількості відносного руху механічної системи*; при цьому останній рух розглядається відносно системи координат, що рухається поступально і має початок у центрі мас механічної системи. Зауважимо, що осі системи координат, що рухається поступально відносно нерухомої системи відліку, називаються *осями Кеніга*.

Формула (19.27) має широке застосування при обчисленні кінетичного моменту твердого тіла, що здійснює складний рух.

Тепер визначимо залежність між головним моментом зовнішніх сил, що діють на точки системи, відносно нерухомого центра O і головним моментом зовнішніх сил відносно центра мас механічної системи. На підставі формули (3.14) (див. розділ “Статика”, параграф 3.6) матимемо

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_k^e) = \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) - \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (19.28)$$

Підставляючи вирази (19.27) і (19.28) в математичний вираз теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи (19.25), здобудемо

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_C \times M\bar{V}_C + \bar{K}_{Cr}) = \sum_{k=1}^n M_C(\bar{F}_k^e) + \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

або

$$\frac{d\bar{r}_C}{dt} \times M\bar{V}_C + \bar{r}_C \times M \frac{d\bar{V}_C}{dt} + \frac{d\bar{K}_{Cr}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_k^e) + \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e.$$

Оскільки $\frac{d\bar{r}_C}{dt} \times M\bar{V}_C = \vec{0}$; $M \frac{d\bar{V}_C}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e$, то остаточно матимемо

$$\bar{r}_C \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \frac{d\bar{K}_{Cr}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_k^e) + \bar{r}_C \times \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

звідки

$$\frac{d\bar{K}_{Cr}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_C(\bar{F}_k^e). \quad (19.29)$$

Векторне рівняння (19.29) є математичним виразом теореми про зміну моменту кількості відносного руху механічної системи щодо центра мас: *у відносному русі механічної системи щодо її центра мас C похідна за часом від моменту кількості руху системи відносно центра мас C дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють на точки системи, відносно центра мас C .*

19.7. Кінетична енергія матеріальної точки і механічної системи.

Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія — міра механічного руху, яка характеризує його здатність перетворюватися в еквівалентну кількість іншого виду руху (теплоту, електрику тощо).

Кінетична енергія окремої матеріальної точки дорівнює півдобутку маси точки на квадрат її швидкості $\left(\frac{mV^2}{2}\right)$. Кінетична енергія матеріальної точки є скалярною та завжди додатною величиною і в системі СІ має розмірність [Н·м].

Кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичних енергій всіх точок системи:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2 \right), \quad (19.30)$$

де $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$ — проекції швидкості k -ї точки механічної системи на нерухомі осі декартової системи координат.

У випадку складного руху механічної системи її кінетичну енергію визначають за теоремою Кеніга. Розглянемо цю теорему.

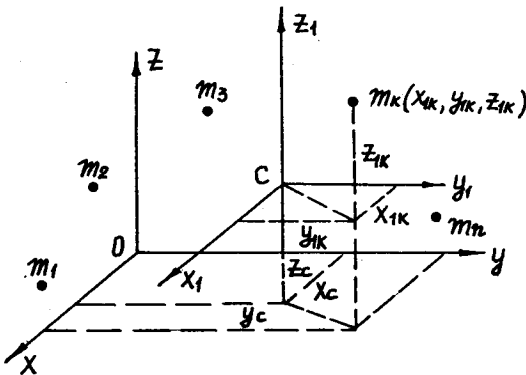


Рис. 19.6

Нехай механічна система, що складається з n матеріальних точок, рухається відносно нерухомої системи відліку, яка визначається декартовою системою координат $Oxyz$. Будемо розглядати рух системи як відносно нерухомих осей системи координат $Oxyz$, так і відносно осей координат, що рухаються поступально і мають початок у центрі мас механічної системи, тобто відносно системи $Cx_1y_1z_1$ (рис. 19.6).

Нехай m_k — одна з точок механічної системи, маса якої дорівнює m_k . Координати точки m_k у системі $Oxyz$ визначаються за формулами:

$$x_k = x_c + x_{1k}; \quad y_k = y_c + y_{1k}; \quad z_k = z_c + z_{1k}.$$

Диференціюючи ці вирази за часом, здобудемо:

$$\dot{x}_k = \dot{x}_c + \dot{x}_{1k}; \quad \dot{y}_k = \dot{y}_c + \dot{y}_{1k}; \quad \dot{z}_k = \dot{z}_c + \dot{z}_{1k}.$$

Значення \dot{x}_k , \dot{y}_k і \dot{z}_k підставляємо у формулу (19.30):

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2 \right) = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \left[\left(\dot{x}_C + \dot{x}_{1k} \right)^2 + \left(\dot{y}_C + \dot{y}_{1k} \right)^2 + \left(\dot{z}_C + \dot{z}_{1k} \right)^2 \right] = \\ = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2 \right) + \sum_{k=1}^n m_k \left(\dot{x}_C \dot{x}_{1k} + \dot{y}_C \dot{y}_{1k} + \dot{z}_C \dot{z}_{1k} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \left(\dot{x}_{1k}^2 + \dot{y}_{1k}^2 + \dot{z}_{1k}^2 \right). \quad (19.31)$$

Вираз $\sum_{k=1}^n m_k \left(\dot{x}_C \dot{x}_{1k} + \dot{y}_C \dot{y}_{1k} + \dot{z}_C \dot{z}_{1k} \right)$ дорівнює нулю, оскільки $\sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_C \dot{x}_{1k}$,

$\sum_{k=1}^n m_k \dot{y}_C \dot{y}_{1k}$ і $\sum_{k=1}^n m_k \dot{z}_C \dot{z}_{1k}$ перетворюються в нуль. Дійсно, наприклад,

$$\sum_{k=1}^n m_k \dot{x}_C \dot{x}_{1k} = \dot{x}_C \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k x_{1k} = \dot{x}_C \frac{d}{dt} M x_{1C} = 0,$$

де M — маса механічної системи; $x_{1C} = 0$ — координата центра мас механічної системи в системі координат $Cx_1y_1z_1$.

Отже, рівняння (19.31) набирає вигляду

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2 \right) + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \left(\dot{x}_{1k}^2 + \dot{y}_{1k}^2 + \dot{z}_{1k}^2 \right) = \frac{MV_C^2}{2} + T_{Cr}. \quad (19.32)$$

Формула (19.32) є математичним виразом теореми Кеніга: *кінетична енергія системи матеріальних точок в її складному русі дорівнює сумі кінетичних енергій центра мас системи, маса якого дорівнює масі системи, і кінетичній енергії системи в її русі відносно системи координат, яка рухається поступально і має початок у центрі мас системи.*

Визначимо кінетичну енергію твердого тіла. У випадку поступального руху твердого тіла всі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, тому $V_k = V_C$ і на підставі формули (19.30) матимемо

$$T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k V_k^2}{2} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k V_C^2}{2} = \frac{MV_C^2}{2}. \quad (19.33)$$

Таким чином, кінетична енергія твердого тіла при його поступальному русі визначається так само, як кінетична енергія окремої точки, якщо за цю точку взяти центр мас твердого тіла C , маса якого дорівнює масі всього тіла.

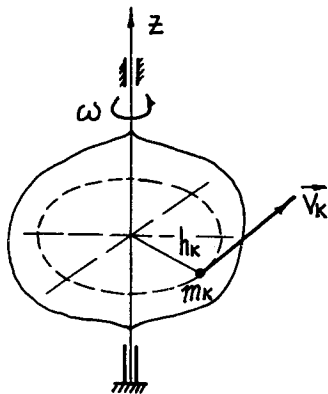


Рис. 19.7

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі швидкість будь-якої точки тіла масою m_k становить $V_k = \omega h_k$ (рис. 19.7), де ω — кутова швидкість обертання твердого тіла; h_k — найкоротша відстань від точки з масою m_k до осі обертання. Тоді на підставі формули (19.30) матимемо

$$T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k V_k^2}{2} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k (\omega h_k)^2}{2} = (\sum m_k h_k^2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_z \omega^2}{2}, \quad (19.34)$$

де J_z — момент інерції твердого тіла відносно осі обертання.

Отже, кінетична енергія твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі дорівнює півдобутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла.

При плоскопаралельному русі твердого тіла кінетичну енергію тіла визначають за допомогою теореми Кеніга за формулою

$$T = \frac{M V_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}, \quad (19.35)$$

де J_C — момент інерції твердого тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла C перпендикулярно до нерухомої площини.

Із формули (19.35) випливає, що при плоскопаралельному русі твердого тіла кінетична енергія тіла складається з кінетичної енергії тіла при його поступальному русі зі швидкістю центра мас і кінетичної енергії тіла при його обертанні навколо осі, що проходить через центр мас C тіла перпендикулярно до нерухомої площини, з кутовою швидкістю ω .

Зазначимо, що у випадку плоскопаралельного руху кінетичну енергію твердого тіла можна також визначити за формулою

$$T = \frac{J_{\text{мц}} \omega^2}{2}, \quad (19.36)$$

де $J_{\text{мц}}$ — момент інерції твердого тіла відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкостей перпендикулярно до нерухомої площини; ω — миттєва кутова швидкість.

Момент інерції $J_{\text{мц}}$ на підставі формули (18.14)

$$J_{\text{мц}} = J_C + M d^2 = J_C + \frac{P}{g} d^2,$$

де J_C — момент інерції твердого тіла відносно центра мас; d — відстань між осями, що проходить через миттєвий центр і центр мас тіла.

Остаточно маємо

$$T = \frac{1}{2} \left(J_C + \frac{P}{g} d^2 \right) \omega^2. \quad (19.37)$$

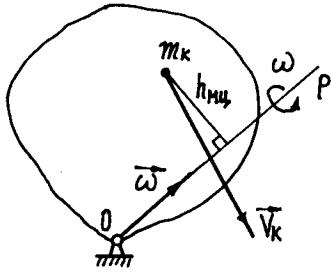


Рис. 19.8

При русі твердого тіла навколо нерухомої точки (при сферичному русі) швидкість будь-якої точки тіла, що має масу m_k , становить: $V_k = \omega h_{\text{мц}}$ (рис. 19.8), де ω — миттєва кутова швидкість тіла; $h_{\text{мц}}$ — відстань між точкою m_k і миттєвою віссю обертання.

Тоді на підставі формули (19.30) матимемо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \omega^2 h_{\text{мц}}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k h_{\text{мц}}^2 = \frac{J_{\text{мц}} \omega^2}{2}, \quad (19.38)$$

де $J_{\text{мц}}$ — момент інерції твердого тіла відносно миттєвої осі обертання.

Якщо тверде тіло здійснює довільний рух, то кінетичну енергію тіла визначають за допомогою теореми Кеніга за формулою

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{J_{C_{\text{мн}}} \omega^2}{2}, \quad (19.39)$$

де M — маса твердого тіла; V_C — швидкість центра мас твердого тіла; $J_{C_{\text{мн}}}$ — момент інерції твердого тіла відносно миттєвої осі, що проходить через центр мас тіла; ω — миттєва кутова швидкість тіла.

Зауважимо, що в загальному випадку моменти інерції у формулах (19.36), (19.38) і (19.39) є змінними величинами.

Якщо механічна система складається з кількох твердих тіл, то кінетична енергія такої системи дорівнює сумі кінетичних енергій кожного твердого тіла, що належить до складу цієї системи:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k, \quad (19.40)$$

де T_k — кінетична енергія окремого твердого тіла, що належить до складу даної механічної системи.

19.8. Робота сили. Потужність. Робота сили ваги, пружної сили, моменту пружних сил

Нехай матеріальна точка M рухається вздовж прямої AB під дією сталої за модулем і напрямом сили \vec{F} (рис. 19.9). Будемо вважати, що точка M рухається від положення M_1 до положення M_2 . Позначимо кут між вектором сили \vec{F} і вектором швидкості \vec{V} точки M через α . Тоді роботою сталою сили \vec{F} на прямолінійному відрізку M_1M_2 називається добуток величини сили \vec{F} на величину переміщення $S = M_1M_2$ точки M і на косинус кута між ними:

$$A = FS \cos \alpha. \quad (19.41)$$

З формули (19.41) випливає, що при $\alpha < \pm \frac{\pi}{2}$ робота сили додатна, а при $\alpha > \pm \frac{\pi}{2}$ — від'ємна. Якщо $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, то робота сили \vec{F} на переміщенні S дорівнює нулю.

Наведене визначення роботи сили має сенс тільки у випадку сталої сили, коли точка прикладання сили переміщується прямолінійно.

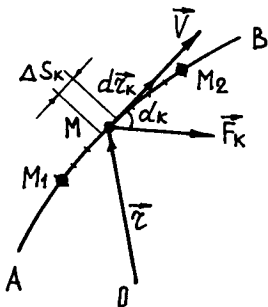


Рис. 19.10

У випадку криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної сили, щоб визначити роботу сили, поділимо відрізок кривої M_1M_2 на n довільних малих відрізків довжиною ΔS_k (рис. 19.10). Вважаючи кожний відрізок прямолінійним і таким, що при переміщенні точки M уздовж цього відрізка сила \vec{F} залишається сталою за величиною і напрямом, на підставі формули (19.41) знайдемо приблизне значення роботи сили \vec{F} на переміщенні точки від положення M_1 до положення M_2 :

$$A \approx \sum_{k=1}^n F_k \cos \alpha_k \cdot \Delta S_k.$$

Точне значення роботи

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n F_k \cos \alpha_k \cdot \Delta S_k = \int_{M_1 M_2} F \cos \alpha dS. \quad (19.42)$$

Отриманий інтеграл називається *криволінійним інтегралом по дузі* M_1M_2 .

Перетворимо формулу (19.42) у більш зручну для практичного застосування. Для цього впровадимо поняття *елементарної роботи сили*.

Під елементарною роботою сили розуміють вираз, який міститься під знаком інтеграла (19.42):

$$d'A = F \cos \alpha dS. \quad (19.43)$$

З кінематики відомо, що $dS = |d\vec{r}|$, де $d\vec{r}$ — елементарний приріст радіуса вектора точки (елементарне переміщення точки), тому

$$d'A = F \cos \alpha |d\vec{r}|,$$

або

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (19.44)$$

Беручи до уваги розклад векторів \vec{F} і $d\vec{r}$ по осях декартової системи координат:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}; \quad d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k},$$

надаємо формулі (19.44) вигляду

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (19.45)$$

Вирази (19.44), (19.45) і (19.43) визначають елементарну роботу сили відповідно при векторному, координатному (декартові координати) і натуральному способах задання руху точки.

Зауважимо, що елементарну роботу сили позначають символом $d'A$, оскільки елементарна робота тільки в окремих випадках є повним диференціалом деякої функції координат.

Інтегруючи вираз (19.45), матимемо

$$A = \int_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (19.46)$$

За формулою (19.46) визначається робота змінної сили на криволінійному переміщенні матеріальної точки при координатному способі визначення її руху, якщо сила \vec{F} залежить від положення точки. Якщо ж сила \vec{F} залежить не тільки від координат матеріальної точки, а й від її швидкості і від часу, то для обчислення роботи за формулою (19.46) необхідно знати закон руху точки.

Якщо сила, що діє на матеріальну точку, є рівнодієюною кількох сил, тобто $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$, то елементарна робота рівнодіючої сили визначається на

підставі теореми: *елементарна робота рівнодійної сили дорівнює алгебричній сумі елементарних робіт складових сил*. Дійсно, оскільки $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, то, підставляючи сюди замість \vec{F} геометричну суму сил, матимемо

$$\begin{aligned} d'A &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = \\ &= d'A_1 + d'A_2 + \dots + d'A_n. \end{aligned} \quad (19.47)$$

З розглянутої теореми випливає, що повна робота рівнодійної сили на деякому кінцевому переміщенні по криволінійній траєкторії дорівнює алгебричній сумі робіт складових сил на тому самому кінцевому переміщенні:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n. \quad (19.48)$$

За одиницю роботи сили в системі СІ беруть [Дж], або [Н·м].

Потужність N характеризує швидкість виконання роботи в часі і визначається за формулою

$$N = \frac{d'A}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}, \quad (19.49)$$

де \vec{V} — вектор швидкості точки.

Таким чином, **потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили \vec{F} , що прикладена до точки, на вектор швидкості \vec{V} цієї точки.**

З формули (19.49) випливає, що від джерела із заданою потужністю можна отримати велику силу тільки при малій швидкості.

Одиницею вимірювання потужності в системі СІ є [Вт], або $\left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right]$.

Розглянемо обчислення роботи сили, прикладеної до матеріальної точки, в деяких окремих випадках.

Робота сили ваги. Нехай матеріальна точка вагою \vec{P} (рис. 19.11) рухається по траєкторії в околі земної поверхні з положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ у

положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Проекції сили \vec{P} на осі декартової системи координат (зв'язаної з Землею) відповідно такі:

$$P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = -P.$$

Елементарна робота сили ваги \vec{P} на підставі формули (19.45)

$$d'A = P_z dz = -P dz.$$

Повна робота сили \vec{P} на підставі формули (10.46)

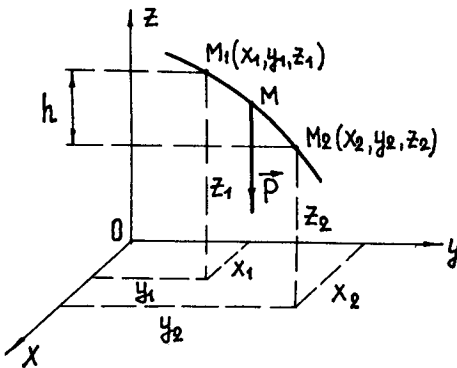


Рис. 19.11

$$A = \int_{z_1}^{z_2} -Pdz = -P(z_2 - z_1) = \pm Ph. \quad (19.50)$$

Отже, робота сили ваги матеріальної точки дорівнює добутку сили ваги на різницю висот кінцевого і початкового положень точки і не залежить від форми траєкторії точки. Якщо матеріальна точка M наближається до земної поверхні, то робота сили ваги буде додатною. Якщо матеріальна точка M віддаляється від земної поверхні, то робота сили ваги від'ємна. Якщо висоти початкового і кінцевого положень матеріальної точки M однакові (при русі точки по замкненій траєкторії), то робота сили дорівнює нулю.

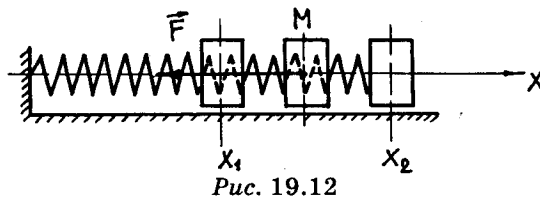


Рис. 19.12

Робота пружної сили ($F_x = -cx$) при прямолінійному переміщенні точки M вздовж осі x від положення x_1 до положення x_2 (рис. 19.12) обчислюється аналогічно до визначення роботи сили ваги за формулою (19.46):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -c \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2). \quad (19.51)$$

Робота від'ємна, якщо точка M рухається в бік зростання величини сили \vec{F} , і додатна, якщо точка M рухається в бік спадання величини сили \vec{F} .

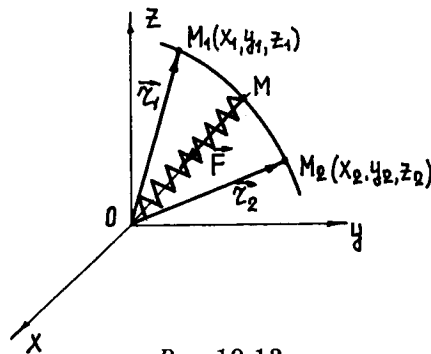


Рис. 19.13

Робота пружної сили $\vec{F} = -c\vec{r}$ при кінцевому переміщенні по криволінійній траєкторії M_1M_2 (рис. 19.13) пропорційна різниці квадратів величин кінцевого і початкового радіусів векторів точки M :

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -c \int_{M_1}^{M_2} \vec{r} \cdot d\vec{r} = -\frac{c}{2}(r_2^2 - r_1^2). \quad (19.52)$$

Таким чином, аналогічно роботі сили ваги робота пружної сили залежить від початкового і кінцевого положень точки M і не залежить від форми кривої, по якій переміщується матеріальна точка M .

Робота моменту пружних сил $M_z = -c\varphi$

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi = -c \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi d\varphi = -\frac{c}{2}(\varphi_2^2 - \varphi_1^2), \quad (19.53)$$

де φ_1 — початковий кут закручування; φ_2 — кінцевий кут закручування.

19.9. Елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла

При поступальному русі твердого тіла елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює скалярному добутку головного вектора зовнішніх сил \vec{R}_O^e на вектор елементарного переміщення центра мас $d\vec{r}_C$ твердого тіла.

Дійсно, оскільки при поступальному русі всі точки тіла мають однакові елементарні переміщення, які дорівнюють переміщенню центра мас тіла, то матимемо

$$d'A = \vec{F}_1^e d\vec{r}_C + \vec{F}_2^e d\vec{r}_C + \dots + \vec{F}_n^e d\vec{r}_C = (\vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e + \dots + \vec{F}_n^e) \cdot d\vec{r}_C = \vec{R}_O^e \cdot d\vec{r}_C. \quad (19.54)$$

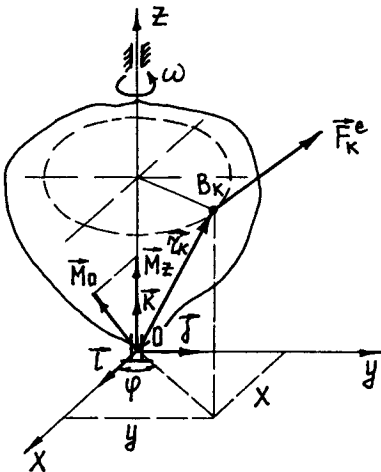


Рис. 19.14

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює добутку головного моменту зовнішніх сил відносно осі обертання M_z^e на елементарний кут повороту $d\varphi$ твердого тіла. Дійсно, елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, становить:

$$d^I A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k,$$

де \vec{F}_k^e — зовнішня сила, прикладена до точки B_k (рис. 19.14); $d\vec{r}_k$ — вектор елементарного переміщення довільної точки B_k твердого тіла.

Перетворимо попередній вираз:

$$d^I A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \frac{d\vec{r}_k}{dt} dt = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \vec{V}_k dt.$$

Оскільки $\vec{V}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$, то

$$d^I A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) dt,$$

де \vec{r}_k — радіус-вектор точки B_k .

На підставі властивості векторно-скалярного добутку

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

матимемо

$$d'A = \bar{\omega} dt \cdot \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e.$$

Оскільки $\bar{\omega} = \omega \bar{k}$, а $\omega dt = d\varphi$, то остаточно

$$d'A = \bar{k} d\varphi \cdot \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e = M_z^e d\varphi, \quad (19.55)$$

де $\bar{k} \cdot \bar{M}_O^e = M_O^e \cos(\overline{\bar{M}_O^e, \bar{k}}) = M_z^e$, $\bar{M}_O^e = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e$ — головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки O , яка лежить на осі Oz .

У випадку плоскопаралельного руху твердого тіла елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює скалярному добутку головного вектора \bar{R}_O^e зовнішніх сил на вектор елементарного переміщення $d\bar{r}_C$ центра мас тіла, тобто $\bar{R}_O^e \cdot d\bar{r}_C$, складеного з елементарною роботою зовнішніх сил при обертанні тіла навколо осі, що проходить через центр мас C тіла перпендикулярно до нерухомої площини, тобто $M_C^e d\varphi$.

Дійсно, при плоскопаралельному русі твердого тіла вектор переміщення довільної точки тіла

$$d\bar{r}_k = d\bar{r}_C + (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_k) dt, \text{ або } d\bar{r}_k = d\bar{r}_C + (\bar{\omega} dt \times \bar{\rho}_k).$$

Тоді

$$\begin{aligned} d'A &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_C + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot (\bar{\omega} dt \times \bar{\rho}_k) = \\ &= \bar{R}_O^e \cdot d\bar{r}_C + \bar{\omega} dt \cdot \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e = \bar{R}_O^e \cdot d\bar{r}_C + M_C^e d\varphi, \end{aligned} \quad (19.56)$$

оскільки

$$\begin{aligned} \bar{\omega} dt \cdot \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times \bar{F}_k^e &= \bar{\omega} dt \cdot \bar{M}_C^e = \omega dt M_C^e \cos(\overline{\bar{\omega} dt, \bar{M}_C^e}) = \\ &= \frac{d\varphi}{dt} dt M_C^e = M_C^e d\varphi, \end{aligned}$$

де $\cos(\overline{\bar{\omega} dt, \bar{M}_C^e}) = 1$.

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої точки елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює скаляр-

ному добутку вектора головного моменту зовнішніх сил \vec{M}_O^e відносно нерухомої точки O на вектор елементарного повороту тіла $\vec{\omega} dt$ навколо миттєвої осі. Дійсно,

$$\begin{aligned} d'A &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot \vec{V}_k dt = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) dt = \\ &= \vec{\omega} dt \cdot \sum_{k=1}^n (\vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^e) = \sum_{k=1}^n (\vec{\rho}_k \times \vec{F}_k^e) \cdot \vec{\omega} dt = \vec{M}_O^e \cdot \vec{\omega} dt, \end{aligned} \quad (19.57)$$

де $\vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt}$; $\vec{\omega}$ — вектор миттєвої кутової швидкості твердого тіла; $\vec{\rho}_k$ — радіус-вектор, що визначає положення довільної точки тіла відносно нерухомої точки O .

У випадку вільного руху твердого тіла елементарна робота зовнішніх сил визначається за формулою, аналогічною формулі (19.56):

$$d'A = \vec{R}_O^e \cdot d\vec{r}_O + \vec{M}_O^e \cdot \vec{\omega} dt, \quad (19.58)$$

де — \vec{R}_O^e — головний вектор зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла; $d\vec{r}_O$ — вектор елементарного переміщення полюса O ; \vec{M}_O^e — вектор головного моменту зовнішніх сил відносно полюса O ; $\vec{\omega}$ — вектор миттєвої кутової швидкості твердого тіла.

Зауважимо, що для одержання виразів повних робіт зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, необхідно проінтегрувати у визначених границях відповідні елементарні роботи. Так, повна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, буде визначатися за формулою

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z^e d\varphi, \quad (19.59)$$

де φ_1 і φ_2 — відповідно початковий і кінцевий кут повороту твердого тіла.

Якщо на тіло діють сталі зовнішні сили, то з формули (19.59) випливає:

$$A = M_z^e (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (19.60)$$

Потужність зовнішніх сил у випадку обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

$$N = \frac{d'A}{dt} = \frac{M_z^e d\varphi}{dt} = M_z^e \omega. \quad (19.61)$$

Отже, потужність зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку головного момента зовнішніх сил відносно осі обертання M_z^e на кутову швидкість ω твердого тіла.

19.10. Робота внутрішніх сил твердого тіла

Тверде тіло — це незмінна механічна система, оскільки відстань між будь-якими точками тіла при русі тіла залишається незмінною.

Розглянемо тверде тіло (рис.19.15). Нехай M_1 і M_2 — точки цього твердого тіла. Позначимо сили взаємодії між точками відповідно \vec{F}_1^i і \vec{F}_2^i . На підставі третього закону Ньютона

$$\vec{F}_1^i = -\vec{F}_2^i. \tag{19.62}$$

Нехай вектори швидкостей точок тіла M_1 і M_2 у даний момент часу мають напрями, зображені на рис. 19.15. Тоді елементарні переміщення $d\vec{r}_1$ і $d\vec{r}_2$ точок M_1 і M_2 будуть напрямлені вздовж векторів \vec{V}_1 і \vec{V}_2 .

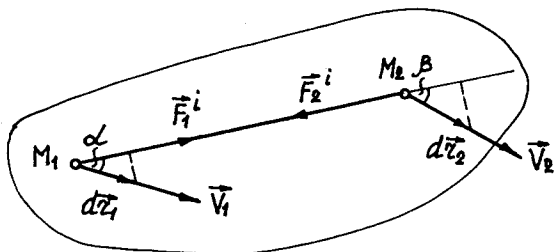


Рис. 19.15

На підставі теореми про проекції швидкостей двох точок тіла на пряму, що проходить через ці точки (див. розділ “Кінематика”, параграф 12.14), проекції векторів \vec{V}_1 і \vec{V}_2 на пряму M_1M_2 рівні, отже, рівні і проекції векторів $d\vec{r}_1$ і $d\vec{r}_2$:

$$dr_1 \cos \alpha = dr_2 \cos \beta.$$

Обчислимо суму елементарних робіт двох внутрішніх сил \vec{F}_1^i і \vec{F}_2^i (рис. 19.15):

$$\sum_{k=1}^2 d'A^i = \vec{F}_1^i \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^i \cdot d\vec{r}_2 = F_1^i dr_1 \cos \alpha - F_2^i dr_2 \cos \beta = 0,$$

оскільки $|\vec{F}_1^i| = |\vec{F}_2^i|$.

Отриманий результат справедливий для всіх внутрішніх сил твердого тіла.

Отже, сума робіт внутрішніх сил твердого тіла на будь-якому його переміщенні дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n A_k^i = 0. \tag{19.63}$$

19.11. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і механічної системи

Запишемо основне рівняння динаміки матеріальної точки у вигляді

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}.$$

Помножимо скалярно ліву і праву частини цього рівняння на $d\vec{r}$ (вектор елементарного переміщення точки):

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Перетворимо ліву частину цього виразу:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{V} = m\vec{V} \cdot d\vec{V} = d\left(\frac{mV^2}{2}\right).$$

Отже, останнє рівняння набирає вигляду

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Проінтегрувавши цей вираз у визначених межах:

$$\int_{V_0}^V d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

одержимо

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A, \quad (19.64)$$

де V — швидкість матеріальної точки в її кінцевому положенні M ; V_0 — швидкість матеріальної точки в її початковому положенні M_0 ; A — робота рівнодійної всіх сил, що діють при точку на переміщенні точки з положення M_0 в положення M .

Формула (19.64) є математичним виразом теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки: *зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної всіх сил, що діють на точку, на цьому самому переміщенні.*

Розглянемо рух механічної системи. Застосуємо до точок системи аксіому про звільнення від в'язей і замінимо в'язі відповідними реакціями. По-

значимо рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на k -ту точку системи, через \vec{F}_k^e і \vec{F}_k^i . Запишемо диференціальне рівняння руху k -ї точки:

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

Помножимо скалярно обидві частини цього рівняння на диференціал радіуса-вектора k -ї точки $d\vec{r}_k$:

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot d\vec{r}_k = \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k,$$

або $m_k \vec{V}_k \cdot d\vec{V}_k = \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k$.

Оскільки $m_k \vec{V}_k \cdot d\vec{V}_k = d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right)$, то дістанемо

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k.$$

Для всіх точок системи матимемо

$$d\left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k,$$

або

$$dT = \sum_{k=1}^n d'A_k^e + \sum_{k=1}^n d'A_k^i. \quad (19.65)$$

Формула (19.65) є математичним виразом теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі: *диференціал кінетичної енергії механічної системи дорівнює сумі елементарних робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи.*

Якщо проінтегрувати обидві частини рівняння (19.65) у визначених межах:

$$\int_{T_0}^T dT = \sum_{k=1}^n \int_{M_0^M} d'A_k^e + \sum_{k=1}^n \int_{M_0^M} d'A_k^i,$$

то матимемо

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i, \quad (19.66)$$

де T_0 , T — кінетична енергія механічної системи відповідно в початковому

M_0 і кінцевому M положеннях системи; $\sum_{k=1}^n A_k^e$, $\sum_{k=1}^n A_k^i$ — сума робіт відповідно

всіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи при переміщенні системи від положення M_0 до положення M .

Формула (19.66) є математичним виразом теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі: *зміна кінетичної енергії механічної системи на її кінцевому переміщенні з одного положення в інше дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок системи.*

З розглянутого випливає, що на відміну від теореми про рух центра мас, теореми про зміну кількості і моменту кількості руху механічної системи теорема про зміну кінетичної енергії системи — це єдина теорема, яка враховує безпосередній вплив на рух механічної системи не тільки зовнішніх, а й внутрішніх сил.

Зауважимо, що для незмінних систем, тобто твердих тіл або систем, які складаються з твердих тіл, з'єднаних між собою жорсткими нерозтяжними стрижнями та нитками, алгебрична сума робіт внутрішніх сил, що діють на точки системи, на будь-якому переміщенні системи дорівнює нулю. Для таких механічних систем формули (19.65) і (19.66) набирають вигляду:

$$dT = \sum_{k=1}^n d'A_k^e; \quad (19.67)$$

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e. \quad (19.68)$$

19.12. Приклади застосування загальних теорем при розв'язанні задач динаміки механічної системи. Методичні вказівки і типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю

Теоремою Ейлера стосовно суцільного середовища (рідини і газу) зручно користуватися при розв'язанні задач, в яких в число даних і шуканих величин входять: площі плоских поперечних перерізів, які обмежують об'єм, що розглядається, густина рідини (газу) в цих перерізах, об'ємні (масові) і поверхневі сили.

Розв'язання задач за допомогою теореми Ейлера рекомендується виконувати за таким планом:

- 1) зобразити на розрахунковій схемі об'ємні і поверхневі сили;

2) зобразити на розрахунковій схемі секундні кількості руху суцільного середовища; при цьому вектори секундних кількостей руху мають бути напрямленими всередину об'єма, що розглядається;

3) побудувати відповідну систему декартових координат;

4) записати теорему Ейлера в проекціях на осі координат, тобто записати рівняння (19.16);

5) з рівнянь (19.16) визначити шукані величини.

Приклад 19.1. Струмінь води тече по зігнутій трубі (рис. 19.16, а) зі швидкістю 10 м/с. Вісь труби розташовується в горизонтальній площині. Переріз труби — коло, що має діаметр 10 см (0,1 м). Густина води $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Визначити головний вектор сил додаткового динамічного тиску води на стінки труби.

Розв'язання. На розрахунковій схемі зображуємо об'ємні і поверхневі сили. Оскільки об'ємними силами є сили ваги частинок води і труба лежить в горизонтальній площині, то головний

вектор зовнішніх об'ємних сил $\vec{F}_{об}^e$ буде перпендикулярним до площини труби і на рис. 19.16, б не зображений. Поверхневими силами є сили реакцій стінок труби. Визначивши головний вектор зовнішніх поверхневих сил (реакцій стінок труби), знайдемо на підставі третього закону Ньютона шуканий головний вектор сил додаткового динамічного тиску води на стінки труби. Вектор $\vec{F}_{пов}^e$ наведено на рис. 19.16, б.

Зображуємо на розрахунковій схемі вектори секундних кількостей руху води, що тече через перерізи труби (рис. 19.16, б). Чисельно вектор $m_c \vec{V}$

$$|m_c \vec{V}| = \rho \frac{\pi d^2}{4} \cdot V^2.$$

Побудуємо систему координат з початком у точці O (рис. 19.16, б) і запишемо теорему Ейлера в проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned} F_{пов}^e - 2m_c V \cos 60^\circ &= 0; \\ -m_c V \sin 60^\circ + m_c V \sin 60^\circ &= 0, \end{aligned}$$

звідки знайдемо

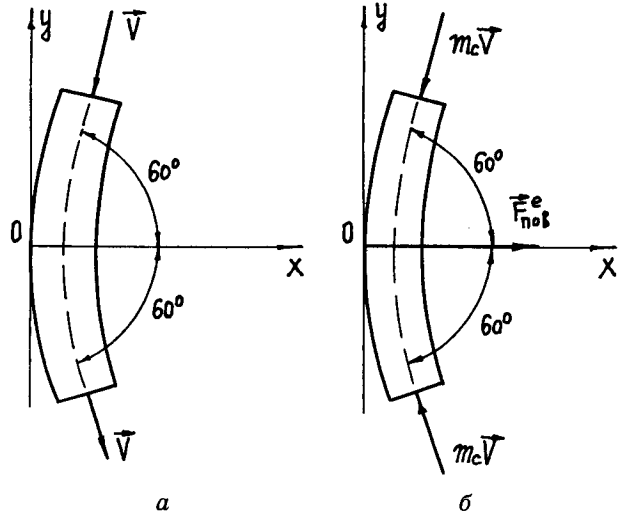


Рис. 19.16

$$F_{\text{пов}}^e = 2m_c V \cos 60^\circ = \frac{\pi d^2 \rho V^2}{2} \cos 60^\circ = \frac{1000 \cdot 3,14 \cdot 0,1^2 \cdot 10^2 \cdot 0,5}{2} = 785 \text{ Н.}$$

Головний вектор додаткового динамічного тиску води на стінки труби чисельно дорівнює головному вектору зовнішніх сил $\vec{F}_{\text{пов}}^e$, але має прямо протилежний до нього напрям, тобто по горизонталі ліворуч.

Теорема про рух центра мас механічної системи матеріальних точок застосовується в таких випадках.

1. Під час вивчення поступального руху механічної системи, оскільки в цьому випадку всі точки системи мають в даний момент однакові швидкості і прискорення, і тому поступальний рух системи визначається рухом центра мас.

2. У випадку складного руху, коли розглядають поступальну складову руху разом із центром мас, оскільки складний рух механічної системи завжди можна розкласти на переносний поступальний рух разом із центром мас і відносний рух щодо центра мас.

3. У тих випадках, коли справедливі закони збереження руху центра мас механічної системи.

4. При визначенні руху однієї з точок системи за заданим рухом решти точок і за заданими зовнішніми силами.

5. У разі знаходження головного вектора зовнішніх сил (геометричної суми зовнішніх сил), у тому числі реакцій в'язей за заданими законами руху точок системи.

Методика розв'язання задач при застосуванні теореми про рух центра мас механічної системи така:

а) визначити, які матеріальні точки треба включити в систему, рух якої розглядається (тобто вказати об'єкт руху);

б) визначити в'язі, накладені на точки системи, що розглядається;

в) застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, відкинути в'язі, замінивши їх дію на точки системи реакціями;

г) скласти схему зовнішніх сил, у тому числі й реакції в'язей, прикладених до виділеної системи точок;

д) вибрати систему координат і скласти диференціальні рівняння руху центра мас системи в проекціях на осі декартових координат. Для цього слід записати координати центрів мас усіх точок системи і двічі продиференціювати за часом;

е) визначити початкові умови руху центра мас системи матеріальних точок;

є) проінтегрувати диференціальні рівняння і визначити сталі інтегрування на основі початкових умов руху, після чого записати закон руху центра мас системи;

ж) дослідити результат розв'язання задачі і зробити, якщо це можливо, узагальнювальний висновок.

Приклад 19.2. Для просіювання бо-рошна застосовується вібраційний гро-хот, який складається з корпусу A (ко-роб із ситом), що підтримується спіраль-ними пружинами, коефіцієнт жорст-кості яких дорівнює c , та з двох дисків K і L , змонтованих на корпусі (рис. 19.17). Диски обертаються зі сталюю ку-товою швидкістю ω навколо горизон-тальних осей O_1 і O_2 , перпендикуляр-них до площини рисунка. Масаи $m_1 = m_2 = m$ дисків зосереджені в точ-ках C_1 і C_2 . Диски обертаються у проти-лежні боки так, що в будь-який мо-мент часу точки C_1 і C_2 розташовують-ся симетрично відносно вертикальної осі y у початковий момент займають нижнє положення. Маса корпусу A до-рівнює m_3 .

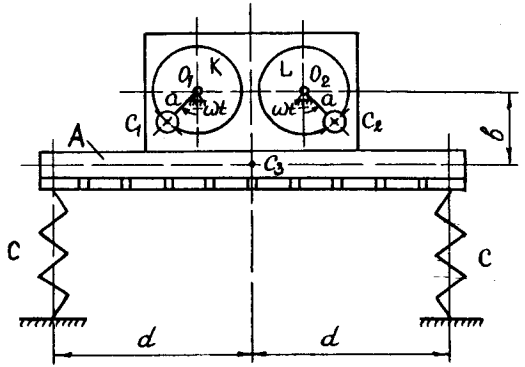


Рис. 19.17

Скласти диференціальне рівняння руху центра ваги C_3 корпусу A вздовж вертикалі.

Розв'язання. Замінюємо дві паралельні пружини однією пружиною з еквівалентною жорсткістю (див. параграф 16.12, приклад 16.5), що дорівнює $c_{\text{екв}} = 2c$ (рис. 19.18).

Ця система складається з корпусу A і двох дисків K та L . В'язую для цієї системи буде спіральна пружина з еквівалентною жорсткістю $c_{\text{екв}} = 2c$. Отже, до зовнішніх сил, що діють на систему, належать: \vec{P}_1 — сила ваги диска K ; \vec{P}_2 — сила ваги диска L ; \vec{P}_3 — сила ваги корпусу A ; $\vec{F}_{\text{пр}}$ — сила пружності спіральної пружини: $F_{\text{пр}} = 2c\lambda$, де λ — повна деформація пружини.

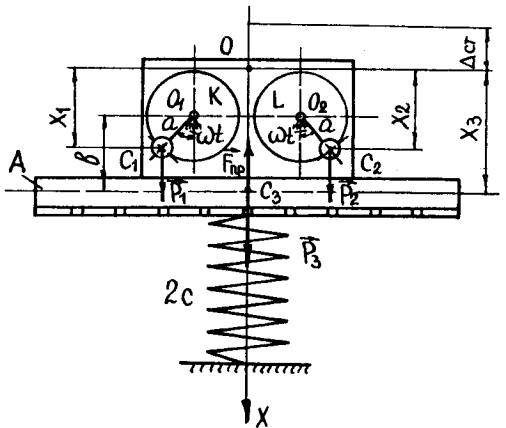


Рис. 19.18

Сили \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 і $\vec{F}_{\text{пр}}$ утворюють плоску систему паралельних сил.

Виберемо початок відліку руху O на осі x у положенні статичної рівноваги центра ваги C_3 корпусу A . В цьому положенні пружина має деформацію $\Delta_{\text{ст}}$:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{2c}.$$

Розглянемо поступальний рух системи вздовж вертикалі Ox . Застосуємо теорему про рух центра мас системи в проекції на вісь Ox :

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e,$$

або

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_C = P_1 + P_2 + P_3 - 2c(\Delta_{\text{ст}} + x_3),$$

де $F_{\text{пр}} = 2c(\Delta_{\text{ст}} + x_3)$, оскільки точка C_3 зображена на рис. 19.18 у момент її переміщення із положення статичної рівноваги на x_3 вниз; при цьому деформація пружини $\lambda = \Delta_{\text{ст}} + x_3$.

Беручи до уваги значення $\Delta_{\text{ст}}$, останнє рівняння подамо у вигляді

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_C = -2cx_3. \quad (1)$$

Координату центра мас системи визначаємо за формулою

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Виразимо x_1 і x_2 через x_3 . Оскільки диски обертаються зі сталою кутовою швидкістю ω , то кут повороту дисків $\varphi = \omega t$. З рис. 19.18 випливає, що

$$x_1 = x_2 = x_3 - b + a \cos \varphi = x_3 - b + a \cos \omega t.$$

Тоді

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{m_1(x_3 - b + a \cos \omega t) + m_2(x_3 - b + a \cos \omega t)}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \\ &= \frac{m_1 x_3 - m_1 b + m_1 a \cos \omega t}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_2 x_3 - m_2 b + m_2 a \cos \omega t}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \\ &= x_3 - \frac{b(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{(m_1 + m_2)a}{m_1 + m_2 + m_3} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Продиференціювавши двічі останню рівність за часом, матимемо

$$\ddot{x}_C = \ddot{x}_3 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} a \omega^2 \cos \omega t.$$

Підставляючи цю рівність у рівняння (1), дістанемо

$$\ddot{x}_3 + \frac{2c}{m_1 + m_2 + m_3} x_3 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} a \omega^2 \cos \omega t.$$

За умовою задачі $m_1 = m_2 = m$, тому

$$\ddot{x}_3 + \frac{2c}{2m + m_3} x_3 = \frac{2m}{2m + m_3} a\omega^2 \cos \omega t. \quad (2)$$

Рівняння (2) і є шуканим диференціальним рівнянням руху центра ваги C_3 корпусу А.

Теорему про зміну моменту кількості руху механічної системи зручно застосовувати при дослідженні руху системи, до якої належать тверді тіла, що здійснюють обертальний рух навколо довільної точки або осі.

Розв'язання задач за допомогою теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи відносно нерухомої осі рекомендується виконувати за таким планом:

- 1) сполучити одну з осей системи відліку з віссю обертання;
- 2) записати теорему про зміну моменту кількості руху механічної системи (кінетичного моменту) відносно відповідної осі;
- 3) прикласти до механічної системи всі зовнішні сили;
- 4) обчислити момент кількості руху механічної системи відносно нерухомої осі та визначити його похідну за часом;
- 5) обчислити головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої осі;
- 6) підставити результати, отримані при виконанні пунктів 4 та 5, у пункт 2 і потім, залежно від умови задачі, розв'язати пряму або обернену (основну) задачу динаміки.

Якщо справедливий закон збереження моменту кількості руху механічної системи, то методика розв'язання задач така:

- 1) побудувати систему відліку і сполучити одну з осей системи з віссю обертання;
- 2) записати теорему про зміну моменту кількості руху механічної системи (кінетичного моменту) відносно обраної осі;
- 3) прикласти до механічної системи всі зовнішні сили;
- 4) показати, що сума моментів усіх зовнішніх сил системи відносно осі обертання дорівнює нулю;
- 5) обчислити і порівняти моменти кількості руху механічної системи відносно осі у початковий і кінцевий моменти часу;
- 6) розв'язати здобуте рівняння і визначити шукану величину.

Приклад 19.3. Вакуум-фільтр неперервної дії (рис. 19.19) складається з барабана 1, фільтрувальної тканини 2, короба для сусли 3 і натяжного пристрою з роликками 4, 5 і 6 забезпечують підтримку фільтрувальної тканини з осадом при роботі фільтра, а ролик 7 забезпечує її натяг.

На барабан 1 діють обертальний момент M і момент сил опору, пропорційний кутовій швидкості барабана: $M_{\text{оп}} = -\alpha\omega$, де α — стала величина.

Нехтуючи масою фільтрувальної тканини і осаду та вважаючи, що проковзування фільтрувальної тканини по барабану і по роликках відсутнє, ви-

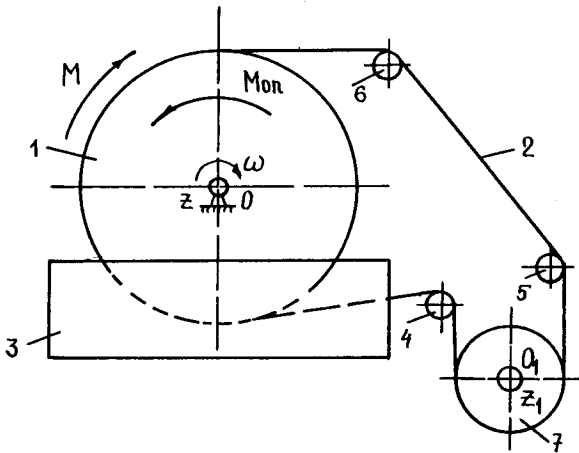


Рис. 19.19

значити закон, за яким змінюється кут повороту барабана $\varphi = \varphi(t)$, якщо маса барабана m , радіус барабана R , радіус інерції барабана ρ , а ролик 7 є суцільним однорідним диском масою m_1 , радіус якого дорівнює r . У початковий момент руху система (вакуум-фільтр) перебувала у спокої.

Розв'язання. Застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху механічної системи в проекції на вісь z :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e).$$

Оскільки кінетичний момент твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, відносно осі обертання дорівнює добутку кутової швидкості обертання тіла навколо цієї осі на момент інерції тіла відносно цієї самої осі, то останнє рівняння набирає вигляду

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e), \quad (1)$$

де J_z — момент інерції твердого тіла відносно осі обертання; $\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt}$ — кутове

прискорення твердого тіла; $\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e)$ — алгебрична сума моментів усіх зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, відносно осі обертання тіла.

До барабана 1 прикладено: обертальний момент M , момент сил опору $M_{\text{он}}$, сила ваги барабана \vec{P} , реакції осі барабана \vec{X}_O, \vec{Y}_O , реакції фільтрувальної тканини \vec{T}_1 і \vec{T}_2 (рис. 19.20).

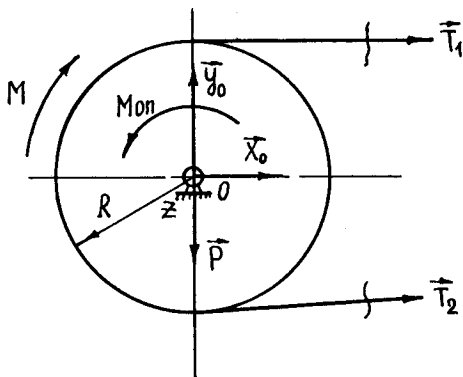


Рис. 19.20

Обчислимо момент зовнішніх сил, прикладених до барабана:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e) &= M + (T_1 - T_2)R - M_{\text{он}} = \\ &= M + (T_1 - T_2)R - \alpha \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

де $\dot{\varphi} = \omega$ — кутова швидкість барабана.

Момент інерції барабана відносно осі обертання z

$$J_z = m\rho^2.$$

Значення моменту $\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e)$ і моменту інерції J_z підставляємо в рівняння (1):

$$m\rho^2 \ddot{\varphi} = M + (T_1 - T_2)R - \alpha \dot{\varphi}, \quad (2)$$

де $\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt}$ — кутове прискорення барабана 1.

У рівності (2) реакції фільтрувальної тканини T_1 і T_2 нам невідомі. Для виключення T_1 і T_2 розглянемо рух ролика 7 (рис. 19.21). Ролик здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі z_1 . Складемо рівняння руху ролика. Це рівняння аналогічне рівнянню (1):

$$J_{z_1} \ddot{\varphi}_1 = \sum_{k=1}^n M_{z_1}(\bar{F}_k^e),$$

де $\ddot{\varphi}_1 = \frac{d\omega_1}{dt}$ — кутове прискорення ролика 7.

На ролик 7 діють сила ваги \bar{P}_1 і реакції фільтрувальної тканини T_1 і T_2 . Обчислимо момент сил, прикладених до ролика 7:

$$\sum_{k=1}^n M_{z_1}(\bar{F}_k^e) = (T_2 - T_1)r.$$

Момент інерції ролика відносно осі обертання z_1

$$J_{z_1} = \frac{m_1 r^2}{2}.$$

Значення моменту $\sum_{k=1}^n M_{z_1}(\bar{F}_k^e)$ і моменту інерції J_{z_1} підставляємо в рівняння (3):

$$\frac{m_1 r^2}{2} \ddot{\varphi}_1 = (T_2 - T_1)r. \quad (4)$$

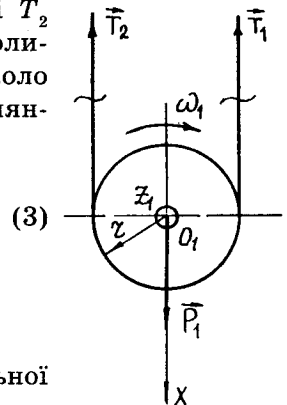


Рис. 19.21

Оскільки вісь z_1 нерухома, то з рівняння рівноваги сил, що діють на ролик, тобто

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; P_1 - T_1 - T_2 = 0,$$

матимемо

$$P_1 = T_1 + T_2. \quad (5)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (4) і (5), дістанемо:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{P_1}{2} - \frac{m_1 r \ddot{\varphi}_1}{4}; \\ T_2 &= \frac{P_1}{2} + \frac{m_1 r \ddot{\varphi}_1}{4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Враховуючи, що за умовою задачі фільтрувальна тканина рухається без ковзання, тобто всі її точки мають однакові за величиною швидкості, матимемо

$$\omega R = \omega_1 r, \text{ або } \dot{\varphi} R = \dot{\varphi}_1 r, \text{ де } \omega_1 = \dot{\varphi}_1 \text{ — кутова швидкість ролика 7.}$$

Диференціюючи останній вираз за часом, матимемо

$$\ddot{\varphi} R = \ddot{\varphi}_1 r,$$

звідки

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi} \frac{R}{r}. \quad (7)$$

Беручи до уваги рівності (6) і (7), рівнянню (2) надамо вигляду

$$\frac{\ddot{\varphi}}{2} (2m\rho^2 + m_1 R^2) = M - \alpha \dot{\varphi},$$

або

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{2m\rho^2 + m_1 R^2} (M - \alpha \dot{\varphi}). \quad (8)$$

Оскільки $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$, то диференціальне рівняння (8) можна записати так:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{2}{2m\rho^2 + m_1 R^2} (M - \alpha \dot{\varphi}).$$

Позначимо $\frac{2}{2m\rho^2 + m_1 R^2} = n$;

тоді диференціальне рівняння набирає вигляду

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = n \left(M - \alpha \dot{\varphi} \right). \quad (9)$$

Відокремимо змінні $\dot{\varphi}$ і t :

$$\frac{d\dot{\varphi}}{n \left(M - \alpha \dot{\varphi} \right)} = dt.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$-\frac{1}{n\alpha} \ln \left(M - \alpha \dot{\varphi} \right) + c_1 = t. \quad (10)$$

Сталу інтегрування c_1 визначимо на підставі початкових умов руху:

$t = 0$; $\varphi(0) = 0$; $\dot{\varphi}(0) = 0$; тоді з останнього рівняння дістанемо

$$c_1 = \frac{1}{n\alpha} \ln M.$$

Отже, рівняння (10) набирає вигляду

$$\frac{1}{n\alpha} \ln M - \frac{1}{n\alpha} \ln \left(M - \alpha \dot{\varphi} \right) = t.$$

Перетворимо останнє рівняння:

$$\ln \frac{M}{M - \alpha \dot{\varphi}} = n\alpha t,$$

або

$$e^{n\alpha t} = \frac{M}{M - \alpha \dot{\varphi}},$$

звідки знайдемо

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{\alpha} \left(1 - e^{-n\alpha t} \right). \quad (11)$$

Через те що $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$, то рівняння (11) набирає вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{\alpha} (1 - e^{-nat}).$$

Відокремимо змінні φ і t :

$$d\varphi = \frac{M}{\alpha} (1 - e^{-nat}) dt.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$\varphi = \frac{Mt}{\alpha} - \frac{M}{\alpha^2 n} e^{-nat} + c_2. \quad (12)$$

Сталу інтегрування c_2 визначимо на підставі початкових умов руху:

$t = 0$; $\varphi(0) = 0$; $\dot{\varphi}(0) = 0$; тоді з рівняння (12) дістанемо

$$c_2 = \frac{M}{\alpha^2 n}.$$

З урахуванням значення c_2 рівняння (12) набирає вигляду

$$\varphi = \frac{Mt}{\alpha} + \frac{M}{\alpha^2 n} (1 - e^{-nat}),$$

або, беручи до уваги значення n , остаточно матимемо

$$\varphi = \frac{Mt}{\alpha} + \frac{M(2m\rho^2 + m_1 R^2)}{2\alpha^2} \left(1 - e^{-\frac{2\alpha t}{2m\rho^2 + m_1 R^2}} \right). \quad (13)$$

Рівняння (13) є шуканим законом, за яким змінюється кут повороту барабана 1 вакуум-фільтра при його роботі з часом.

Теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи застосовують у тих випадках, коли в число даних і шуканих величин входять: інерційні характеристики точок системи (маси і моменти інерції); швидкості точок системи (лінійні і кутові); сили, моменти сил і пар сил, прикладених до точок системи; переміщення точок системи (лінійні, кутові).

Зазначимо також, що застосування цієї теореми найефективніше тоді, коли сили і моменти сил та пар сил стали або залежать від координат точок системи.

Розв'язування задач за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії проводять у такій послідовності:

1) визначають кількість матеріальних точок (тіл), що належать до системи;

2) розглядають схему сил як зовнішніх, так і внутрішніх, що діють на точки системи;

3) вибирають систему координат та переміщення системи, для якої слід застосувати теорему про зміну кінетичної енергії;

4) досліджують, виконують внутрішні сили роботу чи ні;

5) обчислюють суму робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил на переміщеннях точок системи (у випадку незмінної системи — тільки суму робіт зовнішніх сил);

6) обчислюють кінетичну енергію механічної системи (точок та тіл, які належать до системи) в початковому і кінцевому положеннях системи. При цьому лінійні швидкості окремих точок системи треба, користуючись співвідношеннями кінематики, виразити як функцію швидкості однієї або кількох точок;

7) складають рівняння, що відповідає теоремі про зміну кінетичної енергії, і визначають невідому величину.

Приклад 19.4. Підвісний конвеєр для транспортування штучних вантажів між цехами м'ясокомбінату складається з напрямної рейки 1, двокоткових візків 2 і вантажних колісок 3 (рис. 19.22). Коліски 3 підвішені до візків 2 за допомогою шарнірів С. Усі візки з'єднані між собою тяговим ланцюгом 4.

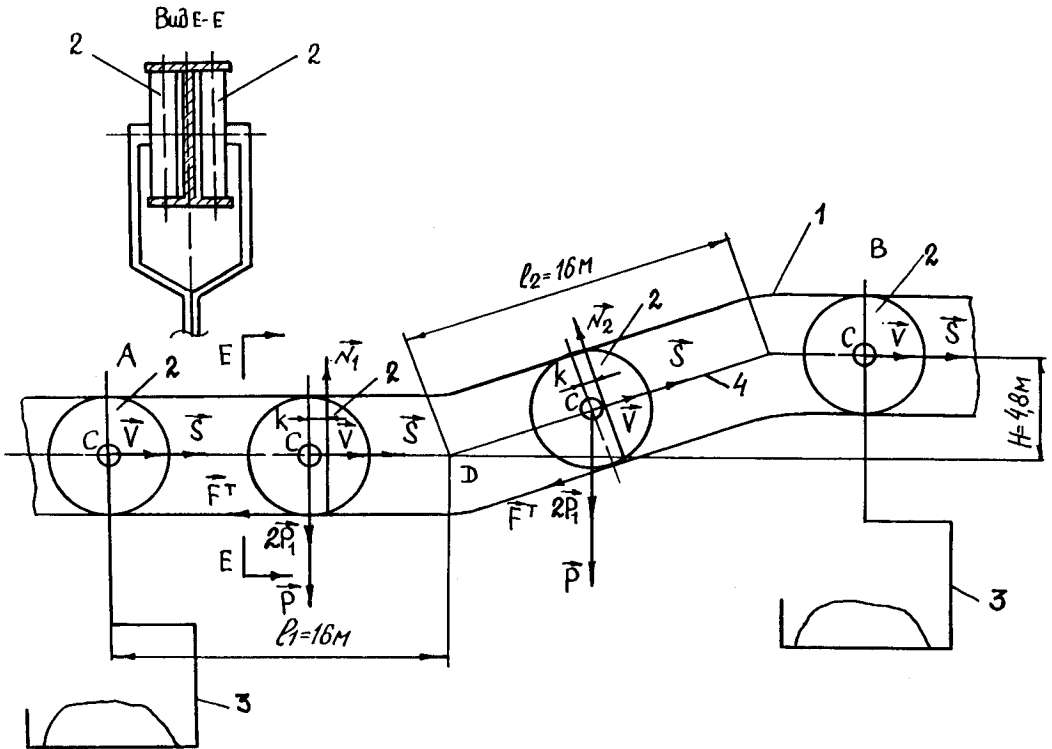


Рис. 19.22

Маса вантажу з коліскою становить $m = 60$ кг, маса котка візка 2, який має діаметр $d = 0,1$ м, становить $m_1 = 5$ кг. Коефіцієнт тертя кочення котка $k = 0,0015$ м.

Визначити силу \vec{S} , яку необхідно прикласти до тягового ланцюга 4 при переміщенні одного візка із завантаженою коліскою від положення A (завантаження коліски) до положення B (розвантаження коліски), якщо відстань між точками A і B становить $l_1 + l_2 = 16 + 16$ м, висота підйому коліски з вантажем $H = 4,8$ м, швидкість коліски в положенні A дорівнює нулю, а в положенні B — $V_B = 0,2$ м/с. Тертям у шарнірах C , тертям тягового ланцюга по напрямній рейці і його вагою знехтувати. Котки вважати однорідними круглими дисками. Кочення котків відбувається без ковзання.

Розв'язання. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи:

$$T = T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i.$$

Система, що розглядається, складається з твердих тіл, і тертям у шарнірі C нехтують, тому

$$\sum_{k=1}^n A_k^i = 0.$$

Оскільки в початковому положенні A система перебуває в спокої, то $T_0 = 0$. Отже, теорема про зміну кінетичної енергії системи набирає вигляду

$$T = \sum_{k=1}^n A_k^e. \quad (1)$$

Кінетична енергія системи T у кінцевому положенні системи B дорівнює сумі кінетичних енергій твердих тіл, які належать до складу системи:

$$T = T_1 + 2T_2, \quad (2)$$

де T_1 — кінетична енергія коліски з вантажем; T_2 — кінетична енергія котка.

Коліска з вантажем здійснює поступальний рух. Кінетична енергія такого тіла визначається за формулою

$$T_1 = \frac{mV_C^2}{2},$$

де V_C — швидкість точки C коліски.

Оскільки в положенні B $V_C = V_B$, то остаточно маємо

$$T_1 = \frac{mV_B^2}{2},$$

де m — маса коліски з вантажем.

Коток здійснює плоскопаралельний рух, тому кінетична енергія котка визначається за формулою

$$T_2 = \frac{m_1V_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2},$$

де m_1 — маса котка; V_C — швидкість центра мас котка; J_C — момент інерції котка відносно осі, що проходить через центр мас котка C ; ω — кутова швидкість котка.

Оскільки в положенні B $V_C = V_B$, а між лінійною швидкістю центра котка C і кутовою швидкістю котка при його коченні без ковзання існує залежність

$\omega = \frac{2V}{d}$, то попередній вираз T_2 набирає вигляду

$$T_2 = \frac{m_1V_B^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2} = \frac{3m_1V_B^2}{4},$$

де

$$J_C = \frac{m_1\left(\frac{d}{2}\right)^2}{2} = \frac{m_1d^2}{8}.$$

Значення T_1 і T_2 підставляємо в рівність (2):

$$T = T_1 + 2T_2 = \frac{mV_B^2}{2} + \frac{6m_1V_B^2}{4} = \frac{V_B^2}{2}(m + 3m_1). \quad (3)$$

Визначимо суму робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до системи, на переміщенні від положення A до положення B :

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = A(\bar{P}) + A(2\bar{P}_1) + A(Nk) + A(\bar{S}),$$

де $A(\bar{P})$ — робота сили ваги вантажу з коліскою; $A(2\bar{P}_1)$ — робота сил ваги котків; $A(Nk)$ — робота моменту сил опору кочення; $A(\bar{S})$ — робота шуканої сили.

Робота сили тертя \bar{F}^T дорівнює нулю, оскільки сила \bar{F}^T прикладена в миттєвому центрі швидкостей котка.

Робота сили ваги \vec{P}

$$A(\vec{P}) = -P \sin \alpha \cdot l_2 = -PH = -mgH.$$

Робота сили ваги $2\vec{P}_1$

$$A(2\vec{P}_1) = -2P_1 \sin \alpha \cdot l_2 = -2P_1H = -2m_1gH.$$

Робота моменту сил опору кочення

$$A(Nk) = -(P + 2P_1)k\varphi_1 - (P + 2P_1) \cos \alpha \cdot k\varphi_2,$$

де $(P + 2P_1)k\varphi_1$ — робота моменту сил опору кочення на горизонтальній ділянці; $(P + 2P_1) \cos \alpha \cdot k\varphi_2$ — робота моменту сил опору кочення на похилій ділянці; $\varphi_1 = \frac{2l_1}{d}$; $\varphi_2 = \frac{2l_2}{d}$ (на підставі виразу $\omega = \frac{2V}{d}$, оскільки тут лінійні і кутові переміщення співвідносяться, як лінійні і кутові швидкості).

$$\text{Отже, } A(Nk) = -\frac{2l_1gk}{d}(m + 2m_1) - \frac{2l_2gk}{d}(m + 2m_1) \cos \alpha.$$

Робота шуканої сили \vec{S}

$$A(\vec{S}) = S(l_1 + l_2).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k^e &= -mgH - 2m_1gH - \frac{2l_1gk}{d}(m + 2m_1) - \frac{2l_2gk}{d}(m + 2m_1) \cos \alpha + \\ &+ S(l_1 + l_2) = -60 \cdot 9,81 \cdot 4,8 - 2 \cdot 5 \cdot 9,81 \cdot 4,8 - (60 + 2 \cdot 5) \cdot 9,81 \times \\ &\times 0,0015 \cdot 320 - (60 + 2 \cdot 5) \cdot 9,81 \cdot 0,954 \cdot 0,0015 \cdot 320 + S(16 + 16) = \\ &= 32S - 3940,2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{де } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4,8}{16}\right)^2} = 0,954.$$

Значення кінетичної енергії системи (3) і значення суми робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до системи (4), підставляємо в рівність (1):

$$\frac{V_B^2}{2}(m + 3m_1) = 32S - 3940,2,$$

звідки дістанемо

$$S = \frac{1}{32} \left(3940,2 + \frac{V_B^2}{2} (m + 3m_1) \right) = 0,03125 (3940,2 + 1,5) = 123,2 \text{ Н.}$$

Типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю

Задача 19.1. Потяг рухається по горизонтальній і прямолінійній ділянці шляху. При гальмуванні виникає сила опору, що дорівнює 0,1 ваги потяга. В момент початку гальмування швидкість потяга дорівнює 20 м/с. Знайти час гальмування і шлях, якій проходить потяг до зупинки.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.23. Для визначення часу гальмування застосуємо теорему про зміну кількості руху

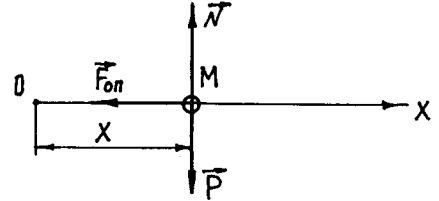


Рис. 19.23

матеріальної точки (теорему імпульсів) у проекції на вісь x : $m \dot{x} - m \dot{x}_0 = S_x$,

де $\dot{x} = 0$, $\dot{x}_0 = 20$ м/с, $S_x = -F_{\text{оп}} t = -0,1Pt$. Тоді $t = \frac{20}{0,981} \approx 20,4$ с.

Двічі інтегруючи диференціальне рівняння руху потяга $\ddot{x} = 0,1g$ [початкові умови $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 20$ м/с], здобудемо

$$x = \dot{x}_0 t - 0,5 \cdot 0,1gt^2 = 20 \cdot 20,4 - 0,5 \cdot 0,981 \cdot 20,4^2 \approx 204 \text{ м,}$$

де x — шлях гальмування.

Задача 19.2. По шорсткій похилій площині, кут нахилу якої до горизонту $\alpha = 30^\circ$, спускається важке тіло без початкової швидкості (рис. 19.24). Визначити, за який час тіло пройде шлях довжиною $\ell = 39,2$ м, якщо коефіцієнт тертя $f = 0,2$.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.24. На підставі теореми про зміну кількості руху матеріальної точки (теореми імпульсів) у проекції на вісь x

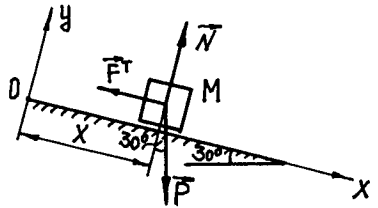


Рис. 19.24

$m \dot{x} - m \dot{x}_0 = S_x$, де $\dot{x}_0 = 0$, $S_x = gt(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ)$, здобудемо

$$\dot{x} = gt(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ). \quad (1)$$

Після інтегрування рівності (1) [початкові умови руху тіла $t = 0$;

$x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = \dot{x}$], матимемо

$$x = \frac{gt^2}{2} (\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ),$$

звідки

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 39,2}{9,81(0,5 - 0,2 \cdot 0,866)}} \approx 5 \text{ с.}$$

Задача 19.3. Для визначення маси навантаженого залізничного потяга між тепловозом і вагонами установили динамометр. Середнє показання динамометра за 2 хв дорівнює 10^6 Н. За той самий час потяг набрав швидкості 16 м/с (у початковий момент часу він стояв на місці). Знайти масу потяга, якщо коефіцієнт тертя $f = 0,02$.

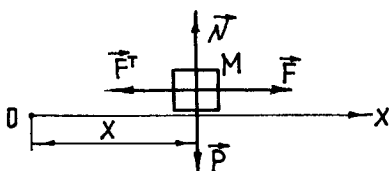


Рис. 19.25

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.25. Для визначення маси потяга застосуємо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки (теорему імпульсів) у проекції на

вісь x : $m \dot{x} - m \dot{x}_0 = S_x$, де $\dot{x} = 16$ м/с; $\dot{x}_0 = 0$;

$$S_x = (F - Pf)t.$$

$$\text{Тоді } m = \frac{10^6 t}{\dot{x} + gft} = \frac{10^6 \cdot 120}{16 + 9,81 \cdot 0,02 \cdot 120} = 3,035 \cdot 10^6 \text{ кг.}$$

Задача 19.4. Хлопчик, маса якого 40 кг, стоїть на полозях спортивних саней, маса яких 20 кг. Хлопчик робить кожну секунду поштовх з імпульсом 20 Н·с. Знайти швидкість, якої досягнуть сани за 15 с, якщо коефіцієнт тертя $f = 0,01$.

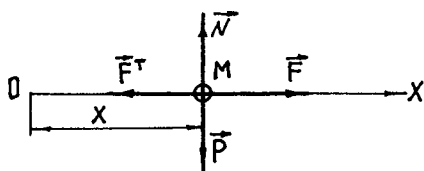


Рис. 19.26

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.26. Для визначення швидкості саней застосуємо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки (теорему імпульсів)

у проекції на вісь x : $m \dot{x} - m \dot{x}_0 = S_x$, де $\dot{x}_0 = 0$;

$$S_x = (F - F^T)t = (20 - 60 \cdot 9,81 \cdot 0,01)15 = 211,7 \text{ Н} \cdot \text{с.}$$

$$\text{Тоді } \dot{x} = \frac{S_x}{m} = \frac{211,7}{60} = 3,53 \text{ м/с.}$$

Задача 19.5. Гиря M закріплена на кінці нерозтяжної нитки MOA . Частина нитки OA проходить через вертикальну трубку (рис. 19.27). Гиря рухається навколо осі трубки по колу, радіус якого $MC = R$, і робить 120 об/хв. Повільно втягуючи нитку OA в трубку, укорочують зовнішню частину нитки до довжини OM_1 , за якої гиря описує коло радіусом $R/2$. Скільки обертів за хвилину робить гиря по цьому колу?

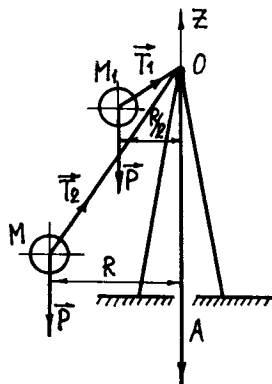


Рис. 19.27

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.27. Застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно осі z :
$$z: \frac{dk_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k),$$

де $\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0$. Звідси $k_z = k_{zM} = k_{zM_1} = \text{const}$. Отже, $m\omega_M R^2 = \frac{1}{4} m\omega_{M_1} R^2$. Тоді

$$\omega_{M_1} = 4\omega_M \text{ або } n_{M_1} = 4n_M = 480 \text{ об/хв.}$$

Задача 19.6. Точка M рухається навколо нерухомого центра під дією сили притягання до цього центра. Знайти швидкість V_2 у найбільш віддаленій від центра точці траєкторії, якщо швидкість точки у найбільш близькому до нього положенні $V_1 = 30$ см/с, а r_2 у п'ять разів більший за r_1 (рис. 19.28).

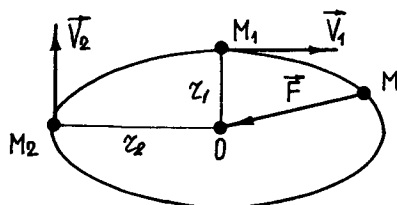


Рис. 19.28

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.28. Застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра O :

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k), \text{ де } \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k) = \vec{0}.$$
 Звідси

$$\vec{k}_O = \text{const}. \text{ Отже, } mV_1 r_1^2 = mV_2 r_2^2. \text{ Тоді } V_2 = \frac{V_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{30}{5} = 6 \text{ см/с.}$$

Задача 19.7. Математичний маятник, кожний розмах якого триває одну секунду, називається секундним маятником і застосовується для відліку часу. Знайти довжину l цього маятника, якщо $g = 981$ см/с². Який час буде показувати цей маятник на Місяці, де прискорення вільного падіння в шість разів менше за земне? Яку довжину l_1 повинен мати секундний місячний маятник?

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.29, а. Застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра

$$O: \frac{dk_O}{dt} = \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k), \text{ де } k_O \text{ і } \sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) \text{ — відповідно алгебричні моменти}$$

кількості руху матеріальної точки і прикладених до точки сил. Оскільки $k_0 = m \dot{\varphi} l^2$, а $\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = -mgl \sin \varphi$, то матимемо $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$, або замалого кута — $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$ — диференціальне рівняння коливального руху мата-

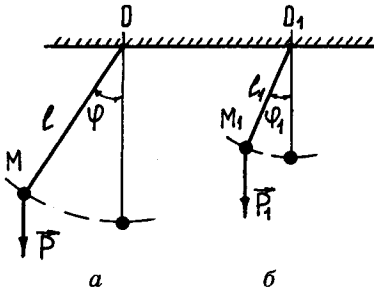


Рис. 19.29

тичного маятника. Період колювання $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}$.

Тоді $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{g}{l}}} = 1$, звідки $l = \frac{g}{\pi^2} = \frac{981}{3,14^2} = 99,5$ см.

На Місяці $\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{2 \cdot 3,14}{2\sqrt{\frac{981}{6 \cdot 99,5}}} = 2,45$ с. Довжи-

на секундного місячного маятника рис. 19.29, б становить

$$l_1 = \frac{g}{6\pi^2} = \frac{981}{6 \cdot 3,14^2} = 16,58 \text{ см.}$$

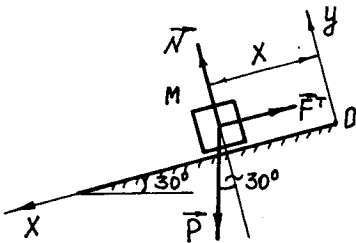


Рис. 19.30

Задача 19.8. По похилій площині, кут нахилу якої до горизонту дорівнює 30° , спускається без початкової швидкості важке тіло; коефіцієнт тертя дорівнює 0,2. Яку швидкість буде мати тіло, якщо воно пройде шлях 2 м від початку руху?

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.30. Застосуємо теорему про зміну кінетич-

ної енергії матеріальної точки: $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A$,

де $V_0 = 0$; $A = Px(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ)$. Тоді

$$V = \sqrt{2xg(\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ)} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9,81(0,5 - 0,1 \cdot 0,866)} = 4,03 \text{ м/с.}$$

Задача 19.9. Брус починає рухатися з початковою швидкістю V_0 по горизонтальній шорсткій площині і проходить до зупинки відстань S . Визначити коефіцієнт тертя ковзання, вважаючи, що сила тертя пропорційна нормальному тиску.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.31. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A,$$

де $V = 0$; $A = -Nfx = -mgfx$. Тоді $f = \frac{V_0^2}{2gS}$.

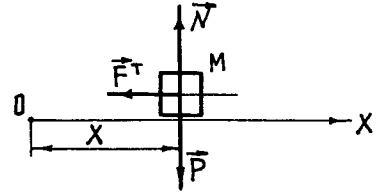


Рис. 19.31

Задача 19.10. Головною частиною установки для дослідження матеріалів ударом є важка сталевана відливка M , прикріплена до стрижня, який може обертатися майже без тертя навколо нерухомої горизонтальної осі O . Нехтуючи масою стрижня і розглядаючи відливку M як матеріальну точку, визначити швидкість цієї точки в нижньому положенні B , якщо вона падає з верхнього положення A без початкової швидкості (рис. 19.32). $OM = 0,981$ м.

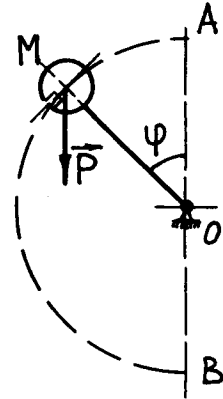


Рис. 19.32

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.32. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A,$$

де $V_0 = 0$; $A = 2mgOM$. Тоді $V = \sqrt{4gOM} = \sqrt{4 \cdot 9,81 \cdot 0,981} = 6,1$ м/с.

Задача 19.11. Тіло кинули з поверхні Землі вгору по вертикальній лінії з початковою швидкістю V_0 . Визначити висоту H підйому тіла, беручи до уваги, що сила тяжіння змінюється обернено пропорційно квадрату відстані від центра Землі; опором повітря знехтувати. Радіус Землі $R = 6370$ км, $V_0 = 1$ км/с.

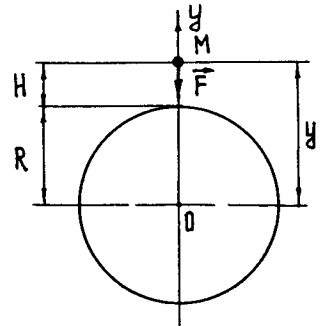


Рис. 19.33

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.33. Сила $F = \frac{\alpha}{y^2}$, де $\alpha = mgR^2$, оскільки на поверхні Землі $F = P = mg$, а $y = R$. Для визначення H застосуємо теорему

про зміну кінетичної енергії матеріальної точки: $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A$, де

$$V = 0; A = \int_R^{R+H} F_y dy = - \int_R^{R+H} \frac{mgR^2}{y^2} dy = -mgR^2 \int_R^{R+H} y^{-2} dy = \frac{mgR^2}{y} \Big|_R^{R+H} = -\frac{mgRH}{R+H}.$$

Тоді $-\frac{mV_0^2}{2} = -\frac{mgRH}{R+H}$, звідки $H = \frac{V_0^2 R}{2gR - V_0^2} = \frac{10^6 \cdot 6370 \cdot 10^3}{2 \cdot 9,81 \cdot 6370 \cdot 10^3 - 10^6} =$
 $= 51,38 \text{ км.}$

Задача 19.12. Визначити головний вектор кількості руху маятника, що складається з однорідного стрижня OA масою m_1 і довжиною $4r$ та однорідного диска B масою m_2 і радіусом r , якщо кутова швидкість маятника в даний момент дорівнює ω .

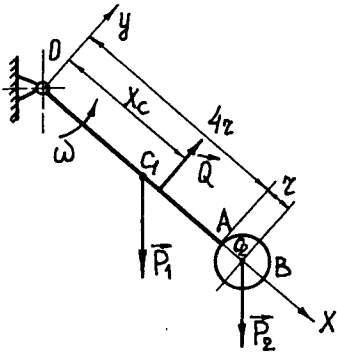


Рис. 19.34

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.34. Головний вектор кількості руху механічної системи (маятника) $\vec{Q} = M\vec{V}_C$. За величиною $Q = MV_C$.

Координата центра мас: $x_C = \frac{r(2m_1 + 5m_2)}{m_1 + m_2}$. Швид-

кість центра мас — $V_C = \omega x_C$.

Тоді $Q = r\omega(2m_1 + 5m_2)$.

Задача 19.13. Визначити модуль і напрям головного вектора кількості руху механізму еліпсографа, якщо маса кривошипа дорівнює m_1 , маса лінійки AB еліпсографа дорівнює $2m_1$, маса кожної з муфт A і B дорівнює m_2 ; $OC_2 = AC_2 = C_2B = l$. Центри мас кривошипа і лінійки розташовані в їх середині. Кривошип обертається з кутовою швидкістю ω .

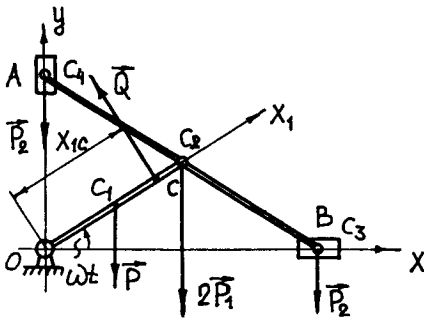


Рис. 19.35

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.35. Головний вектор кількості руху механічної системи (еліпсографа) $\vec{Q} = M\vec{V}_C$. За величиною $Q = MV_C$. Координата центра мас

по осі x_1 становить: $x_{1c} = \frac{l(5m_1 + 4m_2)}{2(3m_1 + 2m_2)}$. Швид-

кість центра мас $V_C = \omega x_{1c}$.

Тоді $Q = \frac{\omega l}{2}(5m_1 + 4m_2)$, оскільки $M = 3m_1 + 2m_2$.

Задача 19.14. По горизонтальній платформі A , яка рухається за інерцією зі швидкістю \vec{V}_0 , переміщується візок B зі сталою відносною швидкістю \vec{V}_r . У деякий момент часу візок загальмували. Визначити загальну швидкість V платформи з візком після її зупинки, якщо m_1 — маса платформи, а m_2 — маса візка.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.36. Має місце закон збереження кількості руху системи

вдovж осі x : $Q_x = \text{const}$, або $Q_{x_0} = Q_x$, де 0

$$Q_{x_0} = m_1 V_0 + m_2 (V_r + V_0); \quad Q_x = (m_1 + m_2) V.$$

Тоді $V = V_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_r.$

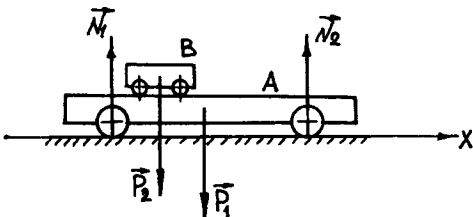


Рис. 19.36

Задача 19.15. Однорідний круглий диск, маса якого $m = 50$ кг, має радіус $R = 30$ см і котиться без ковзання по горизонтальній площині. Кутова швидкість диска $n = 60$ об/хв. Обчислити головний момент кількості руху диска відносно осей: 1) що проходить через центр диска перпендикулярно до площини руху; 2) відносно миттєвої осі.

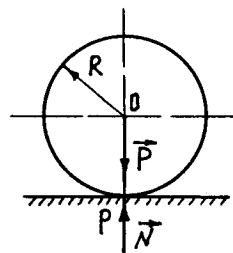


Рис. 19.37

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.37. Кінетичний момент диска відносно осей Oz і Pz_1 відповідно становить:

$$K_z = J_z \omega = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\pi n}{30} = 50 \cdot 0,3^2 \cdot 3,14 = 14,1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}};$$

$$K_{z_1} = J_{z_1} \omega = (J_z + R^2 m) \frac{\pi n}{30} = \frac{mR^2 \pi n}{20} = 50 \cdot 0,3^2 \cdot 9,42 = 42,4 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

Задача 19.16. Обчислити головний момент кількості руху планетарної передачі відносно нерухомої осі z , яка збігається з віссю обертання кривошипа OC_3 . Нерухоме коло 1 і рухоме коло 3 мають однаковий радіус r . Маса колеса 3 дорівнює m . Коло 2 має масу m_2 і радіус r_2 . Кривошип обертається з кутовою швидкістю, проекція якої на вісь z дорівнює ω_z (рис. 19.38). Масою кривошипа знехтувати. Колеса вважати однорідними дисками.

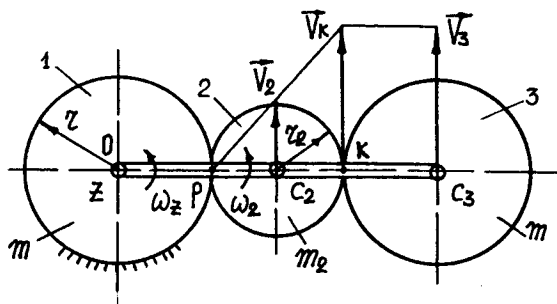


Рис. 19.38

Розв'язання. Проводимо кінематичний аналіз руху системи:

$$V_2 = \omega_z (r + r_2); \quad \omega_2 = \frac{V_2}{r_2} = \frac{\omega_z}{r_2} (r + r_2); \quad V_k = 2\omega_z (r + r_2); \quad V_3 = 2\omega_z (r + r_2). \quad \text{Тоді}$$

$$K_z = J_{C_2} \omega_2 + m_2 V_2 (r + r_2) + 2m V_3 (r + r_2) = \frac{m_2 (2r + 3r_2) + 8m (r + r_2)}{2} (r + r_2) \omega_z.$$

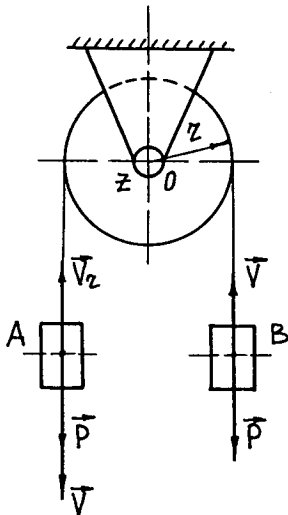


Рис. 19.39

Задача 19.17. Через блок, масою якого нехтують, перекинутий канат; у точці А за канат схопилась людина, у точці В підвішений вантаж, маса якого дорівнює масі людини. Що відбудеться з вантажем, якщо людина почне підніматися по канату зі швидкістю V_r відносно каната?

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.39. Має місце закон збереження моменту кількості руху системи відносно осі: $K_z = \text{const} = 0$. Тоді

$$mr(V - V_r) + mrV = 0, \text{ звідки } V = \frac{V_r}{2}.$$

Задача 19.18. Розв'язати попередню задачу, беручи до уваги масу блока, яка в чотири рази менша за масу людини. Вважати, що маса блока рівномірно розподілена по його ободу.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.39. Має місце закон збереження моменту кількості руху системи відносно осі: $K_z = \text{const} = 0$. Тоді $mr(V - V_r) + mrV + J_z\omega_z = 0$, де $J_z = mr^2$; $\omega_z = \frac{V}{r}$.

Звідси $V = \frac{4V_r}{9}$.

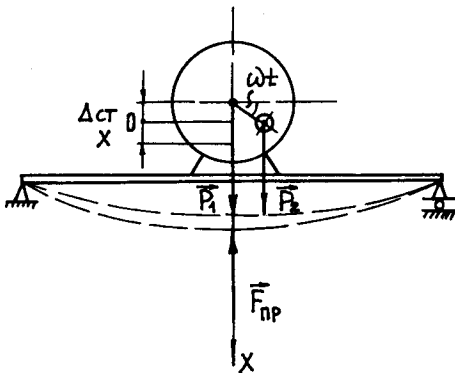


Рис. 19.40

Задача 19.19. Електромотор, маса якого m_1 , установлений на балці, жорсткість якої дорівнює c . На вал мотора на відстані l від осі вала насаджений вантаж, маса якого дорівнює m_2 . Кутова швидкість мотора $\omega = \text{const}$. Визначити амплітуду змушених коливань мотора і критичну кількість його обертів за хвилину, нехтуючи масою балки і опором руху.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.40. Застосуємо теорему про рух центра мас системи в проекції на

вісь x : $M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e$, де $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = -cx$. Ви-

значаємо x_c , тобто $x_c = \frac{m_1 x + m_2(x + l \sin \omega t)}{m_1 + m_2} = x + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \omega t$. Визначаємо

$$\ddot{x}_c : \ddot{x}_c = \ddot{x} - \frac{m_2 \omega^2 l}{m_1 + m_2} \sin \omega t. \text{ Тоді маємо } \ddot{x} + \frac{cx}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \omega^2 l}{m_1 + m_2} \sin \omega t.$$

Звідси $A = \frac{m_2 l \omega^2}{c - (m_1 + m_2) \omega^2}$; $n_{кр} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m_1 + m_2}}$, оскільки $\frac{\pi n_{кр}}{30} = \sqrt{\frac{c}{m_1 + m_2}}$.

Задача 19.20. Електромотор, маса якого m_1 , установлений без кріплення на гладенькому горизонтальному фундаменті; на валу мотора під прямим кутом закріплений одним кінцем однорідний стрижень, довжина якого $2l$, а маса m_2 . На другому кінці стрижня насаджений точковий вантаж, маса якого m_3 ; кутова швидкість вала дорівнює ω .

Визначити: 1) горизонтальний рух мотора; 2) найбільше горизонтальне зусилля \vec{R} , що діє на болти, якщо ними буде закріплений кожух електромотора на фундаменті.

Розв'язання. 1. Розрахункову схему подано на рис. 19.41. Має місце закон збереження

руху центра мас уздовж осі x , тобто $M \ddot{x}_C = 0$.

Визначаємо x_C :

$$x_C = \frac{m_1 x + m_2 (x + l \cos \omega t) + m_3 (x + 2l \cos \omega t)}{m_1 + m_2 + m_3} = x + \frac{m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l \cos \omega t$$

Визначаємо \ddot{x}_C : $\ddot{x}_C = \ddot{x} - \frac{m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l \omega^2 \cos \omega t$. Тоді маємо $\ddot{x} = \frac{m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \times$

$\times l \omega^2 \cos \omega t$. Звідси $x = -\frac{(m_2 + 2m_3)l}{m_1 + m_2 + m_3} \cos \omega t$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. Розрахункову схему зображено на рис. 19.42. Застосуємо теорему про рух центра мас системи в проекції на вісь x :

$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e$, де $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = -R$. Тоді маємо

$M \ddot{x}_C = -R$. Визначаємо x_C (див. попередній

розв'язок): $x_C = x + \frac{m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l \cos \omega t$. Ви-

значаємо \ddot{x}_C : $\ddot{x}_C = \ddot{x} - \frac{m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} l \omega^2 \cos \omega t$.

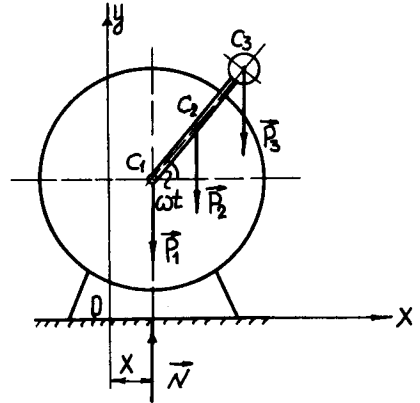


Рис. 19.41

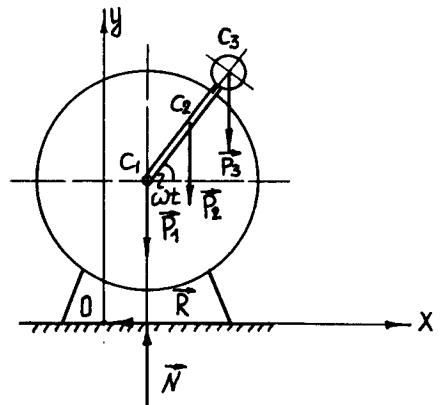


Рис. 19.42

При $x = 0$ (мотор закріплений) маємо $R = (m_2 + 2m_3)l\omega^2 \cos \omega t$. Звідси $R_{\max} = (m_2 + 2m_3)l\omega^2$.

Задача 19.21. За умовами попередньої задачі визначити ту кутову швидкість ω вала електромотора, за якої електромотор буде підстрибувати над фундаментом, якщо не буде прикріпленим до нього болтами.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.42. Застосуємо теорему про рух центра мас у проекції на вісь y $M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}$, де

$\sum_{k=1}^n F_{ky} = N - P_1 - P_2 - P_3$, $M = m_1 + m_2 + m_3$. Визначаємо y_C (див. рис. 19.41):

$$y_C = \frac{m_1 h + m_2 (h + l \cos \omega t) + m_3 (h + 2l \cos \omega t)}{m_1 + m_2 + m_3}. \text{ Визначаємо } \ddot{y}_C:$$

$$\ddot{y}_C = -\frac{m_2 + 2m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \omega^2 l \cos \omega t.$$

Тоді маємо $-(m_2 + 2m_3)\omega^2 l \cos \omega t = N - g(m_1 + m_2 + m_3)$. Звідси матимемо

$$N_{\max} = g(m_1 + m_2 + m_3) + (m_2 + 2m_3)\omega^2 l, \quad N_{\min} = g(m_1 + m_2 + m_3) - (m_2 + 2m_3)\omega^2 l.$$

$$\text{При } N_{\min} = 0 \quad \omega_{\min} \geq \sqrt{\frac{g(m_1 + m_2 + m_3)}{(m_2 + 2m_3)\omega^2 l}}.$$

Задача 19.22. Обчислити кінетичну енергію гусениці трактора, який рухається зі швидкістю V_0 . Відстань між осями коліс дорівнює l , радіуси коліс дорівнюють r , маса одного погонного метра гусеничного ланцюга дорівнює γ .

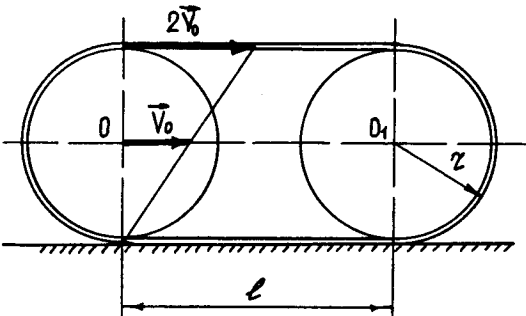


Рис. 19.43

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.43. $T = T_1 + T_2$, де T_1 — кінетична енергія частини гусеничного ланцюга, що здійснює обертальний рух; T_2 — кінетична енергія частини гусеничного ланцюга, що здійснює поступальний рух. Отже,

$$T_1 = 2 \frac{J\omega^2}{2} = \frac{2mr^2\omega^2}{2} = \frac{4\pi r^3 \gamma V_0^2}{2r^2} = 2\pi\gamma r V_0^2; \quad T_2 = \frac{m(2V_0)^2}{2} = \frac{4mV_0^2}{2} = 2lV_0^2\gamma.$$

$$\text{Таким чином, } T = 2\pi\gamma r V_0^2 + 2lV_0^2\gamma = 2\gamma V_0^2 (\pi r + l).$$

Задача 19.23. Транспортер приводиться в рух зі стану спокою приводом, приєднаним до нижнього шківу B . Привід передає цьому шківу сталий обертальний момент M . Визначити швидкість стрічки транспортера V залежно від її переміщення S , якщо маса вантажу A дорівнює m_1 , а шківви B і C , що мають радіуси r і маси m_2 кожний, являють собою однорідні колові циліндри. Стрічка транспортера, масою якої нехтують, утворює з горизонтом кут α . Ковзання стрічки по шківвам B і C відсутнє.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.44. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної

системи: $T = \sum_{k=1}^n A_k^e$. Кінетична енергія

системи $T = 2T_1 + T_2 = \frac{V^2}{2}(m_1 + m_2)$. Сума

робіт зовнішніх сил становить:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = \frac{S}{r}(M - m_1 gr \sin \alpha).$$

Тоді
$$V = \sqrt{\frac{2S(M - m_1 gr \sin \alpha)}{r(m_1 + m_2)}}.$$

Задача 19.24. До ведучого колеса снігоочисника — барабана A — прикладено сталий обертальний момент M . Маса барабана A можна вважати рівномірно розподіленою по його ободу. Сумарна маса снігу D , щита B і всіх інших частин стала і дорівнює m_2 . Коефіцієнт тертя ковзання снігу і щита дорівнює f , коефіцієнт тертя кочення барабана дорівнює δ . Маса барабана дорівнює m_1 , а його радіус — r . Визначити залежність між шляхом S , що проходить щит B снігоочисника, і модулем його швидкості V , якщо у початковий момент система перебувала у спокої.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 19.45. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії ме-

ханічної системи: $T = \sum_{k=1}^n A_k^e$. Кінетична

енергія системи $T = \frac{V^2}{2}(2m_1 + m_2)$. Сума

робіт зовнішніх сил становить:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = \frac{S}{r}[M - g(m_1\delta + m_2fr)].$$

Тоді
$$S = \frac{V^2 r (2m_1 + m_2)}{2[M - g(m_1\delta + m_2fr)]}.$$

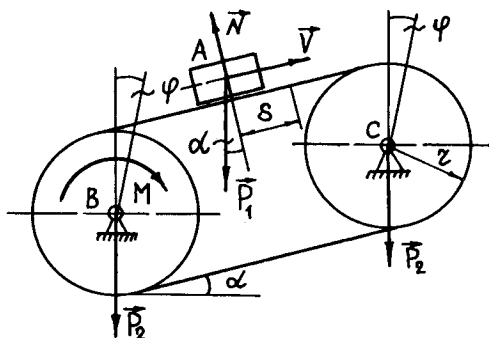


Рис. 19.44

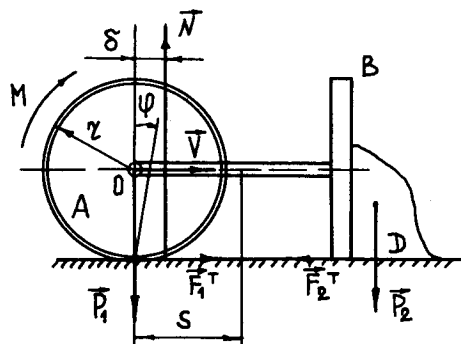


Рис. 19.45

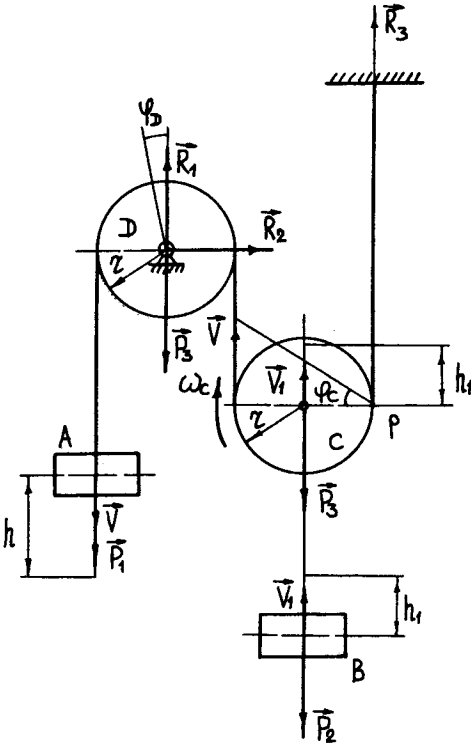


Рис. 19.46

Задача 19.25. Вантаж A , що має масу m_1 , опускається вниз за допомогою троса, перекинутого через нерухомий блок D , піднімає вгору вантаж B , що має масу m_2 і прикріплений до осі рухомого блока C . Блоки C і D вважають однорідними суцільними дисками, що мають масу m_3 кожний. Визначити швидкість вантажу A в момент, коли він опуститься на висоту h . Масою троса, проковзуванням по ободах блоків та силами опору знехтувати. У початковий момент система перебувала у спокої.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 19.46. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи:

$T = \sum_{k=1}^n A_k^e$. Кінетична енергія системи

$T = \frac{V^2}{16} (8m_1 + 2m_2 + 7m_3)$. Сума робіт

зовнішніх сил становить:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = \frac{hg}{2} (2m_1 - m_2 - m_3).$$

$$\text{Тоді } V = 2 \sqrt{2gh \frac{2m_1 - m_2 - m_3}{8m_1 + 2m_2 + 7m_3}}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається кількістю руху матеріальної точки?
2. Що називається елементарним імпульсом сили?
3. Як формулюється теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі?
4. За якою формулою визначається імпульс рівнодійної всіх сил, що діють на матеріальну точку за скінченний проміжок часу?
5. Як формулюється теорема імпульсів для матеріальної точки?
6. Що називається кількістю руху механічної системи?
7. За якими формулами визначається кількість руху механічної системи?
8. Як формулюється теорема про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі?

9. За якою формулою визначається головний вектор імпульсів усіх зовнішніх сил, що діють на точки механічної системи?
10. Як формулюється закон збереження кількості руху механічної системи?
11. Як формулюється теорема про рух центра мас?
12. Як формулюється закон збереження руху центра мас?
13. Що називається моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра (точки)?
14. Що називається моментом кількості руху механічної системи відносно центра (точки)?
15. За якими формулами визначається момент кількості руху механічної системи?
16. За якою формулою визначається момент кількості руху (кінетичний момент) твердого тіла відносно його осі обертання?
17. Як формулюється теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки?
18. Як формулюється теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи?
19. Як формулюється закон збереження моменту кількості руху механічної системи?
20. Як формулюється теорема про зміну кількості відносно руху механічної системи щодо центра мас?
21. Що називається кінетичною енергією матеріальної точки?
22. Що називається кінетичною енергією механічної системи?
23. Як формулюється теорема Кеніга?
24. За якими формулами визначають кінетичну енергію твердого тіла в різних випадках його руху?
25. Чому дорівнює кінетична енергія системи твердих тіл?
26. Що таке робота сили і як вона визначається при трьох способах задання руху матеріальної точки?
27. Як формулюється теорема про роботу рівнодійної сили?
28. Що таке потужність сили?
29. За якими формулами визначаються робота сили ваги, робота пружної сили і робота моменту пружних сил?
30. За якими формулами визначається робота зовнішніх сил при поступальному, обертальному і плоскопаралельному рухах твердого тіла?
31. Чому дорівнює робота внутрішніх сил твердого тіла?
32. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки?
33. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи?
34. Який вигляд має математичний вираз теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи для незмінних механічних систем?

Глава 20

ПОТЕНЦІАЛЬНЕ СИЛОВЕ ПОЛЕ

20.1. Поняття силового поля, силової функції, еквіпотенціальних поверхонь і силової лінії

Частина простору, в якій відбуваються будь-які фізичні явища, називається **фізичним полем**. Прикладами фізичних полів є електромагнітні й гравітаційні поля, поле ядерних сил, а також хвильові (квантовані) поля, що відповідають різним елементарним частинкам.

Силове поле — це частина простору (обмежена або необмежена), в кожній точці якої на розташовану там матеріальну точку діє сила, величина і напрям якої залежать або тільки від декартових координат x, y, z цієї точки, або від координат і часу t .

Силове поле називається **стаціонарним**, якщо сили поля не змінюються зі зміною часу.

Стаціонарне силове поле називається **потенціальним**, якщо існує функція $u = u(x, y, z)$ (силова функція), яка залежить від координат матеріальної точки, що розміщена в полі (рис. 20.1) і за допомогою якої проекції сил поля на координатні осі в кожній точці поля визначаються за формулами:

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x}; F_y = \frac{\partial u}{\partial y}; F_z = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (20.1)$$

Сили, для яких існує силова функція $u = u(x, y, z)$, називаються **потенціальними**.

Для більшої наочності в зображенні поля при вивченні його властивостей, як правило, з'єднують усі точки поля, що мають однакові значення силової функції $u = u(x, y, z)$, поверхнями. Ці поверхні називаються *поверхнями однакового потенціалу* або *еквіпотенціальними поверхнями*. Для силового поля ці поверхні ще називають *поверхнями однакового рівня* або *поверхнями рівня*.

Для різних потенціальних полів еквіпотенціальні поверхні є різними і мають різноманітні форми.

Проведемо в потенціальному силовому полі ряд еквіпотенціальних поверхонь, які мають значення силової функції, що дорівнює $u_0, u_0 + c_0, u_0 + 2c_0, \dots, u_0 + nc_0$ (рис. 20.2). Тоді все силове поле можна наочно зобразити як сукупність еквіпотенціальних поверхонь, віддалених одна від одної на одну і ту саму відстань c_0 . У будь-якій точці кожної такої еквіпотенціальної поверхні будуть діяти відповідні потенціальні сили \vec{F}_i , які за величиною і за напрямом будуть визначатися силовою функцією $u = u(x, y, z)$.

Якщо відстань між суміжними еквіпотенціальними поверхнями буде нескінченно малою, то силове поле можна подати нескінченним рядом цих поверхонь. У цьому випадку силова функція $u = u(x, y, z)$ буде мати такі властивості.

1. Силова функція буде однозначною в кожній точці поля, оскільки еквіпотенціальні поверхні, що мають різні значення силової функції, не перетинаються одна з одною і не торкаються одна одної.

2. Силу функцію можна вважати неперервною, оскільки перехід від однієї поверхні до другої відбувається неперервно, тому "стрибків" функції $u = u(x, y, z)$ не може бути.

Розглянуті властивості силової функції дають змогу обчислювати проєкції сил поля F_x, F_y, F_z в усіх точках поля до визначених скінченних значень.

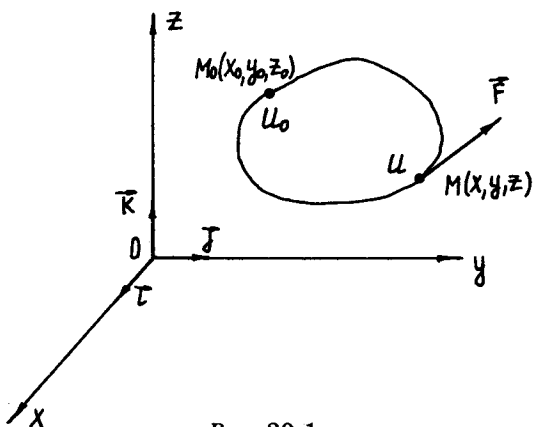


Рис. 20.1

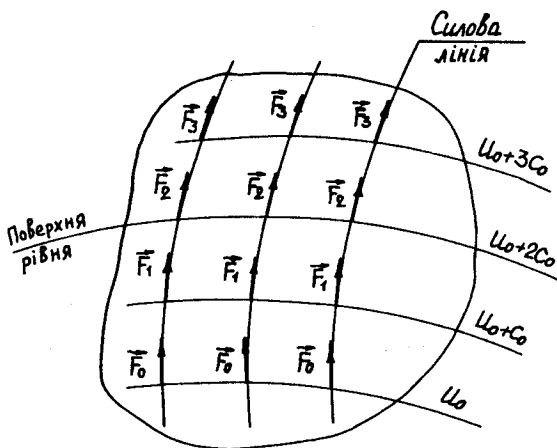


Рис. 20.2

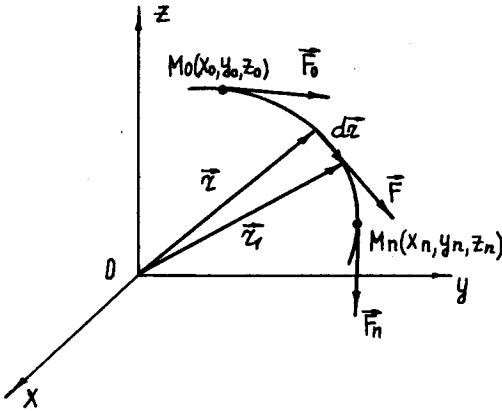


Рис. 20.3

Поряд з екіпотенціальними поверхнями, або поверхнями рівня, в силовому полі застосовують ще інше поняття — силова лінія. **Силова лінія** — це лінія силового поля, в кожній точці якої сила поля напрямлена вздовж дотичної до цієї лінії (рис. 20.3). Силова лінія є важливою характеристикою руху матеріальних точок у потенціальному силовому полі.

У стаціонарному силовому полі силова лінія збігається з траєкторією руху матеріальної точки в силовому полі. Елементарне переміщення матеріальної точки $d\vec{r}$ має напрям по дотичній до

силової лінії в точці прикладання сили \vec{F} (рис. 20.3). Тому вектори \vec{F} і $d\vec{r}$ паралельні. З умови паралельності цих векторів випливають залежності

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}, \quad (20.2)$$

які визначають диференціальні рівняння силової лінії.

20.2. Приклади потенціальних силових полів

20.2.1. Поле сили тяжіння

Для матеріальної точки, вага якої дорівнює \bar{P} , проєкції сили \bar{P} на осі декартової системи координат становлять: $F_x = F_y = 0$; $F_z = -P$. Отже, на підставі співвідношень (20.1) маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

звідки

$$u = C = \text{const}, \quad (20.3)$$

тобто силова функція поля тяжіння не змінює свого значення в площині xOy . Із співвідношення $\frac{\partial u}{\partial z} = -P$ після інтегрування матимемо

$$u = -Pz + \text{const}. \quad (20.4)$$

Рівняння (20.4) визначає силову функцію однорідного поля сили тяжіння, тобто поля, в якому сила тяжіння стала за величиною і за напрямом.

Якщо координата z буде мати фіксовані значення $z = C = \text{const}$, $z = C_1 = \text{const}$, $z = C_2 = \text{const}$, $z = C_n = \text{const}$, то, беручи до уваги рівність (20.3), можна зобразити еквіпотенціальні поверхні поля сил тяжіння у вигляді паралельних горизонтальних площин, положення яких залежить від фіксованих значень координати z (рис. 20.4). Силі лінії такого поля є вертикальними прямими лініями, які збігаються з лініями дії сили тяжіння \vec{P} .

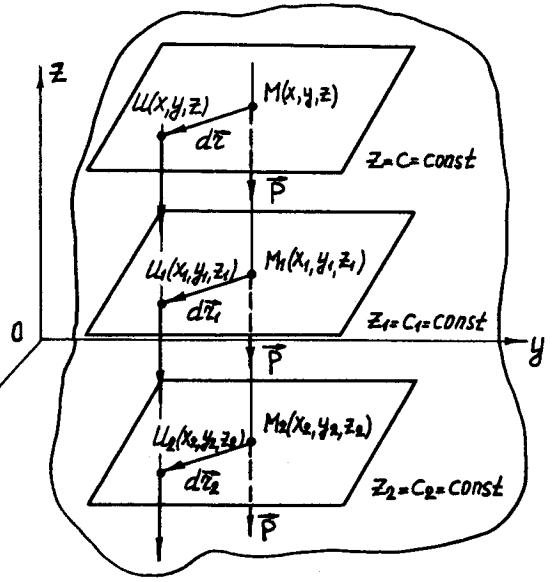


Рис. 20.4

Таким чином, поле сили тяжіння можна подати “пластинчастим”, тобто у вигляді нескінченного ряду паралельних еквіпотенціальних поверхонь, пронизаних системою вертикальних силових ліній.

20.2.2. Поле сили пружності

Для лінійної сили пружності, яка підпорядковується закону Гука (тобто $\vec{F} = -c\vec{\Delta}$, де c — сталий коефіцієнт — коефіцієнт жорсткості; $\vec{\Delta}$ — відстань від матеріальної точки, на яку діє сила \vec{F} , до положення її статичної рівноваги, тобто до положення, в якому $\vec{F} = \vec{0}$), у випадку, що розглядається, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial \Delta} = F = -c\Delta.$$

Після інтегрування цього виразу матимемо

$$u = -\frac{c\Delta^2}{2} + \text{const.} \quad (20.5)$$

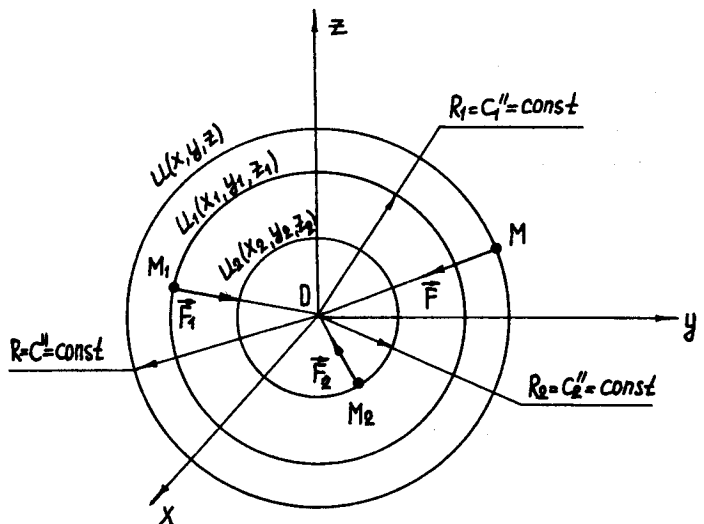


Рис. 20.5

Беручи до уваги що $\Delta^2 = x^2 + y^2 + z^2$, остаточно матимемо

$$u = -\frac{c\Delta^2}{2} + \text{const} = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \text{const}. \quad (20.6)$$

Отже, екіпотенціальними поверхнями поля сили пружності будуть сфери, що мають радіуси $R = C'' = \text{const}$, $R_1 = C_1'' = \text{const}$, $R_2 = C_2'' = \text{const}$, ..., $R_n = C_n'' = \text{const}$. Силowymi лініями поля буде сукупність радіусів, уздовж яких діють пружні сили $\vec{F} = -c\vec{\Delta}$ (рис. 20.5).

20.3. Властивості силової функції і потенціальних сил

Нехай координати матеріальної точки M , що розташована в потенціальному силовому полі, дорівнюють x , y , z , а проекції сили поля \vec{F} на відповідні координатні осі дорівнюють F_x , F_y , F_z . Надамо точці M елементарного переміщення $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ і обчислимо елементарну роботу сили \vec{F} на цьому переміщенні. Матимемо $d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$. Беручи до уваги співвідношення (20.1), перетворимо останній вираз так:

$$d'A = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = du,$$

звідки матимемо

$$d'A = du. \quad (20.7)$$

Отже, в потенціальному силовому полі елементарна робота потенціальної сили дорівнює повному диференціалу силової функції.

Зауважимо, що іноді цю властивість силової функції вважають її визначенням.

Повна робота потенціальної сили на переміщенні матеріальної точки від положення M_0 до положення M (рис. 20.1)

$$A = \int_{M_0}^M d'A = \int_{u_0}^u du = u - u_0,$$

або

$$A = u - u_0. \quad (20.8)$$

З рівності (20.8) випливає, що повна робота потенціальної сили на деякому переміщенні матеріальної точки дорівнює різниці значень силової функції в кінцевому і в початковому положеннях матеріальної точки і не залежить від форми траєкторії, по якій точка рухається.

Таким чином, силова функція характеризує здатність потенціальних сил виконувати роботу.

Робота потенціальної сили в потенціальному силовому полі по будь-якому замкненому контуру руху матеріальної точки дорівнює нулю, оскільки значення силової функції в початковому та в кінцевому положеннях матеріальної точки однакова (див. рис. 20.1).

Розглянемо переміщення матеріальної точки M по екіпотенціальній поверхні (див. рис. 20.4). Оскільки значення силової функції на екіпотенціальній поверхні (поверхні рівня) $u = \text{const}$, то робота потенціальної сили дорівнює нулю. Дійсно, $A = u - u_0 = 0$, де $u = u_0 = \text{const}$.

Таким чином, робота потенціальної сили на переміщенні матеріальної точки між будь-якими точками тієї самої екіпотенціальної поверхні не залежить від положення цих точок, оскільки значення силової функції в усіх точках даної екіпотенціальної поверхні однакове.

Обчислимо елементарну роботу потенціальної сили на довільному переміщенні матеріальної точки $d\vec{r}$ (див. рис. 20.4): $d'A = \vec{P} \cdot d\vec{r} = Pdr \cos(\widehat{\vec{P}, d\vec{r}})$.

З іншого боку, $d'A = u - u_0 = 0$, отже, $Pdr \cos(\widehat{\vec{P}, d\vec{r}}) = 0$, звідки, оскільки P і

dr не дорівнюють нулю, $\cos(\widehat{\vec{P}, d\vec{r}}) = 0$, а це означає, що кут між \vec{P} і $d\vec{r}$ дорів-

нює $\frac{\pi}{2}$.

Таким чином, потенціальна сила в потенціальному силовому полі завжди напрямлена вздовж перпендикуляра до екіпотенціальної поверхні в даній точці або, точніше, вздовж перпендикуляра до дотичної площини в даній точці екіпотенціальної поверхні.

Розглянемо переміщення матеріальної точки між двома суміжними екіпотенціальними поверхнями з положення M у положення M_1 (див. рис. 20.4). Визначимо роботу потенціальної сили на цьому переміщенні матеріальної точки. Очевидно, що $A = u_1 - u < 0$, оскільки $u > u_1$. Отже, потенціальна сила в потенціальному силовому полі напрямлена вздовж перпендикуляра до екіпотенціальної поверхні в бік зменшення значень силової функції.

Упровадимо поняття вектор-градієнта силової функції $u = u(x, y, z)$:

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \quad (20.9)$$

де \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — одиничні вектори декартової системи координат.

Враховуючи рівності (20.1) і (20.9), матимемо

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

або

$$\vec{F} = \text{grad} u, \quad (20.10)$$

звідки випливає, що потенціальна сила \vec{F} — це градієнт силової функції.

20.4. Критерії існування потенціального силового поля

Визначимо умови, які дають змогу за силами поля визначити, коли силове поле буде потенціальним.

Якщо силова функція $u = u(x, y, z)$, то на підставі рівності (20.1) матимемо:

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Обчислимо частинні мішані похідні від F_x, F_y, F_z :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z};$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y},$$

звідки матимемо:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \quad (20.11)$$

Рівності (20.11) — це необхідні й достатні умови існування силової функції $u = u(x, y, z)$.

Якщо ввести вектор, проєкції якого на осі координат дорівнюють відповідно

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

і який називається вихром або ротором вектора \vec{F} :

$$\text{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k},$$

то умови існування силової функції (20.11) можна подати у вигляді

$$\text{rot}\vec{F} = \vec{0}. \tag{20.12}$$

Таким чином, силове поле буде потенціальним, якщо воно буде безвихровим.

Сили, які не мають силової функції, будуть непотенціальними. До цих сил належать сили опору, які залежать від швидкості руху матеріальної точки, і сили тертя.

20.5. Потенціальна енергія

У випадку потенціального силового поля поряд із силовою функцією $u = u(x, y, z)$ можна ввести іншу функцію.

Силова функція $u = u(x, y, z)$ характеризує здатність потенціальних сил виконувати роботу з переміщення матеріальної точки з одного поверхневого рівня поля на інший. Робота сил на цьому переміщенні матеріальної точки супроводжується зміною енергетичного стану цієї точки. Тому для характеристики потенціального силового поля доцільно ввести функцію, яка визначає запас енергії в даній точці поля, тобто потенціальну енергію матеріальної точки у даному положенні. *Потенціальною енергією матеріальної точки у даному положенні M називається скалярна величина Π , що дорівнює роботі, яку можуть виконати потенціальні сили поля при переміщенні матеріальної точки з положення M в її початкове положення M_0* (рис. 20.6):

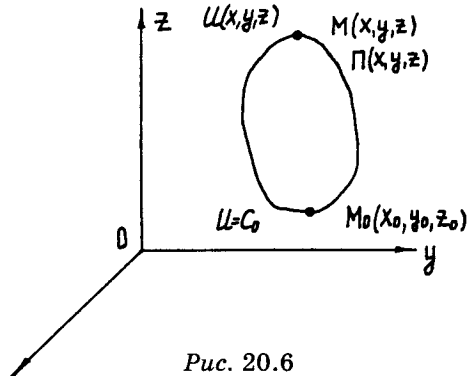


Рис. 20.6

$$\Pi = A_{(MM_0)}. \tag{20.13}$$

З розглянутого випливає, що потенціальна енергія Π залежить від координат матеріальної точки, тобто $\Pi = \Pi(x, y, z)$.

Далі будемо вважати, що початкові точки для функцій $u = u(x, y, z)$ та $\Pi = \Pi(x, y, z)$ збігаються.

Нехай у початковому положенні матеріальної точки M_0 $u_0 = C_0$. Тоді $\Pi = A_{(MM_0)} = u_0 - u = C_0 - u$, де стала C_0 — одна і та сама для усіх точок поля. Величина C_0 залежить від того, яку точку поля взято за початкову (нульову). Отже,

$$\Pi = -u + \text{const.} \quad (20.14)$$

Якщо взяти, що $u_0 = C_0 = 0$, матимемо

$$u = -\Pi. \quad (20.15)$$

Таким чином, потенціальна енергія матеріальної точки в будь-якій точці потенціального силового поля з точністю до довільної сталої може бути визначена через силову функцію в тій самій точці поля зі знаком “-”. Отже, при розгляді властивостей потенціального силового поля замість силової функції можна застосовувати поняття потенціальної енергії матеріальної точки у даному положенні. При цьому роботу потенціальних сил можна обчислювати за формулою

$$A = u - u_0 = \Pi_0 - \Pi, \quad (20.16)$$

а їх проекції на координатні осі — за допомогою таких залежностей:

$$F_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (20.17)$$

На підставі розглянутого і беручи до уваги залежності (20.4) та (20.6), потенціальну енергію матеріальної точки, яка розміщена в полі сили тяжіння або в полі сили пружності у даному положенні, можна обчислювати відповідно за формулами:

$$\Pi = -u = Pz + \text{const}; \quad (20.18)$$

$$\Pi = -u = \frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \text{const}. \quad (20.19)$$

20.6. Силова функція і потенціальна енергія системи.

Робота потенціальних сил, що діють на механічну систему

Розглянемо невільну механічну систему, яка розташована в потенціальному силовому полі (рис. 20.7). Рівнодійна зовнішніх сил \vec{R}_k^e , що діє на k -ту точку механічної системи, буде $\vec{R}_k^e = \vec{F}_k^e + \vec{N}_k^e$, де \vec{F}_k^e — рівнодійна зовнішніх потенціальних сил, прикладених до k -ї точки механічної системи; \vec{N}_k^e — рівнодійна зовнішніх реакцій в'язей, накладених на k -ту точку механічної системи.

Якщо механічна система складається з n матеріальних точок, то силова функція для зовнішніх сил у загальному випадку має вигляд

$$u^e = u^e(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n). \quad (20.20)$$

Проекції сил, що діють на точки системи, становитимуть:

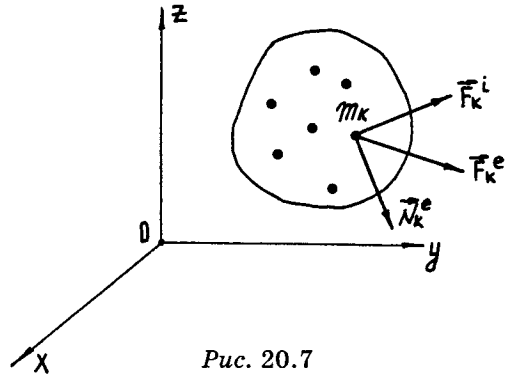


Рис. 20.7

$$F_{kx}^e = \frac{\partial u^e}{\partial x_k}; F_{ky}^e = \frac{\partial u^e}{\partial y_k}; F_{kz}^e = \frac{\partial u^e}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (20.21)$$

Сума елементарних робіт усіх зовнішніх сил, що діють на точки механічної системи, на деякому елементарному переміщенні системи визначаються за формулою

$$\sum_{k=1}^n d'A_k^e = \sum_{k=1}^n \vec{R}_k^e \cdot d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^n (F_{kx}^e dx_k + F_{ky}^e dy_k + F_{kz}^e dz_k) + \sum_{k=1}^n (N_{kx}^e dx_k + N_{ky}^e dy_k + N_{kz}^e dz_k). \quad (20.22)$$

Якщо взяти, що зовнішні в'язі, накладені на точці механічної системи, є ідеальними, тобто такими, для яких алгебрична сума елементарних робіт реакцій дорівнює нулю, то рівняння (20.22) з урахуванням співвідношень (20.1) набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^n d'A_k^e = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u^e}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial u^e}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial u^e}{\partial z_k} dz_k \right) = du^e. \quad (20.23)$$

З рівності (20.23) випливає, що сума елементарних робіт усіх зовнішніх потенціальних сил, прикладених до точок невідільної механічної системи, на яку накладені ідеальні в'язі, на будь-якому елементарному переміщенні системи дорівнює повному диференціалу зовнішньої силової функції u^e .

Для механічної системи, яка розташована в потенціальному силовому полі на яку накладені ідеальні в'язі, можна також висунути аналогічні до співвідношень (20.21) вимоги потенціальності для всіх внутрішніх сил системи:

$$F_{kx}^i = \frac{\partial u^i}{\partial x_k}; F_{ky}^i = \frac{\partial u^i}{\partial y_k}; F_{kz}^i = \frac{\partial u^i}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (20.24)$$

де u^i — силова функція внутрішніх сил системи. Тоді сума елементарних робіт усіх внутрішніх сил на будь-якому переміщенні механічної системи буде такою:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n d'A_k^i &= \sum_{k=1}^n F_k^i \cdot d\bar{r}_k = \sum_{k=1}^n (F_{kx}^i dx_k + F_{ky}^i dy_k + F_{kz}^i dz_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial u^i}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial u^i}{\partial z_k} dz_k \right) = du^i. \end{aligned} \quad (20.25)$$

Таким чином, сума елементарних робіт усіх внутрішніх потенціальних сил механічної системи на будь-якому елементарному переміщенні системи дорівнює повному диференціалу внутрішньої силової функції u^i .

Отже, сума елементарних робіт усіх потенціальних сил, що діють на точки механічної системи, дорівнює сумі повних диференціалів силових функцій, які визначають зовнішні й внутрішні сили системи:

$$\sum_{k=1}^n d'A_k = \sum_{k=1}^n d'A_k^e + \sum_{k=1}^n d'A_k^i = du^e + du^i. \quad (20.26)$$

Сума робіт, які виконують потенціальні сили поля під час переміщення механічної системи з положення M_0 , в якому значення силових функцій дорівнюють u_0^e і u_0^i , у положення M , в якому силові функції мають значення u^e і u^i , буде визначатися за формулою

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n A_k &= \sum_{k=1}^n \int_{M_0}^M d'A_k = \int_{M_0}^M \sum_{k=1}^n d'A_k^e + \int_{M_0}^M \sum_{k=1}^n d'A_k^i = \int_{M_0}^M du^e + \int_{M_0}^M du^i = \\ &= (u^e - u_0^e) - (u^i - u_0^i) = (u^e + u^i) - (u_0^e + u_0^i). \end{aligned} \quad (20.27)$$

Обчислимо суму робіт потенціальних сил через зовнішню Π^e і внутрішню Π^i потенціальні енергії механічної системи. На підставі рівності (20.15) маємо

$$\sum_{k=1}^n A_k = (\Pi_0^e + \Pi_0^i) - (\Pi^e + \Pi^i). \quad (20.28)$$

Позначимо через Π суму зовнішньої Π^e і внутрішньої Π^i потенціальних енергій механічної системи:

$$\Pi = \Pi^e + \Pi^i. \quad (20.29)$$

Тоді робота всіх сил на переміщенні механічної системи з положення M у початкове положення M_0 буде становити:

$$\sum_{k=1}^n A_k = \Pi_0 - \Pi. \quad (20.30)$$

У випадку абсолютно твердого тіла робота всіх внутрішніх сил дорівнює нулю. Отже, за потенціальну енергію слід брати тільки зовнішню потенціальну енергію твердого тіла, тобто

$$\Pi = \Pi^e. \quad (20.31)$$

20.7. Механічна енергія. Закон збереження механічної енергії

20.7.1. Закон збереження механічної енергії матеріальної точки

Розглянемо рух матеріальної точки в потенціальному силовому полі між точками поля M та M_0 (див. рис. 20.6). Нехай потенціальна енергія матеріальної точки в цих точках поля дорівнює відповідно Π і Π_0 .

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \sum_{k=1}^n A_k. \quad (20.32)$$

На підставі рівності (20.30) виразу (20.32) можна надати вигляду

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi,$$

або

$$\frac{mV^2}{2} + \Pi = \frac{mV_0^2}{2} + \Pi_0 = \text{const}. \quad (20.33)$$

Сума кінетичної і потенціальної енергій називається **повною механічною енергією**. Повну механічну енергію позначають літерою E . Рівність (20.33) набирає вигляду

$$E = \frac{mV^2}{2} + \Pi = \text{const}. \quad (20.34)$$

Рівність (20.34) є математичним виразом закону збереження механічної енергії матеріальної точки: *при русі під дією потенціальних сил повна механічна енергія матеріальної точки в кожному її положенні залишається сталою величиною.*

20.7.2. Закон збереження механічної енергії механічної системи

Нехай механічна система переміщується в потенціальному силовому полі з положення M у початкове положення M_0 . Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній формі:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i. \quad (20.35)$$

На підставі рівності (20.30) виразу (20.35) можна надати вигляду

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi,$$

або

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0 = \text{const}. \quad (20.36)$$

Враховуючи позначення повної механічної енергії, рівність (20.36) запишемо так:

$$E = T + \Pi = \text{const}. \quad (20.37)$$

Рівність (20.37) є математичним виразом закону збереження механічної енергії механічної системи: *при русі під дією потенціальних сил повна механічна енергія механічної системи в кожному її положенні залишається сталою величиною.*

Якщо в потенціальному силовому полі здійснює рух абсолютно тверде тіло, то внутрішня потенціальна енергія буде дорівнювати нулю і повна механічна енергія абсолютно твердого тіла буде визначатися як сума кінетичної та зовнішньої потенціальної енергій і на підставі рівності (20.37) буде також сталою величиною.

Механічна система, для якої виконується закон збереження механічної енергії, називається *консервативною*. У протилежному разі система буде *неконсервативною*.

З математичного погляду закон збереження механічної енергії матеріальної точки і механічної системи визначає перший інтеграл диференціальних рівнянь руху точки і системи, тому іноді цей закон називають ще *інтегралом енергії*.

20.7.3. Закон збереження механічної енергії механічної системи, що здійснює рух у непотенціальному силовому полі

Розглянемо силове поле, в якому одночасно діють як потенціальні, так і непотенціальні сили. У цьому випадку сума робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точок механічної системи, буде такою:

$$\sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i + \sum_{k=1}^n A_k^{\text{нпс}}, \quad (20.38)$$

де $\sum_{k=1}^n A_k^{\text{нпс}}$ — сума робіт непотенціальних сил.

На підставі рівняння (20.30) $\sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i = \Pi_0 - \Pi$.

Отже,

$$\sum_{k=1}^n A_k = (\Pi_0 - \Pi) + \sum_{k=1}^n A_k^{\text{нпс}}. \quad (20.39)$$

Застосовуючи теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі, матимемо

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k,$$

або, враховуючи рівність (20.39), здобудемо

$$T - T_0 = (\Pi_0 - \Pi) + \sum_{k=1}^n A_k^{\text{нпс}},$$

або

$$(T + \Pi) - (T_0 - \Pi_0) = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{нпс}}. \quad (20.40)$$

Враховуючи позначення повної механічної енергії, рівності (20.40) надамо вигляду

$$E - E_0 = \sum_{k=1}^n A_k^{\text{нпс}}. \quad (20.41)$$

З рівності (20.41) випливає: *зміна повної механічної енергії механічної системи на деякому її переміщенні в непотенціальному силовому полі дорівнює роботі всіх непотенціальних сил на цьому переміщенні.*

Таким чином, при русі механічної системи в непотенціальному силовому полі, що відбувається в реальності, коли непотенціальність поля пов'язана з дією сил опору, повна механічна енергія системи змінюється, причому вона зменшується на величину роботи сил опору. Втрачена механічною системою частина повної механічної енергії відповідно до фундаментального закону природи — закону збереження енергії, який був встановлений Майером¹ і Гельмгольцем², перетворюється в інші види енергій (теплову, хімічну тощо).

¹ Юліус Роберт Майєр (1814—1878) — німецький вчений.

² Герман Людвіг Фердінанд Гельмгольц (1821—1894) — німецький фізик, математик, фізіолог і психолог.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке силове поле?
2. В якому випадку силове поле називається стаціонарним?
3. Що таке потенціальне силове поле і потенціальні сили?
4. Що таке екіпотенціальні поверхні?
5. Що таке силова функція і які вона має властивості?
6. Що таке силова лінія?
7. Який вигляд мають екіпотенціальні поверхні поля сили тяжінні і поля сили пружності?
8. Чому дорівнює робота потенціальної сили в потенціальному силовому полі?
9. Чому дорівнює градієнт силової функції?
10. Запишіть необхідні і достатні умови існування силової функції.
11. Що таке потенціальна енергія матеріальної точки і як її обчислити?
12. Як визначається силова функція механічної системи?
13. Чому дорівнює робота сил, прикладених до точок механічної системи?
14. Сформулюйте закон збереження механічної енергії матеріальної точки і механічної системи.
15. Чому дорівнює повна механічна енергія механічної системи при її русі в непотенціальному силовому полі?

Глава 21

ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА ДЛЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

21.1. Принцип Д'Аламбера і метод кінестатики

Диференціальним рівнянням руху механічної системи (17.9) можна надати форми рівнянь статки. В цьому і полягає принцип Д'Аламбера для механічної системи. Принцип Д'Аламбера доцільно застосовувати для розв'язання першої задачі динаміки механічної системи. Цей принцип особливо ефективний при визначенні динамічних реакцій в'язей, тобто реакцій, що виникають при русі механічної системи.

Розглянемо невільну механічну систему, що складається з n матеріальних точок. Відокремимо в системі довільну точку і позначимо рівнодійні усіх внутрішніх і зовнішніх сил, що діють на точку, через \vec{F}_k^e , \vec{F}_k^i , \vec{R}_k^e , \vec{R}_k^i .

Тоді на підставі принципу Д'Аламбера для однієї матеріальної точки [див. рівняння (16.17)] матимемо

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{\text{ін}} = \vec{0}.$$

Беручи до уваги що для k -ї точки системи $\vec{F}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$ і $\vec{R}_k = \vec{R}_k^e + \vec{R}_k^i$, перетворюємо останнє рівняння так:

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{R}_k^e + \vec{R}_k^i + \vec{F}_k^{\text{ін}} = \vec{0}. \quad (21.1)$$

Складаючи почленно усі рівняння (21.1), здобудемо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} = \vec{0}.$$

На підставі властивостей внутрішніх сил $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = \vec{0}$, $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k^i = \vec{0}$; отже, мати-
 мемо

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{in}} = \vec{0}. \quad (21.2)$$

Візьмемо довільну нерухому точку O (полус) і проведемо з цієї точки до k -ї точки системи радіус-вектор \vec{r}_k . Тоді, помножуючи кожне з рівнянь (21.1) на \vec{r}_k і складаючи усі ці добутки, з урахуванням властивостей внутрішніх сил здобуємо

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{R}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{in}} = \vec{0}. \quad (21.3)$$

Рівняння (21.2) і (21.3) є математичним відображенням принципу Д'Аламбера: *для невільної механічної системи, що рухається, в кожний момент часу геометрична сума активних зовнішніх сил, реакцій зовнішніх в'язей і сил інерції, а також геометрична сума моментів зовнішніх активних сил, реакцій зовнішніх в'язей і сил інерції, що визначені відносно довільного нерухомого центра, дорівнюють нулю.*

Двом векторним рівнянням (21.2) і (21.3) відповідають шість рівнянь у проєкціях на нерухомі декартові осі координат:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx}^e + \sum_{k=1}^n R_{kx}^e + \sum_{k=1}^n F_{kx}^{\text{in}} &= 0; \quad \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n M_x(\vec{R}_k^e) + \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k^{\text{in}}) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + \sum_{k=1}^n R_{ky}^e + \sum_{k=1}^n F_{ky}^{\text{in}} &= 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n M_y(\vec{R}_k^e) + \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k^{\text{in}}) = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz}^e + \sum_{k=1}^n R_{kz}^e + \sum_{k=1}^n F_{kz}^{\text{in}} &= 0; \quad \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n M_z(\vec{R}_k^e) + \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^{\text{in}}) = 0. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Таким чином, вводячи при розв'язанні задач динаміки сили інерції, отримуємо зрівноважену систему сил, що дає можливість розв'язувати задачі динаміки методами статки і становить основу методу кінетостатки.

В рівняннях (21.2) і (21.3) геометричні суми $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{in}}$ і $\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{in}}$ визначають відповідно головний вектор і головний момент сил інерції:

$$\vec{R}_O^{\text{in}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{in}}; \quad \vec{M}_O^{\text{in}} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{in}}. \quad (21.5)$$

Беручи до уваги що $\vec{F}_k^{\text{ін}} = -m_k \vec{W}_k$, формулам (21.5) надамо іншого вигляду:

$$\vec{R}_O^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{\text{ін}} = -\sum_{k=1}^n m_k \vec{W}_k = -M \vec{W}_C, \quad (21.6)$$

оскільки $M \vec{W}_C = M \vec{r}_C^{\ddot{}}$ $= \sum_{k=1}^n m_k \vec{W}_k$;

$$\vec{M}_O^{\text{ін}} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{ін}} = -\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{W}_k = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k, \quad (21.7)$$

оскільки $\vec{W}_k = \frac{d\vec{V}_k}{dt}$, а $\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k)$.

У формулах (21.6) і (21.7) m_k — маса k -ї точки механічної системи; \vec{W}_k — прискорення k -ї точки механічної системи; M — маса механічної системи; \vec{W}_C — прискорення центра мас механічної системи; \vec{r}_C — радіус-вектор центра мас механічної системи; \vec{V}_k — швидкість k -ї точки механічної системи.

Формула (21.6) визначає головний вектор сил інерції механічної системи, а формула (21.7) — головний момент сил інерції відносно довільної точки O .

21.2. Визначення головного вектора і головного моменту сил інерції твердого тіла

Якщо механічна система складається з твердих тіл або є твердим тілом (незмінною механічною системою), то в разі застосування принципу Д'Аламбера необхідно вміти визначати $\vec{R}_O^{\text{ін}}$, $\vec{M}_O^{\text{ін}}$ при різних рухах твердого тіла.

Розглянемо деякі випадки руху твердого тіла і визначимо, чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції тіла при цих рухах.

Поступальний рух твердого тіла. Під час поступального руху твердого тіла прискорення всіх точок тіла геометрично дорівнюють прискоренню його центра мас, тому

$$\vec{R}_O^{\text{ін}} = \vec{R}_C^{\text{ін}} = -M \vec{W}_C. \quad (21.8)$$

Вектор $\vec{R}_O^{\text{ін}} = \vec{R}_C^{\text{ін}}$ прикладений в центрі мас C тіла і має напрям, прямо протилежний до напрямку вектора прискорення центра мас. Чисельно вектор

$\vec{R}_O^{\text{ін}} = \vec{R}_C^{\text{ін}}$ становить:

$$R_O^{\text{in}} = R_C^{\text{in}} = MW_C. \quad (21.9)$$

Головний момент сил інерції твердого тіла відносно центра мас C при поступальному русі тіла дорівнює нулю (рис. 21.1):

$$\bar{M}_O^{\text{in}} = \bar{M}_C^{\text{in}} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \times m_k \bar{V}_k = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \bar{\rho}_k \times \bar{V}_C = -M \bar{\rho}_C \times \bar{W}_C = \bar{0},$$

де $\bar{\rho}_k$ — радіус-вектор k -ї точки тіла; $\bar{\rho}_C$ — радіус-вектор центра мас тіла.

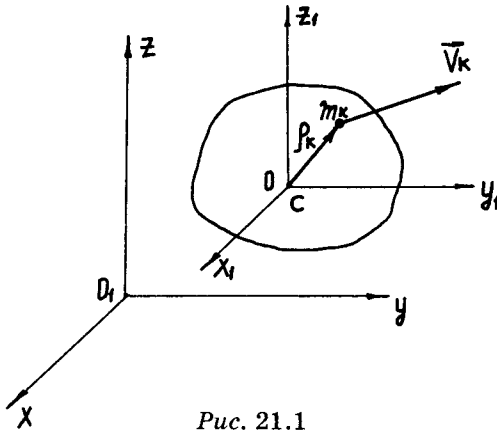


Рис. 21.1

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Головний вектор сил інерції \bar{R}_O^{in} при цьому русі тіла визначається за формулою (21.6). Напрямок вектора \bar{R}_O^{in} прямо протилежний до напрямку вектора прискорення центра мас твердого тіла. Чисельна величина вектора \bar{R}_O^{in} визначається за формулою (21.9).

Головний момент сил інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі відносно довільної точки O , що лежить на осі обертання, визначається за формулою (21.7)

$$\bar{M}_O^{\text{in}} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m \bar{V}_k = -\frac{d\bar{K}_O}{dt},$$

де \bar{K}_O — кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомого центра O тіла.

На підставі формули (11.30) (див. розділ “Кінематика”, параграф 11.3) останньому виразу надамо вигляду

$$\bar{M}_O^{\text{in}} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k = -\frac{d\bar{K}_O}{dt} = -\left(\frac{d\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O \right). \quad (21.10)$$

Проекціюючи рівність (21.10) на осі координат, що жорстко зв’язані з тілом і мають початок у довільній точці O , здобудемо:

$$M_{x_1}^{\text{in}} = -\frac{dK_{x_1}}{dt} - (\omega_{y_1} K_{z_1} - \omega_{z_1} K_{y_1}); \quad M_{y_1}^{\text{in}} = -\frac{dK_{y_1}}{dt} - (\omega_{z_1} K_{x_1} - \omega_{x_1} K_{z_1});$$

$$M_{z_1}^{\text{in}} = -\frac{dK_{z_1}}{dt} - (\omega_{x_1} K_{y_1} - \omega_{y_1} K_{x_1}).$$

Підставляючи в ці рівності значення K_{x_1} , K_{y_1} і K_{z_1} , які знайдемо шляхом проєкціювання виразу кінетичного моменту твердого тіла відносно центра O :

$$\begin{aligned} \vec{K}_O &= \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \sum_{k=1}^n m_k [\vec{\omega} (\vec{r}_k \cdot \vec{r}_k) - \vec{r}_k (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k)] = \\ &= \vec{\omega} \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 - \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k) \end{aligned}$$

на осі координат, що жорстко зв'язані з тілом і мають початок у центрі O , тобто

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= J_{x_1} \omega_{x_1} - J_{x_1 y_1} \omega_{y_1} - J_{x_1 z_1} \omega_{z_1}; \quad K_{y_1} = -J_{x_1 y_1} \omega_{x_1} + J_{y_1} \omega_{y_1} - J_{y_1 z_1} \omega_{z_1}; \\ K_{z_1} &= -J_{x_1 z_1} \omega_{x_1} - J_{y_1 z_1} \omega_{y_1} + J_{z_1} \omega_{z_1}, \end{aligned} \quad (21.11)$$

здобудемо проєкції вектора \vec{M}_O^{in} на рухомі осі координат, що мають початок у довільній точці O :

$$\begin{aligned} M_{x_1}^{in} &= -J_{x_1} \varepsilon_{x_1} + J_{x_1 y_1} (\varepsilon_{y_1} - \omega_{x_1} \omega_{z_1}) + J_{x_1 z_1} (\varepsilon_{z_1} + \omega_{x_1} \omega_{y_1}) - \\ &\quad - J_{y_1 z_1} (\omega_{z_1}^2 - \omega_{y_1}^2) - (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1}; \\ M_{y_1}^{in} &= -J_{y_1} \varepsilon_{y_1} + J_{y_1 z_1} (\varepsilon_{z_1} - \omega_{y_1} \omega_{x_1}) + J_{y_1 x_1} (\varepsilon_{x_1} + \omega_{y_1} \omega_{z_1}) - \\ &\quad - J_{x_1 z_1} (\omega_{x_1}^2 - \omega_{z_1}^2) - (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{z_1} \omega_{x_1}; \\ M_{z_1}^{in} &= -J_{z_1} \varepsilon_{z_1} + J_{x_1 z_1} (\varepsilon_{x_1} - \omega_{y_1} \omega_{z_1}) + J_{y_1 z_1} (\varepsilon_{y_1} + \omega_{x_1} \omega_{z_1}) - \\ &\quad - J_{x_1 y_1} (\omega_{y_1}^2 - \omega_{x_1}^2) - (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{x_1} \omega_{y_1}. \end{aligned} \quad (21.12)$$

Якщо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі z_1 , має площину матеріальної симетрії (площина π на рис. 21.2) і центр O збігається з центром мас тіла C , то осі координат $Ox_1y_1z_1$ — головні центральні осі інерції тіла. Тоді головний вектор сил інерції буде дорівнювати нулю:

$$\vec{R}_O^{in} = \vec{R}_C^{in} = -M \vec{W}_C = \vec{0}, \quad (21.13)$$

оскільки центр мас тіла розміщений на осі обертання, а головний момент сил інерції з урахуванням того, що $J_{x_1 z_1} = J_{y_1 z_1} = 0$, $\varepsilon_{x_1} = \varepsilon_{y_1} = 0$, $\omega_{x_1} = \omega_{y_1} = 0$, і на підставі рівностей (21.12) буде становити:

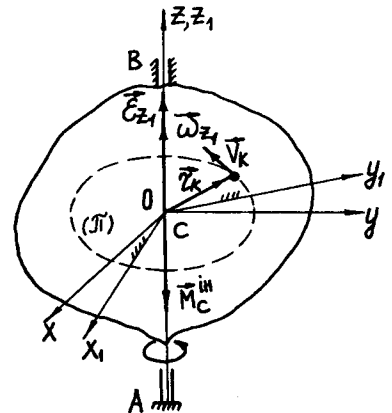


Рис. 21.2

¹ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$\vec{M}_O^{\text{ін}} = \vec{M}_C^{\text{ін}} = \vec{M}_{x_1}^{\text{ін}} \vec{i}_1 + \vec{M}_{y_1}^{\text{ін}} \vec{j}_1 + \vec{M}_{z_1}^{\text{ін}} \vec{k}_1 = -J_{z_1} \varepsilon_{z_1} \vec{k}_1 = -J_{z_1} \vec{\varepsilon}_{z_1}, \quad (21.14)$$

де $M_{x_1}^{\text{ін}} = M_{y_1}^{\text{ін}} = 0$; $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ — одиничні вектори осей рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$; J_{z_1} — момент інерції тіла відносно осі обертання; $\vec{\varepsilon}_{z_1}$ — вектор кутового прискорення тіла при обертанні навколо осі z_1 .

Чисельна величина вектора $\vec{M}_O^{\text{ін}} = \vec{M}_C^{\text{ін}}$

$$M_O^{\text{ін}} = M_C^{\text{ін}} = J_{z_1} \varepsilon_{z_1}. \quad (21.15)$$

Вектор $\vec{M}_O^{\text{ін}} = \vec{M}_C^{\text{ін}}$ розташований на осі обертання твердого тіла і має напрям, прямо протилежний напрямку вектора $\vec{\varepsilon}_{z_1}$ (рис. 21.2).

Плоскопаралельний рух твердого тіла. Як відомо, плоскопаралельний рух твердого тіла можна розкласти на поступальний рух разом з центром мас тіла C і обертальний навколо осі, що проходить через центр мас тіла C перпендикулярно до нерухомої площини, паралельно якій рухається тіло.

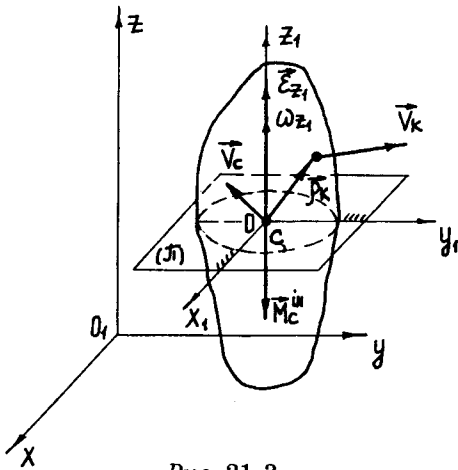


Рис. 21.3

Якщо тверде тіло має площину матеріальної симетрії (площина π на рис. 21.3), паралельно якій рухаються точки тіла, і вісь обертання z_1 перпендикулярна до цієї площини, то осі координат $Cx_1y_1z_1$ — головні центральні осі інерції тіла. Тоді головний вектор сил інерції тіла $\vec{R}_O^{\text{ін}} = \vec{R}_C^{\text{ін}}$ при цьому русі тіла визначається за формулою (21.6). Напрямок вектора $\vec{R}_O^{\text{ін}} = \vec{R}_C^{\text{ін}}$ прямо протилежний напрямку вектора прискорення центра мас тіла. Чисельна величина вектора $\vec{R}_O^{\text{ін}} = \vec{R}_C^{\text{ін}}$ визначається за формулою (21.9). Точка прикладання цього вектора — центр мас тіла.

Головний момент сил інерції тіла відносно центра мас визначається за формулою (21.14), а його чисельна величина — за формулою (21.15).

У більш складних випадках руху твердого тіла головний вектор і головний момент сил інерції відносно довільної точки визначають через їх проекції на осі координат.

21.3. Приклади розв'язання задач динаміки механічної системи за допомогою принципу Д'Аламбера. Методичні вказівки

Розв'язуючи задачі динаміки системи за допомогою принципу Д'Аламбера, слід дотримуватися такого порядку:

- 1) відокремити матеріальні точки або тверді тіла, рух яких вивчається;
- 2) визначити в'язі, накладені на матеріальні точки або тверді тіла, рух яких вивчається;
- 3) застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, уявно відкинути в'язі і замінити їх вплив на матеріальні точки або тверді тіла реакціями в'язей;
- 4) визначити напрям і величину сил інерції;
- 5) скласти схему всіх сил, що діють на матеріальні точки або тверді тіла системи (у тому числі й сили інерції);
- 6) записати і розв'язати рівняння їх рівноваги, що відповідають діючим на матеріальні точки або тверді тіла систем сил.

Приклад 21.1. Визначити опорні реакції підп'ятника A і підшипника B поворотного крана (рис. 21.4) при підніманні контейнера E масою 3000 кг з прискоренням $0,5g$. Маса крана дорівнює 2000 кг, а його центр мас розташований у точці C . Маса візка D дорівнює 500 кг. Кран і візок нерухомі.

Розв'язання. Розглядатимемо рух однієї точки E . В'язями є підп'ятник A і циліндричний підшипник C , а реакціями — \vec{X}_A , \vec{Y}_A і \vec{X}_B .

Прискорення матеріальної точки E (контейнера) $W_E = 0,5g$. Величина сили інерції точки E $F_E^{in} = 0,5gm_E = 0,5g \cdot 3000 = 1500g$.

Отже, на кран діятиме система сил \vec{P} , \vec{G} , \vec{Q} , \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{X}_B і \vec{F}_E^{in} . На підставі принципу Д'Аламбера ці сили утворюють довільну плоску зрівноважену систему сил. Складемо рівняння рівноваги цієї системи сил:

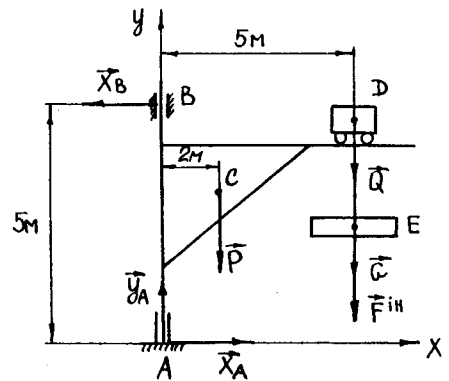


Рис. 21.4

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - X_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - P - Q - G - F^{in} = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^n M_k(\vec{F}_k) = 0; \quad X_B \cdot 5 - P \cdot 2 - (Q + G + F^{in}) \cdot 5 = 0.$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1), дістанемо:

$$X_B = \frac{2P + 5(Q + G + F^{\text{ін}})}{5} = \frac{9,81 [2 \cdot 2000 + 5(500 + 3000 + 1500)]}{5} = 56,9 \text{ кН};$$

$$Y_A = 9,81(2000 + 500 + 3000 + 1500) = 68,7 \text{ кН};$$

$$X_A = X_B = 56,9 \text{ кН}.$$

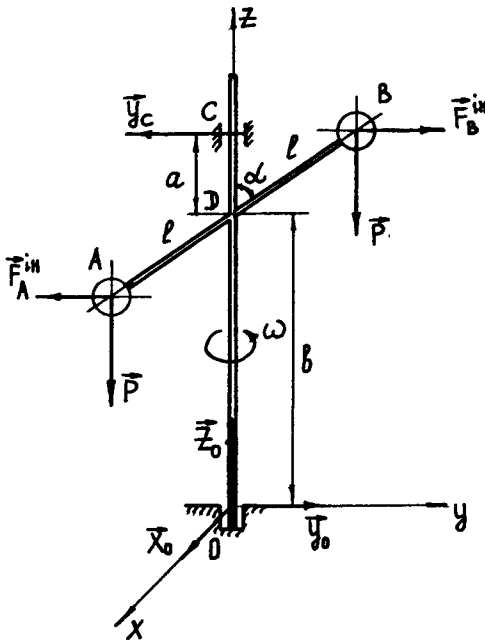


Рис. 21.5

Визначити реакції підшипника C і під'ятника O в той момент, коли стрижень розташований у площині yOz .

Розв'язання. Розглянемо рух матеріальних точок A і B . В'язами є під'ятник O і циліндричний підшипник C , а їх реакціями в площині yOz — \vec{Y}_0 , \vec{Z}_0 і \vec{Y}_C .

Прискореннями матеріальних точок A і B є відповідно $W_A^{\text{доос}}$ і $W_B^{\text{доос}}$. Обертальні прискорення дорівнюють нулю: $W_A^{\text{об}} = W_B^{\text{об}} = 0$, оскільки обертання стрижня AB відбувається зі сталою кутовою швидкістю.

Модулі сил інерції

$$F_A^{\text{ін}} = F_B^{\text{ін}} = \frac{P}{g} l \omega^2 \sin \alpha.$$

Сили \vec{P} , $\vec{F}_A^{\text{ін}}$, $\vec{F}_B^{\text{ін}}$, \vec{Y}_C , \vec{Y}_0 і \vec{Z}_0 утворюють довільну плоску систему сил. Відповідно до принципу Д'Аламбера складемо для довільної плоскої системи сил рівняння, що відповідають рівнянням (21.4), у такому вигляді:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -Y_C + F_B^{\text{ін}} - F_A^{\text{ін}} + Y_0 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad -2P + Z_0 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0; Pl \sin \alpha - Pl \sin \alpha + Y_C \cdot a + Y_0 \cdot b - F_A^{\text{ін}} l \cos \alpha - F_A^{\text{ін}} l \cos \alpha = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, дістанемо:

$$Y_0 = Y_C;$$

$$Y_C = \frac{2F_A^{\text{ін}} l \cos \alpha}{a + b} = \frac{2Pl^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g(a + b)} = \frac{Pl^2 \omega^2 \sin 2\alpha}{g(a + b)}.$$

$$Z_0 = 2P.$$

При обертанні стрижня AB реакції \vec{Y}_0 і \vec{Y}_C обертаються разом з ним.

Приклад 21.3. Щоб дослідити вплив на металевий брусок A розтяжних і стискних сил, що швидко чергуються, брусок прикріплюють верхнім кінцем до повзуна B кривошипного механізму BCO , а до нижнього кінця підвішують вантаж D . Знайти силу, яка розтягує брусок, якщо кривошип OC обертається навколо осі O зі сталою кутовою швидкістю ω , а вага вантажу D дорівнює P (рис. 21.6).

Розв'язання. Щоб визначити зусилля в бруску A , застосуємо принцип Д'Аламбера до вантажу D .

Використовуючи метод перерізів, побудуємо розрахункову схему навантаження вантажу D (рис. 21.7), де \vec{S} — зусилля в бруску A ; \vec{P} — сила ваги вантажу D ; $\vec{F}^{\text{ін}}$ — сила інерції вантажу D .

Конструкція кривошипного механізму зумовлює те, що прискорення вантажу D напрямлене вздовж вертикалі. Проте оскільки рух вантажу D сповільнений, то прискорення вантажу D буде напрямлене в бік, протилежний напрямку руху, тобто вгору (рис. 21.6). Отже, сила інерції вантажу D буде напрямлена вниз (рис. 21.7).

Сила інерції $\vec{F}^{\text{ін}}$ за величиною

$$F^{\text{ін}} = \frac{P}{g} W_D,$$

де W_D — прискорення вантажу.

Щоб визначити W_D , достатньо знайти закон руху вантажу D , або, що те саме, закон руху точки B (рис. 21.6).

З трикутника ΔOBC за теоремою косинусів знайдемо:

$$x_B = OB; l^2 = r^2 + x_B^2 - 2rx_B \cos \omega t,$$

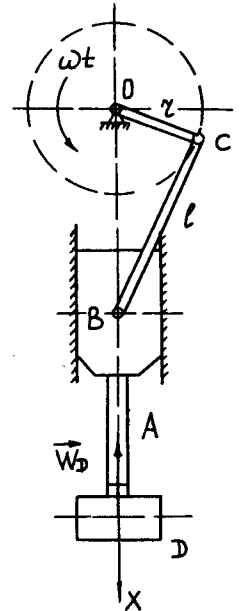


Рис. 21.6

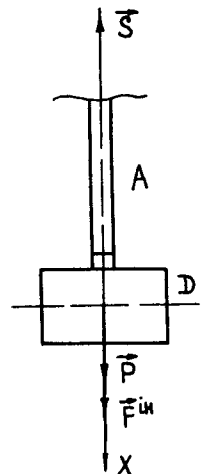


Рис. 21.7

або

$$x_B^2 - 2r \cos \omega t \cdot x_B + (r^2 - l^2) = 0.$$

Розв'яжемо це квадратне рівняння відносно шуканої величини x_B :

$$x_B = r \cos \omega t \pm \sqrt{r^2 \cos^2 \omega t - r^2 + l^2}.$$

Умові задачі відповідає знак "+", тому

$$x_B = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r \sin^2 \omega t},$$

або

$$x_B = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2}.$$

Розкладемо в біноміальний ряд $\left| (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \right|$ вираз

$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2}$ і обмежимося двома членами у розкладі:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2.$$

Тоді матимемо

$$x_B = r \cos \omega t + l \left(1 - \frac{r^2}{2l^2} \sin^2 \omega t \right).$$

Зауважимо, що ця рівність наближена, але ступінь її точності цілком задовольняє інженерні розрахунки. Диференціюючи двічі цю рівність за часом, дістанемо шукане прискорення точки D :

$$\dot{x}_B = -r\omega \sin \omega t - \frac{\omega r^2}{2l} \sin 2\omega t;$$

$$W_D = \ddot{x}_B = -r\omega^2 \cos \omega t - \frac{\omega^2 r^2}{l} \cos 2\omega t = -r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right).$$

Знаючи прискорення W_D , визначимо величину сили інерції вантажу D :

$$F^{\text{ін}} = \frac{P}{g} r \omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right).$$

Оскільки сили, прикладені до вантажу D (рис. 21.7), лежать на одній прямій, то відповідно до принципу Д'Аламбера складемо для цих сил рівняння, що відповідає рівнянням (21.4), у такому вигляді:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -S + P + F^{\text{ін}} = 0,$$

звідки

$$S = P + \frac{P}{g} r \omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right).$$

Отже, зусилля S , що розтягує брусок A , є функцією часу.

Приклад 21.4. Два однорідних прямолінійних стрижні завдовжки a і b жорстко з'єднані під прямим кутом (рис. 21.8). Вершина цього кута шарнірно з'єднана з вертикальним валом, який обертається зі сталою кутовою швидкістю. Знайти залежність між кутовою швидкістю ω і кутом відхилення φ , утвореним напрямом стрижня завдовжки a з вертикаллю.

Розв'язання. Розглянемо рух стрижнів AO і OB . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, відкинемо в'язь, накладену на стрижні (шарнір O), і замінимо її дію реакціями \vec{Y}_0 , \vec{Z}_0 .

Відповідно до принципу Д'Аламбера приєднаємо до сил реакцій сили ваги і сили інерції стрижнів. Оскільки вал обертається рівномірно, то елементи стрижнів мають тільки доосьові прискорення $W_k^{\text{доос}}$, які напрямлені до осі обертання і чисельно становлять: $W_k^{\text{доос}} = \omega^2 h_k$, де h_k — відстань від елемента стрижнів до осі обертання. Тоді сили інерції $\vec{F}_k^{\text{ін}}$ будуть напрямлені від осі обертання і за величиною становлять: $F_k^{\text{ін}} = \Delta m W_k^{\text{доос}} = \Delta m \omega^2 h_k$, де Δm — маса елемента стрижнів. Оскільки всі сили $\vec{F}_k^{\text{ін}}$ пропорціональні h_k , вони утворюють систему паралельних сил, розподілених за законом трикутника вздовж стрижнів AO і OB . Рівнодійні цих сил позначимо $\vec{R}_1^{\text{ін}}$ і $\vec{R}_2^{\text{ін}}$. Лінії дії рівнодійних проходять через центр ваги трикутників, тобто на відстанях $\frac{2}{3}a$ і $\frac{2}{3}b$ від вершини трикутників O .

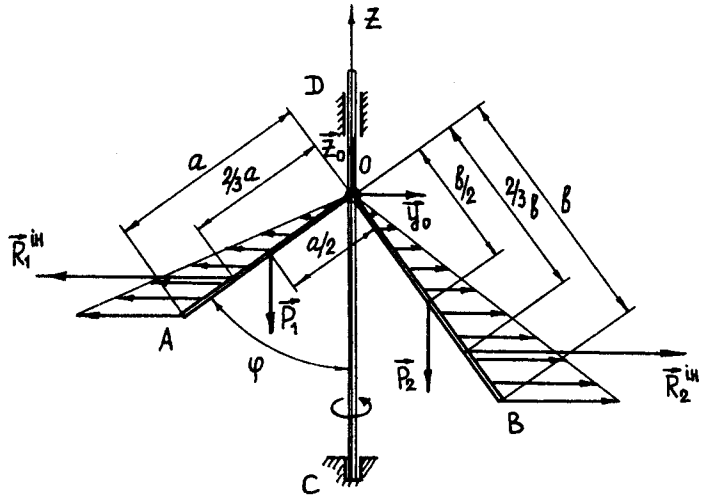


Рис. 21.8

Оскільки рівнодійна будь-якої системи сил дорівнює її головному вектору, а за величиною головний вектор сил інерції дорівнює добутку маси тіла на прискорення його центра мас, то сили $\vec{R}_1^{\text{ін}}$ і $\vec{R}_2^{\text{ін}}$ за величиною будуть такими:

$$\vec{R}_1^{\text{ін}} = S\gamma a\omega^2 \frac{a}{2} \sin \varphi = S\gamma a^2\omega^2 \sin \varphi;$$

$$\vec{R}_2^{\text{ін}} = S\gamma b\omega^2 \frac{b}{2} \cos \varphi = S\gamma b^2\omega^2 \cos \varphi,$$

де S — площа перетину стрижнів; γ — питома вага матеріалу стрижнів.

Сили ваги стрижнів AO і OB відповідно становлять:

$$P_1 = S\gamma ag; \quad P_2 = S\gamma bg.$$

Сили \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , $\vec{R}_1^{\text{ін}}$, $\vec{R}_2^{\text{ін}}$, \vec{Y}_0 і \vec{Z}_0 утворюють довільну плоску систему сил. Відповідно до принципу Д'Аламбера складемо для довільної плоскої системи сил рівняння, що відповідають рівнянням (21.4). При цьому, оскільки необхідно визначити одну невідому величину, а саме залежність між кутом φ і ω , то достатньо скласти одне з трьох рівнянь рівноваги довільної плоскої системи сил. Найпростішим буде рівняння моментів відносно точки O . Завдяки цьому можна вилучити невідомі реакції \vec{Y}_0 і \vec{Z}_0 .

Рівняння моментів сил відносно точки O матиме вигляд:

$$\sum_{k=1}^n M_O(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_1^{\text{ін}} \frac{2a}{3} \cos \varphi + P_1 \frac{a}{2} \sin \varphi - P_2 \frac{b}{2} \cos \varphi + R_2^{\text{ін}} \frac{2b}{3} \sin \varphi = 0,$$

або

$$-\frac{2a^3 S\gamma\omega^2}{3} \sin \varphi \cos \varphi + S\gamma \frac{a^2}{2} g \sin \varphi - S\gamma \frac{b^2}{2} g \cos \varphi + \frac{2b^3 S\gamma\omega^2}{3} \cos \varphi \sin \varphi = 0,$$

звідки

$$\omega^2 = \frac{3g(b^2 \cos \varphi - a^2 \sin \varphi)}{(b^3 - a^3) \sin 2\varphi}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте принцип Д'Аламбера для механічної системи.
2. За якими формулами визначаються головний вектор і головний момент сил інерції механічної системи?
3. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла, що здійснює поступальний рух?
4. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через центр мас тіла і є головною центральною віссю інерції тіла?
5. Чому дорівнюють головний вектор і головний момент сил інерції твердого тіла відносно центра мас при плоскопаралельному русі тіла?

Глава 22

ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

22.1. Поступальний рух твердого тіла. Диференціальні рівняння руху

Оскільки поступальний рух твердого тіла повністю характеризується рухом однієї його точки — центра мас, то, застосовуючи теорему про рух центра мас механічної системи до твердого (абсолютно твердого) тіла, здобудемо диференціальне рівняння поступального руху твердого тіла, тобто

$$M\vec{W}_C = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e, \quad (22.1)$$

де M — маса твердого тіла; \vec{W}_C — вектор прискорення центра мас твердого тіла; $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$ — головний вектор зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла.

Диференціальному рівнянню поступального руху твердого тіла у векторній формі відповідають три рівняння в скалярній формі:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e, \quad (22.2)$$

де \ddot{x}_C , \ddot{y}_C , \ddot{z}_C — відповідно проекції вектора прискорення центра мас тіла на

нерухомі декартові осі координат; $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e$, $\sum_{k=1}^n F_{ky}^e$, $\sum_{k=1}^n F_{kz}^e$ — відповідно проекції

головного вектора зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, на нерухомі декартові осі координат.

За допомогою рівнянь (22.2) можна розв'язувати дві основні задачі динаміки поступального руху твердого тіла:

1) знаючи кінематичні рівняння руху центра мас твердого тіла, можна визначити головний вектор прикладених до твердого тіла сил;

2) знаючи зовнішні сили, прикладені до твердого тіла, і початкові умови його руху, визначити кінематичні рівняння руху тіла, якщо відомо, що воно рухається поступально.

Наведемо умови, за яких рух твердого тіла буде поступальним. При поступальному русі твердого тіла осі координат, зв'язані з тілом, залишаються паралельними осям нерухомої системи відліку. Отже, відносно системи координат, що рухається поступально відносно нерухомої системи координат, тіло перебуває в спокої. Таким чином, кутова швидкість і момент кількості руху твердого тіла відносно центра мас дорівнюють нулю. Тоді на підставі рівняння (19.29) матимемо

$$\sum_{k=1}^n \bar{M}_C (\bar{F}_k^e) = \vec{0}. \quad (22.3)$$

Отже, тверде тіло буде рухатися поступально, якщо у початковий момент руху твердого тіла кінетичний момент тіла відносно його центра мас буде дорівнювати нулю, а головний момент усіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, відносно центра мас тіла під час руху тіла залишається сталим і дорівнює нулю.

22.2. Обертальний рух твердого тіла. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Теорема про зміну кінетичної енергії твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Розглянемо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω (рис. 22.1).

Для вивчення обертання тіла навколо осі z застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху (кінетичного моменту) механічної системи відносно нерухомої осі:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^e). \quad (22.4)$$

Беручи до уваги рівність (19.22), яка визначає момент кількості руху твердого тіла відносно нерухомої осі обертання, рівнянню (22.4) надамо вигляду

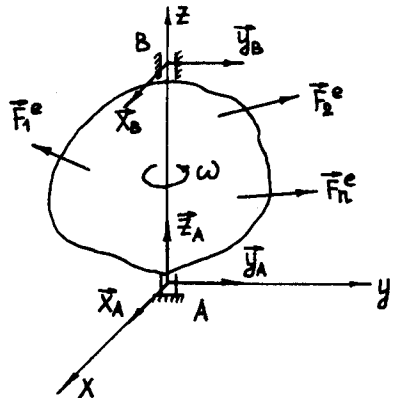


Рис. 22.1

$$\frac{d(J_z \omega_z)}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^e),$$

або

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^e), \quad (22.5)$$

де J_z — момент інерції твердого тіла відносно осі обертання; $\sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^e)$ — алгебрична сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання;

$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ — кутове прискорення твердого тіла.

Рівняння (22.5) — це диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Якщо порівняти рівняння (22.5) з рівнянням (22.1), то можна провести таку аналогію: роль маси M і прискорення \ddot{W}_C у рівнянні (22.5) відіграють відповідно момент інерції J_z і кутове прискорення $\varepsilon = \ddot{\varphi}$. Отже, момент інерції J_z — міра інертності тіла при обертальному русі.

За допомогою диференціального рівняння (22.5) можна розв'язувати як прямі, так і обернені задачі динаміки. У прямих задачах за заданим моментом інерції твердого тіла J_z відносно осі обертання і законом обертання твердого тіла $\varphi = \varphi(t)$ визначають головний момент зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, відносно осі обертання. В обернених задачах за заданими моментами зовнішніх сил відносно осі обертання, моментом інерції, а також за початковими умовами руху (положення і кутова швидкість твердого тіла), тобто при $t = 0$; $\varphi(0) = \varphi_0$; $\dot{\varphi}(0) = \omega_0 = \dot{\varphi}_0$ визначають рівняння обертання твердого тіла $\varphi = \varphi(t)$. При розв'язанні обернених задач можуть бути значні труднощі, пов'язані з інтегруванням диференціального рівняння (22.5), оскільки в загальному випадку моменти зовнішніх сил відносно осі обертання можуть залежати від часу t , кута повороту φ і кутової швидкості $\dot{\varphi}$ твердого тіла.

Помножуючи обидві частини рівняння (22.5) на $\dot{\varphi}$, знайдемо

$$J_z \ddot{\varphi} \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^e),$$

або

$$J_z \omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^e),$$

звідки

$$J_z \omega d\omega = \varphi \sum_{k=1}^n M_z (\bar{F}_k^e).$$

Проінтегрувавши останній вираз у межах від φ_0 до φ і ω_0 до ω , збудемо

$$\frac{1}{2} J_z (\omega^2 - \omega_0^2) = \sum_{k=1}^n \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z (F_k^e) d\varphi, \tag{22.6}$$

де $\sum_{k=1}^n \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z (\bar{F}_k^e) d\varphi = \sum_{k=1}^n A_k^e$ — сума робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до

твердого тіла, при його обертанні навколо нерухомої осі.

Рівняння (22.6) є математичним виразом теореми про зміну кінетичної енергії твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі: *приріст кінетичної енергії твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, за деякий проміжок часу дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, за той самий проміжок часу.*

22.3. Фізичний маятник. Малі коливання фізичного маятника

Фізичним маятником називається тверде тіло довільної форми, яке може обертатися навколо нерухомої осі під дією сили тяжіння.

На рис. 22.2 зображений фізичний маятник з горизонтальною віссю підвісу x (віссю, навколо якої обертається тіло A). Точка O — точка перетину осі підвісу з площиною, що містить центр мас тіла C , яка перпендикулярна до осі підвісу тіла, — називається *точкою підвісу фізичного маятника*. Кут відхилення маятника від вертикалі позначимо через φ , а відстань OC між точкою підвісу O і центром мас маятника C — через d .

На підставі рівності (22.5) диференціальне рівняння обертального руху маятника відносно осі x буде мати вигляд

$$J_x \ddot{\varphi} = -Mgd \sin \varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgd}{J_x} \sin \varphi = 0, \tag{22.7}$$

де M — маса маятника.

Рівняння (22.7) є нелінійним. Знайдемо його розв'язок, обмежувчись випадком малих коливань, тобто візьмемо, що $\sin \varphi \approx \varphi$. Тоді рівняння (22.7) набирає вигляду

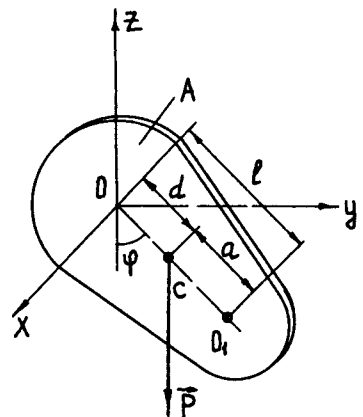


Рис. 22.2

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgd}{J_x} \varphi = 0. \quad (22.8)$$

Рівняння (22.8) — диференціальне рівняння малих коливань фізичного маятника.

Якщо порівняти рівняння (22.8) з диференціальним рівнянням малих коливань математичного маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (22.9)$$

то визначимо зведену довжину фізичного маятника, тобто

$$l = \frac{J_x}{Md}. \quad (22.10)$$

Зведеною довжиною фізичного маятника називається довжина математичного маятника, рух якого аналогічний руху фізичного маятника.

Якщо у рівності (22.10) величину J_x визначити за формулою (18.14)

$$J_x = J_C + Md^2,$$

де J_C — момент інерції фізичного маятника відносно осі, що проходить через центр мас маятника, то отримуємо інший вираз зведеної довжини:

$$l = \frac{J_C}{Md} + d. \quad (22.11)$$

З формули (22.11) випливає, що $l > d$.

Якщо вздовж лінії, що з'єднує точку підвісу O і центр ваги C маятника, відкласти від точки O за напрямом до точки C зведену довжину l , то здобудемо точку O_1 , яка називається *центром хитань фізичного маятника*. Відстань від центра мас до центра хитань

$$a = \frac{J_C}{Md}. \quad (22.12)$$

Покажемо, що точка підвісу O і центр хитань O_1 мають властивості взаємності. Дійсно, якщо помістити вісь підвісу в точці O_1 , то зведена довжина l_1 маятника, що визначається на підставі формули (22.11), буде

$$l_1 = \frac{J_C}{Ma} + a.$$

Беручи до уваги рівність (22.12), матимемо

$$l_1 = \frac{J_c}{Md} + d = l.$$

Отже, якщо вісь підвісу буде проходити через точку O_1 , то центром хитань буде точка O (оскільки $l_1 = l$, див. рис. 22.2).

Диференціальне рівняння (22.8) за виглядом збігається з диференціальним рівнянням вільних прямолінійних коливань матеріальної точки, і його загальний розв'язок за аналогією з рівністю (16.36) має вигляд

$$\varphi = A \sin(kt + \beta), \quad (22.13)$$

де A — амплітуда коливання маятника; $k = \sqrt{\frac{Mgd}{J_x}}$ — колова частота коливання; β — початкова фаза коливання, звідки випливає, що кут φ змінюється за гармонічним законом з періодом

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_x}{Mgd}}. \quad (22.14)$$

22.4. Експериментальне визначення моментів інерції твердих тіл

Експериментальні методи застосовуються для визначення моментів інерції твердих тіл, які мають неправильну геометричну форму. Ці методи ґрунтуються на спостереженні за різними видами обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, оскільки момент інерції тіла — характеристика його інертності при обертанні.

Розглянемо три експериментальних способи: спосіб хитань, спосіб крутильних коливань і спосіб вантажу, що падає.

Спосіб хитань. Як приклад визначення моментів інерції твердих тіл цим способом розглянемо визначення моменту інерції шатуна (рис. 22.3) відносно осі, що проходить через його центр мас C .

Визначення моменту інерції виконується в такій послідовності:

1) визначають вагу шатуна і положення його центра мас C ;

2) підвішують шатун у вертикальній площині так, щоб він мав можливість хитатися навколо горизонтальної осі підвісу;

3) відхиливши шатун від положення рівноваги на малий кут φ , надають йому коливального руху;

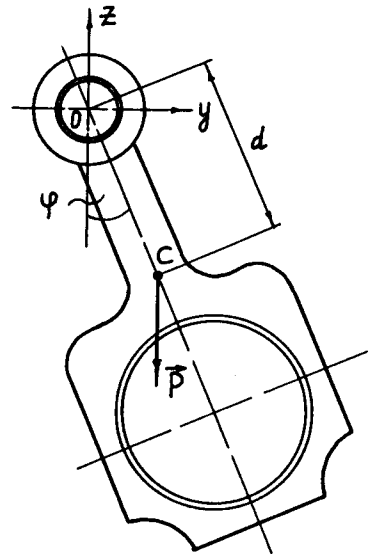


Рис. 22.3

4) за допомогою секундоміра шляхом спостереження визначають період коливання шатуна T ;

5) оскільки шатун є фізичним маятником, на підставі формули (22.14) визначають значення моменту інерції шатуна відносно осі підвісу:

$$J_x = \frac{T^2 P d}{(4\pi)^2}. \quad (22.15)$$

6) застосовуючи формулу (18.14), визначають момент інерції шатуна J_c відносно центральної осі, що проходить через центр мас шатуна і є паралельною осі підвісу:

$$J_c = J_x - m d^2 = \frac{T^2 P d}{(4\pi)^2} - \frac{P d^2}{g}. \quad (22.16)$$

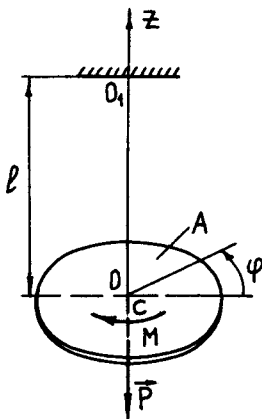


Рис. 22.4

Спосіб крутильних коливань. Розглянемо тверде тіло A , прикріплене до пружного тонкого вертикального стрижня OO_1 (рис. 22.4). Обернемо тіло A навколо осі Oz на малий кут φ і відпустимо. Під дією сил пружності стрижня OO_1 тіло A намагається повернутися в положення рівноваги, але, маючи кутову швидкість, проходить це положення і обертається навколо осі Oz у протилежний бік. Таким чином виникають крутильні коливання тіла.

Сили пружності стрижня при крутильних коливаннях зводяться до крутильного моменту $M_{кр} = -c\varphi$, де

$$c = \frac{GJ_{c_2}}{l} \text{ — коефіцієнт жорсткості стрижня; } G \text{ — мо-}$$

дуль пружності матеріалу стрижня; J_{c_2} — момент інерції стрижня відносно осі c_2 ; l — довжина стрижня.

На підставі рівняння (22.5) диференціальне рівняння крутильних коливань матиме вигляд

$$J_{c_2} \ddot{\varphi} = -c\varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{c}{J_{c_2}} \varphi = 0. \quad (22.17)$$

Період крутильних коливань визначається за формулою

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{Cz}}{c}}. \tag{22.18}$$

Визначення моменту інерції твердого тіла способом крутильних коливань виконується в такій послідовності:

1) до нижнього кінця тонкого стрижня (дроту), який заземлений верхнім кінцем, підвішують тверде еталонне тіло, момент інерції якого відносно центральної осі Cz відомий (рис. 22.4);

2) відхиливши еталонне тіло від положення рівноваги на малий кут φ , надають тілу коливального руху;

3) за допомогою секундоміра шляхом спостереження визначають період коливання еталонного тіла T_1 ;

4) підвішують до стрижня тіло (рис. 22.5), момент інерції якого належить визначити; надають тілу коливального руху; за допомогою секундоміра шляхом спостереження визначають період коливання тіла T_2 ;

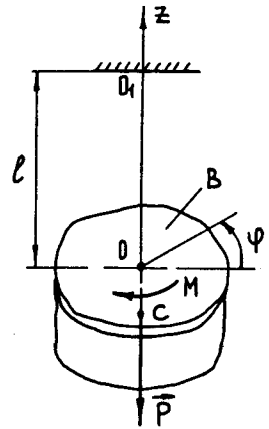


Рис. 22.5

5) на підставі формули (22.18) отримують рівність

$$J_{2Cz} = \frac{J_{1Cz} T_2^2}{T_1^2}, \tag{22.19}$$

де J_{2Cz} — момент інерції, що належить визначити; J_{1Cz} — момент інерції еталонного тіла; T_1 — період коливання еталонного тіла; T_2 — період коливання тіла, момент інерції якого визначається;

6) за формулою (22.19) визначають шуканий момент інерції.

Спосіб вантажу, що падає. Розглянемо механічну систему, що складається з махового колеса 2 радіусом R , на якому намотаний тонкий дріт, до якого підвішена гиря 1 вагою P (рис. 22.6).

Нехай у початковий момент часу система перебувала у спокої. Застосуємо для аналізу руху системи теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T_1 + T_2 = \sum_{k=1}^n A_k^e + \sum_{k=1}^n A_k^i, \tag{22.20}$$

де $T_1 = \frac{P}{2g} \dot{x}^2$ — кінетична енергія гирі; $T_2 = \frac{J_C}{2R^2} \dot{x}^2$ —

кінетична енергія махового колеса.

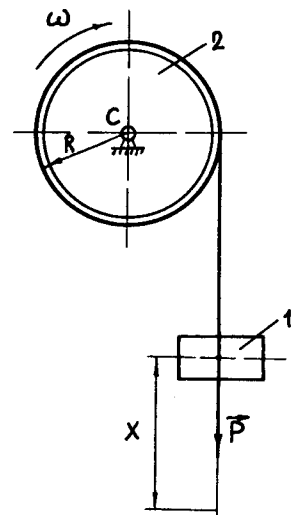


Рис. 22.6

Сума робіт $\sum_{k=1}^n A_k^i = 0$, оскільки система незмінна. Сума робіт $\sum_{k=1}^n A_k^e$ становить:

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = P x.$$

Підставляючи значення T_1 , T_2 і $\sum_{k=1}^n A_k^e$ у формулу (22.20), здобудемо

$$\frac{\dot{x}^2}{2} \left(\frac{J_C}{R^2} + \frac{P}{g} \right) = P x.$$

Інтегруючи цей вираз при $t = 0$; $x(0) = 0$, знаходимо

$$x = \frac{P t^2 g R^2}{2(J_C g + P R^2)}. \quad (22.21)$$

Якщо за час $t = t_1$ гиря опускається на висоту h , то з рівності (22.21) знайдемо

$$h = \frac{P t_1^2 g R^2}{2(J_C g + P R^2)},$$

звідки

$$J_C = \frac{P R^2}{g} \left(\frac{g t_1^2}{2h} - 1 \right). \quad (22.22)$$

Визначення моментів інерції твердих тіл способом вантажу, що падає, виконується в такій послідовності:

1) створюють механічну систему за схемою, зображеною на рис. 22.7, де 1 — гиря; 2 — тверде тіло, момент інерції якого належить визначити; 3 — тонкий дріт; 4 — горизонтальна площадка;

2) звільняючи гирю від в'язі (горизонтальної площадки), дають їй можливість опускатися, надаючи обертання тілу, момент інерції якого належить визначити;

3) за допомогою секундоміра шляхом спостереження визначають час падіння t_1 гирі з висоти h ;

4) за формулою (22.22) визначають шуканий момент інерції.

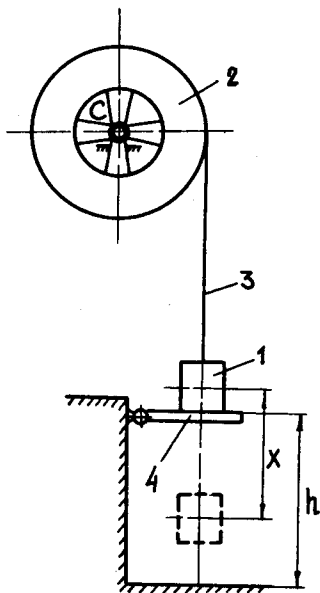


Рис. 22.7

22.5. Визначення реакцій опор нерухомої осі твердого тіла, що обертається навколо цієї осі

Як відомо, обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі можна розглядати як рух, за якого дві точки тіла, наприклад точки A і B (рис. 22.8), залишаються нерухомими.

Пряма, що проходить через ці нерухомі точки, є віссю обертання тіла.

В'язі, накладені на тіло в точках A і B , за аксіомою про звільнення від в'язей еквівалентні реакціям, прикладеним у цих точках. Позначимо їх відповідно через \vec{R}_A (\vec{X}_{1A} , \vec{Y}_{1A} , \vec{Z}_{1A}), \vec{R}_B (\vec{X}_{1B} і \vec{Y}_{1B}). Активні зовнішні сили, прикладені до тіла, позначимо через \vec{F}_1^e , \vec{F}_2^e , ..., \vec{F}_n^e .

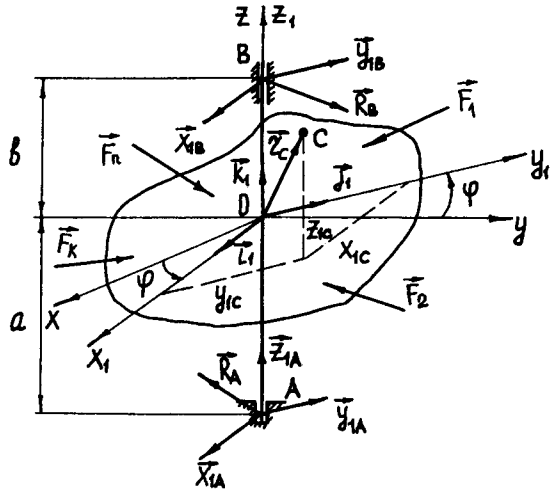


Рис. 22.8

Введемо дві системи координат з початком у довільній точці O , що лежить на осі обертання твердого тіла, нерухому систему координат $Oxyz$ і рухому систему координат $Ox_1y_1z_1$, що жорстко зв'язана з твердим тілом. Осі Oz і Oz_1 збігаються з віссю обертання AB тіла. Положення тіла відносно нерухомої системи координат будемо визначати кутом φ між площинами xOz і x_1Oz_1 . Для визначення реакцій у точках A і B твердого тіла застосуємо теореми про зміну кількості руху і моменту кількості руху механічної системи відносно точки O :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \vec{R}_A + \vec{R}_B + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e; \\ \frac{d\vec{K}_O}{dt} &= \vec{M}_O(\vec{R}_A) + \vec{M}_O(\vec{R}_B) + \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^e). \end{aligned} \tag{22.23}$$

Щоб здобути рівняння для визначення реакцій у точках A і B , необхідно векторні рівняння (22.23) записати в проекціях на осі координат.

Оскільки координати центра мас і моменти інерції тіла в рухомій системі координат при русі тіла залишаються сталими, то векторні рівняння (22.23) більш доцільно проєкціювати на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$.

Отже, визначаємо вектори \vec{Q} і \vec{K}_O у рухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$:

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= Q_{x_1} \bar{i}_1 + Q_{y_1} \bar{j}_1 + Q_{z_1} \bar{k}_1; \\ \bar{K}_O &= K_{x_1} \bar{i}_1 + K_{y_1} \bar{j}_1 + K_{z_1} \bar{k}_1.\end{aligned}\quad (22.23a)$$

Відповідно до формули (11.30) (див. розділ “Кінематика”, параграф 11.3) абсолютні похідні векторів \bar{Q} і \bar{K}_O такі:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{Q}}{dt} &= \frac{\tilde{d}\bar{Q}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{Q}; \\ \frac{d\bar{K}_O}{dt} &= \frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O.\end{aligned}\quad (22.23b)$$

Підставляючи рівності (22.23b) у рівняння (22.23), здобудемо

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{d}\bar{Q}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{Q} &= \bar{R}_A + \bar{R}_B + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e; \\ \frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O &= \bar{M}_O(\bar{R}_A) + \bar{M}_O(\bar{R}_B) + \sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{F}_k^e).\end{aligned}\quad (22.24)$$

Проекціюємо рівняння (22.24) на рухомі осі координат (рис. 22.8). Матимемо:

$$\left\{ \begin{aligned}\frac{dQ_{x_1}}{dt} + \omega_{y_1} Q_{z_1} - \omega_{z_1} Q_{y_1} &= X_{1A} + X_{1B} + \sum_{k=1}^n F_{kx_1}^e; \\ \frac{dQ_{y_1}}{dt} + \omega_{z_1} Q_{x_1} - \omega_{x_1} Q_{z_1} &= Y_{1A} + Y_{1B} + \sum_{k=1}^n F_{ky_1}^e; \\ \frac{dQ_{z_1}}{dt} + \omega_{x_1} Q_{y_1} - \omega_{y_1} Q_{x_1} &= Z_{1A} + \sum_{k=1}^n F_{kz_1}^e; \\ \frac{dK_x}{dt} + \omega_{y_1} K_{z_1} - \omega_{z_1} K_{y_1} &= Y_{1A} a - Y_{1B} b + \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k^e); \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_{z_1} K_{x_1} - \omega_{x_1} K_{z_1} &= -X_{1A} a + X_{1B} b + \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k^e); \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_{x_1} K_{y_1} - \omega_{y_1} K_{x_1} &= \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e),\end{aligned}\right.\quad (22.24a)$$

оскільки

$$\bar{\omega} \times \bar{Q} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ Q_{x_1} & Q_{y_1} & Q_{z_1} \end{vmatrix}; \quad \bar{\omega} \times \bar{K}_O = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ K_{x_1} & K_{y_1} & K_{z_1} \end{vmatrix};$$

$$\bar{M}_O(\bar{R}_A) = \bar{r}_A \times \bar{R}_A = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & -a \\ X_{1A} & Y_{1A} & Z_{1A} \end{vmatrix}; \quad \bar{M}_O(\bar{R}_B) = \bar{r}_B \times \bar{R}_B = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ 0 & 0 & b \\ X_{1B} & Y_{1B} & Z_{1B} \end{vmatrix}.$$

Визначимо проекції Q_{x_1} , Q_{y_1} , Q_{z_1} , K_{x_1} , K_{y_1} і K_{z_1} .

На підставі формули (19.7) маємо

$$\bar{Q} = M\bar{V}_C = M(\bar{\omega} \times \bar{r}_C),$$

де M — маса тіла; \bar{V}_C — вектор швидкості центра мас тіла; \bar{r}_C — радіус-вектор центра мас.

Проекції вектора \bar{Q} на рухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 22.8) визначимо за формулою

$$\bar{Q} = M(\bar{\omega} \times \bar{r}_C) = M \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_{1C} & y_{1C} & z_{1C} \end{vmatrix} =$$

$$= M(\omega_{y_1}z_{1C} - \omega_{z_1}y_{1C})\bar{i}_1 + M(\omega_{z_1}x_{1C} - \omega_{x_1}z_{1C})\bar{j}_1 + M(\omega_{x_1}y_{1C} - \omega_{y_1}x_{1C})\bar{k}_1,$$

звідки при $\omega_{x_1} = \omega_{y_1} = 0$; $\omega_{z_1} = \omega$ матимемо:

$$Q_{x_1} = -M\omega y_{1C}; \quad Q_{y_1} = M\omega x_{1C}; \quad Q_{z_1} = 0. \quad (22.246)$$

На підставі формули (19.20) маємо

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k.$$

Проекції вектора \bar{K}_O на рухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$ визначимо за формулою

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ x_{1k} & y_{1k} & z_{1k} \\ m_k \dot{x}_{1k} & m_k \dot{y}_{1k} & m_k \dot{z}_{1k} \end{vmatrix} = \left[\sum_{k=1}^n m_k (y_{1k} \dot{z}_{1k} - z_{1k} \dot{y}_{1k}) \right] \bar{i}_1 +$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^n m_k (z_{1k} \dot{x}_{1k} - x_{1k} \dot{z}_{1k}) \right] \bar{j}_1 + \left[\sum_{k=1}^n m_k (x_{1k} \dot{y}_{1k} - y_{1k} \dot{x}_{1k}) \right] \bar{k}_1.$$

Звідси випливає:

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= \sum_{k=1}^n m_k \left(y_{1k} \dot{z}_{1k} - z_{1k} \dot{y}_{1k} \right); \\ K_{y_1} &= \sum_{k=1}^n m_k \left(z_{1k} \dot{x}_{1k} - x_{1k} \dot{z}_{1k} \right); \\ K_{z_1} &= \sum_{k=1}^n m_k \left(x_{1k} \dot{y}_{1k} - y_{1k} \dot{x}_{1k} \right). \end{aligned} \quad (22.24\text{в})$$

Проекції швидкості k -ї точки тіла на рухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$ визначаємо за формулою

$$\begin{aligned} \vec{V}_k &= \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_{1k} & y_{1k} & z_{1k} \end{vmatrix} = \\ &= (\omega_{y_1} z_{1k} - \omega_{z_1} y_{1k}) \vec{i}_1 + (\omega_{z_1} x_{1k} - \omega_{x_1} z_{1k}) \vec{j}_1 + (\omega_{x_1} y_{1k} - \omega_{y_1} x_{1k}) \vec{k}_1. \end{aligned}$$

Звідси випливає:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1k} &= \omega_{y_1} z_{1k} - \omega_{z_1} y_{1k}; \\ \dot{y}_{1k} &= \omega_{z_1} x_{1k} - \omega_{x_1} z_{1k}; \\ \dot{z}_{1k} &= \omega_{x_1} y_{1k} - \omega_{y_1} x_{1k}. \end{aligned}$$

Підставляючи ці формули в першу рівність (22.24в), здобудемо:

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= \sum_{k=1}^n m_k \left[y_{1k} (\omega_{x_1} y_{1k} - \omega_{y_1} x_{1k}) - z_{1k} (\omega_{z_1} x_{1k} - \omega_{x_1} z_{1k}) \right] = \\ &= \omega_{x_1} \sum_{k=1}^n m_k y_{1k}^2 - \omega_{y_1} \sum_{k=1}^n m_k y_{1k} x_{1k} - \omega_{z_1} \sum_{k=1}^n m_k x_{1k} z_{1k} + \omega_{x_1} \sum_{k=1}^n m_k z_{1k}^2 = \\ &= \omega_{x_1} \sum_{k=1}^n m_k (y_{1k}^2 + z_{1k}^2) - \omega_{y_1} \sum_{k=1}^n m_k y_{1k} x_{1k} - \omega_{z_1} \sum_{k=1}^n m_k x_{1k} z_{1k}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги формули (18.3) і (18.9), останньому виразу надамо вигляду

$$K_{x_1} = J_{x_1} \omega_{x_1} - J_{x_1 y_1} \omega_{y_1} - J_{x_1 z_1} \omega_{z_1}.$$

Аналогічно збудемо вирази для K_{y_1} і K_{z_1} :

$$K_{y_1} = -J_{x_1 y_1} \omega_{x_1} + J_{y_1} \omega_{y_1} - J_{y_1 z_1} \omega_{z_1}; \quad K_{z_1} = -J_{x_1 z_1} \omega_{x_1} - J_{y_1 z_1} \omega_{y_1} + J_{z_1} \omega_{z_1}.$$

Оскільки $\omega_{x_1} = \omega_{y_1} = 0$; $\omega_{z_1} = \omega$, то проекції K_{x_1} , K_{y_1} і K_{z_1} набувають вигляду:

$$K_{x_1} = -J_{x_1 z_1} \omega_{z_1} = -J_{x_1 z_1} \omega;$$

$$K_{y_1} = -J_{y_1 z_1} \omega_{z_1} = -J_{y_1 z_1} \omega; \quad (22.25)$$

$$K_{z_1} = J_{z_1} \omega_{z_1} = J_{z_1} \omega.$$

Підставляючи рівності (22.246) і (22.25) в рівняння (22.24а) і беручи до уваги, що $\omega_{x_1} = \omega_{y_1} = 0$, $\omega_{z_1} = \omega$, $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, остаточно збудемо:

$$\left\{ \begin{array}{l} -M y_{1C} \varepsilon - M x_{1C} \omega^2 = X_{1A} + X_{1B} + \sum_{k=1}^n F_{kx_1}^e; \\ M x_{1C} \varepsilon - M y_{1C} \omega^2 = Y_{1A} + Y_{1B} + \sum_{k=1}^n F_{ky_1}^e; \\ 0 = Z_{1A} + \sum_{k=1}^n F_{kz_1}^e; \\ -J_{x_1 z_1} \varepsilon + J_{y_1 z_1} \omega^2 = Y_{1A} a - Y_{1B} b + \sum_{k=1}^n M_{x_1} (\bar{F}_k^e); \\ -J_{y_1 z_1} \varepsilon - J_{x_1 z_1} \omega^2 = -X_{1A} a + X_{1B} b + \sum_{k=1}^n M_{y_1} (\bar{F}_k^e); \\ J_z \varepsilon = \sum_{k=1}^n M_z (F_k^e). \end{array} \right. \quad (22.26)$$

Перші п'ять рівнянь системи (22.26) дають змогу визначити реакції в точках А і В. Останнє рівняння реакцій в'язей не містить і є диференціальним рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі (див. параграф 22.2).

Якщо тверде тіло, що має нерухому вісь обертання, буде нерухомим, то $\omega = 0$; $\varepsilon = 0$ і ліві частини першого, другого, третього і четвертого рівнянь систем (22.26) перетворюються в нуль:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = X_{1A}^{\text{ct}} + X_{1B}^{\text{ct}} + \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \\ 0 = Y_{1A}^{\text{ct}} + Y_{1B}^{\text{ct}} + \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \\ 0 = Y_{1A}^{\text{ct}} a - Y_{1B}^{\text{ct}} b + \sum_{k=1}^n M_{x_1} (\bar{F}_k^e); \\ 0 = X_{1A}^{\text{ct}} a + X_{1B}^{\text{ct}} b + \sum_{k=1}^n M_{y_1} (\bar{F}_k^e). \end{array} \right. \quad (22.26a)$$

Реакції X_{1A}^{ct} , X_{1B}^{ct} , Y_{1A}^{ct} і Y_{1B}^{ct} , що визначаються системою рівнянь (22.26a), називаються *статичними реакціями*. На відміну від статичних реакцій реакції X_{1A} , X_{1B} , Y_{1A} і Y_{1B} , що визначаються відповідними рівняннями системи (22.26), називаються *динамічними*. Динамічні реакції можуть істотно відрізнятися від статичних. Їх можна подати у вигляді суми статичних реакцій і реакцій X_{1A}^{a} , X_{1B}^{a} , Y_{1A}^{a} і Y_{1B}^{a} , які називаються *додатковими динамічними реакціями*, що зумовлено як характером розподілу мас у тілі, так і характером руху тіла:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{1A} = X_{1A}^{\text{ct}} + X_{1A}^{\text{a}}; \quad X_{1B} = X_{1B}^{\text{ct}} + X_{1B}^{\text{a}}; \\ Y_{1A} = Y_{1A}^{\text{ct}} + Y_{1A}^{\text{a}}; \quad Y_{1B} = Y_{1B}^{\text{ct}} + Y_{1B}^{\text{a}}. \end{array} \right. \quad (22.26b)$$

Враховуючи розглянуте, з відповідних рівнянь системи (22.26) можна здобути систему рівнянь для визначення додаткових динамічних реакцій:

$$\left\{ \begin{array}{l} -M y_{1C} \varepsilon - M x_{1C} \omega^2 = X_{1A}^{\text{a}} + X_{1B}^{\text{a}}; \\ M x_{1C} \varepsilon - M y_{1C} \omega^2 = Y_{1A}^{\text{a}} + Y_{1B}^{\text{a}}; \\ -J_{x_1 z_1} \varepsilon + J_{y_1 z_1} \omega^2 = Y_{1A}^{\text{a}} a - Y_{1A}^{\text{a}} b; \\ -J_{y_1 z_1} \varepsilon - J_{x_1 z_1} \omega^2 = -X_{1A}^{\text{a}} a + X_{1A}^{\text{a}} b. \end{array} \right. \quad (22.26b)$$

У техніці постає дуже важливе питання про умови, за яких обертання тіла не спричинює додаткового тиску на вісь, тобто про умови, за яких додаткові динамічні реакції дорівнюють нулю. Знайдемо ці умови. Для цього необхідно й достатньо, щоб праві частини рівнянь (22.26b) дорівнювали нулю:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1C} \omega^2 + y_{1C} \varepsilon = 0; \quad J_{y_1 z_1} \omega^2 - J_{x_1 z_1} \varepsilon = 0; \\ x_{1C} \varepsilon - y_{1C} \omega^2 = 0; \quad J_{y_1 z_1} \varepsilon + J_{x_1 z_1} \omega^2 = 0. \end{array} \right. \quad (22.27)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (22.27) відносно $x_{1C}, y_{1C}, J_{y_1 z_1}$ і $J_{z_1 x_1}$, збудемо умови динамічної зрівноваженості мас тіла при обертанні навколо нерухомої осі:

$$x_{1C} = 0; y_{1C} = 0; J_{y_1 z_1} = 0 \text{ і } J_{z_1 x_1} = 0. \quad (22.28)$$

Рівності (22.28) дають можливість зробити висновок, що при обертанні твердого тіла додатковий тиск на вісь обертання не виникає, тобто динамічні реакції дорівнюють статичним тоді і тільки тоді, коли вісь обертання є головною центральною віссю інерції. Для виконання цієї умови частинам машин, що обертаються, як правило, надають форми тіл обертання, щоб це тіло оберталося навколо своєї осі симетрії.

Розглянемо інше практично важливе положення у розв'язанні задачі динамічного зрівноважування мас. Нехай для твердого тіла масою M величини $x_{1C}, y_{1C}, J_{x_1 z_1}$ і $J_{y_1 z_1}$ відомі й не дорівнюють нулю. Додамо до тіла дві точкові маси m_1 і m_2 у точках, що мають координати x_{11}, y_{11}, z_{11} і x_{12}, y_{12}, z_{12} [перший індекс визначає осі системи координат $Ox_1 y_1 z_1$ (рис. 22.8), а другий — номер точкової маси]. Тоді з формул

$$x_{1C} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_{1k}}{M}; y_{1C} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_{1k}}{M};$$

$$J_{x_1 z_1} = \sum_{k=1}^n m_k x_{1k} z_{1k}; J_{y_1 z_1} = \sum_{k=1}^n m_k y_{1k} z_{1k}$$

впливає: якщо задовольнити рівності

$$Mx_{1C} + m_1 x_{11} + m_2 x_{12} = 0; My_{1C} + m_1 y_{11} + m_2 y_{12} = 0;$$

$$J_{x_1 z_1} + m_1 x_{11} z_{11} + m_2 x_{12} z_{12} = 0; J_{y_1 z_1} + m_1 y_{11} z_{11} + m_2 y_{12} z_{12} = 0, \quad (22.28a)$$

то вісь обертання тіла Oz стане головною центральною віссю інерції тіла. Добираючи маси m_1 і m_2 та їх положення так, щоб задовольнялися рівняння (22.28a), задачу зрівноважування мас буде розв'язано. При цьому частину величин, що належать до рівнянь (22.28a), необхідно задати наперед. Наприклад, можна задати значення y_{11}, y_{12} і z_{11}, z_{12} , а з рівнянь (22.28a) — визначити x_{11}, m_1, x_{12} і m_2 .

Такий метод зрівноважування мас застосовується в техніці для зрівноважування колінчастих валів, кривошипів і т. ін. При цьому остаточне балансування виконується на спеціальних стендах.

22.6. Плоскопаралельний рух твердого тіла. Диференціальні рівняння руху

Вільне тверде тіло буде здійснювати плоскопаралельний рух, якщо в ньому є плоский переріз, відносно якого маса тіла розподілена симетрично, сили, прикладені до тіла, розташовані в площині цього перерізу, а початкові швидкості всіх точок тіла розташовані в площинах, паралельних площині цього перерізу.

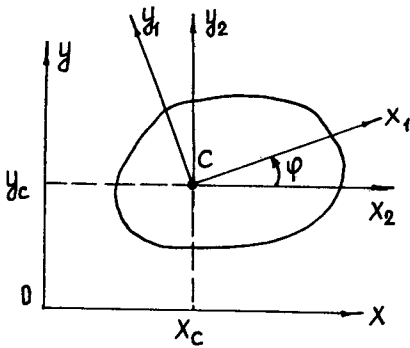


Рис. 22.9

З кінематики відомо, що плоскопаралельний рух твердого тіла можна розкласти на поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух відносно полюса. Якщо за полюс взяти центр мас твердого тіла, то положення твердого тіла відносно нерухомої (інерціальної) системи відліку буде визначатися координатами x_c, y_c центра мас і кутом повороту φ тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла (рис. 22.9).

Відповідно до теореми про рух центра мас механічної системи з рівнянь (19.18) збудуємо залежності, що зв'язують координати x_c, y_c

центра мас твердого тіла і проекції головного вектора всіх зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, на осі нерухомої системи відліку:

$$M \ddot{x}_c = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad M \ddot{y}_c = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e. \quad (22.29)$$

Для визначення залежності між кутом обертання твердого тіла φ і зовнішніми силами, що діють на тіло, необхідно застосувати теорему про зміну моменту кількості відносного руху механічної системи відносно центра мас C (19.29).

Оскільки відносно системи координат Cx_2y_2 (рис. 22.9) тверде тіло здійснює обертальний рух навколо осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до площини руху тіла, то момент кількості руху тіла відносно цієї осі відповідно до рівності (19.22) буде $K_C = J_C \dot{\varphi}$. Отже, на підставі рівняння (19.29) матимемо

$$J_C \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_C (\bar{F}_k^e), \quad (22.30)$$

де J_C — момент інерції твердого тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла; $\ddot{\varphi}$ — кутове прискорення твердого тіла при його обертанні відносно осі, що проходить через центр мас тіла; $\sum_{k=1}^n M_C (\bar{F}_k^e)$ — головний момент усіх зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, відносно центра мас тіла.

Таким чином, диференціальні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла мають вигляд

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad J_C \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_C (\bar{F}_k^e). \quad (22.31)$$

За допомогою рівнянь (22.31) можна за заданими зовнішніми силами визначити закон плоскопаралельного руху твердого тіла, тобто знайти x_C , y_C , φ як функції часу (друга задача динаміки) або, знаючи закон плоскопаралельного руху тіла, знайти головний вектор і головний момент сил, що прикладені до тіла (перша задача динаміки).

Якщо траєкторія руху центра мас відома, то доцільно застосовувати диференціальні рівняння руху центра мас у проєкціях на осі натурального тригранника (натуральні осі). У цьому випадку диференціальні рівняння (22.31) матимуть вигляд:

$$M = \frac{dV_C}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{k\tau}^e; \quad M \frac{V_C^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_{kn}^e; \quad J_C \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_C (\bar{F}_k^e). \quad (22.32)$$

22.7. Момент кількості руху (кінетичний момент) твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки відносно точки обертання

Розглянемо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої точки O (рис. 22.10). Позначимо радіус-вектор довільної точки A , що має масу m_k , через \bar{r}_k . Тоді за визначенням кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої точки O буде

$$\begin{aligned} \bar{K}_O &= \sum_{k=1}^n (\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n m_k (\bar{r}_k \times \bar{V}_k) = \sum_{k=1}^n [\bar{r}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k)]. \end{aligned} \quad (22.33)$$

Беручи до уваги що

$$\bar{r}_k \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_k) = \bar{\omega} (\bar{r}_k^2) - \bar{r}_k (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_k),$$

рівності (22.33) надамо вигляду

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^n m_k [\bar{\omega} (\bar{r}_k^2) - \bar{r}_k (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_k)]. \quad (22.34)$$

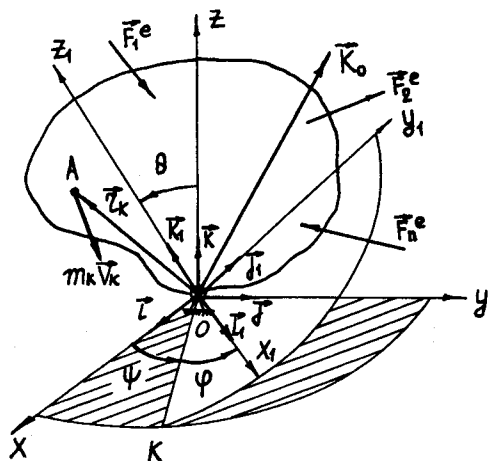


Рис. 22.10

Проекціюючи рівність на осі координат $Ox_1y_1z_1$, жорстко зв'язані з твердим тілом, здобудемо:

$$\begin{aligned}
 K_{x_1} &= \sum_{k=1}^n m_k \left[\omega_{x_1} (x_{1k}^2 + y_{1k}^2 + z_{1k}^2) - x_{1k} (\omega_{x_1} x_{1k} + \omega_{y_1} y_{1k} + \omega_{z_1} z_{1k}) \right] = \\
 &= \left[\omega_{x_1} \sum_{k=1}^n (y_{1k}^2 + z_{1k}^2) - \omega_{y_1} \sum_{k=1}^n m_k x_{1k} y_{1k} - \omega_{z_1} \sum_{k=1}^n m_k x_{1k} z_{1k} \right] = \\
 &= J_{x_1} \omega_{x_1} - J_{x_1 y_1} \omega_{y_1} - J_{x_1 z_1} \omega_{z_1}; \\
 K_{y_1} &= \sum_{k=1}^n m_k \left[\omega_{y_1} (x_{1k}^2 + y_{1k}^2 + z_{1k}^2) - y_{1k} (\omega_{x_1} x_{1k} + \omega_{y_1} y_{1k} + \omega_{z_1} z_{1k}) \right] = \\
 &= \left[\omega_{y_1} \sum_{k=1}^n (x_{1k}^2 + z_{1k}^2) - \omega_{x_1} \sum_{k=1}^n m_k x_{1k} y_{1k} - \omega_{z_1} \sum_{k=1}^n m_k y_{1k} z_{1k} \right] = \\
 &= -J_{x_1 y_1} \omega_{x_1} + J_{y_1} \omega_{y_1} - J_{y_1 z_1} \omega_{z_1}; \\
 K_{z_1} &= \sum_{k=1}^n m_k \left[\omega_{z_1} (x_{1k}^2 + y_{1k}^2 + z_{1k}^2) - z_{1k} (\omega_{x_1} x_{1k} + \omega_{y_1} y_{1k} + \omega_{z_1} z_{1k}) \right] = \\
 &= \left[\omega_{z_1} \sum_{k=1}^n (x_{1k}^2 + y_{1k}^2) - \omega_{x_1} \sum_{k=1}^n m_k z_{1k} y_{1k} - \omega_{y_1} \sum_{k=1}^n m_k y_{1k} z_{1k} \right] = \\
 &= -J_{z_1 x_1} \omega_{x_1} - J_{y_1 z_1} \omega_{y_1} + J_{z_1} \omega_{z_1}.
 \end{aligned}$$

Отже, проекції кінетичного моменту твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки відносно точки обертання, на осі декартової системи координат, що жорстко зв'язані з твердим тілом, визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}
 K_{x_1} &= J_{x_1} \omega_{x_1} - J_{x_1 y_1} \omega_{y_1} - J_{x_1 z_1} \omega_{z_1}; \\
 K_{y_1} &= -J_{x_1 y_1} \omega_{x_1} + J_{y_1} \omega_{y_1} - J_{y_1 z_1} \omega_{z_1}; \\
 K_{z_1} &= -J_{z_1 x_1} \omega_{x_1} - J_{y_1 z_1} \omega_{y_1} + J_{z_1} \omega_{z_1}.
 \end{aligned} \tag{22.35}$$

Якщо осі системи координат $Ox_1y_1z_1$ будуть головними осями інерції твердого тіла для нерухомої точки O , то $J_{x_1 y_1} = J_{y_1 z_1} = J_{z_1 x_1} = 0$ і формули (22.35) набирають вигляду:

$$K_{x_1} = J_{x_1} \omega_{x_1}; \quad K_{y_1} = J_{y_1} \omega_{y_1}; \quad K_{z_1} = J_{z_1} \omega_{z_1}. \tag{22.36}$$

На підставі рівностей (22.36) величина (модуль) кінетичного моменту \vec{K}_O

$$K_O = \sqrt{J_{x_1}^2 \omega_{x_1}^2 + J_{y_1}^2 \omega_{y_1}^2 + J_{z_1}^2 \omega_{z_1}^2}. \tag{22.37}$$

22.8. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки

Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, при відомому положенні миттєвої осі обертання визначається за формулою (19.38).

Розглянемо метод визначення кінетичної енергії твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки в загальному випадку.

На підставі формули (19.30) маємо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k \cdot \vec{V}_k. \quad (22.38)$$

Беручи до уваги формулу Ейлера $\vec{V}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$, рівність (22.38) запишемо так:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) \right] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k). \quad (22.39)$$

У рівності (22.39) $\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k = \vec{K}_O$, тому

$$T = \frac{1}{2} \vec{K}_O \cdot \vec{\omega}. \quad (22.39a)$$

Оскільки скалярний добуток $\vec{K}_O \cdot \vec{\omega}$ можна подати у вигляді

$$\vec{K}_O \cdot \vec{\omega} = K_{x_1} \omega_{x_1} + K_{y_1} \omega_{y_1} + K_{z_1} \omega_{z_1}, \quad (22.40)$$

де K_{x_1} , K_{y_1} , K_{z_1} , ω_{x_1} , ω_{y_1} і ω_{z_1} — проекції відповідно вектора кінетичного моменту \vec{K}_O і вектора миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ на осі координат $Ox_1y_1z_1$ (див. рис. 22.10), що жорстко зв'язані з тілом і мають початок у нерухомій точці O , то рівність (22.39) можна записати так:

$$T = \frac{1}{2} (K_{x_1} \omega_{x_1} + K_{y_1} \omega_{y_1} + K_{z_1} \omega_{z_1}),$$

або, враховуючи формули (22.35):

$$T = \frac{1}{2} (J_{x_1} \omega_{x_1}^2 + J_{y_1} \omega_{y_1}^2 + J_{z_1} \omega_{z_1}^2 - 2J_{x_1y_1} \omega_{x_1} \omega_{y_1} - 2J_{x_1z_1} \omega_{x_1} \omega_{z_1} - 2J_{y_1z_1} \omega_{y_1} \omega_{z_1}). \quad (22.41)$$

Якщо осі системи координат $Ox_1y_1z_1$ будуть головними осями інерції твердого тіла для точки O , то $J_{x_1y_1} = J_{y_1z_1} = J_{x_1z_1} = 0$ і вираз (22.41) значно спрощується:

$$T = \frac{1}{2} \left(J_{x_1} \omega_{x_1}^2 + J_{y_1} \omega_{y_1}^2 + J_{z_1} \omega_{z_1}^2 \right). \quad (22.42)$$

Для твердого тіла, маса якого розподілена так, що еліпсоїд інерції для нерухомої точки, відносно якої обертається тіло, буде еліпсоїдом обертання, $(J_{x_1} = J_{y_1})$, вираз (22.42) набирає вигляду

$$T = \frac{1}{2} \left[J_{x_1} (\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2) + J_{z_1} \omega_{z_1}^2 \right]. \quad (22.43)$$

22.9. Диференціальні рівняння руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки (динамічні рівняння Ейлера)

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої точки O (див. рис. 22.10). Щоб отримати рівняння руху тіла, застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}_k^e) = \bar{M}_O^e, \quad (22.44)$$

де \bar{K}_O — кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої точки O тіла; \bar{M}_O^e — головний момент усіх зовнішніх сил, прикладених до тіла відносно точки O .

Будемо вважати, що вектор \bar{K}_O визначений в рухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$. Тоді відповідно до формули (11.30) (див. розділ “Кінематика”, параграф 11.3) абсолютна похідна від вектора \bar{K}_O буде

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O.$$

Таким чином, рівняння (22.44) набирає вигляду

$$\frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{K}_O) = \bar{M}_O^e. \quad (22.45)$$

Якщо взяти за рухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$ головні осі інерції тіла для нерухомої точки O , то векторний добуток $\bar{\omega} \times \bar{K}_O$ буде визначатися так:

$$\bar{\omega} \times \bar{K}_O = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ J_{x_1} \omega_{x_1} & J_{y_1} \omega_{y_1} & J_{z_1} \omega_{z_1} \end{vmatrix} = (\omega_{y_1} J_{z_1} \omega_{z_1} - \omega_{z_1} J_{y_1} \omega_{y_1}) \bar{i}_1 +$$

$$+ \left(\omega_{z_1} J_{x_1} \omega_{x_1} - \omega_{x_1} J_{z_1} \omega_{z_1} \right) \bar{j}_1 + \left(\omega_{x_1} J_{y_1} \omega_{y_1} - \omega_{y_1} J_{x_1} \omega_{x_1} \right) \bar{k}_1. \quad (22.46)$$

Беручи до уваги рівності (22.36) та вираз (22.46) і проєкціюючи рівняння (22.45) на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$, здобудемо:

$$\begin{aligned} J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= \sum_{k=1}^n M_{x_1} (\bar{F}_{kx_1}^e); \\ J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{z_1} \omega_{x_1} &= \sum_{k=1}^n M_{y_1} (\bar{F}_{ky_1}^e); \\ J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{x_1} \omega_{y_1} &= \sum_{k=1}^n M_{z_1} (\bar{F}_{kz_1}^e). \end{aligned} \quad (22.47)$$

Рівняння (22.47) називають *динамічними рівняннями Ейлера*.

Додаючи до рівнянь (22.47) кінематичні рівняння Ейлера (див. розділ “Кінематика”, параграф 12.12):

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (22.48)$$

які встановлюють зв'язок між ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{z_1} і кутами Ейлера φ , ψ , θ , матимемо систему шести нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку відносно невідомих функцій часу ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{z_1} , φ , ψ і θ . Інтегрування цієї системи становить складну математичну задачу. Достатньо зауважити, що навіть окремий випадок руху твердого тіла навколо нерухомої точки під дією тільки однієї сили тяжіння не може бути розв'язаним у загальному вигляді.

Відомі три окремих випадки, коли інтегрування рівнянь (22.47) і (22.48) може бути доведено до квадратур за будь-яких початкових умов руху. Це випадки Ейлера — Пуансо¹, Лагранжа — Пуассона² і Ковалевської³.

¹ Луї Пуансо (1777—1859) — французький інженер, механік і математик, член Паризької (1813) і почесний член Петербурзької (1826) академії наук.

² Сімеон Дені Пуассон (1781—1840) — французький механік, фізик і математик, член Паризької (1812) і почесний член Петербурзької (1826) академії наук.

³ Софія Василівна Ковалевська (1850—1891) — російський математик, член-кореспондент Петербурзької академії наук (1889).

22.10. Динамічні рівняння руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки і перебуває тільки під дією сили тяжіння

Розглянемо рух твердого тіла навколо нерухомої точки O (рис. 22.11). Нехай на тіло діє тільки сила тяжіння \vec{P} , що прикладена в точці C (центр мас тіла), координати якої в рухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$, жорстко зв'язаної з тілом, дорівнюють відповідно x_{1c} , y_{1c} , z_{1c} .

Проекції сили \vec{P} на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$ визначаються за формулами

$$P_{x_1} = -Pa_{13}; \quad P_{y_1} = -Pa_{23}; \quad P_{z_1} = -Pa_{33}, \quad (22.49)$$

де a_{13} , a_{23} , a_{33} — косинуси кутів (напрявлені косинуси) між вертикальною нерухомою віссю Oz і рухомими осями Ox_1 , Oy_1 , Oz_1 .

Напрявлені косинуси a_{13} , a_{23} , a_{33} становлять (див. розділ "Кінематика", параграф 12.11):

$$\cos(\widehat{z, x_1}) = a_{13} = \sin \varphi \sin \theta;$$

$$\cos(\widehat{z, y_1}) = a_{23} = \cos \varphi \sin \theta; \quad (22.50)$$

$$\cos(\widehat{z, z_1}) = a_{33} = \cos \theta,$$

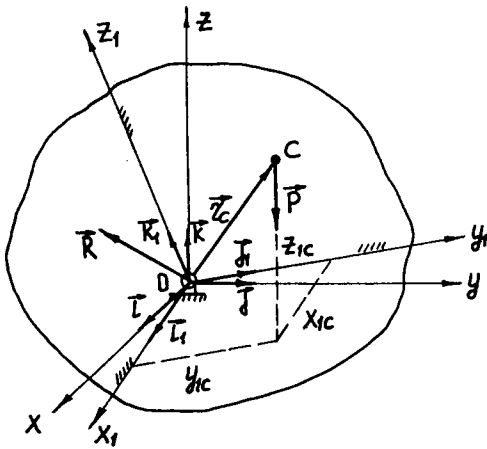


Рис. 22.11

де φ , θ — кути Ейлера (рис. 22.10).

Момент сили \vec{P} відносно нерухомої точки O (рис. 22.11)

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{P}) &= \vec{r}_c \times \vec{P} = \vec{r}_c \times (-P\vec{k}) = -P\vec{r}_c \times \vec{k} = -P \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ x_{1c} & y_{1c} & z_{1c} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= P(z_{1c}a_{23} - y_{1c}a_{33})\vec{i}_1 + P(x_{1c}a_{33} - z_{1c}a_{13})\vec{j}_1 + P(y_{1c}a_{13} - x_{1c}a_{23})\vec{k}_1, \quad (22.51) \end{aligned}$$

де \vec{r}_c — радіус-вектор центра мас твердого тіла в рухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$; \vec{k} — одиничний вектор нерухомої осі z .

Отже, з виразу (22.51) випливає, що

$$\begin{aligned}
 M_x(\bar{P}) &= P(z_{1C}a_{23} - y_{1C}a_{33}); \\
 M_y(\bar{P}) &= P(x_{1C}a_{33} - z_{1C}a_{13}); \\
 M_z(\bar{P}) &= P(y_{1C}a_{13} - x_{1C}a_{23}).
 \end{aligned}
 \tag{22.52}$$

Формули (22.52) визначають проекції моменту сили \bar{P} відносно точки O на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$.

Підставляючи рівності (22.52) у рівняння (22.47), здобудемо:

$$\begin{aligned}
 J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= P(z_{1C}a_{23} - y_{1C}a_{33}); \\
 J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{z_1} \omega_{x_1} &= P(x_{1C}a_{33} - z_{1C}a_{13}); \\
 J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{x_1} \omega_{y_1} &= P(y_{1C}a_{13} - x_{1C}a_{23}).
 \end{aligned}
 \tag{22.53}$$

Рівняння (22.53) — це динамічні рівняння руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, перебуваючи під дією тільки сили тяжіння.

22.11. Кінематичні рівняння Пуассона

Рівняння (22.53) містять шість невідомих функцій: ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{z_1} , a_{13} , a_{23} , a_{33} . Тому для визначення цих невідомих необхідно до рівнянь (22.53) додати ще три рівняння, що встановлюють зв'язок між ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{z_1} , a_{13} , a_{23} , a_{33} . Ці три рівняння можна отримати таким чином. Розглянемо одиничний вектор \bar{k} нерухомої осі координат Oz (див. рис. 22.11). У нерухомій системі координат $Oxyz$ цей вектор не змінюється ні за величиною, ні за модулем. У рухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$ він змінює положення відносно осей координат Ox_1 , Oy_1 і Oz_1 . На підставі формули (11.30) (див. розділ “Кінематика”, параграф 11.3) абсолютна похідна вектора \bar{k} становить:

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{k}}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{k}) = 0
 \tag{22.54}$$

як похідна від сталого вектора.

З формули (22.54) випливає:

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{d}\bar{k}}{dt} = -\bar{\omega} \times \bar{k} &= - \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = (\omega_{z_1} a_{23} - \omega_{y_1} a_{33}) \bar{i}_1 + \\
 &+ (\omega_{x_1} a_{33} - \omega_{z_1} a_{13}) \bar{j}_1 + (\omega_{y_1} a_{13} - \omega_{x_1} a_{23}) \bar{k}_1.
 \end{aligned}
 \tag{22.55}$$

Беручи до уваги вираз (22.55) і проєкціюючи векторне рівняння (22.54) на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$, здобудемо рівняння Пуассона:

$$\begin{aligned}\frac{da_{13}}{dt} &= \omega_{x_1} a_{23} - \omega_{y_1} a_{33}; \\ \frac{da_{23}}{dt} &= \omega_{x_1} a_{33} - \omega_{z_1} a_{13}; \\ \frac{da_{33}}{dt} &= \omega_{y_1} a_{13} - \omega_{x_1} a_{23}.\end{aligned}\tag{22.56}$$

22.12. Інтегрування диференціальних рівнянь руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки

Система рівнянь (22.53) і (22.56) є системою шести звичайних нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку, що має шість невідомих функцій: ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{z_1} , a_{13} , a_{23} , a_{33} ; осьові моменти інерції і координати центра мас є відомими величинами. Якщо ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{z_1} , a_{13} , a_{23} і a_{33} знайдені шляхом інтегрування системи рівнянь (22.53) і (22.56), то для остаточного розв'язання задачі, тобто для визначення функцій $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ і $\theta = \theta(t)$, необхідно підставити ці значення в рівняння (22.48) і проінтегрувати їх.

На підставі теорії інтегрування диференціальних рівнянь доведено, що для розв'язання задачі про рух твердого тіла навколо нерухомої точки необхідно мати чотири перших інтеграла. З рівнянь Ейлера — Пуассона безпосередньо можна знайти три перших інтеграла. Ці три інтеграла називаються *класичними*. Розглянемо їх.

1. *Перший класичний інтеграл* — інтеграл кінетичного моменту відносно нерухомої вертикальної осі Oz (див. рис. 22.11). Він впливає безпосередньо з теореми про кінетичний момент відносно осі:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e).\tag{22.57}$$

Оскільки під час руху тіла сила \bar{P} залишається паралельною осі Oz , а сила реакції \bar{R} у нерухомій точці O перетинає вісь Oz , то $\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) = 0$ і з рівняння (22.57) випливає, що $K_z = \text{const}$.

Проекція K_z визначається за формулою

$$\begin{aligned}
 K_z &= K_{x_1} \cos(\widehat{z, x_1}) + K_{y_1} \cos(\widehat{z, y_1}) + K_{z_1} \cos(\widehat{z, z_1}) = \\
 &= J_{x_1} \omega_{x_1} a_{13} + J_{y_1} \omega_{y_1} a_{23} + J_{z_1} \omega_{z_1} a_{33},
 \end{aligned}
 \tag{22.58}$$

де враховані формули (22.36) і (22.50).

Отже, перший класичний інтеграл має вигляд

$$J_{x_1} \omega_{x_1} a_{13} + J_{y_1} \omega_{y_1} a_{23} + J_{z_1} \omega_{z_1} a_{33} = K_z = \text{const.} \tag{22.59}$$

2. Другим класичним інтегралом є інтеграл енергії. Якщо знехтувати тертям в опори тіла, то цей інтеграл можна подати у вигляді

$$T + \Pi = \text{const}, \tag{22.60}$$

де T (кінетична енергія) на підставі формули (22.42)

$$T = \frac{1}{2} (J_{x_1} \omega_{x_1}^2 + J_{y_1} \omega_{y_1}^2 + J_{z_1} \omega_{z_1}^2).$$

Потенціальна енергія Π визначається за формулою

$$\Pi = Pz_c = P(x_{1c} a_{13} + y_{1c} a_{23} + z_{1c} a_{33}), \tag{22.61}$$

де z_c — координата центра мас твердого тіла в системі координат $Oxyz$; $(x_{1c} a_{13} + y_{1c} a_{23} + z_{1c} a_{33})$ — проекція вектора \vec{r}_c на нерухому вісь Oz (див. рис. 22.11).

Підставляючи значення T і Π у рівність (22.60), матимемо другий класичний інтеграл:

$$\frac{1}{2} (J_{x_1} \omega_{x_1}^2 + J_{y_1} \omega_{y_1}^2 + J_{z_1} \omega_{z_1}^2) + P(x_{1c} a_{13} + y_{1c} a_{23} + z_{1c} a_{33}) = h = \text{const.} \tag{22.62}$$

3. Третій класичний інтеграл відображає відоме з аналітичної геометрії співвідношення для напрямлених косинусів:

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1. \tag{22.63}$$

Залишається знайти ще один інтеграл — у цьому і є головна складність задачі. Знайти четвертий інтеграл вдалося тільки при трьох окремих припущеннях відносно тіла, що рухається, і умов його руху. Ці окремі випадки розглядаються в наступних параграфах.

22.13. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки (випадок Ейлера — Пуансо)

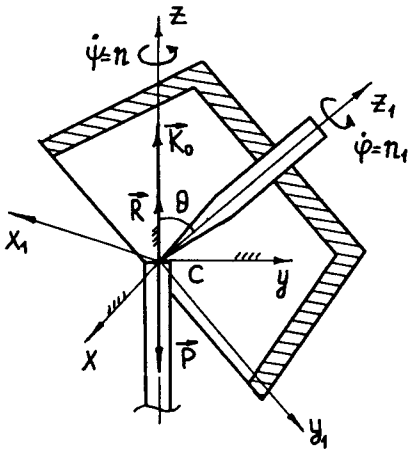


Рис. 22.12

Випадок Ейлера — Пуансо — це випадок руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки по інерції, тобто коли лінія дії рівнодійної зовнішніх сил проходить через нерухому точку O (рис. 22.12). При цьому положення центра мас тіла C збігається з нерухомою точкою O . Інших зовнішніх сил, окрім сили тяжіння \vec{P} , немає. Сила тяжіння зрівноважується реакцією опори O . Моменти інерції тіла відносно власних осей J_{x_1} , J_{y_1} , J_{z_1} можуть бути будь-якими, тобто саме тверде тіло може мати будь-яку форму.

Четвертий інтеграл при цьому випадку руху твердого тіла знаходять з умови, що момент зовнішніх сил дорівнює нулю: $\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{0}$, звідки $M_{x_1}(\vec{P}) = M_{y_1}(\vec{P}) = M_{z_1}(\vec{P}) = 0$ і динамічні рівняння Ейлера (22.47) набирають вигляду:

$$\begin{aligned} J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= 0; \\ J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{z_1} \omega_{x_1} &= 0; \\ J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{x_1} \omega_{y_1} &= 0. \end{aligned} \quad (22.64)$$

До цих рівнянь необхідно додати ще кінематичні рівняння Ейлера (22.48):

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (22.65)$$

Рівняння (22.64) і (22.65) утворюють систему шести диференціальних рівнянь відносно функцій ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{z_1} , φ , θ , ψ і мають таку властивість: їх

можна інтегрувати незалежно, тобто з початку проінтегрувати рівняння (22.64), а потім — рівняння (22.65).

Рівняння (22.64) мають два перших інтеграли. Інтеграл енергії здобудемо на підставі теореми про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі:

$$dT = \sum_{k=1}^n d'A^e = 0, \quad (22.66)$$

оскільки робота сил \vec{P} і \vec{R} (рис. 22.12) дорівнює нулю (точки прикладання цих сил нерухомі) і тертям у нерухомій точці O нехтуємо.

Підставляючи в рівність (22.66) значення кінетичної енергії за формулою (22.42) та інтегруючи отриманий вираз, здобудемо

$$T = \frac{1}{2} (J_{x_1} \omega_{x_1}^2 + J_{y_1} \omega_{y_1}^2 + J_{z_1} \omega_{z_1}^2) = \text{const}. \quad (22.67)$$

Другий інтеграл — інтеграл кінетичних моментів — здобудемо на підставі теореми про зміну кінетичного моменту:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{0}, \quad (22.68)$$

де \vec{K}_O — кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої точки O .

З рівності (22.68) випливає, що

$$\vec{K}_O = \text{const}. \quad (22.69)$$

Рівність (22.69) включає в себе два інтеграли: класичний інтеграл збереження проекції кінетичного моменту на нерухому вертикальну вісь Oz ($K_z = \text{const}$) та інтеграл збереження величини (модуля) кінетичного моменту (четвертий інтеграл). На підставі формул (22.37) і (22.69) матимемо

$$J_{x_1}^2 \omega_{x_1}^2 + J_{y_1}^2 \omega_{y_1}^2 + J_{z_1}^2 \omega_{z_1}^2 = K_O^2 = \text{const}. \quad (22.70)$$

Із рівностей (22.69) і (22.70) можна зробити дуже важливий висновок: у випадку руху твердого тіла, що розглядається, проекція миттєвої кутової швидкості тіла на лінію дії вектора кінетичного моменту тіла відносно нерухомої точки залишається сталою величиною. Дійсно, на підставі рівності (22.39) матимемо

$$T = \frac{1}{2} \vec{K}_O \cdot \vec{\omega}.$$

Беручи до уваги рівність (22.69), перетворимо цей вираз так:

$$T = \frac{1}{2} |\vec{K}_O| |\vec{\omega}| \cos \alpha = \text{const},$$

де α — кут між векторами \vec{K}_O і $\vec{\omega}$.

З останнього виразу при $|\vec{K}_O| = \text{const}$ випливає, що

$$|\vec{\omega}| \cos \alpha = \text{const}. \quad (22.71)$$

Інтегрування рівнянь (22.64) і (22.65), як правило, проводиться для трьох окремих випадків різними способами залежно від вигляду еліпсоїда інерції відносно нерухомої точки O : а) еліпсоїд інерції — куля; б) еліпсоїд інерції — тривісний еліпсоїд; в) еліпсоїд інерції — еліпсоїд обертання.

У перших двох випадках рівняння (22.64) і (22.65) в елементарних функціях не інтегруються, тому в цьому підручнику не розглядаються.

Розглянемо останній випадок, коли еліпсоїд інерції відносно нерухомої точки O — це еліпсоїд обертання, якщо $J_{x_1} = J_{y_1} \neq J_{z_1}$ і вісь Oz_1 тіла є віссю динамічної симетрії. У цьому випадку рівняння Ейлера (22.64) набирають вигляду:

$$\begin{aligned} J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= 0; \\ J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{z_1} \omega_{x_1} &= 0; \\ J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (22.72)$$

До двох перших інтегралів (22.67) і (22.70) додамо третій, який отримуємо з третього рівняння системи (22.72).

Отже, для визначення проекції миттєвої кутової швидкості на осі рухомої системи координат $Ox_1y_1z_1$, що жорстко зв'язана з твердим тілом, маємо три рівняння:

$$\begin{aligned} J_{x_1} (\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2) + J_{z_1} \omega_{z_1}^2 &= \text{const}; \\ J_{x_1}^2 (\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2) + J_{z_1} \omega_{z_1}^2 &= K_O^2 = \text{const}; \\ \omega_{z_1} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (22.73)$$

З другого рівняння системи (22.73) випливає, що величина (модуль) кінетичного моменту $|\vec{K}_O|$ стала; але вектор \vec{K}_O на підставі формули (22.69) має і сталий напрям відносно нерухомої системи координат $Oxuz$. Щоб довести

інтегрування до кінця, тобто для визначення кутів Ейлера φ , ψ , θ як функцій часу t , беремо до уваги незмінність напрямку вектора \vec{K}_O .

Для простоти напрямляємо вектор \vec{K}_O вздовж нерухомої осі Oz (див. рис. 22.12). Тоді проекції кінетичного моменту на рухомі осі координат $Ox_1y_1z_1$ на підставі виразів (22.50) будуть такими:

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= K_O a_{13} = K_O \sin \varphi \sin \theta; \\ K_{y_1} &= K_O a_{23} = K_O \cos \varphi \sin \theta; \\ K_{z_1} &= K_O a_{33} = K_O \cos \theta. \end{aligned} \quad (22.74)$$

З іншого боку, на підставі рівностей (22.36) маємо:

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= J_{x_1} \omega_{x_1}; \\ K_{y_1} &= J_{y_1} \omega_{y_1}; \\ K_{z_1} &= J_{z_1} \omega_{z_1}. \end{aligned} \quad (22.75)$$

Порівнюючи вирази (22.74) і (22.75), матимемо:

$$\begin{aligned} J_{x_1} \omega_{x_1} &= K_O \cos \varphi \sin \theta; \\ J_{y_1} \omega_{y_1} &= K_O \cos \varphi \sin \theta; \\ J_{z_1} \omega_{z_1} &= K_O \cos \theta. \end{aligned} \quad (22.76)$$

З останнього рівняння системи (22.76) здобудемо

$$\cos \theta = \frac{J_{z_1} \omega_{z_1}}{K_O}. \quad (22.77)$$

Оскільки J_{z_1} , ω_{z_1} і K_O — сталі, то кут $\theta = \theta_0 = \text{const}$.

Кінематичні рівняння Ейлера (22.48) при $\theta = \theta_0 = \text{const}$ набирають вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x_1} &= \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi; \\ \dot{\omega}_{y_1} &= \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi; \\ \dot{\omega}_{z_1} &= \dot{\psi} \cos \theta_0 + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (22.78)$$

З перших двох рівнянь системи (22.76) при $J_{x_1} = J_{y_1}$ і $\theta = \theta_0 = \text{const}$ з урахуванням рівностей (22.78) здобудемо:

$$K_O \sin \theta_0 \sin \varphi = J_{x_1} \dot{\psi} \sin \theta_0 \sin \varphi;$$

$$K_O \sin \theta_0 \cos \varphi = J_{x_1} \dot{\psi} \sin \theta_0 \cos \varphi,$$

звідки

$$K_O = J_{x_1} \dot{\psi}$$

і

$$\dot{\psi} = \frac{K_O}{J_{x_1}} = n = \text{const.} \quad (22.79)$$

Інтегруючи вираз (22.79), матимемо

$$\psi = nt + \psi_0,$$

де ψ_0 — значення кута ψ у момент часу $t = 0$.

З третього рівняння системи (22.78) знаходимо

$$\dot{\varphi} = \omega_{x_1} - n \cos \theta_0 = n_1 = \text{const.} \quad (22.80)$$

Інтегруючи цей вираз, здобудемо

$$\varphi = n_1 t + \varphi_0,$$

де φ_0 — значення кута φ у момент часу $t = 0$.

Отже, розв'язок диференціальних рівнянь руху твердого тіла має вигляд:

$$\theta = \theta_0;$$

$$\psi = nt + \psi_0; \quad (22.81)$$

$$\varphi = n_1 t + \varphi_0.$$

Сталі θ_0 , ψ_0 , φ_0 , n і n_1 у рівняннях (22.81) зв'язані між собою співвідношенням (22.80).

Рух, що описується рівняннями (22.81), називається *регулярною прецесією*. При цьому русі вісь симетрії тіла Oz_1 описує круговий конус з кутом при вершині, що дорівнює $2\theta_0$ (див. рис. 22.12). При цьому вона обертається навколо сталого за напрямом вектора кінетичного моменту твердого тіла \vec{K}_O відносно нерухомої точки O з кутовою швидкістю $\dot{\psi} = n = \text{const.}$ Одночасно саме тіло рівномірно обертається навколо осі симетрії Oz_1 з кутовою швидкістю $\dot{\varphi} = n_1 = \text{const.}$

22.14. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки (випадок Лагранжа — Пуассона)

Якщо еліпсоїд інерції, побудований для нерухомої точки O твердого тіла, що обертається навколо цієї точки, є еліпсоїдом обертання, тобто $J_{x_1} = J_{y_1} \neq J_{z_1}$, а центр ваги тіла C лежить на осі динамічної симетрії (осі обертання еліпсоїда інерції), тобто $x_{1c} = y_{1c} = 0$, $z_{1c} \neq 0$, то такий випадок руху твердого тіла називається *випадком Лагранжа — Пуассона* (рис. 22.13).

У випадку Лагранжа — Пуассона динамічні рівняння Ейлера (22.53) набирають вигляду:

$$J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} = Pz_{1c} a_{23};$$

$$J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{z_1} \omega_{x_1} = -Pz_{1c} a_{13}; \quad (22.82)$$

$$J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} = 0.$$

З останнього рівняння системи (22.82) одержуємо четвертий інтеграл:

$$\omega_{z_1} = \omega_{z_{10}} = \text{const.} \quad (22.83)$$

Додаємо до рівнянь (22.82) кінематичні рівняння Ейлера (22.48):

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (22.84)$$

Аналізуючи отриману систему рівнянь (22.82) і (22.84), помічаємо, що рівняння системи не поділяються на три незалежних одна від одної трійки рівнянь.

Приєднаємо до четвертого інтеграла (22.83) три класичних. Перший інтеграл на підставі рівняння (22.63) має вигляд

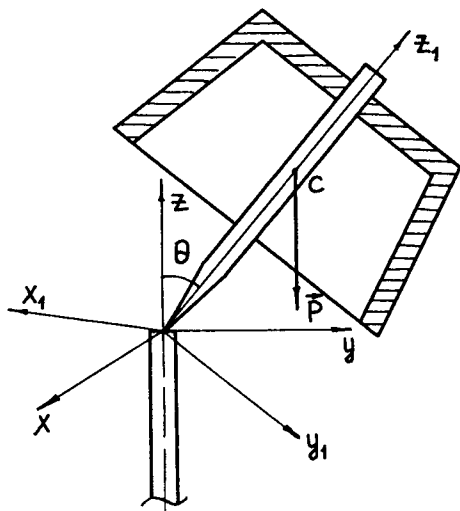


Рис. 22.13

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1. \quad (22.85)$$

Другий інтеграл — інтеграл енергії (22.62) — має вигляд

$$J_{x_1} (\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2) + J_{z_1} \omega_{z_1} = h - 2Pz_{1C} a_{33}. \quad (22.86)$$

Третій інтеграл — інтеграл кінетичного моменту (22.59) — має вигляд

$$J_{x_1} (\omega_{x_1} a_{13} + \omega_{y_1} a_{23}) + J_{z_1} \omega_{z_1} a_{33} = K_z = \text{const}. \quad (22.87)$$

Введемо в інтегралах (22.86) і (22.87) кути Ейлера. Для цього піднесемо обидві частини перших двох рівнянь системи (22.84) до квадрата і складемо їх почленно:

$$\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2. \quad (22.88)$$

Якщо сталу величину $J_{z_1} \omega_{z_1}$ в рівнянні (22.86) об'єднати з h і враховуючи, що $a_{33} = \cos \theta$, інтегралу (22.86) можна надати вигляду

$$J_{x_1} (\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2) + 2Pz_{1C} \cos \theta = h - J_{z_1} \omega_{z_1}^2.$$

Підставляючи в цей вираз рівність (22.88), остаточно здобудемо

$$\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 + A \cos \theta = B, \quad (22.89)$$

$$\text{де } A = \frac{2Pz_{1C}}{J_{x_1}}; \quad B = \frac{h - J_{z_1} \omega_{z_1}^2}{J_x}.$$

Аналогічно перетворимо й інтеграл (22.87). Перші два рівняння системи (22.84) помножимо на a_{13} та a_{23} і потім складемо їх почленно:

$$\omega_{x_1} a_{13} + \omega_{y_1} a_{23} = \dot{\psi} \sin^2 \theta. \quad (22.90)$$

Підставляючи рівність (22.90) у вираз (22.87), матимемо

$$J_{x_1} \dot{\psi} \sin^2 \theta + J_{z_1} \omega_{z_1} \cos \theta = K_z,$$

або

$$\dot{\psi} \sin^2 \theta + C \omega_{z_1} \cos \theta = D, \quad (22.91)$$

$$\text{де } C = \frac{J_{z_1}}{J_{x_1}}; \quad D = \frac{K_z}{J_{x_1}}.$$

До інтегралів (22.89) і (22.91) додаємо новий інтеграл, який впливає з останнього рівняння системи (22.84):

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = \omega_{z_0} = \text{const.} \quad (22.92)$$

Зауважимо, що сталі h , K_z і ω_{z_0} в рівностях (22.89), (22.91) і (22.92) визначаються за початковими умовами руху твердого тіла.

Для визначення залежності кутів Ейлера φ , ψ і θ від часу t необхідно інтегрувати систему трьох рівнянь (22.89), (22.91) і (22.92). Для цього введемо нову змінну $S = \cos \theta$. Диференціюємо цю рівність за часом:

$$-\sin \theta \cdot \dot{\theta} = \dot{S}, \text{ звідки } \dot{\theta} = -\frac{\dot{S}}{\sin \theta}.$$

Беручи до уваги отримані залежності, з рівнянь (22.91) і (22.92) знайдемо:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{D - C\omega_{z_0} S}{1 - S^2}; \\ \dot{\varphi} = \omega_0 - S \left(\frac{D - C\omega_{z_0} S}{1 - S^2} \right). \end{cases} \quad (22.93)$$

Підставляючи рівності (22.93) в рівняння (22.89), здобудемо диференціальне рівняння відносно функції $S(t)$:

$$\left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = (B - AS)(1 - S^2) - (D - C\omega_{z_0} S)^2 = f(S). \quad (22.94)$$

Інтегруючи вираз (22.94), дістанемо

$$\int \frac{dS}{\sqrt{f(S)}} = t + C_1, \quad (22.95)$$

де C_1 — стала інтегрування.

З виразу (22.95) впливає, що t виражається через S еліптичним інтегралом і, таким чином, S буде еліптичною функцією t . Знаючи $S(t)$, можна визначити $\theta(t)$.

Застосовуючи рівняння системи (22.93), можна визначити ψ і φ як функції часу. Отже, задача інтегрування диференціальних рівнянь (22.82) і (22.84) зводиться до квадратур.

Не здійснюючи інтегрування (інтегрування еліптичних функції виходить за рамки цього курсу), з'ясуємо характер руху твердого тіла, враховуючи властивості функції $f(S)$.

Рівняння $f(S) = 0$ є кубічним рівнянням, тому воно має три дійсних корені. Оскільки t має бути дійсним, а величина $S = \cos \theta$ визначається в границях $(-1$ і $+1)$, то на підставі виразу (22.95) має бути таке початкове значення $S = S_0$, яке відшукується між -1 та $+1$ і за якого $f(S) > 0$.

Проаналізуємо праву частину рівняння (22.94). Коли S прямує до $(-\infty)$, функція $f(S)$ також прямує до $(-\infty)$, оскільки член рівняння з найвищим степенем AS^3 має додатний коефіцієнт A . Коли $S = 1$ або $S = -1$, функція $f(S)$ має від'ємне значення. При $S = S_0$ функція $f(S)$ має бути додатною. Якщо S прямує до $(+\infty)$, величина $f(S)$ також прямує до $(+\infty)$.

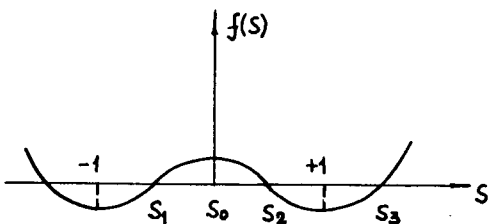


Рис. 22.14

Таким чином, усі три корені S_1, S_2, S_3 багаточлена $f(S) = 0$ дійсні і розташовуються в інтервалах $(-1, S_0)$, $(S_0, +1)$, $(+1, \infty)$. Графік функції $f(S)$ зображено на рис. 22.14. З нього видно: щоб функція $f(S)$ не була від'ємною, величина S має змінюватися між S_1 і S_2 , тобто згідно з рівнянням (22.95) у цьому інтервалі будемо мати для часу t дійсні значення.

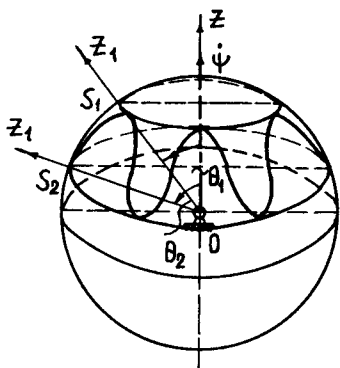


Рис. 22.15

З погляду геометрії руху твердого тіла у випадку Лагранжа — Пуассона одержані результати математичного дослідження можна подати таким чином. Побудуємо сферу довільного радіуса, центр якої збігається з нерухомою точкою твердого тіла (рис. 22.15). Під час руху тіла його власна вісь обертання Oz_1 буде перетинати поверхню сфери і точка перетину буде утворювати на цій поверхні паралелі. Положення власної осі обертання тіла Oz_1 відносно нерухомої осі Oz буде визначатися в границях від $\theta_1 = \arccos S_1$ до $\theta_2 = \arccos S_2$.

Таким чином, під час руху твердого тіла геометрична вісь обертання еліпсоїда інерції цього тіла для точки O або її продовження завжди перетинають уявну сферу між паралелями $\cos \theta_1 = S_1$ і $\cos \theta_2 = S_2$ і виходити за ці паралелі не можуть. Траєкторія руху точки перетину геометричної осі обертання еліпсоїда інерції зі сферою по поверхні сфери між паралелями різноманітна. Вигляд цієї траєкторії залежить від характеру прецесійного руху, тобто від умов швидкості прецесії ψ .

22.15. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки (випадок Ковалевської)

Випадок Ковалевської — це випадок руху твердого тіла відносно нерухомої точки, за якого еліпсоїд інерції для нерухомої точки являє собою витягнений еліпсоїд обертання, причому між головними моментами інерції існує співвідношення $J_{x_1} = J_{y_1} = 2J_{z_1}$, а центр мас тіла розташований в екваторіальній площині еліпсоїда інерції: $y_{1c} = z_{1c} = 0, x_{1c} \neq 0$ (рис. 22.16).

Динамічні рівняння Ейлера в цьому випадку твердого тіла мають вигляд:

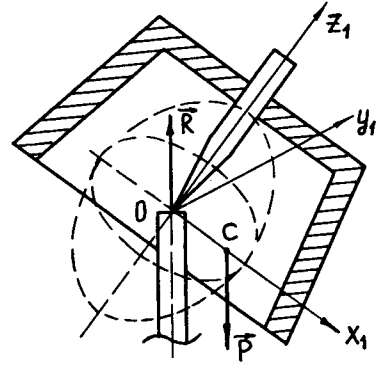


Рис. 22.16

$$\begin{aligned}
 2J_{z_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} - J_{z_1} \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= 0; \\
 2J_{z_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + J_{z_1} \omega_{x_1} \omega_{z_1} &= Px_{1c} a_{33}; \\
 J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} &= -Px_{1c} a_{23}.
 \end{aligned}
 \tag{22.96}$$

Поділивши обидві частини рівнянь (22.96) на J_{z_1} і позначивши сталою величину $\frac{Px_{1c}}{J_{z_1}} = n$, дістанемо:

$$\begin{aligned}
 2 \frac{d\omega_{x_1}}{dt} - \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= 0; \\
 2 \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + \omega_{x_1} \omega_{z_1} &= na_{33}; \\
 2 \frac{d\omega_{z_1}}{dt} &= -na_{23}.
 \end{aligned}
 \tag{22.97}$$

До системи рівнянь (22.97) приєднуємо систему рівнянь (22.56) і одержуємо систему шести звичайних диференціальних рівнянь першого порядку відносно функції часу t $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$.

Трьома першими інтегралами системи рівнянь (22.97) і (22.56) будуть інтеграли (22.59), (22.62) і (22.63).

Пропускаючи математичні викладки, подамо четвертий інтеграл Ковалевської:

$$\left(\omega_{x_1}^2 - \omega_{y_1}^2 - na_{13}\right)^2 + \left(2\omega_{x_1}\omega_{y_1} - na_{23}\right)^2 = \text{const.} \quad (22.98)$$

Подальше інтегрування рівнянь (22.59), (22.62), (22.63) і (22.98) зводиться до квадратур гіпереліптичного типу і в цьому підручнику не розглядається.

На закінчення зауважимо, що численними дослідженнями доведено існування тільки трьох розглянутих вище випадків руху твердого тіла навколо нерухомої точки, при яких за довільних початкових умов існує четвертий інтеграл.

Разом з тим є випадки, для яких існують частинні інтеграли, тобто інтеграли, що мають місце тільки за деяких, специфічно обраних початкових умов.

22.16. Диференціальне рівняння руху вільного твердого тіла

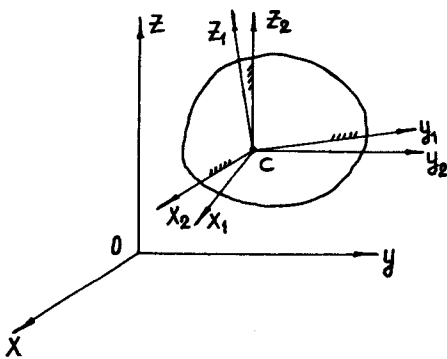


Рис. 22.17

Позначимо через $Oxyz$ інерціальну систему відліку, а через $Cx_2y_2z_2$ — систему координат, початок якої розташований у центрі мас вільного твердого тіла C . Осі системи $Cx_2y_2z_2$ паралельні осям системи $Oxyz$. Рухому систему координат, тобто систему, жорстко зв'язану з твердим тілом, що рухається, позначимо через $Cx_1y_1z_1$. Осі системи $Cx_1y_1z_1$ збігаються з головними осями інерції в точці C (рис. 22.17).

Як відомо з кінематики, вільний рух твердого тіла складається з поступального руху тіла разом з полюсом (за полюс беруть центр мас C тіла) й із руху тіла навколо центра мас як навколо нерухомої точки. Якщо на тіло діють зовнішні сили $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e, \dots, \vec{F}_n^e$, то диференціальні рівняння руху центра мас C твердого тіла відносно інерціальної системи відліку на підставі теореми про рух центра мас матимуть такий вигляд:

$$M \ddot{x}_C = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e; \quad M \ddot{y}_C = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e; \quad M \ddot{z}_C = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e, \quad (22.99)$$

де M — маса твердого тіла; $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C, \ddot{z}_C$ — відповідно проекції вектора прискорення центра мас на нерухомі осі координат; $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \sum_{k=1}^n F_{kz}^e$ — відповідно проекції зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, на нерухомі осі координат. Рух твердого тіла навколо центра мас C як навколо нерухомої точки буде визначатися рухом осей $Cx_1y_1z_1$ відносно системи $Cx_2y_2z_2$, який буде відомим, якщо будуть відомі кути Ейлера φ, ψ, θ як функції часу.

Оскільки теорема про зміну кінетичного моменту системи відносно центра мас C подібна до аналогічної теореми про зміну кінетичного моменту відносно нерухомої точки, то для руху твердого тіла відносно центра мас матимемо ті самі динамічні рівняння Ейлера, що і для тіла з нерухомою точкою:

$$\begin{aligned} J_{x_1} \frac{d\omega_{x_1}}{dt} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{y_1} \omega_{z_1} &= \sum_{k=1}^n M_{x_1} (\bar{F}_k^e); \\ J_{y_1} \frac{d\omega_{y_1}}{dt} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{z_1} \omega_{x_1} &= \sum_{k=1}^n M_{y_1} (\bar{F}_k^e); \\ J_{z_1} \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{x_1} \omega_{y_1} &= \sum_{k=1}^n M_{z_1} (\bar{F}_k^e). \end{aligned} \quad (22.100)$$

Системи рівнянь (22.99) і (22.100) являють собою систему шести диференціальних рівнянь руху для вільного твердого тіла. Оскільки невідомими є три абсолютні координати центра мас x_C, y_C, z_C і три кути Ейлера φ, ψ, θ , то до системи рівнянь (22.99) і (22.100) необхідно приєднати ще кінематичні рівняння Ейлера (22.48):

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (22.101)$$

Якщо проекції головного моменту зовнішніх сил $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \sum_{k=1}^n F_{kz}^e$ не залежать від кутів Ейлера, а проекції головного моменту $\sum_{k=1}^n M_{x_1} (\bar{F}_k^e), \sum_{k=1}^n M_{y_1} (\bar{F}_k^e), \sum_{k=1}^n M_{z_1} (\bar{F}_k^e)$ не залежать від координат центра мас, то в цьому ви-

падку рівняння (22.99) і (22.100) можна інтегрувати незалежно одне від одного; координати x_c, y_c, z_c будуть функціями часу і шести довільних сталих, а φ, ψ, θ — функціями часу і шести інших (незалежних від перших) довільних сталих.

У більш складних випадках руху, наприклад у випадку руху тіла в середовищі, що чинить опір, головний момент \vec{M}_C^e буде залежати від координат x_c, y_c, z_c , а сила опору, що діє на тіло, — від положення тіла, тобто кутів Ейлера φ, ψ, θ . У цьому випадку руху рівняння (22.99) і (22.100) утворюють сумісну систему. У загальному випадку інтегрування системи рівнянь (22.99), (22.100) інтеграли матимуть 12 довільних сталих інтегрування.

Розглянемо кілька прикладів.

1. Нехай, наприклад, тверде тіло здійснює рух, за якого $\vec{R}_C^e = \vec{0}$ і $\vec{M}_C^e = \vec{0}$. Тоді з рівнянь (22.99) і (22.100) випливає, що центр мас тіла буде рухатися рівномірно і прямолінійно, а рух тіла навколо центра мас буде таким, як у випадку Ейлера — Пуансо (див. параграф 22.13). Цей рух вільного твердого тіла можна назвати рухом тіла за інерцією в загальному випадку.

2. Припустимо, що тверде тіло рухається в однорідному полі тяжіння за відсутності сил опору. Тоді на тіло діятиме тільки одна сила — сила тяжіння \vec{P} , що прикладена в центрі мас тіла і має напрям уздовж вертикалі вниз. Якщо вісь Oz буде напрямлена вертикально вгору, то рівняння (22.99) набиратимуть вигляду:

$$\ddot{x}_c = 0, \quad \ddot{y}_c = 0, \quad \ddot{z}_c = -g,$$

звідки випливає, що за довільних початкових умов руху твердого тіла центр мас тіла буде рухатися по параболі. Рух тіла навколо центра мас, оскільки $\vec{M}_C^e = \vec{0}$, буде таким, як у випадку Ейлера — Пуансо.

22.17. Методика розв'язання задач динаміки твердого тіла.

Приклади розв'язання задач і типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю

Розв'язання задач динаміки твердого тіла у випадку, коли тіло здійснює поступальний рух, належить здійснювати відповідно до методики, розглянутої в динаміці матеріальної точки (див. параграф 16.7), оскільки при поступальному русі всі точки тіла мають у певний момент однакові швидкості і прискорення, тому поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом центра мас тіла.

У випадку, коли поступальний рух твердого тіла відбувається під дією сталих сил або сил, що залежать тільки від часу, а до числа даних і шуканих величин належать діючі сили, час руху тіла, початкова і кінцева швидкість тіла, то для розв'язання цих задач доцільно застосувати теорему про зміну кількості руху матеріальної точки.

Якщо сили, прикладені до твердого тіла, сталі або залежать тільки від переміщення тіла, а до числа даних і шуканих величин належать діючі сили, переміщення тіла, швидкості на початку і в кінці руху, то для розв'язання цих задач доцільно застосувати теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.

Застосовуючи обидві теореми, можна розв'язати задачі, в яких даними або шуканими величинами є і час руху тіла, і його переміщення.

Приклад 22.1. Для переміщення контейнерів з готовою продукцією до складу готової продукції на харчових заводах застосовують різні типи конвеєрного транспорту. Схему одного з них подано на рис. 22.18.

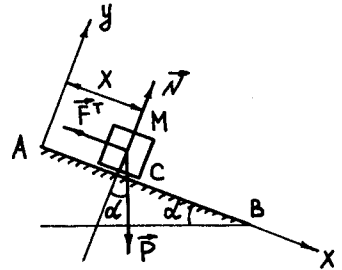


Рис. 22.18

Контейнер, що має масу 80 кг, рухається від точки А до точки В по конвеєру, який розташований під кутом $\alpha = 10^\circ$ до горизонту. Коефіцієнт тертя при русі контейнера $f = 0,15$. Початкова швидкість руху контейнера дорівнює нулю. Визначити, через який час швидкість контейнера буде дорівнювати 5 м/с і який шлях за цей час пройде контейнер.

Розв'язання. Зображуємо контейнер на рис. 22.18 у довільному положенні в системі відліку Ax_1y_1 .

Записуємо початкові умови руху контейнера: $t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0$.

Прикладаємо до контейнера в центрі його мас активну силу — силу ваги \vec{P} . Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, умовно відкинемо в'язь (шорстка поверхня) і її вплив на контейнер замінимо двома реакціями: \vec{N} (нормальна реакція) і \vec{F}^{τ} (сила тертя).

Для визначення часу руху контейнера до моменту набуття їм швидкості 5 м/с застосуємо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі (теорему імпульсів) у проекції на вісь x :

$$m \dot{x} - m \dot{x}_0 = S_x,$$

де $\dot{x}_0 = 0; S_x = \sum_{k=1}^n \int_0^t F_{kx} dt.$

Маємо $\frac{P}{g} \dot{x} = \int_0^t (P \sin \alpha - P \cos \alpha \cdot f) dt,$

або

$$\frac{P}{g} \dot{x} = P(\sin \alpha - \cos \alpha \cdot f)t,$$

звідки

$$t = \frac{\dot{x}}{g(\sin \alpha - \cos \alpha \cdot f)} = \frac{5}{9,81(0,174 - 0,985 \cdot 0,25)} = 19,2 \text{ с.}$$

Щоб визначити, який шлях пройде контейнер за час t , застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі:

$$\frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{m \dot{x}_0^2}{2} = A,$$

де $\dot{x}_0 = 0$; $A = \sum_{k=1}^n \int_0^x F_{kx} dx$.

$$\text{Маємо } \frac{P \dot{x}^2}{2g} = \int_0^x P(\sin \alpha - \cos \alpha \cdot f) dx,$$

або

$$\frac{\dot{x}^2}{2g} = (\sin \alpha - \cos \alpha \cdot f)x,$$

звідки

$$x = \frac{\dot{x}^2}{2g(\sin \alpha - \cos \alpha \cdot f)} = \frac{5^2}{2 \cdot 9,81(0,174 - 0,985 \cdot 0,15)} = 48,5 \text{ м.}$$

За допомогою диференціального рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі можна розв'язувати як прямі, так і обернені задачі динаміки. У прямих задачах за даним моментом інерції твердого тіла відносно осі обертання і законом обертання твердого тіла $\varphi = \varphi(t)$ визначають головний момент зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, відносно осі обертання. В обернених задачах за заданими моментами зовнішніх сил відносно осі обертання, моментом інерції, а також за початковими умовами руху визначають рівняння обертання твердого тіла, тобто $\varphi = \varphi(t)$.

Схема розв'язання задач динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі така:

1) вибрати осі координат і задати напрям однієї з них (осі z) уздовж осі обертання твердого тіла;

2) визначити всі зовнішні сили, прикладені до твердого тіла (в тому числі і сили реакцій в'язей), і зобразити їх на розрахунковій схемі;

3) обчислити суму моментів усіх зовнішніх сил відносно осі обертання;

4) скласти диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі;

5) розв'язати пряму або обернену задачу залежно від умови;

6) дослідити розв'язок, щоб визначити область його застосування.

Приклад 22.2. Визначити, з якою кутовою швидкістю опускається стопорна планка автомата накопичувача коробок з макаронами при їх пакуванні в ящики, якщо маса планки дорівнює m , центр мас планки розташований на відстані h від шарніра, навколо якого обертається планка. Момент інерції планки відносно осі обертання дорівнює J . При русі планки на неї крім сили ваги діє ще момент сил опору $M_{\text{он}} = \alpha \dot{\varphi}^2$, де $\alpha = \text{const}$ (рис. 22.19).

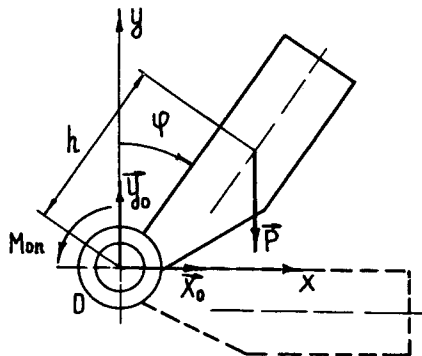


Рис. 22.19

Розв'язання. Побудуємо систему координат $Oxyz$ так, щоб вісь Oz , перпендикулярна до площини рисунка, збігалася з віссю обертання планки. До планки прикладені зовнішня сила \vec{P} і зовнішній момент сил опору $M_{\text{он}}$. Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей, умовно відкинемо в'язь (шарнірно-нерухома опора) і її вплив на планку замінимо двома реакціями \vec{X}_0 і \vec{Y}_0 .

Для визначення кутової швидкості, з якою опускається планка від вертикального положення до горизонтального, застосуємо диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла:

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e).$$

Визначаємо алгебричну суму моментів усіх зовнішніх сил, що діють на планку:

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k^e) = Ph \sin \varphi - \alpha \dot{\varphi}^2.$$

Тоді диференціальне рівняння руху набирає вигляду

$$J_z \ddot{\varphi} = Ph \sin \varphi - \alpha \dot{\varphi}^2.$$

Оскільки

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi} d \dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}^2}{2d\varphi}, \quad J_z = J,$$

то останнє рівняння набирає вигляду

$$\frac{J d \dot{\varphi}^2}{2d\varphi} = Ph \sin \varphi - \alpha \dot{\varphi}^2,$$

або

$$\frac{d \dot{\varphi}^2}{d\varphi} + 2 \frac{\alpha}{J} \dot{\varphi}^2 = \frac{2Ph}{J} \sin \varphi. \quad (1)$$

Рівняння (1) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку відносно $\dot{\varphi}^2$.

Загальний розв'язок рівняння (1) складається із загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку рівняння (1):

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{d \dot{\varphi}^2}{d\varphi} + 2 \frac{\alpha}{J} \dot{\varphi}^2 = 0$$

має вигляд

$$\dot{\varphi}_1^2 = C e^{-\frac{2\alpha\varphi}{J}}. \quad (2)$$

Частинний розв'язок рівняння (2) будемо шукати у вигляді

$$\dot{\varphi}_2^2 = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad (3)$$

де A і B — невизначені коефіцієнти. Для їх визначення підставимо вираз (3) у диференціальне рівняння (1):

$$(-A \sin \varphi + B \cos \varphi) + 2 \frac{\alpha}{J} (A \cos \varphi + B \sin \varphi) = \frac{2Ph}{J} \sin \varphi,$$

або

$$-A \sin \varphi + B \cos \varphi + 2A \frac{\alpha}{J} \cos \varphi + 2B \frac{\alpha}{J} \sin \varphi = \frac{2Ph}{J} \sin \varphi.$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\sin \varphi$ і $\cos \varphi$, дістанемо:

$$\begin{cases} -A + 2B \frac{\alpha}{J} = \frac{2Ph}{J}; \\ B + 2A \frac{\alpha}{J} = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, здобудемо:

$$A = -\frac{2PhJ}{J^2 + 4\alpha^2}; \quad B = \frac{4Ph\alpha}{(J^2 + 4\alpha^2)}.$$

Отже, частинний розв'язок (3) набирає вигляду

$$\ddot{\varphi}_2 = -\frac{2PhJ}{J^2 + 4\alpha^2} \cos \varphi + \frac{4Ph\alpha}{J^2 + 4\alpha^2} \sin \varphi. \quad (4)$$

Складаючи розв'язки (3) і (4), здобудемо загальний розв'язок диференціального рівняння руху планки:

$$\ddot{\varphi}^2 = C e^{-\frac{2\alpha\varphi}{J}} - \frac{2PhJ}{J^2 + 4\alpha^2} \cos \varphi + \frac{4Ph\alpha}{J^2 + 4\alpha^2} \sin \varphi. \quad (5)$$

Визначаємо сталу інтегрування. В початковий момент часу $t = 0$; $\dot{\varphi}^2(0) = 0$; $\varphi(0) = 0$. Тоді з рівняння (5) знаходимо

$$C = \frac{2PhJ}{J^2 + 4\alpha^2}.$$

Підставляючи значення C у рівняння (5), отримуємо залежність $\dot{\varphi}^2$ від кута φ , тобто

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2PhJ}{J^2 + 4\alpha^2} \left(e^{-\frac{2\alpha\varphi}{J}} + \cos \varphi \right) + \frac{4Ph\alpha}{J^2 + 4\alpha^2} \sin \varphi.$$

В останній момент руху планки, тобто при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, здобудемо

$$\dot{\varphi} = \omega = \sqrt{\frac{2mghJ}{J^2 + 4\alpha^2} \left(e^{-\frac{\alpha\pi}{J}} + 2\frac{\alpha}{J} \right)}.$$

Приклад 22.3. Для визначення моменту тертя в підшипниках A і B вала, на який насаджений маховик, що має масу $m = 100$ кг і радіус інерції $i = 0,15$ м

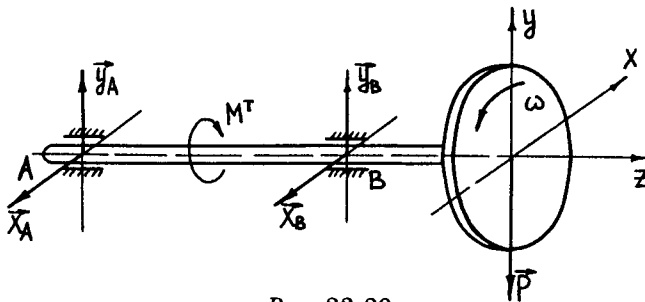


Рис. 22.20

(рис. 22.20), маховику надають обертання з кутовою швидкістю $n = 300$ об/хв. Маховик зупиняється через 5 хв. Визначити момент тертя в підшипниках, вважаючи його сталою величиною. Вагою вала знехтувати.

Розв'язання. Розглядаємо рух вала з маховиком. Зовнішніми силами, прикладеними до вала з маховиком, є: сила ваги маховика \bar{P} ;

реакції підшипників A і B та момент сили тертя у підшипниках M^T . Напрямо вісь z уздовж осі вала і запишемо диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі z :

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e).$$

Визначимо головний момент зовнішніх сил відносно осі z :

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) = -M^T.$$

Оскільки сили \bar{P} , \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{X}_B і \bar{Y}_B перетинають вісь z , то моменти цих сил відносно осі z дорівнюють нулю.

Підставляємо значення головного моменту у диференціальне рівняння:

$$J_z \ddot{\varphi} = -M^T.$$

Оскільки

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt},$$

то останнє рівняння набирає вигляду

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = -M^T.$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи, дістанемо

$$J_z \omega = -M^T t + C.$$

Сталу інтегрування визначимо з початкових умов руху: $t = 0$; $\omega(0) = \omega_0$.

Тоді $C = J_z \omega_0$.

Беручи до уваги значення C , матимемо

$$J_z (\omega - \omega_0) = -M^r t,$$

звідки

$$M^r = \frac{J_z (\omega - \omega_0)}{t} = \frac{m \rho^2 \pi n}{30t} = \frac{100 \cdot 0,15^2 \cdot 3,14 \cdot 300}{30 \cdot 300} = 0,23 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

де $\omega = 0$; $\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$.

Приклад 22.4. Для визначення коефіцієнта в'язкості рідини спостерігають коливання диска, підвішеного на пружному дроті в рідині (рис. 22.21). До диска прикладений зовнішній момент $M_0 \sin pt$ ($M_0 = \text{const}$), за якого спостерігається явище резонансу. Момент опору руху диска $M_{\text{оп}} = \alpha S \omega$, де α — коефіцієнт в'язкості рідини; S — сума площ верхньої і нижньої основ диска; ω — кутова швидкість диска. Визначити коефіцієнт α в'язкості рідини, якщо амплітуда змушених коливань диска при резонансі дорівнює φ_0 .

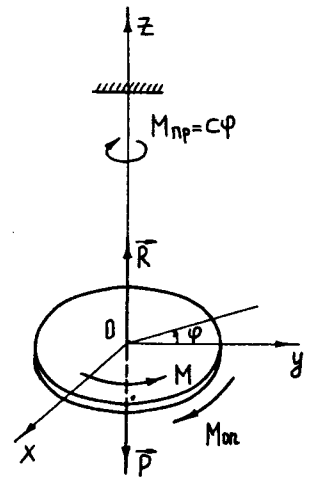


Рис. 22.21

Розв'язання. Розглядаємо рух диска. Осі координат вибрано так, що вісь Oz збігається з віссю обертання диска. Зовнішні сили, прикладені до диска, такі: вага диска \bar{P} , реакція дроту \bar{R} , момент пружних сил $M_{\text{пр}} = -c\varphi$, момент зовнішніх сил $M = M_0 \sin pt$, момент сил опору $M_{\text{оп}} = \alpha S \omega$. Диференціальне рівняння має вигляд

$$J_z \ddot{\varphi} = M_0 \sin pt - \alpha S \dot{\varphi} - c\varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + 2h \dot{\varphi} + k^2 \varphi = H \sin pt, \tag{1}$$

де $2h = \frac{\alpha S}{J_z}$; $k^2 = \frac{c}{J_z}$; $H = \frac{M_0}{J_z}$.

Рівняння (1) — диференціальне рівняння змушених крутильних коливань.

Загальний розв'язок рівняння (1) складається із загального розв'язку однорідного рівняння $\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$ і частинного розв'язку рівняння (1):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Розв'язок φ_1 визначає згасаючі коливання, а розв'язок φ_2 — виключно змушені. Оскільки в задачі задана амплітуда змушених коливань, то визначаємо φ_2 .

Розв'язок φ_2 будемо шукати у вигляді

$$\varphi_2 = A \sin pt + B \cos pt.$$

Диференціюємо двічі цей вираз за часом:

$$\dot{\varphi}_2 = Ap \cos pt - Bp \sin pt;$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt.$$

Значення $\ddot{\varphi}$, $\dot{\varphi}$ і φ підставляємо в рівняння (1):

$$-Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt + 2hAp \cos pt - 2hBp \sin pt + k^2 A \sin pt + k^2 B \cos pt = H \sin pt.$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\sin pt$ і $\cos pt$, здобудемо:

$$-Ap^2 - 2hBp + k^2 A = H;$$

$$-Bp^2 + 2hAp + k^2 B = 0,$$

звідки знаходимо:

$$A = \frac{(k^2 - p^2)H}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}; \quad B = -\frac{2hpH}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}.$$

Отже, розв'язок φ_2 набирає вигляду

$$\varphi_2 = \frac{(k^2 - p^2)H}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \sin pt - \frac{2hpH}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \cos pt.$$

Введемо нові сталі:

$$A = \frac{(k^2 - p^2)H}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} = a \cos \gamma;$$

$$B = -\frac{2hpH}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} = a \sin \gamma.$$

Тоді розв'язок φ_2 набирає вигляду

$$\varphi_2 = a \sin(pt + \gamma),$$

де a — амплітуда змущених коливань диска.

З рівнянь $A = a \cos \gamma$; $B = a \sin \gamma$ визначаємо амплітуду змущених коливань диска:

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Підставляючи в цей вираз значення A і B , здобудемо

$$a = \frac{H}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}}. \quad (2)$$

Оскільки за умовою задачі $a = \varphi_0$, $k = p$, а $h = \frac{\alpha S}{2J_z}$, то з рівності (2) мати-

мемо

$$\varphi_0 = \frac{H}{\sqrt{4h^2 p^2}} = \frac{H}{2hp} = \frac{M_0}{\alpha S p},$$

звідки визначаємо коефіцієнт в'язкості рідини:

$$\alpha = \frac{M_0}{\varphi_0 S p}.$$

Приклад 22.5. Для визначення моменту інерції J_z тіла A відносно вертикальної осі Oz його прикріпили до пружного вертикального стрижня OO_1 . Повернувши тіло A навколо осі Oz на малий кут φ_0 , цей стрижень закрутили і пустили коливатися. За допомогою секундоміра заміряли тривалість одного розмаху (півперіод) — T_A ; коливання були гармонічні, оскільки момент сил пружності стрижня пропорційний куту закручування і становить: $M_{\text{пр}} = -c\varphi$ (рис. 22.22).

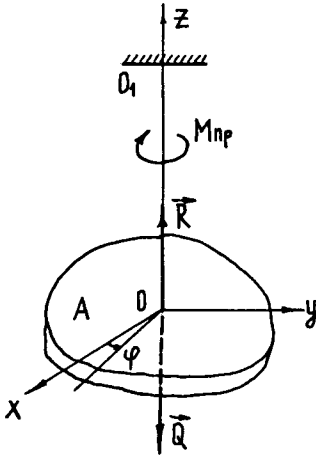


Рис. 22.22

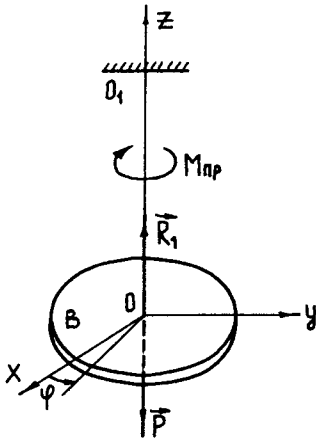


Рис. 22.23

Оскільки коефіцієнт c невідомий, то щоб його визначити, на той самий стрижень у точці O насадили однорідний круглий диск радіусом r і вагою P . При цьому тривалість одного розмаху дорівнювала T_B (півперіод) (рис. 22.23).

Розв'язання. Осі координат мають такий напрям, що вісь Oz проходить уздовж стрижня OO_1 , який збігається з віссю обертання тіл A і B (рис. 22.22 і рис. 22.23). Зовнішніми силами, прикладеними до твердих тіл A і B , є: сили ваги \bar{Q} і \bar{P} , реакції стрижня \bar{R} і \bar{R}_1 , момент пружних сил $M_{\text{пр}} = -c\varphi$.

Складемо диференціальні рівняння руху тіл A і B :

$$J_{z_A} \ddot{\varphi} = -c\varphi; \quad J_{z_B} \ddot{\varphi} = -c\varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + k_A^2 \varphi = 0; \quad \ddot{\varphi} + k_B^2 \varphi = 0,$$

$$\text{де } k_A^2 = \frac{c}{J_{z_A}}; \quad k_B^2 = \frac{c}{J_{z_B}}.$$

Обчислимо півперіод гармонічних коливань відповідно тіл A і B :

$$T_A = \frac{\pi}{k_A} = \pi \sqrt{\frac{J_{z_A}}{c}}; \quad T_B = \frac{\pi}{k_B} = \sqrt{\frac{J_{z_B}}{c}}.$$

Щоб виключити невідому величину c , поділимо першу рівність на другу. Дістанемо:

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{J_{z_A}}{J_{z_B}}},$$

або

$$J_{z_A} = J_{z_B} \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^2.$$

Оскільки J_{z_B} — центральний момент інерції тіла B (диска) відносно його осі обертання, то

$$J_{z_B} = \frac{P}{2g} r^2.$$

Остаточню

$$J_{z_A} = \frac{P}{2g} r^2 \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^2.$$

Задачі, в яких необхідно визначити динамічні реакції опор твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, розв'язуються за допомогою рівнянь (22.26).

Схема розв'язання задач за допомогою рівнянь (22.26) така:

- 1) обрати рухомі осі координат x_1, y_1, z_1 , зв'язані з твердим тілом, що обертається. При цьому вісь z_1 має збігатися з віссю обертання тіла. Початок координат рухомої системи зручно обирати або в центрі мас тіла (якщо центр мас тіла лежить на осі обертання), або в точці перетину перпендикуляра, побудованого з центра мас тіла, й осі обертання тіла, або в одній з опор твердого тіла;
- 2) прикласти до твердого тіла всі активні сили;
- 3) визначити координати центра мас C твердого тіла x_{1C} і y_{1C} ;
- 4) визначити відцентрові моменти інерції твердого тіла $J_{z_1x_1}$ і $J_{y_1z_1}$;
- 5) скласти рівняння (22.26);
- 6) розв'язавши систему рівнянь (22.26), визначити шукані величини.

Приклад 22.6. Однорідний круглий диск, що має масу m і радіус r , обертається зі сталою кутовою швидкістю ω . Вісь обертання z_1 проходить через центр мас C диска і утворює з віссю симетрії диска z кут α (рис. 22.24).

Визначити динамічні реакції опор осі z_1 , якщо відстань між опорами $AB = l$.

Розв'язання. Диск обертається зі сталою кутовою швидкістю, тому $\varepsilon = 0$. Для визначення реакцій $\bar{X}_{1A}, \bar{Y}_{1A}, \bar{Z}_{1A}, \bar{X}_{1B}$ і \bar{Y}_{1B} складемо систему рівнянь (22.26), беручи до уваги, що $x_C = y_C = 0$:

$$X_{1A} + X_{1B} = 0;$$

$$Y_{1A} + Y_{1B} = 0;$$

$$Z_{1A} - P = 0; \tag{1}$$

$$J_{y_1z_1} \omega^2 = Y_{1A} \frac{l}{2} - Y_{1B} \frac{l}{2};$$

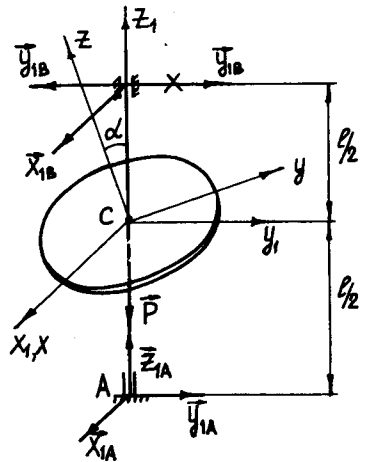


Рис. 22.24

$$-J_{x_1 z_1} \omega^2 = -X_{1A} \frac{l}{2} + X_{1B} \frac{l}{2}.$$

Визначаємо відцентрові моменти інерції $J_{y_1 z_1}$ і $J_{x_1 z_1}$. Застосуємо формулу перетворення координат, тобто

$$z_1 = z \cos \alpha - y \sin \alpha;$$

$$y_1 = z \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Через те що осі Cy_1 , Cy , Cz_1 і Cz розташовані в одній площині, перпендикулярній до осей Cx_1 і Cx , то

$$\begin{aligned} J_{x_1 z_1} &= J_{x z_1} = \sum_{k=1}^n m_k x_k z_{1k} = \sum_{k=1}^n m_k x_k (z_k \cos \alpha - y_k \sin \alpha) = \\ &= \cos \alpha \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k - \sin \alpha \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k = J_{xz} \cos \alpha - J_{xy} \sin \alpha = 0, \end{aligned}$$

оскільки осі Cx , Cy і Cz — головні осі інерції диска;

$$\begin{aligned} J_{y_1 z_1} &= \sum_{k=1}^n m_k (z_k \cos \alpha - y_k \sin \alpha)(z_k \sin \alpha + y_k \cos \alpha) = \sum_{k=1}^n m_k z_k^2 \cos \alpha \sin \alpha + \\ &+ \sum_{k=1}^n m_k z_k y_k \cos^2 \alpha - \sum_{k=1}^n m_k y_k^2 \sin \alpha \cos \alpha - \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k \sin^2 \alpha = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n m_k z_k^2 - \sum_{k=1}^n m_k y_k^2 \right) \cos \alpha \sin \alpha + \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n m_k z_k^2 - \sum_{k=1}^n m_k y_k^2 \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} + J_{yz} \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Перетворимо останній вираз. Додамо і віднімемо в круглих дужках вираз

$$\sum_{k=1}^n m_k x_k^2. \text{ Тоді матимемо}$$

$$J_{y_1 z_1} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (J_y - J_z) + J_{yz} \cos 2\alpha.$$

Оскільки осі Cx , Cy і Cz — головні осі інерції диска, то $J_{yz} = 0$, і останній вираз має вигляд

$$J_{y_1 z_1} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (J_y - J_z).$$

Визначаємо моменти інерції диска J_y і J_z :

$$J_y = \frac{mr^2}{4}; \quad J_z = \frac{mr^2}{2}.$$

Тоді

$$J_{y_1 z_1} = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left(\frac{mr^2}{4} - \frac{mr^2}{2} \right) = -\frac{Pr^2}{8g} \sin 2\alpha.$$

Підставляючи значення $J_{y_1 z_1}$ в рівняння (1), здобудемо:

$$X_{1A} = X_{1B} = 0; \quad Y_{1A} = -Y_{1B}; \quad Y_{1A} = \frac{Pr^2}{8lg} \omega^2 \sin 2\alpha; \quad Z_{1A} = P.$$

Отже, динамічні реакції \vec{Y}_{1A} і \vec{Y}_{1B} утворюють пару сил (рис. 22.24).

Задачі динаміки плоскопаралельного руху твердого тіла слід розв'язувати в такій послідовності:

- 1) зобразити на рисунку всі зовнішні сили, враховуючи наявність в'язей, накладених на тверде тіло;
- 2) обрати нерухому систему відліку;
- 3) при розв'язанні другої задачі динаміки обчислити:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky}^e, \quad \sum_{k=1}^n M_c(\vec{F}_k^e).$$

4) встановити початкові умови руху твердого тіла.

5) скласти систему диференціальних рівнянь плоскопаралельного руху тіла;

6) проінтегрувати складену систему рівнянь, враховуючи початкові умови руху тіла, і знайти шукані величини.

Приклад 22.7. Однорідний коловий циліндр радіусом r і вагою \vec{P} скочується без ковзання під дією ваги по площині, нахиленій до горизонту під кутом α (рис. 22.25). Знайти прискорення центра ваги циліндра, а також найменшу силу тертя, за якої можливе кочення без ковзання. Опором кочення знехтувати.

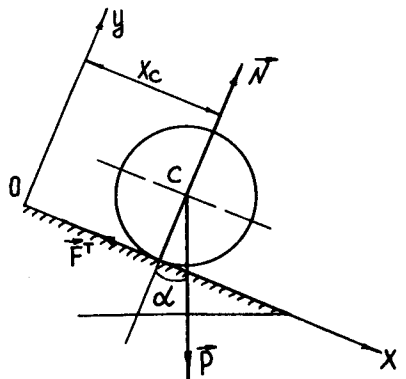


Рис. 22.25

Розв'язання. Розглядаємо рух циліндра. Циліндр здійснює невільний плоско-паралельний рух. Прикладемо до циліндра всі зовнішні сили: силу ваги циліндра \vec{P} , нормальну реакцію похилої площини \vec{N} і силу тертя ковзання \vec{F}^r .

Побудуємо нерухому систему координат з початком у точці O , що відповідає початковому положенню циліндра. Вісь Ox напрямимо вздовж похилої площини, а вісь Oy — перпендикулярно до цієї площини.

Обчислимо алгебричну суму проекції всіх зовнішніх сил, прикладених до циліндра, на осі координат Oxy :

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = P \sin \alpha - F^r;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = -P \cos \alpha + N.$$

Обчислимо алгебричну суму моментів усіх зовнішніх сил, прикладених до циліндра, відносно центра мас циліндра (за додатний напрям моментів сил візьмемо напрям обертання циліндра):

$$\sum_{k=1}^n M_C(F_k^e) = rF^r.$$

Диференціальні рівняння руху циліндра мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{P}{g} \ddot{x}_C = P \sin \alpha - F^r; \\ \frac{P}{g} \ddot{y}_C = -P \cos \alpha + N; \\ J_C \ddot{\varphi} = rF^r, \end{cases} \quad (1)$$

де J_C — момент інерції циліндра відносно осі, яка проходить через його центр мас C і перпендикулярна до площини xOy .

Рівняння (1) містять п'ять невідомих величин: x_C , y_C , φ , N і F^r . Тому треба скласти ще два рівняння. Оскільки циліндр котиться без ковзання, то

$$V_C = \dot{x}_C = r \dot{\varphi}.$$

З другого рівняння системи (1) визначаємо реакцію N :

$$N = P \cos \alpha,$$

оскільки $\ddot{y}_C = 0$.

При коченні без ковзання $\ddot{x}_c = r \ddot{\varphi}$ (оскільки $x_c = r\varphi$), тому третє рівняння системи (1) з урахуванням того, що $J_c = \frac{Pr^2}{2g}$, набирає вигляду

$$\frac{P}{2g} \ddot{x}_c = F^T.$$

Підставляючи знайдене значення F^T у перше рівняння системи (1), дістанемо шукане прискорення центра мас циліндра:

$$\ddot{x}_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Беручи до уваги значення \ddot{x}_c , знайдемо силу тертя ковзання:

$$F^T = \frac{1}{3} P \sin \alpha,$$

необхідну для того, щоб циліндр котився по похилій площині без ковзання. При коченні циліндра без ковзання сила тертя F^T має задовольняти умову

$$F^T \leq fN,$$

де f — коефіцієнт тертя ковзання.

Підставляючи в цю нерівність значення $F^T = \frac{1}{3} P \sin \alpha$ і $N = P \cos \alpha$, знайдемо умову кочення циліндра без ковзання:

$$\frac{1}{3} P \sin \alpha \leq f P \cos \alpha,$$

або

$$f \geq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Приклад 22.8. Визначити величину горизонтальної сили \vec{F} , яку необхідно прикласти до центра мас циліндра радіусом r і масою m , щоб він котився без ковзання по горизонтальній площині (рис. 22.26).

Розв'язання. Розглядаємо рух циліндра. Циліндр здійснює невільний плоскопаралельний рух. Прикладемо до циліндра всі зовнішні сили: силу ваги \vec{P} , силу \vec{F} (рушійна сила), нормальну реакцію \vec{N} і силу тертя \vec{F}^T (рис. 22.26).

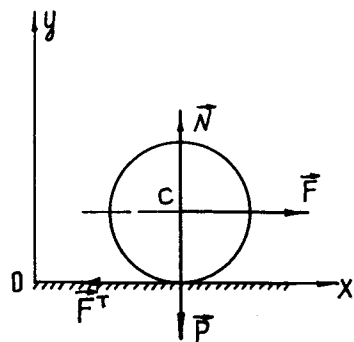


Рис. 22.26

Нерухому систему відліку показано на рис. 22.26.

Складемо диференціальні рівняння руху циліндра (за додатний напрям моментів сил візьмемо напрям обертання циліндра):

$$\begin{cases} m \ddot{x}_c = F - F^T; \\ m \ddot{y}_c = N - P; \\ J_c \ddot{\varphi} = F^T r. \end{cases} \quad (1)$$

Оскільки циліндр котиться без ковзання, то $\dot{x}_c = r \dot{\varphi}$, $\ddot{x}_c = r \ddot{\varphi}$.

З другого рівняння системи (1) маємо

$$N = P = mg,$$

оскільки $\ddot{y}_c = 0$.

Визначаємо момент інерції циліндра відносно осі, що проходить через його центр мас перпендикулярно до площини xOy :

$$J_c = \frac{mr^2}{2}.$$

Враховуючи значення \ddot{x}_c і J_c , першому і третьому рівнянням системи (1) надамо вигляду

$$mr \ddot{\varphi} = F - F^T; \quad \frac{mr}{2} \ddot{\varphi} = F^T.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, здобудемо

$$F^T = \frac{F}{3}.$$

При коченні циліндра без ковзання сила тертя F^T має задовольняти умову

$$F^T \leq fN,$$

де f — коефіцієнт тертя ковзання.

Підставляючи в цю нерівність значення $F^T = \frac{F}{3}$ і $N = mg$, дістанемо граничне значення горизонтальної сили F , під дією якої циліндр може котитися без ковзання:

$$F \leq 3mgf.$$

Приклад 22.9. Визначити величину обертального моменту M , прикладеного до циліндра радіусом r і масою m , щоб він котився без ковзання по горизонтальній площині (рис. 22.27).

Розв'язання. Розглядаємо рух циліндра. Циліндр здійснює невільний плоскопаралельний рух. Прикладемо до циліндра всі зовнішні сили: силу ваги \vec{P} , нормальну реакцію \vec{N} і силу тертя \vec{F}^T (у даному випадку сила \vec{F}^T є рушійною силою):

Нерухому систему відліку показано на рис. 22.27.

Складемо диференціальні рівняння руху циліндра (за додатний напрям моментів сил візьмемо напрям обертання циліндра):

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_c &= F^T; \\ m \ddot{y}_c &= N - P; \\ J_c \ddot{\varphi} &= M - F^T r. \end{aligned} \quad (1)$$

Оскільки циліндр котиться без ковзання, то $\dot{x}_c = r \dot{\varphi}$, $\ddot{x}_c = r \ddot{\varphi}$.

Визначаємо момент інерції циліндра відносно осі, що проходить через його центр мас перпендикулярно до площини xOy :

$$J_c = \frac{mr^2}{2}.$$

Підставляючи значення $\ddot{x}_c = r \ddot{\varphi}$, $\ddot{y}_c = 0$ і $J_c = \frac{mr^2}{2}$ в рівняння системи (1), здобудемо

$$F^T = \frac{2M}{3r}.$$

Оскільки

$$F^T \leq fN,$$

або

$$F^T \leq fmg,$$

то

$$\frac{2M}{3r} \leq fmg,$$

звідки дістанемо граничне значення обертального моменту, під дією якого циліндр може котитися без ковзання:

$$M \leq 1,5mgrf.$$

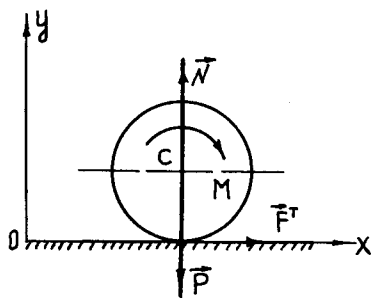


Рис. 22.27

Типові задачі динаміки твердого тіла для самостійної проробки та самоконтролю

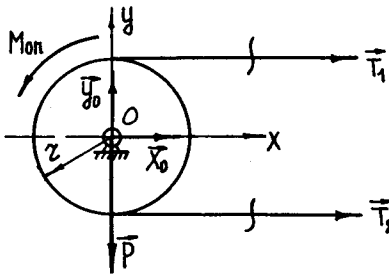


Рис. 22.28

Задача 22.1. Натяги ведучої і веденої гілок паса, який приводить у рух шків радіусом $r = 20$ см, масою $m = 3,27$ кг, відповідно становлять: $T_1 = 100$ Н, $T_2 = 50$ Н (рис. 22.28). Чому має дорівнювати момент сил опору, щоб шків обертався з кутовим прискоренням $\varepsilon = 1,5$ рад/с? Шків вважати однорідним диском.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 22.28. Диференціальне рівняння руху

$$J_0 \ddot{\varphi} = (T_1 - T_2)r - M_{\text{он}},$$

де $J_0 = \frac{mr^2}{2}$; $\ddot{\varphi} = \varepsilon$.

Тоді $M_{\text{он}} = (T_1 - T_2)r - \frac{mr^2}{2}\varepsilon = 9,9$ Н·м.

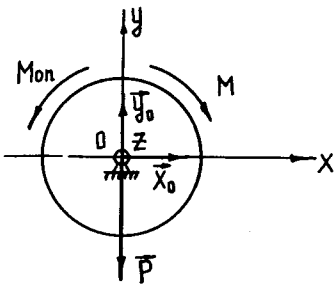


Рис. 22.29

Задача 22.2. Тверде тіло, яке перебувало у спокої, починає обертатися навколо нерухомої осі z під дією сталого обертального моменту M (рис. 22.29); при цьому виникає момент сил опору $M_{\text{он}} = \alpha\omega^2$. Знайти закон зміни кутової швидкості тіла, якщо момент інерції тіла відносно осі обертання дорівнює J_z .

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 22.29. Диференціальне рівняння руху

$$J_z \ddot{\varphi} = M - \alpha \dot{\varphi}^2.$$

Оскільки $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$, то

$$\frac{d\dot{\varphi}}{\left(\sqrt{\frac{M}{\alpha}}\right)^2 - \dot{\varphi}^2} = \frac{\alpha}{J_z} dt.$$

Після інтегрування і визначення сталої інтегрування здобудемо

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \cdot \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1},$$

де $\beta = \frac{2}{J_z} \sqrt{M\alpha}$.

Задача 22.3. Розв'язати попередню задачу, припускаючи, що момент сил опору $M_{\text{оп}} = \alpha\omega$.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 22.29. Диференціальне рівняння руху

$$J_z \ddot{\varphi} = M - \alpha \dot{\varphi}.$$

Оскільки $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$, то

$$\frac{d\dot{\varphi}}{M - \alpha \dot{\varphi}} = \frac{1}{J_z} dt.$$

Після інтегрування і визначення сталої інтегрування здобудемо

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{J_z}} \right).$$

Задача 22.4. Кулька А, яка прикріплена до кінця стрижня АВ завдовжки ℓ , починає обертатися навколо вертикальної осі O_1O_2 з початковою кутовою швидкістю ω_0 у посудині з рідиною (рис. 22.30,а). Сила опору рідини $R = \alpha t\omega$, де m — маса кульки; α — коефіцієнт пропорційності. Визначити, через який проміжок часу кутова швидкість

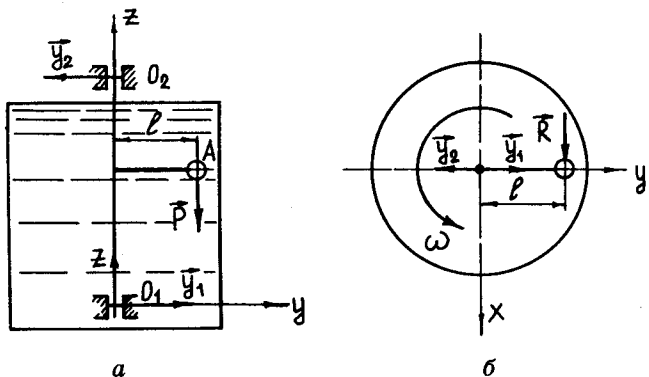


Рис. 22.30

обертання стане у два рази меншою за початкову, а також кількість обертів n , які зробить стрижень з кулькою за цей проміжок часу. Масу кульки вважати зосередженою в її центрі, масою стрижня знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 22.30,б. Диференціальне рівняння руху

$$J_z \ddot{\varphi} = -\alpha m \dot{\varphi} l,$$

де $J_z = ml^2$.

Оскільки $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$, то $-\frac{l}{\alpha} \frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = dt$.

Після інтегрування і визначення сталої інтегрування здобудемо: $t = \frac{l}{\alpha} \ln \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}}$.

Оскільки $\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0}{2}$, то $t = \frac{l}{\alpha} \ln 2$.

Визначаємо закон руху кульки. З рівності $t = \frac{l}{\alpha} \ln \frac{\dot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}}$ маємо $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 e^{-\frac{\alpha t}{l}}$.

Оскільки $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$, то $d\varphi = \dot{\varphi}_0 e^{-\frac{\alpha t}{l}} dt$.

Після інтегрування і визначення сталої інтегрування здобудемо

$$\varphi = \frac{l}{\dot{\varphi}_0} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{l}} \right).$$

Оскільки $t = \frac{l}{\alpha} \ln 2$, то $\varphi = \frac{l}{2\alpha} \dot{\varphi}_0$.

Тоді $n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{l \dot{\varphi}_0}{4\pi\alpha}$.

Задача 22.5. Тверде тіло, прикріплене до пружного дроту, здійснює крутильні коливання під дією зовнішнього моменту $M_z = M_0 \cos pt$, де M_0 і p — додатні сталі, а z — вісь, яка має напрям уздовж дроту (рис. 22.31). Момент сил пружності дроту $M_{\text{пр}} = -c\varphi$, де c — коефіцієнт пружності, а φ — кут закручування. Момент інерції твердого тіла відносно осі z дорівнює J_z . Силами опору руху знехтувати. Визначити рівняння руху твердого тіла в двох випадках: 1) $\sqrt{\frac{c}{J_z}} \neq p$; 2) $\sqrt{\frac{c}{J_z}} = p$, якщо у початковий момент при ненапруженому дроті твердому тілу надали кутової швидкості ω_0 .

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 22.31. Диференціальне рівняння руху має вигляд

$$J_z \ddot{\varphi} = M_0 \cos pt - c\varphi, \text{ або } \ddot{\varphi} + k^2\varphi = H \cos pt,$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{J_z}, \quad H = \frac{M_0}{J_z}.$$

У випадку $k \neq p$ $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$,
де

$$\varphi_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt;$$

$$\varphi_2 = A \sin pt + B \cos pt; \quad A = 0; \quad B = \frac{H}{k^2 - p^2}.$$

$$\text{Отже, } \varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{H}{k^2 - p^2} \cos pt,$$

$$\text{де } C_1 = -\frac{H}{k^2 - p^2}; \quad C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}.$$

$$\text{Остаточно } \varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt + \frac{H}{k^2 - p^2} (\cos pt - \cos kt).$$

$$\text{У випадку } k \neq p \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \text{де } \varphi_1 = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt; \quad \varphi_2 = A_1 t \sin pt + B_1 t \cos pt; \quad A_1 = \frac{H}{2p}; \quad B = 0.$$

$$\text{Отже, } \varphi = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt + \frac{H}{2p} t \sin pt,$$

$$\text{де } C_3 = 0; \quad C_4 = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}.$$

$$\text{Остаточно } \varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt + \frac{H}{2k} t \sin kt.$$

Задача 22.6. Диск падає у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 22.32). У початковий момент диску надали кутової швидкості ω_0 , а його центр мас C , розташований у початку координат, мав горизонтальну за напрямом швидкість V_0 . Знайти рівняння руху диска. Осі x, y зображено на рис. 22.32. Силами опору знехтувати.

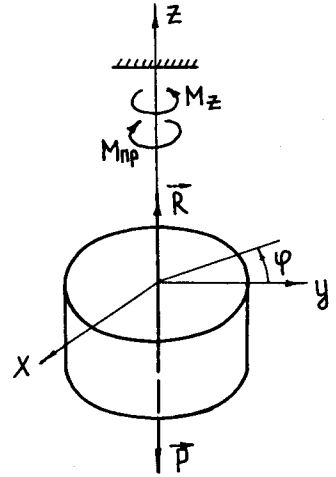


Рис. 22.31

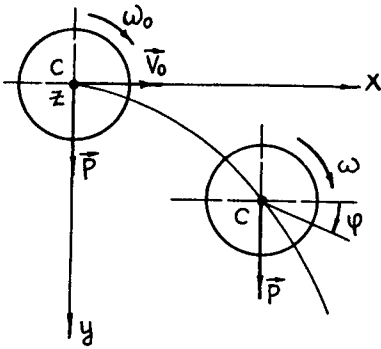


Рис. 22.32

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 22.32. Диференціальні рівняння руху

$$\ddot{x}_c = 0; \quad \ddot{y}_c = g; \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Після інтегрування цих рівнянь і визначення сталих інтегрування [початкові умови руху:

$$t = 0; \quad x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = V_0; \quad y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = 0;$$

$$\varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0] \text{ матимемо}$$

$$x_c = V_0 t; \quad y_c = \frac{gt^2}{2}; \quad \varphi = \omega_0 t.$$

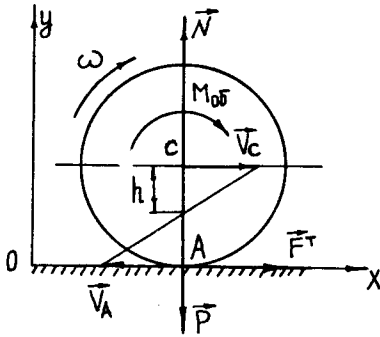


Рис. 22.33

Задача 22.7. Колесо радіусом r котиться по прямолінійній горизонтальній рейці під дією

обертального моменту $M_{об} = \frac{5}{2} f mgr$, де f — коефіцієнт тертя ковзання; m — маса колеса (рис. 22.33). Визначити швидкість точки колеса, що стикається з рейкою (швидкість проковзування). Маса колеса рівномірно розподілена по його ободу. Тертям кочення знехтувати. У початковий момент колесо перебувало у спокої.

Розв'язання. Розрахункову схему наведено на рис. 22.33. Диференціальні рівняння руху:

$$m \ddot{x}_c = F^\tau; \quad m \ddot{y}_c = N - P; \quad J_c \ddot{\varphi} = \frac{5f mgr}{2} - F^\tau r.$$

Оскільки при русі колеса з проковзуванням $F^\tau = fN$, а $\ddot{y}_c = 0$, то з рівнянь руху матимемо $\ddot{x}_c = fg$; $\ddot{\varphi}_c = \frac{3fg}{2r}$. З рис. 22.33 випливає, що $\dot{x}_c = h \dot{\varphi}$, тоді $\ddot{x}_c = h \ddot{\varphi}$. Визначаємо $h = \frac{2r}{3}$. Визначаємо $V_c = \dot{x}_c = fgt$. Тоді з рис. 22.33 випливає співвідношення

$$\frac{V_c}{h} = \frac{V_A}{r-h},$$

звідки $V_A = \frac{fgt}{2}$.

Задача 22.8. На барабан однорідного котка масою m і радіусом r , який лежить на горизонтальній шорсткій підлозі, намотана нитка, до якої прикладена сила \vec{T} під кутом α до горизонту (рис. 22.34). Радіус барабана a , радіус інерції котка ρ . Визначити закон руху осі котка O . У початковий момент коток перебував у спокої, потім котився без ковзання.

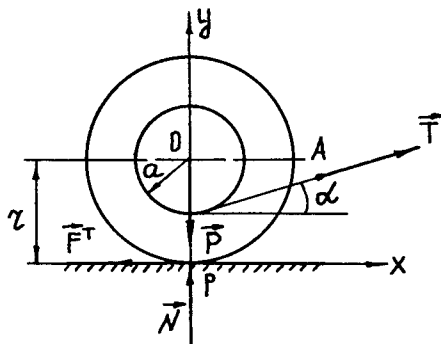


Рис. 22.34

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 22.34. Диференціальні рівняння руху такі:

$$m \ddot{x}_O = T \cos \alpha - F^\tau; \quad m \ddot{y}_O = N - P; \quad J_O \ddot{\varphi} = F^\tau r - Ta.$$

З рівнянь, беручи до уваги що

$$J_O = m\rho^2; \quad \dot{x}_O = \dot{\varphi}r; \quad \ddot{x}_O = \ddot{\varphi}r,$$

здобудемо

$$\ddot{x}_O = \frac{Tr(r \cos \alpha - a)}{m(\rho^2 + r^2)}.$$

Після інтегрування цього рівняння і визначення сталих інтегрування [початкові умови руху: $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0$], матимемо

$$x_O = \frac{Tr(r \cos \alpha - a)}{2m(\rho^2 + r^2)} t^2.$$

Задача 22.9. Важкий коловий циліндр A масою m обмотаний тонкою ниткою, кінець якої B закріпленій нерухомо (рис. 22.35). Циліндр падає без початкової швидкості, розмотуючи нитку. Визначити швидкість осі циліндра після того, як ця вісь опуститься на висоту h , і знайти натяг T нитки.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 22.35. Диференціальні рівняння руху такі:

$$m \ddot{x}_A = P - T; \quad J_A \ddot{\varphi} = Tr.$$

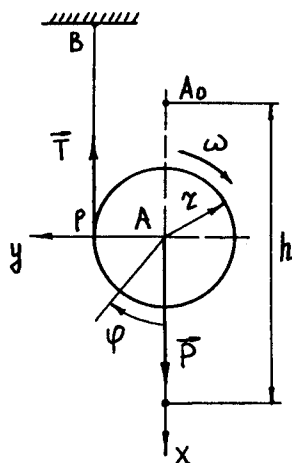


Рис. 22.35

Оскільки $\dot{x}_A = \dot{\varphi}r$, $\ddot{x}_A = \ddot{\varphi}r$, то з рівнянь руху дістанемо $T = \frac{1}{3}mg$. Беручи до уваги значення T з рівняння

$m \ddot{x}_A = P - T$, матимемо $\ddot{x}_A = \frac{2}{3}g$. Після інтегрування цього рівняння і визначення сталих інтегрування [початкові умови руху $t = 0$; $x_A(0) = 0$; $\dot{x}_A(0) = 0$] здобудемо:

$$\dot{x}_A = \frac{2gt}{3}; \quad x_A = \frac{gt^2}{2}.$$

Оскільки $x_A = h$, то $t = \sqrt{\frac{3h}{g}}$. Тоді

$$\dot{x}_A = \frac{2}{3}\sqrt{3hg}.$$

Задача 22.10. Однорідний стрижень AB масою m підвішений у точці O на двох нитках (рис. 22.36). Довжина нитки дорівнює довжині стрижня AB .

Визначити натяг однієї з ниток у момент обриву іншої.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 22.36, а. Диференціальні рівняння руху такі:

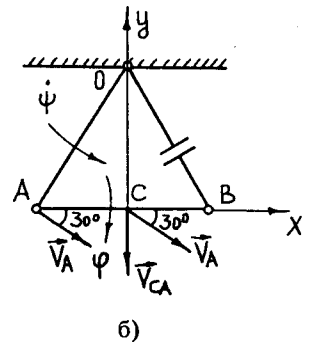
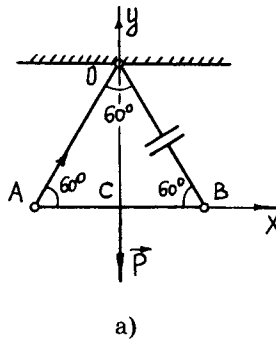


Рис. 22.36

$$m \ddot{x}_C = T \cos 60^\circ; \quad m \ddot{y}_C = T \sin 60^\circ - P; \quad J_C \ddot{\varphi} = \frac{T \sin 60^\circ \cdot l}{2}.$$

З рівнянь визначаємо:

$$\ddot{x}_C = \frac{T \cos 60^\circ}{m}; \quad \ddot{y}_C = \frac{T \sin 60^\circ - P}{m}; \quad \ddot{\varphi} = \frac{6T \sin 60^\circ}{ml}.$$

Визначаємо зв'язок між \ddot{x}_C , \ddot{y}_C і $\ddot{\varphi}$ (рис. 22.36, б):

$$x_C = V_A \cos 30^\circ = \dot{\psi} l \cos 30^\circ; \quad y_C = -V_A \sin 30^\circ - V_{CA} = -\dot{\psi} l \sin 30^\circ - \dot{\varphi} \frac{l}{2}.$$

Тоді

$$\ddot{x}_C = \ddot{\psi} l \cos 30^\circ; \quad \ddot{y}_C = -\ddot{\psi} l \sin 30^\circ - \ddot{\varphi} \frac{l}{2}.$$

Підставляючи в рівняння

$$\ddot{y}_c = -\frac{\ddot{x}_c}{\cos 30^\circ} \sin 30^\circ - \ddot{\varphi} \frac{l}{2}$$

значення \ddot{x}_c , \ddot{y}_c і $\ddot{\varphi}$, здобудемо $T = \frac{P}{3,753} = 0,266P$.

Запитання для самоперевірки

1. Якими є диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла?
2. Сформулюйте умови, за яких рух твердого тіла буде поступальним.
3. Як записується диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі?
4. Мірою чого є момент інерції твердого тіла відносно осі?
5. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
6. Що таке фізичний маятник?
7. Запишіть диференціальне рівняння малих коливань фізичного маятника.
8. Що називається зведеною довжиною фізичного маятника?
9. За якою формулою визначається довжина фізичного маятника?
10. За якою формулою визначається період малих коливань фізичного маятника?
11. Яку властивість мають точка підвісу і центр хитань фізичного маятника?
12. Назвіть способи дослідного визначення моментів інерції твердих тіл і розкрийте їх сутність.
13. Запишіть рівняння для визначення динамічних реакцій опор нерухомої осі твердого тіла, що обертається навколо цієї осі.
14. За якої умови не виникають динамічні реакції опор нерухомої осі твердого тіла при його обертанні навколо цієї осі?
15. Запишіть диференціальні рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла.
16. За якими формулами визначаються проекції кінетичного моменту твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої точки відносно точки обертання, на осі координат, що жорстко зв'язані з тілом?
17. За якою формулою визначається кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
18. Запишіть диференціальні рівняння руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки (динамічні рівняння Ейлера).
19. Запишіть диференціальні рівняння руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки і перебуває тільки під дією сили тяжіння.

20. Запишіть кінематичні рівняння Пуассона.
21. Якими є три перших інтеграли диференціальних рівнянь руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки?
22. Запишіть інтеграли диференціальних рівнянь руху твердого тіла навколо нерухомої точки у випадку Ейлера — Пуансо.
23. Запишіть розв'язок диференціальних рівнянь руху твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, у випадку Ейлера — Пуансо.
24. Запишіть інтеграли диференціальних рівнянь руху твердого тіла навколо нерухомої точки у випадку Лагранжа — Пуассона.
25. Запишіть інтеграли диференціальних рівнянь руху твердого тіла навколо нерухомої точки у випадку Ковалевської.
26. Запишіть диференціальні рівняння руху вільного твердого тіла.

Глава 23

ТЕОРІЯ ГІРОСКОПІВ

23.1. Поняття про гіроскоп

*Гіроскопом*¹ називається симетричне тверде тіло, яке обертається з великою кутовою швидкістю навколо осі симетрії та одночасно здійснює рух навколо нерухомої точки, що лежить на осі симетрії.

Найпростішим гіроскопом є дзига (рис. 23.1). Дзига обертається з кутовою швидкістю ω_2 навколо осі Oz_1 , яка змінює своє положення у просторі, оскільки точка O нерухома, а кінець осі Oz_1 не закріплений.

Вісь Oz_1 гіроскопа називається *віссю власного обертання* гіроскопа. Еліпсоїд інерції гіроскопа для нерухомої точки O є еліпсоїдом обертання (на рис. 23.1 еліпсоїд інерції гіроскопа зображений штриховими лініями). Осі гіроскопа Ox_1 і Oy_1 , що лежать в екваторіальній площині еліпсоїда інерції, є головними осями інерції. Мо-

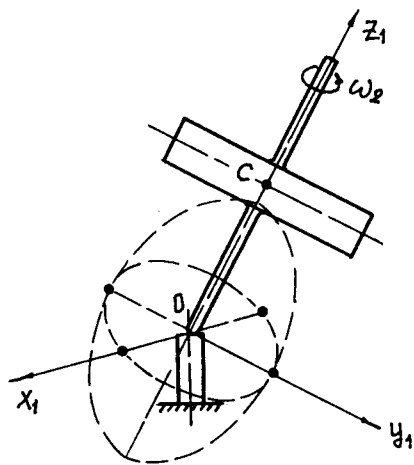


Рис. 23.1

¹ Словом *гіроскоп* (що означає *показчик обертання*) французький фізик Жан Бернар Леон Фуко (1819—1868) назвав прилад, установлений в 1851 р. у будинку Пантеона в Парижі для доведення обертання Землі навколо своєї осі.

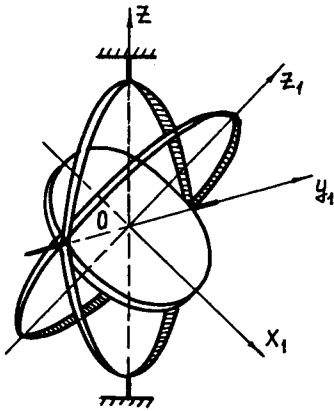


Рис. 23.2

менти інерції гіроскопа відносно цих осей однакові, тобто $J_{x_1} = J_{y_1}$. Вісь гіроскопа Oz_1 є головною центральною віссю інерції гіроскопа.

У гіроскопах, які застосовуються в техніці, вільне обертання власної осі Oz_1 і закріплення її у нерухомій точці O забезпечується кріпленням гіроскопа в рамках (кільцях) карданового підвісу¹ (рис. 23.2), що дає змогу осі власного обертання Oz_1 займати довільне положення у просторі. Такий гіроскоп має три ступеня вільності: він може здійснити три незалежних обертання навколо осей Oz_1 , Oz , Oy_1 , які перетинаються в нерухомій точці O .

Якщо центр мас гіроскопа збігається з нерухомою точкою власної осі обертання гіроскопа O , то гіроскоп називається *астатичним* або *зрівноваженим*, у протилежному разі — *важким*.

Кутова швидкість обертання сучасних гіроскопів навколо власної осі Oz_1 досягає $6000 \frac{1}{c}$ (порядку 60 000 об/хв).

23.2. Основні припущення наближеної теорії гіроскопів

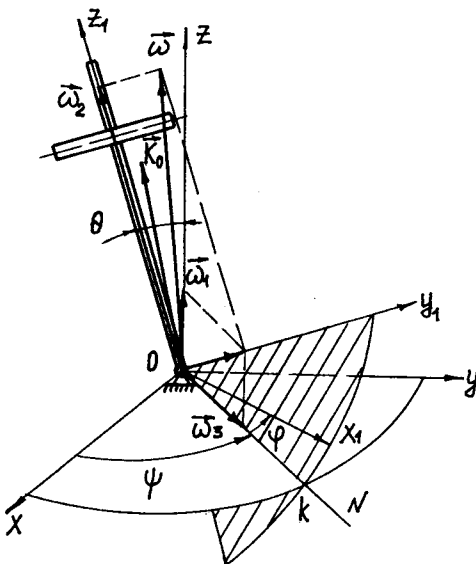


Рис. 23.3

Вивчення руху гіроскопа зводиться до вивчення руху власної осі обертання гіроскопа. Обертальний рух гіроскопа навколо цієї осі, як правило, відомий і кутова швидкість цього обертання підтримується сталою. Рух власної осі обертання гіроскопа можна визначити за допомогою вектора кінетичного моменту гіроскопа відносно нерухомої точки, тобто вектора \vec{K}_0 .

Оскільки гіроскоп є твердим тілом, що обертається навколо нерухомої точки, тобто тілом, що здійснює сферичний рух, то на підставі формули (12.65) (див. розділ “Кінематика”, параграф 12.11) миттєва кутова швидкість гіроскопа (рис. 23.3)

¹ Більш докладні відомості про кардановий підвіс подано в параграфі 23.10.

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3,$$

де $\bar{\omega}_1$ — вектор кутової швидкості обертання гіроскопа навколо осі Oz ; $\bar{\omega}_2$ — вектор кутової швидкості обертання гіроскопа навколо власної осі Oz_1 ; $\bar{\omega}_3$ — вектор кутової швидкості обертання гіроскопа навколо осі ON (збігається з лінією вузлів).

Оскільки кутова швидкість ω_1 (кутова швидкість прецесії) мала порівняно з кутовою швидкістю власного обертання гіроскопа ω_2 (у сучасних гіроскопах $\omega_2 = 6000 \frac{1}{c}$ і $\omega_1 \leq 0,01 \frac{1}{c}$), а зміна кута нутації θ , як правило, незначна (у випадку регулярної прецесії взагалі дорівнює нулю), то в першому наближенні можна взяти $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2$. Беручи до уваги формули (22.35) і те, що осі Ox_1 , Oy_1 і Oz_1 — головні осі інерції гіроскопа, матимемо проєкції вектора \vec{K}_O на осі системи координат $Ox_1y_1z_1$:

$$K_{x_1} = J_{x_1} \omega_{x_1}; K_{y_1} = J_{y_1} \omega_{y_1}; K_{z_1} = J_{z_1} \omega_{z_1}. \quad (23.1)$$

Якщо вектор $\bar{\omega}$ вважати спрямованим вздовж осі власного обертання гіроскопа Oz_1 , то $\omega_{x_1} = \omega_{y_1} \approx 0$ і величина вектора \vec{K}_O буде

$$K_O = \sqrt{K_{x_1}^2 + K_{y_1}^2 + K_{z_1}^2} = K_{z_1} = J_{z_1} \omega_{z_1} = J_{z_1} \omega_2. \quad (23.2)$$

Таким чином, для гіроскопа, який з великою кутовою швидкістю обертається навколо власної осі, можна вважати, що вектор кінетичного моменту відносно нерухомої точки гіроскопа \vec{K}_O за величиною дорівнює власному кінетичному моменту гіроскопа, тобто $J_{z_1} \omega_2$, і напрямлений вздовж осі власного обертання гіроскопа:

$$\vec{K}_O = J_{z_1} \bar{\omega}_2. \quad (23.3)$$

Проте, щоб зберегти геометрію руху гіроскопа, необхідно також брати до уваги кутову швидкість $\bar{\omega}_1$.

Теорія, що ґрунтується на розглянутих припущеннях, називається *наближеною теорією гіроскопів*.

23.3. Теорема Резаля¹

Теоремі про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомої точки можна надати кінематичного тлумачення.

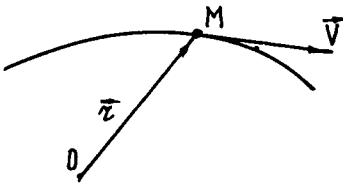


Рис. 23.4

Як відомо з кінематики точки, швидкість точки, що здійснює рух по траєкторії, визначається як швидкість кінця радіуса-вектора \vec{r} цієї точки (рис. 23.4). Оскільки траєкторія точки є голографом радіуса-вектора \vec{r} , то вектор швидкості точки має напрям уздовж дотичної до голографа \vec{r} і дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора \vec{r} :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

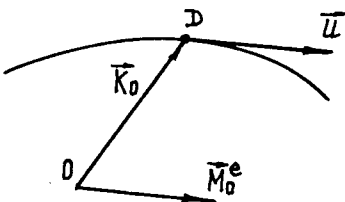


Рис. 23.5

Якщо розглядати вектор кінетичного моменту \vec{K}_o механічної системи відносно нерухомої точки як радіус-вектор, то першу похідну за часом від цього вектора, тобто $\frac{d\vec{K}_o}{dt}$, можна подати як швидкість точки кінця вектора \vec{K}_o при її русі по голографу вектора \vec{K}_o (рис. 23.5):

$$\vec{u} = \frac{d\vec{K}_o}{dt}. \quad (23.4)$$

Отже, на підставі виразу (23.4) теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомої точки (19.25) можна записати так:

$$\vec{U} = \vec{M}_o^e, \quad (23.5)$$

де $\vec{M}_o^e = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k^e)$ — головний момент усіх зовнішніх сил, прикладених до механічної системи.

Рівність (23.5) є математичним виразом *теорема Резаля*: під час руху механічної системи швидкість кінця вектора кінетичного моменту системи відносно нерухомої точки дорівнює за величиною і за напрямом головному моменту всіх зовнішніх сил, прикладених до системи.

¹ Анрі Еме Резаль (1828—1896) — французький механік, член Паризької академії наук (1873).

Теорема Резаля широко застосовується в теорії гіроскопів, оскільки дає змогу отримати закон руху осі власного обертання гіроскопа за заданим моментом зовнішніх сил або, знаючи закон руху осі гіроскопа, визначити момент сил, під дією яких відбувається рух гіроскопа.

23.4. Особливості руху власної осі обертання гіроскопа

Розглянемо особливості руху осі власного обертання гіроскопа порівняно з рухом осі симетрії подібного до гіроскопа твердого тіла, яке не обертається навколо осі симетрії. Нехай центр мас обох твердих тіл розташований у нерухомій точці O . Прикладемо до тіла, яке не обертається навколо осі симетрії і перебуває у стані спокою, перпендикулярно до осі Oz_1 силу \vec{F} у довільній точці A , що лежить на осі симетрії Oz_1 (рис. 23.6). Під дією сили \vec{F} тіло почне обертатися навколо осі Ox_1 , перпендикулярній до площини, в якій розташовані сила \vec{F} та вісь симетрії Oz_1 . При цьому точка A тіла буде рухатися за напрямом дії сили \vec{F} . При припиненні дії сили \vec{F} тіло буде обертатися навколо осі Ox_1 за інерцією зі сталою кутовою швидкістю, якщо тертя в точці O і кріплення тіла в цій точці це дозволять.

Інакше буде поводитися власна вісь обертання гіроскопа, який обертається з великою кутовою швидкістю ω_2 навколо цієї осі. Під дією прикладеної до осі обертання гіроскопа Oz_1 в точці A сили \vec{F} (рис. 23.7) вісь Oz_1 разом із точкою A буде рухатися в площині, перпендикулярній до лінії дії сили \vec{F} , тобто гіроскоп буде обертатися навколо осі Oy_1 . Дійсно, гіроскоп ще до дії сили \vec{F} мав кінетичний момент \vec{K}_O , який відповідно до наближеної теорії напрямлений уздовж осі Oz_1 і дорівнює добутку $J_z \omega_2$. На підставі теореми Резаля вектор швидкості точки B , тобто точки кінця вектора \vec{K}_O , дорівнює за величиною добутку Fl і має напрям, паралельний напрямку вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$:

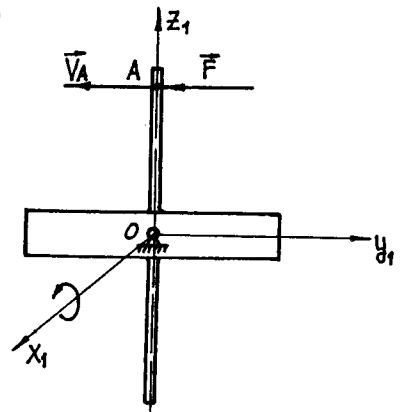


Рис. 23.6

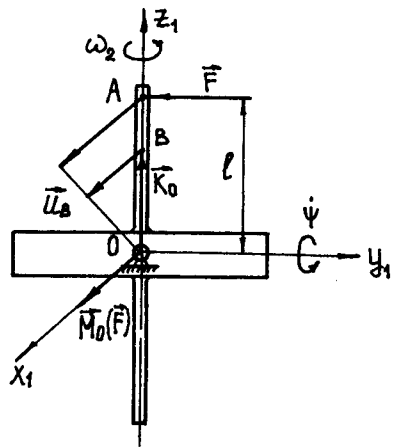


Рис. 23.7

$$U_B = Fl; \vec{U}_B = \vec{M}_O(\vec{F}).$$

Вектори швидкостей інших точок власної осі обертання гіроскопа Oz_1 будуть паралельні вектору \vec{U}_B . Отже, вісь Oz_1 буде обертатися навколо осі Oy_1 . Таким чином, власна вісь обертання гіроскопа здійснює рух під дією сили в напрямі вектора моменту цієї сили відносно нерухомої точки O гіроскопа. Такий рух власної осі обертання гіроскопа називається *прецесією* або *прецесійним рухом*.

Якщо момент сили відносно нерухомої точки в будь-який момент часу дорівнюватиме нулю, то прецесія власної осі обертання гіроскопа припиняється. Якщо центр мас гіроскопа не збігається з нерухомою точкою O , то на підставі теореми Резаля необхідно в загальному сумарному моменті сил, що діють на власну вісь обертання гіроскопа, врахувати також момент сили ваги відносно нерухомої точки O .

З розглянутого випливає таке **правило прецесії**: якщо до осі власного обертання гіроскопа Oz_1 , який обертається навколо цієї осі з великою кутковою швидкістю, прикласти зовнішні сили, момент яких відносно нерухомої точки O гіроскопа не дорівнює нулю, то власна вісь обертання гіроскопа здійснює прецесійний рух за напрямом вектора моменту зовнішніх сил відносно нерухомої точки O гіроскопа.

Дамо оцінку зміни величини кута прецесії ψ власної осі обертання гіроскопа у випадку короткочасної дії сили \vec{F} на вісь гіроскопа (рис. 23.7). За малий проміжок часу точка B , тобто точка, що збігається з кінцем вектора \vec{K}_O , переміститься по дузі годографа вектора \vec{K}_O на величину $dS_B \approx U_B d\tau = M_O^e d\tau = Fld\tau$. Тоді елементарний кут повороту осі Oz_1 навколо осі Oy_1

$$d\psi = \frac{dS_B}{OB} = \frac{Fld\tau}{J_{z_1}\omega_2} = \frac{Fd\tau l}{J_{z_1}\omega_2}, \quad (23.6)$$

де $OB = K_O = J_{z_1}\omega_2$.

З рівності (23.6) випливає, що величина елементарного кута прецесії $d\psi$ прямо пропорційна елементарному моменту імпульсу сили \vec{F} відносно нерухомої точки гіроскопа $O(Fd\tau l)$ і обернено пропорційна власному кінетичному моменту гіроскопа $(J_{z_1}\omega_2)$.

З формули (23.6) випливає: якщо власний кінетичний момент гіроскопа $J_{z_1}\omega_2$ достатньо великий порівняно з елементарним моментом імпульсу сили,

то власна вісь обертання гіроскопа майже не відхиляється від положення, яке вона мала до дії сили \vec{F} , тобто на положення осі власного обертання гіроскопа короточасні імпульси сил або удари не впливають. Власна вісь обертання стійка до таких імпульсів сил, у чому і виявляється стійкість осі гіроскопа.

23.5. Гіроскопічний момент

За наближеною теорією гіроскопа для створення прецесії власної осі обертання гіроскопа необхідно прикласти до цієї осі момент зовнішніх сил.

Нехай власна вісь обертання гіроскопа здійснює прецесійний рух з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$. Обчислимо момент зовнішніх сил, який спричинює прецесію осі Oz_1 . Згідно з теоремою Резаля момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки O гіроскопа становить (див. рис. 23.7):

$$\vec{M}_O^e = \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{U}_B. \quad (23.7)$$

Оскільки вектор \vec{K}_O напрямлений вздовж осі Oz_1 гіроскопа і обертається навколо нерухомої точки з кутовою швидкістю прецесії $\vec{\omega}_1$, то швидкість точки B за формулою Ейлера (див. розділ “Кінематика”, параграф 12.13)

$$\vec{U}_B = \vec{\omega}_1 \times \vec{OB} = \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_O.$$

Оскільки $\vec{OB} = \vec{K}_O = J_{z_1} \vec{\omega}_2$, момент \vec{M}_O^e буде

$$\vec{M}_O^e = \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_O = J_{z_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2). \quad (23.8)$$

На підставі принципу Д’Аламбера маємо

$$\vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{\text{ін}} = \vec{0}, \quad (23.9)$$

де $\vec{M}_O^{\text{ін}}$ — головний момент сил інерції гіроскопа відносно нерухомої точки гіроскопа. $\vec{M}_O^{\text{ін}} = \vec{M}_{\text{гip}}$ і називається *гіроскопічним моментом*. Гіроскопічний момент є головним моментом коріолісових сил інерції відносно нерухомої точки, оскільки завдяки малості $\vec{\omega}_1$ переносними силами інерції нехтують.

Веручи до уваги формулу (23.8), здобудемо

$$\vec{M}_{\text{гip}} = \vec{M}_O^{\text{ін}} = -\vec{M}_O^e = -J_{z_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) = J_{z_1} (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1),$$

або остаточно

$$\vec{M}_{\text{гip}} = \vec{M}_O^{\text{ін}} = J_{z_1} (\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1);$$

$$M_{\text{rip}} = M_O^{\text{ih}} = J_{z_1} \omega_2 \omega_1 \sin \theta, \quad (23.10)$$

де θ — кут нутації, тобто кут між віссю власного обертання і віссю прецесії.

Гіроскопічний момент можна розглядати як момент гіроскопічної пари сил, з якою гіроскоп діє на тіла, які змушують гіроскоп здійснювати прецесійний рух під дією моменту зовнішніх сил \vec{M}_O^e .

З формул (23.10) випливає, що гіроскопічний момент може дорівнювати нулю, якщо кутова швидкість прецесії $\vec{\omega}_1$ дорівнює нулю або якщо вісь власного обертання гіроскопа буде паралельною осі прецесії.

Розглянуте дає можливість сформулювати **правило Жуковського**¹: якщо гіроскопу, який з великою кутовою швидкістю обертається навколо власної осі, надати прецесійного руху, то виникає гіроскопічна пара сил, яка намагається найкоротшим шляхом установити власну вісь обертання гіроскопа паралельно осі прецесії таким чином, щоб напрями векторів кутових швидкостей власного обертання $\vec{\omega}_2$ і прецесії $\vec{\omega}_1$ збігалися.

Якщо будь-яке тіло перешкоджає власній осі обертання гіроскопа зайняти паралельне осі прецесії положення, то власна вісь обертання гіроскопа тисне на це тіло і нерухому точку гіроскопа, утворюючи відповідну пару сил.

23.6. Регулярна прецесія важкого гіроскопа згідно з наближеною теорією

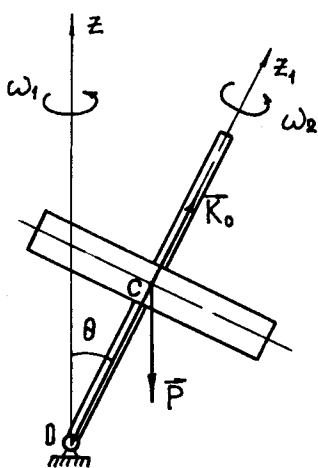


Рис. 23.8

Розглянемо прецесію важкого гіроскопа під дією сили ваги (рис. 23.8). На підставі правила прецесії під дією моменту сили ваги \vec{P} відносно точки O гіроскоп здійснює прецесійний рух навколо вертикальної осі Oz у напрямі, зображеному на рис. 23.8 коловою стрілкою. Оскільки кожний момент часу

$$\vec{M}_{\text{rip}} = \vec{M}_O^{\text{ih}} = -\vec{M}_O^e,$$

то

$$J_{z_1} \omega_1 \omega_2 \sin \theta = P \ell \sin \theta, \quad (23.11)$$

де $\ell = OC$ — відстань від нерухомої точки O до центра мас гіроскопа C .

З рівності (23.11) здобудемо кутову швидкість прецесії гіроскопа:

¹ Микола Єгорович Жуковський (1847—1921) — російський вчений, основоположник сучасної гідро- і аеромеханіки.

$$\omega_1 = \frac{Pl}{J_{z_1} \omega_2}. \quad (23.12)$$

З формули (23.12) випливає, що кутова швидкість прецесії важкого гіроскопа не залежить від кута нахилу власної осі обертання гіроскопа. Вона обернено пропорційна власному кінетичному моменту гіроскопа $J_{z_1} \omega_2$ і прямо пропорційна добутку величини сили ваги на відстань центра мас до нерухомої точки гіроскопа.

23.7. Визначення гіроскопічного моменту за точною теорією у випадку регулярної прецесії

Розглянемо регулярну прецесію гіроскопа і визначимо величину гіроскопічного моменту за точною теорією.

На підставі формули (12.88) (див. розділ “Кінематика”, параграф 12.12) миттєва кутова швидкість гіроскопа при регулярній прецесії

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \quad (23.13)$$

де $\bar{\omega}_1$ — вектор кутової швидкості прецесії гіроскопа; $\bar{\omega}_2$ — вектор кутової швидкості обертання гіроскопа навколо власної осі (рис. 23.9).

Якщо вісь Ox_1 , що лежить в екваторіальній площині еліпсоїда інерції, розташувати таким чином, щоб вона була в одній площині з осями Oz і Oz_1 (рис. 23.9), то проекції вектора $\bar{\omega}$ на осі координат $Ox_1y_1z_1$, що жорстко зв'язані з гіроскопом, будуть такими:

$$\omega_{x_1} = \omega_1 \sin \theta; \quad \omega_{y_1} = 0; \quad \omega_{z_1} = \omega_2 + \omega_1 \cos \theta. \quad (23.14)$$

На підставі формул (23.1) і (23.14) визначимо проекції вектора кінетичного моменту \vec{K}_O на осі системи координат $Ox_1y_1z_1$. Оскільки осі Ox_1 , Oy_1 , Oz_1 є головними осями інерції гіроскопа для точки O , то

$$\begin{aligned} K_{x_1} &= J_{x_1} \omega_{x_1} = J_{x_1} \omega_1 \sin \theta; \\ K_{y_1} &= J_{y_1} \omega_{y_1} = 0; \\ K_{z_1} &= J_{z_1} \omega_{z_1} = J_{z_1} (\omega_2 + \omega_1 \cos \theta). \end{aligned} \quad (23.15)$$

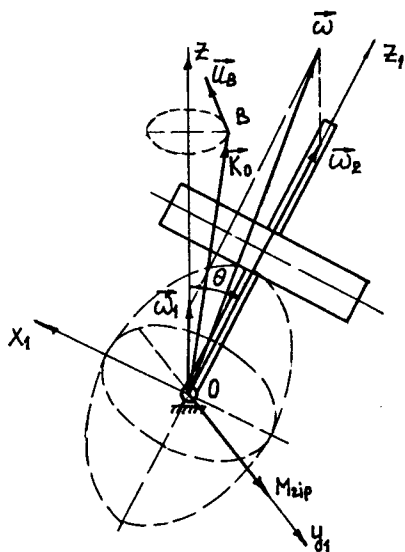


Рис. 23.9

Отже, кінетичний момент гіроскопа відносно нерухомої точки O

$$\vec{K}_O = K_x \vec{i}_1 + K_y \vec{j}_1 + K_z \vec{k}_1 = J_{x_1} \omega_1 \sin \theta \cdot \vec{i}_1 + J_{z_1} (\omega_2 + \omega_1 \cos \theta) \vec{k}_1. \quad (23.16)$$

Гіроскопічний момент $\vec{M}_{\text{гip}}$ можна визначити за формулою

$$\vec{M}_{\text{гip}} = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} = -\vec{U}_B. \quad (23.17)$$

При регулярній прецесії $\bar{\omega}_1 = \text{const}$, $\bar{\omega}_2 = \text{const}$ і $\theta = \text{const}$. Отже, $K_{x_1} = \text{const}$, $K_{y_1} = \text{const}$, $K_{z_1} = \text{const}$, тобто вектор кінетичного моменту \vec{K}_O сталий за величиною і змінюється тільки за напрямом. Щоб визначити швидкість кінця вектора \vec{K}_O , тобто точки B , необхідно знати кутову швидкість обертання вектора \vec{K}_O навколо нерухомої точки O .

Оскільки вектор \vec{K}_O розташований в площині осей Oz та Oz_1 і вісь Oz нерухома, то вектор \vec{K}_O обертається разом з площиною z_1Oz з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$ навколо осі Oz . Тоді на підставі теореми Резаля

$$\vec{U}_B = \bar{\omega}_1 \times \vec{K}_O,$$

і гіроскопічний момент на підставі формули (23.17)

$$\vec{M}_{\text{гip}} = -\vec{U}_B = -\bar{\omega}_1 \times \vec{K}_O = \vec{K}_O \times \bar{\omega}_1. \quad (23.18)$$

Оскільки вектор $\vec{M}_{\text{гip}}$ перпендикулярний до площини x_1Oz_1 , де розміщені вектори \vec{K}_O і $\bar{\omega}_1$, то лінія дії цього вектора збігається з напрямом осі Oy_1 , яка у свою чергу збігається з лінією вузлів Ok .

Беручи до уваги формулу (23.16), формулі (23.18) надамо вигляду

$$\vec{M}_{\text{гip}} = J_{x_1} \omega_1 \cos \theta (\vec{i}_1 \times \bar{\omega}_1) + J_{z_1} (\omega_2 + \omega_1 \cos \theta) (\vec{k}_1 \times \bar{\omega}_1). \quad (23.19)$$

Оскільки $|\vec{i}_1 \times \bar{\omega}_1| = \omega_1 \cos \theta$; $|\vec{k}_1 \times \bar{\omega}_1| = \omega_1 \sin \theta$ і вектори $(\vec{i}_1 \times \bar{\omega}_1)$ та $(\vec{k}_1 \times \bar{\omega}_1)$ паралельні і протилежні за напрямом, то вираз (23.19) набирає вигляду:

$$\begin{aligned} M_{\text{гip}} &= -J_{x_1} \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta + J_{z_1} (\omega_2 + \omega_1 \cos \theta) \omega_1 \sin \theta = \\ &= J_{z_1} \omega_2 \omega_1 \sin \theta + (J_{z_1} - J_{x_1}) \omega_1^2 \cos \theta \sin \theta. \end{aligned} \quad (23.20)$$

Формула (23.20) визначає величину гіроскопічного моменту у випадку регулярної прецесії гіроскопа.

З формули (23.20) випливає, що гіроскопічний момент за величиною складається з двох доданків:

$$M'_{\text{гip}} = J_{z_1} \omega_2 \omega_1 \sin \theta; \quad (23.21)$$

$$M''_{\text{гip}} = (J_{z_1} - J_{x_1}) \omega_1^2 \cos \theta \sin \theta. \quad (23.22)$$

Доданок $M'_{\text{гip}}$ за величиною повністю збігається з гіроскопічним моментом, одержаним на підставі наближеної теорії. Dodanok $M''_{\text{гip}}$ являє собою поправку до гіроскопічного моменту, визначеного за наближеною теорією, яка виникає при точному визначенні кінетичного моменту.

Доданок $M''_{\text{гip}}$ дорівнює нулю, якщо $J_{x_1} = J_{y_1} = J_{z_1}$, тобто коли еліпсоїд інерції гіроскопа для точки O є кулею або коли кут $\theta = 90^\circ$, тобто коли власна вісь обертання гіроскопа перпендикулярна до осі прецесії Oz .

Величина гіроскопічного моменту $M_{\text{гip}}$ дорівнює сумі доданків $M'_{\text{гip}}$ і $M''_{\text{гip}}$, якщо $(J_{z_1} - J_{x_1}) \cos \theta > 0$, і дорівнює різниці доданків $M'_{\text{гip}}$ і $M''_{\text{гip}}$, якщо $(J_{z_1} - J_{x_1}) \cos \theta < 0$.

23.8. Регулярна прецесія гіроскопа за інерцією

Як було з'ясовано в параграфі 22.13, тверде тіло, що обертається навколо нерухомої точки за інерцією, тобто коли лінія дії рівнодійної зовнішніх сил, прикладених до тіла, проходить через нерухому точку тіла O і коли еліпсоїд інерції для нерухомої точки тіла O є еліпсоїдом обертання, то це тіло може здійснювати регулярну прецесію і без дії на власну вісь обертання тіла зовнішніх сил, тобто здійснювати регулярну прецесію за інерцією.

Визначимо кутову швидкість регулярної прецесії гіроскопа за інерцією. Оскільки у випадку, що розглядається, $-\vec{M}_O^e = \vec{M}_{\text{гip}} = \vec{0}$, де \vec{M}_O^e — головний момент усіх зовнішніх сил, прикладених до гіроскопа, то на підставі формули (23.20)

$$\omega_1 = \frac{J_{z_1} \omega_2}{(J_{x_1} - J_{z_1}) \cos \theta}. \quad (23.23)$$

Таким чином, регулярна прецесія гіроскопа за інерцією здійснюється з кутовою швидкістю ω_1 , якщо гіроскоп не має кульової симетрії ($J_{z_1} \neq J_{x_1}$) і вісь власного обертання гіроскопа не перпендикулярна до осі прецесії.

Зауважимо, що за інерцією може рухатися матеріальна точка вздовж прямої лінії і обертатися тверде тіло навколо нерухомої осі. До цих випадків руху за інерцією необхідно ще додати випадок регулярної прецесії гіроскопа за інерцією.

Отже, з розглянутого випливає, що регулярна прецесія гіроскопа може відбуватися за інерцією і може бути змушеною, тобто виникати під дією відповідних зовнішніх сил. Згідно з наближеною теорією можлива тільки змушена регулярна прецесія. На підставі точної теорії регулярної прецесії можливе існування обох прецесій.

23.9. Регулярна прецесія важкого гіроскопа згідно з точною теорією

У важкого гіроскопа головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки гіроскопа O (див. рис. 23.8)

$$M_O^e = Pl \sin \theta. \quad (23.24)$$

Оскільки $M_O^e = M_{\text{гир}}$, то на підставі формули (23.20)

$$\left[J_{z_1} \omega_2 + (J_{z_1} - J_{x_1}) \omega_1 \cos \theta \right] \omega_1 \sin \theta = Pl \sin \theta,$$

звідки

$$\omega_1 = \frac{-J_{z_1} \omega_2 \pm \sqrt{(J_{z_1} \omega_2)^2 + 4(J_{z_1} - J_{x_1}) Pl \cos \theta}}{2(J_{z_1} - J_{x_1}) \cos \theta}. \quad (23.25)$$

З виразу (23.25) випливає, що регулярна прецесія важкого гіроскопа можлива, якщо

$$(J_{z_1} \omega_2)^2 + 4(J_{z_1} - J_{x_1}) Pl \cos \theta > 0. \quad (23.26)$$

Умова (23.26) виконується, якщо $J_{z_1} \omega_2$ — достатньо велика величина.

Застосуємо до виразу

$$\sqrt{(J_{z_1} \omega_2)^2 + 4(J_{z_1} - J_{x_1}) Pl \cos \theta}$$

формулу Ньютона й обмежимося двома членами у розкладі:

$$\sqrt{(J_{z_1} \omega_2)^2 + 4(J_{z_1} - J_{x_1}) Pl \cos \theta} \approx J_{z_1} \omega_2 \left[1 + \frac{2(J_{z_1} - J_{x_1}) Pl \cos \theta}{J_{z_1}^2 \omega_2^2} \right].$$

Підставляючи цей вираз у формулу (23.25), здобудемо два наближених значення кутової швидкості прецесії:

$$\omega_1' = \frac{Pl}{J_z \omega_2}; \quad (23.27)$$

$$\omega_1'' = \frac{J_z \omega_2}{(J_{x_1} - J_z) \cos \theta}. \quad (23.28)$$

Прецесія з кутовою швидкістю ω_1' — це повільна прецесія. Порівнюючи формули (23.12) і (23.27), можна зробити висновок: за наближеною теорією гіроскопа визначається кутова швидкість повільної прецесії. Прецесія з кутовою швидкістю ω_1'' — це швидка прецесія. Порівнюючи формули (23.23) і (23.28), дійдемо висновку: швидка прецесія — це прецесія за інерцією. Отже, важкий гіроскоп при виконанні умови (23.26) може здійснювати дві прецесії — повільну і швидку, з відповідними кутовими швидкостями ω_1' і ω_1'' .

23.10. Застосування гіроскопів у техніці

Своєрідність поведінки твердого тіла, що з великою кутовою швидкістю обертається навколо осі власної симетрії, здавна привертало до себе увагу не тільки теоретиків-дослідників, а й практиків — інженерів і конструкторів.

Тіла, які обертаються з великою кутовою швидкістю навколо власної осі симетрії (гіроскопи), входять до складу багатьох машин. У сучасній техніці застосовуються гіроскопи в кардановому підвісі — пристрої, який названо на ім'я італійського математика Кардано¹. Кардановий підвіс складається з двох кілець (рис. 23.10). Зовнішнє кільце 1 може обертатися навколо нерухомої осі Oz . Внутрішнє кільце 2 може обертатися навколо діаметра зовнішнього кільця, перпендикулярного до нерухомої осі Oz . Нарешті, діаметр внутрішнього кільця, перпендикулярний до власної осі обертання, є віссю власного обертання гіроскопа.

Напрявивши нерухому вісь Oz уздовж осі обертання зовнішнього кільця, лінію вузлів Ok — уздовж осі обертання внутрішнього кільця, а вісь

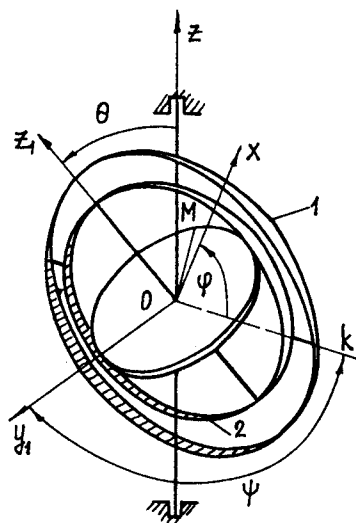


Рис. 23.10

¹ Джероламо (Ієронімус) Кардано (1501—1576) — італійський математик, філософ і лікар.

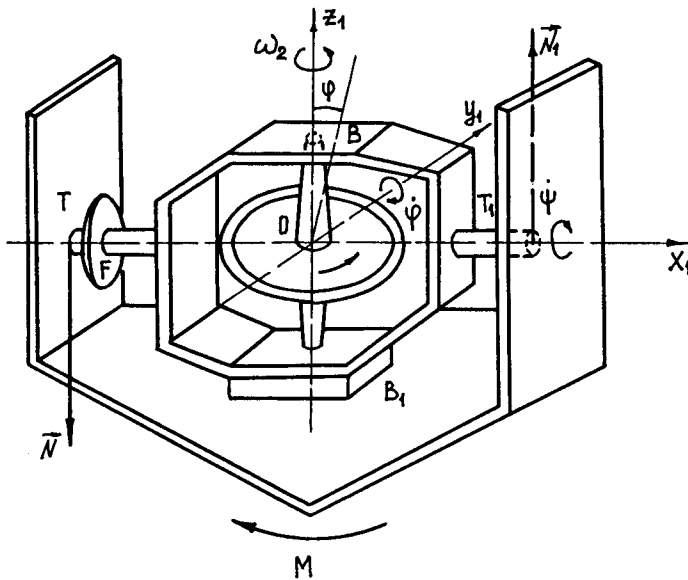


Рис. 23.11

власного обертання Oz_1 — уздовж осі гіроскопа, одержуємо нерухому точку O гіроскопа, в якій перетинаються всі осі. Якщо центр мас гіроскопа і центри мас кожного з кілець збігаються з нерухомою точкою O , то моменти сил ваги відносно нерухомої точки будуть дорівнювати нулю.

Гіроскопічний пристрій застосовується як заспокоювач качки кораблів. На рис. 23.11 зображено схему заспокоювача качки Шліка.

Маховику гіроскопа надають значної кутової швидкості навколо власної осі обертання Oz_1 , яка має у середньому положенні вертикальний напрям. Рама осі гіроскопа, в якій містяться підшипники B та B_1 , може обертатися навколо поперечної осі корпусу корабля Ox_1 . Центр мас гіроскопічного пристрою розміщений на осі Oz_1 нижче центра мас маховика, для чого рама обладнана противагою.

Якщо під дією хвиль корабель накренається, тобто повертається навколо поздовжньої осі Oy_1 на кут φ , то вісь гіроскопа Oz_1 одержує при цьому переміщення в поперечній площині корабля. Внаслідок цього на підшипники B та B_1 починає діяти гіроскопічний момент, який спричинює поворот рами навколо осі Ox_1 на кут ψ з кутовою швидкістю $\dot{\psi}$. Цього разу вісь гіроскопа одержує нове переміщення у поздовжній площині y_1Oz_1 , що в свою чергу спричинює появу нового гіроскопічного моменту, який передається через підшипники рами T і T_1 корпусу корабля. Цей момент протидіє моменту, який спричинює крен корабля і сприяє зменшенню його качці. Отже, енергія хвиль, які розгойдують корабель, перетворюється заспокоювачем Шліка в енергію коливання рами гіроскопа.

Розглянемо інший гіроскопічний пристрій, який застосовується для забезпечення стійкої рівноваги вагона однорейкової залізниці.

У середині вагона встановлюється гіроскоп (рис. 23.12). Він являє собою маховик, вісь якого FG закріплена в круглій рамі, що може обертатися навколо горизонтальної осі AB , яка проходить через центр мас C гіроскопа, з великою кутовою швидкістю ω_2 .

Припустимо, що рівновага вагона порушена і він почав нахилитися праворуч. Для того щоб відновити рівновагу вагона, достатньо надати рамі гіроскопа обертання навколо осі AB у напрямі, що зображений стрілкою на рис. 23.12. При цьому виникає гіроскопічний момент M , напрямлений у протилежний бік до моменту сили ваги, який перекидає вагон. Обертання рами гіроскопа регулюється автоматично за допомогою особливих пристроїв таким чином, що в будь-який момент рама гіроскопа автоматично набуває необхідної для зрівноважування моменту сили ваги кутової швидкості ω_1 .

У переробній і хімічній промисловості для тонкого помелу твердих матеріалів використовують маятникові млини (рис. 23.13). Відливка A обертається навколо осі Ok , яка у свою чергу обертається навколо вертикальної осі Oz з кутовою швидкістю ω_1 . Вісь Ok може відхилитися від вертикалі, обертаючись навколо шарніра O . Коли кутова швидкість

відливки A досягає значення $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$, відливка

A відкидається до стінки млинової чаші. Досягнув стінки, відливка A починає обертатися навколо нового положення Ok' власної осі обертання і котитися по стінці млинової чаші. Виникає стан регулярної прецесії важкого гіроскопа, який супроводжується появою гіроскопічного моменту. Гіроскопічний момент створює великий тиск відливки A на стінки млинової чаші. Це дає змогу подрібнювати тверді матеріали до дуже дрібних фракцій.

Ще одну важливу властивість гіроскопа — його здатність зберігати напрям осі власного обертання, якщо на неї не діють моменти зовнішніх сил, — широко застосовують у техніці: в гірокомпасах, показниках повороту тощо.

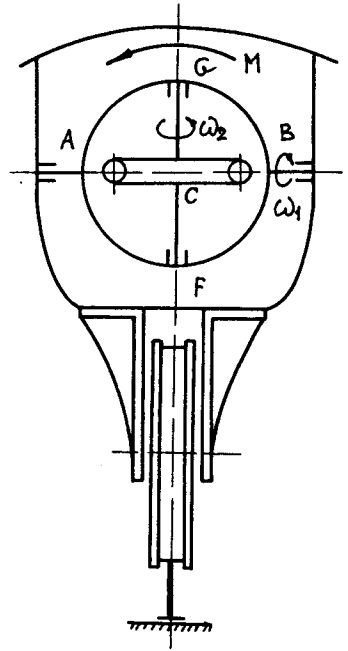


Рис. 23.12

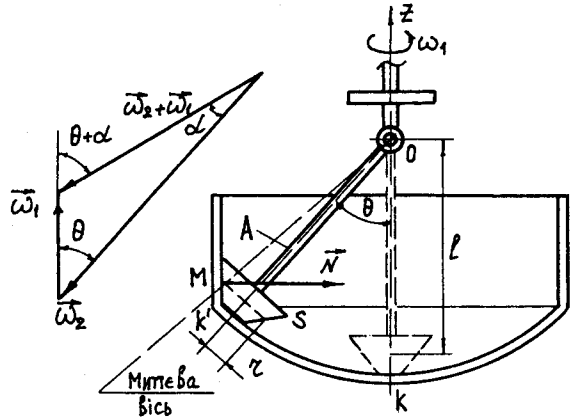


Рис. 23.13

23.11. Приклади розв'язання задач наближеної теорії гіроскопів

Задачі з визначення руху осі гіроскопа за допомогою наближеної теорії доцільно розв'язувати в такій послідовності:

- 1) встановити систему відліку;
- 2) зобразити на рисунку всі зовнішні сили, прикладені до гіроскопа;
- 3) визначити головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки гіроскопа;
- 4) визначити власний кінетичний момент гіроскопа;
- 5) застосувати теорему Резаля і визначити рух осі власного обертання гіроскопа.

Задачі з визначення гіроскопічного тиску (з визначення гіроскопічних реакцій опор) доцільно розв'язувати в такій послідовності:

- 1) зобразити на рисунку вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_2$ власного обертання гіроскопа і власний кінетичний момент \vec{K}_O гіроскопа;
- 2) знайти гіроскопічний момент $\vec{M}_{\text{гир}}$ (головний момент зовнішніх сил \vec{M}_O^e);
- 3) визначити напрям і величину гіроскопічного тиску на опори (гіроскопічні реакції).

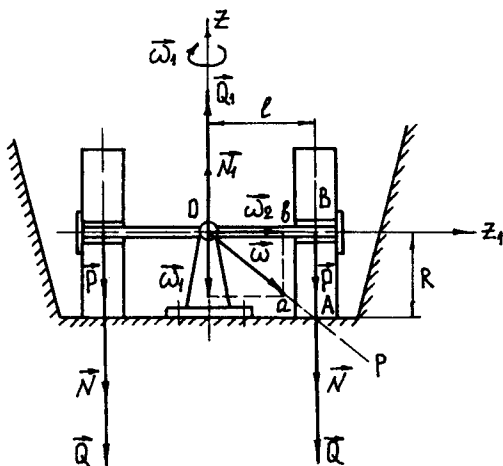


Рис. 23.14

складається із сили ваги бігуна і сили гіроскопічного тиску \vec{N} : $\vec{Q} = \vec{P} + \vec{N}$.

Припускаючи, що точка A бігуна нерухома (рис. 23.14), визначаємо положення миттєвої осі обертання бігуна. Вісь Op є миттєвою віссю обертання бігуна. По осі Op напрямлена миттєва кутова швидкість бігуна $\vec{\omega}$, яка складається із кутової швидкості прецесії $\vec{\omega}_1$ і кутової швидкості власного обертання бігуна $\vec{\omega}_2$.

З подібних трикутників $\triangle Oab$ і $\triangle OAB$ випливає співвідношення

Приклад 23.1. У дробарці (рис. 23.14) бігуни обертаються навколо вертикальної осі Oz зі сталою кутовою швидкістю ω_1 . Сила ваги кожного бігуна \vec{P} , радіус R і радіус інерції відносно осі Oz_1 власного обертання ρ — відомі величини. Визначити силу тиску кожного бігуна на дно чаші і тиск бігунів на шарнір O , застосовуючи наближену теорію гіроскопів.

Розв'язання. Розглядаємо бігун як гіроскоп з віссю власного обертання Oz_1 , що здійснює прецесійний рух навколо осі Oz . Сила тиску \vec{Q} бігуна на дно чаші

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{l}{R},$$

звідки

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 l}{R}.$$

Відповідно до правила Жуковського бігун тисне на дно чаші зі силою \vec{N} , а на шарнір O — зі силою \vec{N}_1 . Сили \vec{N} і \vec{N}_1 мають однакове значення, але протилежний напрям.

Величина сил \vec{N} і \vec{N}_1 становить:

$$N = N_1 = \frac{J_{z_1} \omega_2 \omega_1}{l} = \frac{P \rho^2 \omega_1^2 l}{g l R} = \frac{P \rho^2 \omega_1^2}{g R},$$

де $J_{z_1} = \frac{P \rho^2}{g}$.

Величина сили тиску бігуна на дно чаші

$$Q = P + \frac{P \rho^2 \omega_1^2}{g R} = P \left(1 + \frac{\rho^2 \omega_1^2}{g R} \right).$$

Величина тиску на шарнір O обох бігунів

$$Q_1 = 2N_1 = 2N = \frac{2P \rho^2 \omega_1^2}{g R}.$$

Якщо бігун є однорідним диском, то $\rho = \frac{R}{\sqrt{2}}$ і величини тиску бігуна на дно чаші й обох бігунів на шарнір O будуть відповідно такими:

$$Q = P \left(1 + \frac{R \omega_1^2}{2g} \right); \quad Q_1 = \frac{P R \omega_1^2}{g}.$$

З останніх формул випливає, що для одержання великого тиску на дно чаші необхідно застосовувати бігуни великого радіуса, оскільки величина тиску пропорційна радіусу бігуна R .

Приклад 23.2. Дзига (рис. 23.15), що має форму диска діаметром 30 см, обертається з кутовою швидкістю 80 рад/с навколо своєї осі симетрії. Диск насаджений на вісь, довжина якої дорівнює 20 см. Ця вісь є віссю симетрії дзиги. Визначити кутову швидкість регулярної прецесії дзиги, якщо її власний кінетичний момент дорівнює $J_{z_1} \omega_2$.

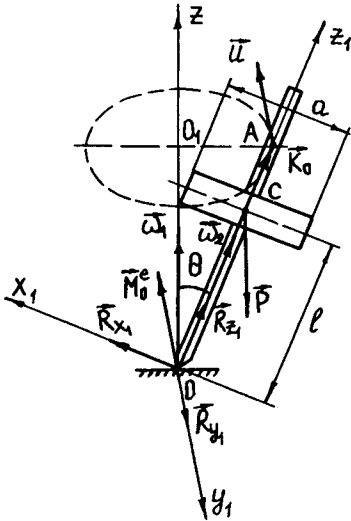


Рис. 23.15

Розв'язання. Прикладаємо до дзиги всі зовнішні сили: силу \vec{P} — силу ваги дзиги і реакції нерухомої точки O дзиги — \vec{R}_{x_1} , \vec{R}_{y_1} і \vec{R}_{z_1} .

Визначаємо головний момент зовнішніх сил відносно точки O :

$$M_0^e = Pl \sin \theta.$$

Вектор \vec{M}_0^e напрямлений уздовж осі Oy_1 , оскільки вектор \vec{P} і точка O лежать у площині x_1Oz_1 .

Відповідно до наближеної теорії гіроскопів вектор кінетичного моменту дзиги \vec{K}_O лежить на осі Oz_1 і за величиною становить: $K_O = J_{z_1} \omega_2$. Зображуємо на рис. 23.15 вектор \vec{K}_O вздовж осі Oz_1 і кінець цього вектора позначаємо літерою A .

На підставі теореми Резаля вектор швидкості \vec{U} точки A буде паралельним вектору \vec{M}_0^e , тобто вектор \vec{U} — перпендикулярний до площини x_1Oz_1 . За величиною вектор \vec{U}

$$U = M_0^e = Pl \sin \theta.$$

При регулярній прецесії власна вісь обертання дзиги Oz_1 описує бічну поверхню кругового конуса, оскільки обертається навколо вертикальної осі Oz з кутовою швидкістю прецесії ω_1 . Отже, швидкість точки A

$$U = \omega_1 O_1 A = OA \sin \theta \cdot \omega_1 = K_O \omega_1 \sin \theta = J_{z_1} \omega_2 \omega_1 \sin \theta.$$

Прирівнюючи значення швидкості U , здобудемо

$$J_{z_1} \omega_2 \omega_1 \sin \theta = Pl \sin \theta,$$

звідки визначимо кутову швидкість регулярної прецесії дзиги:

$$\omega_1 = \frac{Pl}{J_{z_1} \omega_2} = \frac{2mgl}{m \left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega_2} = \frac{8gl}{d^2 \omega_2} = \frac{8 \cdot 981 \cdot 20}{30^2 \cdot 80} = 2,18 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Приклад 23.3. Турбіна, вал якої паралельний поздовжній осі судна, робить 1500 об/хв. Маса частин турбіни, що обертається, дорівнює 6 т, радіус інерції $\rho = 0,7$ м. Визначити тиск на підшипники, якщо судно описує циркуляцію навколо вертикальної осі, обертаючись на 10° у секунду. Відстань між підшипниками $l = 2,7$ м.

Розв'язання. Прикладемо до турбіни всі зовнішні сили (рис. 23.16): силу \vec{P} — силу ваги турбіни і статичні реакції опор A і B — \vec{R}_A^{ct} , \vec{R}_B^{ct} . За величиною $R_A^{ct} = R_B^{ct} = \frac{P}{2} = \frac{mg}{2}$.

Визначаємо гіроскопічний момент:

$$M_{rip} = J_{z_1} \omega_2 \omega_1 \sin \theta = m \rho^2 \omega_2 \omega_1.$$

Вектор \vec{M}_{rip} має такий напрям, щоб з його кінця суміщення вектора \vec{K}_O з вектором $\vec{\omega}_1$ по меншій дузі було видно проти руху стрілки годинника (рис. 23.16).

Сили гіроскопічного тиску \vec{N}_A і \vec{N}_B на підшипники A і B розміщені у вертикальній площині й утворюють пару сил. Отже, величина сил \vec{N}_A і \vec{N}_B

$$N_A = N_B = \frac{M_{rip}}{l} = \frac{m \rho^2 \omega_2 \omega_1}{l}.$$

Додаткові динамічні реакції підшипників \vec{R}_A^d і \vec{R}_B^d за величиною дорівнюють силам \vec{N}_A і \vec{N}_B , але мають протилежний напрям.

Остаточно реакції підшипників A і B відповідно такі:

$$\begin{aligned} R_A &= R_A^{ct} + R_A^d = \frac{mg}{2} + \frac{m \rho^2 \omega_2 \omega_1}{l} = \frac{mg}{2} \left(1 + \frac{2 \rho^2 \omega_2 \omega_1}{gl} \right) = \\ &= \frac{6000 \cdot 9,81}{2} \left(1 + \frac{2 \cdot 0,7^2 \cdot 1500 \cdot \pi \cdot 0,1746}{30 \cdot 9,81 \cdot 2,7} \right) = 59,1 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_B &= R_B^{ct} - R_B^d = \frac{mg}{2} - \frac{m \rho^2 \omega_2 \omega_1}{l} = \frac{mg}{2} \left(1 - \frac{2 \rho^2 \omega_2 \omega_1}{gl} \right) = \\ &= \frac{6000 \cdot 9,81}{2} \left(1 - \frac{2 \cdot 0,7^2 \cdot 1500 \cdot \pi \cdot 0,1746}{30 \cdot 9,81 \cdot 2,7} \right) = 2,9 \text{ кН}, \end{aligned}$$

де $\omega_1 = 10$ град/с = 0,1746 рад/с.

Сили тиску на підшипники A і B за величиною дорівнюють реакціям \vec{R}_A і \vec{R}_B , але мають протилежний до цих векторів напрям.

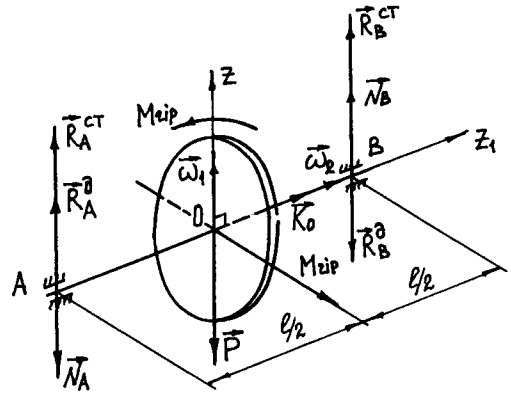


Рис. 23.16

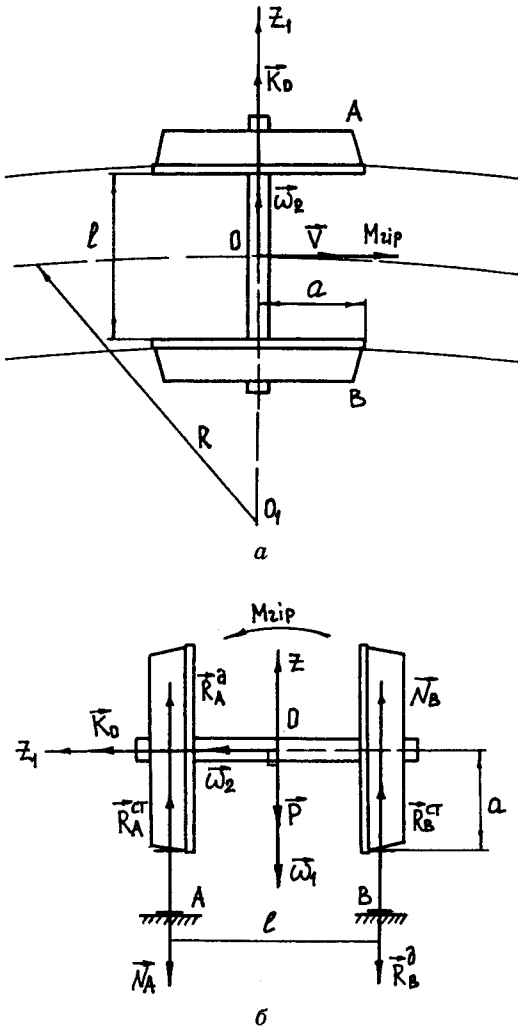


Рис. 23.17

Приклад 23.4. Колісна пара маює $m = 1400$ кг, радіусом $a = 75$ см, маючі радіус інерції відносно своєї осі $\rho = \sqrt{0,55a}$, рухається рівномірно зі швидкістю $V = 20$ м/с по закругленню радіусом $R = 200$ м, що лежить в горизонтальній площині. Визначити силу тиску колісної пари на рейки, якщо відстань між рейками $l = 1,5$ м.

Розв'язання. Зображуємо на рис. 23.17 вектори кутової швидкості власного обертання колісної пари $\bar{\omega}_2$ і власного кінетичного моменту \bar{K}_O .

Вважаючи, що колісна пара котиться без ковзання, визначаємо кутову швидкість її власного обертання:

$$\omega_2 = \frac{V}{a} = \frac{20}{0,75} = 26,67 \frac{1}{\text{с}}.$$

Визначаємо величину кінетичного моменту \bar{K}_O :

$$K_O = J_{z_1} \omega_2 = \frac{\rho^2 m V}{a} = \frac{0,55 \cdot 0,75^2 \cdot 1400 \cdot 20}{0,75} = 11,55 \frac{\text{т} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}.$$

Визначаємо величину кутової швидкості прецесії:

$$\omega_1 = \frac{V}{R} = \frac{20}{200} = 0,1 \frac{1}{\text{с}}.$$

Напрямок вектора $\bar{\omega}_1$ зображено на рис. 23.17, б.

Визначаємо величину і напрям гіроскопічного моменту $\bar{M}_{\text{гip}}$:

$$M_{\text{гip}} = J_{z_1} \omega_2 \omega_1 \sin(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \frac{\rho^2 m V^2}{a R} = \frac{0,55 \cdot 0,75^2 \cdot 1400 \cdot 20^2}{0,75 \cdot 200} = 1155 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

оскільки кут θ між векторами $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Відповідно до правила Жуковського гіроскопічний момент \vec{M}_{rip} має напрям такий, як показано на рис. 23.17, а.

Визначаємо тиск колісної пари на рейки від дії гіроскопічного моменту M_{rip} :

$$N_A = N_B = \frac{M_{\text{rip}}}{l} = \frac{\rho^2 m V^2}{a R l} = \frac{0,55 \cdot 0,75^2 \cdot 1400 \cdot 20^2}{0,75 \cdot 200 \cdot 1,5} = 770 \text{ Н.}$$

Сили \vec{N}_A і \vec{N}_B лежать у вертикальній площині й утворюють пару сил. Визначаємо реакції зовнішньої і внутрішньої рейок (рис. 23.17, б):

$$\begin{aligned} R_A &= R_A^{\text{cr}} + R_A^a = \frac{mg}{2} + \frac{\rho^2 m V^2}{a R l} = \frac{mg}{2} \left(1 + \frac{2\rho^2 V^2}{g a R l} \right) = \\ &= \frac{1400 \cdot 9,81}{2} \left(1 + \frac{2 \cdot 0,55 \cdot 0,75^2 \cdot 20}{9,81 \cdot 0,75 \cdot 200 \cdot 1,5} \right) = 6867 \cdot 1,112 = 7,64 \text{ кН;} \end{aligned}$$

$$R_B = R_B^{\text{cr}} - R_B^a = \frac{mg}{2} - \frac{\rho^2 m V^2}{a R l} = \frac{mg}{2} \left(1 - \frac{2\rho^2 V^2}{g a R l} \right) = 6867 \cdot 0,89 = 6,1 \text{ кН,}$$

де \vec{R}_A^a і \vec{R}_B^a — реакції рейок при дії на колісну пару гіроскопічного моменту.

Отже, зовнішня рейка зазнає навантаження на 1,54 кН більше, ніж внутрішня.

Приклад 23.5. На рис. 23.18 зображений вузол поворотної частини розвідного мосту. Вал зі стрижнями CD і CE , які прикріплені до нього під кутом α за допомогою шарніра C , обертається з кутовою швидкістю ω_1 . При цьому конічні шестерні K і L , що вільно насажені на стрижні CD і CE , котяться без ковзання по нерухомій плоскій горизонтальній шестірні. Визначити силу додаткового динамічного тиску шестерень K і L масою m кожна на нерухому горизонтальну шестірню, якщо радіуси всіх шестерень дорівнюють r . Рухомі шестерні вважати суцільними однорідними дисками.

Розв'язання. Зображуємо на рис. 23.18 вектори кутових швидкостей власного обертання правої шестірні $\vec{\omega}_2$ і прецесії $\vec{\omega}_1$. Оскільки миттєва вісь обертання правої шестірні проходить через точки C і M , то вектор миттєвої кутової швидкості цієї шестірні лежить на цій осі і становить: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. З паралелограма кутових швидкостей випливає

$$\frac{\omega_1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\omega_2}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

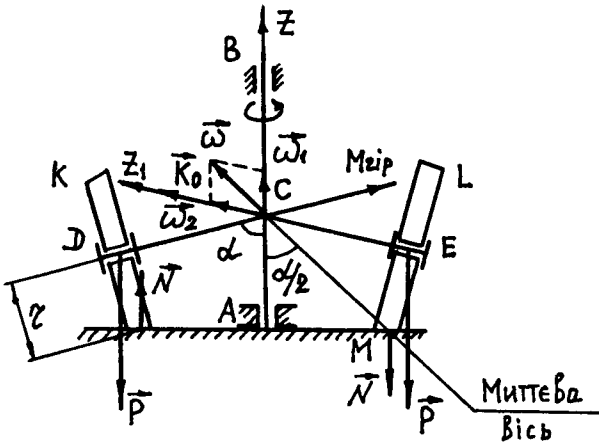


Рис. 23.18

Визначаємо гіроскопічний момент:

$$M_{rip} = K_O \omega_1 \sin \alpha = \frac{mr^2 \omega_1^2 \sin \alpha}{2}$$

Вектор \vec{M}_{rip} перпендикулярний до площини векторів $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ і має напрям такий, як показано на рис. 23.18.

Момент гіроскопічного тиску на нерухому шестірню

$$M_{rip} = N \cdot AM = Nr,$$

звідки здобудемо

$$N = \frac{M_{rip}}{r} = \frac{mr\omega_1^2 \sin \alpha}{2}$$

Приклад 23.6. Квадратна рама зі стороною $a = 20$ см обертається навколо вертикальної осі AB з кутовою швидкістю $\omega_1 = 2$ рад/с. Навколо осі Oz_1 , напрям якої збігається з діагоналлю рами, обертається диск M радіусом $r = 10$ см з кутовою швидкістю $\omega_2 = 300$ рад/с. Визначити відношення додаткових сил бічного тиску на опори A і B до відповідного статичного тиску. Масою рами знехтувати. Масу диска вважати розподіленою по ободу диска.

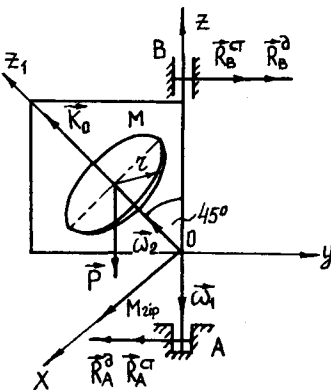


Рис. 23.19

Розв'язання. Визначаємо статичні опорні реакції (рис. 23.19):

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_A^{ct} AB + \frac{Pa}{2} = 0,$$

звідки

$$\omega_1 = \omega_2.$$

На підставі наближеної теорії вектор \vec{K}_O лежить на осі власного обертання правої шестірні і за величиною

$$K_O = J_{z_1} \omega_2 = \frac{mr^2}{2} \omega_2,$$

де $J_{z_1} = \frac{mr^2}{2}$, оскільки шестірня є суцільним диском.

звідки

$$R_A^{\text{ст}} = \frac{Pa}{2AB};$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_B^{\text{ст}} AB + \frac{Pa}{2} = 0,$$

звідки

$$R_B^{\text{ст}} = \frac{Pa}{2AB}.$$

Застосовуючи наближену теорію гіроскопів, визначаємо величину кінетичного моменту \vec{K}_O :

$$K_O = J_{z_1} \omega_2 = mr^2 \omega_2,$$

де $J_{z_1} = mr^2$, оскільки маса диска розподілена по його ободу.

Визначаємо величину гіроскопічного моменту:

$$M_{\text{гip}} = J_{z_1} \omega_2 \omega_1 \sin 135^\circ = mr^2 \omega_1 \omega_2 \sin 45^\circ.$$

Вектор $\vec{M}_{\text{гip}}$ перпендикулярний до площини yOz і має напрям такий, як зображено на рис. 23.19.

Реакції опор A і B під дією гіроскопічного моменту визначаємо за формулою

$$R_A^{\Delta} = R_B^{\Delta} = \frac{M_{\text{гip}}}{AB} = \frac{mr^2 \omega_2 \omega_1 \sin 45^\circ}{AB}.$$

Визначаємо відношення реакції від дії гіроскопічного моменту до статичних реакцій:

$$\frac{R_A^{\Delta}}{R_B^{\text{ст}}} = \frac{2AB(mr^2 \omega_2 \omega_1 \sin 45^\circ)}{ABmg} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 300 \cdot 2 \cdot 0,707}{981 \cdot 20} = 4,32.$$

Запитання для самоперевірки

1. Яке тверде тіло називається гіроскопом?
2. Який гіроскоп називається астатичним, а який — важким?
3. Які основні припущення в наближеній теорії гіроскопів?
4. Як формулюється теорема Резаля?
5. Як формулюється правило прецесії власної осі обертання гіроскопа?

6. Що таке гіроскопічний момент і як його обчислити? Як формулюється правило Жуковського?

7. За якою формулою визначається кутова швидкість прецесії важкого гіроскопа?

8. За якою формулою визначається величина гіроскопічного моменту за точною теорією гіроскопів у випадку регулярної прецесії?

9. За якою формулою визначається кутова швидкість регулярної прецесії гіроскопа по інерції?

10. Що таке повільна і швидка прецесія важкого гіроскопа?

Глава 24

ТЕОРІЯ УДАРУ

24.1. Загальні положення

Явище, під час якого швидкість точок матеріального об'єкта змінюється на скінченну величину за досить малий проміжок часу, називається **ударом**.

Проміжок часу, за який відбувається скінченна зміна швидкостей точок матеріального об'єкта, називається часом удару. Час удару практично вимірюється тисячними і меншими частками секунди.

Сили, що діють на точки матеріального об'єкта при ударі, можна поділити на *звичайні (скінченні)* сили, які змінюють швидкість точок об'єкта за певний проміжок часу, і на *миттєві, або ударні*, які змінюють швидкість точок матеріального об'єкта за досить малий проміжок часу.

Проаналізуємо явище удару на прикладі зіткнення двох матеріальних тіл A і B (рис. 24.1). Нехай дотик тіл відбувається в одній точці C і до зіткнення тіло A мало швидкість \vec{V}_A , а після зіткнення — швидкість \vec{U}_A .

Внаслідок взаємодії між тілами A і B виникає ударна сила \vec{F} . На підставі теореми про зміну кількості руху матеріальної точки для тіла A можна записати:

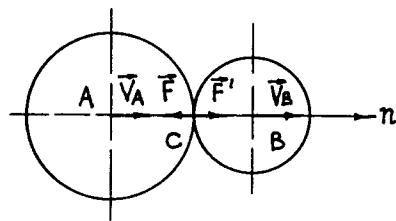


Рис. 24.1

$$m_A \vec{U}_A - m_A \vec{V}_A = \vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt, \quad (24.1)$$

де τ — час дії ударної сили (час удару). З формули випливає, якщо $\bar{U}_A \neq \bar{V}_A$ на скінченну величину, то імпульс ударної сили \bar{S} також має скінченну величину. Оскільки τ — дуже мала величина, то щоб імпульс \bar{S} (ударний імпульс) мав також скінченну величину, величина ударної сили має бути значною.

Таким чином, під час удару за дуже малий проміжок часу виникає ударна сила значної величини, яка створює ударний імпульс скінченної величини.

Подамо деякі визначення, що застосовуються при вивченні зіткнення матеріальних об'єктів. Загальна нормаль n до поверхні матеріальних об'єктів у точці дотику цих об'єктів (рис.24.1) називається *лінією удару*. Удар називається *центральним*, якщо центри мас матеріальних об'єктів при зіткненні лежать на лінії удару. Центральний удар називається *прямим*, якщо вектори швидкостей центрів мас матеріальних об'єктів до удару мають напрям уздовж лінії удару; в протилежному випадку удар називається *косим*. Якщо центри мас співударних матеріальних об'єктів не розташовані на лінії удару, то удар називається *позацентровим*.

Проаналізуємо рівняння (24.1). Для матеріальних тіл A і B на початку удару відомі вектори швидкостей \bar{V}_A і \bar{V}_B (рис. 24.1). Щоб визначити швидкості тіла A і B у кінці удару \bar{U}_A і \bar{U}_B за формулою (24.1), необхідно знати величину ударного імпульсу \bar{S} . Отже, для розв'язання цієї задачі необхідно розглянути додаткові умови. Будемо вважати, що тіла A і B пружні, а їх поверхні абсолютно гладенькі. Тоді після моменту зіткнення обидва тіла деформуються, при цьому швидкість тіла A зменшується, а швидкість тіла B збільшується ($\bar{V}_A > \bar{V}_B$). Процес деформації закінчується тоді, коли швидкості тіл стають рівними. Цю частину удару називають *фазою деформації*. Час тривалості цієї фази позначимо через τ_1 .

Ударна сила \bar{F} , що діє на тіло A з боку тіла B , має напрям уздовж лінії удару ліворуч. Сила \bar{F}' , що діє з боку тіла A на тіло B , має напрям уздовж лінії удару праворуч, і $\bar{F} = -\bar{F}'$.

Ударний імпульс сили \bar{F} за фазу деформації

$$\bar{S}_1 = \int_0^{\tau_1} \bar{F} dt. \quad (24.2)$$

Імпульс сили \bar{F}' за фазу деформації позначимо через \bar{S}'_1 . Очевидно,

$$\bar{S}'_1 = -\bar{S}_1. \quad (24.3)$$

Після деформації тіла відновлюють свою форму повністю або частково залежно від ступеня пружності. Ця частина удару називається *фазою відновлення*. Тривалість цієї фази позначимо через τ_2 . Фаза відновлення закін-

чується в момент відділення тіл одне від іншого. Імпульс ударної сили, який діє на тіло A , під час фази відновлення становить:

$$\bar{S}_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \bar{F} dt. \quad (24.4)$$

Ефект дії ударної сили оцінюють за повним імпульсом:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2. \quad (24.5)$$

Пружність співударних тіл під час удару оцінюють відношенням проєкцій ударного імпульсу фази відновлення до ударного імпульсу фази деформації на загальну нормаль n . Це відношення називається *коефіцієнтом відновлення* і позначається літерою k :

$$k = \frac{\bar{S}_2 \cdot \bar{n}}{\bar{S}_1 \cdot \bar{n}} = \frac{S_{2n}}{S_{1n}}, \quad (24.6)$$

де $|\bar{n}| = 1$

Коефіцієнт відновлення має безрозмірну величину. Залежно від природи матеріальних тіл він змінюється у межах від нуля до одиниці: $0 \leq k \leq 1$. Якщо $k = 0$, величина $\bar{S}_2 = \bar{0}$, тобто фаза відновлення відсутня. Такий удар називається *абсолютно непружним (пластичним)*. У випадку, якщо $k = 1$, тобто $\bar{S}_2 = \bar{S}_1$, можна вважати, що за фазу відновлення тіло повністю відновлює свою форму. Такий удар називається *абсолютно пружним*. Якщо $0 < k < 1$, відбувається удар середньої пружності, і такий удар називається *пружним*.

Таким чином, для розв'язання практичних задач механіки удару необхідно в кожному конкретному випадку удару матеріальних об'єктів знати коефіцієнт відновлення.

24.2. Дослідне визначення коефіцієнта відновлення

Нехай матеріальна точка ударяється в абсолютно гладеньку нерухому поверхню (рис. 24.2). Швидкість точки на початку удару дорівнює \vec{V} . Визначимо швидкість цієї точки в кінці удару \vec{U} . Пружні властивості поверхні характеризуються коефіцієнтом відновлення k .

На рис. 24.2 точка A визначає місце удару матеріальної точки в поверхню. Вісь An — нормаль до поверхні в точці A . Вісь At — дотична до поверхні в точці A . Кут α (кут падіння) — кут між вектором \vec{V} і нормаллю n . Кут β (кут відбиття) — кут між вектором \vec{U} і нормаллю n .

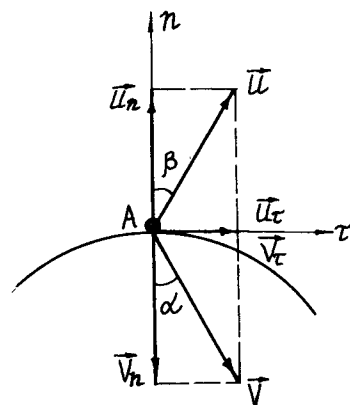


Рис. 24.2

На підставі теореми про зміну кількості руху матеріальної точки маємо

$$m\vec{U} - m\vec{V} = \vec{S}, \quad (24.7)$$

де \vec{S} — ударний імпульс реакції поверхні, напрямлений вздовж нормалі до поверхні у точці удару, оскільки поверхня абсолютно гладенька.

Проекціюючи обидві частини рівняння (24.7) на осі Al і At , здобудемо:

$$mU_t - mV_t = 0; \quad (24.8)$$

$$mU_n - mV_n = S_n. \quad (24.9)$$

З рівняння (24.8) випливає, що $U_t = V_t$, тобто дотичні складові швидкості під час удару не змінюються.

Рівняння (24.9) містить дві невідомі величини: U_n і S_n . Потрібне додаткове рівняння. Запишемо теорему імпульсів для двох фаз удару в проекціях на вісь n . У фазі деформації нормальна складова швидкості \vec{V} змінюється від V_n до 0. Тоді

$$0 - mV_n = S_{1n}. \quad (24.10)$$

У фазі відновлення швидкість точки \vec{U} змінюється від 0 до U_n . Отже,

$$mU_n - 0 = S_{2n}. \quad (24.11)$$

З рівнянь (24.10) і (24.11) матимемо

$$k = \frac{S_{2n}}{S_{1n}} = -\frac{U_n}{V_n}. \quad (24.12)$$

Формула (24.12) є виразом кінематичної інтерпретації коефіцієнта відновлення. Коефіцієнт відновлення, визначений за формулою (24.12), є додатною величиною, оскільки проекції U_n і V_n мають різні знаки (рис. 24.2).

Таким чином, для визначення U_n і S_n маємо два рівняння:

$$\begin{aligned} mU_n - mV_n &= S_n; \\ k &= -\frac{U_n}{V_n}. \end{aligned} \quad (24.13)$$

З рівнянь (24.13) здобудемо:

$$\begin{aligned} U_n &= -kV_n; \\ S_n &= -mV_n(1+k) = mV \cos \alpha(1+k); \\ U_n &= kV \cos \alpha. \end{aligned} \quad (24.14)$$

Величину швидкості в кінці удару \vec{U} визначаємо за формулою

$$U = \sqrt{U_{\tau}^2 + U_n^2} = V \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}. \quad (24.15)$$

З формули (24.15) при $k = 1$ (абсолютно пружний удар) маємо $U = V$.

З рис. 24.2 впливає співвідношення

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = -\frac{V_{\tau} U_n}{V_n U_{\tau}} = -\frac{U_n}{V_n} = k. \quad (24.16)$$

Формула (24.16) є виразом геометричної інтерпретації коефіцієнта відновлення.

Значення коефіцієнта відновлення для різних матеріалів визначається дослідним шляхом на підставі його кінематичної інтерпретації. При цьому вважається, що коефіцієнт відновлення не залежить від форми співударних тіл і їх швидкості під час удару.

Коефіцієнт відновлення визначають так. Кульці з матеріалу, для якого визначається коефіцієнт відновлення, дають можливість падати без початкової швидкості з висоти h на горизонтальну плиту, зроблену з того самого матеріалу, що і кулька, або з іншого матеріалу (рис. 24.3). Після удару кулька піднімається на висоту h_1 . На підставі відомої формули Галілея¹ визначають швидкості кульки \vec{V} і \vec{U} :

$$V = \sqrt{2gh}; \quad U = \sqrt{2gh_1}.$$

Підставляючи ці значення швидкостей у формулу (24.12), отримують

$$k = -\frac{U_n}{V_n} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}. \quad (24.17)$$

Значення коефіцієнтів відновлення для різних пар співударних матеріалів наводяться в довідниках. Так, при співударі скла зі склом $k = \frac{15}{16}$, сталі

зі сталлю — $\frac{5}{9}$, дерева з деревом — $\frac{1}{2}$.

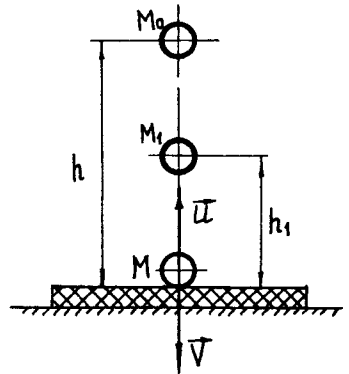


Рис. 24.3

¹ Галілео Галілей (1564—1642) — італійський фізик, механік, астроном і математик, один із фундаторів точного природознавства.

24.3. Дія ударної сили на матеріальну точку

Нехай на матеріальну точку масою m діють ударна сила \vec{F} і скінченна сила \vec{F}^* (рис. 24.4). Час дії ударної сили дорівнює τ , швидкість точки на початку удару — \vec{V} , а в кінці удару — \vec{U} . Запишемо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки за час τ :

$$m\vec{U} - m\vec{V} = \int_0^\tau \vec{F} dt + \int_0^\tau \vec{F}^* dt. \quad (24.18)$$

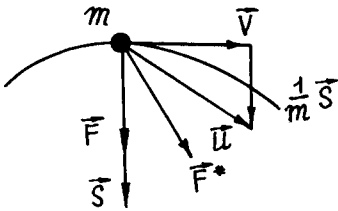


Рис. 24.4

Перший інтеграл у формулі (24.18) — це ударний імпульс, який має скінченну величину. Для другого інтеграла — імпульсу скінченної сили \vec{F}^* — згідно з теоремою про середню величину можна записати

$$\vec{S}^* = \int_0^\tau \vec{F}^* dt = \vec{F}_{\text{сеп}}^* \tau.$$

Тут τ є дуже малою величиною, а величина $\vec{F}_{\text{сеп}}^*$ — скінченна. Тому можна взяти $\vec{S}^* \approx \vec{0}$. Отже, формула (24.18) набирає вигляду

$$m\vec{U} - m\vec{V} = \vec{S}, \quad (24.19)$$

звідки випливає, що зміна кількості руху матеріальної точки за час удару дорівнює ударному імпульсу, прикладеному до точки.

Рівняння (24.19) називається *основним рівнянням динаміки точки при ударі*.

З рівняння (24.19) випливає така рівність:

$$\vec{U} = \vec{V} + \frac{1}{m} \vec{S}. \quad (24.20)$$

Визначимо відстань, яку проходить матеріальна точка за час удару:

$$l = \left| \int_0^\tau \vec{V} dt \right|,$$

де \vec{V} — змінна швидкість точки за проміжок часу від нуля до τ .

На підставі теореми про середню величину $l = V_{\text{сеп}} \tau$. Тут $V_{\text{сеп}}$ — скінченна величина, а τ — дуже мала величина, тому можна взяти $l \approx 0$.

Таким чином, на підставі розглянутого можна зробити такі висновки:

- 1) дією скінченних сил на матеріальну точку за час дії ударних сил можна знехтувати;
- 2) переміщенням матеріальної точки за час дії ударних сил можна знехтувати;
- 3) дія ударних сил на матеріальну точку приводить до швидкої зміни величини і напрямку швидкості точки згідно з рівністю (24.20).

24.4. Теорема про зміну кількості руху і руху центра мас механічної системи при ударі

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок (рис. 24.5). У деякий час до системи прикладаються зовнішні ударні сили, які спричиняють ударну взаємодію між точками системи, тобто появу внутрішніх ударних сил. Дією скінченних сил нехтуємо. Час дії ударних сил позначаємо через τ . Швидкість k -ї точки системи на початку удару позначаємо через \vec{V}_k , а в кінці удару — через \vec{U}_k . Рівнодійні ударних зовнішніх і внутрішніх сил позначаємо відповідно через \vec{F}_k^e і \vec{F}_k^i . Застосуємо до системи, що розглядається, теорему про зміну кількості руху механічної системи:

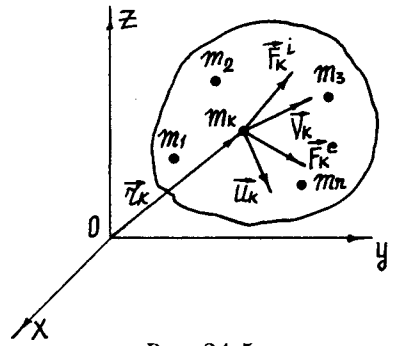


Рис. 24.5

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k - \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_{k0} = \sum_{k=1}^n \int_0^{\tau} \vec{F}_k^e dt + \sum_{k=1}^n \int_0^{\tau} \vec{F}_k^i dt. \tag{24.21}$$

Перетворимо рівняння (24.21) так:

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{U}_k - \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n \int_0^{\tau} \vec{F}_k^e dt + \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i dt. \tag{24.22}$$

На підставі властивості внутрішніх сил $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = \vec{0}$ і, отже, рівняння (24.22) набирає вигляду

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{U}_k - \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n \int_0^{\tau} \vec{F}_k^e dt, \tag{24.23}$$

або

$$\Delta \vec{Q} = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e. \tag{24.24}$$

Таким чином, зміна кількості руху механічної системи за час удару дорівнює векторній сумі зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до системи. Векторному рівнянню (24.24) відповідають три скалярні рівняння:

$$\Delta Q_x = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e; \quad \Delta Q_y = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e; \quad \Delta Q_z = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \quad (24.25)$$

Якщо кількість руху механічної системи на початку удару і в кінці удару визначити через швидкість центра мас системи, тобто через \vec{V}_c і \vec{U}_c , а масу системи позначити літерою M , то рівнянню (24.23) можна надати вигляду

$$M(\vec{U}_c - \vec{V}_c) = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e. \quad (24.26)$$

Рівняння (24.26) визначає зміну швидкості центра мас механічної системи при ударі.

Проекціюючи векторну рівність (24.26) на осі нерухомої декартової системи координат, здобудемо:

$$M(U_{cx} - V_{cx}) = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e; \quad M(U_{cy} - V_{cy}) = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e; \quad M(U_{cz} - V_{cz}) = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \quad (24.27)$$

З рівнянь (24.24) і (24.26) випливає: якщо $\sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e = \vec{0}$, то $\vec{Q} = \vec{Q}_0 = \overline{\vec{Q}_0}$ і $\vec{U}_c = \vec{V}_c$. Отже, якщо векторна сума зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до системи, дорівнює нулю, то кількість руху системи і швидкість її центра мас при ударі не змінюються.

З рівнянь (24.25) і (24.27) випливає: якщо, наприклад, $\sum_{k=1}^n S_{kx}^e = 0$, то $\Delta Q_x = 0$ і $U_{cx} = V_{cx}$. Отже, кількість руху механічної системи і швидкість її центра мас уздовж осі Ox не змінюються.

У розглянутих випадках має місце закон збереження кількості руху механічної системи.

24.5. Теорема про зміну кінетичного моменту при ударі

Для механічної системи теорема про зміну кінетичного моменту відносно нерухомого центра (точки) має такий математичний вираз:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^e). \quad (24.28)$$

Кінетичний момент механічної системи відносно нерухомого центра O на початку удару (рис. 24.5)

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k. \quad (24.29)$$

Кінетичний момент механічної системи відносно нерухомого центра O в кінці удару

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times m_k \vec{U}_k. \quad (24.30)$$

Головний момент зовнішніх ударних сил відносно нерухомого центра O

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e). \quad (24.31)$$

Враховуючи вираз (24.31) і відокремлюючи змінні у формулі (24.28), здобуємо

$$d\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e) dt. \quad (24.32)$$

Вираз (24.32) інтегруємо в межах від нуля до τ :

$$\int_0^{\tau} d\vec{K}_O = \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e) dt, \quad (24.33)$$

де τ — час дії ударної сили.

Інтеграл у лівій частині рівняння (24.33) визначає зміну кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомого центра O ($\Delta\vec{K}_O$) за час удару.

Праву частину рівняння (24.33), враховуючи, що $\vec{r}_k = \overline{\text{const}}$, перетворимо таким чином:

$$\int_0^{\tau} \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e) dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{\tau} (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e) dt = \sum_{k=1}^n \left(\vec{r}_k \times \int_0^{\tau} \vec{F}_k^e dt \right) = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{S}_k^e) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{S}_k^e),$$

або остаточно

$$\Delta\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n \vec{M}_O(\vec{S}_k^e), \quad (24.34)$$

де $\vec{r}_k = \text{const}$, оскільки переміщеннями точок системи при ударі нехтуємо.

Рівність (24.34) є математичним виразом теореми про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно довільного нерухомого центра при ударі: *зміна кінетичного моменту механічної системи відносно довільного нерухо-*

мого центра при ударі дорівнює векторній сумі моментів зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до системи, відносно того самого центра.

Векторній рівності (23.34) відповідають три скалярні рівності в проєкціях на нерухомі осі декартової системи координат:

$$\Delta K_x = \sum_{k=1}^n M_x(\bar{S}_k^e); \quad \Delta K_y = \sum_{k=1}^n M_y(\bar{S}_k^e); \quad \Delta K_z = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{S}_k^e). \quad (24.35)$$

З рівностей (24.35) випливає, що зміна кінетичного моменту механічної системи відносно довільної нерухомої осі декартової системи координат при ударі дорівнює алгебричній сумі моментів зовнішніх ударних імпульсів відносно тієї самої осі.

Якщо $\sum_{k=1}^n \bar{M}_O(\bar{S}_k^e) = \bar{0}$, то з рівняння (24.34) випливає, що $\Delta \bar{K}_O = \bar{0}$, тобто кінетичний момент механічної системи відносно довільного нерухомого центра при ударі не змінюється.

Якщо, наприклад, $\sum_{k=1}^n M_x(\bar{S}_k^e) = 0$, то з рівнянь (24.35) випливає, що кінетичний момент механічної системи відносно довільної нерухомої осі декартової системи координат Ox при ударі не змінюється.

У розглянутих випадках має місце закон збереження кінетичного моменту при ударі.

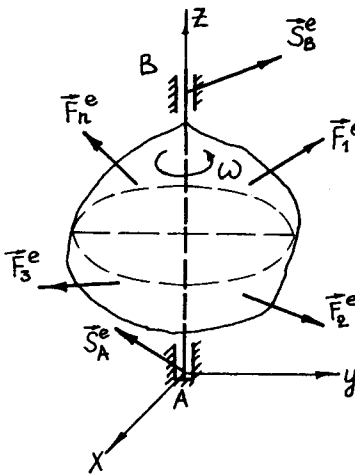


Рис. 24.6

Як окремий випадок дії ударних сил розглянемо обертання твердого тіла навколо нерухомої осі Az , яка закріплена в точці B шарнірно, а в точці A — за допомогою підп'ятника (рис. 24.6). Під дією зовнішніх ударних сил \bar{F}_k^e тверде тіло змінює кутову швидкість з величини ω_0 до величини ω . В опорах A і B від дії ударних сил виникають ударні реакції \bar{R}_A і \bar{R}_B , які створюють відповідні їм ударні імпульси \bar{S}_A^e і \bar{S}_B^e . На підставі формул (24.35) матимемо

$$\Delta K_z = \sum_{k=1}^n M_z(\bar{S}_k^e), \quad (24.36)$$

де $\sum_{k=1}^n M_z(\bar{S}_k^e)$ — алгебрична сума моментів зовніш-

ніх ударних імпульсів від зовнішніх ударних сил, прикладених до тіла, відносно осі обертання тіла.

Оскільки зміна кінетичного моменту твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, за час удару

$$\Delta K = J_z (\omega - \omega_0), \quad (24.37)$$

де J_z — момент інерції твердого тіла відносно осі обертання, то формула (24.36) набирає вигляду

$$J_z (\omega - \omega_0) = \sum_{k=1}^n M_z (\bar{S}_k^e). \quad (24.38)$$

Отже, зміна кінетичного моменту твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, відносно осі обертання при ударі дорівнює алгебричній сумі моментів зовнішніх ударних імпульсів від зовнішніх ударних сил, прикладених до тіла, відносно осі обертання тіла.

24.6. Теорема Кельвіна¹. Визначення роботи ударних сил, прикладених до матеріальної точки при ударі

Пряме визначення роботи ударних сил, прикладених до матеріальної точки при ударі, неможливе, оскільки за час удару переміщеннями матеріальної точки нехтують. Дія ударних сил на матеріальну точку характеризується їх імпульсами, тому необхідно визначити роботу ударних сил залежно від ударних імпульсів.

Запишемо основне рівняння динаміки точки при ударі:

$$m\bar{U} - m\bar{V} = \bar{S}.$$

Помножимо послідовно скалярно це рівняння на вектори \bar{U} і \bar{V} :

$$\begin{cases} m\bar{U}^2 - m\bar{U} \cdot \bar{V} = \bar{S} \cdot \bar{U}; \\ m\bar{U} \cdot \bar{V} - m\bar{V}^2 = \bar{S} \cdot \bar{V}. \end{cases} \quad (24.39)$$

Склавши рівняння системи (24.39) і поділивши результат додавання на 2, матимемо

$$\frac{m\bar{U}^2}{2} - \frac{m\bar{V}^2}{2} = \frac{1}{2} \bar{S} \cdot (\bar{U} + \bar{V}). \quad (24.40)$$

На підставі теореми кінетичної енергії матеріальної точки ліва частина рівняння дорівнює роботі ударної сили на переміщенні точки за час удару. Отже,

¹ Уільям Кельвін (1824—1907) — англійський фізик, президент Лондонського королівського товариства.

$$A = \frac{1}{2} \vec{S} \cdot (\vec{U} + \vec{V}). \quad (24.41)$$

Рівність (24.41) є математичним виразом теореми Кельвіна: *робота ударної сили, прикладеної до матеріальної точки, за час удару дорівнює скалярному добутку імпульсу цієї сили за той самий проміжок часу на півсуму швидкостей точки на початку і в кінці удару.*

24.7. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі

24.7.1. Перша теорема Карно¹ для випадку миттєвого накладання непружних в'язей

В'язі, накладені на точки механічної системи при ударі, називаються непружними, якщо вони залишаються і в кінці удару.

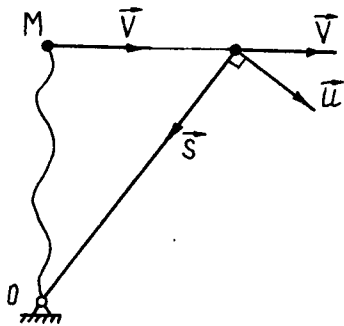


Рис. 24.7

Розглянемо матеріальну точку M , на яку накладена невагома нерозтяжна нитка з нерухомою точкою O (рис. 24.7). Тертям у точках M і O нехтуємо. Нехай нитка у початковий момент часу не натягнена, а точка M здійснює прямолінійний рівномірний рух зі швидкістю \vec{V} . У деякий момент часу нитка натягується (відбувається удар) і точка починає рухатися по дузі кола зі швидкістю \vec{U} . В момент часу, коли нитка натягується (момент накладання в'язі), на точку починає діяти ударна реакція нитки. Вектор імпульсу цієї реакції напрямлений уздовж нитки, тобто $\vec{S} \perp \vec{U}$.

На підставі теореми Кельвіна маємо

$$\Delta T = \frac{1}{2} m \vec{U}^2 - \frac{1}{2} m \vec{V}^2 = \frac{1}{2} \vec{S} \cdot (\vec{U} + \vec{V}). \quad (24.42)$$

Оскільки скалярний добуток $\vec{S} \cdot \vec{U} = 0$, то рівність (24.42) набирає вигляду

$$\Delta T = \frac{1}{2} \vec{S} \cdot \vec{V}. \quad (24.43)$$

Запишемо основне рівняння динаміки точки при ударі:

$$m \vec{U} - m \vec{V} = \vec{S}.$$

Помножимо обидві частини цього рівняння скалярно на \vec{S} :

$$-m \vec{S} \cdot \vec{V} = \vec{S}^2,$$

¹ Лазар Нікола Карно (1753—1823) — французький державний діяч і математик, член Паризької академії наук (1796).

або

$$\frac{1}{2} \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{V}} = -\frac{1}{2m} \bar{\mathbf{S}}^2, \quad (24.44)$$

оскільки $\bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0$.

Значення $\frac{1}{2} \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{V}}$ за формулою (24.44) підставляємо в рівняння (24.43):

$$\Delta T = -\frac{1}{2m} \bar{\mathbf{S}}^2, \quad (24.45)$$

де m — маса матеріальної точки.

Беручи до уваги що $\bar{\mathbf{S}} = m(\bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{V}})$, остаточно маємо

$$\Delta T = \frac{1}{2} m (\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{U}})^2. \quad (24.46)$$

Вектор $(\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{U}})$ у формулі (24.46) називається *втраченою швидкістю*. Із формули (24.46) випливає, що $\Delta T < 0$, тобто кінетична енергія матеріальної точки при накладанні непружної в'язі зменшується, інакше кажучи, втрачається. Позначимо втрачену кінетичну енергію точки через $T_{\text{втр}}$. Тоді з рівності (24.46) матимемо

$$T_{\text{втр}} = \frac{1}{2} m (\bar{\mathbf{V}} - \bar{\mathbf{U}})^2. \quad (24.47)$$

Застосовуючи одержаний результат до механічної системи (системи матеріальних точок), здобудемо

$$T_{\text{втр}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{\mathbf{V}}_k - \bar{\mathbf{U}}_k)^2. \quad (24.48)$$

Рівність (24.48) є математичним виразом першої теореми Карно: *при миттєвому накладанні на точки механічної системи непружних в'язей без тертя відбувається втрата кінетичної енергії системи, яка дорівнює величині кінетичної енергії системи від втрачених швидкостей*.

24.7.2. Друга теорема Карно для випадку миттєвого зняття в'язей

Нехай матеріальна точка M здійснює рух відповідно до накладеної в'язі OM (рис. 24.8). Тертя в точках O і M відсутнє. Швидкість точки в положенні M дорівнює $\bar{\mathbf{V}}$. У положенні M_1 в'язь OM знімається ударним імпульсом, вектор якого $\bar{\mathbf{S}}$ перпендикулярний до вектора швидкості точки на початку

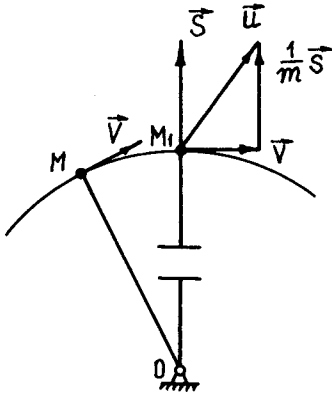


Рис. 24.8

удару \vec{V} . Швидкість точки в кінці удару на підставі формули (24.20) дорівнює (рис. 24.8)

$$\vec{U} = \vec{V} + \frac{1}{m} \vec{S}. \quad (24.49)$$

Значення \vec{U} за формулою (24.49) підставляємо у вираз теореми Кельвіна, тобто в рівняння (24.40), при цьому враховуємо, що $\vec{S} \cdot \vec{V} = 0$:

$$\Delta T = \frac{S^2}{2m}. \quad (24.50)$$

Запишемо основне рівняння динаміки точки при ударі:

$$m\vec{U} - m\vec{V} = \vec{S}. \quad (24.51)$$

Підставляючи рівняння (24.51) у рівність (24.50), здобудемо

$$\Delta T = \frac{1}{2m} \vec{S}^2 = \frac{1}{2} m (\vec{U} - \vec{V})^2. \quad (24.52)$$

З формули випливає, що $\Delta T > 0$; отже, кінетична енергія матеріальної точки у випадку миттєвого зняття в'язі без тертя збільшується, інакше кажучи, відбувається придбання енергії. Придбану енергію позначимо через $T_{\text{пр}}$. Вектор $(\vec{U} - \vec{V})$ називається *набутою швидкістю*.

Застосовуючи одержаний результат до механічної системи (системи матеріальних точок), здобудемо

$$T_{\text{пр}} = \Delta T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\vec{U}_k - \vec{V}_k)^2. \quad (24.53)$$

Рівність (24.53) є математичним виразом другої теореми Карно: *під час миттєвого зняття з точок механічної системи накладених на них в'язей ударами, імпульси яких перпендикулярні до векторів швидкостей точок системи, кінетична енергія системи збільшується на величину, що дорівнює кінетичній енергії системи від набутих швидкостей.*

24.7.3. Загальна теорема Карно

Нехай на матеріальну точку миттєво накладається пружна в'язь. Тертям при цьому знехтуємо. Вважаємо також, що внаслідок пружності в'язі точка в кінці удару залишає в'язь. У цьому випадку фаза удару складається з двох фаз: фази деформації і фази відновлення. Як приклад миттєвого накладання пружної в'язі розглянемо удар матеріальної точки в нерухому абсолютно гладеньку поверхню (див. рис. 24.2).

Позначимо швидкість точки на початку удару через \vec{V} , а в кінці удару — через \vec{U} .

Фаза деформації закінчується тоді, коли припиняється проникнення матеріальної точки у середину гладенької поверхні, тобто коли нормальна складова швидкості дорівнює нулю. Вектор швидкості точки в кінці цієї фази розташований у дотичній площині до поверхні і дорівнює \vec{V}_τ . Вектор ударного імпульсу реакції поверхні \vec{S}_1 у фазі деформації має напрям уздовж зовнішньої нормалі до поверхні, оскільки поверхня абсолютно гладенька.

Удар у фазі деформації можна розглядати як випадок накладання непружної в'язі, оскільки $\vec{S}_1 \cdot \vec{V}_\tau = 0$. Застосуємо першу теорему Карно і визначимо зміну кінетичної енергії точки за фазу деформації:

$$\frac{m\vec{V}_\tau^2}{2} - \frac{m\vec{V}^2}{2} = -\frac{1}{2m}\vec{S}_1^2. \quad (24.54)$$

Початок фази відновлення збігається з кінцем фази деформації. Тому на початку цієї фази швидкість матеріальної точки $\vec{U}_\tau = \vec{V}_\tau$. Матеріальна точка залишає поверхню завдяки ударному імпульсу реакції поверхні \vec{S}_2 фази відновлення. Вектор \vec{S}_2 має такий самий напрям, як і вектор \vec{S}_1 , тобто $\vec{S}_2 \perp \vec{U}_\tau$. Отже, у фазі відновлення з матеріальної точки знімається в'язь ударом, вектор імпульсу якого перпендикулярний до швидкості точки. Застосуємо другу теорему Карно і визначимо зміну кінетичної енергії точки за фазу відновлення:

$$\frac{m\vec{U}^2}{2} - \frac{m\vec{U}_\tau^2}{2} = \frac{1}{2m}\vec{S}_2^2. \quad (24.55)$$

Склавши рівняння (24.54) і (24.55), здобудемо

$$\frac{m\vec{U}^2}{2} - \frac{m\vec{V}^2}{2} = -\frac{1}{2m}(\vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2) = -\frac{1}{2m}(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)(\vec{S}_1 - \vec{S}_2). \quad (24.56)$$

Вектор імпульсу реакції поверхні за час удару на підставі формули (24.5) становить: $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, а \vec{S}_2 на підставі формули (24.6) дорівнює $k\vec{S}_1$. Тоді

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S}_1 + k\vec{S}_1 = (1+k)\vec{S}_1,$$

$$\text{звідки } \vec{S}_1 = \frac{\vec{S}}{1+k}, \text{ а } \vec{S}_1 - \vec{S}_2 = \frac{\vec{S}}{1+k} - \frac{k\vec{S}}{1+k} = \frac{1-k}{1+k}\vec{S}.$$

Беручи до уваги що $\bar{S}_1 = \frac{\bar{S}}{1+k}$, $\bar{S}_1 - \bar{S}_2 = \frac{1-k}{1+k} \bar{S}$ і $\bar{S} = m(\bar{U} - \bar{V})$, перетворимо вираз (24.56) так:

$$\frac{m\bar{U}^2}{2} - \frac{m\bar{V}^2}{2} = -\frac{1}{2} m \frac{1-k}{1+k} (\bar{V} - \bar{U})^2. \quad (24.57)$$

З формули (24.57) випливає: якщо $k < 1$, то $\frac{m\bar{U}^2}{2} - \frac{m\bar{V}^2}{2} < 0$, тобто кінетична енергія матеріальної точки зменшується. Отже, відбувається її втрата. Для втраченої кінетичної енергії маємо:

$$T_{\text{втр}} = \frac{1}{2} m \frac{1-k}{1+k} (\bar{V} - \bar{U})^2. \quad (24.58)$$

Зауважимо, що з рівності (24.58) випливає: якщо $k = 1$, то $T_{\text{втр}} = 0$.

Застосовуючи одержаний результат до механічної системи (системи матеріальних точок) і вважаючи, що коефіцієнт відновлення однаковий для всіх миттєво накладених на точки системи в'язей, здобудемо

$$T_{\text{втр}} = \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\bar{V}_k - \bar{U}_k)^2. \quad (24.59)$$

Таким чином, якщо на точки механічної системи миттєво накладені пружні в'язі без тертя, то при ударі відбувається втрата кінетичної енергії системи, яка дорівнює добутку кінетичної енергії втрачених швидкостей і коефіцієнта $\frac{1-k}{1+k}$.

Розглянуте вище становить зміст загальної теореми Карно.

24.8. Прямий центральний удар двох тіл

Розглянемо прямий центральний удар двох тіл (див. рис. 24.1). Нехай $\bar{V}_A > \bar{V}_B$ і коефіцієнт відновлення k для співударних тіл A і B відомий. Визначимо швидкості тіл A і B в кінці удару, тобто \bar{U}_A і \bar{U}_B . Оскільки до системи тіл A і B зовнішні ударні імпульси не прикладені, то з виразів (24.26) і (24.27) випливає, що кількість руху системи співударних тіл A і B під час удару не змінюється, тому

$$m_A V_A + m_B V_B = m_A U_A + m_B U_B, \quad (24.60)$$

де V_A і V_B — проекції векторів швидкостей відповідно тіл A і B на початку удару на нормаль n (див. рис. 24.1); U_A і U_B — проекції векторів швидкостей відповідно тіл A і B у кінці удару на нормаль n .

Рівняння (24.60) містить дві невідомі величини U_A і U_B , тому, щоб їх визначити, необхідно скласти ще одне рівняння. За визначенням і на підставі формули (24.12) коефіцієнт відновлення для співударних тіл A і B

$$k = -\frac{U_n}{V_n} = -\frac{U_A - U_B}{V_A - V_B}, \quad (24.61)$$

де $U_n = U_A - U_B$ — проекція вектора швидкості тіла A в кінці удару на нормаль n ; $V_n = V_A - V_B$ — проекція вектора швидкості тіла A на початку удару на нормаль n .

Об'єднавши рівняння (24.60) і (24.61), матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} m_A V_A + m_B V_B = m_A U_A + m_B U_B; \\ k = \frac{U_A - U_B}{V_A - V_B}. \end{cases} \quad (24.62)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (24.62), визначимо проекції векторів швидкостей тіл A і B у кінці удару на нормаль n :

$$\begin{cases} U_A = V_A - (1+k) \frac{m_B}{m_A + m_B} (V_A - V_B); \\ U_B = V_B - (1+k) \frac{m_A}{m_A + m_B} (V_B - V_A). \end{cases} \quad (24.63)$$

Тепер знайдемо зміну кінетичної енергії $T - T_0$ системи співударних тіл A і B за час удару.

Очевидно, що

$$\begin{aligned} T - T_0 &= \left(\frac{m_A U_A^2}{2} + \frac{m_B U_B^2}{2} \right) - \left(\frac{m_A V_A^2}{2} + \frac{m_B V_B^2}{2} \right) = \\ &= \frac{m_A}{2} (U_A - V_A)(U_A + V_A) + \frac{m_B}{2} (U_B - V_B)(U_B + V_B). \end{aligned} \quad (24.64)$$

Із системи (24.63) випливає:

$$\begin{cases} U_A - V_A = -(1+k) \frac{m_B}{m_A + m_B} (V_A - V_B); \\ U_B - V_B = (1+k) \frac{m_A}{m_A + m_B} (V_A - V_B). \end{cases} \quad (24.65)$$

Підставляючи ці вирази в рівність (24.64), здобудемо

$$T - T_0 = \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1+k) (V_A - V_B) (-U_A - V_A + U_B + V_B). \quad (24.66)$$

Враховуючи вираз (24.61), перетворимо рівняння (24.66) так:

$$\begin{aligned} T - T_0 &= \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1+k) [k(V_A - V_B) + V_B - V_A] = \\ &= \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1+k)(1-k)(V_A - V_B)^2, \end{aligned}$$

або остаточно

$$T - T_0 = -\frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (1-k)^2 (V_A - V_B)^2. \quad (24.67)$$

З виразу (24.67) випливає, що при $k \neq 1$ $T < T_0$, тобто за час удару відбувається втрата кінетичної енергії системи співударних тіл A і B :

$$T_{\text{втр}} = T - T_0.$$

Якщо $k = 1$ (абсолютно пружний удар), то $T = T_0$, тобто кінетична енергія системи співударних тіл не втрачається. Якщо $k = 0$ (абсолютно непружний удар), то із системи (24.62) випливає, що

$$U = U_A = U_B = \frac{m_A V_A + m_B V_B}{m_A + m_B}. \quad (24.68)$$

Формула (24.68) визначає спільну швидкість тіл у кінці прямого центрального абсолютно непружного удару.

Втрачену енергію при ударі ($k = 0$) визначимо за формулою (24.67):

$$T_{\text{втр}} = \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} (V_A - V_B)^2. \quad (24.69)$$

Нехай тепер одне з тіл, наприклад тіло B , буде нерухомим, тобто $V_B = 0$. Тоді з рівностей (24.68) і (24.69) випливає:

$$U = \frac{m_A V_A}{m_A + m_B}; \quad T_{\text{втр}} = \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)} V_A^2.$$

Таким чином, обидва тіла в кінці удару рухаються з однією швидкістю U . Тому кінетична енергія, яка залишається у системі (залишкова кінетична енергія),

$$T_{\text{зал}} = \frac{(m_A + m_B)U^2}{2} = \frac{m_A^2 V_A^2}{2(m_A + m_B)}.$$

Кінетична енергія системи на початку удару T_0 (запас енергії) складається тільки з кінетичної енергії тіла A , тобто $T_0 = \frac{m_A V_A^2}{2}$. Тоді для втраченої і залишкової кінетичних енергій системи маємо:

$$T_{\text{втр}} = \frac{m_B T_0}{m_A + m_B} = \frac{T_0}{1 + \frac{m_A}{m_B}}; \quad T_{\text{зал}} = \frac{m_A T_0}{m_A + m_B} = \frac{T_0}{1 + \frac{m_B}{m_A}}. \quad (24.70)$$

Практично удар використовується або для деформації тіл, або для надання тілам швидкості. Втрачена системою кінетична енергія витрачається на деформацію тіл, залишкова кінетична енергія — на подолання опору в подальшому русі тіл. Якщо удар використовується для деформування тіл, то втрачена кінетична енергія має становити значну частину загального запасу енергії. З першої формули (24.70) випливає, що цей випадок буде мати місце, якщо $m_B \gg m_A$, тобто маса нерухомого тіла, наприклад ковадла під час кування, має бути значно більшою маси тіла, що ударяє (молота).

Якщо удар виконується для надання швидкості співударним тілам, то залишкова кінетична енергія має становити значну частину загального запасу енергії. З другої формули (24.70) випливає, що цей випадок буде мати місце, якщо $m_A \gg m_B$, тобто маса тіла, що ударяє, наприклад молотка під час забивання цвяхів, має бути значно більшою маси нерухомого тіла — цвяха.

Якщо має місце абсолютно пружний удар ($k = 1$) для тіл з однаковою масою ($m_A = m_B$), з рівностей (24.63) матимемо $U_A = V_B$, $U_B = V_A$. Отже, під час абсолютно пружного удару тіл з однаковою масою має місце обмін швидкостями і втрата кінетичної енергії не відбувається.

24.9. Центр удару

Розглянемо тверде тіло, яке може обертатися навколо нерухомої осі Oz (рис. 24.9). У деякий момент часу до тіла прикладається ударний імпульс \vec{S} , який спричинює ударні реакції накладених на вісь обертання тіла в'язей (підшипників) \vec{S}_A і \vec{S}_B . На початку удару тіло мало кутову швидкість ω_0 . З'ясуємо умови, за яких ударні реакції в'язей \vec{S}_A і \vec{S}_B не виникають. Для цього застосуємо теореми про зміну кількості руху та кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомої точки при ударі:

$$\begin{cases} \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e = \vec{S} + \vec{S}_A + \vec{S}_B; \\ \vec{K} - \vec{K}_0 = \sum_{k=1}^n M_O(\vec{S}_k^e) = \vec{M}_O(\vec{S}) + \vec{M}_O(\vec{S}_A) + \vec{M}_O(\vec{S}_B), \end{cases} \quad (24.71)$$

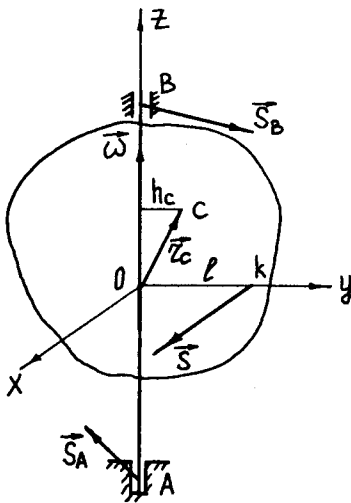


Рис. 24.9

де \vec{Q} і \vec{K} — відповідно кількість руху і кінетичний момент твердого тіла (незмінної механічної системи) відносно нерухомої точки в кінці удару; \vec{Q}_0 і \vec{K}_0 — відповідно кількість руху і кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої точки на початку удару.

Швидкість точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, визначається за формулою Ейлера: $\vec{V}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$. Тоді кількість руху тіла можна визначити за такою формулою:

$$Q = M\vec{V}_C = M(\vec{\omega} \times \vec{r}_C),$$

де M — маса твердого тіла, а \vec{r}_C — радіус-вектор його центра мас. Оскільки вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\omega}_0$ розміщені на осі обертання, то, беручи до уваги останню формулу, зміну кількості руху тіла можна визначити так:

$$\begin{aligned} \vec{Q} - \vec{Q}_0 &= M \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & (\omega - \omega_0) \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} = M [\vec{j}(\omega - \omega_0)x_c - \vec{i}(\omega - \omega_0)y_c] = \\ &= -My_c(\omega - \omega_0)\vec{i} + Mx_c(\omega - \omega_0)\vec{j}. \end{aligned} \quad (24.72)$$

Визначимо проекції кінетичного моменту твердого тіла відносно нерухо-
мої точки на осі координат, що жорстко зв'язані з тілом, за формулами (22.35),
які у даному випадку набирають вигляду:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z; \\ K_y &= -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_z \omega_z; \\ K_z &= -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y - J_z \omega_z. \end{aligned}$$

За умовою, що $\omega_x = \omega_y = 0$, а $\omega_z = \omega$, і на підставі останніх виразів про-
екції зміни кінетичного моменту $\vec{K} - \vec{K}_0$ твердого тіла відносно нерухо-
мої точки на осі координат, що жорстко зв'язані з тілом, можна визначити за
формулами:

$$\begin{aligned} K_x - K_{0x} &= -J_{xz} (\omega - \omega_0); \\ K_y - K_{0y} &= -J_{yz} (\omega - \omega_0); \\ K_z - K_{0z} &= J_z (\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (24.73)$$

Проекціюючи рівняння системи (24.71) на осі декартової системи координат,
що жорстко зв'язані з тілом, і беручи до уваги вирази (24.72) і (24.73), збудемо:

$$\begin{cases} -My_C (\omega - \omega_0) = S_x + S_{Ax} + S_{Bx}; \\ Mx_C (\omega - \omega_0) = S_y + S_{Ay} + S_{By}; \\ 0 = S_z + S_{Az} + S_{Bz}; \\ -J_{xz} (\omega - \omega_0) = M_x (\vec{S}) + M_x (\vec{S}_A) + M_x (\vec{S}_B); \\ -J_{yz} (\omega - \omega_0) = M_y (\vec{S}) + M_y (\vec{S}_A) + M_y (\vec{S}_B); \\ J_z (\omega - \omega_0) = M_z (\vec{S}) + M_z (\vec{S}_A) + M_z (\vec{S}_B). \end{cases} \quad (24.74)$$

Із системи рівнянь (24.74) при $\vec{S}_A = \vec{S}_B = \vec{0}$, тобто за умови відсутності
ударних реакцій, матимемо:

$$\begin{cases} -My_C (\omega - \omega_0) = S_x; \\ Mx_C (\omega - \omega_0) = S_y; \\ 0 = S_z; \\ -J_{xz} (\omega - \omega_0) = M_x (\vec{S}); \\ -J_{yz} (\omega - \omega_0) = M_y (\vec{S}); \\ J_z (\omega - \omega_0) = M_z (\vec{S}). \end{cases} \quad (24.75)$$

З рівнянь (24.75) випливає, що складова ударного імпульсу вздовж осі Oz за умови відсутності ударних реакцій має дорівнювати нулю ($S_z = 0$). Це можливо тільки у випадку, коли ударний імпульс прикладений до тіла в площині xOy . Якщо напрямити координатну вісь Ox паралельно вектору ударного імпульсу \vec{S} , то ударний імпульс \vec{S} буде перетинати вісь Oy в деякій точці k (рис. 24.9). При такому розміщенні осей координат маємо: $S_y = 0$, $S_x = S$, $M_x(\vec{S}) = 0$, $M_y(\vec{S}) = 0$. Тоді із системи рівнянь (24.75) одержуємо геометричні вимоги до твердого тіла: $x_C = 0$, $J_{xy} = J_{yz} = 0$, тобто центр мас тіла має бути в площині yOz , а вісь обертання Oz має бути головною віссю інерції твердого тіла. Отже, вектор ударного імпульсу має бути перпендикулярним до площини yOz , в якій розташовані вісь обертання твердого тіла і його центр мас.

Нехай точкою прикладання ударного імпульсу \vec{S} на осі Oy буде точка k (рис. 24.9), а відстань $Ok = l$. Тоді $M_z(\vec{S}) = -lS$, якщо напрям вектора \vec{S} збігається з додатним напрямом осі Ox . Тоді із системи рівнянь (24.75) на підставі розглянутого раніше здобудемо:

$$\begin{cases} -My_C(\omega - \omega_0) = S; \\ J_z(\omega - \omega_0) = -lS. \end{cases} \quad (24.76)$$

Виключаючи з рівнянь системи (24.76) величину S , отримуємо

$$l = \frac{J_z}{My_C}. \quad (24.77)$$

Формула (24.77) збігається з формулою (22.10), яка визначає зведену довжину фізичного маятника.

*Точка k — точка перетину лінії дії вектора ударного імпульсу \vec{S} з площиною, що містить вісь обертання твердого тіла та його центр мас, називається **центром удару**.*

Таким чином, будь-який за величиною ударний імпульс \vec{S} , лінія дії якого проходить через точку k перпендикулярно до площини, що містить вісь обертання твердого тіла і його центр мас, не спричинює ударних реакцій в'язей, накладених на вісь обертання тіла, якщо вісь обертання є головною віссю інерції тіла і розташована перпендикулярно до площини, в якій розміщений вектор ударного імпульсу \vec{S} . Відстань від осі обертання до лінії дії ударного імпульсу l тотожна зведеній довжині фізичного маятника.

Центр удару k і центр мас твердого тіла C розташовані з одного боку від осі обертання тіла.

Якщо центр мас твердого тіла розташований на осі обертання тіла, то $y_c = 0$ і відстань l на підставі рівності (24.77) буде дорівнювати нескінченності. Отже, в цьому випадку центра удару не існує, і ударний імпульс \vec{S} , прикладений до тіла, повністю передається на в'язі, накладені на вісь обертання тіла (підшипники), тобто

$$\vec{S}_A + \vec{S}_B = -\vec{S}. \quad (24.78)$$

24.10. Приклади розв'язання задач динаміки механічної системи при дії ударних сил (миттєво прикладених сил)

Приклад 24.1. Баба A ударного копра падає з висоти $4,905$ м і ударяє ковадло B . Ковадло закріплене на пружині (рис. 24.10). Маса баби 10 кг, маса ковадла 5 кг. Визначити, з якою швидкістю почне рухатися ковадло після удару, якщо баба буде рухатися разом з ним.

Розв'язання. Розглядаємо явище центрального абсолютно непружного удару. Напрямою вісь n (загальна нормаль до поверхонь співударних тіл у точці їх дотику) так, як зображено на рис. 24.10.

Визначаємо проекції швидкостей центрів мас баби і ковадла на вісь n на початку удару:

$$V_{An} = \sqrt{2gh}; \quad V_{Bn} = 0.$$

Визначаємо проекцію на вісь n спільної швидкості співударних тіл у кінці абсолютно непружного удару:

$$U_n = \frac{m_A V_{An} + m_B V_{Bn}}{m_A + m_B} = \frac{10\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4,905} + 5 \cdot 0}{10 + 5} = 6,54 \text{ м/с}.$$

Приклад 24.2. Вантаж A масою m_A падає без початкової швидкості з висоти h на плиту B масою m_B , закріплену на пружині, що має коефіцієнт жорсткості c (рис. 24.11). Знайти величину S стиску пружини після удару, взявши, що коефіцієнт відновлення дорівнює нулю.

Розв'язання. Загальну нормаль до поверхонь співударних тіл у точці їх дотику n направляємо вертикально вниз. Позначимо швидкість вантажу A на початку удару через V_{An} , а в кінці удару — U_n . Швидкість плити на початку удару дорівнює нулю, тобто $V_{Bn} = 0$.

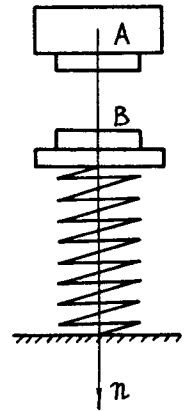


Рис. 24.10

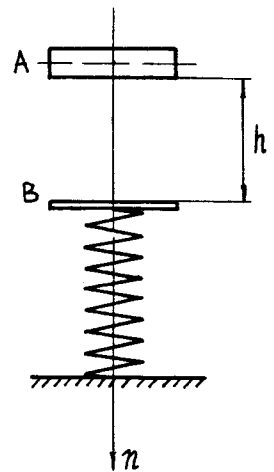


Рис. 24.11

Визначаємо проекцію на вісь n спільної швидкості вантажу і плити в кінці абсолютно непружного удару:

$$U_n = \frac{m_A V_{An} + m_B V_{Bn}}{m_A + m_B} = \frac{m_A V_{An}}{m_A + m_B}.$$

Оскільки швидкість вантажу на початку удару $V_{An} = \sqrt{2gh}$, то остання формула набирає вигляду

$$U_n = \frac{m_A V_{An}}{m_A + m_B} = \frac{m_A \sqrt{2gh}}{m_A + m_B}.$$

Робота ударної сили пружності, яка спричинює деформацію пружини S , становить:

$$A = A_{\text{ст}} + A_{\text{уд}},$$

де $A_{\text{ст}}$ — робота сили ваги вантажу A при її статичному прикладанні до пружини; $A_{\text{уд}}$ — робота сили ваги вантажу A і сили ваги плити B при їх ударному прикладанні до пружини.

Визначаємо величини робіт A і $A_{\text{ст}}$:

$$A = \frac{cS^2}{2}; \quad A_{\text{ст}} = m_A g S.$$

Роботу $A_{\text{уд}}$ визначаємо на підставі теореми про зміну кінетичної енергії при ударі:

$$\Delta T = A_{\text{уд}} = \frac{(m_A + m_B)}{2} U_n^2 = \frac{(m_A + m_B)}{2} \left(\frac{m_A V_{An}}{m_A + m_B} \right)^2 = \frac{m_A^2 V_{An}^2}{2(m_A + m_B)}.$$

Тоді

$$\frac{cS^2}{2} = m_A g S + \frac{m_A^2 \cdot 2gh}{2(m_A + m_B)}.$$

Перетворимо цю рівність так:

$$\frac{c}{2} S^2 - m_A g S - \frac{m_A^2 \cdot 2gh}{2(m_A + m_B)} = 0.$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння, здобудемо

$$S = \frac{m_A g}{c} + \sqrt{\left(\frac{m_A g}{c} \right)^2 + \frac{m_A^2 \cdot 2gh}{c(m_A + m_B)}}.$$

Приклад 24.3. Для зміцнення ґрунту під фундаментом будівлі палі масою $m_2 = 50$ кг забивалися копром у ґрунт (рис. 24.12). Бойок копра масою $m_1 = 450$ кг падає без початкової швидкості з висоти $h = 2$ м; коефіцієнт відновлення дорівнює нулю; за останні десять ударів паля заглибилась у ґрунт на $\delta = 5$ см. Визначити середній опір ґрунту при забиванні палі.

Розв'язання. Загальну нормаль до поверхонь співударних тіл у точці їх дотику n напрямляємо вертикально вниз.

Визначаємо кінетичну енергію системи на початку удару:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} 450 (\sqrt{2gh})^2 = 450gh \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Визначаємо кінетичну енергію при абсолютно непружному ударі, що витрачається тільки на подолання опору ґрунту при русі палі:

$$T_2 = \frac{m_1 T}{m_1 + m_2} = \frac{450 \cdot 450gh}{50 + 450} = 405gh \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Робота сил опору ґрунту за один удар бойка

$$A_{\text{оп}} = \frac{S\delta}{n_{\text{уд}}},$$

де S — величина сили опору ґрунту за один удар бойка по палі; $n_{\text{уд}}$ — кількість ударів, за які паля заглиблюється в ґрунт на глибину $\delta = 5$ см.

Тоді маємо

$$T_2 = A_{\text{оп}},$$

звідки з урахуванням значень T_2 і $A_{\text{оп}}$ здобудемо

$$S = \frac{T_2 n_{\text{уд}}}{\delta} = \frac{450gh n_{\text{уд}}}{\delta} = \frac{450 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10}{0,05} = 159 \text{ кН}.$$

Приклад 24.4. Паровий молот масою $12 \cdot 10^3$ кг падає зі швидкістю 5 м/с на ковадло, маса якого разом із куском заліза, що кується, дорівнює $250 \cdot 10^3$ кг.

Знайти роботу $A_{\text{деф}}$, що поглинається куском заліза, і роботу $A_{\text{віб}}$, що витрачається на коливання фундаменту, а також визначити коефіцієнт η корисної дії молота; удар непружний.

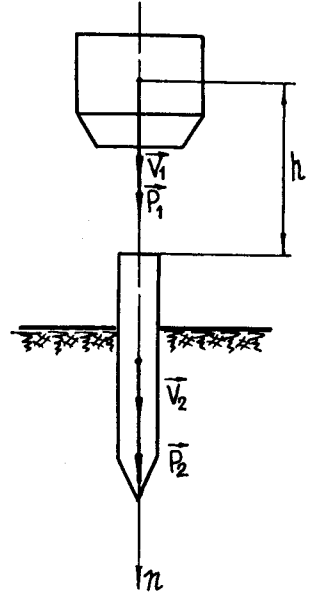


Рис. 24.12

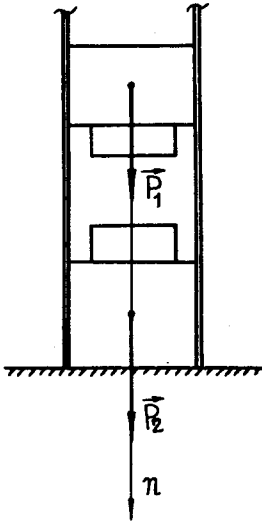


Рис. 24.13

Розв'язання. Загальну нормаль до поверхонь співударних тіл у точці їх дотику напрямляємо вертикально вниз (рис. 24.13).

Оскільки зовнішні ударні імпульси, прикладені до системи, відсутні, тобто $\sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e = \vec{0}$, то має місце закон збереження кількості руху механічної системи при ударі:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2, \quad (1)$$

де \vec{V}_1, \vec{V}_2 — величини відповідно швидкості молота і ковадла з куском заліза на початку удару; U_1, U_2 — величини відповідно швидкості молота і ковадла з куском заліза в кінці удару.

Оскільки удар непружний, то коефіцієнт відновлення

$$k = -\frac{U_1 - U_2}{V_1 - V_2} = 0,$$

звідки маємо

$$U_1 = U_2 = U.$$

Враховуючи останні рівності і беручи до уваги що $V_2 = 0$, з рівняння (1) здобудемо

$$U = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}.$$

Втрачена кінетична енергія при прямому центральному ударі двох тіл визначається за формулою

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (V_1 - V_2)^2.$$

Для випадку, що розглядається, цей вираз спрощується, оскільки $k = 0$ і $V_2 = 0$:

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} V_1^2.$$

Оскільки вся втрачена кінетична енергія при ударі молота витрачається на деформацію куска заліза, що кується, то маємо

$$\Delta T = A_{\text{деф}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} V_1^2 = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 250 \cdot 10^3 \cdot 5^2}{2(12 \cdot 10^3 + 250 \cdot 10^3)} = 143 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Через те що в кінці удару молот і ковадло з куском заліза рухаються з одною швидкістю U , то кінетична енергія, що залишилася у системі, витрачається на коливання фундаменту:

$$\begin{aligned} T_{\text{зал}} = A_{\text{віб}} &= \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)(m_1 V_1)^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \\ &= \frac{m_1^2 V_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{(12 \cdot 10^3)^2 \cdot 5^2}{2(12 \cdot 10^3 + 250 \cdot 10^3)} = 6,87 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт корисної дії молота визначається за формулою

$$\eta = \frac{A_{\text{деф}}}{A_{\text{деф}} + A_{\text{віб}}} = \frac{143 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^3 + 6,87 \cdot 10^3} = 0,954.$$

Приклад 24.5. Дві однакові пружні кулі A і B рухаються назустріч одна одній. За якого співвідношення між швидкостями куль на початку удару куля A після удару зупиняється? Коефіцієнт відновлення при ударі дорівнює k .

Розв'язання. У цій задачі розглядається прямий центральний абсолютно пружний удар. Будуємо систему координат Ox так, як зображено на рис. 24.14.

Визначаємо проекції швидкості співударних тіл на початку і в кінці удару на вісь x :

$$V_n = V_A - V_B, \quad U_n = U_B - U_A.$$

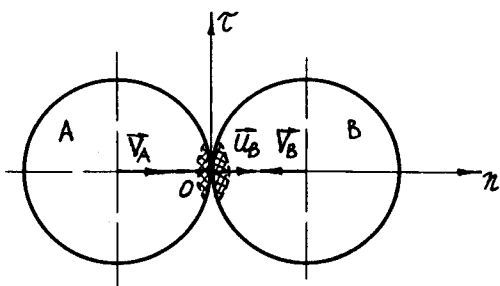


Рис. 24.14

Визначаємо коефіцієнт відновлення:

$$k = \frac{U_n}{V_n} = \frac{U_B - U_A}{V_A - V_B}.$$

За умовою задачі куля A має залишатися нерухомою, тобто $U_A = 0$. Отже,

$$U_B = k(V_A - V_B).$$

Розглядаємо дві фази деформації співударних тіл. Перша фаза деформації буде характеризуватися відносною швидкістю взаємного проникнення $V_n^{\text{вдн}} = V_A + V_B$. Друга фаза відновлення характеризується відносною швидкі-

стю: $U_n^{\text{відн}} = U_B - U_A$. Оскільки удар абсолютно пружний, то має місце обмін швидкостями:

$$V_n^{\text{відн}} = U_n^{\text{відн}};$$

отже, при $U_A = 0$ маємо

$$U_B = V_A + V_B.$$

Порівнюючи значення U_B :

$$k(V_A - V_B) = V_A + V_B,$$

знайдемо шукане співвідношення швидкостей:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{1+k}{1-k}.$$

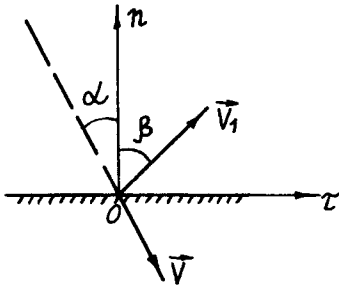


Рис. 24.15

Приклад 24.6. Кулька падає з нахилом зі швидкістю V на нерухому горизонтальну площину і відскакує від площини зі швидкістю $V_1 = \frac{V\sqrt{2}}{2}$. Визначити кут падіння α і кут відбиття β , якщо коефіцієнт відновлення при ударі $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язання. Будемо систему координат $O\tau n$ так, як зображено на рис. 24.15.

Проекції швидкостей на початку і в кінці удару на вісь τ рівні між собою, оскільки удар здійснюється без тертя:

$$V \sin \alpha = V_1 \sin \beta,$$

звідки маємо $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta$.

Відношення проекції швидкостей на початку і в кінці удару на вісь n визначає коефіцієнт відновлення:

$$k = \frac{U_n}{V_n} = \frac{V_1 \cos \beta}{V \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \cos \beta}{2 \cos \alpha},$$

звідки визначаємо

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \cos \beta.$$

Оскільки $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, то

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \cos^2 \beta\right) = 1,$$

або

$$0,5 \sin^2 \beta + 1,5 \cos^2 \beta = 1.$$

Підставляючи в цю рівність замість $\cos^2 \beta$ значення за відомою формулою $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$, здобудемо

$$\sin \beta = 0,707;$$

отже, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Визначаємо кут α за формулою

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{4} = 0,5;$$

отже, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Приклад 24.7. Маятник ударної машини складається зі сталевго диска A радіусом 10 см і товщиною 5 см та зі сталевго круглого стрижня B , що має $d = 2$ см і $l = 90$ см (рис. 24.16). На якій відстані l_c від горизонтальної площини, в якій розташована вісь обертання O , має бути розміщений брусок C , що його розбиває машина, щоб вісь не зазнавала удару? Ударний імпульс лежить у площині рисунка і напрямлений горизонтально.

Розв'язання. Будуємо декартову систему координат Oxy (рис. 24.16) і відносно цієї системи координат визначаємо координату y_c центра мас системи:

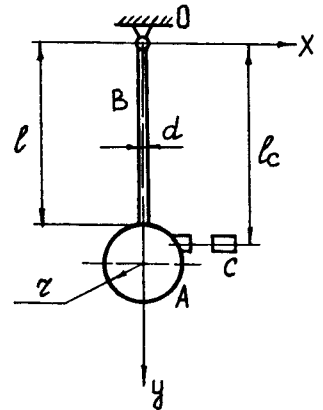


Рис. 24.16

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{\rho \left[\pi r^2 \delta (l+r) + \frac{\pi d^2}{8} l^2 \right]}{\rho \left(\pi r^2 \delta + \frac{\pi d^2}{4} l \right)} = \frac{\left(r^2 \delta (l+r) + \frac{d^2}{8} l^2 \right)}{r^2 \delta + \frac{d^2}{4} l} =$$

$$= \frac{10^2 \cdot 5(90 + 10) + \frac{2^2}{8} 90^2}{10^2 \cdot 5 + \frac{2^2}{4} 90} = 91,6 \text{ см,}$$

де ρ — питома вага матеріалу маятника; r — радіус диска; δ — товщина диска; l — довжина стрижня; d — діаметр стрижня.

Визначаємо момент інерції системи відносно центра O :

$$J_0 = J_0^{\text{диска}} + J_0^{\text{стрижня}} = \rho \left[\frac{\pi d^2}{4} l \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \pi r^2 \delta \frac{r^2}{2} + \pi r^2 \delta (l + r) \right] = 5291375 \rho \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Визначаємо центр удару за формулою

$$l_c = \frac{J_0}{My_c} = \frac{5291375 \rho}{590 \rho \cdot 91,6} = 97,9 \text{ см,}$$

$$\text{де } M = \rho \left(\pi r^2 \delta + \frac{\pi d^2}{4} l \right) = 590 \rho \text{ кг.}$$

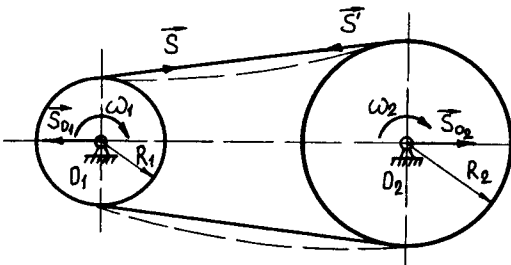


Рис. 24.17

Приклад 24.8. Два шківів обертаються в одній площині навколо власних осей з кутовими швидкостями ω_{10} і ω_{20} . Визначити кутові швидкості шківів ω_1 і ω_2 після того, як на них буде накинуто пас (рис. 24.17), вважаючи шківів круглими дисками, що мають однакову питому вагу і радіуси

R_1 і R_2 . Ковзанням і масою паса знехтувати.

Розв'язання. Накидання паса рівносильне накладанню на систему миттєвої ідеальної в'язі, тобто має місце явище удару.

Застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту при ударі відносно нерухомої точки для двох шківів:

$$\begin{aligned} J_1 (\omega_1 - \omega_{10}) &= SR_1; \\ J_2 (\omega_2 - \omega_{20}) &= S'R_2, \end{aligned}$$

де J_1, J_2 — моменти інерції шківів відносно осей обертання; ω_1, ω_2 — кутові швидкості шківів у кінці удару; $S = S'$ — ударний імпульс.

Складаючи почленно останні рівняння, здобудемо

$$\frac{J_1}{R_1}(\omega_1 - \omega_{10}) + \frac{J_2}{R_2}(\omega_2 - \omega_{20}) = 0.$$

Оскільки ковзанням паса нехтуємо, то

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

звідки маємо

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 R_2}{R_1}.$$

Підставляючи значення ω_1 в останню рівність, здобудемо

$$\frac{J_1}{R_1} \left(\frac{\omega_2 R_2}{R_1} - \omega_{10} \right) + \frac{J_2}{R_2} (\omega_2 - \omega_{20}) = 0,$$

звідки здобудемо

$$\omega_2 = \frac{\frac{J_1}{R_1} \omega_{10} + \frac{J_2}{R_2} \omega_{20}}{\frac{J_1 R_2}{R_1^2} + \frac{J_2}{R_2}}. \quad (1)$$

За умовою задачі питома вага обох шківів однакова. Візьмемо, що товщина шківів δ також однакова. Тоді маса шківів становить:

$$M_1 = \rho \pi R_1^2 \delta;$$

$$M_2 = \rho \pi R_2^2 \delta.$$

Визначаємо моменти інерції шківів відносно осей обертання:

$$J_1 = (\rho \pi R_1^2 \delta) \frac{R_1^2}{2};$$

$$J_2 = (\rho \pi R_2^2 \delta) \frac{R_2^2}{2}.$$

Підставляючи значення J_1 і J_2 у рівність (1), матимемо

$$\omega_2 = \frac{\rho \frac{\pi}{2} \delta (R_1^3 \omega_{10} + R_2^3 \omega_{20})}{\rho \frac{\pi \delta}{2} (R_1^2 R_2 + R_2^3)} = \frac{R_1^3 \omega_{10} + R_2^3 \omega_{20}}{R_2 (R_1^2 + R_2^2)}.$$

Аналогічно знайдемо

$$\omega_1 = \frac{R_1^3 \omega_{10} + R_2^3 \omega_{20}}{R_1 (R_1^2 + R_2^2)}.$$

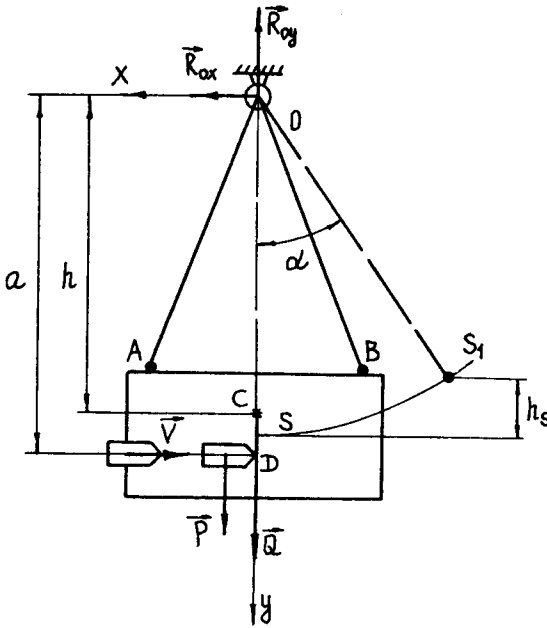


Рис. 24.18

Приклад 24.9. Балістичний маятник, що застосовується для визначення швидкості різних твердих тіл, складається з циліндра AB , підвішеного на горизонтальній осі O ; циліндр відкритий з одного кінця A і наповнений піском; тверде тіло, яке влітає в циліндр, відхиляє маятник навколо осі O на кут α . Дано: M — маса маятника; $OC = h$ — відстань центра мас маятника від осі обертання; ρ — радіус інерції відносно осі обертання маятника; m — маса твердого тіла; $OD = a$ — відстань лінії дії удару від осі обертання маятника; α — кут відхилення маятника від вертикалі (рис. 24.18).

Визначити швидкість твердого тіла V , вважаючи, що вісь O маятника не зазнає дії удару: $ah = \rho^2$.

Розв'язання. Застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху механічної системи відносно нерухомої точки:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}_h^e).$$

Головний момент $\vec{M}_O(\vec{F}_h^e)$ зовнішніх сил (сил ваги маятника, твердого тіла, реакції шарніра O) відносно точки O дорівнює нулю. Отже, маємо закон збереження моменту кількості руху системи відносно точки O : $\vec{K}_O = \text{const}$.

Визначаємо величину моменту кількості руху системи відносно точки O у початковий момент руху системи:

$$K_{O_1} = mVa.$$

Визначаємо величину моменту кількості руху системи відносно точки O в кінцевий момент руху системи:

$$K_{O_2} = \omega(J_o + ma^2) = \omega(Mah + ma^2),$$

де $J_o = M\rho^2 = Mah$ — момент інерції маятника відносно осі обертання; ma^2 — момент інерції твердого тіла відносно осі обертання маятника.

Отже,

$$mVa = \omega(Mah + ma^2),$$

звідки знаходимо

$$V = \frac{\omega(Mh + ma)}{m}. \quad (1)$$

Для визначення кутової швидкості системи ω в кінці удару застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи. Оскільки система не змінна, маємо

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e.$$

У кінцевий момент часу після відхилення маятника на кут α кінетична енергія системи дорівнює нулю, тобто $T = 0$. Отже,

$$-T_0 = \sum_{k=1}^n A_k^e.$$

У початковий момент часу кінетична енергія системи

$$T_0 = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{(J_o + ma^2)\omega^2}{2} = \frac{(Mah + ma^2)\omega^2}{2},$$

де J — момент інерції системи відносно осі обертання маятника.

Робота зовнішніх сил, що діють на систему,

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = -(M + m)gh_s,$$

де h_s — висота, на яку піднімається центр мас системи S у кінцевий момент часу:

$$h_s = y_s(1 - \cos \alpha),$$

або

$$h_s = \frac{Mh + ma}{M + m}(1 - \cos \alpha).$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^n A_k^e = -(M+m)g \frac{Mh+ma}{M+m} (1 - \cos \alpha).$$

Тоді

$$-\frac{(Mah+ma^2)\omega^2}{2} = -(M+m)g \frac{Mh+ma}{M+m} (1 - \cos \alpha),$$

звідки здобудемо

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Підставляючи значення ω у рівність (1), знайдемо шукану швидкість твердого тіла:

$$V = 2 \frac{Mh+ma}{m} \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

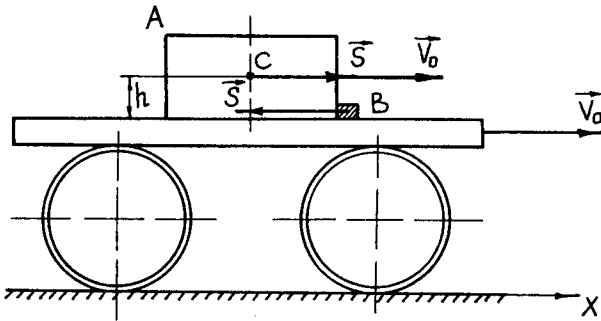


Рис. 24.19

Приклад 24.10. Платформа разом із вантажем AB котиться по горизонтальним рейкам зі швидкістю V_0 . На платформі є виступ, в який упирається ребро B вантажу (рис. 24.19). Виступ заважає вантажу ковзати вперед по платформі, але не заважає йому обертатися навколо ребра B . Дано: h — висота центра мас вантажу над платформою; ρ —

радіус інерції вантажу відносно ребра B . Визначити кутову швидкість ω обертання вантажу навколо ребра B у момент миттєвої зупинки платформи.

Розв'язання. Розглянемо рух вантажу AB разом із платформою вздовж осі x (рис. 24.19) зі швидкістю V_0 .

У момент миттєвої зупинки платформи швидкість вантажу змінюється від V_0 до 0. В цей момент виникає ударний імпульс \vec{S} , прикладений до центра мас вантажу. Під дією ударного імпульсу вантаж буде обертатися навколо ребра B . Застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно довільної осі:

$$J_B (\omega - \omega_0) = Sh.$$

Оскільки в момент $t = 0$ $\omega_0 = 0$ і $J_B = m\rho^2$, то останній вираз набирає вигляду

$$S = \frac{m\rho^2\omega}{h}.$$

У момент миттєвої зупинки виступ діє на вантаж імпульсом $-\bar{S}$. Застосуємо теорему про зміну кількості руху механічної системи в проекції на вісь x :

$$mV - mV_0 = -S.$$

Оскільки момент миттєвої зупинки $V = 0$, то з останнього виразу випливає

$$S = mV_0.$$

Порівнюючи значення імпульсів, здобудемо шукану кутову швидкість:

$$\omega = \frac{V_0 h}{\rho^2}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Яке явище називається ударом?
2. Що таке лінія удару?
3. Який удар називається прямим центральним?
4. Який удар називається косим центральним?
5. Який удар називається позацентровим?
6. Що називається коефіцієнтом відновлення і що він характеризує?
7. Як визначається коефіцієнт відновлення дослідним шляхом?
8. Запишіть основне рівняння динаміки матеріальної точки при ударі.
9. Як формулюється теорема про зміну кількості руху механічної системи при ударі?
10. За якою формулою визначається зміна швидкості центра мас механічної системи при ударі?
11. Як формулюється закон збереження кількості руху механічної системи при ударі?
12. Як формулюється теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи відносно довільного нерухомого центра при ударі?
13. Як формулюється закон збереження кінетичного моменту механічної системи відносно нерухомого центра при ударі?
14. За якою формулою визначається зміна кінетичного моменту твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, відносно осі обертання при ударі?

15. Як формулюється теорема Кельвіна?
16. Як формулюється перша теорема Карно?
17. Як формулюється друга теорема Карно?
18. Як формулюється загальна теорема Карно?
19. За якою формулою визначається спільна швидкість двох тіл у кінці прямого центрального абсолютно непружного удару?
20. За яких умов опори твердого тіла, що обертається, не зазнають дії зовнішнього ударного імпульсу, прикладеного до тіла?
21. Що називається центром удару твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, і яке його положення?

Глава 25

ДИНАМІКА ТОЧКИ І ТІЛА ЗМІННОЇ МАСИ

25.1. Диференціальне рівняння руху точки змінної маси

Під терміном точка будемо розуміти матеріальне тіло, кінематичними елементами обертального руху якого можна знехтувати порівняно з кінематичними елементами поступального руху. Отже, точку змінної маси можна розглядати як центр мас матеріального тіла, що рухається поступально, маса якого змінюється з часом, причому процес зміни маси тіла відбувається таким чином, що центр мас тіла завжди залишається в деякій фіксованій точці тіла.

З математичного погляду *точка змінної маси* — це геометрична точка з деякою кінцевою масою, яка неперервно змінюється під час руху.

Розв'язання основної задачі динаміки точки змінної маси — отримання диференціального рівняння її руху — ґрунтується на таких принципових положеннях.

1. Приймається гіпотеза близькодії (контактної взаємодії) при відокремленні матеріальних часток від точки змінної маси або при їх приєднанні до неї. При цьому вважається, що частки при їх відокремленні або приєднанні змінюють кількість руху точки змінної маси тільки в момент їх безпосереднього контакту з точкою; як тільки частка набуває відносної швидкості щодо точки змінної маси, її вплив на точку припиняється.

2. Вважається, що маса кожної з часток, які відокремлюються або приєднуються до точки, і час між їх послідовним відокремленням або приєднанням дуже малі. Це припущення робить можливим моделювання процесу зміни маси матеріальної точки неперервною і диференційованою функцією

часу. Розглянуте стосується і зміни швидкості точки змінної маси, тобто зміна швидкості точки при відокремленні або приєднанні часток також моделюється неперервною і диференційованою функцією часу.

3. Зміна швидкості точки змінної маси відбувається за рахунок дії зовнішніх сил і за рахунок відокремлення або приєднання елементарних мас $dm_1, dm_2, dm_3, \dots, dm_n$, що рівнозначно дії деяких внутрішніх сил. Згідно із законом незалежності дії сил, який є також законом паралелограма прискорень, сумарний приріст швидкості точки $d\vec{V}$ зумовлений приростом швидкості $d\vec{V}_1$ за рахунок відокремлення або приєднання маси і приростом швидкості $d\vec{V}_2$, якій виникає під дією поля зовнішніх сил і визначається за формулою

$$d\vec{V} = d\vec{V}_1 + d\vec{V}_2. \quad (25.1)$$

4. Закон збереження кількості руху для точки змінної маси формулюється так: *за будь-яких механічних процесів, які відбуваються у замкненій механічній системі (система матеріальних точок, що перебуває під дією тільки внутрішніх сил), сумарна кількість руху залишається сталою.*

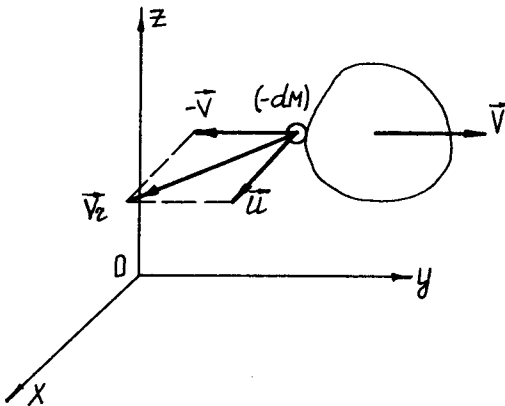


Рис. 25.1

Візьмемо точку, маса якої неперервно змінюється з часом. Будемо розглядати рух цієї точки відносно нерухомої декартової системи координат $Oxyz$ (рис. 25.1). Нехай абсолютна швидкість точки (швидкість точки відносно системи координат $Oxyz$) у момент часу t дорівнює \vec{V} . Кількість руху цієї точки

$$\vec{Q} = m\vec{V}. \quad (25.2)$$

Нехай за час dt точка відокремила від себе частку масою $(-dm)$ з абсолютною швидкістю \vec{U} .

Кількість руху системи “точка — відкинута частка” у момент часу $t + dt$ буде

Кількість руху системи “точка — відкинута частка” у момент часу $t + dt$ буде

$$\vec{Q} = [m - (-dm)](\vec{V} + d\vec{V}_1) + (-dm)\vec{U}, \quad (25.3)$$

де $d\vec{V}_1$ — приріст швидкості точки за рахунок відокремлення частки.

За законом збереження кількості руху маємо

$$\vec{Q}(t) = \vec{Q}(t + dt),$$

або

$$(m + dm)(\vec{V} + d\vec{V}_1) - dm\vec{U} = m\vec{V}. \quad (25.4)$$

Розкриваючи дужки і нехтуючи добутком $dm d\vec{V}_1$ як членом другого порядку малості, рівняння (25.4) запишемо так:

$$d\vec{V}_1 = \frac{dm}{m}(\vec{U} - \vec{V}). \quad (25.5)$$

Рівність (25.5) дає можливість визначити приріст швидкості точки масою m за рахунок відокремлення частки масою $(-dm)$.

Приріст швидкості точки від дії на точку зовнішніх сил, рівнодійна яких дорівнює \vec{F}^e , з точністю до величин другого порядку малості визначимо на підставі другого закону Ньютона:

$$d\vec{V}_2 = \frac{1}{m} \vec{F}^e dt. \quad (25.6)$$

Підставляючи рівності (25.5) і (25.6) у рівняння (25.1), матимемо

$$d\vec{V} = d\vec{V}_1 + d\vec{V}_2 = \frac{dm}{m}(\vec{U} - \vec{V}) + \frac{1}{m} \vec{F}^e dt. \quad (25.7)$$

Помножуючи обидві частини рівняння (25.7) на m і поділяючи на dt , перетворюємо це рівняння так:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}^e + \frac{dm}{dt}(\vec{U} - \vec{V}). \quad (25.8)$$

Рівняння (25.8) одержано І. В. Мещерським і називається *рівнянням Мещерського*¹.

Оскільки

$$(\vec{U} - \vec{V}) = \vec{V}_r,$$

де \vec{V}_r — відносна швидкість часток, що відокремлюються (рис. 25.1), останньому доданку в рівнянні (25.8) можна надати вигляду

$$\frac{dm}{dt}(\vec{U} - \vec{V}) = \frac{dm}{dt} \vec{V}_r = \vec{\Phi}, \quad (25.9)$$

де $\frac{dm}{dt}$ — секундна витрата маси часток; $\vec{\Phi}$ — додаткова, або реактивна, сила.

¹ Іван Всеволодович Мещерський (1859—1935) — російський математик і механік. Розробив загальну теорію руху тіл змінної маси.

Оскільки при відокремленні часток $\frac{dm}{dt} < 0$, то реактивна сила $\vec{\Phi}$ напрямлена протилежно до напрямку вектора відносної швидкості часток \vec{V}_r .
Остаточно рівняння (25.8) набуває вигляду

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}^e + \vec{\Phi}. \quad (25.10)$$

Рівняння (25.10) є шуканим диференціальним рівнянням руху точки змінної маси. З рівняння випливає: для будь-якого моменту часу добуток маси точки на її прискорення дорівнює геометричній сумі рівнодійної зовнішніх сил, прикладених до точки, і реактивної сили.

Якщо в рівнянні (25.8) розкрити дужки і добуток $\left(-\frac{dm}{dt} \vec{V}\right)$ перенести в ліву частину рівняння, то це рівняння можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}^e + \frac{dm}{dt} \vec{U}. \quad (25.11)$$

З рівняння (25.11) випливає: якщо абсолютна швидкість часток \vec{U} дорівнює нулю, то воно набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}^e, \quad (25.12)$$

звідки випливає, що перша похідна за часом від кількості руху точки змінної маси дорівнює рівнодійній зовнішніх сил, прикладених до точки.

Якщо відносна швидкість часток \vec{V}_r дорівнює нулю, на підставі рівності (25.9) $\vec{\Phi} = \vec{0}$ і рівняння (25.10) набуває вигляду диференціального рівняння руху точки сталої маси:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}^e.$$

У проєкціях на нерухомі осі декартової системи координат векторне рівняння (25.10) еквівалентне трьом скалярним виразами:

$$m \ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e + \Phi_x; \quad m \ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}^e + \Phi_y; \quad m \ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}^e + \Phi_z, \quad (25.13)$$

де $\Phi_x = \frac{dm}{dt} \dot{x}_r$; $\Phi_y = \frac{dm}{dt} \dot{y}_r$; $\Phi_z = \frac{dm}{dt} \dot{z}_r$ — відповідні проєкції реактивної сили на осі координат.

На закінчення зауважимо: незважаючи на те що рівняння (25.10) здобуте за умови руху точки змінної маси, від якої неперервно відокремлюються частки масою $dm_1, dm_2, dm_3, \dots, dm_n$, воно буде справедливим і для випадку руху точки змінної маси, до якої приєднуються частки масою $dm_1, dm_2, dm_3, \dots, dm_n$.

25.2. Вступ до динаміки тіла змінної маси

Визначаючи динаміку тіла змінної маси, будемо дотримуватися методу, що широко застосовується в динаміці тіл сталої маси, тобто будемо розглядати тіло змінної маси як сукупність точок змінної маси, рух яких визначається рівнянням Мещерського. Разом з тим обмежимося розглядом таких тіл змінної маси, для яких відокремлення часток або їх приєднання до тіла відбувається з деякої частини поверхні тіла; при цьому частки, які не мають відносної швидкості щодо системи координат, що жорстко зв'язана з тілом, вважаються частками тіла, а частки, що мають відносну швидкість, до тіла не належать і ніякого впливу на його рух не справляють. Реактивні сили та їх моменти на підставі наведених в попередньому параграфі положень розглядаються як результат контактної взаємодії в момент відокремлення часток від тіла або в момент їх приєднання до нього. Отже, припускається, що взаємодія часток з тілом змінної маси відбувається тільки в момент їх відокремлення або приєднання. Це дає змогу одержати закономірності руху тіл змінної маси, що не залежать від процесу відокремлення або приєднання часток, до моменту їх відокремлення або приєднання.

Наведене визначення тіла змінної маси дає змогу будувати теорію руху тіл змінної маси на підставі загальних теорем динаміки механічної системи: теореми про зміну кількості руху; теореми про зміну кінетичного моменту і теореми про зміну кінетичної енергії. Такий підхід до вивчення руху тіл змінної маси є найбільш простим і природним. Дійсно, знаючи рівняння руху точки змінної маси і розглядаючи тіло змінної маси як сукупність точок, можна одержати вирази загальних теорем динаміки тіла змінної маси.

Кількість руху \bar{Q} , кінетичний момент \bar{K}_O і кінетичну енергію тіла змінної маси будемо визначати за формулами динаміки механічної системи, поширюючи підсумовування тільки на ті точки тіла, що не мають відносної швидкості.

25.3. Теорема про рух центра мас тіла змінної маси

Розглянемо рух тіла змінної маси відносно нерухомої декартової системи координат $Oxuz$. Зв'яжемо жорстко з тілом рухому систему декартових координат $O_1x_1y_1z_1$, початок якої візьмемо в довільній точці тіла (полюсі) O_1 (рис. 25.2).

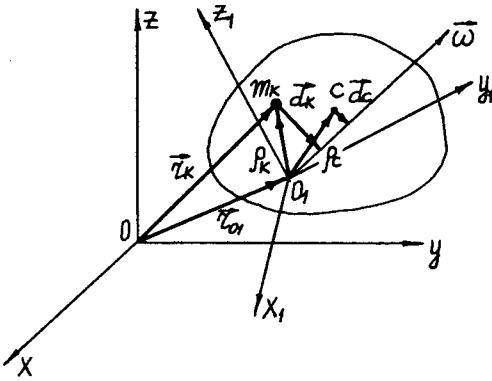


Рис. 25.2

Завдяки процесу відокремлення або приєднання матеріальних часток відбувається перерозподіл мас тіла, і тому центр мас тіла може змінювати своє положення в тілі. Інакше кажучи, він буде здійснювати складний рух, а саме рухатися разом з тілом, тобто разом із рухомою системою координат $O_1x_1y_1z_1$, відносно нерухомої $Oxyz$ і переміщуватися відносно тіла, тобто здійснювати рух відносно рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$. Як

відомо, перший рух називається переносним рухом, а другий — відносним.

На підставі теореми про складання швидкостей швидкість центра мас тіла змінної маси визначається за формулою

$$\vec{V}_c^a = \vec{V}_c^e + \vec{V}_c^r, \tag{25.14}$$

де \vec{V}_c^a — вектор абсолютної швидкості центра мас; \vec{V}_c^e — вектор переносної швидкості центра мас; \vec{V}_c^r — вектор відносної швидкості центра мас.

На підставі формули (13.5) (див. розділ “Кінематика”, параграф 13.2) переносну швидкість центра мас тіла можна визначити за формулою

$$\vec{V}_c^e = \vec{V}_{O_1} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_c), \tag{25.15}$$

де \vec{V}_{O_1} — вектор швидкості початку (полюса) рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$; $\vec{\omega}$ — вектор миттєвої кутової швидкості тіла; $\vec{\rho}_c$ — радіус-вектор центра мас тіла змінної маси в рухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$.

Запишемо рівняння Мещерського для кожної точки тіла змінної маси:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{W}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i + \vec{\Phi}_1 \\ m_2 \vec{W}_2 &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i + \vec{\Phi}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ m_n \vec{W}_n &= \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i + \vec{\Phi}_n, \end{aligned} \tag{25.16}$$

де \vec{F}_k^e — рівнодійна всіх зовнішніх сил, прикладених до k -ї точки тіла; \vec{F}_k^i — рівнодійна всіх внутрішніх сил, прикладених до k -ї точки тіла; $\vec{\Phi}_k$ — реактивна сила, що виникає в момент відокремлення k -ї точки тіла.

Складаючи рівняння (25.16) почленно, здобудемо

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{W}_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k. \quad (25.17)$$

Беручи до уваги що

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = \bar{R}_O^e; \quad \sum_{k=1}^n \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}; \quad \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = \bar{0}, \quad (25.18)$$

де \bar{R}_O^e — головний вектор зовнішніх сил; $\bar{\Phi}_k$ — головний вектор реактивних сил, рівнянню (25.17) надамо вигляду

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{W}_k = \bar{R}_O^e + \bar{\Phi}. \quad (25.19)$$

На підставі формули (12.116) (див. розділ “Кінематика”, параграф 12.14), прискорення k -ї точки тіла визначимо за формулою

$$\bar{W} = \bar{W}_{O_1} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_k + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_k), \quad (25.20)$$

де \bar{W}_{O_1} — вектор прискорення початку (полюса) рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$; $\bar{\varepsilon}$ — вектор миттєвого кутового прискорення тіла; $\bar{\rho}_k$ — радіус-вектор k -ї точки тіла в рухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 25.2).

Оскільки подвійний векторний добуток $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_k)$ визначає вектор доосьового прискорення k -ї точки тіла, на підставі формули (12.118) маємо

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_k) = \omega^2 \bar{d}_k, \quad (25.21)$$

де \bar{d}_k — вектор, що має початок у k -й точці тіла, а кінець — в основі перпендикуляра, проведеного через k -ту точку на вектор миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}$.

Отже, враховуючи вираз (25.21), формулі (25.20) надамо вигляду

$$\bar{W}_k = \bar{W}_{O_1} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_k + \omega^2 \bar{d}_k. \quad (25.22)$$

Тепер визначимо геометричну суму добутоків $\sum_{k=1}^n m_k \bar{W}_k$ у лівій частині рівняння (25.19):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \bar{W}_k &= \sum_{k=1}^n m_k (\bar{W}_{O_1} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_k + \omega^2 \bar{d}_k) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \bar{W}_{O_1} + \bar{\varepsilon} \times \sum_{k=1}^n m_k \bar{\rho}_k + \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k \bar{d}_k. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^n m_k = M; \quad \sum_{k=1}^n m_k \bar{\rho}_k = M \bar{\rho}_C; \quad \sum_{k=1}^n m_k \bar{d}_k = M \bar{d}_C,$$

де M — маса тіла; \bar{d}_C — вектор, що має початок у центрі мас C тіла, а кінець — в основі перпендикуляра, проведеного через центр мас тіла на вектор миттєвої кутової швидкості $\bar{\omega}$, останнє рівняння можна записати так:

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{W}_k = M \left(\bar{W}_{O_1} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_C + \omega^2 \bar{d}_C \right). \quad (25.23)$$

Позначаючи вираз в дужках у рівнянні (25.23) через \bar{W}_C^e :

$$\bar{W}_{O_1} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}_C + \omega^2 \bar{d}_C = \bar{W}_C^e, \quad (25.24)$$

де \bar{W}_C^e — переносне прискорення центра мас тіла змінної маси, рівнянню (25.23) надамо вигляду

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{W}_k = M \bar{W}_C^e. \quad (25.25)$$

Підставляючи рівність (25.25) у рівняння (25.19), здобудемо

$$M \bar{W}_C^e = \bar{R}_O^e + \bar{\Phi}. \quad (25.26)$$

Рівняння (25.26) є математичним виразом теореми про рух центра мас тіла змінної маси: *добуток маси тіла на прискорення тієї точки рухомої системи координат, жорстко зв'язаної з тілом, з якою в даний момент часу збігається центр мас тіла, дорівнює геометричній сумі головного вектора зовнішніх і реактивних сил, прикладених до тіла.*

Беручи до уваги рівність (25.24), перетворимо рівняння (25.26) так:

$$M \bar{W}_{O_1} = \bar{R}_O^e + \bar{\Phi} - \bar{\varepsilon} \times M \bar{\rho}_C - M \omega^2 \bar{d}_C, \quad (25.27)$$

звідки випливає: якщо тіло рухається поступально, то $\bar{\omega} = \bar{0}$, $\bar{\varepsilon} = \bar{0}$, і рівняння (25.27) набирає вигляду

$$M \bar{W}_{O_1} = \bar{R}_O^e + \bar{\Phi}. \quad (25.28)$$

З рівняння (25.28) випливає, що під час поступального руху тіла змінної маси добуток маси тіла на прискорення довільної точки (полюса) рухомої системи координат, жорстко зв'язаної з тілом, дорівнює геометричній сумі головного вектора зовнішніх і реактивних сил, прикладених до тіла.

Якщо в процесі відокремлення від тіла або приєднання до нього матеріальних часток положення центра мас тіла не змінюється, то переносне прискорення центра мас тіла буде дорівнювати його абсолютному прискоренню і рівняння (25.26) набирає вигляду

$$M\vec{W}_C = \vec{R}_C^e + \vec{\Phi}. \quad (25.29)$$

Порівнюючи рівняння (25.29) з рівнянням (25.10), можна зробити висновок: якщо при русі тіла змінної маси положення його центра мас відносно рухомих осей системи координат $O_1x_1y_1z_1$ не змінюється, тобто $\vec{\rho}_C = \text{const}$ (див. рис. 25.2), то центр мас тіла змінної маси рухається як точка змінної маси.

25.4. Теорема про зміну кількості руху тіла змінної маси

Спочатку визначимо вектор кількості руху тіла змінної маси. За визначенням кількість руху механічної системи, що складається з n матеріальних точок, становить:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k, \quad (25.30)$$

де \vec{V}_k — вектор абсолютної швидкості точки, тобто вектор швидкості точки в нерухомій системі координат.

На підставі формули (12.114) (див. розділ “Кінематика”, параграф 12.14) маємо

$$\vec{V}_k = \vec{V}_{O_1} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k). \quad (25.31)$$

Підставляючи цей вираз у рівність (25.30), здобудемо

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m \left[\vec{V}_{O_1} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) \right] = \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k.$$

Враховуючи в цьому виразі, що

$$\sum_{k=1}^n m_k = M; \quad \sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k = M \vec{\rho}_C,$$

матимемо

$$\vec{Q} = M \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times M \vec{\rho}_C = M \left(\vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_C \right).$$

Оскільки на підставі формули (25.15) вираз у дужках визначає переносну швидкість центра мас тіла змінної маси, то остаточно

$$\bar{Q} = M\bar{V}_C^e. \quad (25.32)$$

Отже, вектор кількості руху тіла змінної маси дорівнює добутку маси тіла на вектор швидкості тієї точки рухомої системи координат, жорстко зв'язаної з тілом, з якою в даний момент часу збігається центр мас тіла.

Якщо взяти до уваги формулу (25.14), то рівності (25.32) можна надати вигляду

$$\bar{Q} = M\bar{V}_C^a - M\bar{V}_C^r, \quad (25.33)$$

звідки випливає, що вектор кількості руху тіла змінної маси дорівнює добутку маси тіла на вектор абсолютної швидкості центра мас тіла мінус добуток маси тіла на вектор відносної швидкості центра мас тіла.

Розглянемо рух тіла змінної маси відносно нерухомої декартової системи координат $Oxyz$ (див. рис. 25.2) і запишемо рівняння Мещерського для кожної точки тіла в такій формі:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1\bar{V}_1) &= \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i + \frac{dm_1}{dt}\bar{U}_1; \\ \frac{d}{dt}(m_2\bar{V}_2) &= \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i + \frac{dm_2}{dt}\bar{U}_2; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}(m_n\bar{V}_n) &= \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i + \frac{dm_n}{dt}\bar{U}_n, \end{aligned} \quad (25.34)$$

де $\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_n$ — абсолютна швидкість часток, що відокремлюються або приєднуються.

Складаючи почленно рівняння (25.34), матимемо

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k\right) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} \bar{U}_k.$$

Оскільки $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = \bar{0}$, а $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e = \bar{R}_O^e$, то

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^n m_k \bar{V}_k\right) = \bar{R}_O^e + \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} \bar{U}_k. \quad (25.35)$$

Рівняння (25.35) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху тіла змінної маси: *перша похідна за часом від кількості руху тіла змінної маси дорівнює геометричній сумі головного вектора зовнішніх сил,*

прикладених до тіла, і вектора кількості абсолютного руху часток, що відокремлюються або приєднуються до тіла за одиницю часу.

Рівнянню (25.35) можна надати іншої форми. Для цього абсолютну швидкість частки \vec{U}_k на підставі теореми про додавання швидкостей подамо так:

$$\vec{U}_k = \vec{V}_k^e + \vec{V}_k^r.$$

Тоді рівняння (25.35) набуває вигляду

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_O^e + \vec{\Phi} + \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} \vec{V}_k^e, \quad (25.36)$$

де $\sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} \vec{V}_k^e$ — кількість переносного руху часток, що відокремлюються або приєднуються до тіла за одиницю часу.

З рівняння (25.36) випливає: *перша похідна за часом від кількості руху тіла змінної маси дорівнює геометричній сумі векторів зовнішніх і реактивних сил та вектора кількості переносного руху часток, що відокремлюються або приєднуються за одиницю часу.*

25.5. Кінетичний момент тіла змінної маси відносно довільного нерухомого центра (точки). Кінетичний момент тіла змінної маси, що обертається навколо нерухомої осі

Розглянемо рух тіла змінної маси відносно нерухомої декартової системи координат $Oxyz$. Зв'яжемо жорстко з тілом рухому систему декартових координат $O_1x_1y_1z_1$, початок якої візьмемо в довільній точці тіла (полюсі) O_1 (рис. 25.3). Визначимо кінетичний момент тіла змінної маси відносно нерухомого центра (точки) O нерухомої системи координат $Oxyz$ і встановимо його зв'язок з кінетичним моментом тіла відносно центра O_1 рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$.

За визначенням кінетичний момент механічної системи відносно довільного нерухомого центра (точки)

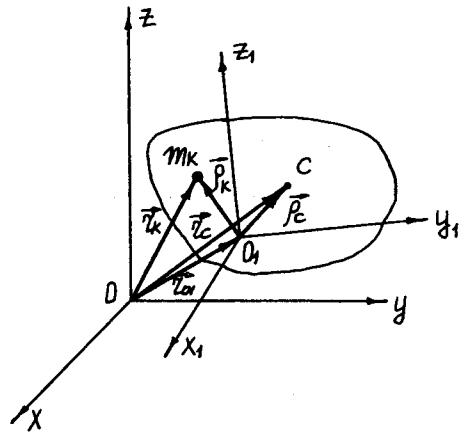


Рис. 25.3

$$\vec{K}_O = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k). \quad (25.37)$$

Підставляючи в цей вираз значення \vec{V}_k [див. формулу (25.31)], перетворимо його так:

$$\begin{aligned} \vec{K}_O = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) &= \sum_{k=1}^n (\vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}_k) \times m_k [\vec{V}_{O_1} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k)] = \sum_{k=1}^n \vec{r}_{O_1} \times m_k \vec{V}_{O_1} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k \vec{V}_{O_1} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_{O_1} \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) + \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k). \end{aligned} \quad (25.38)$$

Беручи до уваги що

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k = M \vec{\rho}_C, \quad \sum_{k=1}^n m_k = M,$$

одержані в правій частині рівняння (25.38) суми можна визначити так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \vec{r}_{O_1} \times m_k \vec{V}_{O_1} &= \vec{r}_{O_1} \times M \vec{V}_{O_1}; \quad \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k \vec{V}_{O_1} = \vec{\rho}_C \times M \vec{V}_{O_1}; \\ \sum_{k=1}^n \vec{r}_{O_1} \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) &= \vec{r}_{O_1} \times \vec{\omega} \times M \vec{\rho}_C; \quad \sum_{k=1}^n \vec{\rho}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) = \vec{K}_{O_1}, \end{aligned}$$

де \vec{K}_{O_1} — кінетичний момент тіла змінної маси відносно довільного центра (точки рухомої системи координат).

Таким чином, остаточно маємо

$$\vec{K}_O = \vec{K}_{O_1} + \vec{r}_{O_1} \times \vec{\omega} \times M \vec{\rho}_C + \vec{r}_{O_1} \times M \vec{V}_{O_1} + \vec{\rho}_C \times M \vec{V}_{O_1}. \quad (25.39)$$

Надамо виразу (25.39) іншого вигляду. Для цього на підставі формули (25.15) проведемо такі перетворення:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{O_1} \times \vec{\omega} \times M \vec{\rho}_C + \vec{r}_{O_1} \times M \vec{V}_{O_1} &= \vec{r}_{O_1} \times M (\vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_C) = \vec{r}_{O_1} \times M \vec{V}_C^e; \\ \vec{\rho}_C \times M \vec{V}_{O_1} &= \vec{\rho}_C \times M [\vec{V}_{O_1} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_C)] - (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_C) = \vec{\rho}_C \times M \vec{V}_C^e - \vec{\rho}_C \times M (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_C); \\ \vec{r}_{O_1} \times M \vec{V}_C^e + \vec{\rho}_C \times M \vec{V}_C^e - \vec{\rho}_C \times M (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_C) &= \vec{r}_C \times M \vec{V}_C^e - \vec{\rho}_C \times M (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_C). \end{aligned}$$

Враховуючи розглянуте, формулі (25.39) надамо вигляду

$$\vec{K}_O = \vec{K}_{O_1} + \vec{r}_C \times M \vec{V}_C^e - \vec{\rho}_C \times M (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_C), \quad (25.40)$$

де \vec{r}_C — радіус-вектор центра мас C тіла змінної маси в нерухомій системі координат.

З формули (25.40) випливає, що кінетичний момент тіла змінної маси відносно нерухомого центра (точки) дорівнює геометричній сумі векторів кінетичного моменту тіла відносно довільного центра (точки) O_1 та кінетичного моменту тіла відносно нерухомого центра C з урахуванням корекції на обертання тіла.

тичного моменту тіла відносно довільної точки (полюса) рухомої системи координат, жорстко зв'язаної з тілом, — \vec{K}_O і вектора кінетичного моменту центра мас тіла в його переносному русі, за умови, що в ньому зосереджена маса всього тіла відносно нерухомого центра (точки) — $\vec{r}_C \times M\vec{V}_C^e$ мінус вектор кінетичного моменту центра мас тіла в його відносному русі щодо довільної точки (полюса) рухомої системи координат — $\vec{\rho}_C \times M(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_C)$.

В окремому випадку руху тіла змінної маси, а саме, коли початок рухомої системи координат збігається з центром мас тіла, тобто коли $\vec{\rho}_C = \vec{0}$, рівняння набирає вигляду

$$\vec{K}_O = \vec{K}_C + \vec{r}_C \times M\vec{V}_C^e, \quad (25.41)$$

де \vec{K}_C — кінетичний момент тіла змінної маси відносно центра мас.

Якщо тіло змінної маси обертається навколо нерухомої осі, наприклад осі z , з кутовою швидкістю ω , то на підставі визначення кінетичного моменту механічної системи відносно довільної нерухомої осі маємо

$$K_z = \sum_{k=1}^n m_k \left(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k \right). \quad (25.42)$$

Підставляючи в це рівняння $x_k = h_k \cos \varphi$, $\dot{x}_k = -\omega h_k \sin \varphi$, $y_k = h_k \sin \varphi$, $\dot{y}_k = \omega h_k \cos \varphi$ (рис. 19.4), матимемо

$$K_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 \omega = \omega \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = J_z \omega, \quad (25.43)$$

де J_z — осьовий момент інерції тіла змінної маси відносно осі обертання тіла [$J_z = J_z(t)$].

Формула (25.43) визначає кінетичний момент тіла змінної маси, що обертається навколо нерухомої осі.

25.6. Теорема про зміну кінетичного моменту тіла змінної маси відносно нерухомого центра (точки). Диференціальне рівняння обертального руху тіла змінної маси навколо нерухомої осі

Розглянемо рух тіла змінної маси відносно нерухомої системи координат *Охуз* (див. рис. 25.3) і запишемо рівняння Мещерського для кожної точки тіла в такій формі:

$$\frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k) = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \frac{dm_k}{dt} \vec{U}_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Помножимо це рівняння векторно зліва на радіус-вектор k -ї точки \vec{r}_k , тобто

$$\vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k) = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i + \vec{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} \vec{U}_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (25.44)$$

Складаючи почленно рівняння (25.44), здобудемо

$$\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} \vec{U}_k. \quad (25.45)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k) &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k) = \frac{d\vec{K}_O}{dt}; \\ \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^e &= \vec{M}_O^e; \quad \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = \vec{M}_O^i = \vec{0}, \end{aligned}$$

то рівняння (25.45) набирає вигляду

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e + \sum_{k=1}^n \left(\vec{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} \vec{U}_k \right), \quad (25.46)$$

де \vec{M}_O^e — головний момент зовнішніх сил.

Рівняння (25.46) є математичним виразом теореми про зміну кінетичного моменту тіла змінної маси відносно довільного нерухомого центра (точки): *перша похідна за часом від кінетичного моменту тіла змінної маси відносно довільного нерухомого центра (точки) дорівнює геометричній сумі головного моменту зовнішніх сил, прикладених до тіла, і векторів моментів кількості абсолютного руху часток, що відокремлюються або приєднуються до тіла за одиницю часу, відносно того самого нерухомого центра (точки).*

Рівнянню (25.46) можна надати іншого вигляду. Для цього абсолютну швидкість частки \vec{U}_k на підставі теореми про додавання швидкостей подамо так:

$$\vec{U}_k = \vec{V}_k^e + \vec{V}_k^r.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^n \left(\vec{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} \vec{U}_k \right) = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} \vec{V}_k^r + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} \vec{V}_k^e = \vec{M}_O^{(\Phi)} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} \vec{V}_k^e,$$

де $\vec{M}_O^{(\Phi)}$ — головний момент реактивних сил відносно довільного нерухомого центра (точки).

На підставі розглянутого рівняння (25.46) набирає вигляду

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O^e + \vec{M}_O^{(\Phi)} + \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \frac{dm_k}{dt} \vec{V}_k^e. \quad (25.47)$$

З рівняння (25.47) випливає, що перша похідна за часом від кінетичного моменту тіла змінної маси відносно довільного нерухомого центра (точки) дорівнює геометричній сумі головних моментів зовнішніх і реактивних сил відносно того самого центра (точки) і векторів моментів кількості переносного руху часток, що відокремлюються або приєднуються до тіла за одиницю часу, відносно того самого центра (точки).

Тепер розглянемо випадок, коли тіло змінної маси обертається навколо нерухомої осі z з кутовою швидкістю ω (рис. 25.4).

У цьому випадку для k -ї точки, що розташована на відстані h_k від осі обертання, маємо

$$V_k^e = \omega h_k. \quad (25.48)$$

Проекціюючи рівняння (25.47) на вісь z і враховуючи рівність (25.48), збудуємо

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e + M_z^{(\Phi)} + \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} h_k^2 \omega.$$

Оскільки

$$K_z = J_z \omega; \quad \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} h_k^2 \omega = \omega \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k h_k^2 = \omega \frac{dJ_z}{dt},$$

останньому рівнянню надамо вигляду

$$\frac{d}{dt} (J_z \omega) = M_z^e + M_z^{(\Phi)} + \omega \frac{dJ_z}{dt},$$

або

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e + M_z^{(\Phi)}. \quad (25.49)$$

Рівняння (25.49) є диференціальним рівнянням обертального руху тіла змінної маси навколо нерухомої осі. З рівняння випливає, що добуток осьового моменту інерції тіла змінної маси відносно осі обертання на його кутове прискорення дорівнює алгебричній сумі головних моментів зовнішніх і реактивних сил відносно осі обертання тіла.

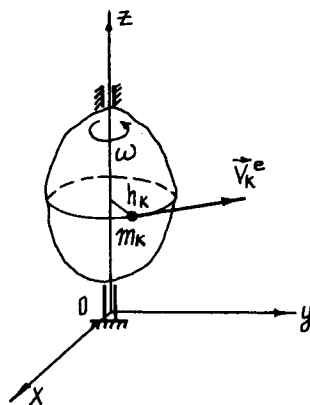


Рис. 25.4

Якщо відносна швидкість часток, що відокремлюються або приєднуються до тіла змінної маси, дорівнює нулю, то $M_z^{(\Phi)} = 0$ і рівняння (25.49) набирає вигляду

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e. \quad (25.50)$$

Таким чином, важливі для техніки випадки обертання тіла змінної маси навколо нерухої осі, наприклад фільтрувальних барабанів, веретен, коли частки, що відокремлюються або приєднуються до тіла, не мають відносно швидкості або нею можна нехтувати, будуть описуватися формулою (25.50), яка формально нічим не відрізняється від рівняння, що описує обертання тіла сталої маси. Однак необхідно мати на увазі, що осьовий момент інерції тіла змінної маси відносно осі обертання є функцією часу, тобто $J_z = J_z(t)$.

25.7. Кінетична енергія тіла змінної маси

Визначимо кінетичну енергію тіла змінної маси як суму кінетичних енергій матеріальних точок, з яких складається тіло:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_k^2.$$

Беручи до уваги формулу (25.31), перетворимо цю рівність так:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_{O_1}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k)^2 + \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_{O_1} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k).$$

Оскільки

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_{O_1}^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \vec{V}_{O_1}^2 = \frac{1}{2} M \vec{V}_{O_1}^2 = T_{O_1}^e;$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k)^2 = T_{O_1}^r;$$

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_{O_1} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_k) = \vec{V}_{O_1} \cdot \left(\vec{\omega} \times \sum_{k=1}^n m_k \vec{\rho}_k \right) = \vec{V}_{O_1} \cdot (\vec{\omega} \times M \vec{\rho}_c),$$

то останнє рівняння набирає вигляду

$$T = T_{O_1}^e + T_{O_1}^r + \vec{V}_{O_1} \cdot (\vec{\omega} \times M \vec{\rho}_c). \quad (25.51)$$

Якщо початок рухомих системи координат, що жорстко зв'язана з тілом, збігається з центром мас тіла змінної маси, то $\vec{\rho}_c = \vec{0}$ і кінетична енергія тіла буде

$$T = T_C^e + T_C^r, \quad (25.51a)$$

де T_C^e — кінетична енергія центра мас тіла змінної маси за умови, що в ньому зосереджена маса всього тіла в його переносному русі; T_C^r — кінетична енергія центра мас тіла змінної маси за умови, що в ньому зосереджена маса всього тіла в його відносному русі.

25.8. Теорема про зміну кінетичної енергії тіла змінної маси

Розглянемо рух тіла змінної маси відносно нерухомої системи координат *Oxyz* (див. рис. 25.3) і запишемо рівняння Мещерського для кожної точки тіла в такій формі:

$$\frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k) = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \frac{dm_k}{dt} \vec{U}_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Помножимо ліву частину цих рівнянь на $\vec{V}_k dt$, а праву — на $d\vec{r}_k$ і почленно підсумуємо одержані результати:

$$\sum_{k=1}^n \vec{V}_k \cdot d(m_k \vec{V}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} \vec{U}_k \cdot d\vec{r}_k. \quad (25.52)$$

Проведемо деякі математичні перетворення:

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dm_k \frac{\vec{V}_k^2}{2} + m_k d\left(\frac{V_k^2}{2}\right),$$

тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \vec{V}_k \cdot d(m_k \vec{V}_k) &= \sum_{k=1}^n d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = d \sum_{k=1}^n \frac{m_k \vec{V}_k^2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{dm_k \vec{V}_k^2}{2}; \\ \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k &= d'A^e; \quad \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k = d'A^i; \\ \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} \vec{U}_k \cdot d\vec{r}_k &= \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} (\vec{V}_k^e + \vec{V}_k^r) \cdot d\vec{r}_k = \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} \vec{V}_k^r \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n dm_k \vec{V}_k^e \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \\ &= \sum_{k=1}^n \vec{\Phi}_k \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n dm_k (\vec{V}_k^e)^2 = d'A^{(\Phi)} + \sum_{k=1}^n dm_k (\vec{V}_k^e)^2, \end{aligned}$$

де $d'A^e$, $d'A^i$ і $d'A^{(\Phi)}$ — суми елементарних робіт відповідно зовнішніх, внутрішніх і реактивних сил.

Враховуючи розглянуті перетворення, матимемо

$$dT + \sum_{k=1}^n \frac{dm_k (\bar{V}_k^e)^2}{2} = d'A^e + d'A^i + d'A^{(\Phi)} + \sum_{k=1}^n dm_k (\bar{V}_k^e)^2,$$

або

$$dT = d'A^e + d'A^i + d'A^{(\Phi)} + \sum \frac{dm_k}{2} (\bar{V}_k^e)^2. \quad (25.53)$$

З рівняння (25.53) випливає, що повний диференціал кінетичної енергії тіла змінної маси дорівнює алгебричній сумі елементарних робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до тіла, елементарних робіт реактивних сил і кінетичної енергії часток, що відокремлюються або приєднуються до тіла за одиницю часу, в їх переносному русі.

Якщо абсолютна швидкість часток, що відокремлюються або приєднуються, дорівнює нулю, то рівняння (25.52) після відповідних перетворень набирає вигляду

$$dT + \sum_{k=1}^n \frac{dm (\bar{V}_k^e)^2}{2} = d'A^e + d'A^i. \quad (25.54)$$

З рівняння випливає, що сума повного диференціала кінетичної енергії тіла змінної маси і кінетичної енергії часток, що відокремлюються або приєднуються до тіла за одиницю часу, в їх переносному русі дорівнює сумі елементарних робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до тіла.

Нарешті, якщо відносна швидкість часток, що відокремлюються або приєднуються до тіла змінної маси, дорівнює нулю, то з рівняння (25.53) матимемо

$$dT = d'A^e + \sum_{k=1}^n \frac{dm_k (V_k^e)^2}{2}, \quad (25.55)$$

звідки випливає, що повний диференціал кінетичної енергії тіла змінної маси дорівнює алгебричній сумі елементарних робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до тіла, і кінетичної енергії часток, що відокремлюються або приєднуються до тіла за одиницю часу, в їх переносному русі.

25.9. Приклади розв'язання задач динаміки тіла змінної маси

Під час розв'язання задач динаміки тіла змінної маси слід дотримуватися таких рекомендацій.

1. Визначити за умовами задачі, чи належить задача, що розв'язується, до задач динаміки точки змінної маси, чи вона є задачею динаміки тіла змінної маси.

2. Якщо задача належить до задач динаміки точки змінної маси, то, застосовуючи рівняння Мещерського, необхідно скласти диференціальне рівняння руху точки і проінтегрувати його. Потім визначити сталі інтегрування і отримати шукані величини.

3. Якщо задача належить до задач динаміки тіла змінної маси, то, застосовуючи теореми про рух центра мас, про зміну кількості руху, про зміну кінетичного моменту і про зміну кінетичної енергії тіла змінної маси, потрібно скласти диференціальні рівняння руху тіла і проінтегрувати їх. Потім визначити сталі інтегрування й отримати шукані величини.

Приклад 25.1. Тіло змінної маси, маючи початкову швидкість, яка дорівнює нулю, рухається поступально зі сталим прискоренням \vec{W} по горизонтальному напрямним. Відносна швидкість часток, що відокремлюються від тіла, стала і дорівнює \vec{V}_r . Взявши, що при русі тіла на нього діє сила тертя, визначити шлях, який пройде тіло до того моменту, коли його маса зменшиться в k разів.

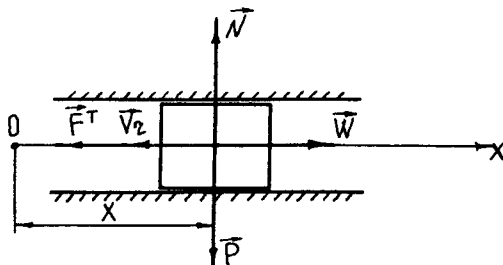


Рис. 25.5

Розв’язання. Розглядаємо тіло як матеріальну точку змінної маси, тобто $m = m(t)$. Розрахункову схему руху тіла зображено на рис. 25.5.

Запишемо рівняння Мещерського у проекції на вісь x :

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{dm}{dt} \dot{x}_r - mgf.$$

Спростуючи це рівняння і відокремлюючи змінні, здобудемо

$$d\dot{x} = -gfdt - \frac{dm}{m} \dot{x}_r.$$

Після інтегрування цього рівняння матимемо

$$\dot{x} = -gft - \dot{x}_r \ln m + c.$$

Визначаємо сталу інтегрування. При $t = 0$ $\dot{x}(0) = 0$; $m(0) = m_0$; тоді

$$0 = -\dot{x}_r \ln m_0 + c,$$

звідки

$$c = \dot{x}_r \ln m_0.$$

Отже,

$$\dot{x} = -gft - \dot{x}_r \ln m + \dot{x}_r \ln m_0,$$

або

$$\dot{x} = -gft + \dot{x}_r \ln \frac{m_0}{m}.$$

Оскільки тіло здійснює рух зі сталим прискоренням, маємо $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \text{const}$.

Інтегруючи, одержуємо $\dot{x} = \ddot{x}t + c$. За початковими умовами руху $[t = 0;$

$\dot{x}(0) = 0; x(0) = 0]$ визначимо сталу інтегрування: $c = 0$. Отже,

$$\dot{x} = \ddot{x}t.$$

Підставляючи цю рівність в останнє рівняння, матимемо

$$\ddot{x}t = -gft + \dot{x}_r \ln \frac{m_0}{m}.$$

З цього рівняння визначаємо t :

$$t = \frac{\dot{x}_r \ln \frac{m_0}{m}}{\ddot{x} + gf},$$

або, оскільки $\frac{m_0}{m} = k$, то

$$t = \frac{\dot{x}_r \ln k}{\ddot{x} + gf}.$$

Оскільки тіло рухається зі сталим прискоренням, то шлях, що проходить тіло, з урахуванням початкових умов визначається за формулою

$$x = \frac{\ddot{x}t^2}{2}.$$

Підставляючи в цю рівність значення t , здобудемо шуканий шлях:

$$x = \frac{\ddot{x} \dot{x}_r^2 (\ln k)^2}{2 \left(\ddot{x} + gf \right)^2}.$$

Приклад 25.2. Тіло змінної маси здійснює прямолінійний рух. На початку руху швидкість тіла дорівнювала V_0 . При русі маса тіла збільшується за законом $m = m_0 + \alpha t$, де m_0 — початкова маса тіла; $\alpha = \text{const}$. Опір руху тіла пропорційний його вазі (коефіцієнт пропорційності f) (рис.

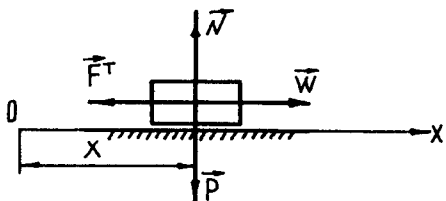


Рис. 25.6

25.6). Визначити проміжок часу до зупинки тіла з урахуванням (T) і без урахування (T_1) зміни його маси. Знайти закон зміни швидкості тіла з часом.

Розв'язання. Розглянемо рух тіла змінної маси $m = m_0 + \alpha t$. Для розв'язання задачі застосуємо теорему про зміну кількості руху тіла змінної маси:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_0^e + \sum_{k=1}^n \frac{dm_k}{dt} \vec{U}_k.$$

Оскільки за умовою задачі $\vec{U}_k = \vec{0}$, то

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_0^e,$$

або в проекції на вісь x

$$\frac{dQ_x}{dt} = -F^r.$$

Визначаємо Q_x і F^r :

$$Q_x = (m_0 + \alpha t) \dot{x}; \quad F^r = -(m_0 + \alpha t) fg.$$

Отже,

$$\frac{d \left[(m_0 + \alpha t) \dot{x} \right]}{dt} = -(m_0 + \alpha t) fg.$$

Відокремимо змінні. Матимемо

$$d \left[(m_0 + \alpha t) \dot{x} \right] = -(m_0 + \alpha t) fg dt.$$

Після інтегрування цього рівняння дістанемо

$$(m_0 + \alpha t) \dot{x} = -m_0 fgt - \frac{\alpha fgt^2}{2} + c.$$

За початковими умовами руху $\left[t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \right]$ визначимо сталу інтегрування c :

$$c = m_0 \dot{x}_0.$$

Отже,

$$(m_0 + \alpha t) \dot{x} = m_0 \dot{x}_0 - m_0 f g t - \frac{\alpha f g t^2}{2},$$

або

$$2(m_0 + \alpha t) \dot{x} = 2m_0 \dot{x}_0 - 2m_0 f g t - \alpha f g t^2,$$

звідки визначаємо

$$\dot{x} = \frac{2m_0 \dot{x}_0 - f g (2m_0 + \alpha t) t}{2(m_0 + \alpha t)}.$$

Оскільки тіло зупиняється, то, підставляючи в цей вираз $t = T$, $\dot{x} = 0$, збудемо

$$T^2 + \frac{2m_0}{2} T - \frac{2m_0 \dot{x}_0}{f g \alpha} = 0.$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння, знайдемо проміжок часу до зупинки тіла з урахуванням зміни маси тіла:

$$T = \frac{m_0}{\alpha} \left(\sqrt{1 + \frac{2\alpha \dot{x}_0}{f g m_0}} - 1 \right).$$

Якщо маса при русі тіла не змінюється, то диференціальне рівняння руху тіла в проекції на вісь x має вигляд

$$m_0 \ddot{x} = -m_0 g f,$$

або

$$m_0 \frac{d \dot{x}}{dt} = -m_0 g f.$$

Після відокремлення змінних і інтегрування цього рівняння дістанемо

$$\dot{x} = -gft + c_1.$$

За початковими умовами руху $\left[t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \right]$ визначимо сталу інтегрування:

$$c_1 = \dot{x}_0.$$

Отже,

$$\dot{x} = -gft + \dot{x}_0.$$

Оскільки тіло зупиняється, то $\dot{x} = 0$ і це рівняння набирає вигляду

$$\dot{x}_0 = gft,$$

звідки при $t = T_1$ знайдемо проміжок часу до зупинки тіла без урахування зміни його маси:

$$T_1 = \frac{\dot{x}_0}{gf}.$$

Приклад 25.3. Скласти рівняння руху маятника змінної маси в середовищі, опір якого пропорційний швидкості. Маса маятника змінюється за заданим законом $m = m(t)$ шляхом відокремлення часток з відносною швидкістю, що дорівнює нулю. Довжина нитки маятника l . На маятник діє також сила опору, яка пропорційна його кутовій швидкості: $R = \beta \dot{\varphi}$ (рис. 25.7).

Розв'язання. Розглядаємо рух тіла змінної маси $m = m(t)$. Щоб скласти рівняння руху тіла, застосуємо диференціальне рівняння обертального руху тіла змінної маси навколо нерухомої осі Oz , що проходить через нерухому точку O , перпендикулярної до площини рисунка:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e + M_z^{(\Phi)}.$$

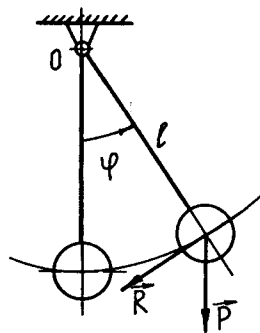


Рис. 25.7

За умовою задачі відносна швидкість часток, що відокремлюються, дорівнює нулю: $M_z^\Phi = 0$, тому

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e,$$

де $J_z = ml^2$.

Визначаємо момент зовнішніх сил відносно осі z :

$$M_z^e = -mgl \sin \varphi - \beta \omega l.$$

Таким чином,

$$ml^2 \frac{d\omega}{dt} = -mgl \sin \varphi - \beta \omega l,$$

або, оскільки $\frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi}$, а $\omega = \dot{\varphi}$, то остаточно маємо

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta \dot{\varphi}}{ml} + \frac{g \sin \varphi}{l} = 0,$$

де $m = m(t)$.

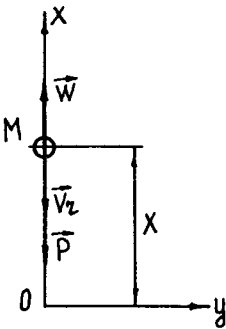


Рис. 25.8

Приклад 25.4. Тіло, що має початкову масу m_0 , піднімається поступально вертикально вгору в однорідному полі сили тяжіння зі сталим прискоренням ng (g — прискорення вільного падіння) (рис. 25.8). Нехтуючи опором і вважаючи відносну швидкість V_r відокремлення часток сталою, визначити: 1) закон зміни маси тіла; 2) закон зміни маси тіла за відсутності поля тяжіння.

Розв'язання. Розглядаємо тіло як точку змінної маси і запишемо рівняння Мещерського в проекції на вісь x у випадку руху тіла в полі сил тяжіння:

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = -mg - \dot{x}_r \frac{dm}{dt}.$$

За умовою задачі $\ddot{x} = ng = \text{const}$, отже, $d\dot{x} = ngdt$ і рівняння Мещерського набирає вигляду

$$ngdt = -gdt - \dot{x}_r \frac{dm}{m},$$

або

$$(n+1)gdt = -\dot{x}_r \frac{dm}{m}.$$

Інтегруючи це рівняння, матимемо

$$\ln m = -\frac{(n+1)g}{\dot{x}_r} t + c_1.$$

За початковими умовами руху $[t = 0; m(0) = m_0]$ визначимо довільну сталу інтегрування c_1 :

$$c_1 = \ln m_0.$$

Враховуючи значення c_1 і виконуючи відповідні перетворення, останньому рівнянню надамо вигляду

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{(n+1)gt}{\dot{x}_r},$$

або

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{(n+1)gt}{\dot{x}_r}},$$

звідки матимемо

$$m = m_0 e^{-\frac{(n+1)gt}{\dot{x}_r}}.$$

Тепер визначимо закон зміни маси тіла за відсутності поля сил тяжіння. В цьому випадку рівняння Мещерського набирає вигляду

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{dm}{dt} \dot{x}_r,$$

або

$$d\dot{x} = \frac{dm}{m} \dot{x}_r.$$

Враховуючи, що $d\dot{x} = ngdt$, останнє рівняння запишемо так:

$$-\frac{ng}{\dot{x}_r} dt = \frac{dm}{m}.$$

Інтегруючи цей вираз, здобудемо

$$\ln m = -\frac{ng}{\dot{x}_r} t + c_2.$$

З початкових умов руху $[t = 0; m(0) = m_0]$ визначимо довільну сталу інтегрування c_2 :

$$c_2 = \ln m_0.$$

Тоді останнє рівняння набирає вигляду

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{ngt}{\dot{x}_r}},$$

звідки матимемо

$$m = m_0 e^{-\frac{ngt}{\dot{x}_r}}.$$

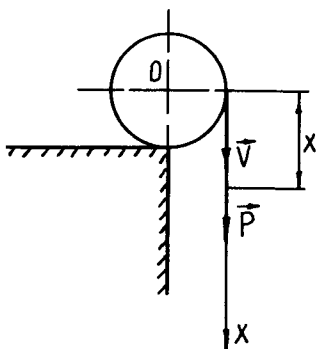


Рис. 25.9

Приклад 25.5. Клубок важкого однорідного ланцюга лежить на кінці горизонтального стола, при цьому на початку одне кільце нерухомо звисає зі стола. Напрямяючи вісь x вертикально вниз і беручи, що у початковий момент $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, визначити рух ланцюга.

Розв'язання. Розглядаємо рух тіла змінної маси (рис. 25.9). Позначимо через x довжину, а через m — масу ланцюга, що звисає зі стола і здійснює прямолінійний рух. Маса m неперервно зростає за рахунок елементів dm частини ланцюга, що утворює клубок.

При цьому швидкість елементів, що приєднується, зростає в момент приєднання від нуля до швидкості частини ланцюга, яка рухається. Тому для розв'язання задачі застосуємо теорему про зміну кількості руху механічної системи в проекції на вісь x :

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^n F_{kx}^e.$$

Позначимо через γ вагу одиниці довжини ланцюга. Маємо $m = \frac{\gamma}{g} x$, тоді $P = \gamma x$.

Враховуючи розглянуте і беручи до уваги що $V = \dot{x}$, теоремі про зміну кількості руху системи надамо вигляду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\gamma}{g} x \dot{x} \right) = \gamma x,$$

або

$$x \ddot{x} + \dot{x}^2 = gx.$$

Це нелінійне рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежної змінної — часу t , що допускає пониження порядку на одиницю. В даному випадку доцільно за нову невідому функцію взяти $U = \dot{x}^2$, а за нову незалежну змінну — x . Тоді матимемо

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dU}{dx}.$$

Враховуючи розглянуте, останнє рівняння можна записати так:

$$\frac{1}{2} x \frac{dU}{dx} + U = gx,$$

або

$$\frac{dU}{dx} + \frac{2}{x} U = 2g. \quad (1)$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді добутку двох функцій від x :

$$U = V'W'.$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності, здобудемо

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dV'}{dx} W' + V' \frac{dW'}{dx}.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (1), дістанемо

$$\frac{dV'}{dx} W' + V' \frac{dW'}{dx} + \frac{2}{x} V' W' = 2g,$$

або

$$V' \left(\frac{dW'}{dx} + \frac{2}{x} W' \right) + \frac{dV'}{dx} W' = 2g. \quad (2)$$

Вибираємо функцію W' такою, щоб

$$\frac{dW'}{dx} + \frac{2}{x}W' = 0.$$

Відокремлюючи змінні, матимемо

$$\frac{dW'}{W'} = -\frac{2}{x}dx.$$

Інтегруючи цей вираз, здобудемо

$$\ln W' = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

звідки

$$W' = \frac{1}{x^2}.$$

Підставляючи це значення в рівняння (2), матимемо рівняння для визначення V' :

$$\frac{dV'}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} = 2g.$$

Відокремлюючи змінні, матимемо

$$dV' = 2gx^2dx.$$

Інтегруючи цей вираз, здобудемо

$$V' = \frac{2}{3}gx^3 + c_1.$$

Оскільки $U = V'W'$, то, враховуючи їх значення, дістанемо

$$U = \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{3}gx^3 + c_1 \right) = \frac{2}{3}gx + \frac{c_1}{x^2}.$$

Враховуючи, що $U = \dot{x}^2$, матимемо

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{3}gx + \frac{c_1}{x^2}.$$

З початкових умов руху $\left[t = 0; x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \right]$ визначимо довільну сталу інтегрування c_1 :

$$c_1 = 0.$$

Отже, останнє рівняння набирає вигляду

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{3}gx,$$

або

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{3}g \cdot x^{\frac{1}{2}}}.$$

Через те що $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, матимемо

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}g \cdot x^{\frac{1}{2}}}.$$

Після відокремлення змінних і інтегрування дістанемо

$$2x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}g} \cdot t + c_2.$$

З початкових умов руху $[t = 0; x(0) = 0]$ визначимо довільну сталу інтегрування c_2 :

$$c_2 = 0.$$

Шуканий закон руху ланцюга має вигляд

$$x = \frac{1}{6}gt^2.$$

Приклад 25.6. Скласти диференціальне рівняння поступального руху тіла змінної маси при його підйомі вертикально вгору з поверхні Землі. Відносну швидкість V_r часток, що відокремлюються, вважати сталою. Маса тіла змінюється за законом $m = m_0 f(t)$. Сила опору при русі тіла є відомою функцією швидкості і положення тіла:

$$R(x, \dot{x}).$$

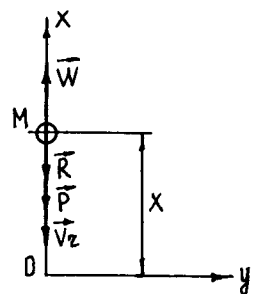


Рис. 25.10

Розв'язання. Розглядаємо тіло як матеріальну точку змінної маси (рис. 25.10). Записуємо рівняння Мещерського в проєкції на вісь x :

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = -mg - R(x, \dot{x}) - \frac{dm}{dt} \dot{x}_r.$$

Беручи до уваги що $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $m = m_0 f(t)$ і $\frac{dm}{dt} = m_0 \frac{df(t)}{dt}$, перетворюємо це рівняння так:

$$\ddot{x} = -g - \frac{df(t)}{f(t)dt} \dot{x}_r - \frac{R(x, \dot{x})}{m_0 f(t)}.$$

Здобуте рівняння є шуканим диференціальним рівнянням руху тіла змінної маси.

Приклад 25.7. Проінтегрувати рівняння руху, що було здобуте при розгляді попереднього прикладу, якщо $m = m_0(1 - at)$ і $R = 0$. Початкова швидкість тіла на поверхні Землі дорівнює нулю.

Розв'язання. Оскільки $R = 0$ (за умовою задачі), а $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, то рівняння руху тіла набирає вигляду (див. приклад 25.6)

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -g - \frac{df(t)}{f(t)dt} \dot{x}_r,$$

або

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -g - \dot{x}_r \frac{d}{dt} \ln f(t).$$

За умовою задачі $\dot{x}_r = \text{const}$, тому це рівняння можна записати так:

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{x} + \dot{x}_r \ln f(t) \right] = -g.$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи це рівняння, дістанемо

$$\dot{x} + \dot{x}_r \ln f(t) = -gt + c_1.$$

За початковими умовами руху $[t = 0; \dot{x}(0) = 0; f(t) = 1]$, оскільки $f(t) = 1 - \alpha t$ визначимо довільну сталу інтегрування c_1 :

$$c_1 = 0.$$

Беручи до уваги значення $c_1 = 0$; $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, відокремлюючи змінні та інтегруючи останнє рівняння при нульових початкових умовах руху, здобудемо

$$x = -gt - \dot{x}_r \int_0^t \ln f(t) dt.$$

Підставляючи в цей вираз $f(t) = 1 - \alpha t$ і проводячи відповідне інтегрування, здобудемо закон руху тіла змінної маси при його підйомі вертикально вгору з поверхні Землі:

$$x = -\frac{gt^2}{2} + \frac{\dot{x}_r}{\alpha} [(1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) + \alpha t].$$

Приклад 25.8. Маса тіла, рух якого розглянуто в прикладі 25.6, змінюється до $t = t_0$ за законом $m = m_0 e^{-\alpha t}$. Нехтуючи силою опору, знайти рух тіла; вважаючи, що з моменту часу t_0 відокремлення маси тіла припиняється, визначити максимальну висоту підйому тіла. У початковий момент тіло мало швидкість, яка дорівнювала нулю, і розміщувалося на Землі.

Розв'язання. Розглянемо рух тіла як рух матеріальної точки, маса якої змінюється за законом $m = m_0 e^{-\alpha t}$ (рис. 25.11). Для визначення максимальної висоти підйому тіла розглянемо дві ділянки руху тіла: активну ділянку, коли від тіла відокремлюються частинки маси, і пасивну ділянку, коли маса тіла не змінюється.

Розглядаємо рух тіла на активній ділянці руху і записуємо рівняння Мещерського в проекції на вісь x :

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = -mg - \dot{x}_r \frac{dm}{dt}.$$

Скорочуючи це рівняння на m і відокремлюючи змінні, матимемо

$$d\dot{x} = -gdt - \dot{x}_r \frac{dm}{m}.$$

Інтегруючи цей вираз, дістанемо

$$\dot{x} = -gt - \dot{x}_r \ln \frac{m_0}{m} + c_1,$$

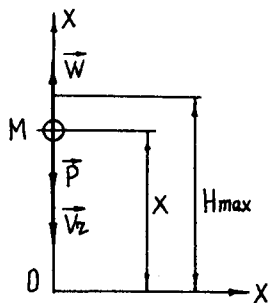


Рис. 25.11

або

$$\dot{x} = -gt + \dot{x}_r \alpha t + c_1.$$

З початкових умов руху $\left[t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0 \right]$ визначимо довільну сталу інтегрування c_1 :

$$c_1 = 0.$$

Отже, останнє рівняння набирає вигляду

$$\dot{x} = \left(\alpha \dot{x}_r - g \right) t.$$

Беручи до уваги що $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, відокремлюючи змінні й інтегруючи здобує рівняння, матимемо

$$x = \left(\alpha \dot{x}_r - g \right) \frac{t^2}{2} + c_2.$$

З початкових умов руху $\left[t = 0; x(0) = 0; \dot{x}(0) = 0 \right]$ визначимо довільну сталу інтегрування c_2 :

$$c_2 = 0.$$

Таким чином, закон руху тіла на активній ділянці має вигляд

$$x_a = \left(\alpha \dot{x}_r - g \right) \frac{t^2}{2}.$$

Закон руху тіла на пасивній ділянці на підставі формули Галілея має вигляд

$$x_n = \frac{\dot{x}^2}{2g} = \frac{\left(\alpha \dot{x}_r - g \right)^2 t^2}{2g}.$$

Максимальну висоту підйому тіла знайдемо за формулою

$$\begin{aligned} H_{\max} = x_a + x_n &= \frac{\left(\alpha \dot{x}_r - g \right)^2 t^2}{2} + \frac{\left(\alpha \dot{x}_r - g \right)^2 t^2}{2g} = \frac{\left(\alpha \dot{x}_r - g \right)^2 t_0^2}{2} + \\ &+ \frac{\left(\alpha \dot{x}_r - g \right)^2 t^2}{2g} = \frac{\alpha \dot{x}_r}{2g} \left(\alpha \dot{x}_r - g \right)^2 t_0^2. \end{aligned}$$

Запитання для самоперевірки

1. Що називається точкою змінної маси?
2. На яких основних положеннях ґрунтується динаміка точки змінної маси?
3. Запишіть диференціальне рівняння руху точки змінної маси (рівняння Мещерського).
4. В яких випадках рівняння Мещерського набирає вигляду основного рівняння динаміки?
5. Що називається тілом змінної маси і які до нього становляться вимоги?
6. Який вигляд має математичний вираз теореми про рух центра мас тіла змінної маси?
7. Як формулюється теорема про рух центра мас тіла змінної маси?
8. За яких умов руху тіла змінної маси центр мас тіла рухається як точка змінної маси?
9. За якою формулою визначається кількість руху тіла змінної маси?
10. Який вигляд має математичний вираз теореми про зміну кількості руху тіла змінної маси?
11. Як формулюється теорема про зміну кількості руху тіла змінної маси?
12. За якою формулою визначається кінетичний момент тіла змінної маси відносно довільного нерухомого центра (точки)?
13. За якою формулою визначається кінетичний момент тіла змінної маси, що обертається навколо нерухомої осі?
14. Який вигляд має математичний вираз теореми про зміну кінетичного моменту тіла змінної маси відносно довільного нерухомого центра (точки)?
15. Як формулюється теорема про зміну кінетичного моменту тіла змінної маси відносно довільного нерухомого центра?
16. Запишіть диференціальне рівняння обертального руху тіла змінної маси навколо нерухомої осі.
17. За якою формулою визначається кінетична енергія тіла змінної маси?
18. Запишіть математичний вираз теореми про зміну кінетичної енергії тіла змінної маси за різних умов його руху.

Глава 26

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

26.1. Аналітичне визначення в'язей. Кількість ступенів вільності механічної системи. Можливі переміщення. Ідеальні в'язі

Якщо кожна точка механічної системи може зайняти будь-яке положення в системі відліку і мати будь-яку швидкість, то така система називається *вільною*. Класичним прикладом вільної системи є Сонячна система.

Якщо внаслідок яких-небудь обмежень (умов) точки механічної системи не можуть займати довільні положення в системі відліку і мати довільні швидкості, то така система називається *невільною*.

Обмеження (умови), які не дають змогу точкам системи займати довільні положення в системі відліку і мати довільні швидкості, називаються *в'язями*. В'язі накладають обмеження на зміну координат і швидкостей точок. Аналітично ці обмеження записуються у вигляді рівнянь або нерівностей:

$$f_i \left(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t \right) \leq 0$$
$$(i = 1, 2, \dots, h), \quad (26.1)$$

де h — кількість в'язей, накладених на точки механічної системи.

Якщо в рівнянні (26.1) стоїть знак рівності, в'язі називаються *утримувальними*, якщо знак нерівності — *неутримувальними*.

Прикладом утримувальної в'язі є жорсткий стрижень завдовжки l , який зв'язує дві матеріальні точки (рис. 26.1). Рівняння в'язі має вигляд

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.$$

Якщо замість стрижня між точками M_1 і M_2 (рис. 26.1) помістити гнучку нерозтяжну нитку, то точки отримують можливість зближення. У цьому випадку в'язь буде неутримувальною і обмеження на координати точок записуються у вигляді нерівності

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \leq l^2.$$

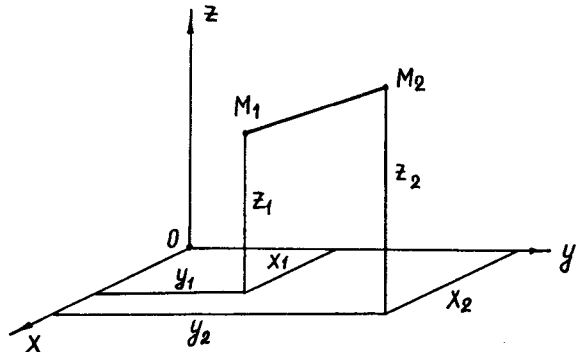


Рис. 26.1

Надалі будемо розглядати тільки утримувальні в'язі.

Якщо рівняння утримувальних в'язей містить явно час t , то в'язі називаються **нестационарними**:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Стационарні в'язі — це в'язі, до рівнянь яких час t явно не входить:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

В'язі, рівняння яких не містить похідних від координат:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h),$$

називаються **геометричними** або **голономними**.

В'язі, рівняння яких має вигляд

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h),$$

називаються **кінематичними**.

Кінематичні в'язі можуть бути голономними або неголономними. До **голономних** в'язей належать ті з кінематичних, які шляхом інтегрування можуть бути зведені до геометричних. Усі інші кінематичні в'язі, рівняння яких не можуть бути проінтегровані, називаються **неголономними**.

Надалі будемо розглядати механічні системи з голономними в'язями.

Розглянемо приклади голономних в'язей.

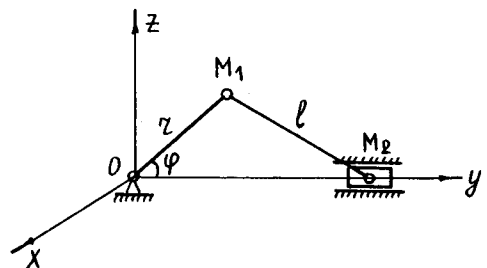
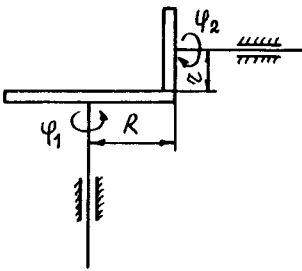


Рис. 26.2

Для точок M_1 і M_2 кривошипно-шатуного механізму (рис. 26.2) рівняння в'язей мають вигляд:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 = z_2 = 0; \\x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= r^2; \\(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= l^2,\end{aligned}$$

де x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 — відповідно координати точок M_1 і M_2 .



Розглянемо систему, яка складається з двох фрикційних коліс (рис. 26.3). Рівняння в'язі має вигляд

$$\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1 \frac{R}{r} = 0.$$

В'язь кінематична голономна, оскільки, інтегрую-

чи рівняння в'язі, одержуємо $\varphi_2 - \varphi_1 \frac{R}{r} = c_1$, тобто

рівняння геометричної в'язі.

Рис. 26.3

Кількістю ступенів вільності голономної механічної системи називається кількість незалежних параметрів, які цілком однозначно визначають її положення, тобто положення кожної точки системи.

Нехай механічна система складається з n матеріальних точок. Положення кожної точки m_k відносно інерційної системи відліку $Oxuz$ визначається за допомогою трьох координат x_k, y_k, z_k , а положення усіх точок — $3n$ координатами.

Будемо вважати, що рух системи обмежений h голономними й утримувальними в'язями:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, h).$$

Оскільки $3n$ координат x_k, y_k, z_k задовольняють h рівняння в'язей, вони не є незалежними. Очевидно, що кількість незалежних координат, тобто кількість ступенів вільності, що визначають положення системи, буде

$$S = 3n - h. \quad (26.2)$$

Можливими переміщеннями механічної системи називають уявні нескінченно малі переміщення точок системи, що допускаються в'язями, накладеними на точки системи у фіксований момент часу.

Можливі переміщення позначаються $\delta s, \delta \vec{r}, \delta \varphi$ тощо. Можливі переміщення на відміну від дійсних, які позначаються $d\vec{r}, ds, d\varphi$, визначаються тільки в'язями системи і не залежать від сил, що діють на точки механічної системи.

Розглянемо математичний маятник, що має сталу довжину l , рух якого відбувається в площині xOy (рис. 26.4). Рівняння в'язі (припускаємо, що нитка натягнена) буде $x^2 + y^2 = l^2$, де $l = \text{const}$. Це стаціонарна голономна в'язь. При русі маятника точка M рухається по колу радіусом l . З положення M_0 , яке займає точка в даний момент часу, уявно здійснимо нескінченне мале переміщення $\delta\vec{r}$, що має напрям по дотичній до кола. Це і буде одне з можливих переміщень математичного маятника. Очевидно, що, змінюючи величину і напрям $\delta\vec{r}$ уздовж дотичної, ми можемо здійснити безліч можливих переміщень (рис. 26.4). Зауважимо, що дійсне переміщення маятника $d\vec{r}$ буде також напрямленим уздовж дотичної до кола, тобто воно буде збігатися з одним із можливих переміщень. Отже, при голономних стаціонарних в'язях дійсне переміщення є одним із можливих.

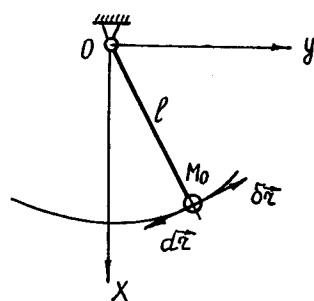


Рис. 26.4

У випадку голономних нестаціонарних в'язей, щоб установити можливі переміщення, необхідно уявно зупинити систему і розглянути малі переміщення, які можуть бути дозволені в'язями в даний фіксований момент часу. Тому при нестаціонарних в'язях дійсне переміщення не є одним із можливих.

Як ми вже зазначали, в загальному випадку для точок і тіл механічної системи можуть існувати безліч можливих переміщень. Проте для кожної системи можна визначити такі незалежні між собою переміщення, що будь-які інші можливі переміщення будуть визначатися через ці незалежні.

Наприклад, для точок кривошипно-шатунного механізму (рис. 26.5) можливим переміщенням кривошипа OA буде його поворот на малий кут $\delta\varphi$, а можливим переміщенням точок A і B будуть переміщення $\delta\vec{r}_A$ і $\delta\vec{r}_B$. Серед цих можливих переміщень одне незалежне, а інші визначаються через це незалежне переміщення. При визначенні залежності між можливими переміщеннями слід виходити з точки зору кінематики.

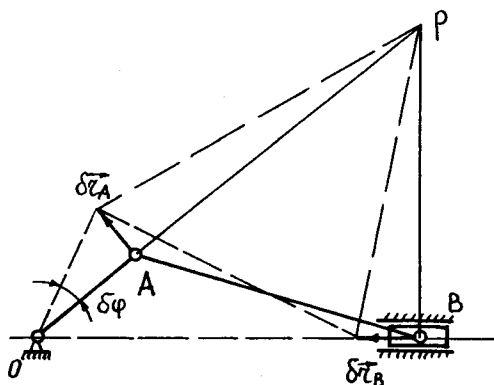


Рис. 26.5

Наприклад, коли розглядаються можливі переміщення кінців незмінного відрізка, то ці переміщення пов'язані між собою на підставі теореми про рівність проєкцій можливих переміщень кінців відрізка на напрям цього відрізка. Якщо система складається з твердих тіл, частина яких або всі вони здійснюють плоскопаралельний рух, то для знаходження залежності між можливими переміщеннями окремих точок цих

тіл можна в кожний даний момент розглядати цей рух як обертальний навколо миттєвого центра швидкостей (обертання) і скористатися теоремою, за якою: *можливі переміщення двох точок твердого тіла при плоскопаралельному русі відносяться як відстані від них до миттєвого центра швидкостей (обертання)*. При цьому можливе переміщення кожної точки тіла напрямлене перпендикулярно до прямої, що сполучає дану точку з миттєвим центром швидкостей (обертання), і напрямлене в бік миттєвого обертання.

На підставі розглянутого залежності між можливими переміщеннями кривошипно-шатунного механізму (рис. 26.5) мають вигляд

$$\delta r_A = OA \delta \varphi; \quad \delta r_B = \frac{OA \cdot Bp}{Ap} \delta \varphi.$$

Таким чином, можливі переміщення точок A і B кривошипно-шатунного механізму однозначно визначаються через одне незалежне переміщення $\delta \varphi$.

Кількість незалежних одне від одного можливих переміщень точок системи називається кількістю ступенів вільності системи. Розглянутий вище кривошипно-шатунний механізм має один ступінь вільності.

Тепер розглянемо поняття ідеальних в'язей. *Ідеальними в'язями називаються в'язі, для яких сума робіт їх реакцій на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю*:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (26.3)$$

де \bar{R}_k — реакція в'язі, накладеної на k -ту точку механічної системи; $\delta \bar{r}_k$ — можливе переміщення k -ї точки системи.

Ідеальними в'язями є, наприклад, в'язі без тертя. Так, абсолютно гладенька поверхня є ідеальною в'яззю. Реакція абсолютно гладенької поверхні перпендикулярна до цієї поверхні. При ковзанні тіла по гладенькій поверхні можливі переміщення будуть міститися у дотичній до поверхні площині. Оскільки реакція поверхні перпендикулярна до можливого переміщення, робота реакції на цьому переміщенні дорівнює нулю.

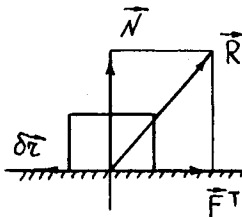


Рис. 26.6

Якщо поверхня шорстка, то її повна реакція \bar{R} складається з нормальної реакції \bar{N} і сили тертя \bar{F}^T (рис. 26.6). У випадку ковзання тіла по цій поверхні сума робіт реакцій \bar{N} і \bar{F}^T не буде дорівнювати нулю, оскільки робота сили тертя не дорівнює нулю:

$$\delta A = \bar{N} \delta \bar{r} + \bar{F}^T \delta \bar{r} \neq 0.$$

Тому при ковзанні тіла по шорсткій поверхні в'язь (шорстка поверхня) не буде ідеальною.

Проте шорстка поверхня може бути ідеальною в'яззю у випадку кочення будь-якого тіла по цій поверхні без ковзання (за умови нерухомості поверхні і відсутності тертя кочення). У цьому випадку реакція в'язі також складається з нормальної і дотичної складових, але можливе переміщення точки прикладання цих реакцій, тобто миттєвого центра швидкостей, дорівнює нулю. Тому якщо в'яззю є шорстка нерухома поверхня, то при коченні по цій поверхні тіла (тертя кочення відсутнє) робота реакції в'язі буде дорівнювати нулю і в'язь буде ідеальною.

Ідеальними в'язями є також гнучкі нерозтяжні нитки й ідеальні стрижні (тертя в шарнірах відсутнє). Дійсно, розглянемо як приклад випадок, коли дві матеріальні точки M_1 і M_2 з'єднані між собою жорстким невагомим ідеальним стрижнем (рис. 26.7).

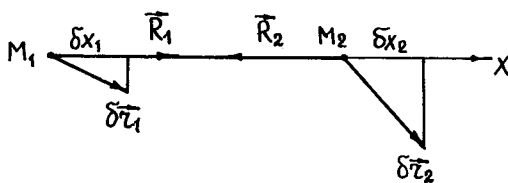


Рис. 26.7

Нехай стрижень буде розтягнений, тоді його реакції мають напрям такий, як зображено на рис. 26.7. Окрім того, $|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2|$.

При русі стрижня проекції переміщень його кінців на напрям стрижня рівні:

$$\delta x_1 = \delta x_2.$$

Тому сума робіт реакцій стрижня дорівнює нулю:

$$\delta A = R_1 \delta x_1 - R_2 \delta x_2 = 0.$$

Таким чином, жорсткий невагомий ідеальний стрижень є ідеальною в'яззю. Аналогічний результат дістанемо у випадку в'язі у вигляді гнучкої невагомої нерозтяжної нитки.

Ідеальною в'яззю є також нерухомий шарнір без тертя. Якщо тертя відсутнє, робота реакції шарніра \vec{R} дорівнює нулю, оскільки точка прикладання реакції \vec{R} завжди залишається нерухомою.

26.2. Принцип можливих переміщень

Принцип можливих переміщень — це принцип механіки, який встановлює необхідні й достатні умови рівноваги (спокою) механічної системи.

Нехай на механічну систему накладено h голономних стаціонарних в'язей:

$$f_i = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Диференціальні рівняння руху цієї невідільної системи мають вигляд

$$m_k \bar{W}_k = \bar{F}_k + \bar{R}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (26.4)$$

де m_k — маса; k — номер точки; \bar{W}_k — прискорення точки; \bar{F}_k і \bar{R}_k — відповідно рівнодійні усіх зовнішніх і внутрішніх активних сил і реакцій в'язей, прикладених до k -ї точки.

Під рівновагою (спокоем) механічної системи розуміють такий її стан, в якому вона буде перебувати весь час, якщо в початковий момент часу, маючи швидкості всіх точок такими, що дорівнюють нулю, вона перебувала в цьому стані. Звідси випливає, що в положенні рівноваги системи швидкості і прискорення всіх її точок дорівнюють нулю:

$$\bar{V}_k = \bar{0}; \quad \bar{W}_k = \bar{0} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

або, на підставі рівнянь (26.4)

$$\bar{V}_k = \bar{0}; \quad \bar{F}_k + \bar{R}_k = \bar{0} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (26.5)$$

Рівняння (26.5) — це умови рівноваги механічної системи, на яку накладені голономні стаціонарні в'язі. Застосування цих умов потребує урахування реакцій в'язей, які зазвичай заздалегідь не відомі, і це стримує широке застосування цих умов.

Широко використовуються при дослідженні рівноваги механічних систем з голономними стаціонарними в'язями інші умови — ті, що становлять зміст принципу можливих переміщень, оскільки при їх застосуванні немає потреби вводити до розгляду невідомі реакції ідеальних в'язей.

Подамо формулювання принципу можливих переміщень.

Необхідною і достатньою умовою рівноваги голономної механічної системи з ідеальними в'язями є рівність нулю роботи всіх активних сил на будь-якому можливому переміщенні точок системи:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (26.6)$$

Окрім того, відповідно до визначення рівноваги $V_k(t_0) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), де t_0 — початковий момент часу.

Наведені умови рівноваги механічної системи і становлять зміст принципу можливих переміщень.

Доведемо необхідність цих умов. Нехай система перебуває у стані рівноваги. При цьому виконуються умови (26.5). Помножимо скалярно другий вираз цих умов на $\delta \bar{r}_k$ — вектор можливого переміщення k -ї точки:

$$(\bar{F}_k + \bar{R}_k) \delta \bar{r}_k = 0.$$

Складаючи всі ці вирази, матимемо

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Оскільки в'язі ідеальні, то $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$ і, таким чином,

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Швидкості всіх точок при цьому дорівнюють нулю за припущенням.

Щоб довести достатність умов (26.6), необхідно довести, що при їх виконанні система буде перебувати в рівновазі.

Припускаємо, що умови (26.6) виконано, але, незважаючи на це, система під дією прикладених до неї сил почала рухатися зі стану спокою. Оскільки в'язі, накладені на точки системи, стаціонарні, то дійсне переміщення системи за час dt буде збігатися з одним із можливих переміщень $\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_n$.

Через те що переміщення окремих точок системи зі стану спокою відбуваються за напрямом рівнодійних \vec{F}_k і \vec{R}_k , то при цьому буде здійснена додатна робота:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k + \vec{R}_k) \cdot \delta \vec{r}_k > 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0.$$

Оскільки в'язі ідеальні, то $\sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$ і, таким чином,

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k > 0.$$

Несумісність цієї нерівності зі взятим допущенням (26.6) доводить достатність умов принципу можливих переміщень.

Принцип можливих переміщень дає змогу визначити положення рівноваги невідільної механічної системи, не вводячи до розгляду невідомі реакції ідеальних в'язей.

Для механічних систем, що мають один ступінь вільності, рівняння (26.6) буде *рівнянням рівноваги системи*. Якщо система має кілька ступенів вільності, то рівняння (26.6) потрібно скласти для кожного незалежного можливого переміщення окремо, тобто здобути стільки рівнянь рівноваги, скільки система має ступенів вільності, тому що кількість незалежних одне від одного можливих переміщень точок системи визначає кількість ступенів вільності системи.

Принцип можливих переміщень може бути застосовано для визначення реакцій ідеальних в'язей. Для цього на підставі аксіоми про звільнення від в'язей необхідно умовно відкинути в'язь і замінити її дію реакцією, а потім включити цю реакцію в число активних сил.

Якщо в'язі, накладені на систему, не ідеальні, то безпосередньо принцип можливих переміщень до таких систем непридатний. Проте в цьому випадку, наприклад при русі точок по шорстким поверхням, реакції поверхонь слід розкласти на нормальні складові і сили тертя; потім припустити, що в'язі ідеальні, а сили тертя віднести до активних сил.

На закінчення зазначимо, що іноді рівняння (26.6) називають *загальними рівняннями статички*.

26.3. Загальне рівняння динаміки (принцип Д'Аламбера — Лагранжа)

Принцип можливих переміщень є загальним методом розв'язання задач статички. Проте можна застосувати принцип можливих переміщень і для розв'язання задач динаміки, якщо його об'єднати з принципом Д'Аламбера.

За принципом Д'Аламбера при русі механічної системи активні сили \vec{F}_k^e і сили реакцій в'язей \vec{R}_k^e , що діють на точки системи, а також приєднані до них сили інерції $\vec{F}_k^{\text{ін}}$ у будь-який момент часу утворюють зрівноважену систему сил:

$$\vec{F}_k^e + \vec{R}_k^e + \vec{F}_k^{\text{ін}} = \vec{0} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (26.7)$$

де n — кількість точок системи.

За принципом можливих переміщень робота цієї зрівноваженої системи сил, що діють на точки механічної системи з ідеальними і утримувальними в'язями на будь-якому можливому переміщенні системи $\delta\vec{r}_k$, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^e + \vec{R}_k^e + \vec{F}_k^{\text{ін}}) \cdot \delta\vec{r}_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^{\text{ін}}) \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k^e \cdot \delta\vec{r}_k = 0.$$

За визначенням ідеальних в'язей остання сума дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{R}_k^e \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Тому остаточно матимемо

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^{in}) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (26.8)$$

Це рівняння, що є синтезом двох принципів: принципу Д'Аламбера і принципу можливих переміщень, — називається загальним рівнянням динаміки і формулюється так: *при русі механічної системи з ідеальними й утримувальними в'язями в будь-який момент часу сума елементарних робіт активних зовнішніх сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю.*

Методика застосування загального рівняння динаміки відрізняється від методики застосування загального рівняння статички тільки тим, що додатково доводиться визначати елементарну роботу сил інерції тіл системи.

Загальне рівняння динаміки дає змогу скласти диференціальні рівняння руху механічної системи. Для цього необхідно скласти окремо для кожного незалежного можливого переміщення системи рівняння виду (26.8), тобто стільки рівнянь, скільки система має ступенів вільності.

26.4. Узагальнені координати. Узагальнені сили. Рівняння Лагранжа II роду

У параграфі 26.1 було зазначено, що положення механічної системи з h голономними в'язями визначається S незалежними декартовими координатами:

$$S = 3n - h.$$

Декартові координати — не єдині можливі параметри, що визначають положення точок системи. Так, положення всіх точок кривошипно-шатунного механізму (рис. 26.8) будуть відомими, якщо задати один параметр — кут повороту кривошипа φ . Параметр φ є узагальненою координатою.

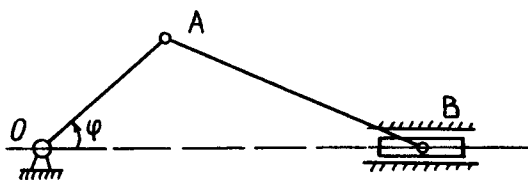


Рис. 26.8

Положення твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, визначається заданням трьох параметрів: x_A , y_A і φ (рис. 26.9). Розглянуті параметри також будуть узагальненими координатами.

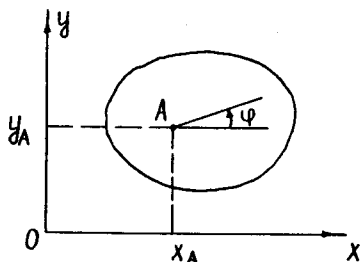


Рис. 26.9

Отже, *узагальненими координатами механічної системи називаються незалежні параметри системи* q_1, q_2, \dots, q_n , які однозначно визначають положення всіх точок системи.

Якщо система підпорядкована голономним, ідеальним і утримувальним в'язям, кількість незалежних узагальнених координат дорівнює кількості ступенів вільності системи S .

У загальному випадку узагальнені координати можуть мати різний геометричний і механічний зміст. Вони можуть бути лінійними і кутовими величинами, а також параметрами, що мають розмірність площі, об'єму та інших фізичних характеристик системи.

Впровадимо поняття *узагальненої сили*. Розглянемо вільну матеріальну точку, на яку діє сила \vec{F} . Надамо цій точці можливого переміщення $\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$ і визначимо елементарну роботу сили \vec{F} на цьому переміщенні:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z, \quad (26.9)$$

де F_x, F_y, F_z — відповідно проекції сили \vec{F} на осі декартової системи координат; $\delta x, \delta y, \delta z$ — відповідно проекції можливого переміщення $\delta\vec{r}$ на осі декартової системи координат.

Зауважимо, що оскільки можливе переміщення точки являє собою уявне нескінченно мале переміщення в даний момент (тобто при фіксованому значенні аргументу — часу t), то воно є варіацією відповідних координат точки.

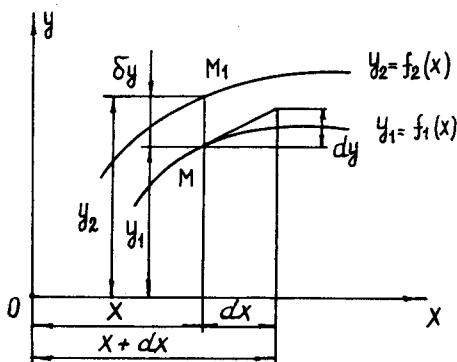


Рис. 26.10

Варіацією функції δy називається *приріст функції, зумовлений зміною виду функції при фіксованому значенні аргументу* (рис. 26.10). На відміну від варіації δy , диференціал функції dy є головною частиною приросту функції, що утворюється за рахунок приросту аргументу dx (рис. 26.10).

Правила варіювання функцій зовнішньо подібні до відповідних правил диференціювання функцій.

З формули (26.9) випливає, що коефіцієнти при варіаціях $\delta x, \delta y, \delta z$ є складови-

ми силами \vec{F} по координатних осях.

Тепер розглянемо механічну систему з S узагальненими координатами q_1, q_2, \dots, q_S . Надамо координатам нескінченно малого приросту $\delta q_1, \delta q_2,$

..., δq_s . Цим варіаціям відповідає деяке можливе переміщення системи $\delta \vec{r}$. Обчислимо елементарну роботу сил, діючих на систему, на цьому переміщенні:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k, \quad (26.10)$$

де \vec{F}_k — рівнодійна активних сил; \vec{R}_k — рівнодійна реакцій в'язей.

Якщо в'язі ідеальні, то

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{R}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Тоді рівняння (26.10) набирає вигляду

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k. \quad (26.11)$$

Радіуси-вектори точок системи \vec{r}_k є функціями узагальнених координат і можуть бути явними функціями часу t , тобто функціями виду

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

де n — кількість точок системи.

Тут кожна координата q_j — функція часу, тобто $q_j = q_j(t)$. Явна залежність \vec{r}_k від t має місце у випадках, коли система підпорядкована нестационарним в'язям, тобто таким, що переміщуються у просторі з часом. Коли ж система вільна або підпорядкована стаціонарним в'язям, то \vec{r}_k залежить тільки від узагальнених координат і, як наслідок, неявно залежить від часу. Отже, якщо в'язі стаціонарні, то

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Звідси, застосовуючи правило диференціювання функції кількох змінних величин, дістанемо

$$\delta \vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (26.12)$$

Підставляючи цей вираз у рівність (26.11), матимемо

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s,$$

або

$$\delta A = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j,$$

де

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (26.13)$$

За аналогією з формулою (26.9) коефіцієнти Q_1, Q_2, \dots, Q_S називаються узагальненими силами.

Отже, *узагальненими силами механічної системи з ідеальними в'язями називаються коефіцієнти при варіаціях узагальнених координат у вигляді елементарної роботи активних сил на можливому переміщенні системи, що відповідає цим варіаціям.*

Кількість узагальнених сил дорівнює кількості узагальнених координат, тобто кількості ступенів вільності системи. Узагальнена сила в різних випадках має різну розмірність:

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}.$$

Якщо узагальнена координата має розмірність довжини, то узагальнена сила має розмірність сили (в звичному розумінні); якщо узагальнена координата є кутковою величиною, то узагальнена сила має розмірність моменту сили, тобто вона може бути різною залежно від вибору узагальненої координати.

При визначенні узагальнених сил застосовують три способи.

Перший спосіб. Узагальнену силу визначають за формулою

$$Q_j = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, S), \quad (26.14)$$

де F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} — проєкції сили \bar{F}_k на осі декартової системи координат; x_k, y_k, z_k — декартові координати точок прикладання сили \bar{F}_k ; q_j — узагальнена координата; S — кількість ступенів вільності системи.

Розглянемо приклад визначення узагальненої сили цим способом. Одно-рідний стрижень OA , вага якого P , може обертатися навколо нерухомої осі Oz без тертя (рис. 26.11). У точці A до стрижня прикріплена пружина $O_1A = \ell$. Відстань $O_1O = OA = r$. Довжина пружини у ненапруженому стані дорівнює ℓ_0 ; жорсткість пружини дорівнює c . Взявши за узагальнену координату кут φ , знайти узагальнену силу.

Положення стрижня в системі координат $Oxyz$ (вісь Oz перпендикулярна до площини рисунка) визначається одною узагальненою координатою — φ .

Тому для визначення узагальненої сили Q достатньо скласти одне рівняння (26.14).

Визначаємо координати точок прикладання сил \vec{P} і \vec{F} :

$$x_A = r \cos \varphi; \quad x_C = \frac{r}{2} \cos \varphi;$$

$$y_A = r \sin \varphi; \quad y_C = \frac{r}{2} \sin \varphi;$$

$$z_A = 0; \quad z_C = 0.$$

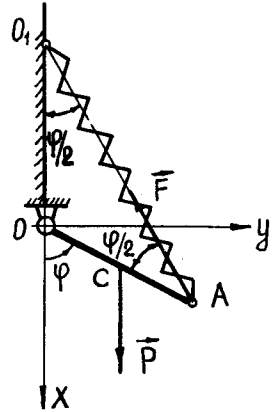


Рис. 26.11

Проекції сил \vec{P} і \vec{F} на осі координат такі:

$$P_x = P; \quad P_y = P_z = 0;$$

$$F_x = -c \left(2r \cos \frac{\varphi}{2} - l_0 \right) \cos \frac{\varphi}{2}; \quad F_y = -c \left(2r \cos \frac{\varphi}{2} - l_0 \right) \sin \frac{\varphi}{2}; \quad F_z = 0,$$

оскільки $F = c(l - l_0) = c \left(2r \cos \frac{\varphi}{2} - l_0 \right)$.

Отже, на підставі формули (26.14) матимемо

$$\begin{aligned} Q &= P \frac{\partial x_C}{\partial \varphi} - c \left(2r \cos \frac{\varphi}{2} - l_0 \right) \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\partial x_A}{\partial \varphi} - c \left(2r \cos \frac{\varphi}{2} - l_0 \right) \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\partial y_A}{\partial \varphi} = \\ &= cr \left(2r \cos \frac{\varphi}{2} - l_0 \right) \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{Pr}{2} \sin \varphi, \end{aligned}$$

де $\frac{\partial x_A}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi; \quad \frac{\partial y_A}{\partial \varphi} = r \cos \varphi; \quad \frac{\partial x_C}{\partial \varphi} = -\frac{r}{2} \sin \varphi.$

Другий спосіб (найбільш поширений). Узагальнену силу обчислюють за такою схемою:

- 1) визначають кількість ступенів вільності системи S ;
- 2) обирають узагальнену координату;
- 3) вивчають систему активних сил, прикладених до точок системи, і зображують їх на розрахунковій схемі;
- 4) якщо серед в'язей, накладених на систему, є також і неідеальні (з тертям), то до числа активних сил слід додати сили тертя;
- 5) надають точкам системи незалежних можливих переміщень в кількості, що дорівнює кількості ступенів вільності механічної системи;
- 6) складають вираз елементарної роботи всіх активних сил, включаючи й реакції неідеальних в'язей на незалежних можливих переміщеннях точок системи:

$$\delta A = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j, \quad (26.15)$$

де S — кількість ступенів вільності системи.

Узагальнена сила Q_j дорівнює коефіцієнту при варіації δq_j у попередньому виразі.

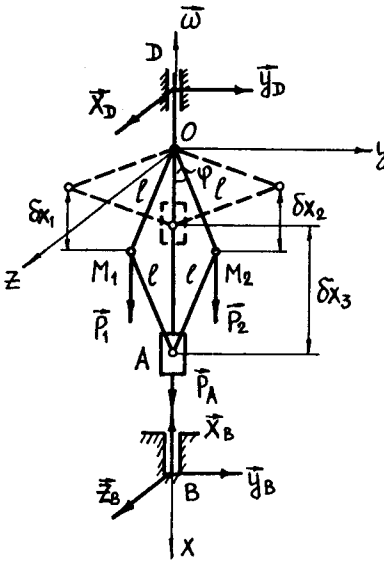


Рис. 26.12

Розглянемо приклад визначення узагальненої сили за цим способом. Відцентровий регулятор (рис. 26.12) складається з кульок M_1 і M_2 , що мають масу m , невагомих стрижнів і муфти A , маса якої дорівнює m_1 . Регулятор обертається навколо осі x зі сталою кутовою швидкістю ω без тертя. Беручи за узагальнену координату кут φ , знайти відповідну узагальнену силу.

Система складається з трьох точок: M_1 , M_2 і A . Кількість ступенів вільності системи дорівнює одиниці. Узагальнена координата — кут φ . Прикладаємо всі активні сили, що діють на точки системи. Надаємо точкам системи можливого переміщення і складаємо вираз (26.15), тобто вираз елементарної роботи всіх активних сил і реакцій в'язей:

$$\delta A = P_1 \delta x_1 + P_2 \delta x_2 + P_A \delta x_3.$$

Елементарна робота реакцій \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{Z}_B , \vec{Y}_D і \vec{Z}_D дорівнює нулю, оскільки їх точки прикладання нерухомі.

Виражаємо переміщення δx_1 , δx_2 і δx_3 через незалежне $\delta\varphi$. З рис. 26.12 випливає:

$$x_1 = l \cos \varphi; \quad x_2 = l \cos \varphi; \quad x_3 = 2l \cos \varphi.$$

Варіації δx_1 , δx_2 і δx_3 такі:

$$\delta x_1 = -l \sin \varphi \delta\varphi; \quad \delta x_2 = -l \sin \varphi \delta\varphi; \quad \delta x_3 = -2l \sin \varphi \delta\varphi.$$

Підставляючи ці значення у вираз елементарної роботи, дістанемо

$$\begin{aligned} \delta A &= -P_1 l \sin \varphi \delta\varphi - P_2 l \sin \varphi \delta\varphi - 2P_A l \sin \varphi \delta\varphi = \\ &= -(mgl \sin \varphi - mgl \sin \varphi - 2m_1 g \varphi l \sin \varphi) \delta\varphi = [-2gl(m + m_1) \sin \varphi] \delta\varphi. \end{aligned}$$

Оскільки узагальнена сила Q дорівнює коефіцієнту при варіації $\delta\varphi$, то маємо

$$Q = -2gl(m + m_1) \sin \varphi.$$

Третій спосіб. Якщо всі сили, які діють на матеріальну систему, потенці- альні (сили, що залежать тільки від положення системи), то, обравши узагаль- нені координати, треба обчислити потенціальну енергію Π системи (роботу всіх сил системи при переході системи з даного положення у положення, що умовно взяте за нульове) як функцію від узагальнених координат. Узагаль- нену силу обчислюють за формулою

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2 \dots, S). \quad (26.16)$$

Розглянемо приклад визначення узагальненої сили за цим способом. На рис. 26.13 зображено кривошипно-шатунний механізм. Стрижні OA і AB однорідні й мають однакову довжину a і масу m . Поршень B має масу m_1 . Середини стрижнів OA і AB з'єднані пружиною, що має жорсткість c . Довжина пружини у недеформованому стані $l_0 < a$. Механізм розташований у вертикальній площині. Беручи за узагальнену координату кут φ , визначити узагальнену силу.

Система має один ступінь вільності. Тому, щоб визначити узагальнену силу, необхідно скласти одне рівняння (26.16). Потенціальна енергія системи, що розглядається, складається з потенціальної енергії пружини Π_n , потенціальних енергій стрижнів Π_{cr1}, Π_{cr2} і потенціальної енергії поршня $\Pi_{пор}$:

$$\Pi = \Pi_n + \Pi_{cr1} + \Pi_{cr2} + \Pi_{пор}.$$

Потенціальні енергії $\Pi_n, \Pi_{cr1}, \Pi_{cr2}$ і $\Pi_{пор}$ визначаємо на підставі формул (20.18) і (20.19):

$$\Pi_n = \frac{c\lambda^2}{2} + \text{const} = \frac{1}{2}c(a \cos \varphi - l_0)^2 + \text{const};$$

$$\Pi_{cr1} = -P_1 x_{C_1} + \text{const} = -\frac{mga}{2} \cos \varphi + \text{const};$$

$$\Pi_{cr2} = -P_2 x_{C_2} + \text{const} = -\frac{3mga}{2} \cos \varphi + \text{const};$$

$$\Pi_{пор} = -P_3 x_B + \text{const} = -2m_1ga \cos \varphi + \text{const},$$

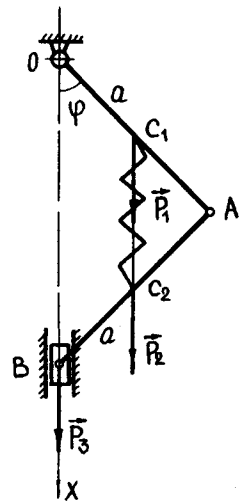


Рис. 26.13

де $\lambda = (c_1 c_2 - l_0)$ — деформація пружини; x_{c_1} , x_{c_2} і x_B — координати точок прикладання сил \vec{P}_1 , \vec{P}_2 і \vec{P}_3 .

Отже, потенціальна енергія системи

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2}(c \cos \varphi - l_0)^2 - \frac{mga}{2} \cos \varphi - \frac{3mga}{2} \cos \varphi - 2m_1 ga \cos \varphi + \text{const} = \\ &= -2(m + m_1)ga \cos \varphi + \frac{1}{2}c(a \cos \varphi - l_0)^2 + \text{const}.\end{aligned}$$

Диференціюємо цей вираз за φ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[-2(m + m_1)ga \cos \varphi + \frac{1}{2}c(a \cos \varphi - l_0)^2 + \text{const} \right] = \\ &= 2(m + m_1)ga \sin \varphi - ac(a \cos \varphi - l_0) \sin \varphi.\end{aligned}$$

Таким чином, узагальнена сила визначається таким виразом:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -2(m + m_1)ga \sin \varphi + ac(a \cos \varphi - l_0) \sin \varphi.$$

Тепер розглянемо загальне рівняння динаміки в узагальнених координатах. Запишемо рівняння (26.8):

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^{\text{in}}) \cdot \delta \vec{r}_k = 0,$$

або

$$\sum_{k=1}^n \left(\vec{F}_k^e - m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \right) \cdot \delta \vec{r}_k = 0.$$

Підставивши в це рівняння значення $\delta \vec{r}_k$ з рівності (26.12), дістанемо

$$\sum_{k=1}^n \left(\vec{F}_k^e - m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \right) \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$

Перетворимо цей вираз так:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \left(m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} - \vec{F}_k^e \right) \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j &= \sum_{j=1}^S \sum_{k=1}^n \left(m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} - \vec{F}_k^e \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^S \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0.\end{aligned}$$

Беручи до уваги рівність (26.13), дістанемо

$$\sum_{j=1}^s \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0. \quad (26.17)$$

Перетворимо перший член рівняння (26.17) так:

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_k \vec{V}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \vec{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \quad (26.18)$$

в чому можна переконатися простою перевіркою, застосувавши правило диференціювання добутку.

На підставі тотожностей Лагранжа

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j}, \quad (26.19)$$

які дістанемо таким чином: першу тотожність — диференціюючи вираз $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s)$ за часом t , а потім — за узагальненою швидкістю

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt};$$

$$\vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s; \quad (26.20)$$

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}, \quad (26.21)$$

а другу — шляхом порівняння похідних $\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j}$ і $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$:

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_2 \partial q_j} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_s \partial q_j} \dot{q}_s;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_k}{\partial q_j \partial q_s} \dot{q}_s;$$

далі перетворимо вираз (26.18):

$$\begin{aligned}
 m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt} \left(m_k \vec{V}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) - m_k \vec{V}_k \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = \\
 &= \frac{d}{dt} \left(m_k \vec{V}_k \cdot \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_k \vec{V}_k \cdot \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right).
 \end{aligned}$$

Цей вираз підставляємо в рівність (26.17):

$$\sum_{j=1}^S \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right) \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0,$$

або

$$\sum_{j=1}^S \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} - Q_j \right) \delta q_j = 0.$$

Беручи до уваги визначення кінетичної енергії системи

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2},$$

матимемо

$$\sum_{j=1}^S \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0.$$

Оскільки δq_j довільні і незалежні, то останній вираз набирає вигляду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \dots, S), \quad (26.22)$$

де T — кінетична енергія механічної системи; \dot{q}_j — узагальнена швидкість; q_j — узагальнена координата; Q_j — узагальнена сила; S — кількість ступенів вільності механічної системи.

Система рівнянь (26.22) і є загальним рівнянням динаміки в узагальнених координатах, або рівнянням Лагранжа II роду; кількість рівнянь дорівнює кількості ступенів вільності системи. На закінчення зазначимо, що застосування рівнянь Лагранжа II роду при розв'язанні основної задачі динаміки невідільної механічної системи дає можливість розділити цю задачу на дві окремі: задачу визначення рівнянь руху системи (за допомогою інтегрування рівнянь Лагранжа II роду) і задачу визначення реакцій в'язей (за допомогою, наприклад, принципу Д'Аламбера).

26.5. Приклади застосування принципу можливих переміщень, загального рівняння динаміки і рівняння Лагранжа II роду при розв'язанні задач. Методичні вказівки.

Типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю

Схема розв'язання задач із застосуванням принципу можливих переміщень така:

- 1) виділити об'єкт рівноваги;
- 2) за наявності неідеальних в'язей віднести відповідні сили тертя до активних сил, після чого в'язі розглядати як ідеальні;
- 3) визначивши систему всіх активних сил, включаючи сили тертя неідеальних в'язей, показати їх на розрахунковій схемі;
- 4) у випадку визначення реакції в'язі слід умовно відкинути в'язь, замінивши її дію шуканою реакцією в'язі;
- 5) визначити кількість ступенів вільності системи;
- 6) вибрати незалежні можливі переміщення точок системи у кількості, що дорівнює кількості ступенів вільності;
- 7) надати системі можливого переміщення, яке відповідає одному зі ступенів вільності системи. Виразити можливі переміщення точок прикладання сил залежно від заданого можливого переміщення;
- 8) обчислити суму елементарних робіт усіх сил (заданих, реакцій неідеальних в'язей, шуканої сили реакції в'язі) на відповідних можливих переміщеннях точок їх прикладання і цю суму прирівняти до нуля;
- 9) прирівняти до нуля коефіцієнти при незалежних переміщеннях, що містяться в рівнянні елементарних робіт. Це дає змогу скласти систему рівнянь рівноваги, кількість яких дорівнює кількості незалежних можливих переміщень, тобто кількості ступенів вільності системи;
- 10) розв'язати складену систему рівнянь рівноваги і визначити шукані величини;
- 11) проаналізувати розв'язки з метою визначення області їх застосування.

Приклад 26.1. Подрібнення вапнякового каменю на цукрових заводах здійснюється за допомогою щоккових дробарок. Схему механізму щоккової дробарки подано на рис. 26.14. Визначити величину сили \bar{Q} (рівнодійна сил,

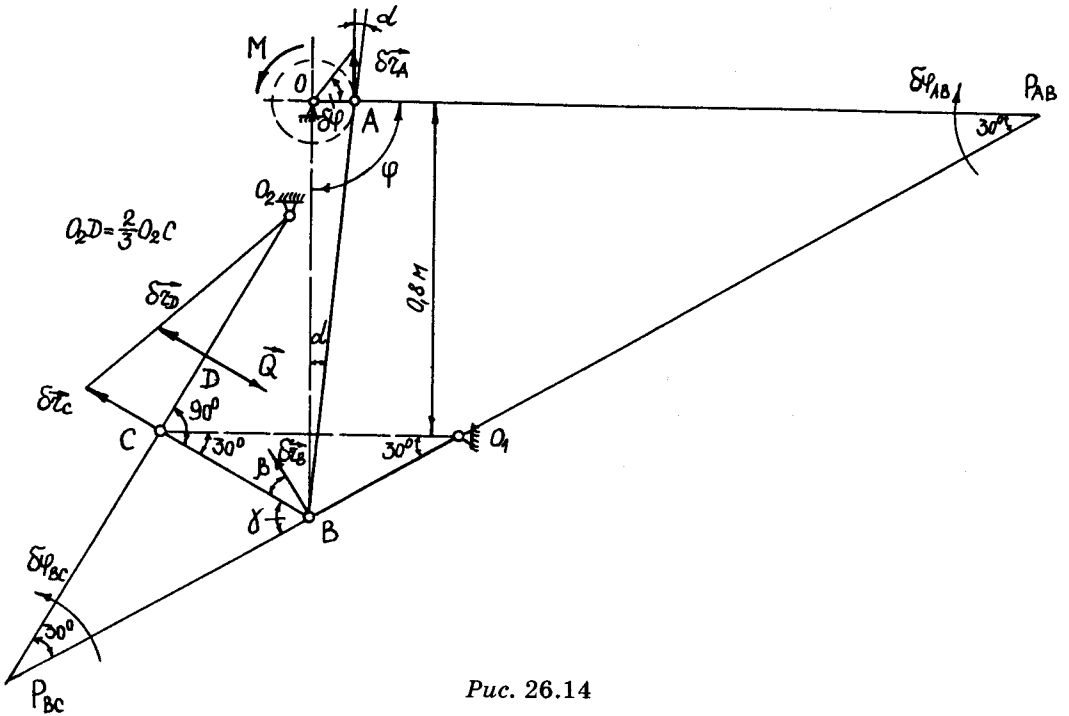


Рис. 26.14

що діють з боку подрібнюваного матеріалу на робочу щоку дробарки O_2C), якщо механізм дробарки перебуває в рівновазі в положенні, зображеному на рис. 26.14, і на кривошип OA діє обертальний момент $M = 1,6$ кН·м. Крім того, відомо, що $OA = 0,1$ м, $BC = BO_1 = 0,4$ м, $O_2D = \frac{2}{3}O_2C$. Тертям у шарнірах механізму дробарки знехтувати.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу механізму дробарки, що перебуває під дією сили \bar{Q} і обертального моменту M . Механізм дробарки має один ступінь вільності.

Примітка. При визначенні кількості ступенів вільності плоских механізмів необхідно уявити, що механізм рухається. Потім уявно зупинити поступальний або обертальний рух будь-якої однієї ланки механізму; якщо при цьому механізм зупиняється, то механізм має один ступінь вільності.

Якщо після зупинки поступального або обертального руху однієї ланки механізм продовжує рух, але коли потім буде зупинений рух будь-якої іншої ланки, механізм зупиняється, то він має два ступеня вільності і т. д.

Положення механізму визначається кутом φ (рис. 26.14). Надамо системі можливого переміщення, за якого кут φ зміниться на $\delta\varphi$. При цьому точка A зазнає можливого переміщення $\delta\vec{r}_A$, а точки B, C і D — відповідно $\delta\vec{r}_B$, $\delta\vec{r}_C$ і $\delta\vec{r}_D$ (вектори $\delta\vec{r}_A$, $\delta\vec{r}_B$, $\delta\vec{r}_C$ і $\delta\vec{r}_D$ перпендикулярні до стрижнів OA, O_1B і O_2C).

Оскільки тертям у шарнірах нехтуємо, то в'язі, накладені на систему, ідеальні. Застосовуючи принцип можливих переміщень, складемо рівняння елементарних робіт прикладених сил на можливих переміщеннях:

$$M\delta\varphi - Q\delta r_D = 0.$$

Другий член рівняння від'ємний, оскільки при даному напрямі $\delta\varphi$ лінійне можливе переміщення $\delta\vec{r}_D$ відбувається в напрямі, протилежному дії сили \vec{Q} .

Беручи за незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$, виразимо лінійне переміщення $\delta\vec{r}_D$ через $\delta\varphi$.

Переміщення δr_A знайдемо за формулою

$$\delta r_A = OA\delta\varphi = 0,1\delta\varphi.$$

Для визначення δr_B знайдемо положення миттєвого центра обертання стрижня AB у точці p_{AB} перетину перпендикулярів, побудованих з точок A і B до відповідних можливих переміщень $\delta\vec{r}_A$ і $\delta\vec{r}_B$. З рис. 26.14 випливає:

$$\delta r_A = \delta\varphi_{AB} \cdot Ap_{AB},$$

звідки

$$\delta\varphi_{AB} = \frac{\delta r_A}{Ap_{AB}} = \frac{0,1\delta\varphi}{Op_{AB} - OA} = \frac{0,1\delta\varphi}{1,732 - 0,1} = 0,0613\delta\varphi,$$

де Op_{AB} визначається із $\Delta Op_{AB}B$:

$$Op_{AB} = \sqrt{(Bp_{AB})^2 - (OB)^2} = \sqrt{2^2 - 1} = 1,732 \text{ м.}$$

Переміщення δr_B становить:

$$\delta r_B = \delta\varphi_{AB} \cdot Bp_{AB} = 0,0613 \cdot \delta\varphi \cdot 2 = 0,123\delta\varphi,$$

де Bp_{AB} визначається із $\Delta Op_{AB}B$, тобто $Bp_{AB} = 2$ м, оскільки $OB = 1$ м, а кут $\angle Op_{AB}B = 30^\circ$.

Зв'язок між переміщеннями $\delta\vec{r}_B$ і $\delta\vec{r}_C$ можна визначити аналогічно попередньому, оскільки точка p_{BC} — миттєвий центр обертання стрижня BC , або на підставі теореми про рівність проєкцій можливих переміщень кінців відрізка на напрям цього відрізка:

$$\delta r_B \cos\beta = \delta r_C.$$

З рис. 26.14 випливає, що $\beta = 90^\circ - \gamma$, де γ визначається з ΔCBp_{BC} , тобто $\gamma = 60^\circ$. Тоді $\beta = 30^\circ$.

Отже, переміщення

$$\delta r_C = \delta r_B \cos 30^\circ = 0,123\delta\varphi \cos 30^\circ = 0,123 \cdot 0,866\delta\varphi = 0,106\delta\varphi.$$

Зв'язок між переміщеннями $\delta \vec{r}_C$ і $\delta \vec{r}_D$ знайдемо зі співвідношення

$$\frac{\delta r_C}{O_2C} = \frac{\delta r_D}{O_2D},$$

звідки

$$\delta r_D = \frac{\delta r_C O_2D}{O_2C} = \frac{2\delta r_C O_2C}{3O_2C} = \frac{2\delta r_C}{3} = \frac{2 \cdot 0,106\delta\varphi}{3} = 0,0707\delta\varphi.$$

Підставляючи знайдене значення δr_D у рівняння елементарної роботи, дістаємо

$$M\delta\varphi - 0,0707Q\delta\varphi = 0,$$

або

$$\delta\varphi(M - 0,0707Q) = 0;$$

Оскільки $\delta\varphi \neq 0$, то

$$M - 0,0707Q = 0,$$

звідки

$$Q = \frac{M}{0,0707} = \frac{1600}{0,0707} = 22631 \text{ Н} \approx 22,6 \text{ кН}.$$

Приклад 26.2. Хитний живильник зерна (рис. 26.15) складається з приводу, що являє собою кривошипно-шатунний механізм, і бункера E (маса бункера із зерном дорівнює m_1). Бункер спирається на два нерухомих ролики D радіусом R_D і масою m_D (маса кожного ролика рівномірно розподілена по його ободу) і на два прикріплених до бункера котки C радіусом R_C і масою m_C (котки є суцільними однорідними циліндрами).

Визначити кутову швидкість кривошипа OA в положенні живильника, що подано на рис. 26.15, якщо до кривошипа прикладений обертальний момент M , а до роликів D і котків C — моменти тертя кочення (коефіцієнт тертя кочення дорівнює k). Довжина кривошипа $OA = r$, довжина шатуна $AB = \ell = 10r$. Вважати, що у положенні живильника, що розглядається, вага бункера із зерном рівномірно розподілена між роликами D і котками C . Масою кривошипа і шатуна, а також тертям у шарнірах знехтувати.

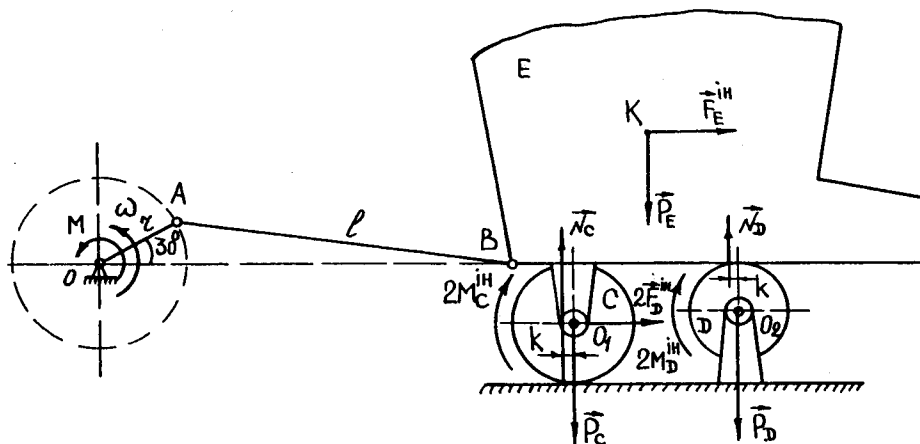


Рис. 26.15

Розв’язання. Розглядаємо систему в заданому положенні. Прикладемо до тіл системи активні сили $\vec{P}_E, \vec{P}_C, \vec{P}_D$ і обертальний момент M .

Додавши моменти сил опору при коченні котків $C - M_{\text{он}}^C = 2N_C k$ і роликів $D - M_{\text{он}}^D = 2N_D k$ до числа активних сил, будемо вважати, що на систему накладені тільки ідеальні в’язі.

Прикладемо згідно із загальним рівнянням динаміки до тіл системи відповідні сили інерції. При цьому необхідно взяти до уваги, що при русі твердого тіла сили інерції часток тіла приводяться до головного вектора \vec{R}_O^{in} і головного моменту \vec{M}_O^{in} (див. параграф 21.2).

Прикладаємо до бункера E , який рухається поступально, силу інерції \vec{F}_E^{in} в точці K і до котків C , які здійснюють плоскопаралельний рух, силу інерції $2\vec{F}_D^{\text{in}}$ в точці O_1 і момент сил інерції $2M_C^{\text{in}}$; до роликів D , які обертаються відносно нерухомої осі, момент сил інерції $2M_D^{\text{in}}$.

Оскільки система має один ступінь вільності, надамо їй одного незалежного можливого переміщення і складемо загальне рівняння динаміки.

За незалежне можливе переміщення системи оберемо $\delta\varphi$ — кут повороту кривошипа OA . Тоді можливим переміщенням точки K буде $\delta\vec{r}_K$, точки B — $\delta\vec{r}_B$, котків C — $\delta\vec{r}_{O_1}$ і $\delta\varphi_C$, а роликів D — $\delta\varphi_D$ (рис. 26.16).

Складемо загальне рівняння динаміки, тобто рівняння елементарних робіт усіх заданих сил, сил інерції, а також моментів сил опору кочення (див. рис. 26.15 і рис. 26.16):

$$M\delta\varphi - F_E^{\text{in}}\delta r_K - 2F_D^{\text{in}}\delta r_{O_1} - 2M_C^{\text{in}}\delta\varphi_C - 2M_D^{\text{in}}\delta\varphi_D - 2N_C k\delta\varphi_C - 2N_D k\delta\varphi_D = 0.$$

Виразимо можливі переміщення $\delta r_K, \delta r_{O_1}, \delta\varphi_C$ і $\delta\varphi_D$ через $\delta\varphi$.

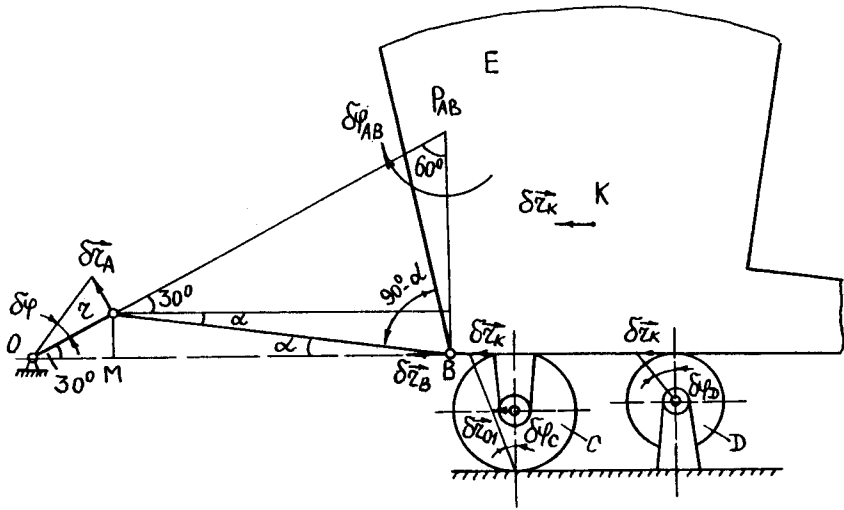


Рис. 26.16

З рис. 26.16 випливає, що

$$\delta r_A = OA \delta \varphi = r \delta \varphi; \quad \delta r_B = \delta \varphi_{AB} B p_{AB},$$

де $\delta \varphi_{AB} = \frac{\delta r_A}{A p_{AB}} = \frac{r \delta \varphi}{A p_{AB}}$ (оскільки точки O і p_{AB} — миттєві центри обертання кривошипа OA і шатуна AB).

Визначаємо $B p_{AB}$ і $A p_{AB}$. Із трикутника $\triangle MAB$ матимемо

$$\sin \alpha = \frac{AM}{l} = \frac{0,5r}{10r} = 0,05,$$

тоді $\alpha = 2,87^\circ$. Із трикутника $\triangle A p_{AB} B$ матимемо

$$\frac{B p_{AB}}{\sin(30^\circ + \alpha)} = \frac{l}{\sin 60^\circ} = \frac{A p_{AB}}{\sin(90^\circ - \alpha)},$$

звідки

$$B p_{AB} = \frac{l \sin(30^\circ + \alpha)}{\sin 60^\circ} = \frac{10r \sin 32,87^\circ}{\sin 60^\circ} = 6,27r;$$

$$A p_{AB} = \frac{l \cos \alpha}{\sin 60^\circ} = \frac{10r \cos 2,87^\circ}{\sin 60^\circ} = 11,53r.$$

Тоді

$$\delta\varphi_{AB} = \frac{r\delta\varphi}{Ap_{AB}} = \frac{r\delta\varphi}{11,53r} = 0,087\delta\varphi;$$

$$\delta r_B = \delta\varphi_{AB} Bp_{AB} = 0,087 \cdot 6,27r\delta\varphi = 0,544\delta\varphi.$$

Можливе переміщення $\delta r_k = \delta r_B$, оскільки точки B і K належать бункеру E , який рухається поступально.

Можливі переміщення $\delta r_{01}, \delta\varphi_C$ і $\delta\varphi_D$ такі (рис. 26.16):

$$\delta r_{01} = \frac{\delta r_k}{2} = \frac{\delta r_B}{2} = \frac{0,544\delta\varphi}{2} = 0,272\delta\varphi;$$

$$\delta\varphi_C = \frac{\delta r_{01}}{R_C} = \frac{0,272\delta\varphi}{R_C};$$

$$\delta\varphi_D = \frac{\delta r_k}{R_D} = \frac{0,544\delta\varphi}{R_D}.$$

Визначаємо відповідні сили інерції залежно від шуканої кутової швидкості кривошипа ω .

Сила інерції F_E^{in} становить:

$$F_E^{in} = m_1 W_K = m_1 W_B,$$

де $W_K = W_B$, оскільки бункер рухається поступально.

Визначаємо прискорення точки B (рис. 26.17). Точка B належить шатуну AB . Шатун AB рухається плоскопаралельно, тому прискорення точки B

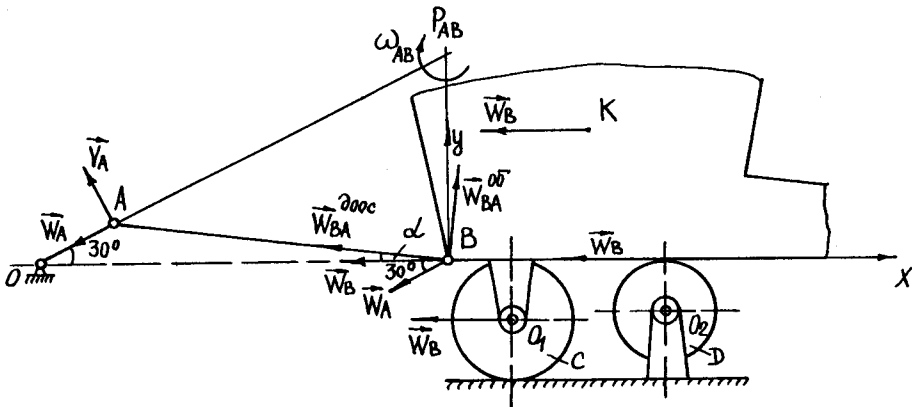


Рис. 26.17

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^{\text{дооc}} + \vec{W}_{BA}^{\text{об}}.$$

Проекціюємо це рівняння на вісь x :

$$-W_B = -W_A \cos 30^\circ - W_{BA}^{\text{дооc}} \cos \alpha,$$

звідки

$$\begin{aligned} W_B &= -W_A \cos 30^\circ + W_{BA}^{\text{дооc}} \cos \alpha = \omega^2 r \cos 30^\circ + \omega_{AB}^2 10r \cos \alpha = \\ &= \omega^2 r 0,866 + 0,087^2 10r \omega^2 0,999 = 0,942 \omega^2 r, \end{aligned}$$

де $\omega_{AB} = 0,087\omega$, оскільки тут кутові швидкості співвідносяться як відповідні можливі переміщення ($\delta\varphi_{AB} = 0,087\delta\varphi$).

Враховуючи W_B , остаточно знайдемо $F_E^{\text{ін}}$:

$$F_E^{\text{ін}} = m_1 W_B = 0,942 m_1 r \omega^2.$$

Визначаємо силу інерції $F_D^{\text{ін}}$ (рис. 26.17):

$$F_D^{\text{ін}} = m_D W_{01} = m_D W_B = 0,942 m_D r \omega^2.$$

Момент сил інерції котка C

$$M_C^{\text{ін}} = J_C \varepsilon_C = \frac{W_B}{R_C} \cdot \frac{m_C R_C^2}{2} = \frac{0,942 m_C r \omega^2 R_C}{2} = 0,471 m_C r \omega^2 R_C,$$

де J_C — момент інерції котка; ε_C — кутове прискорення котка.

Момент сил інерції ролика D (рис. 26.17)

$$M_D^{\text{ін}} = J_D \varepsilon_D = \frac{W_B}{R_D} m_D R_D^2 = 0,942 m_D r \omega^2 R_D,$$

де J_D — момент інерції ролика; ε_D — кутове прискорення ролика.

Визначаємо нормальні реакції N_C і N_D . За умовою задачі

$$\begin{aligned} N_C &= \frac{m_1 g}{4} + m_C g = \frac{g(m_1 + 4m_C)}{4}; \\ N_D &= \frac{m_1 g}{4}. \end{aligned}$$

Підставивши знайдені вирази в рівняння елементарних робіт, дістанемо

$$M\delta\varphi - 0,942m_1r\omega^2 \cdot 0,544\delta\varphi - 2 \cdot 0,942m_Dr\omega^2 \cdot 0,272\delta\varphi - \\ - 2 \cdot 0,471m_Cr\omega^2 \cdot 0,272\delta\varphi - 2 \cdot 0,942m_Dr\omega^2 \cdot 0,544\delta\varphi - \\ - \frac{g(m_1 + 4m_C)k \cdot 0,272\delta\varphi}{2R_C} - \frac{m_1gk \cdot 0,544\delta\varphi}{2R_D} = 0,$$

або

$$\delta\varphi \left(M - 0,5m_1r\omega^2 - 0,5m_Dr\omega^2 - 0,26m_Cr\omega^2 - m_Dr\omega^2 - \right. \\ \left. - \frac{0,14g(m_1 + 4m_C)k}{R_C} - \frac{0,27m_1gk}{R_D} \right) = 0.$$

Оскільки $\delta\varphi \neq 0$, то

$$M - 0,5m_1r\omega^2 - 0,5m_Dr\omega^2 - 0,26m_Cr\omega^2 - m_Dr\omega^2 - \\ - \frac{0,14g(m_1 + 4m_C)k}{R_C} - \frac{0,27m_1gk}{R_D} = 0,$$

звідки

$$\omega^2 = \frac{[MR_C R_D - 0,14R_D g k (m_1 + 4m_C) - 0,27m_1 g k R_C]}{R_C R_D (0,5m_1 r + 0,5m_D r + 0,26m_C r + m_D r)}.$$

Рівняння Лагранжа II роду рекомендується складати в такій послідовності:

1) визначити кількість ступенів вільності системи;

2) вибрати узагальнені координати. При поступальному русі системи за узагальнені координати слід брати декартові координати центра мас системи. При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі за узагальнену координату беруть кут повороту, а при плоскопаралельному русі твердого тіла — координати центра мас тіла і кут повороту тіла навколо центра мас;

3) визначити узагальнені сили відповідно до вибраних узагальнених координат;

4) визначити кінетичну енергію системи в абсолютному русі, виразивши її як функцію узагальнених координат і швидкостей;

5) обчислити частинні похідні кінетичної енергії за узагальненими швид-

костями \dot{q}_j : $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, а потім обчислити їх похідні за часом: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$;

б) визначити частинні похідні кінетичної енергії за узагальненими коор-

динатами: $\frac{\partial T}{\partial q_j}$;

7) отримані у пунктах 3, 5, 6 результати підставити в рівняння Лагранжа II роду.

Приклад 26.3. Хитний живильник зерна (рис. 26.18) складається з приводу, що являє собою кривошипно-шатунний механізм, і бункера E (маса бункера із зерном дорівнює m_B). Бункер спирається на два нерухомих ролики D радіусом R_D і масою m_D (маса кожного ролика рівномірно розподілена по його ободу) і на два прикріплені до бункера котки C радіусом R_C і масою m_C (котки є суцільними однорідними циліндрами).

Застосувавши рівняння Лагранжа II роду, скласти диференціальне рівняння руху живильника і визначити кутове прискорення кривошипа OA в момент, коли кут φ між кривошипом OA і віссю x становить: $\varphi = 90^\circ$, якщо маса кривошипа OA дорівнює m_{OA} ; маса шатуна AB дорівнює m_{AB} ; обертальний момент, прикладений до кривошипа OA , дорівнює M ; довжина кривошипа $OA = r$; довжина шатуна $AB = l = 10r$; коефіцієнт тертя кочення роликів D і котків C дорівнює k . Кривошип OA і шатун AB при розрахунках вважати тонкими однорідними стрижнями, а також вважати, що вага бункера із зерном рівномірно розподілена між роликами D і котками C . Тертям у шарнірах O, A, B, O_1 і O_2 знехтувати. Ролики D і котки C котяться без ковзання.

Розв'язання. Ця механічна система має один ступень вільності. За узагальнену координату візьмемо кут повороту кривошипа OA , тобто кут φ . Рівняння Лагранжа II роду для узагальненої координати φ набирає вигляду

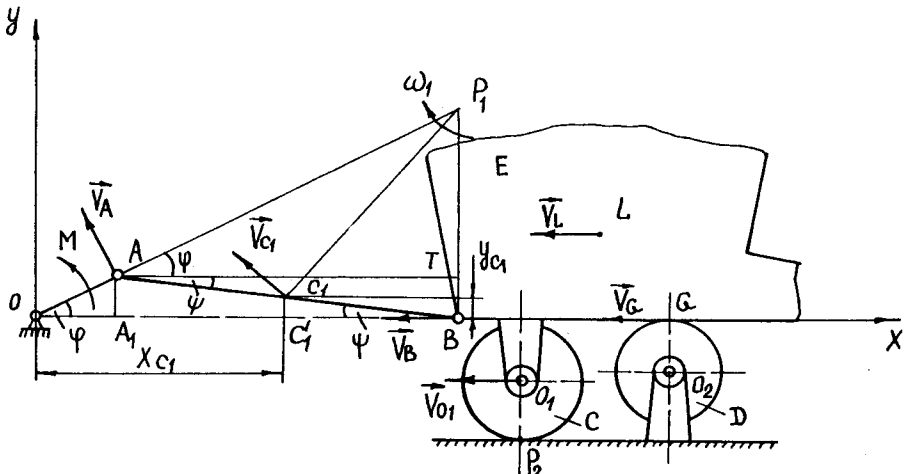


Рис. 26.18

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

Визначимо кінетичну енергію системи як функцію узагальненої координати φ і узагальненої швидкості $\dot{\varphi}$. Кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що складають систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + 2T_4 + 2T_5,$$

де T_1 — кінетична енергія кривошипа OA ; T_2 — кінетична енергія шатуна AB ; T_3 — кінетична енергія бункера E із зерном; T_4 — кінетична енергія котка C ; T_5 — кінетична енергія ролика D .

Кривошип OA здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Кінетична енергія кривошипа OA

$$T_1 = \frac{1}{2} J_O \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m_{OA} r^2 \dot{\varphi}^2,$$

де $J_O = \frac{1}{3} m_{OA} r^2$ — момент інерції кривошипа OA відносно осі обертання.

Шатун AB здійснює плоскопаралельний рух. Кінетична енергія шатуна AB визначається за формулою

$$T_2 = \frac{m_{AB} V_{C_1}^2}{2} + \frac{J_{C_1} \omega_1^2}{2},$$

де V_{C_1} — швидкість центра мас шатуна AB ; J_{C_1} — момент інерції шатуна AB відносно осі, що проходить через центр мас шатуна C_1 перпендикулярно до площини рисунка; ω_1 — кутова швидкість шатуна AB .

Визначимо швидкості V_{C_1} і ω_1 . З рис. 26.18 випливає:

$$V_A = \omega_{OA} r = \dot{\varphi} r;$$

$$\omega_1 = \frac{V_A}{Ap_1} = \frac{\dot{\varphi} r}{Ap_1}.$$

Визначаємо Ap_1 . З трикутника $\Delta Ap_1 T$ випливає, що

$$Ap_1 = \frac{AM}{\cos \varphi},$$

а з трикутника ΔATB маємо $AT = AB \cos \psi$, тоді

$$Ap_1 = \frac{AB \cos \psi}{\cos \varphi}.$$

$\cos \psi$ визначаємо за формулою

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{100}} = \frac{1}{10} \sqrt{100 - \sin^2 \varphi} \approx 1,$$

де $\sin \psi = \frac{r \sin \varphi}{AB} = \frac{\sin \varphi}{10}$ (див. рис. 26.18, трикутники ΔOAA_1 і ΔBAA_1), а вели-

чиною $\sin^2 \varphi$ порівняно з числом 100 можна знехтувати.

Остаточно дістанемо

$$Ap_1 = \frac{AB}{\cos \varphi} = \frac{10r}{\cos \varphi}.$$

Враховуючи значення Ap_1 , визначимо кутову швидкість шатуну AB :

$$\omega_1 = \frac{V_A}{Ap_1} = \frac{\dot{\varphi} \cos \varphi}{10}.$$

Швидкість центра мас V_{C_1} шатуну AB обчислимо за формулою

$$V_{C_1} = \sqrt{\dot{x}_{C_1}^2 + \dot{y}_{C_1}^2},$$

де \dot{x}_{C_1} , \dot{y}_{C_1} — відповідні проекції вектора \vec{V}_{C_1} на осі координат Oxy .

З рис. 26.18 випливає:

$$x_{C_1} = r \cos \varphi + AC_1 \cos \psi \approx r \cos \varphi + 5r = (5 + \cos \varphi)r;$$

$$y_{C_1} = C_1C'_1 = \frac{AA_1}{2} = \frac{r}{2} \sin \varphi.$$

Похідні за часом від x_{C_1} і y_{C_1} такі:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{c_1} &= -\dot{\varphi} r \sin \varphi; \\ \dot{y}_{c_1} &= \dot{\varphi} \frac{r}{2} \cos \varphi.\end{aligned}$$

Враховуючи значення \dot{x}_{c_1} і \dot{y}_{c_1} , визначаємо V_{c_1} :

$$\begin{aligned}V_{c_1} &= \sqrt{\dot{x}_{c_1}^2 + \dot{y}_{c_1}^2} = \sqrt{\left(-\dot{\varphi} r \sin \varphi\right)^2 + \left(\dot{\varphi} \frac{r}{2} \cos \varphi\right)^2} = \\ &= \frac{r \dot{\varphi}}{2} \sqrt{\cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} = \frac{\dot{\varphi} r}{2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi}.\end{aligned}$$

Обчислимо момент інерції шатуна AB :

$$J_{c_1} = \frac{m_{AB} \ell^2}{12} = \frac{m_{AB} (10r)^2}{12}.$$

Отже, з урахуванням значень V_{c_1} , J_{c_1} і ω_1 кінетична енергія шатуна AB

$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{m_{AB} V_{c_1}^2}{2} + \frac{J_{c_1} \omega_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_{AB} \frac{\dot{\varphi}^2 r^2}{4} (1 + 3 \sin^2 \varphi) + \frac{m_{AB} (10r)^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{24 \cdot 10^2} = \\ &= \frac{m_{AB} r^2}{24} (3 + 8 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2.\end{aligned}$$

Бункер E із зерном здійснює поступальний рух, тому кінетична енергія бункера визначається за формулою

$$T_3 = \frac{m_\delta V_L^2}{2},$$

де V_L — швидкість центра мас бункера E із зерном.

Оскільки бункер E рухається поступально, то $V_L = V_B$. Швидкість V_B визначимо зі співвідношення

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{A p_1}{B p_1},$$

звідки

$$V_B = \frac{V_A B p_1}{A p_1} = \frac{V_A B p_1 \cos \varphi}{10r}.$$

З рис. 26.18 випливає:

$$\begin{aligned} Bp_1 &= Ap_1 \sin \varphi + OA \sin \varphi = (Ap_1 + OA) \sin \varphi = \\ &= \left(\frac{10r}{\cos \varphi} + r \right) \sin \varphi = r \operatorname{tg} \varphi \cdot (10 + \cos \varphi). \end{aligned}$$

Враховуючи значення Bp_1 і V_A , остаточно визначаємо швидкість точки B :

$$V_B = \frac{V_A Bp_1 \cos \varphi}{10r} = \dot{\varphi} r \left(1 + \frac{\cos \varphi}{10} \right) \sin \varphi \approx r \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

оскільки величиною $\frac{\cos \varphi}{10}$ порівняно з одиницею можна знехтувати.

Остаточно дістанемо

$$T_3 = \frac{1}{2} m_g r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Коток C здійснює плоскопаралельний рух. Кінетичну енергію такого тіла визначають за формулою

$$T_4 = \frac{m_C V_{O_1}^2}{2} + \frac{J_{O_1} \omega_C^2}{2},$$

де V_{O_1} — швидкість центра мас котка C ; J_{O_1} — момент інерції котка C відносно осі, що проходить через центр мас котка перпендикулярно до площини рисунка; ω_C — кутова швидкість котка C .

Швидкість центра мас котка C

$$V_{O_1} = V_B = r \dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Момент інерції котка C

$$J_{O_1} = \frac{m_C R_C^2}{2}.$$

Кутова швидкість котка C

$$\omega_C = \frac{V_{O_1}}{R_C} = \frac{r \dot{\varphi} \sin \varphi}{R_C}.$$

Отже, враховуючи значення V_{O_1} , J_{O_1} і ω_C , дістанемо значення кінетичної енергії котка C :

$$T_4 = \frac{m_C r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2} + \frac{m_C R_C^2 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2R_C^2} = m_C r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Ролик D здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Кінетична енергія ролика D

$$T_5 = \frac{J_{O_2} \omega_D^2}{2},$$

де $J_{O_2} = m_D R_D^2$ — момент інерції ролика відносно осі обертання;

$$\omega_D = \frac{V_G}{R_D} = \frac{V_B}{R_D} = \frac{r \dot{\varphi} \sin \varphi}{R_D} \text{ — кутлова швидкість ролика } D.$$

Таким чином, остаточно кінетична енергія ролика D

$$T_5 = \frac{m_D R_D^2 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2R_D^2} = \frac{m_D r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2}.$$

Шукана кінетична енергія всієї системи

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_{OA} r^2 \dot{\varphi}^2}{6} + \frac{m_{AB} r^2 \dot{\varphi}^2 (3 + 8 \sin^2 \varphi)}{24} + \frac{m_8 r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{2} + 2m_C r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \\ &+ m_D r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left[\frac{m_{OA} r^2}{3} + \frac{m_{AB} r^2 (3 + 8 \sin^2 \varphi)}{12} + m_8 r^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ &\left. + 4m_C r^2 \sin^2 \varphi + 2m_D r^2 \sin^2 \varphi \right] = \frac{J_{зв} \dot{\varphi}^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{де } J_{зв} = \left[\frac{m_{OA} r^2}{3} + \frac{m_{AB} r^2 (3 + 8 \sin^2 \varphi)}{2} + m_8 r^2 \sin^2 \varphi + 4m_C r^2 \sin^2 \varphi + 2m_D r^2 \sin^2 \varphi \right] \text{ —}$$

зведений момент інерції системи.

Визначимо узагальнену силу Q_φ . Для цього прикладемо до тіл системи всі активні сили і моменти, включаючи й реакції неідеальних в'язей, що діють на систему. Надамо системі незалежного можливого переміщення $\delta\varphi$

у бік додатної зміни узагальноеної координати φ (можливі переміщення точок і тіл системи зображено на рис. 26.19). Складемо вираз елементарної роботи всіх активних сил, включаючи і реакції неідеальних в'язей на можливих переміщеннях точок і тіл системи:

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta A(\vec{P}_{OA}) + \delta A(M) + \delta A(\vec{P}_{AB}) + \delta A(2N_C k) + \delta A(2N_D k) = \\ &= -P_{OA} \delta y_{C_2} + M \delta \varphi - P_{AB} \delta y_{C_1} - 2N_C k \delta \varphi_C - 2N_D k \delta \varphi_D. \end{aligned}$$

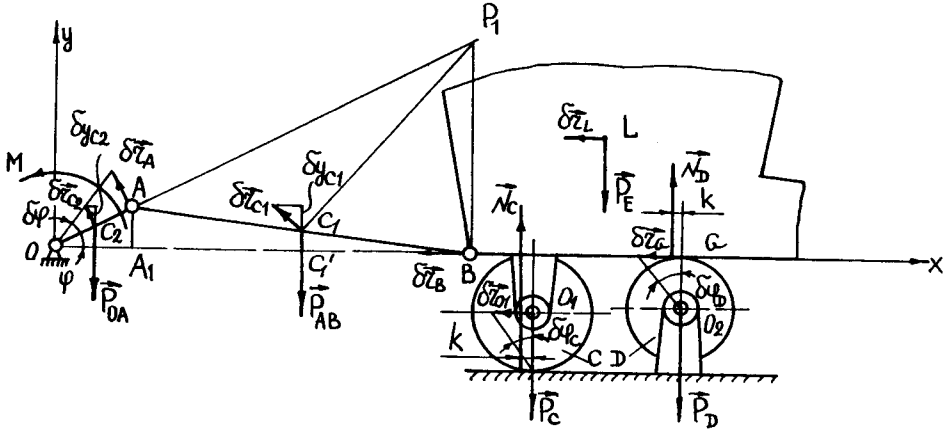


Рис. 26.19

Елементарна робота сил \vec{P}_C , \vec{P}_E і \vec{P}_D дорівнює нулю, оскільки сили \vec{P}_C і \vec{P}_E перпендикулярні до можливих переміщень $\delta \vec{r}_{D1}$ і $\delta \vec{r}_L$, а точка прикладання сили \vec{P}_D нерухома.

Виразимо можливі переміщення δy_{C_2} , δy_{C_1} , $\delta \varphi_C$ і $\delta \varphi_D$ у виразі елементарних робіт через незалежне можливе переміщення $\delta \varphi$.

Можливе переміщення δy_{C_2} виражається через $\delta \varphi$ так:

$$\delta y_{C_2} = \frac{\partial y_{C_2}}{\partial \varphi} \delta \varphi = \frac{\partial \left(\frac{r}{2} \sin \varphi \right)}{\partial \varphi} \delta \varphi = \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi,$$

де y_{C_2} — координата точки C_2 .

Можливе переміщення δy_{C_1} виражається через $\delta \varphi$ так:

$$\delta y_{C_1} = \delta y_{C_2} = \frac{r}{2} \cos \varphi \delta \varphi.$$

Для визначення можливих переміщень $\delta\varphi_C$ і $\delta\varphi_D$ через $\delta\varphi$ необхідно обчислити можливе переміщення δr_B . З рис. 26.19 випливає:

$$\delta r_B = \frac{\delta r_A B p_1}{A p_1} = \frac{r \delta\varphi \cos \varphi \cdot r \operatorname{tg} \varphi \cdot (10 + \cos \varphi)}{10r} = r \delta\varphi \sin \varphi \cdot \left(1 + \frac{\cos \varphi}{10}\right) \approx r \sin \varphi \delta\varphi,$$

оскільки величиною $\frac{\cos \varphi}{10}$ порівняно з одиницею можна знехтувати.

Тоді

$$\delta\varphi_C = \frac{\delta r_{O1}}{R_C} = \frac{\delta r_B}{R_C} = \frac{r \sin \varphi}{R_C} \delta\varphi; \quad \delta\varphi_D = \frac{\delta r_G}{R_D} = \frac{\delta r_B}{R_D} = \frac{r \sin \varphi}{R_D} \delta\varphi.$$

З урахуванням розглянутих перетворень вираз елементарних робіт набірає вигляду

$$\begin{aligned} \delta A = M \delta\varphi - \frac{P_{OA} r}{2} \cos \varphi \delta\varphi - \frac{P_{AB} r}{2} \cos \varphi \delta\varphi - \frac{P_E k r \sin \varphi}{2R_C} \delta\varphi - \\ - \frac{P_E k r \sin \varphi}{2R_D} \delta\varphi = \delta\varphi \left[M - \frac{rg}{2} (m_{OA} + m_{AB}) \cos \varphi - \frac{(R_C + R_D)}{R_C R_D} m_s g k \sin \varphi \right]. \end{aligned}$$

Узагальнену силу дістанемо як коефіцієнт при $\delta\varphi$ у виразі для елементарної роботи:

$$Q_\varphi = M - \frac{(m_{OA} + m_{AB}) rg}{2} \sin \varphi - \frac{(R_C + R_D) m_s g k}{R_C R_D} \sin \varphi.$$

Обчислимо тепер частинні похідні від кінетичної енергії системи за узагальною швидкістю й узагальною координатою:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{J_{зв} \dot{\varphi}^2}{2} \right) = J_{зв} \dot{\varphi};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{m_{OA} r^2}{3} + \frac{m_{AB} r^2 (3 + 8 \sin^2 \varphi)}{12} + m_s r^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + 4m_C r^2 \sin^2 \varphi + 2m_D r^2 \sin^2 \varphi \right] \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \left(\frac{4}{3} m_{AB} + m_s + 2m_C + m_D \right) \frac{\dot{\varphi}^2 r^2}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені значення похідних і узагальненої сили в рівняння Лагранжа II роду, дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(J_{\text{зв}} \dot{\varphi} \right) - \left(\frac{4}{3} m_{AB} + m_{\delta} + 2m_C + m_D \right) r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = \\ = M - \frac{(m_{OA} + m_{AB}) rg}{2} \sin \varphi - \frac{(R_C + R_D)}{R_C R_D} m_{\delta} g k \sin \varphi, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} J_{\text{зв}} \ddot{\varphi} - \left(\frac{4}{3} m_{AB} + m_{\delta} + 2m_C + m_D \right) r^2 \dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi = \\ = M - \frac{(m_{OA} + m_{AB}) rg \sin \varphi}{2} - \frac{(R_C + R_D) m_{\delta} g k \sin \varphi}{R_C R_D}. \end{aligned}$$

Одержане рівняння є диференціальним рівнянням руху хитного живильника зерна.

Визначимо кутове прискорення кривошипа OA в момент, коли кут $\varphi = 90^\circ$. У цьому випадку диференціальне рівняння руху живильника набирає вигляду

$$J_{\text{зв}} \ddot{\varphi} = M - \frac{(m_{OA} + m_{AB}) rg}{2} - \frac{(R_C + R_D) m_{\delta} g k}{R_C R_D},$$

звідки

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J_{\text{зв}}} \left[M - \frac{(m_{OA} + m_{AB}) rg}{2} - \frac{(R_C + R_D) m_{\delta} g k}{R_C R_D} \right],$$

де

$$\begin{aligned} J_{\text{зв}} &= \left(\frac{m_{OA} r^2}{3} + \frac{11m_{AB} r^2}{12} + m_{\delta} r^2 + 4m_C r^2 + 2m_D r^2 \right) = \\ &= r^2 \left(\frac{m_{OA}}{3} + \frac{11m_{AB}}{12} + m_{\delta} + 4m_C + 2m_D \right). \end{aligned}$$

Типові задачі для самостійної проробки та самоконтролю

Задача 26.1. Вантаж Q піднімається за допомогою домкрата, який приводиться в рух рукояткою $OA = 0,6$ м (рис. 26.20). До кінця рукоятки прикладена сила $P = 160$ Н, лінія дії якої перпендикулярна до рукоятки. Визначити величину сили Q , якщо крок гвинта домкрата $h = 12$ мм = 1,2 см = 0,012 м.

Розв'язання. Розрахункову схему наведено на рис. 26.20. Незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$. На підставі принципу можливих переміщень матимемо

$$Pl\delta\varphi - Q\delta S = 0, \text{ звідки } Q = \frac{Pl\delta\varphi}{\delta S}.$$

Оскільки $\delta S = \frac{h\delta\varphi}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\delta\varphi} = \frac{h}{\delta S} \right)$, то остаточно дістанемо

$$Q = \frac{2\pi Pl}{h} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 160 \cdot 0,6}{0,012} = 50,2 \text{ кН.}$$

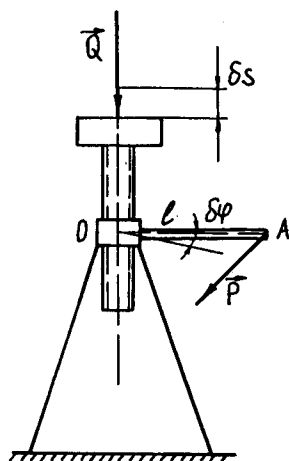


Рис. 26.20

мо

Задача 26.2. Визначити залежність між модулями сил \bar{P} і \bar{Q} у клиново-му пресі, якщо сила \bar{P} прикладена до кінця рукоятки довжиною a (рис. 26.21). Лінія дії сили \bar{P} перпендикулярна до осі гвинта і рукоятки. Крок гвинта дорівнює h . Кут при вершині клина дорівнює α .

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.21. Незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$. На підставі принципу можливих переміщень матимемо:

$$Pa\delta\varphi - Q\delta S = 0, \text{ звідки } Q = \frac{Pa\delta\varphi}{\delta S}.$$

Оскільки $\delta\varphi = \frac{2\pi\delta S}{\text{tg}\alpha \cdot h} \left(\frac{2\pi}{\delta\varphi} = \frac{h}{\delta l}; \text{tg}\alpha = \frac{\delta S}{\delta l} \right)$, то остаточно маємо $Q = P \frac{2\pi a}{h \text{tg}\alpha}$.

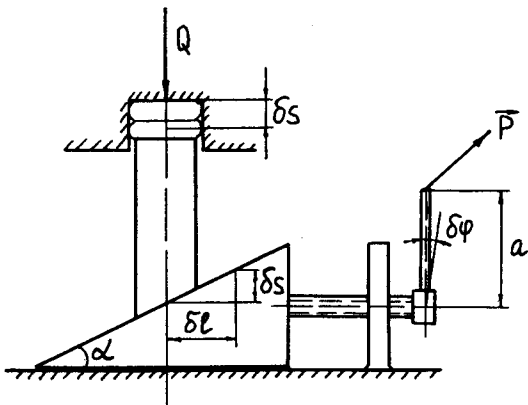


Рис. 26.21

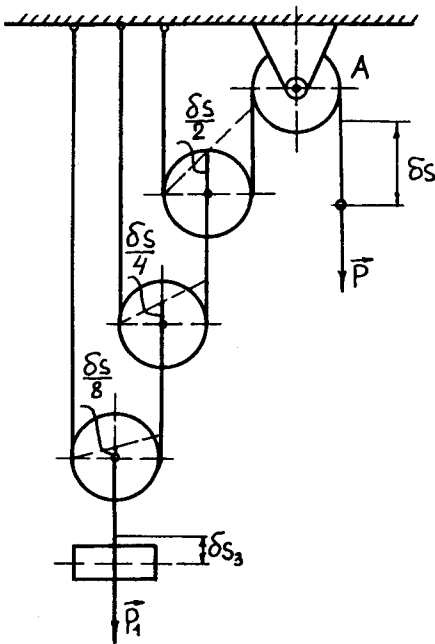


Рис. 26.22

Задача 26.3. Поліспаст складається з нерухомого блока A і з трьох рухомих блоків (рис. 26.22). Визначити у випадку рівноваги відношення маси m вантажу, що підіймається, до сили \vec{P} , прикладеної до кінця каната, що збігає з блока A .

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 26.22. Незалежне можливе переміщення δS . На підставі принципу можливих переміщень матимемо:

$$P\delta S - P_1\delta S_3 = 0,$$

звідки $\frac{P_1}{P} = \frac{\delta S}{\delta S_3}$. Оскільки $\delta S_3 = \frac{\delta S}{8}$, то ост

таточно дістанемо: $\frac{mg}{P} = 8$.

Задача 26.4. У механізмі домкрата при обертанні рукоятки A , яка має довжину R ,

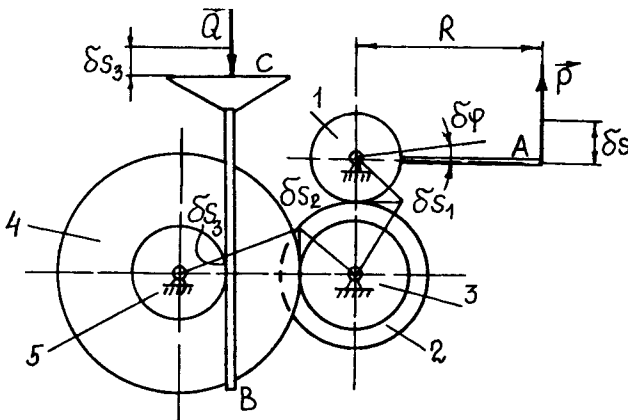


Рис. 26.23

починають обертатися зубчасті колеса 1, 2, 3, 4 і 5. Колеса надають руху рейці B домкрата. Яку силу необхідно прикласти перпендикулярно до рукоятки в її кінці для того, щоб чашка C при рівновазі домкрата мала тиск 4,8 кН? Радіуси зубчастих коліс становлять відповідно, см: $r_1 = 3$, $r_2 = 12$, $r_3 = 4$, $r_4 = 16$, $r_5 = 3$, довжина рукоятки $R = 18$ см.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.23. Незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$. На підставі принципу можливих переміщень матимемо: $PR\delta\varphi - Q\delta S_3 = 0$, звідки

$$P = \frac{Q\delta S_3}{R\delta\varphi}. \text{ Оскільки } \delta S_3 = \frac{\delta S r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R}, \text{ то } P = Q \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 50 \text{ Н.}$$

Задача 26.5. Диференціальний коловорот складається з двох жорстко зв'язаних валів A і B . Валам надає обертання рукоятка C завдовжки R . Вантаж D масою m , що піднімається, прикріплений до рухомого блока E . При обер-

танні рукоятки C ліва гілка каната розмотується з вала A радіусом r_1 , а права гілка змотується на вал B радіусом r_2 ($r_2 > r_1$). Яку силу \vec{P} необхідно прикласти перпендикулярно до рукоятки в її кінці, щоб зрівноважити вантаж D , якщо $m = 720$ кг, $r_1 = 10$ см, $r_2 = 12$ см, $R = 60$ см?

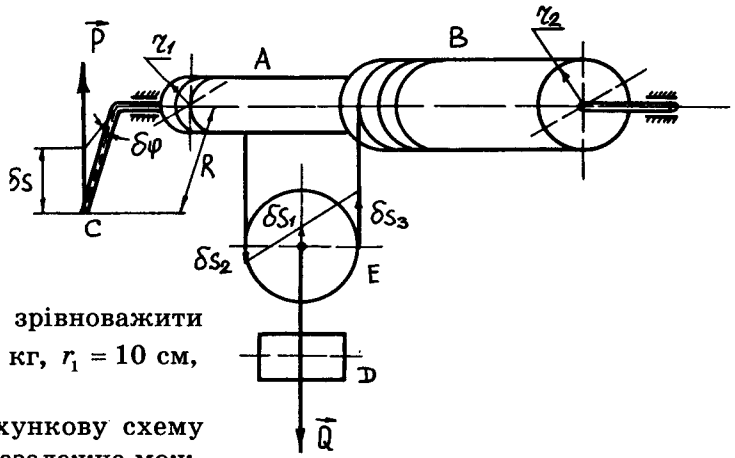


Рис. 26.24

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 26.24. Незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$. На підставі прин-

ципу можливих переміщень матимемо: $P\delta S - Q\delta S_1 = 0$, звідки $P = Q \frac{\delta S_1}{\delta S}$.

Оскільки $\delta S = \delta\varphi R$, $\delta S_1 = \frac{\delta\varphi(r_2 - r_1)}{2}$, то $P = mg \frac{r_2 - r_1}{2R} = 118$ Н.

Задача 26.6. У механізмі антипаралелограма $ABCD$ ланки AB , CD і BC з'єднані циліндричними шарнірами B і C , а циліндричними шарнірами A і D прикріплені до стояка AD . До ланки CD у шарнірі C прикладена горизонтальна сила \vec{F}_C . Визначити модуль сили \vec{F}_B , що прикладена у шарнірі B перпендикулярно до ланки AB , якщо механізм перебуває у рівновазі в положенні, що подано на рис. 26.25. Дано: $AD = BC$, $AB = CD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.25. Незалежне можливе переміщення $\delta\vec{r}_C$. На підставі принципу можливих переміщень

матимемо: $F_C\delta r_C - F_B\delta r_B = 0$, звідки $F_B = F_C \frac{\delta r_C}{\delta r_B}$.

Оскільки $\delta r_C = \frac{\delta r_B}{\sin 30^\circ}$, то $F_B = \frac{F_C}{\sin 30^\circ} = 2F_C$.

Задача 26.7. Кривошипно-шатунний механізм OAB з'єднаний усередині шатуна AB циліндричним шарніром C зі стрижнем CD . Стрижні CD і DE з'єднані циліндричним шарніром D . Визначити залежність між модулями сил \vec{F}_A і \vec{F}_D , лінії дії яких перпендикулярні до

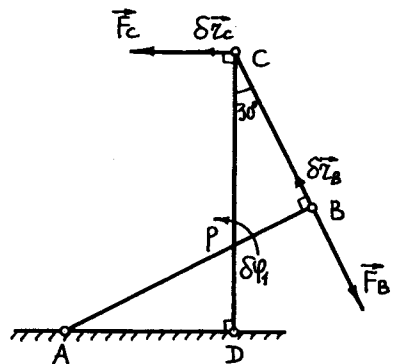


Рис. 26.25

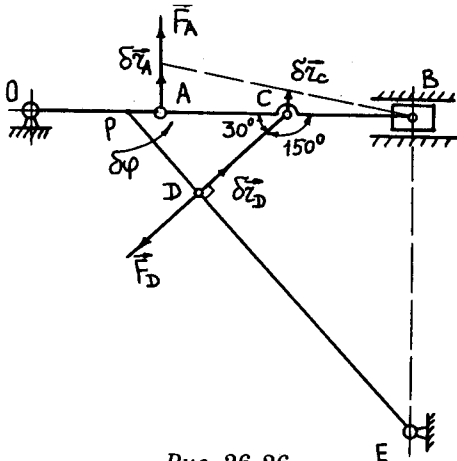


Рис. 26.26

стрижнів OA і DE , у стані рівноваги механізму в положенні, що подано на рис. 26.26. Дано: $\angle DCB = 150^\circ$, $\angle CDE = 90^\circ$.

Розв'язання. Розрахункову схему наведено на рис. 26.26. Незалежне можливе переміщення δr_A . На підставі принципу можливих переміщень матимемо: $F_A \delta r_A - F_D \delta r_D = 0$,

звідки $F_D = F_A \frac{\delta r_A}{\delta r_D}$. Оскільки $\delta r_A = 2\delta r_C$,

$\delta r_D = \delta r_C \sin 30^\circ$, то $F_D = 4F_A$.

Задача 26.8. Визначити величину моменту M , який необхідно прикласти на ділянці BD до балки AD , щоб вертикальна реакція опори D дорівнювала нулю.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.27. Незалежне можливе переміщення $\delta\phi$. На підставі принципу можливих переміщень матимемо: $P_1 \delta r_1 + P_2 \delta r_2 -$

$-M \delta\phi - P_3 \delta r_3 = 0$, звідки

$$M = \frac{P_1 \delta r_1 + P_2 \delta r_2 - P_3 \delta r_3}{\delta\phi}$$

Оскільки $\delta r_1 = \delta\phi a$, $\delta r_2 = \delta\phi a$ і $\delta r_3 = 2a\delta\phi$,

то $M = a(20 + 60) - 60a = 20a$ кН·м.

Задача 26.9. Дві горизонтальні балки AB і BD з'єднані циліндричним шарніром B (рис. 26.28). Опора D розміщена на котках, а переріз A зацмелений у стіні. До балки BD у точці K прикладена сила \vec{F} , лінія дії якої утворює кут α з горизонтом. Визначити реакції в перерізі A . Масою балок знехтувати.

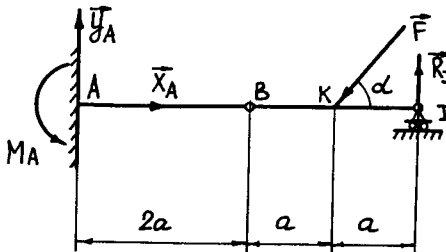


Рис. 26.28

Розв'язання. Визначаємо реакцію Y_A . Розрахункову схему подано на рис. 26.29. Незалежне можливе переміщення $\delta\phi$. На підставі принципу можливих переміщень матимемо: $Y_A \delta r_2 - F \sin \alpha \cdot \delta r_1 = 0$, звідки

$$Y_A = F \sin \alpha \cdot \frac{\delta r_1}{\delta r_2}$$

Оскільки $\delta r_1 = a\delta\varphi$, $\delta r_2 = 2a\delta\varphi$, то остаточно $Y_A = F \sin \alpha \cdot \frac{a\delta\varphi}{2a\delta\varphi} = \frac{F}{2} \sin \alpha$.

Визначаємо реакцію X_A . Розрахункову схему зображено на рис. 26.30. Незалежне можливе переміщення $\delta \bar{r}_1$. На підставі принципу можливих переміщень матимемо: $F \cos \alpha \cdot \delta r_1 - X_A \delta r_2 = 0$, звідки

$$X_A = F \cos \alpha \cdot \frac{\delta r_1}{\delta r_2}. \text{ Оскільки } \delta r_1 = \delta r_2, \text{ то}$$

остаточно дістанемо: $X_A = F \cos \alpha$.

Визначаємо реактивний момент M_A . Розрахункову схему наведено на рис. 26.31. Незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$. На підставі принципу можливих переміщень матимемо: $-M_A \delta\varphi + F \sin \alpha \cdot \delta r = 0$, звідки

$$M_A = F \sin \alpha \cdot \frac{\delta r}{\delta\varphi}. \text{ Оскільки } \delta r = a\delta\varphi, \text{ то}$$

остаточно маємо: $M_A = Fa \sin \alpha$.

Задача 26.10. Дві балки BC і CD шарнірно з'єднані в точці C ; у точці B вони прикріплені циліндричним шарніром до вертикального стояка AB , який зацмелений у перерізі A , а циліндричним шарніром D з'єднані з підлогою.

До балок прикладені горизонтальні сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 (рис. 26.32). Визначити момент M_A , що виникає в перерізі A стояка AB .

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.33. Незалежне можливе переміщення $\delta\varphi_1$. На підставі принципу можливих переміщень матимемо: $P_1 \delta r_1 + P_2 \delta r_2 - M \delta\varphi_1 = 0$, звідки

$$M = \frac{P_1 \delta r_1 + P_2 \delta r_2}{\delta\varphi_1}.$$

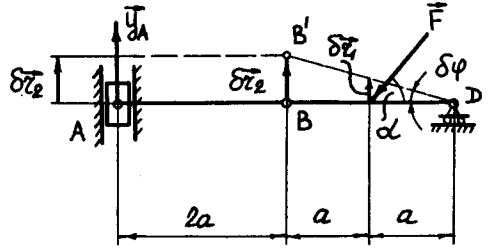


Рис. 26.29

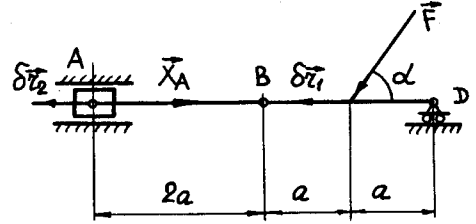


Рис. 26.30

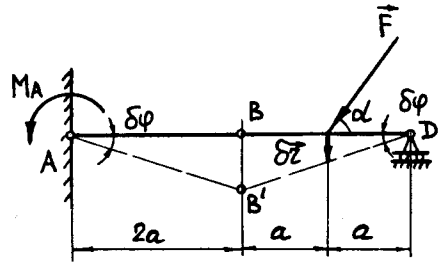


Рис. 26.31

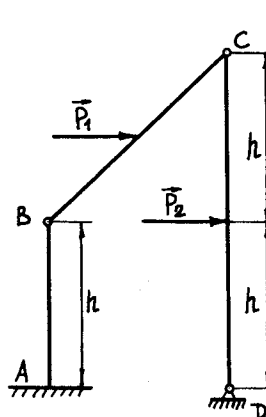


Рис. 26.32

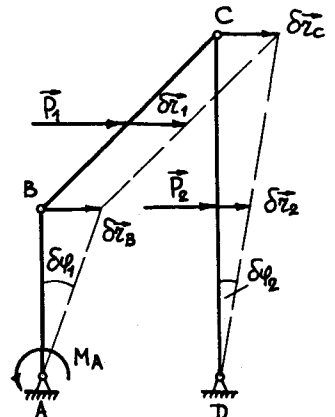


Рис. 26.33

Оскільки $\delta r_1 = \delta r_B = \delta r_C = h \delta \varphi_1$, $\delta r_2 = \frac{h}{2} \delta \varphi_1$, то $M = P_1 + 0,5P_2$.

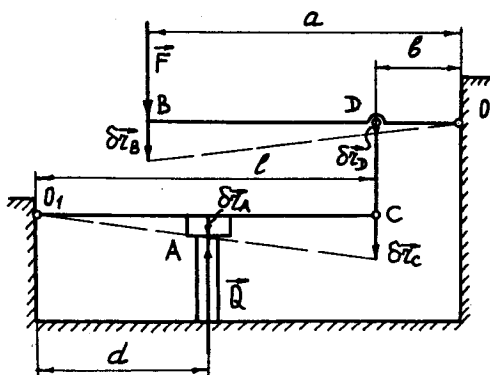


Рис. 26.34

Задача 26.11. Визначити модуль сили \bar{Q} , що стискує зразок А у важільному пресі, що зображений на рис. 26.34. Дано: $F = 100$ Н, $a = 60$ см, $b = 10$ см, $l = 60$ см, $d = 20$ см.

Розв'язання. Розрахункову схему наведено на рис. 26.34. Незалежне можливе переміщення δr_B . На підставі принципу можливих переміщень матимемо:

$$F \delta r_B - Q \delta r_A = 0, \text{ звідки } Q = \frac{F r_B}{\delta r_A}. \text{ Оскільки}$$

$$\text{ки } \delta r_A = \frac{bd}{al} \delta r_B, \text{ то } Q = \frac{F a l}{b d} = \frac{100 \cdot 60 \cdot 60}{10 \cdot 20} = 1800 \text{ Н.}$$

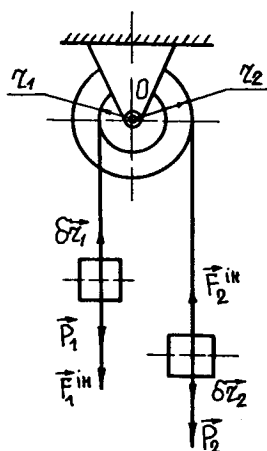


Рис. 26.35

Задача 26.12. Два вантажі масою m_1 і m_2 підвішені на двох гнучких нерозтяжних нитках; нитки накручені на барабани радіусами r_1 і r_2 , що мають загальну вісь (рис. 26.35); вантажі рухаються під дією сили ваги. Визначити кутове прискорення барабанів. Масою ниток і масою барабанів знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.35. Система має один ступінь вільності. Незалежне можливе переміщення δr_1 . На підставі загального рівняння динаміки матимемо: $P_2 \delta r_2 - F_2^{\text{in}} \delta r_2 - P_1 \delta r_1 - F_1^{\text{in}} \delta r_1 = 0$.

Оскільки $F_1^{\text{in}} = m_1 r_1 \varepsilon$, $F_2^{\text{in}} = m_2 r_2 \varepsilon$, $\delta r_2 = \frac{\delta r_1 \cdot r_2}{r_1}$, то остаточно

$$\text{маємо: } \varepsilon = g \frac{m_2 r_2 - m_1 r_1}{m_1 r_1^2 - m_2 r_2^2}.$$

Задача 26.13. До системи блоків, що зображені на рис. 26.36, підвішені вантажі А і В масою $m_1 = 8$ кг і $m_2 = 10$ кг. Визначити прискорення W_1 вантажу А і натяг нитки. Масою блоків знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 26.36. Система має один ступінь вільності. Незалежне можливе переміщення δr_1 . На підставі загального рівняння динаміки матимемо

$$P_1 \delta r_1 - F_1^{\text{in}} \delta r_1 - P_2 \delta r_2 - F_2^{\text{in}} \delta r_2 = 0.$$

Оскільки $F_1^{in} = m_1 W_1$, $F_2 = m_2 W_2$, $W_2 = \frac{W_1}{2}$,

$\delta r_2 = \frac{\delta r_1}{2}$, то $W_1 = 2,8 \text{ м/с}^2$. Рівняння рівноваги сил (рис. 26.37) на підставі принципу Д'Аламбера має вигляд

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; T + F_1^{in} - P_1 = 0, \text{ звідки } T = P_1 - F_1^{in} = m_1 g - m_1 W_1 = m_1 (g - W_1) = 8(9,81 - 2,8) = 56,1 \text{ Н.}$$

Задача 26.14. До нижнього шківа С підйомника прикладений обертальний момент M (рис. 26.38). Визначити прискорення вантажу A масою m_1 при його підніманні вгору, якщо маса противаги B дорівнює m_2 , а шківів C і D радіусом r і масою m_3 кожний являють собою однорідні циліндри. Масою паса знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.38. Система має один ступінь вільності. Незалежне можливе переміщення $\delta\varphi$. На підставі загального рівняння динаміки матимемо $M\delta\varphi - P_A\delta r - F_A^{in}\delta r + P_B\delta r - F_B^{in}\delta r - M_D^{in}\delta\varphi - M_C^{in}\delta\varphi = 0$.

Оскільки $F_A^{in} = m_1 W_1$, $F_B^{in} = m_2 W_1$, $M_D^{in} = \frac{m_3 r W_1}{2}$, $M_C^{in} = \frac{m_3 r W_1}{2}$,

$$\delta r = \delta\varphi r, \text{ то } W_1 = \frac{M + gr(m_2 - m_1)}{r(m_1 + m_2 + m_3)}.$$

Задача 26.15. Вантаж A масою m_1 опускається по похилій гладенькій площині, яка розташована під кутом α до горизонту, і надає за допомогою нерозтяжної нитки обертання барабану B масою m_2 і радіусом r . Визначити кутове прискорення барабану, якщо барабан є однорідним коловим циліндром. Масою нерухомого блока C і нитки знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 26.39. Система має один ступінь вільності. Незалежне можливе переміщення δr . На підставі загального рівняння динаміки матимемо $P \sin \alpha \cdot \delta r - F^{in} \delta r - M^{in} \delta \varphi = 0$.

Оскільки $F^{in} = m_1 r \varepsilon$, $M^{in} = \frac{m_2 r^2}{2} \varepsilon$, $\delta\varphi = \frac{\delta r}{r}$, то

$$\varepsilon = \frac{2m_1 g \sin \alpha}{r(2m_1 + m_2)}.$$

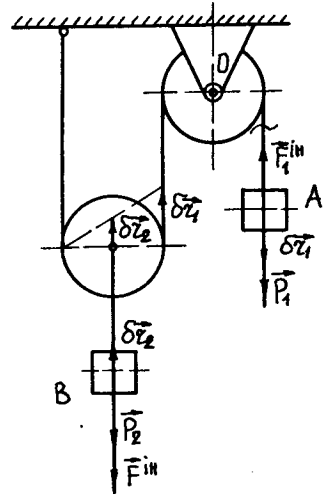


Рис. 26.36



Рис. 26.37

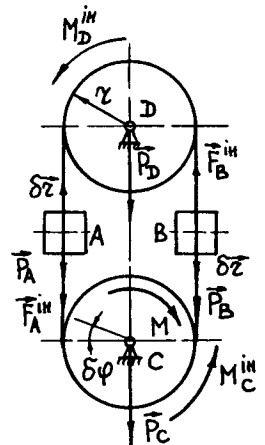


Рис. 26.38

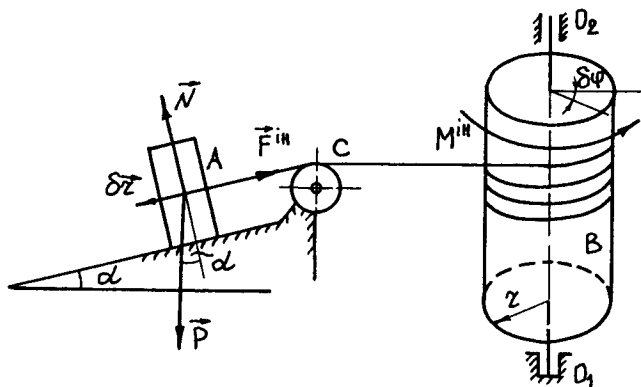


Рис. 26.39

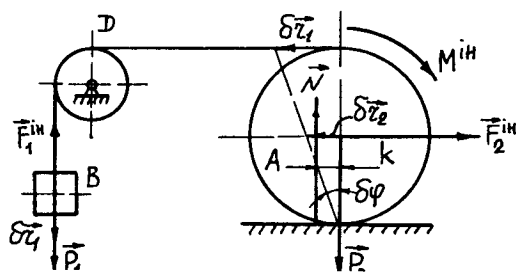


Рис. 26.40

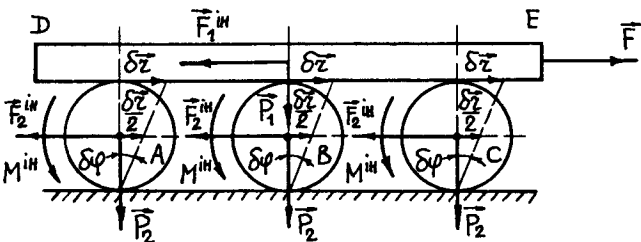


Рис. 26.41

Задача 26.16. Вантаж \$B\$ масою \$m_1\$ надає руху циліндричному котку \$A\$ масою \$m_2\$ і радіусом \$r\$ за допомогою нитки (рис. 26.40). Визначити прискорення вантажу \$B\$, якщо коток котиться без ковзання, а коефіцієнт тертя кочення дорівнює \$k\$. Масою блока \$D\$ знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.40. Система має один ступінь вільності. Незалежне можливе переміщення \$\delta r_1\$.

На підставі загального рівняння динаміки матимемо $P_1\delta r_1 - F_1^{in}\delta r_1 - Nk\delta\varphi - F_2^{in}\delta r_2 - M^{in}\delta\varphi = 0$.

Оскільки $F_1^{in} = m_1 W_1$, $F_2^{in} = \frac{m_2 W_1}{2}$,

$N = m_2 g$, $M^{in} = \frac{m_2 r W_1}{4}$, $\delta r_2 = \frac{\delta r_1}{2}$,

$\delta\varphi = \frac{\delta r_1}{2r}$, то $W_1 = \frac{m_1 - m_2}{8m_1 + 3m_2} \frac{k}{2r}$.

Задача 26.17. Стрижень \$DE\$ масою \$m_1\$ лежить на трьох котках \$A\$, \$B\$ і \$C\$, маси яких дорівнюють \$m_2\$. До стрижня прикладена по горизонталі праворуч сила \$\vec{F}\$ (рис. 26.41). Сила \$\vec{F}\$ надає руху стрижню і коткам. Знайти прискорення стрижня \$DE\$. Котки вважати однорідними циліндрами. Тертям знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему наведено на рис. 26.41. Система має один ступінь вільності. Незалежне можливе переміщення \$\delta r\$.

На підставі загального рівняння динаміки матимемо $F\delta r - F_1^{in}\delta r - 3F_2^{in}\frac{\delta r}{2} - 3M^{in}\delta\varphi = 0$. Оскільки

ки $F_1^{in} = m_1 W_1$, $F_2^{in} = \frac{m_2 W_1}{2}$, $M^{in} = \frac{m_2 r W_1}{4}$, $\delta\varphi = \frac{\delta r}{2r}$, то $W_1 = \frac{8F}{8m_1 + 9m_2}$.

Задача 26.18. Вантаж A масою m_1 опускається вниз і за допомогою нерозтяжної нитки, що перекинута через нерухомий блок D і намотана на шків B , примушує вал C котитися без ковзання по горизонтальній рейці. Шків B радіусом R жорстко насаджений на вал C радіусом r ; їх загальна маса дорівнює m_2 , а радіус інерції відносно осі O , що перпендикулярна до площини рисунка, дорівнює ρ . Знайти прискорення вантажу A . Масою нитки і блока знехтувати.

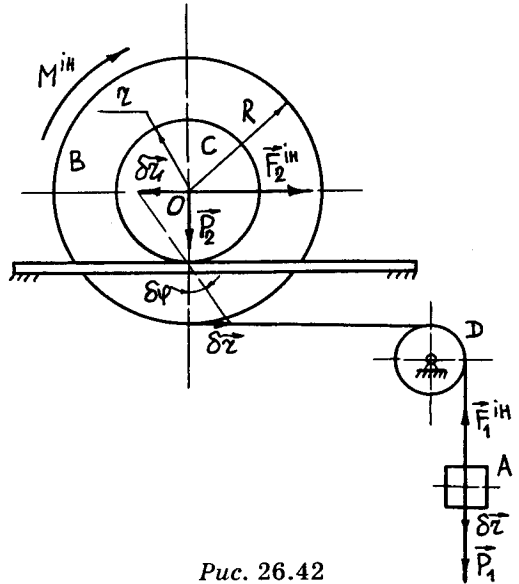


Рис. 26.42

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.42. Система має один ступінь вільності. Незалежне можливе переміщення δr . На підставі загального рівняння динаміки матимемо

$$P_1 \delta r - F_1^{in} \delta r - F_2^{in} \delta r_1 - M^{in} \delta \varphi = 0. \text{ Оскільки } F_1^{in} = m_1 W_1, \quad F_2^{in} = m_2 W_1 \frac{r}{R-r},$$

$$M^{in} = \frac{m_2 \rho^2 W_1}{R-r}, \quad \delta r_1 = \delta r \frac{r}{R-r}, \quad \delta \varphi = \frac{\delta r}{R-r}, \quad \text{то } W_1 = g \frac{m_1 (R-r)^2}{m_1 (R-r)^2 + m_2 (r^2 + \rho^2)}.$$

Задача 26.19. Відцентровий регулятор обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю ω . Визначити кут відхилення стрижнів OA і OB від вертикалі, беручи до уваги тільки масу m кожної з кульок A і B і масу m_1 муфти C . Усі стрижні регулятора мають однакову довжину.

Розв'язання. Розрахункову схему наведено на рис. 26.43. Система має один ступінь вільності. Незалежне можливе переміщення $\delta \varphi$. На підставі загального рівняння динаміки матимемо

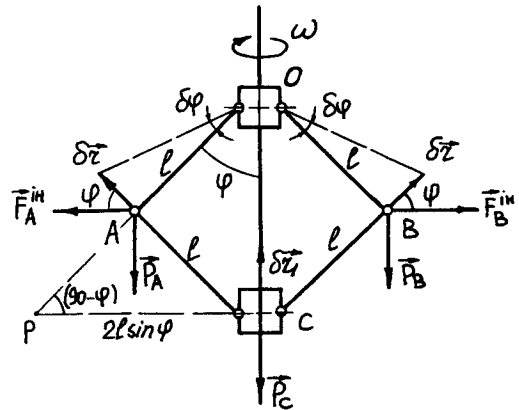


Рис. 26.43

$$-2P \delta r \sin \varphi + 2F^{in} \delta r \cos \varphi - P_C \delta r_1 = 0.$$

$$\text{Оскільки } P = P_A = P_B = mg, \quad F^{in} = F_A^{in} = F_B^{in} = m_1 \omega^2 l \sin \varphi, \quad P_C = m_1 g, \quad \delta r = l \delta \varphi,$$

$$\delta r_1 = \delta \varphi 2l \sin \varphi, \quad \text{то } \cos \varphi = \frac{(m + m_1) g}{m l \omega^2}.$$

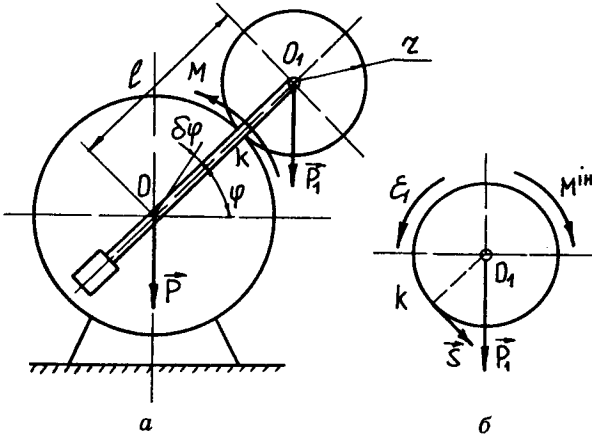


Рис. 26.44

інерції шестірні відносно її осі J_1 ; тертям знехтувати, центр мас шестірні і кривошипа з противагою розміщений на осі обертання кривошипа.

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.44, а. Система має один ступінь вільності. Узагальнена координата — кут φ . Рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi. \quad \text{Кінетична енергія системи}$$

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2 (J_O r^2 + m_1 l^2 r^2 + J_1 l^2)}{r^2}.$$

Узагальнена сила $Q_\varphi = M$. Після визначення відповідних похідних рівняння

$$\text{Лагранжа II роду набирає вигляду } \ddot{\varphi} \left(J_O + m_1 l^2 + J_1 \frac{l^2}{r^2} \right) = M, \quad \text{звідки}$$

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon = \frac{M}{J_O + m_1 l^2 + J_1 \frac{l^2}{r^2}}. \quad \text{Колове зусилля визначаємо за принципом Д'Алам-$$

бера (рис. 26.44, б). Рівняння рівноваги: $\sum_{k=1}^n M_{O_1}(\vec{F}_k) = 0; \quad S r - M^{\text{in}} = 0$. Через

$$\text{те що } M^{\text{in}} = J_1 \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon l}{r}, \quad \text{то } S = \frac{J_1 l}{r^2} \varepsilon.$$

Задача 26.21. У планетарному механізмі колесо з віссю O_1 нерухоме; до рукоятки $O_1 O_3$ прикладений обертальний момент M ; механізм розміщений

Задача 26.20. В епіциклічному механізмі бігаюча шестірня радіусом r насаджена на кривошип із противагою (рис. 26.44, а). Кривошип обертається навколо осі нерухомої шестірні під дією моменту M . Визначити кутове прискорення обертання кривошипа і колове зусилля S у точці дотику шестерень, якщо відстань між осями шестерень дорівнює l , момент інерції кривошипа з противагою відносно осі обертання кривошипа дорівнює J_O , маса бігаючої шестірні m_1 , момент

в горизонтальній площині. Визначити кутове прискорення рукоятки, вважаючи колеса однорідними дисками з однаковими масами m і радіусами r . Масою рукоятки знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 26.45. Система має один ступінь вільності. Узагальнена координата — кут φ . Рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

Кінетична енергія сис-

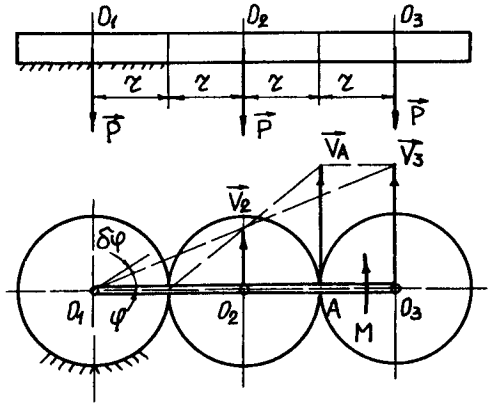


Рис. 26.45

теми

$$T = 3mr^2 \dot{\varphi}^2 + 8mr^2 \dot{\varphi}^2 = 11mr^2 \dot{\varphi}^2.$$

Узагальнена сила $Q_{\varphi} = M$. Після визначення відповідних похідних мати-

memo $22mr^2 \ddot{\varphi} = M$, звідки $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{M}{22mr^2}$.

Задача 26.22. Призма А масою m ковзає по гладенькій бічній грані призми В масою m_1 . Грань призми В утворює кут α з горизонтом (рис. 26.46). Визначити прискорення призми В. Тертям між призою В і горизонтальною площиною знехтувати.

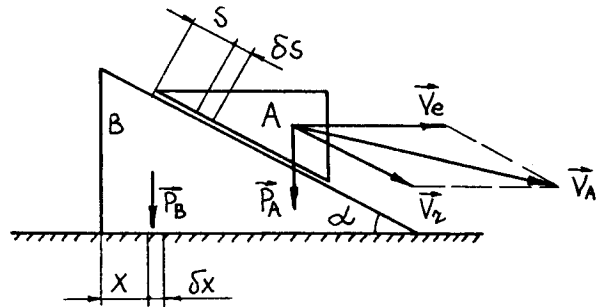


Рис. 26.46

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.46. Система має два ступеня вільності. Узагальнені координати: переміщення x і S . Рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_S.$$

Кінетична енергія системи $T = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m \dot{S}^2}{2} + m \dot{S} \dot{x} \cos \varphi$. Узагальнені сили $Q_x = 0$, $Q_S = mg \sin \alpha$. Після

визначення відповідних похідних матимемо: $m_1 \ddot{x} + m \ddot{x} + m \ddot{S} \cos \alpha = 0$,

$$\ddot{S} + \ddot{x} \cos \alpha = g \sin \alpha, \quad \text{звідки} \quad \ddot{x} = -\frac{mg \sin 2\alpha}{2(m_1 + m \sin^2 \alpha)}.$$

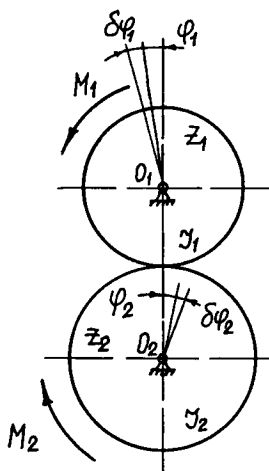


Рис. 26.47

Задача 26.23. Передача обертання між двома валами здійснюється зубчастими колесами, які мають відповідно z_1 і z_2 зубців. Моменти інерції валів з насадженими на них колесами відповідно дорівнюють J_1 і J_2 . Скласти рівняння руху першого валу, якщо на нього діє обертальний момент M_1 , а на другий вал — момент опору руху M_2 . Тертям у підшипниках знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 26.47. Система має один ступінь вільності. Узагальнена координата — кут φ_1 . Рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}. \quad \text{Кінетична енергія системи } T = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} +$$

$$+ \frac{J_2 i_{12}^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} = (J_1 + J_2 i_{12}^2) \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}. \quad \text{Узагальнена сила } Q_{\varphi_1} = M_1 - M_2 i_{12}. \quad \text{Після визначен-$$

ня відповідних похідних матимемо $(J_1 + J_2 i_{12}^2) \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2 i_{12}$, де $i_{12} = \frac{z_1}{z_2}$.

Задача 26.24. Скласти рівняння руху маятника, який складається з матеріальної точки M масою m , підвішеної на нитці, що намотана на нерухомий циліндр радіуса a . Довжина частини нитки, що звисає з циліндра в положенні рівноваги, дорівнює l . Масою нитки знехтувати.

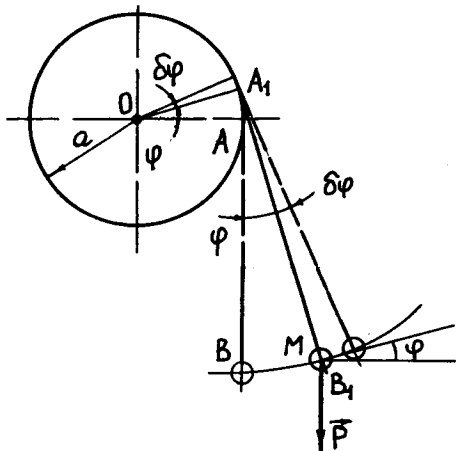


Рис. 26.48

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.48. Система має один ступінь вільності. Узагальнена координата — кут φ . Рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}. \quad \text{Кінетична енергія сис-$$

$$\text{теми } T = \frac{J_{A_1} \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m}{2} (l + a\varphi)^2 \dot{\varphi}^2. \quad \text{Узагаль-$$

нена сила $Q_{\varphi} = -mg(l + a\varphi) \sin \varphi$. Після визначення відповідних похідних матимемо

$$m(l + a\varphi) \left[(l + a\varphi) \ddot{\varphi} + 2a \dot{\varphi}^2 \right] - m(l + a\varphi) a \dot{\varphi}^2 = -mg(l + a\varphi) \sin \varphi,$$

звідки

$$(l + a\varphi)\ddot{\varphi} + a\dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi = 0.$$

Задача 26.25. У машині статичного зрівноваження роторів підшипники мають нахил до вертикалі; кут нахилу дорівнює α (рис. 26.49). Ротор, що розміщений в підшипниках, має момент інерції J (відносно власної осі) і несе незрівноважену масу m на відстані r від осі. Скласти диференціальне рівняння руху ротора і визначити частоту малих коливань в околі положення рівноваги.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 26.49. Система має один ступінь вільності. Узагальнена координата — кут φ . Рівняння Лагранжа II роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}.$$

Кінетична енер-

$$T = \frac{J_z \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{2} = (J_z + mr^2) \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Узагальнена сила $Q_{\varphi} = -mgr \sin \alpha \sin \varphi$. Після визначення відповідних

похідних матимемо $(J_z + mr^2)\ddot{\varphi} = -mgr \sin \alpha \sin \varphi$, звідки $(J_z + mr^2)\ddot{\varphi} + mgr \sin \alpha \sin \varphi = 0$. Частота коливань

$$k = \sqrt{\frac{mgr \sin \alpha}{J_z + mr^2}}.$$

Задача 26.26. Однорідна нитка, до кінця якої прикріплений вантаж A масою m , перекинута через нерухомі блоки B, D і рухомий блок C (рис. 26.50). До кінця нитки E прикріплений вантаж E масою m . До осі блока C прикріплений вантаж K масою m_1 . Коefіцієнт тертя вантажу E при його русі дорівнює f . За якої умови вантаж K буде опускатися вниз, якщо початкові швидкості усіх вантажів дорівнювали нулю? Знайти прискорення вантажу K . Масами блоків і нитки знехтувати.

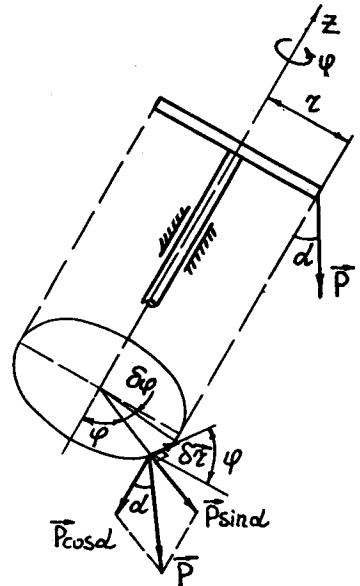


Рис. 26.49

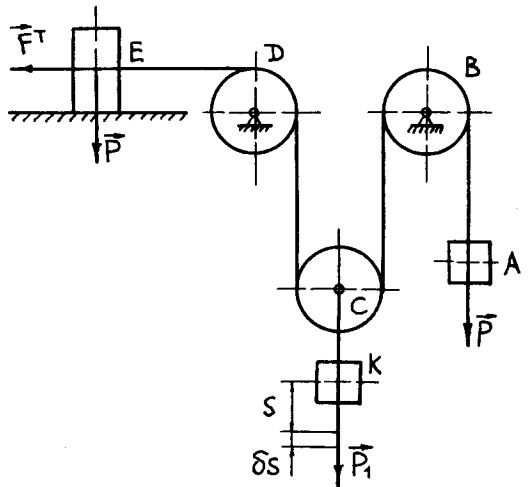


Рис. 26.50

Розв'язання. Розрахункову схему зображено на рис. 26.50. Система має один ступінь вільності. Узагальнена координата — переміщення S . Рівняння

Лагранжа II роду $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}} - \frac{\partial T}{\partial S} = Q_S$. Кінетична енергія системи $T = \frac{m_1 \dot{S}^2}{2} + m \dot{S}^2 = (2m + m_1) \frac{\dot{S}^2}{2}$. Узагальнена сила $Q_S = (m_1 - m - m_1 f) g = [m_1 - m(1 + f)] g$.

Після визначення відповідних похідних матимемо $\ddot{S}(2m + m_1) = [m_1 - m(1 + f)] g$, звідки $\ddot{S} = W = \frac{[m_1 - m(1 + f)] g}{2m + m_1}$. Вантаж K буде опуска-

тися, якщо $Q_S > 0$, тобто $m_1 - m(1 + f) > 0$, або $m_1 > m(1 + f)$.

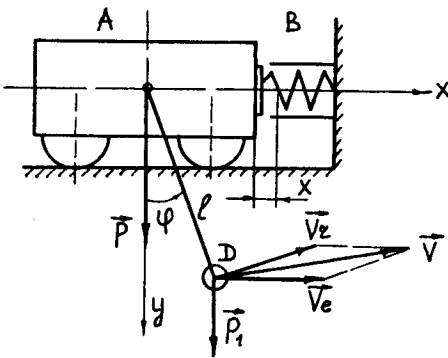


Рис. 26.51

Задача 26.27. При наїзді візка на пружний упор B починаються коливання підвішеного на стрижні вантажу D . Скласти диференціальне рівняння руху механічної системи, якщо m_1 — маса візка, m_2 — маса вантажу, l — довжина стрижня, c — коефіцієнт жорсткості пружини упора B . Масою коліс і всіма силами опору знехтувати. Початок відліку осі x взяти на лівому кінці недеформованої пружини. Визначити період малих коливань вантажу за відсутності упора B . Масою стрижня знехтувати.

Розв'язання. Розрахункову схему подано на рис. 26.51. Система має два ступеня вільності. Узагальнені координати

переміщення — x і кут φ . Рівняння Лагранжа II роду $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x$,

$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$. Кінетична енергія системи $T = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} = \frac{m \dot{x}^2}{2} +$

$\frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}^2 + 2l \cos \varphi \cdot \dot{x} \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{\dot{x}^2}{4} (m + m_1) + \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_1 l \cos \varphi \cdot \dot{x} \dot{\varphi}$.

Узагальнені сили: $Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx$, $Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -m_1 gl \sin \varphi$, де $\Pi = \frac{cx^2}{2} + m_1 gl \cos \varphi$. Після визначення відповідних похідних матимемо $(m + m_1)\ddot{x} + m_1 l \cos \varphi \ddot{\varphi} - m_1 l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = -cx$, $\cos \varphi \ddot{x} + l \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$, звідки, нехтуючи $\dot{\varphi}^2$ і вважаючи $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, $c = 0$, матимемо $\frac{lm}{m + m_1} \ddot{\varphi} + g\varphi = 0$. Отже,

$$k = \sqrt{\frac{g(m + m_1)}{lm}}, \text{ а } T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{(m + m_1)g}}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Яку в'язь називають утримувальною, яку — неутримувальною?
2. Яку в'язь називають стаціонарною, яку — нестаціонарною?
3. Що таке голономні в'язі?
4. За якою формулою можна визначити кількість ступенів вільності механічної системи, на точки якої накладені голомні й утримувальні в'язі?
5. Що таке можливі переміщення механічної системи?
6. Чим відрізняються дійсні переміщення від можливих?
7. Що таке ідеальні в'язі?
8. Як формулюється принцип можливих переміщень?
9. Як формулюється принцип Д'Аламбера—Лагранжа?
10. Які величини називаються узагальненими координатами? Скільки їх має механічна система? Навести приклади узагальнених координат.
11. Які параметри називаються узагальненими силами?
12. За якими формулами визначаються узагальнені сили?
13. Виведіть рівняння Лагранжа II роду.
14. Яка роль рівняння Лагранжа II роду при розв'язанні другої основної задачі динаміки невільної механічної системи?

Глава 27

МАЛІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ОДНИМ ТА ДВОМА СТУПЕНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

27.1. Рівняння Лагранжа II роду голономної системи

У теорії малих коливань механічних систем значну роль відіграє рівняння Лагранжа II роду (див. параграф 26.4), тому в трьох наступних параграфах буде розглянуто форми рівнянь Лагранжа, придатні для вивчення коливальних рухів. У цьому ж параграфі розглянемо виведення рівнянь Лагранжа II роду шляхом, відмінним від розглянутого в параграфі 26.4, а саме як наслідок основного закону динаміки.

Щоб одержати рівняння Лагранжа II роду, які описують рух голономної механічної системи з n матеріальних точок з S ступенями вільності, запишемо для цієї системи другий закон Ньютона:

$$m_i \vec{W}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (27.1)$$

де \vec{F}_i , \vec{R}_i — рівнодійна відповідно активних сил та реакцій в'язей, що прикладені до точки з номером i .

Кожне рівняння (27.1) множимо скалярно на вектор $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ та підсумовуємо результат. Одержуємо

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{W}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (27.2)$$

Величини

$$Q_j^{(a)} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, S), \quad (27.3)$$

$$Q_j^{(p)} = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, S) \quad (27.4)$$

називаються відповідно *узагальненими активними силами та узагальненими реакціями в'язей*.

Розглянемо скалярний добуток під знаком суми у лівій частині рівняння (27.2). Застосовуючи правило диференціювання добутку двох функцій, а також урахуваючи співвідношення (26.19), одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} \bar{W}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} &= \frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) - \bar{V}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \\ - \bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\bar{V}_i \cdot \bar{V}_i}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\bar{V}_i \cdot \bar{V}_i}{2} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{V_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{V_i^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Цей вираз підставляємо під знак суми у лівій частині рівняння (27.2). Після очевидних перетворень знаходимо

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{W}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^n \frac{m_i V_i^2}{2}. \quad (27.5)$$

Величина

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i V_i^2}{2} \quad (27.6)$$

називається *кінетичною енергією механічної системи*. Рівняння (27.2) на основі виразів (27.3), (27.4), (27.5) та (27.6) набирають вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{(a)} + Q_j^{(p)} \quad (j = 1, 2, \dots, S) \quad (27.7)$$

і називаються *рівняннями Лагранжа II роду*. Ці рівняння описують рух довільної голономної системи з S ступенями вільності та спрощуються для механічних систем, підпорядкованих ідеальним в'язям.

27.2. Рівняння Лагранжа II роду механічної системи, підпорядкованої ідеальним в'язям

Ідеальні в'язі за своїми механічними властивостями визначають лінії дії реакцій. Приклади таких в'язей розглянуто в параграфі 26.1.

На конкретних прикладах доведемо, що ідеальні в'язі, незважаючи на їх механічну різницю, мають загальні властивості: узагальнені реакції ідеальних в'язей дорівнюють нулю.

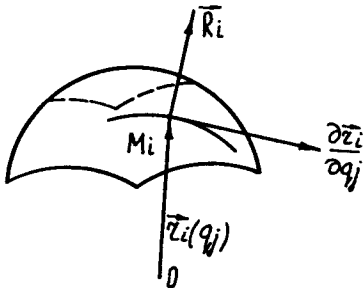


Рис. 27.1

Ідеальна поверхня. Припустимо, що по гладенькій поверхні рухається система матеріальних точок. Реакція поверхні \vec{R}_i , прикладена до i -ї точки, напрямлена по нормалі до поверхні (рис. 27.1).

Вектор $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ напрямлений по дотичній до годографа вектора $\vec{r}_i(q_j)$ — кривої на поверхні. Оскільки вектори \vec{R}_i та $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ взаємно перпендикулярні,

їх скалярний добуток дорівнює нулю. За формулою (27.4) знаходимо

$$Q_j^{(p)} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0. \quad (27.8)$$

Ідеальний стрижень. Реакція ідеального стрижня напрямлена вздовж прямої, що з'єднує центри шарнірів на кінцях стрижня (рис. 27.2). У даному випадку

$$Q_j^{(p)} = \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_j} - \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_j} = \vec{R} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = 0, \quad \vec{r} = \vec{M}_2 \vec{M}_1.$$

Дійсно, вектор $\vec{r}(q_j)$ змінює тільки напрям, через це його годограф є кри-

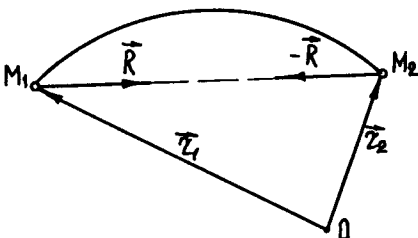


Рис. 27.2

вою на сфері радіусом $|\vec{r}|$. Вектор $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$ напрямлений по дотичній до годографа, тобто перпендикулярно до вектора \vec{R} , напрямленого по радіусу сфери. Скалярний добуток векторів \vec{R} та $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$ дорівнює нулю.

Рекомендуємо читачеві самостійно переконатися в тому, що якщо в'язі мають вигляд ідеального циліндричного та сферичного шарнірів, а також ідеальної нитки, то узагальнені реакції дорівнюють нулю.

Розглянуті приклади переконують у тому, що узагальнені реакції усіх ідеальних в'язей перетворюються в нуль. Цю властивість ідеальних в'язей візьмемо як аналітичне визначення ідеальних в'язей.

Механічна в'язь називається *ідеальною*, якщо її узагальнені реакції дорівнюють нулю:

$$Q_j^{(p)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (27.9)$$

Рівняння Лагранжа II роду в цьому випадку мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^{(a)} \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (27.10)$$

Ці рівняння описують рух голономної механічної системи з S ступенями вільності, підпорядкованої ідеальним в'язям. Далі будемо розглядати системи, рух яких описується рівняннями (27.10).

При вивченні малих коливань системи доцільно рівнянням (27.10) надати іншого вигляду, більш придатного до вивчення таких рухів механічної системи. Розгляду двох форм рівнянь (27.10) присвячуються два наступних параграфи.

Визначення узагальнених активних сил системи з рівнянь (27.3) доцільно у тому випадку, коли система складається зі скінченної кількості матеріальних точок, коли ж вона складається з одного чи з кількох тіл, рівняння (27.3) непридатні. У цьому випадку застосовують правило знаходження узагальнених сил системи, що впливає з визначення їх механічного змісту.

Щоб визначити механічний зміст узагальнених сил механічної системи, встановимо зв'язок між елементарною роботою сил, прикладених до точок системи, та узагальненими силами механічної системи.

Як відомо, елементарна робота сил, прикладених до механічної системи з n точок, визначається рівнянням

$$d'A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i. \quad (27.11)$$

Оскільки радіуси-вектори точок системи \vec{r}_i є функціями узагальнених координат і часу t :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_S, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то з рівняння, що визначає залежність між швидкостями точок механічної системи $\dot{\vec{r}}_i$ та узагальненими швидкостями системи \dot{q}_j :

$$\vec{V}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

або у стисненому вигляді

$$\vec{V}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

впливає

$$d\vec{r}_i = \vec{V}_i dt = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j. \quad (27.12)$$

Якщо система вільна або підпорядкована стаціонарним в'язям, то $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ і перший доданок рівняння (27.12) дорівнює нулю. Внаслідок цього можна стверджувати, що перший доданок рівняння (27.12) визначає ту частину переміщення точки з номером i , яку ця точка здійснює разом з накладеними в'язями, усі інші доданки — переміщення відносно накладених в'язей.

На підставі рівнянь (27.12) та (27.11) матимемо

$$d'A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j.$$

У другому доданку змінюємо порядок підсумовування:

$$d'A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) dq_j. \quad (27.13)$$

Вираз у дужках є узагальненою силою системи (27.3). Тоді рівняння (27.13) набирає вигляду

$$d'A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^s \vec{Q}_j dq_j. \quad (27.14)$$

З рівняння (27.14) випливає, що **узагальнені сили системи** — це механічні величини, для яких сума їх добутку на диференціали відповідних узагальнених координат визначає елементарну роботу ньютонівих сил \vec{F}_i на переміщеннях відносно накладених в'язей. Таким є механічний зміст узагальнених сил системи.

Щоб визначити узагальнені сили механічної системи, узагальненим координатам треба надати приросту, який приблизно дорівнює їх диференціалу $\Delta q_j \cong dq_j$, та визначити елементарну роботу сил, прикладених до точок систе-

ми, на переміщеннях, що відповідають цьому приросту. Співмножник при диференціалах узагальнених координат у виразі елементарної роботи є шуканою узагальненою силою системи. Це правило застосовують для визначення узагальнених сил системи, які складаються з одного або кількох твердих тіл.

27.3. Рівняння Лагранжа II роду консервативної системи

Механічна система називається консервативною (зберігаючою), якщо вона рухається в потенціальному силовому полі. Так її називають тому, що під час руху ця система зберігає повну механічну енергію.

Щоб знайти рівняння Лагранжа II роду консервативної системи, перетворимо узагальнену активну силу. За формулами (27.3) маємо

$$Q_j^{(a)} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (27.15)$$

Як відомо (див. параграф 20.5),

$$F_{ix} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}, \quad (27.16)$$

тобто

$$\bar{F}_i = -\overline{\text{grad}_i \Pi},$$

де

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = \Pi(t, q_1, q_2, \dots, q_S) \quad (27.17)$$

є потенціальною енергією системи.

За співвідношеннями (27.15) та (27.16) знайдемо

$$Q_j^{(a)} = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi \partial x_i}{\partial x_i \partial q_j} + \frac{\partial \Pi \partial y_i}{\partial y_i \partial q_j} + \frac{\partial \Pi \partial z_i}{\partial z_i \partial q_j} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (27.18)$$

Рівняння Лагранжа II роду (27.10) на цій підставі мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

або

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (27.19)$$

Тут беруть до уваги співвідношення $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} = 0$.

Функція

$$L = T - \Pi \quad (27.20)$$

називається *функцією Лагранжа* або *кінетичним потенціалом системи*.

На підставі співвідношень (27.19) та (27.20) рівняння Лагранжа II роду консервативної системи будуть такими:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (27.21)$$

У деяких випадках функція Лагранжа не залежить явно від однієї або кількох узагальнених координат, які називаються *циклічними*. Якщо система консервативна, то кожній циклічній координаті відповідає закон збереження величини:

$$\rho_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}, \quad (27.22)$$

що називається *узагальненим імпульсом системи*. Дійсно, рівняння Лагранжа II роду, що відповідає координаті q_a , має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0. \quad (27.23)$$

Якщо q_a — циклічна координата, то $\frac{\partial L}{\partial q_a} = 0$. Рівняння (27.23) набирає вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0.$$

Звідси випливає закон збереження узагальненого імпульсу системи:

$$\rho_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \text{const.}$$

Якщо на точки системи крім потенціальних сил діють непотенціальні, то узагальнені активні сили можуть бути подані так:

$$Q_j^{(a)} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_j' \quad (j = 1, 2, \dots, S), \quad (27.24)$$

де Q_j' — узагальнена непотенціальна сила.

Рівняння Лагранжа II роду в цьому випадку набирають вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j' \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (27.25)$$

27.4. Рівняння Лагранжа II роду дисипативної системи

Розглянемо механічну систему, до точок якої крім потенціальних сил

$$\vec{F}_i^{(n)} = -\overline{\text{grad}}_i \Pi \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (27.26)$$

прикладені сили опору, пропорційні першому ступеню швидкості точки:

$$\vec{F}_i^{(o)} = -\alpha_i \vec{V}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (27.27)$$

де α_i — додатний коефіцієнт пропорційності, що визначається експериментально.

Оскільки сила $\vec{F}_i^{(o)}$ непотенціальна, рух системи в середовищі, що чинить опір, описується рівняннями (27.25). Перетворимо ці рівняння відповідно до даного випадку. За формулами (27.3) та (27.27) знаходимо узагальнену силу опору:

$$\begin{aligned} Q_j^{(a)} &= Q_j^{(o)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(o)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{V}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \\ &= -\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{V}_i \cdot \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i V_i^2}{2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}. \end{aligned} \quad (27.28)$$

Величина

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i V_i^2}{2} \quad (27.29)$$

називається *дисипативною функцією (функцією розсіювання)*.

Рівняння (27.25) у даному випадку мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, S) \quad (27.30)$$

і називаються *рівняннями Лагранжа II роду дисипативної системи*. Якщо до точок системи прикладені тільки сили опору, то в рівняннях (27.30) функцію Лагранжа L необхідно замінити кінетичною енергією системи T .

Щоб з'ясувати механічний зміст функції Φ , застосуємо другий закон Ньютона до опису руху точок системи в розглянутому випадку:

$$m_i \vec{W}_i = -\overline{\text{grad}}_i \Pi - \alpha_i \vec{V}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Потім кожне рівняння множимо скалярне на вектор $d\vec{r}_i = \vec{V}_i dt$ та підсумовуємо результат:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{W}_i \cdot \vec{V}_i dt = - \sum_{i=1}^n \overline{\text{grad}}_i \Pi \cdot d\vec{r}_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i dt. \quad (27.31)$$

Користуючись властивістю скалярного добутку, дістанемо

$$\vec{W}_i \cdot \vec{V}_i dt = \vec{V}_i \cdot \frac{d\vec{V}_i}{dt} dt = \vec{V}_i \cdot d\vec{V}_i = d\left(\frac{V_i^2}{2}\right). \quad (27.32)$$

Крім того,

$$\sum_{i=1}^n \overline{\text{grad}}_i \Pi \cdot d\vec{r}_i = d\Pi. \quad (27.33)$$

Рівняння (27.31) на підставі виразів (27.32) та (27.33) набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -2\Phi, \quad \text{або} \quad \frac{dE}{dt} = -2\Phi. \quad (27.34)$$

Величина

$$E = T + \Pi \quad (27.35)$$

є повною механічною енергією системи. З рівняння (27.34) дістанемо рівність

$$\Phi = -\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}, \quad (27.36)$$

що визначає механічний зміст дисипативної функції: *дисипативна функція пропорційна швидкості зменшування повної механічної енергії системи*. Цим твердженням пояснюється термін “функція розсіювання”.

Якщо сили опору не прикладені до точок системи ($\alpha_i = 0$), то $\Phi = 0$ і з рівності (27.36) випливає

$$E = h, \quad (27.37)$$

де h — стала енергії.

Рівність (27.37) є відображенням закону збереження повної механічної енергії системи: повна механічна енергія консервативної системи залишається сталою.

Цей закон у параграфі 20.7 був доведений іншим способом.

27.5. Кінетична енергія та дисипативна функція системи в узагальнених величинах

Метод Лагранжа ґрунтується на застосуванні узагальнених координат при описі руху системи. Тому виникає необхідність перейти до узагальнених величин у виразах (27.6), (27.29), що визначають T і Φ .

Скористаємося відомою залежністю швидкості точки \vec{V}_i від узагальнених швидкостей системи \dot{q}_j (див. параграф 27.2):

$$\vec{V}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad \text{або} \quad \vec{V}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad (27.38)$$

(тут індекс підсумовування може бути позначений будь-якою літерою).

На підставі цих рівнянь

$$\begin{aligned} V_i^2 &= \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i = \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \\ &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + 2 \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (27.39)$$

В останній групі доданків рівняння (27.39) застосуємо знак подвійної суми:

$$\sum_{j,k=1}^s (\dots) = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s (\dots).$$

Підставляючи вираз (27.39) у рівність (27.6), матимемо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sum_{j,k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

або після зміни порядку підсумовування

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (27.40)$$

Введемо позначення:

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}; \quad (27.41)$$

$$T_1 = \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j; \quad a_j = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}; \quad (27.42)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k; \quad a_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}. \quad (27.43)$$

Тоді рівність (27.40) набирає вигляду

$$T = T_0 + T_1 + T_2. \quad (27.44)$$

Зі співвідношень (27.41)—(27.43) випливає, що кожний доданок у сумі, що визначає T_2 , містить узагальнені швидкості у другому ступені, T_1 та T_0 — відповідно у першому та нульовому. Такі функції називаються *однорідними функціями відносно узагальнених швидкостей* з показником однорідності відповідно 2, 1, 0.

Якщо система вільна або підпорядкована стаціонарним в'язям, то $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = \bar{0}$ і формули (27.41)—(27.44) набирають вигляду

$$T_0 = T_1 = 0, \quad T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (27.45)$$

Формули (27.6) та (27.29) аналогічні. Згідно з міркуваннями стосовно функції Φ , викладеними вище, знайдемо

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2, \quad (27.46)$$

де

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}; \quad (27.47)$$

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^s b_j \dot{q}_j, \quad b_j = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}; \quad (27.48)$$

$$\Phi_2 = \sum_{j,k=1}^s b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad b_{jk} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}. \quad (27.49)$$

Якщо система вільна або підпорядкована стаціонарним в'язям, то $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = \bar{0}$ і рівняння (27.46)—(27.49) набирають вигляду

$$\Phi_0 = \Phi_1 = 0, \quad \Phi = \Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (27.50)$$

Якщо взяти до уваги залежність

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_S),$$

то можна стверджувати, що T_0 , Φ_0 , a_j , b_j , a_{jk} , b_{jk} є функціями змінних t, q_1, q_2, \dots, q_S , від яких залежить і потенціальна енергія системи (27.17).

27.6. Узагальнені умови рівноваги механічної системи. Види рівноваги. Стілка рівновага

Розглянемо систему, підпорядковану ідеальним стаціонарним в'язям. У цьому випадку рівняння Лагранжа мають вигляд (27.10), де T визначається за формулою (27.45). Система перебуває в рівновазі відносно накладених в'язей, якщо всі узагальнені швидкості системи дорівнюють нулю: $\dot{q}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, S$). У цьому випадку на підставі співвідношень (27.45) матимемо $T = 0$ і рівняння (27.10) набирають вигляду

$$Q_j^{(a)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, S). \quad (27.51)$$

Рівності (27.51) — узагальнені умови рівноваги системи відносно ідеальних стаціонарних в'язей. Вони завжди необхідні для рівноваги, але достатні лише за нульових початкових швидкостей. У цьому можна переконатися з найпростішого прикладу.

Нехай тверде тіло має нерухому вісь. Тоді $S = 1$, $q = \varphi$, $T = \frac{J_z \dot{\varphi}^2}{2}$. З рівняння Лагранжа II роду для цього випадку

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

знайдемо, що при $Q_\varphi = 0$ $J_z \dot{\varphi} = \text{const}$. Звідси випливає, що φ є сталою величиною, тобто якщо узагальнена сила дорівнює нулю, то тверде тіло буде обертатися рівномірно навколо осі з початковою кутовою швидкістю. Якщо ж початкова кутова швидкість тіла дорівнює нулю, то тіло буде перебувати в стані рівноваги за рівності нулю узагальненої активної сили.

Якщо система рухається в потенціальному силовому полі, то на підставі рівняння (27.18) узагальнені умови рівноваги набирають вигляду

$$Q_j^{(a)} = Q_j^{(n)} = - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_{q_j=q_{j0}} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, S), \quad (27.52)$$

де q_{j0} — узагальнена координата системи у положенні рівноваги.

З рівнянь (27.52) випливає, що в положенні рівноваги системи її потенціальна енергія має стаціонарне значення.

При виконанні умов (27.51) та (27.52) рівновага системи може бути стійкою, нестійкою, байдужою.

Рівновага системи називається *стійкою*, якщо при достатньо малому початковому відхиленні системи від положення рівноваги при одночасному надаванні точкам системи малих початкових швидкостей точки системи рухаються необмежений проміжок часу в околі положення рівноваги з малими швидкостями. Істотною ознакою стійкої рівноваги системи є прямування до нуля швидкостей та відхилень точок системи від положення рівноваги, якщо зменшувати до нуля початкові відхилення та початкові швидкості точок системи.

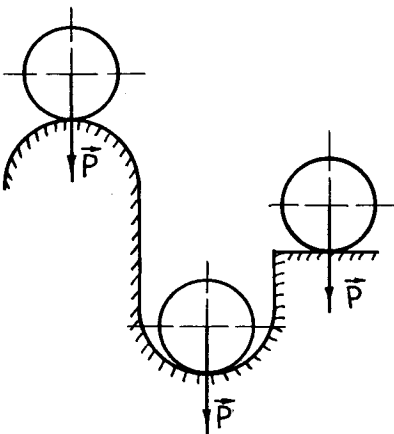


Рис. 27.3

Прикладом стійкої рівноваги системи є рівновага важкого циліндра, що міститься в циліндричній западині з горизонтальними твірними, а нестійкої — рівновага циліндра, що міститься на циліндричному виступі (рис. 27.3). Якщо рівновага системи не змінюється при зміні узагальнених координат, то вона називається *байдужою*. Прикладом байдужої рівноваги можна назвати рівновагу важкого циліндра, що розміщується на горизонтальній площині. Його рівновага не змінюється при зміні його положення на площині.

27.7. Теорема Діріхле — Ляпунова¹

Достатню ознаку стійкої рівноваги системи визначає теорема Діріхле: *якщо в положенні рівноваги консервативної системи її потенціальна енергія є мінімумом, то це положення є положенням стійкої рівноваги.*

¹ Петер Густав Лежен Діріхле (1805—1859) — німецький математик.

Олександр Михайлович Ляпунов (1857—1918) — російський математик і механік, академік Петербурзької академії наук.

Щоб довести теорему, зробимо такі припущення. Припустимо, що всі узагальнені координати системи в положенні рівноваги дорівнюють нулю, тобто узагальнені координати q_j відлічуємо від положення рівноваги. Беручи до уваги співвідношення (27.52) та формулу

$$\Pi = -\int dA + C, \tag{27.53}$$

вибираємо C так, щоб у положенні рівноваги потенціальна енергія системи дорівнювала нулю:

$$\Pi(0, 0, \dots, 0) = 0. \tag{27.54}$$

Оскільки в положенні рівноваги системи Π має мінімум, то можна вказати такий окіл цього положення, в якому потенціальна енергія додатна. При цьому зростанню q_j відповідає зростання Π . За деяких значень q_j це зростання припиняється — потенціальна енергія при подальшому збільшенні q_j або спадає, або зберігається сталою.

Сукупність q_j , якій відповідає $\Pi(q_j)$ — додатна зростаюча функція, називається *областю мінімуму потенціальної енергії*. Сукупність ρ_j , за яких зростання $\Pi(q_j)$ зупиняється, називається *границею області мінімуму потенціальної енергії*. На рис. 27.4 область мінімуму потенціальної енергії системи розташована між точками ρ_{1j} і ρ_{2j} .

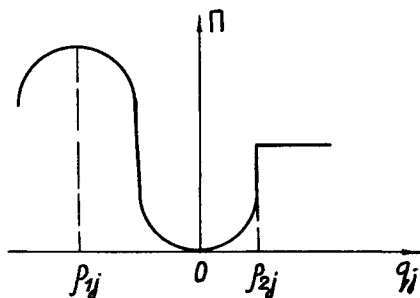


Рис. 27.4

Припустимо, що під час руху системи в області мінімуму Π одна з узагальнених координат набирає граничного значення ρ_j . Побудуємо таку сукупність значень потенціальної енергії системи:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi(\rho_1, q_2, \dots, q_{S-1}, q_S); \\ \Pi_2 &= \Pi(q_1, \rho_2, \dots, q_{S-1}, q_S); \\ &\dots\dots\dots \\ \Pi_S &= \Pi(q_1, q_2, \dots, q_{S-1}, \rho_S). \end{aligned}$$

З цієї сукупності вибираємо найменше значення:

$$A = \min \Pi_j (j = 1, 2, \dots, S). \tag{27.55}$$

Звідси випливає, що система не вийде з області мінімуму потенціальної енергії, якщо її потенціальна енергія при цьому не перевищує значення A .

Розглянута система консервативна, тому до неї застосовується закон збереження повної механічної енергії системи:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0, \quad (27.56)$$

де T_0, Π_0 ; T, Π — кінетична та потенціальна енергія системи відповідно в початковий момент часу та в подальшому русі. З рівнянь (27.56) випливає: $T = T_0 + \Pi_0 - \Pi > 0$. На підставі цього співвідношення дійдемо висновку, що

$$\Pi < T_0 + \Pi_0. \quad (27.57)$$

Вибираємо початкові умови так, щоб $T_0 + \Pi_0 = A$. Тоді співвідношення (27.57) набуває вигляду

$$\Pi < A. \quad (27.58)$$

Звідси випливає, що потенціальна енергія системи в подальшому русі не перевищує значення, за межі якого вона не виходить з області мінімуму потенціальної енергії. І отже, рівновага системи згідно з визначенням буде стійкою.

Теорему Діріхле доведено. Вона, як зазначено раніше, вказує на достатню ознаку стійкості рівноваги і не припускає оберненості.

Відсутність теореми, що вказує на необхідну ознаку стійкості рівноваги, частково компенсується двома теоремами Ляпунова про нестійкість рівноваги. Щоб розглянути зміст теорем Ляпунова, розкладемо потенціальну енергію системи у ряд Маклорена¹ в околі положення рівноваги, припускаючи, що функція $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$ неперервна і має похідні в положенні рівноваги:

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = \Pi(0, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right)_0 q_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots$$

Тут перший доданок перетворюється в нуль на підставі рівності (27.54), друга група доданків — на підставі рівності (27.52).

Тоді

$$\Pi(q_1, q_2, \dots, q_s) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 q_j q_k + \dots \quad (27.59)$$

Наведемо теореми Ляпунова без доведення. 1. *Якщо в положенні рівноваги системи потенціальна енергія не має мінімуму та його відсутність виявляється з розгляду членів другого порядку відносно узагальнених координат у розкладі (27.59), то це положення рівноваги нестійке.*

Може бути, що члени другого порядку відносно узагальнених координат не входять у розклад (27.59) або з їх розгляду неможливо встановити

¹ Колін Маклорен (1698—1746) — швейцарський математик, член Лондонського королівського товариства.

відсутність мінімуму потенціальної енергії. В цьому випадку перша теорема Ляпунова не має місця. Тоді звертаються до другої теореми Ляпунова.

2. Якщо в положенні рівноваги системи потенціальна енергія має максимум та його наявність виявляється з розгляду членів найменш високого порядку відносно узагальнених координат, що входять у розклад (27.59), то стан рівноваги нестійкий.

Досвід свідчить, що більшість випадків практики задовольняють вимоги або теореми Діріхле, або теорем Ляпунова. Окремі випадки потребують спеціального вивчення.

27.8. Кінетична, потенціальна енергія та дисипативна функція механічної системи при її русі в околі положення стійкої рівноваги

Припустимо, що при русі системи в околі положення стійкої рівноваги узагальнені координати q_j та узагальнені швидкості \dot{q}_j можна вважати величинами одного порядку малості.

Розглянемо рух системи в околі положення стійкої рівноваги з точністю до величин другого порядку малості. Для цього перетворюємо функції Π , T , Φ так, щоб вони містили величини до другого порядку малості включно. У розкладі (27.59) позначимо:

$$C_{jk}^0 = C_{kj}^0 = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \right)_0 = \text{const.}$$

Обмежимося величинами другого порядку малості, знайдемо приблизний вираз потенціальної енергії системи в околі положення стійкої рівноваги:

$$\Pi \cong \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s C_{jk}^0 q_j q_k. \quad (27.60)$$

Тут коефіцієнти C_{jk}^0 , симетричні відносно індексів j та k , називаються коефіцієнтами пружності системи.

Аналогічно перетворюємо кінетичну енергію системи. Система підпорядкована стаціонарним в'язям, тому

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (27.61)$$

де $a_{jk} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$, $\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$.

Розкладаємо в ряд Маклорена в околі положення стійкої рівноваги коефіцієнти a_{jk} , припускаючи, що вони неперервні та мають усі похідні у цьому положенні:

$$a_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_S) = a_{jk}(0, 0, \dots, 0) + \sum_{a=1}^S \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_a} \right)_0 q_a + \dots \quad (27.62)$$

З виразів (27.61) та (27.62) випливає, що кінетична енергія системи визначається з точністю до величин другого порядку малості включно, якщо у розкладі (27.62) утримувати перший член ряду. Позначимо його $a_{jk}^0 = a_{kj}^0 = a_{jk}(0, 0, \dots, 0) = \text{const}$. Тоді приблизний вираз кінетичної енергії системи матиме вигляд

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S a_{jk}^0 \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (27.63)$$

Величини a_{jk}^0 називаються *коефіцієнтами інерції системи*.

Дисипативна функція Φ у розглянутому випадку зазнає аналогічних перетворень:

$$\Phi = \Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (27.64)$$

де

$$b_{jk} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}, \quad \bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_S).$$

Коефіцієнти b_{jk} розкладаємо в ряд Маклорена в околі положення стійкої рівноваги, припускаючи, що вони неперервні та мають усі похідні у цьому положенні:

$$b_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_S) = b_{jk}(0, 0, \dots, 0) + \sum_{a=1}^S \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial q_a} \right)_0 q_a + \dots$$

У цьому розкладі обмежимося першим членом ряду, позначивши його

$$b_{jk}^0 = b_{kj}^0 = b_{jk}(0, 0, \dots, 0) = \text{const}.$$

Тоді з точністю до величин другого порядку малості дисипативна функція визначається за формулою

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S b_{jk}^0 \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (27.65)$$

де b_{jk}^0 — коефіцієнти опору системи.

27.9. Вільні незгасаючі коливання механічної системи з одним ступенем вільності

Зазначимо передусім, що кількість ступенів вільності системи визначається не тільки найменшим числом обмежень, що перетворюють її у нерухому, а й тією точністю, з якою розв'язується відповідна задача. Розглянемо, наприклад, систему, що складається з вантажу, прикріпленого до пружини. Якщо враховувати масу пружини, окрім маси вантажу, то будемо мати систему з нескінченною кількістю ступенів вільності. Якщо знехтувати масою пружини та припустити, що вантаж рухається у вертикальній площині та пружина може закручуватися, матимемо систему з трьома ступенями вільності. Знехтувавши закручуванням пружини, матимемо систему з двома ступенями вільності. Нарешті, якщо припустити, що вантаж рухається поступально, будемо мати систему з одним ступенем вільності.

В цьому розділі розглядатимемо голономні системи з одним ступенем вільності, підпорядковані ідеальним стаціонарним в'язям. Розглянемо рух такої системи в околі положення стійкої рівноваги за методом Лагранжа.

Припустимо, що голономна система з одним ступенем вільності, підпорядкована ідеальним стаціонарним в'язям, рухається в малому околі положення стійкої рівноваги під дією потенціальних сил. Рівняння Лагранжа II роду для цього випадку знаходимо на підставі співвідношення (27.21):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (27.66)$$

де q , \dot{q} — відповідно узагальнена координата та узагальнена швидкість системи; L — функція Лагранжа системи, що визначається на підставі рівнянь (27.20), (27.60), (27.63):

$$L = T - \Pi, \quad T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2.$$

За цими співвідношеннями знаходимо:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a \dot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -c q. \quad (27.67)$$

Нагадуємо, що тут коефіцієнт інерції a та коефіцієнт жорсткості c — сталі величини. Вирази (27.67) підставляємо в рівняння (27.66). Знаходимо диференціальне рівняння вільних коливань системи з одним ступенем вільності:

$$\ddot{q} + k^2 q = 0; \quad k^2 = \frac{c}{a}. \quad (27.68)$$

Рівняння (27.68) є однорідним диференціальним рівнянням другого порядку відносно узагальненої координати q .

Загальний розв'язок рівняння (27.68) має вигляд

$$q = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \quad (27.69)$$

де c_1 та c_2 — сталі інтегрування, які необхідно підбирати так, щоб задовольнити задані початкові умови.

Припустимо, що ці умови при $t = 0$ мають вигляд:

$$q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0. \quad (27.70)$$

На підставі рівності (27.69) знаходимо

$$\dot{q} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt. \quad (27.71)$$

Підставляючи початкові умови (27.70) у рівняння (27.69) і (27.71), маємо рівняння для визначення c_1 та c_2 :

$$q_0 = c_1, \quad \dot{q}_0 = c_2 k. \quad (27.72)$$

Визначивши звідси c_1 та c_2 та підставляючи їх значення в рівність (27.69), знаходимо загальний розв'язок рівняння (27.68), що задовольняє задані початкові умови:

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt. \quad (27.73)$$

Проаналізуємо цей розв'язок. Для цього надамо йому іншого вигляду. Вважатимемо, що

$$q_0 = A \sin \alpha, \quad \frac{\dot{q}_0}{k} = A \cos \alpha,$$

де A та α — сталі, що визначаються за рівняннями

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{k}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{q}_0 k}{q_0}. \quad (27.74)$$

Розв'язок (27.73) на підставі співвідношення (27.72) набирає вигляду

$$q = A \sin(kt + \alpha). \quad (27.75)$$

З рівності (27.75) випливає, що система з одним ступенем вільності підпорядкована ідеальним стаціонарним голономним в'язям, під дією потенціальних сил рухається за гармонічним законом в околі положення стійкої рівноваги системи. Такий рух називається *гармонічним коливальним*. Величина A — найбільше відхилення системи від положення стійкої рівноваги — називається *амплітудою коливань*; $(kt + \alpha)$ — фаза коливань у момент часу t ; k — частота коливань.

Зі співвідношення (27.75) випливає, що гармонічні коливання певної системи виникають при наданні їй в деякий момент часу ненульових початкових умов. У силу цього рух, що описує рівняння (27.75), називається *вільним* або *власним коливальним*. Однією з важливих характеристик системи є період її вільних коливань.

Періодом коливань системи називається проміжок часу між двома послідовними проходженнями її через будь-яке фіксоване положення в одному напрямі.

Користуючись цим означенням, знайдемо формулу для визначення періоду вільних коливань системи. Припустимо, що система проходить через положення стійкої рівноваги в момент часу t , в який узагальнена координата системи $q = 0$ і, як наслідок, $\sin(kt + \alpha) = 0$. Через проміжок часу, що дорівнює періоду коливань T , знову маємо $q = 0$ і $\sin[(t + T)k + \alpha] = 0$ при русі системи в тому самому напрямі, тобто якщо q зберігає знак. Проте найменшим значення T буде тоді, коли аргумент синуса набуває приросту 2π , тобто за умови

$$\sin[k(t + T) + \alpha] = \sin(kt + 2\pi + \alpha).$$

Звідси, порівнюючи аргументи, знаходимо період вільних коливань системи:

$$T = \frac{2\pi}{k}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{a}}. \quad (27.76)$$

З рівнянь (27.76) випливає, що період вільних коливань не залежить від часу та початкових умов. Такі коливання називають *ізохронними*.

Зазначимо, що диференціальним рівнянням (27.68) описується багато явищ як неживої, так і живої природи. При цьому зміст величини k буде змінюватись.

Будь-яка система, рух якої описується рівнянням (27.68), називається *гармонічним осцилятором*. Таким чином, розглянута система є гармонічним осцилятором.

27.10. Вільні згасаючі коливання механічної системи з одним ступенем вільності

Розглянемо механічну систему з одним ступенем вільності, що підпорядкована ідеальним стаціонарним голономним в'язям і рухається в малому околі положення стійкої рівноваги під дією потенціальних сил

$$\vec{F}_i^{(n)} = -\overline{\text{grad}_i \Pi_i} \quad (27.77)$$

та сил опору

$$\vec{F}_i^{(o)} = -\alpha_i \vec{V}_i, \quad (27.78)$$

де α_i — додатний коефіцієнт пропорціональності, що визначається експериментально.

Розглянемо рух цієї системи за методом Лагранжа. Рівняння Лагранжа II роду при дії на систему вказаних сил мають вигляд (27.30). У даному випадку ($S = 1$) маємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad (27.79)$$

де

$$L = T - \Pi, \quad T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} b \dot{q}^2. \quad (27.80)$$

Підставляючи вирази (27.80) у рівняння (27.79), знайдемо диференціальне рівняння згасаючих коливань системи з одним ступенем вільності:

$$\ddot{q} + 2h \dot{q} + k^2 q = 0, \quad 2h = \frac{b}{a}, \quad k^2 = \frac{c}{a}. \quad (27.81)$$

Це — однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно узагальненої координати системи $q = q(t)$ зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0$$

та знайдемо його корені:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Звідси зрозуміло, що можливі три види коренів і цим кореням відповідають три види руху системи. Розглянемо загальний розв'язок рівняння (27.81) у кожному випадку.

1. $h > k$. Корені характеристичного рівняння дійсні та різні. Загальний розв'язок рівняння (27.81):

$$q = e^{-ht} \left(c_1 e^{t\sqrt{h^2 - k^2}} + c_2 e^{-t\sqrt{h^2 - k^2}} \right). \quad (27.82)$$

Рух, що описує рівняння (27.82), аперіодичний. При цьому узагальнена координата q зі збільшенням часу прямує до нуля.

Отже, у даному випадку система прямує аперіодично до положення стійкої рівноваги за будь-яких початкових умов.

2. $h = k$. Корені характеристичного рівняння дійсні та рівні. Загальний розв'язок рівняння (27.81):

$$q = e^{-ht} (c_1 + c_2 t). \quad (27.83)$$

Тут, як і в першому випадку, система аперіодично прямує до положення стійкої рівноваги зі збільшенням часу t за будь-яких початкових умов (граничний випадок аперіодичного руху).

3. $h < k$. Характеристичне рівняння має різні комплексні корені:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2}.$$

Загальний розв'язок рівняння (27.81) дістанемо у вигляді

$$q = e^{-ht} \left(c_1 \cos t\sqrt{k^2 - h^2} + c_2 \sin t\sqrt{k^2 - h^2} \right). \quad (27.84)$$

Наявність періодичних функцій у розв'язку (27.84) вказує, що у даному випадку узагальнена координата q прямує до нуля не монотонно, як у двох попередніх випадках, а з певною періодичністю. Періодичність порушується співмножником e^{-ht} , що зумовлено дією на систему сил опору (27.78).

Рух системи, що описується кінематичним рівнянням (27.84), називається *згасаючими коливаннями*.

Проаналізуємо цей рух докладніше. Для цього надамо розв'язку (27.84) іншого вигляду. Нехай $c_1 = A \sin \alpha$, $c_2 = A \cos \alpha$, тоді розв'язок (27.84) матиме вигляд

$$q = Ae^{-ht} \sin \left(t\sqrt{k^2 - h^2} + \alpha \right). \quad (27.85)$$

Тут сталі A і α визначаються з початкових умов задачі. З виразу (27.85) випливає, що рух системи є періодичним і для нього можливо умовно впровадити поняття періоду коливань.

Періодом згасаючих коливань називається проміжок часу між двома послідовними проходженнями системи через положення стійкої рівноваги в одному визначеному фіксованому напрямі.

Використаємо це означення для виведення формули періоду згасаючих коливань. Припустимо, що система проходить через положення стійкої рівноваги в момент часу t . У цей момент маємо: $q = 0$ і, як наслідок, $\sin(t\sqrt{k^2 - h^2} + \alpha) = 0$. Через проміжок часу, що дорівнює періоду коливань T ,

маємо: $q = 0$, $\sin[(t+T)\sqrt{k^2 - h^2} + \alpha] = 0$ при русі системи в тому самому напрямі, тобто якщо q зберігає знак. Однак це можливо лише тоді, якщо аргумент синуса набуває приросту, що дорівнює 2π , тобто за умови

$$\sin[(t+T)\sqrt{k^2 - h^2} + \alpha] = \sin(t\sqrt{k^2 - h^2} + \alpha + 2\pi).$$

Звідси, порівнюючи аргументи, визначаємо період згасаючих коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}. \quad (27.86)$$

З формули (27.86) випливає, що період згасаючих коливань не змінюється з часом і не залежить від початкових умов. Такі коливання називаються *ізохронними*. Період згасаючих коливань залежить від властивості самої системи (величина k) та властивості середовища, що чинить опір (величина h). Неважко встановити зв'язок між періодом вільних та згасаючих коливань однієї і тієї самої механічної системи. На підставі формул (27.76) та (27.86) знайдемо:

$$T_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \left(\frac{h}{k}\right)^2}} = \frac{T_b}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{k}\right)^2}} > T_b.$$

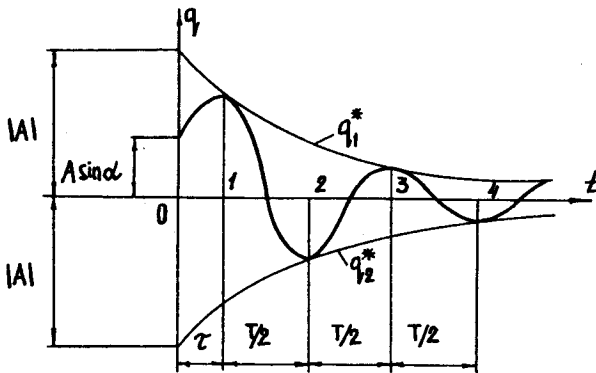


Рис. 27.5

Величину $B = Ae^{-ht}$ називають *амплітудою згасаючих коливань*; $k^* = \sqrt{k^2 - h^2}$ — *частотою згасаючих коливань*; $k^*t + \alpha$ — *фазою коливань в момент часу t* .

Щоб скласти більш чітке уявлення про згасаючі коливання системи, побудуємо графік функції (27.85). Спочатку побудуємо дві криві, на яких розміщуються точки графіка, що відповідають перетворенню синуса $b \pm 1$ (рис. 27.5):

$$q_1^* = |A|e^{-ht}, \quad q_2^* = -|A|e^{-ht}.$$

Ці криві називаються *амплітудними*. Зі зростанням часу криві з обох боків асимптотично прямують до осі абсцис. Між ними розташовується графік згасаючих коливань системи. Розмахи коливань зменшуються, але відрізки 1—2, 2—3 та інші за віссю абсцис Ot будуть рівними, оскільки період згасаючих коливань не залежить від часу.

Визначимо поняття декременту згасаючих коливань. Для цього розглянемо послідовність ординат, що відповідають точкам дотику графіка розглянутої функції і амплітудної кривої q_1^* :

$$q_1 = Ae^{-ht}; \quad q_2 = Ae^{-h(t+T)}; \quad q_3 = Ae^{-h(t+2T)}, \quad \dots, \quad q_n = Ae^{-h[t+(n-1)T]}.$$

Послідовність цих ординат — спадна геометрична прогресія, знаменником якої є e^{-hT} . Величина e^{-hT} називається *декрементом згасаючих коливань системи*. Декремент згасаючих коливань характеризує швидкість згасання коливань, тобто швидкість спаду координати q з часом. Величина

$$\ln \frac{1}{e^{-hT}} = hT \text{ називається логарифмічним декрементом коливань.}$$

27.11. Змушені коливання механічної системи з одним ступенем вільності за наявності сил опору. Явище резонансу

Розглянемо систему з одним ступенем вільності, підпорядковану ідеальним стаціонарним голономним в'язям. Припустимо, що вона рухається в малому околі положення стійкої рівноваги системи під дією потенціальних сил

$$\vec{F}_i^{(n)} = -\overline{\text{grad}}_i \Pi,$$

сил опору

$$\vec{F}_i^{(o)} = -\alpha_i \vec{V}_i,$$

та збурювальних сил

$$\vec{F}_i^{(a)} = \vec{F}_{i0} \sin(\omega t + \beta), \quad (27.87)$$

де \vec{F}_{i0} — амплітуда збурювальної сили, що діє на i -ту точку; ω — частота збурювальної сили; $\omega t + \beta$ — фаза збурювальної сили в момент часу t .

Розглянемо рух цієї системи за методом Лагранжа.

Рівняння Лагранжа II роду (27.30) в даному випадку ($S = 1$) мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} + Q^{(a)}, \quad (27.88)$$

де $Q^{(a)}$ — узагальнена збурювальна сила. На підставі визначення узагальненої сили (27.3) та рівності (27.87) знаходимо

$$Q^{(a)} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{i0}^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \sin(\omega t + \beta) = Q_0' \sin(\omega t + \beta). \quad (27.89)$$

Тут позначено

$$Q_0' = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{i0}^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q}.$$

Рівняння (27.88) без останнього доданка було розглянуто в попередньому параграфі. Без повторення наведених обчислень записуємо рівняння (27.88), маючи на увазі рівність (27.89):

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2q = Q_0 \sin(\omega t + \beta), \quad (27.90)$$

де $Q_0 = \frac{Q_0'}{a}$. Зміст позначень той самий, що і в рівнянні (27.81).

Рівняння (27.90) є диференціальним рівнянням, що описує рух системи в розглянутому випадку. Воно неоднорідне, другого порядку відносно узагальненої координати $q(t)$ зі сталими коефіцієнтами. Відомо, що загальний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі:

$$q = q_1 + q_2, \quad (27.91)$$

де q_1 — загальний розв'язок однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (27.90), тобто загальний розв'язок рівняння (27.81); q_2 — частинний розв'язок рівняння (27.90).

Розглянемо випадок $h < k$. Тоді загальний розв'язок рівняння (27.81) визначається за рівністю (27.85).

Тому

$$q_1 = Ae^{-ht} \sin\left(t\sqrt{k^2 - h^2} + a\right). \quad (27.92)$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння (27.90). Беручи до уваги структуру лівої та правої частини цього рівняння, шукаємо його частинний розв'язок у вигляді

$$q_2 = M \cos(\omega t + \beta) + N \sin(\omega t + \beta), \quad (27.93)$$

де коефіцієнти M та N необхідно підібрати так, щоб функція задовольняла рівняння (27.90).

Знайдемо першу та другу похідні за часом функції (27.93) та підставимо їх у рівняння (27.90). Порівнюючи співмножники при $\sin(\omega t + \beta)$ і $\cos(\omega t + \beta)$ справа та зліва, знайдемо систему двох алгебричних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів M та N :

$$\begin{aligned} -2h\omega M + (k^2 - \omega^2)N &= Q_0, \\ (k^2 - \omega^2)M + 2h\omega N &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо:

$$M = -\frac{2h\omega Q_0}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}, \quad N = \frac{(k^2 - \omega^2)^2 Q_0}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}.$$

На підставі співвідношень (27.91)—(27.93) дійдемо висновку, що рух системи в розглянутому випадку є наслідком складання двох рухів. Один з них, що визначається за формулою (27.92), називається згасаючими коливаннями системи. Цей рух докладно було розглянуто у попередньому параграфі. Другий рух, що визначається за формулою (27.93), називається змушеними коливаннями системи. З часом перший рух, як було встановлено у попередньому параграфі, згасне і рух системи буде описуватися функцією q_2 , тобто це буде змушеними коливаннями системи. Вивчимо цей рух більш докладно. Для цього надамо розв'язку (27.93) більш зручного вигляду.

Нехай

$$M = -D \sin \gamma, \quad N = D \cos \gamma, \quad (27.94)$$

де

$$D = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{Q_0}{k^2} \lambda_d; \quad \lambda_d = \left[(1 - n^2)^2 + 4l^2 n^2 \right]^{-1/2}; \quad (27.95)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = 2 \ln(1 - n^2)^{-1}. \quad (27.96)$$

Величина $n = \frac{\omega}{k}$ — безрозмірна частота; $l = \frac{h}{k}$ — показник згасання;

λ_d — коефіцієнт динамічності системи.

На підставі (27.94) розв'язок (27.93) набирає вигляду

$$q_2 = D \sin(\omega t + \beta - \gamma), \quad (27.97)$$

де величини D та γ визначаються за співвідношеннями (27.95), (27.96) через характеристики системи, середовища, що чинять опір, та збудувальних сил.

З формули (27.97), що визначає закон змушених коливань системи, випливає, що цей рух відбувається із запізненням за фазою на величину γ порівняно з фазою збудувальних сил. З формули (27.96), що визначає це запізнення, випливає, що в разі відсутності сил опору середовища ($\ell = 0$) при $n \neq 1$ запізнення немає.

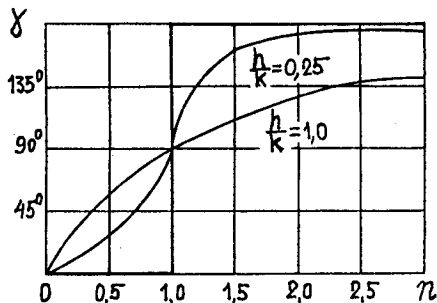


Рис. 27.6

Розглянемо величину γ детальніше. Для цього побудуємо графік функції $\gamma = \gamma(n)$ (рис. 27.6). З графіка видно, що зсув фаз не перевищує π . При $\omega = k$ і $\gamma = \frac{\pi}{2}$ зі зменшенням сил опору $\gamma \rightarrow 0$ при $0 \leq n < 1$, $\gamma \rightarrow \pi$ при $1 < n < \infty$.

Визначимо амплітуду коливань D через порівняння з її значенням при $\ell = 0$:

$$D_0 = D_{\ell=0} = \frac{Q_0}{k^2} \lambda_d^0; \quad \lambda_d^0 = \frac{1}{1-n^2}. \quad (27.98)$$

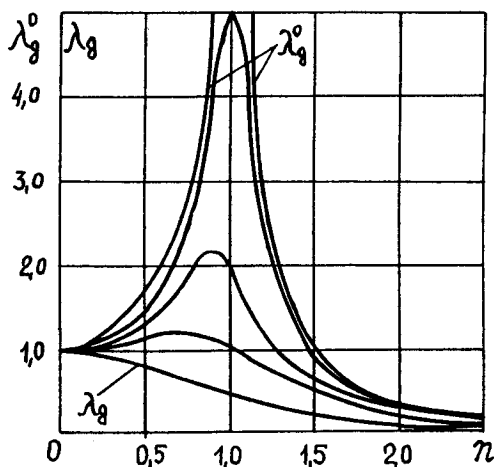


Рис. 27.7

Тут λ_d^0 — коефіцієнт динамічності системи за відсутності сил опору. На рис. 27.7 побудовано графіки функції $\lambda_d(n)$, $\lambda_d^0(n)$. При $n = 1$ графік $\lambda_d^0(n)$ зазнає розриву неперервності — амплітуда необмежено зростає.

Явище необмеженого зростання амплітуди змушених коливань системи називається *резонансом*. Таким чином, резонанс виникає в системах, що не зазнають впливу сил опору при збіжності частот збудувальних сил з частотою власних коливань системи k .

Зазначимо, що λ_d при $n = 1$ має скінченне значення. При $n' = \sqrt{1 - 2l^2}$ величина λ_d досягає найбільшого значення:

$$\lambda_{d\max} = \lambda_d(n') = \frac{1}{2l\sqrt{1-l^2}}.$$

Зі зменшенням сил опору ($l \rightarrow 0$) точка $n' \rightarrow 0$, $\lambda_{\text{дmax}} \rightarrow \infty$. Отже, наявність сил опору істотно змінює характер руху системи. Звертаємо увагу на те, що змушені коливання системи (27.97) визначаються частинним розв'язком рівняння (27.90) і не залежать від початкових умов.

Необхідно зазначити, що диференціальні рівняння (27.68), (27.81) та (27.90), що описують рух системи в околі положення стійкої рівноваги, лінійні відносно шуканих функцій за умови можливості подання функцій T , Π , Φ приблизними квадратичними формами (27.60), (27.63), (27.65). Якщо таке припущення не брати до уваги, то диференціальні рівняння будуть нелінійними відносно узагальнених координат системи. Таким чином, лінеаризація задачі була спричинена необхідністю уникнути математичних труднощів інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь. Проте лінеаризація задачі не завжди виправдана, оскільки лінійні диференціальні рівняння описують механічні явища приблизно і тому не задовольняють високі вимоги точності. Крім того, лінеаризація настільки змінює структуру диференціальних рівнянь, що багато з важливих та цікавих явищ не відображаються цими рівняннями і з самого початку виключаються з комплексу можливих механічних процесів.

27.12. Вільні коливання механічної системи з двома ступенями вільності

Розглянемо консервативну систему з двома ступенями вільності, що рухається в околі положення стійкої рівноваги. Розглянемо рух цієї системи за методом Лагранжа з точністю до величин другого порядку малості.

Рівняння Лагранжа II роду (27.21), що описують рух цієї системи, мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0. \quad (27.99)$$

Тут $L = T - \Pi$ — кінетичний потенціал системи, здобутий на підставі формул (27.60) та (27.63). Беручи до уваги симетрію коефіцієнтів $a_{12} = a_{21}$, $c_{12} = c_{21}$, знаходимо

$$L = \frac{1}{2} \left(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2 \right) - \frac{1}{2} \left(c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2 \right). \quad (27.100)$$

Тут і далі індекс "0" опускаємо в позначеннях a_{jk}^0 , c_{jk}^0 , b_{jk}^0 . Підставляємо вираз (27.100) у рівняння (27.99) та після елементарних перетворень знаходимо диференціальне рівняння руху системи:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} \dot{q}_1 + c_{12} \dot{q}_2 &= 0; \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} \dot{q}_1 + c_{22} \dot{q}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (27.101)$$

Рівняння (27.101) — система двох лінійних однорідних рівнянь другого порядку відносно узагальнених координат системи q_1 та q_2 зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок цієї системи шукаємо у вигляді

$$q_1 = A \sin(kt + \alpha), \quad q_2 = B \sin(kt + \alpha), \quad (27.102)$$

де A , B , k , α — сталі, які необхідно підбирати так, щоб розв'язок (27.102) задовольняв диференціальне рівняння (27.101) та задані початкові умови. Підставляючи розв'язок (27.102) у рівняння (27.101), знайдемо:

$$\begin{aligned} (-a_{11}k^2 + c_{11})A + (-a_{12}k^2 + c_{12})B &= 0; \\ (-a_{21}k^2 + c_{21})A + (-a_{22}k^2 + c_{22})B &= 0. \end{aligned} \quad (27.103)$$

Рівності (27.103) — система двох однорідних алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів A і B . Ця система має ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a_{11}k^2 + c_{11} & -a_{12}k^2 + c_{12} \\ -a_{21}k^2 + c_{21} & -a_{22}k^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (27.104)$$

Рівняння (27.104) є алгебричним рівнянням другого ступеня відносно k^2 і називається *характеристичним рівнянням* системи (27.101). Запишемо його у вигляді

$$b_0 + b_1 k^2 + b_2 k^4 = 0, \quad (27.105)$$

де $b_0 = c_{11}c_{12} - c_{12}^2$; $b_1 = 2a_{12}c_{12} - a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}$; $b_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

З рівняння (27.105) випливає, що корені k_1^2 та k_2^2 є функціями коефіцієнтів інерції a_{jk} та коефіцієнтів пружності c_{jk} . Можна довести, що у даному випадку обидва корені додатні¹. Якщо вони були б від'ємними, то k_1 і k_2 були б уявними або комплексними. Проте тоді б на підставі рівняння (27.102)

$$\begin{aligned} q_1 &= A \sin(ikt + \alpha) = A (\sin ikt \cos \alpha + \cos ikt \sin \alpha) = \\ &= A (ishkt \cos \alpha + chkt \sin \alpha). \end{aligned}$$

¹ Більш докладно див.: Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. II. — М.: Наука, 1977. — С. 233—234.

Аналогічно

$$q_2 = B(\text{ishkt} \cos \alpha + \text{chkt} \sin \alpha),$$

де shkt та chkt — необмежені функції. Таким чином, цей розв'язок суперечив би початковому припущенню, що координати q_1 та q_2 є малими.

Розв'язком рівняння (27.105) є дві пари коренів $\pm k_1$, $\pm k_2$. Покажемо, що частинний розв'язок (27.102), який має $+k_1$, лінійно виражається через частинний розв'язок, що має $-k_1$. Дійсно, оскільки величина α не вибрана, надамо їй значення $\alpha = \pi - \alpha'$. Тоді

$$\sin(k_1 t + \alpha) \sin[\pi - (-k_1 t + \alpha')] = \sin(-k_1 t + \alpha').$$

Загальний розв'язок системи (27.101) є комбінацією незалежних частинний розв'язків, тому надалі враховуємо тільки два корені, що є додатними. Величини $+k_1$, $+k_2$ називаються *головними частотами системи*.

Надалі припускаємо, що $k_1 \neq k_2$, при цьому $k_1 < k_2$, k_1 — частота основного тону.

Якщо в систему (27.103) підставити значення $+k_1$, то одне з рівнянь цієї системи буде висновком другого, оскільки визначник системи перетворюється в нуль. Таким чином, із системи (27.103) можна лише визначити відношення коефіцієнтів A і B . Дістанемо

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{a_{11}k_1^2 - c_{11}}{-a_{12}k_1^2 + c_{12}} = c_1, \quad \frac{B_2}{A_2} = \frac{a_{11}k_2^2 - c_{11}}{-a_{12}k_2^2 + c_{12}} = c_2. \quad (27.106)$$

Величини c_1 та c_2 називаються *коефіцієнтами розподілу*.

З рівностей (27.106) знаходимо зв'язок між шуканими коефіцієнтами, що відповідають різним частотам:

$$B_1 = c_1 A_1, \quad B_2 = c_2 A_2. \quad (27.107)$$

Частинний розв'язок (27.102), що відповідає частоті основного тону k_1 ,

$$q'_1 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad q'_2 = B_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) \quad (27.108)$$

визначає ту частину руху системи, що називається *першим головним коливанням системи*.

Частинний розв'язок

$$q_1^2 = A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad q_2^2 = B_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) \quad (27.109)$$

є *другим головним коливанням системи*. Повний рух системи визначається загальним розв'язком системи (27.101), який є сумою незалежних частинних розв'язків:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1' + q_1^2 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ q_2 &= q_2' + q_2^2 = c_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + c_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (27.110)$$

При складанні функції q_2 використані співвідношення (27.108). Сталі $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ визначаються за початковими умовами руху системи: при $t = 0$

$$q_1(0) = q_{10}; \quad q_2(0) = q_{20}; \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_{10}; \quad \dot{q}_2(0) = \dot{q}_{20}.$$

За початковими умовами складаються чотири рівняння для визначення сталих.

З рівностей (27.110) випливає, що рух консервативної системи в околі положення стійкої рівноваги є наслідком накладання гармонічних рухів, що мають різні частоти. Такий рух системи називається *вільними коливаннями системи*.

27.13. Головні координати механічної системи

Головними координатами механічної системи називаються такі узагальнені координати θ_α , в яких вирази кінетичної та потенціальної енергії системи набувають канонічного вигляду:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S t_\alpha \dot{\theta}_\alpha^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^S \Pi_\alpha \theta_\alpha^2. \quad (27.111)$$

Задача пошуку головних координат є *узагальненою задачею аналітичної геометрії*: знайти таке перетворення узагальнених координат q_j до координат θ_α , за якого одночасно дві квадратичні форми

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^S c_{jk} q_j q_k \quad (27.112)$$

набувають канонічного вигляду (27.111).

Якщо для консервативної системи знайти головні координати, то рівняння Лагранжа II роду, що описують рух системи в цих координатах, розкладаються на сукупність S незалежних рівнянь другого порядку відносно цих координат.

Дійсно, рівняння Лагранжа II роду відносно координат θ_α мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, \dots, S), \quad (27.113)$$

де $L = T - \Pi$.

Маючи на увазі вираз (27.111), знаходимо:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_\alpha} = t_\alpha \dot{\theta}_\alpha; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_\alpha} = -\Pi \theta_\alpha. \quad (27.114)$$

Рівності (27.114) підставляємо в рівняння (27.113). Після очевидних перетворень матимемо сукупність S незалежних рівнянь другого порядку відносно θ_α :

$$\ddot{\theta}_\alpha + \lambda_\alpha^2 \theta_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, S), \quad (27.115)$$

де $\lambda_\alpha^2 = \frac{\Pi_\alpha}{t_\alpha}$.

Механічна система, рух якої описується диференціальним рівнянням, що має вигляд $\ddot{\theta} + \lambda^2 \theta = 0$, називається гармонічним осцилятором.

Маючи на увазі структуру рівнянь (27.115), робимо висновок, що розглянута система подана сукупністю S гармонічних осциляторів.

Наведемо один з можливих способів знаходження головних координат. Розглянемо функції

$$\theta_1 = q'_1 = A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1), \quad \theta_2 = q'_2 = A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) \quad (27.116)$$

у формулах (27.106), (27.109). Доведемо, що вони є головними координатами консервативної системи з двома ступенями вільності, що рухається в малому околі положення стійкої рівноваги, тобто доведемо, що кінетична та потенціальна енергії системи в цих координатах визначаються за формулами

$$T = \frac{1}{2} \left(t_1 \dot{\theta}_1^2 + t_2 \dot{\theta}_2^2 \right); \quad \Pi = \frac{1}{2} \left(\Pi_1 \theta_1^2 + \Pi_2 \theta_2^2 \right). \quad (27.117)$$

Рівності (27.110) на підставі позначень (27.116) набирають вигляду

$$q_1 = \theta_1 + \theta_2; \quad q_2 = c_1 \theta_1 + c_2 \theta_2. \quad (27.118)$$

Підставляючи ці вирази у співвідношення

$$T = \frac{1}{2} \left(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2 \right);$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + a_{22} q_2^2 \right),$$

знайдемо

$$T = \frac{1}{2} \left(t_1 \dot{\theta}_1^2 + t_2 \dot{\theta}_2^2 + 2t_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right);$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(\Pi_1 \theta_1^2 + \Pi_2 \theta_2^2 + 2\Pi_3 \theta_1 \theta_2 \right),$$
(27.119)

де t_α , Π_α виражаються через a_{jk} , c_{jk} і c_1 , c_2 . Пропонуємо самостійно знайти аналітичні вирази цих величин.

Рівняння Лагранжа II роду відносно координат θ_1 та θ_2 мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0,$$
(27.120)

де $L = T - \Pi$.

Підставляючи в рівняння (27.120) вирази (27.119), матимемо:

$$t_1 \ddot{\theta}_1 + t_3 \ddot{\theta}_2 + \Pi_1 \theta_1 + \Pi_3 \theta_2 = 0;$$

$$t_3 \ddot{\theta}_1 + t_2 \ddot{\theta}_2 + \Pi_3 \theta_1 + \Pi_2 \theta_2 = 0.$$
(27.121)

На підставі рівностей (27.116) знаходимо:

$$\ddot{\theta}_1 = -k_1^2 \theta_1, \quad \ddot{\theta}_2 = -k_2^2 \theta_2;$$
(27.122)

тоді рівняння (27.121) можна подати в такому вигляді:

$$(-t_1 k_1^2 + \Pi_1) \theta_1 + (-t_3 k_2^2 + \Pi_3) \theta_2 = 0;$$

$$(-t_3 k_1^2 + \Pi_3) \theta_1 + (-t_2 k_2^2 + \Pi_2) \theta_2 = 0.$$
(27.123)

Оскільки функції θ_1 та θ_2 лінійно незалежні, то рівності (27.123) мають місце, якщо співмножники при цих функціях дорівнюють нулю:

$$-t_1 k_1^2 + \Pi_1 = 0; \quad -t_2 k_2^2 + \Pi_2 = 0;$$
(27.124)

$$-t_3 k_2^2 + \Pi_3 = 0; \quad -t_3 k_1^2 + \Pi_3 = 0.$$
(27.125)

З рівностей (27.124) знаходимо:

$$k_1^2 = \frac{\Pi_1}{t_1}; \quad k_2^2 = \frac{\Pi_2}{t_2}.$$
(27.126)

Ці співвідношення визначають головні частоти системи при описанні її руху в головних координатах. Через безпосередні розрахунки можна переко-

натися в тому, що вони збігаються з тими значеннями головних частот, які є коренями рівняння частот (27.105). Цей збіг показує, що головні частоти системи є такими її характеристиками, які не залежать від вибору узагальнених координат, тобто від способу описання її руху. З рівностей (27.125) маємо

$$t_3(k_1^2 - k_2^2) = 0.$$

Згідно з припущенням $k_1^2 \neq k_2^2$ робимо висновок, що $t_3 = 0$. Тому і $\Pi_3 = 0$. У цьому випадку рівність (27.119) набуває канонічного вигляду (27.117), а рівняння Лагранжа II роду (27.121) розкладаються на два незалежних рівняння відносно θ_1 та θ_2 . Через те θ_1 та θ_2 є головними координатами системи.

Таким чином, запропонований спосіб знаходження головних координат системи з двома ступенями вільності полягає в такому. Вибираємо довільні узагальнені координати q_1 та q_2 і визначаємо закон зміни їх за часом шляхом інтегрування рівнянь Лагранжа II роду консервативної системи. Далі з рівнянь (27.118) знаходимо головні координати системи:

$$\theta_1 = \frac{q_2 - c_2 q_1}{c_1 - c_2}, \quad \theta_2 = \frac{c_1 q_1 - q_2}{c_1 - c_2}. \quad (27.127)$$

У параграфі 27.16 будуть наведені приклади, що ілюструють викладену теорію.

27.14. Вільні згасаючі коливання механічної системи з двома ступенями вільності

Розглянемо механічну систему з двома ступенями вільності, що рухається в малому околі положення стійкої рівноваги під дією потенціальних сил

$$\vec{F}_i^{(n)} = -\overline{\text{grad}}_i \Pi$$

та сил опору, пропорційних першому ступеню швидкості точок системи,

$$\vec{F}_i^{(o)} = -\alpha_i \vec{V}_i,$$

де α_i — коефіцієнт пропорційності, що визначається експериментально.

Визначимо рух системи за методом Лагранжа з точністю до величини другого порядку малості. Рівняння Лагранжа II роду, що описують рух цієї системи, мають вигляд (27.30).

Подамо ці рівняння для системи з двома ступенями вільності:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_2}. \quad (27.128)$$

Тут $L = T - \Pi$ — кінетичний потенціал системи, що визначається за формулами (27.60) та (27.63); Φ — дисипативна функція, що визначається за формулою (27.65). Ці формули записуємо для системи з двома ступенями вільності, опускаючи індекс “0” в позначеннях коефіцієнтів a_{jk}^0 , c_{jk}^0 , b_{jk}^0 , а також беручи до уваги їх симетрію відносно індексів j і k , тобто рівності $a_{12} = a_{21}$, $c_{12} = c_{21}$, $b_{12} = b_{21}$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2 \right); \\ \Pi &= \frac{1}{2} \left(c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + c_{22} q_2^2 \right); \\ \Phi &= \frac{1}{2} \left(b_{11} \dot{q}_1^2 + 2b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_{22} \dot{q}_2^2 \right), \end{aligned} \quad (27.129)$$

де a_{jk} , c_{jk} , b_{jk} — сталі величини.

На підставі цих рівностей обчислюємо похідні, що входять у рівняння (27.128):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11} \dot{q}_1 + a_{12} \dot{q}_2, & \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -(c_{11} q_1 + c_{12} q_2); \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = a_{21} \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2, & \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -(c_{21} q_1 + c_{22} q_2); \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} &= b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2, & \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} &= b_{21} \dot{q}_1 + b_{22} \dot{q}_2. \end{aligned}$$

Підставляючи ці похідні в рівняння (27.128), дістанемо диференціальні рівняння руху системи:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + b_{11} \dot{q}_1 + b_{12} \dot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= 0; \\ a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + b_{21} \dot{q}_1 + b_{22} \dot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (27.130)$$

Маємо систему двох однорідних диференціальних рівнянь другого порядку відносно q_1 та q_2 зі сталими коефіцієнтами.

Частинний розв'язок системи (27.130) шукаємо у вигляді

$$q_1 = Ae^{\lambda t}, \quad q_2 = Be^{\lambda t}. \quad (27.131)$$

Тут A , B , λ — сталі величини, які необхідно підбирати так, щоб задовольнялися рівняння (27.130) та задані початкові умови.

Диференціюємо функції (27.131) двічі за часом і підставляємо ці похідні в рівняння (27.130). Знаходимо систему двох однорідних алгебричних рівнянь відносно величин A та B :

$$\begin{aligned} (a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11})A + (a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12})B &= 0; \\ (a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21})A + (a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22})B &= 0. \end{aligned} \quad (27.132)$$

Ця система має розв'язок, відмінний від нуля, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (27.133)$$

Якщо розкрити цей визначник, то матимемо алгебричне рівняння четвертого ступеня відносно λ з дійсними коефіцієнтами. Воно називається *характеристичним рівнянням* системи (27.130).

З курсу вищої алгебри відомо, що корені такого рівняння або дійсні від'ємні числа $\lambda = -h$ ($h > 0$), або комплексно спряжені з від'ємними дійсними частинами $\lambda = -h \pm in$ ($h > 0$).

Дійсним від'ємним кореням відповідають частинні розв'язки

$$q = Ae^{-ht},$$

що описують аперіодичний рух, який має місце при великому опорі середовища. Комплексним кореням характеристичного рівняння відповідають частинні розв'язки

$$q = Ae^{-ht} \sin(nt + \alpha),$$

які описують згасаючі коливання системи, що мають місце при незначному опорі середовища. В окремих випадках можливі корені суто уявні. Цим кореням відповідають частинні розв'язки

$$q = A \sin(nt + \alpha),$$

що описують гармонічні коливання, які мають місце при частковому розсіюванні енергії.

Практично в системах сили опору малі порівняно з іншими силами. У цьому випадку при повному, а іноді і при частковому розсіюванні енергії всі корені характеристичного рівняння будуть комплексно спряжені з від'ємними дійсними частинами:

$$\lambda_{1,2} = -h \pm in_1, \lambda_{3,4} = -h_2 \pm in_2.$$

Тоді загальний розв'язок системи (27.130) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1^{(1)} e^{-h_1 t} \sin(n_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} e^{-h_2 t} \sin(n_2 t + \alpha_2); \\ q_2 &= B_1^{(1)} e^{-h_1 t} \sin(n_1 t + \alpha_1) + B_1^{(2)} e^{-h_2 t} \sin(n_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (27.133)$$

У цих рівняннях з чотирьох величин $A_1^{(1)}$, $A_1^{(2)}$, $B_1^{(1)}$, $B_1^{(2)}$ довільними є тільки дві; дві інші визначаються з рівнянь (27.132) так само, як при розгляданні вільних коливань системи з двома ступенями вільності.

Приклади, що ілюструють викладену теорію, буде наведено в параграфі 27.16.

27.15. Змушені коливання механічної системи з двома ступенями вільності. Динамічний гаситель змушених коливань

Розглянемо механічну систему з двома ступенями вільності, що рухається в малому околі положення стійкої рівноваги під дією потенціальних сил

$$\vec{F}_i^{(n)} = -\overline{\text{grad}}_i \Pi \quad (27.134)$$

та збурювальних сил

$$\vec{F}_i^{(s)} = \vec{F}_{i0}^{(s)} = \vec{F}_{i0}^{(s)}(q_1, q_2) \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (27.135)$$

де $\vec{F}_{i0}^{(s)}(q_1, q_2)$ — амплітуда збурювальної сили, що діє на точку з номером i ; ω , ε — частота та початкова фаза збурювальної сили.

Вивчимо рух системи за методом Лагранжа з точністю до величин другого порядку малості, нехтуючи силами опору середовища. Оскільки збурювальні сили не потенціальні, то рівняння Лагранжа II роду, що описують рух системи, мають вигляд (27.25). Подамо ці рівняння для системи з двома ступенями вільності:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1^{(s)}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = Q_2^{(s)}, \quad (27.136)$$

де $Q_1^{(s)}$, $Q_2^{(s)}$ — узагальнені збурювальні сили, що відповідають узагальненим координатам q_1 і q_2 .

На підставі визначення узагальнених сил [див. формулу (27.3)] і рівності (27.135) знаходимо:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{(a)} &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_1^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_{iO}^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) \sin(\omega t + \varepsilon) = H_1 \sin(\omega t + \varepsilon); \\
 Q_2^{(a)} &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_1^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} = \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_{iO}^{(a)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \right) \sin(\omega t + \varepsilon) = H_2 \sin(\omega t + \varepsilon).
 \end{aligned}
 \tag{27.137}$$

Тут позначено

$$H_1 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iO}^{(a)} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1}, \quad H_2 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iO}^{(a)} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2}.$$

У рівняннях (27.136) функція Лагранжа L визначається за формулами:

$$\begin{aligned}
 L &= T - \Pi, \quad T = \frac{1}{2} \left(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2 \right); \\
 \Pi &= \frac{1}{2} \left(c_{11} q_1^2 + 2c_{12} q_1 q_2 + a_{22} q_2^2 \right).
 \end{aligned}
 \tag{27.138}$$

Підставляючи формули (27.137) і (27.138) у рівняння (27.136), знаходимо диференціальне рівняння руху системи:

$$\begin{aligned}
 a_{11} \ddot{q}_1 + a_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 &= H_1 \sin(\omega t + \varepsilon); \\
 a_{21} \ddot{q}_1 + a_{22} \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 &= H_2 \sin(\omega t + \varepsilon).
 \end{aligned}
 \tag{27.139}$$

Рівності (27.139) — система двох неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку відносно q_1 та q_2 зі сталими коефіцієнтами. Як відомо з курсу математики, загальний розв'язок системи (27.139) є сумою загального розв'язку відповідної системи однорідних диференціальних рівнянь та частинного розв'язку системи (27.139). Система однорідних диференціальних рівнянь, що відповідає системі (27.139), була знайдена та розглянута в параграфі 27.12 [рівняння (27.101)]. Загальний розв'язок цієї системи визначається рівністю (27.110). Вона описує ту частину руху системи, яка називається вільними коливаннями системи.

Знайдемо частинний розв'язок системи (27.139) у вигляді

$$q_1 = M \sin(\omega t + \varepsilon), \quad q_2 = N \sin(\omega t + \varepsilon), \tag{27.140}$$

де M та N необхідно підбирати так, щоб функції (27.140) задовольняли систему (27.139). Визначимо похідні функцій (27.140) та підставимо їх у рівняння (27.139). Порівнюючи співмножники при $\sin(\omega t + \varepsilon)$ у лівій та правій частинах, маємо систему двох неоднорідних алгебричних рівнянь відносно M та N :

$$\begin{aligned}(c_{11} - \omega^2 a_{11})M + (c_{12} - \omega^2 a_{12})N &= H_1; \\ (c_{21} - \omega^2 a_{21})M + (c_{22} - \omega^2 a_{22})N &= H_2.\end{aligned}\tag{27.141}$$

Розв'язуємо систему за правилом Крамера:

$$M = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad N = \frac{\Delta_2}{\Delta};\tag{27.142}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} - \omega^2 a_{12} \\ c_{21} - \omega^2 a_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} \end{vmatrix} = (c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2; \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} H_1 & c_{12} - \omega^2 a_{12} \\ H_2 & c_{22} - \omega^2 a_{22} \end{vmatrix} = H_1(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - H_2(c_{12} - \omega^2 a_{12}); \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & H_1 \\ c_{21} - \omega^2 a_{21} & H_2 \end{vmatrix} = H_2(c_{11} - \omega^2 a_{11}) - H_1(c_{21} - \omega^2 a_{21}).\end{aligned}\tag{27.143}$$

Тут взято до уваги симетрію коефіцієнтів $a_{12} = a_{21}$, $c_{12} = c_{21}$. На підставі співвідношень (27.142) та (27.143) визначаємо:

$$\begin{aligned}M &= \frac{H_1(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - H_2(c_{12} - \omega^2 a_{12})}{(c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2}; \\ N &= \frac{H_2(c_{11} - \omega^2 a_{11}) - H_1(c_{21} - \omega^2 a_{21})}{(c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2}.\end{aligned}\tag{27.144}$$

За рівностями (27.110), (27.140) знаходимо загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (27.139):

$$\begin{aligned}q_1 &= A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) + M \sin(\omega t + \varepsilon); \\ q_2 &= c_1 A_1 \sin(k_1 t + \alpha_1) + c_2 A_2 \sin(k_2 t + \alpha_2) + N \sin(\omega t + \varepsilon).\end{aligned}\tag{27.145}$$

Сталі інтегрування A_1 , A_2 , α_1 , α_2 визначаються з початкових умов задачі при $t = 0$

$$q_1(0) = q_{10}, \quad q_2(0) = q_{20}, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_{10}, \quad \dot{q}_2(0) = \dot{q}_{20}.$$

Приклади цього визначення буде розглянуто в параграфі 27.16.

З рівностей (27.145) випливає, що рух системи є наслідком складання двох рухів. Один з них, як було сказано раніше, називається вільними коливаннями системи і визначається загальним розв'язком системи однорідних диференціальних рівнянь, що відповідають системі (27.139), тобто функції (27.110). Другий рух називається змушеними коливаннями системи. Він визначається частинним розв'язком системи (27.139), тобто функціями (27.140), де амплітуди змушених коливань M та N визначаються через характеристики системи a_{jk} , c_{jk} та характеристики збурювальних сил H_i , ω^2 за рівностями (27.144). З цього випливає, що змушені коливання не залежать від початкових умов і визначаються тільки характеристиками системи та збурювальних сил.

Із формул (27.144) випливає, що амплітуди змушених коливань системи M та N мають скінченне значення тільки тоді, коли частота збурювальної сили ω не збігається з жодною з головних частот системи k_1 та k_2 .

Щоб переконатися в цьому, записуємо знаменник рівнянь (27.144) у вигляді

$$\Delta = (c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2 = b_0 + b_1 \omega^2 + b_2 \omega^4, \quad (27.146)$$

де $b_0 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2$; $b_1 = 2a_{12}c_{12} - a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}$; $b_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Порівнюючи одержаний вираз із лівою частиною рівняння частот (27.105), робимо висновок, що вираз (27.146) є квадратичним багаточленом відносно ω^2 , а коренями цього багаточлена є квадрати головних частот системи k_1^2 та k_2^2 . Тому вираз (27.146) можна подати у вигляді

$$\Delta = b_2 \left(\omega^4 + \frac{b_1}{b_2} \omega^2 + \frac{b_0}{b_2} \right) = b_2 (\omega^2 - k_1^2)(\omega^2 - k_2^2).$$

Звідси випливає, що при $\omega = k_1$ або $\omega = k_2$ величина Δ перетворюється в нуль, а амплітуди M та N — у нескінченність. Має місце явище резонансу. Відповідні частоти збурювальних сил називаються *критичними*.

У разі резонансу функції (27.140) не є частинними розв'язками рівняння (27.139). Щоб знайти частинний розв'язок цих рівнянь у випадку резонансу, доцільно перейти до головних координат системи θ_α . Знайдемо узагальнені збурювальні сили Q_{10} та Q_{20} відповідно до головних координат системи θ_1 та θ_2 . З формули (27.127) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} &= \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_1} \frac{c_2}{c_2 - c_1} - \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_2} \frac{c_1}{c_2 - c_1}; \\ \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} &= \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial q_2} = -\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_1} \frac{1}{c_2 - c_1} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_2} \frac{1}{c_2 - c_1}. \end{aligned}$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (27.137), дістанемо:

$$\begin{aligned} Q_1^{(s)} &= \frac{1}{c_2 - c_1} \left(c_2 \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(s)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_1} - c_1 \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(s)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_2} \right); \\ Q_2^{(s)} &= \frac{1}{c_2 - c_1} \left(-\sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(s)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_1} + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(s)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_2} \right). \end{aligned} \quad (27.147)$$

Узагальнені збурювальні сили, що відповідають координатам θ_1 та θ_2 , на підставі формули (27.3) визначаються за рівностями:

$$Q_{10} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(s)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_1}; \quad Q_{20} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i^{(s)} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \theta_2}. \quad (27.148)$$

Рівності (27.147) на підставі цих позначень набирають вигляду:

$$\begin{aligned} Q_1^{(s)} &= \frac{1}{c_2 - c_1} (c_2 Q_{10} - c_1 Q_{20}); \\ Q_2^{(s)} &= \frac{1}{c_2 - c_1} (-Q_{10} + Q_{20}). \end{aligned} \quad (27.149)$$

Розв'язуючи цю систему алгебричних рівнянь відносно Q_{10} і Q_{20} та беручи до уваги співвідношення (27.137), знаходимо:

$$\begin{aligned} Q_{10} &= Q_1^{(s)} + c_1 Q_2^{(s)} = (H_1 + c_1 H_2) \sin(\omega t + \varepsilon); \\ Q_{20} &= Q_1^{(s)} + c_2 Q_2^{(s)} = (H_1 + c_2 H_2) \sin(\omega t + \varepsilon). \end{aligned}$$

Кінетична та потенціальна енергії системи в головних координатах визначаються за рівностями:

$$T = \frac{1}{2} \left(t_1 \dot{\theta}_1^2 + t_2 \dot{\theta}_2^2 \right); \quad \Pi = \frac{1}{2} (\Pi_1 \theta_1^2 + \Pi_2 \theta_2^2).$$

Рівняння Лагранжа II роду в координатах θ_1 та θ_2 мають вигляд:

$$\begin{aligned} t_1 \ddot{\theta}_1 + \Pi_1 \theta_1 &= (H_1 + c_1 H_2) \sin(\omega t + \varepsilon); \\ t_2 \ddot{\theta}_2 + \Pi_2 \theta_2 &= (H_1 + c_2 H_2) \sin(\omega t + \varepsilon), \end{aligned}$$

або

$$\ddot{\theta}_1 + k_1^2 \theta_1 = \frac{H_1 + c_1 H_2}{t_1} \sin(\omega t + \varepsilon); \quad (27.150)$$

$$\ddot{\theta}_1 + k_2^2 \theta_2 = \frac{H_1 + c_2 H_2}{t_2} \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (27.151)$$

де $k_1^2 = \frac{\Pi_1}{t_1}$, $k_2^2 = \frac{\Pi_2}{t_2}$ — головні частоти системи.

З теорії інтегрування диференціальних рівнянь вигляду (27.150), (27.151) відомо, що при $\omega = k_1$ частинний розв'язок рівняння (27.150) такий:

$$\theta_1 = -\frac{H_1 + c_1 H_2}{2\omega t_1} t \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (27.152)$$

Частинний розв'язок рівняння (27.151) визначається при цьому звичайним способом:

$$\theta_2 = \frac{H_1 + c_2 H_2}{t_2 (k_2^2 - \omega^2)} \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (27.153)$$

На підставі розв'язків (27.152), (27.153) знайдемо частинний розв'язок диференціальних рівнянь (27.139) у випадку резонансу в звичайних координатах q_1 та q_2 . Застосовуючи співвідношення (27.118), знаходимо при $\omega = k_1$:

$$\begin{aligned} q_1 = \theta_1 + \theta_2 &= -\frac{H_1 + c_1 H_2}{2\omega t_1} t \cos(\omega t + \varepsilon) + \frac{H_1 + c_2 H_2}{t_2 (k_2^2 - \omega^2)} \sin(\omega t + \varepsilon); \\ q_2 = c_1 \theta_1 + c_2 \theta_2 &= -\frac{(H_1 + c_1 H_2) c_1}{2\omega t_1} t \cos(\omega t + \varepsilon) + \frac{(H_1 + c_2 H_2) c_2}{t_2 (k_2^2 - \omega^2)} \sin(\omega t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (27.154)$$

Аналогічно при $\omega = k_2$ дістанемо:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{H_1 + c_1 H_2}{t_1 (k_1^2 - \omega^2)} \sin(\omega t + \varepsilon) - \frac{H_1 + c_2 H_2}{2\omega t_2} t \cos(\omega t + \varepsilon); \\ q_2 &= \frac{(H_1 + c_1 H_2) c_1}{t_1 (k_1^2 - \omega^2)} \sin(\omega t + \varepsilon) - \frac{(H_1 + c_2 H_2) c_2}{2\omega t_2} t \cos(\omega t + \varepsilon). \end{aligned} \quad (27.155)$$

З рівностей (27.154) та (27.155) випливає, що при критичних частотах збурювальних сил узагальнені координати q_1 та q_2 необмежено зростають, що відповідає явищу резонансу.

На закінчення розглянемо механічну систему, в якій одна збурювальна сила дорівнює нулю. Нехай, наприклад, $Q_2^{(a)} = H_2 \sin(\omega t + \varepsilon) = 0$. Ця рівність має виконуватися в будь-який момент часу. Таким чином, вона може мати місце, якщо $H_2 = 0$. Амплітуди змушених коливань для цього випадку знаходимо з рівнянь (27.144), взявши в них $H_2 = 0$:

$$M = \frac{H_1 (c_{22} - \omega^2 a_{22})}{(c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2};$$

$$N = -\frac{H_1 (c_{21} - \omega^2 a_{21})}{(c_{11} - \omega^2 a_{11})(c_{22} - \omega^2 a_{22}) - (c_{12} - \omega^2 a_{12})^2}.$$

З цих рівностей випливає, що підбором параметрів системи можна добитися перетворення в нуль однієї з амплітуд. Наприклад, за умови $\omega^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}}$ перетворюється в нуль амплітуда M , тобто гасяться змушені коливання, що описуються координатою q_1 .

На цьому принципі побудована теорія динамічних гасителів змушених коливань. Ілюструє цю теорію приклад 27.15, розглянутий в наступному параграфі.

27.16. Методика та приклади розв'язання задач з теорії малих коливань механічної системи з одним і двома ступенями вільності

Задачі з теорії малих коливань системи з одним ступенем вільності у загальній постановці рекомендується розв'язувати у такій послідовності.

1) вибрати механічну систему та переконатися в тому, що вона має один ступінь вільності;

2) вибрати довільну узагальнену координату та знайти відповідну до неї потенціальну енергію;

3) знайти положення системи, в якому значення потенціальної енергії буде мінімальним, тобто знайти положення стійкої рівноваги системи, в околі якої система здійснює малі коливання. Зазначимо, що в деяких випадках положення стійкої рівноваги є очевидним, а в деяких необхідно визначити співвідношення між параметрами системи, за якого зазначене положення рівноваги буде стійким;

4) вибрати нову узагальнену координату, відлічуючи її від положення стійкої рівноваги. Записати рівняння Лагранжа II роду відносно цієї координати;

5) знайти вираз потенціальної та кінетичної енергії, дисипативної функції системи з точністю до величин другого порядку малості відносно нової узагальної координати та узагальної швидкості;

6) знаючи збудувальні сили, що діють на точки системи, визначити узагальнену збудувальну силу;

7) підставити величини, знайдені при виконанні п. 5 та 6, у рівняння Лагранжа II роду. Спростити та проінтегрувати це рівняння, його розв'язок підпорядкувати початковим умовам;

8) проаналізувати одержані результати.

Приклад 27.1. На тіло масою m , прикріплене до пружини з коефіцієнтом жорсткості γ (Н/м), діє збудувальна сила $Q^{(a)} = H \sin \rho t$ (Н) та сила опору $\vec{R} = -\alpha \vec{V}$ (Н), де \vec{V} — швидкість тіла. В початковий момент тіло перебувало у положенні статичної рівноваги і не мало початкової швидкості. Знайти

рівняння руху тіла, якщо $\gamma > \frac{\alpha^2}{4m}$.

Розв'язання. Зробимо такі припущення: 1) тіло рухається поступально вздовж вертикальної осі пружини; 2) матеріал пружини підпорядковується закону Гука (сила пружності пропорційна першому ступеню деформації пружини); 3) масою пружини порівняно з масою тіла можна знехтувати.

Розв'язуємо задачу, дотримуючись зазначеної вище послідовності.

1. Дана система, складена з вантажу та пружини, за припущенням 1 має один ступінь вільності, оскільки одне обмеження перетворює її в нерухому систему.

2. За узагальнену координату візьмемо координату y центра ваги вантажу C , відлічуємо її від кінця пружини, що закріплена (рис. 27.8). Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії пружини Π_p та потенціальної енергії вантажу Π_b :

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_b. \quad (1)$$

Потенціальна енергія, як відомо, визначається з точністю до сталої за формулою (27.53)

$$\Pi = -\int dA + \text{const}, \quad (2)$$

де dA — елементарна робота потенціальної сили.

Сила пружності пружини є потенціальною центральною силою, елементарна робота якої

$$dA = -\gamma(y - l_0) dy, \quad (3)$$

де l_0 — довжина недеформованої пружини.

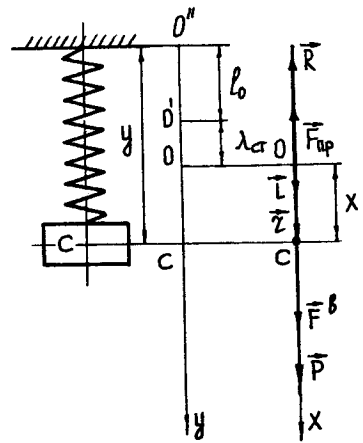


Рис. 27.8

Сила ваги також є потенціальною силою. При вибраному напрямі осі Oy її елементарна робота визначається за формулою

$$dA = P_y dy = P dy. \quad (4)$$

Зазначимо, що знак у правій частині рівності (3) зберігається у випадку як розтягнутої, так і стисненої пружини.

Підставляючи вираз (3) у рівняння (2), знаходимо потенціальну енергію пружини:

$$\Pi_{\text{п}} = \frac{\gamma}{2}(y - l_0)^2 + \text{const}. \quad (5)$$

Аналогічно на підставі рівнянь (2) та (4) знаходимо потенціальну енергію вантажу:

$$\Pi_{\text{в}} = -Py + \text{const}. \quad (6)$$

Тоді потенціальна енергія системи набирає вигляду

$$\Pi = \frac{\gamma}{2}(y - l_0)^2 - Py + \text{const}. \quad (7)$$

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (7):

$$\frac{d\Pi}{dy} = \gamma(y - l_0) - P = 0 \Rightarrow y_1 = l_0 + \frac{P}{\gamma}.$$

Таким чином, система має тільки одне положення рівноваги, що визначається координатою y_1 . Величину $\lambda_{\text{ст}} = \frac{P}{\gamma}$, як відомо, називають статичною деформацією пружини, а положення вантажу, що визначається координатою y_1 , — положенням статичної рівноваги. Переконаємося, що це положення є положенням стійкої рівноваги, якщо жорсткість пружини γ є додатною величиною (випадки $\gamma < 0$ мають місце у техніці). Дійсно, $\frac{d^2\Pi}{dy^2} = \gamma$, якщо $\gamma > 0$,

тоді $\left. \frac{d^2\Pi}{dy^2} \right|_{y_1} > 0$.

Таким чином, положення вантажу, що визначається координатою y_1 , є положенням стійкої рівноваги системи.

4. Положення стійкої рівноваги системи O беремо за початок відліку нової узагальненої координати x (див. рис. 27.8).

5. Знайдемо вираз потенціальної енергії системи у вигляді функції x на підставі рівняння $y = l_0 + \lambda_{\text{ст}} + x$:

$$\Pi = \frac{\gamma}{2}(\lambda_{\text{cr}} + x)^2 - P(l_0 + \lambda_{\text{cr}} + x) + \text{const},$$

або

$$\Pi = \frac{\gamma}{2}(\lambda_{\text{cr}}^2 + 2\lambda_{\text{cr}}x + x^2) - Px - P(l_0 + \lambda_{\text{cr}}) + \text{const}. \quad (8)$$

Тут const оберемо так, щоб потенціальна енергія системи перетворилась у нуль в положенні стійкої рівноваги, тобто $\Pi(0) = 0$. Знаходимо:

$$\Pi(0) = \frac{\gamma}{2}\lambda_{\text{cr}}^2 - P(l_0 + \lambda_{\text{cr}}) + \text{const} = 0.$$

Звідси

$$\text{const} = -\frac{\gamma}{2}\lambda_{\text{cr}}^2 + P(l_0 + \lambda_{\text{cr}}).$$

Рівняння (8) на підставі одержаного співвідношення матиме вигляд

$$\Pi(x) = \frac{\gamma}{2}(2\lambda_{\text{cr}}x + x^2) - Px.$$

Якщо взяти до уваги рівність $\lambda_{\text{cr}} = \frac{P}{\gamma}$, то остаточно знаходимо потенціальну енергію системи:

$$\Pi(x) = \frac{\gamma x^2}{2} \quad (\gamma = \text{const}). \quad (9)$$

Кінетична енергія системи дорівнює кінетичній енергії вантажу, що рухається поступально:

$$T = \frac{m \dot{x}^2}{2} \quad (m = \text{const}). \quad (10)$$

Дисипативну функцію системи знайдемо за формулами (27.49), (27.50). Маємо:

$$\Phi = \frac{1}{2} b_{11} \dot{x}^2, \quad b_{11} = \alpha \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \alpha \bar{i} \cdot \bar{i} = \alpha,$$

або остаточно

$$\Phi = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad (\alpha = \text{const}). \quad (11)$$

6. З рівнянь (9), (10) випливає, що кінетична, потенціальна енергії та дисипативна функція системи визначаються з точністю до величин другого порядку малості, якщо взяти, що x та \dot{x} є величинами першого порядку малості. Окрім того, зазначимо, що коефіцієнт пружності системи дорівнює жорсткості пружини, коефіцієнт інерції — масі вантажу, а коефіцієнт опору — коефіцієнту пропорційності α , що визначається експериментально.

7. Визначимо узагальнену збудовальну силу, беручи до уваги означення узагальненої сили (27.3). Напрямимо збудовальну силу $\vec{F}^{(s)}$ у бік додатного напрямку осі Ox . Знаходимо:

$$Q_x^{(s)} = \vec{F}^{(s)} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{F}^{(s)} \cdot \vec{i} = \vec{F}_x^{(s)} \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{F}_x^{(s)} = H \sin pt. \quad (12)$$

8. Вирази (9)—(12) підставляємо в рівняння Лагранжа II роду, яке у даному випадку має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q_x^{(s)}.$$

Після елементарних розрахунків знаходимо диференціальне рівняння руху вантажу:

$$\ddot{x} + 2h \dot{x} + k^2 x = Q_0 \sin pt, \quad (13)$$

$$\text{де } 2h = \frac{\alpha}{m}, \quad k^2 = \frac{\gamma}{m}, \quad Q_0 = \frac{H}{m}.$$

Інтегруємо рівняння (13). Загальний розв'язок цього рівняння дорівнює сумі x_1 — загального розв'язку однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (13), і x_2 — частинного розв'язку рівняння (13):

$$x = x_1 + x_2. \quad (14)$$

Як відомо,

$$x_1 = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

де r_1 та r_2 — корені характеристичного рівняння

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0.$$

У даному випадку (при $\gamma > \frac{\alpha^2}{4m}$) маємо

$$r_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{\gamma}{m}} = -\frac{\alpha}{2m} \pm i \sqrt{\frac{\gamma}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} = -h \pm i \sqrt{k^2 - h^2}.$$

Тоді

$$x_1 = e^{-ht} \left(c_1 \cos t\sqrt{k^2 - h^2} + c_2 \sin t\sqrt{k^2 - h^2} \right). \quad (15)$$

Частинний розв'язок x_2 шукаємо у вигляді

$$x_2 = M \cos pt + N \sin pt. \quad (16)$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (13), знаходимо рівняння для визначення M та N :

$$\begin{aligned} -2hpM + (k^2 - p^2)N &= Q_0; \\ (k^2 - p^2)M + 2hpN &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему, маємо:

$$M = -\frac{2hpQ_0}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}, \quad N = \frac{Q_0(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}. \quad (17)$$

На підставі рівнянь (14) — (17) знаходимо загальний розв'язок рівняння (13):

$$\begin{aligned} x &= e^{-ht} \left(c_1 \cos t\sqrt{k^2 - h^2} + c_2 \sin t\sqrt{k^2 - h^2} \right) + \\ &+ \frac{Q_0(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2} \sin pt - \frac{2hpQ_0}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2} \cos pt. \end{aligned} \quad (18)$$

Сталі c_1 і c_2 визначаються за початковими умовами. За початковий момент часу беремо той момент, коли тіло перебувало в положенні рівноваги, тому що за умовами задачі воно в цей момент було нерухомим, тобто при $t = 0$:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (19)$$

На підставі рівняння (18) знаходимо

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -he^{-ht} \left(c_1 \cos t\sqrt{k^2 - h^2} + c_2 \sin t\sqrt{k^2 - h^2} \right) + \\ &+ e^{-ht} \left(-c_1 \sin t\sqrt{k^2 - h^2} + c_2 \cos t\sqrt{k^2 - h^2} \right) \sqrt{k^2 - h^2} + \\ &+ \frac{Q_0}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2} \left[p(k^2 - p^2) \cos pt + 2hp^2 \sin pt \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Підставляючи початкові умови (19) у рівняння (18) та (20), знаходимо систему двох алгебричних рівнянь відносно c_1 та c_2 :

$$0 = c_1 - \frac{2hpQ_0}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2};$$

$$0 = -hc_1 + c_2\sqrt{k^2 - h^2} + \frac{Q_0p(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2}.$$

Розв'язуючи цю систему, маємо:

$$c_1 = \frac{2hpQ_0}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2};$$

$$c_2 = \frac{Q_0p(2h^2 - k^2 + p^2)}{\left[(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2\right]\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

Значення c_1 та c_2 підставляємо в рівність (18), знаходимо загальний розв'язок (13), що задовольняє задані початкові умови:

$$x = \frac{Q_0pe^{-ht}}{(k^2 - p^2) + 4h^2p^2} \left(2h \cos t\sqrt{k^2 - h^2} + \frac{2h + p^2 - k^2}{\sqrt{k^2 - h^2}} \sin t\sqrt{k^2 - h^2} \right) + \frac{Q_0}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2} \left[(k^2 - p^2) \sin pt - 2hp \cos pt \right]. \quad (21)$$

9. Проаналізуємо одержаний розв'язок. З рівняння (21) маємо, що при $t \rightarrow \infty$ два перших доданки перетворюються в нуль, оскільки мають співмножник e^{-ht} . Інші доданки визначають рух, що називається змущеними коливаннями. Щоб дослідити цей рух, надамо двом останнім доданкам іншого вигляду. Візьмемо:

$$k^2 - p^2 = A \cos \alpha, \quad 2hp = A \sin \alpha,$$

де

$$A^2 = (k^2 - p^2)^2 + 4h^2p^2, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2hp}{k^2 - p^2}. \quad (22)$$

Тоді

$$x^3 = \frac{Q_0 A}{(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} \sin(pt - \alpha),$$

або

$$x^3 = D \sin(pt - \alpha),$$

де

$$D = Q_0 \left[(k^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (23)$$

є амплітудою змушених коливань.

З рівняння (23) маємо, що у випадку збігання частоти збудовальної сили p з частотою власних коливань k амплітуда змушених коливань D має скінченне

значення $\frac{Q_0}{2hp}$. Якщо сили опору на точку не діють (вони малі порівняно

з іншими силами або ними можна знехтувати), то $h = 0$ і амплітуда стає нескінченно великою — виникає резонанс. Таким чином, наявність сил опору істотно змінює характер руху тіла. Окрім того, порівнюючи фазу змушених коливань $pt - \alpha$ з фазою збудовальної сили pt [див. рівності (12) та (22)], робимо висновок, що змушені коливання точки відбуваються із запізненням

за фазою на величину α . З формули $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2hp}{k^2 - p^2}$ маємо, що за відсутності

сил опору ($h = 0$) запізнення $\alpha = 0$, тобто запізнення змушених коливань за

фазою спричинено дією сил опору. При $h = 0$ та $p = k$ запізнення $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Зауваження. Тут наведено розв'язок задачі малих коливань системи в найбільш загальному вигляді.

Приклад 27.2. Маятник, складений із жорсткого стрижня завдовжки l , несе на кінці масу m . До стрижня прикріплено дві пружини жорсткістю γ на відстані h від його верхнього кінця; протилежні кінці пружин закріплені (рис. 27.9, а). Нехтуючи масою стрижня, знайти період малих коливань маятника.

Розв'язання

1. Дана система (маятник з пружинами) має один ступінь вільності, оскільки одне обмеження перетворює її у нерухому систему.

2. За узагальнену координату системи беремо кут відхилення маятника φ від вертикального положення (рис. 27.9, б).

Знайдемо потенціальну енергію системи у відхиленому положенні:

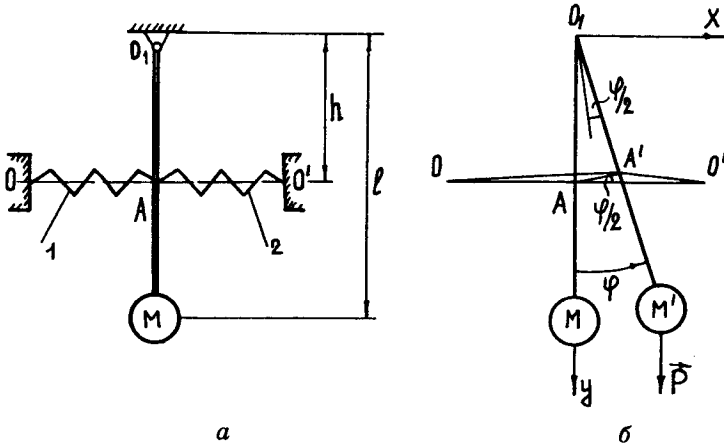


Рис. 27.9

$$\Pi = \Pi_{1п} + \Pi_{2п} + \Pi_{м}. \quad (1)$$

Тут $\Pi_{1п}$, $\Pi_{2п}$ — потенціальна енергія відповідно першої та другої пружини; $\Pi_{м}$ — потенціальна енергія маятника.

Як відомо, потенціальна енергія пружини, що підпорядковується закону Гука, визначається за формулою

$$\Pi_{п} = \frac{\gamma \Delta^2}{2} + \text{const},$$

де γ — жорсткість пружини; Δ — деформація пружини.

У даному випадку маємо

$$\Pi_{1п} = \frac{\gamma \Delta_1^2}{2} + \text{const}, \quad \Pi_{2п} = \frac{\gamma \Delta_2^2}{2} + \text{const}, \quad (2)$$

де Δ_1 , Δ_2 — деформація пружин відповідно 1 та 2.

Припускаємо, що у положенні системи, зображеному на рис. 27.9, а, пружини недеформовані та мають довжину S_0 . Тоді деформації пружин

$$\Delta_1 = OA' - S_0, \quad \Delta_2 = O'A' - S_0. \quad (3)$$

Знайдемо OA' та $O'A'$. Виберемо систему координат xO_1y , як показано на рис. 27.9, б. Координати точок O та A'

$$x_0 = -S_0, \quad y_0 = h, \quad x_{A'} = h \sin \varphi, \quad y_{A'} = h \cos \varphi.$$

Тоді

$$OA' = \sqrt{(x_{A'} - x_0)^2 + (y_{A'} - y_0)^2} = \sqrt{(h \sin \varphi + S_0)^2 + h^2 (\cos \varphi - 1)^2}. \quad (4)$$

Аналогічно знаходимо

$$O'A' = \sqrt{(x_{A'} - x_{O'})^2 + (y_{A'} - y_{O'})^2} = \sqrt{(h \sin \varphi - S_0)^2 + h^2 (\cos \varphi - 1)^2}. \quad (4a)$$

Потенціальну енергію маятника визначаємо за відомою формулою

$$\Pi_{\text{м}} = -\int dA + \text{const},$$

де dA — елементарна робота сили ваги маятника.

Як відомо, $dA = P_y dy$, $P_y = P$ — проекція сили ваги маятника на вісь Oy . Тоді $\Pi_{\text{м}} = -Py + \text{const}$, де $y = l \cos \varphi$ — ордината точки M' . Остаточно знаходимо потенціальну енергію маятника у відхиленому положенні:

$$\Pi_{\text{м}} = -Pl \cos \varphi + \text{const}. \quad (5)$$

На підставі рівнянь (1)—(5) знаходимо потенціальну енергію системи як функцію узагальненої координати:

$$\Pi = \frac{\gamma}{2} \left[(OA' - S_0)^2 + (O'A' - S_0)^2 \right] - Pl \cos \varphi + \text{const}. \quad (6)$$

3. Оскільки в задачі необхідно визначити період малих коливань маятника в околі положення $\varphi = 0$, переконаємося в тому, що це положення буде положенням стійкої рівноваги.

У цьому випадку на підставі теореми Діріхле мають виконуватися умови

$$\left. \frac{d\Pi}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} > 0. \quad (7)$$

Маємо

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = \gamma \left[(OA' - S_0) \frac{dOA'}{d\varphi} + (O'A' - S_0) \frac{dO'A'}{d\varphi} \right] + Pl \sin \varphi.$$

З виразів (4) та (4a) випливає

$$OA' \Big|_{\varphi=0} = O'A' \Big|_{\varphi=0} = S_0.$$

Тому

$$\left. \frac{d\Pi}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = \gamma \left[(OA' - S_0) \frac{d^2}{d\varphi^2} (OA') + (O'A' - S_0) \frac{d^2}{d\varphi^2} (O'A') + \right. \\ \left. + \left(\frac{dOA'}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{dO'A'}{d\varphi} \right)^2 \right] + Pl \cos \varphi. \end{aligned}$$

Два перших доданки тут перетворюються в нуль при $\varphi = 0$. Обчислюємо

$\frac{d}{d\varphi}(OA')$ та $\frac{d}{d\varphi}(O'A')$. Маємо:

$$\left. \frac{d}{d\varphi}(OA') \right|_{\varphi=0} = \frac{(h \sin \varphi + S_0) h \cos \varphi - h^2 (\cos \varphi - 1) \sin \varphi}{\sqrt{(h \sin \varphi + S_0)^2 + h^2 (\cos \varphi - 1)^2}} \Big|_{\varphi=0} = \frac{S_0 h}{S_0} = h;$$

$$\left. \frac{d}{d\varphi}(O'A') \right|_{\varphi=0} = \frac{(h \sin \varphi - S_0) h \cos \varphi - h^2 (\cos \varphi - 1) \sin \varphi}{\sqrt{(h \sin \varphi - S_0)^2 + h^2 (\cos \varphi - 1)^2}} \Big|_{\varphi=0} = -h.$$

Таким чином,

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = 2\gamma h^2 + P\ell > 0.$$

Обидві умови (7) виконано, тобто положення системи, що визначається кутом $\varphi = 0$, є положенням стійкої рівноваги.

4. Нову узагальнену координату в цій задачі вибирати не слід, оскільки координата φ відлічується від положення стійкої рівноваги.

5. Знайдемо потенціальну та кінетичну енергію системи з точністю до величин другого порядку малості, припускаючи, що φ та $\dot{\varphi}$ є величинами першого порядку малості.

Перетворюємо вирази (4) та (4а):

$$OA' = S_0 \sqrt{1 + \frac{2h^2 + 2hS_0 \sin \varphi - 2h^2 \cos \varphi}{S_0^2}};$$

$$O'A' = S_0 \sqrt{1 + \frac{2h^2 - 2hS_0 \sin \varphi - 2h^2 \cos \varphi}{S_0^2}}.$$

Застосуємо до цих виразів формулу Ньютона:

$$OA' = S_0 \left(1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots \right); \quad O'A' = S_0 \left(1 + \frac{1}{2}b' - \frac{1}{8}(b')^2 + \dots \right), \quad (8)$$

де

$$b = \frac{2hS_0 \sin \varphi + 2h^2 (1 - \cos \varphi)}{S_0^2};$$

$$b' = \frac{-2hS_0 \sin \varphi + 2h^2 (1 - \cos \varphi)}{S_0^2}.$$

Тоді

$$\Delta_1 = OA' - S_0 = S_0 \left(\frac{1}{2} b - \frac{1}{8} b^2 + \dots \right);$$

$$\Delta_2 = S_0 \left(\frac{1}{2} b' - \frac{1}{8} (b')^2 + \dots \right).$$

Розкладемо в степеневий ряд функції $\cos \varphi$ та $\sin \varphi$:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2!} \varphi^2 + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots; \quad (9)$$

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \quad (10)$$

Щоб визначити потенціальну енергію з точністю до величин другого порядку малості відносно φ , необхідно у розкладі (8) та (9) обмежитися двома членами, а у розкладі (10) — одним.

Знаходимо:

$$\Delta \cong \frac{S_0 b}{2} \cong \frac{S_0 (2hS_0 \varphi)}{2S_0^2} = h\varphi, \quad \Delta_2 \cong \frac{S_0 b'}{2} \cong \frac{S_0 (-2hS_0 \varphi)}{2} = -h\varphi. \quad (11)$$

Тоді приблизний вираз потенціальної енергії знаходимо на підставі рівнянь (6) та (11):

$$\Pi = \frac{\gamma h^2 \varphi^2}{2} - mgl \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \text{const.}$$

Сталу інтегрування беремо так, щоб потенціальна енергія в положенні стійкої рівноваги дорівнювала нулю:

$$\Pi|_{\varphi=0} = -mgl + \text{const} = 0, \quad \Rightarrow \text{const} = mgl.$$

Остаточо дістанемо

$$\Pi = \frac{1}{2} (mgl + 2\gamma h^2) \varphi^2 = \frac{1}{2} c \varphi^2. \quad (12)$$

Тут величина $c = mgl + 2\gamma h^2$ — коефіцієнт пружності системи. Кінетична енергія системи дорівнює кінетичній енергії маси на кінці маятника, оскільки масою стрижня та масою пружини нехтуємо:

$$T = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2,$$

де $a = ml^2$ — коефіцієнт інерції системи.

Кінетична енергія визначена з точністю до величин другого порядку малості. Частота та період власних коливань системи визначаються за формулами (27.76):

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{mgl + 2\gamma h^2}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\gamma h^2}{ml^2}};$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2\gamma h^2}{ml^2}}}.$$

Зауваження. Задачу знаходження приблизного значення деформацій пружин Δ_1 та Δ_2 можна спростити. Прийнятий у задачі метод привів до співвідношення (11). Однак рівність $\Delta_1 = h\varphi$ можна визначити як проекцію зміщення AA' на напрям осі пружини при допущенні малості кута φ .

Дійсно, з рис. 27.9,б випливає

$$\Delta_1 \cong AA' \cos \frac{\varphi}{2} = 2h \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = h \sin \varphi.$$

Маючи на увазі розкладання в степеневий ряд функції $\sin \varphi$ (10) та обмежуючись у цьому розкладанні першим членом, знаходимо приблизне значення деформації пружини:

$$\Delta_1 \cong h\varphi.$$

Цим способом будемо користуватися і надалі, щоб скоротити обчислення.

Приклад 27.3. Циліндр, що має діаметр d та масу m , може котитися без ковзання по горизонтальній площині. Дві однакові пружини із жорсткістю γ прикріплені посередині його довжині на відстані h від осі циліндра; протилежні кінці пружин закріплені (рис. 27.10, а). Визначити період малих коливань циліндра.

Розв'язання

1. Система складена з циліндра та двох пружин, має один ступінь вільності, оскільки одне обмеження перетворює її у нерухому.

2. За узагальнені координати беремо кут обертання циліндра φ відносно МЦШ (миттєвого центра швидкостей) — точку p (рис. 27.10, б). Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії циліндра та двох пружин:

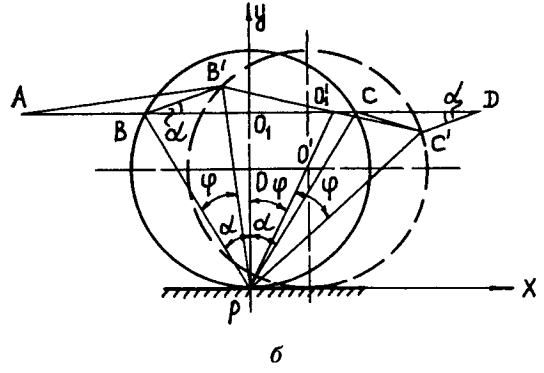
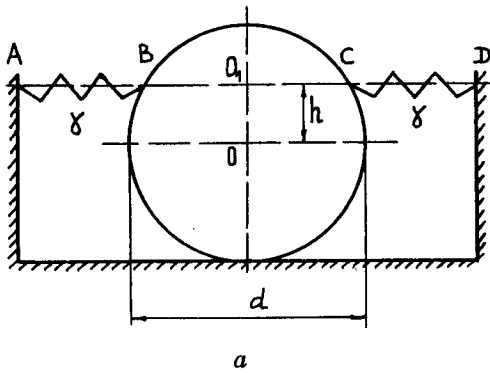


Рис. 27.10

$$\Pi = \Pi_{\text{ц}} + \Pi_{1\text{н}} + \Pi_{2\text{н}}.$$

Центр ваги циліндра O переміщується по горизонталі OO' . Тому потенціальна енергія циліндра зберігається сталою. Дійсно, при зазначеному напрямі осі Oy знаходимо:

$$\Pi_{\text{ц}} = -\int dA + \text{const}, \quad dA = -Pdy, \quad \Pi_{\text{ц}} = Py + \text{const}, \quad y = \frac{d}{2};$$

$$\Pi_{\text{ц}} = P \frac{d}{2} + \text{const}.$$

Знайдемо потенціальну енергію пружин, припускаючи, що у положенні, зображеному на рис. 27.10, a , вони не деформовані. Беручи до уваги зауваження, наведені при розв'язанні прикладу 27.2, знайдемо приблизне значення потенціальних енергій двох пружин:

$$\Pi_{1\text{н}} = \Pi_{2\text{н}} = \frac{\gamma \Delta^2}{2} + \text{const},$$

$$\text{де } \Delta \cong BB' \cos \alpha = CC' \cos \alpha; \quad BB' = CC' = PB' \sin \varphi = \sqrt{d \left(\frac{d}{2} + h \right)} \sin \varphi,$$

$$\cos \alpha = \frac{h + \frac{d}{2}}{\sqrt{d \left(\frac{d}{2} + h \right)}}, \quad \Delta = \left(h + \frac{d}{2} \right) \sin \varphi.$$

З останнього рівняння випливає, що деформація кожної пружини дорівнює переміщенню точки O_1 циліндра (рис. 27.10, b). Отже, потенціальна енергія системи становить:

$$\Pi = \Pi_{\kappa} + \Pi_{1\pi} + \Pi_{2\pi} = \gamma \left(h + \frac{d}{2} \right)^2 \sin^2 \varphi + \text{const.} \quad (1)$$

Тут взято до уваги, що сума сталих величин є величиною сталою.

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (1). Знаходимо

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = 2\gamma \left(h + \frac{d}{2} \right) \sin \varphi \cos \varphi = \gamma \left(h + \frac{d}{2} \right) \sin 2\varphi = 0.$$

Ця рівність справедлива при двох значеннях кута φ : $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Отже,

система має два положення рівноваги. Переконаємося у тому, що положення системи, що визначається кутом $\varphi_1 = 0$, є положенням стійкої рівноваги. Дійсно

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_1=0} = 2\gamma \left(h + \frac{d}{2} \right)^2 \cos 2\varphi \Big|_{\varphi=\varphi_1=0} = 2\gamma \left(h + \frac{d}{2} \right)^2 > 0.$$

За теорією екстремуму функції однієї змінної, якщо $\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_1} > 0$, то функ-

ція $\Pi_{\varphi=\varphi_1}$ має мінімальне значення. Згідно з теоремою Діріхле положення системи, що визначається кутом $\varphi_1 = 0$, є положенням стійкої рівноваги. В околі цього положення система здійснює малі коливання.

4. Вибирати нову узагальнену координату в даній задачі не потрібно, оскільки узагальнена координата φ дорівнює нулю у положенні стійкої рівноваги, тобто відлічується від положення стійкої рівноваги системи.

5. Вираз потенціальної енергії (1) перетворимо так, щоб він мав величини до другого порядку малості включно, припускаючи, що φ — величина першого порядку малості. Для цього скористаємося відомим розкладом функції $\sin \varphi$ у степеневий ряд:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

У цьому розкладі утримуємо тільки перший член. Тоді на підставі рівняння (1) знаходимо

$$\Pi = \gamma \left(h + \frac{d}{2} \right)^2 \varphi^2 = \text{const} = \frac{1}{2} c\varphi^2 + \text{const.} \quad (2)$$

Кінетична енергія системи дорівнює кінетичній енергії циліндра, оскільки масою пружин нехтуємо. Циліндр рухається плоскопаралельно, тому його кінетична енергія становить:

$$T = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}, \quad V_0 = \dot{\varphi} \frac{d}{2}, \quad J = \frac{m}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{8};$$

$$T = \frac{md^2 \dot{\varphi}^2}{8} + \frac{md^2 \dot{\varphi}^2}{16} = \frac{3}{16} md^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2. \quad (3)$$

6. На підставі (2) та (3) знаходимо коефіцієнт інерції системи $a = \frac{3}{8} md^2$

та коефіцієнт пружності $c = 2\gamma \left(h + \frac{d}{2}\right)^2$. За цими величинами, застосовуючи формули (27.76), знаходимо частоту k та період T коливань системи:

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{2h}{d}\right) \sqrt{\frac{\gamma}{m}};$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi\sqrt{3}}{1 + \frac{2h}{d}} \sqrt{\frac{m}{\gamma}}.$$

Знаючи a та c , можна скласти диференціальне рівняння малих вільних коливань системи та знайти її розв'язок за довільних початкових умов. Пропонуємо ці розрахунки виконати самостійно за аналогією з наведеними у прикладі 27.1.

Приклад 27.4. У приладі, що реєструє вертикальні коливання фундаментів машин, вантаж Q масою m закріплений на вертикальній пружині, коефіцієнт жорсткості якої γ_1 , шарнірно з'єднаний зі статично зрівноваженою стрілкою, що має вигляд ламаного важеля з моментом інерції J відносно осі обертання O і віджимається до положення рівноваги горизонтальною пружиною з коефіцієнтом жорсткості γ_2 (рис. 27.11, а). Визначи-

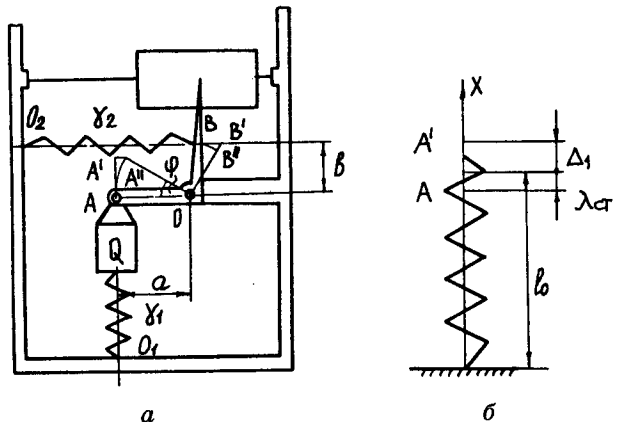


Рис. 27.11

ти період вільних коливань стрілки в околі її вертикального положення рівноваги, якщо $OA = a$ та $OB = b$. Розмірами вантажу та впливом початкового натягу пружини нехтуємо.

Розв'язання.

1. Механічна система, що складається з ламаного важеля, вантажу та двох пружин, має один ступінь вільності, оскільки одне обмеження перетворює її в нерухому систему.

2. За узагальнену координату беремо кут відхилення важеля φ (рис. 27.11, а) та визначаємо потенціальну енергію системи як функцію цієї координати.

Потенціальна енергія системи складається з потенціальних енергій двох пружин і вантажу:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_*, \quad (1)$$

Потенціальна енергія вертикальної пружини

$$\Pi_1 = \frac{\gamma_1 \Delta_1^2}{2} + \text{const},$$

де Δ_1 — деформація пружини.

Точне значення цієї деформації можна визначити як різницю довжин деформованої пружини O_1A'' та недеформованої пружини ℓ_0 : $\Delta_1 = O_1A'' - \ell_0$. Величину O_1A'' потрібно виразити через узагальнену координату φ . Точне обчислення цієї величини призводить до громіздкого результату. Тому, користуючись припущенням малості кута φ , обчислимо деформацію приблизно. За даними рис. 27.11, а та 27.11, б здобуваємо такі рівності:

$$\Delta_1 \cong AA' - \lambda_{\text{ст}}; \quad AA' = AA'' \cos \frac{\varphi}{2}; \quad AA'' = 2a \sin \frac{\varphi}{2};$$

$$AA' = 2a \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = a \sin \varphi; \quad \Delta_1 = a \sin \varphi - \lambda_{\text{ст}},$$

де $\lambda_{\text{ст}}$ — статична деформація пружини.

Таким чином, потенціальна енергія вертикальної пружини визначається з рівності

$$\Pi_1 = \frac{\gamma_1}{2} (a \sin \varphi - \lambda_{\text{ст}})^2 + \text{const}. \quad (2)$$

Горизонтальна пружина у положенні O_2B недеформована (за умовами задачі), тому її потенціальна енергія

$$\Pi_2 = \frac{\gamma_2}{2} \Delta_2^2 + \text{const},$$

де $\Delta_2 \cong BB' = BB'' \cos \frac{\varphi}{2} = 2b \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = b \sin \varphi$.

Тоді

$$\Pi_2 = \frac{\gamma_2}{2} b^2 \sin^2 \varphi + \text{const.} \quad (3)$$

Потенціальну енергію вантажу Q у положенні A'' визначаємо також приблизно:

$$\Pi_b = -\int dA + \text{const},$$

де $dA = -mgdx$, $\Pi_b = mgx_{A'} + \text{const}$.

Через малість кута φ маємо

$$x_{A'} \cong x_{A''} = l_0 + \Delta_1 = l_0 + a \sin \varphi - \lambda_{\text{ст}}.$$

Остаточно потенціальна енергія вантажу Q

$$\Pi_b = mg(l_0 + a \sin \varphi - \lambda_{\text{ст}}) + \text{const.} \quad (4)$$

Підставляючи вирази (2)—(4) у рівність (1), знаходимо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = \frac{\gamma_1}{2} (a \sin \varphi - \lambda_{\text{ст}})^2 + \frac{\gamma_2}{2} b^2 \sin^2 \varphi + mga \sin \varphi + \text{const.} \quad (5)$$

Тут стала величина (const) дорівнює сумі сталих у рівняннях (2)—(4), включаючи сталу $mg(l_0 - \lambda_{\text{ст}})$.

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (5):

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = \gamma_1 (a \sin \varphi - \lambda_{\text{ст}}) a \cos \varphi + \gamma_2 b^2 \sin \varphi \cos \varphi + mga \cos \varphi = 0. \quad (6)$$

Якщо взяти до уваги рівність $\lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{\gamma_1}$, то рівність (6) набирає такого вигляду:

$$\frac{1}{2} (\gamma_1 a^2 + \gamma_2 b^2) \sin 2\varphi = 0.$$

Звідси знаходимо два значення кута φ : $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Переконаємося у тому, що значення $\varphi_1 = 0$ відповідає мінімуму потенціальної енергії. Дійсно,

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_1} = (\gamma_1 a^2 + \gamma_2 b^2) \cos 2\varphi \Big|_{\varphi=\varphi_1} = (\gamma_1 a^2 + \gamma_2 b^2) > 0.$$

Згідно з теорією екстремуму функції однієї змінної значення φ_1 відповідає мінімуму потенціальної енергії. На підставі теореми Діріхле стверджуємо, що положення системи при $\varphi_1 = 0$ є положенням стійкої рівноваги.

4. Положення системи, зображене на рис. 27.11, a суцільними лініями, є стійким (визначається кутом $\varphi_1 = 0$), тому зникає потреба вибирати нову узагальнену координату.

5. Сталу інтегрування в рівності (5) виберемо так, щоб потенціальна енергія в положенні $\varphi_1 = 0$ дорівнювала нулю:

$$\Pi(0) = \frac{\gamma_1}{2} \lambda_{\text{ст}}^2 + \text{const} = 0.$$

Звідси випливає, що $\text{const} = -\frac{\gamma_1}{2} \lambda_{\text{ст}}^2$. Маючи цей результат, перетворюємо потенціальну енергію системи (5):

$$\Pi(\varphi) = \frac{\gamma_1}{2} a^2 \sin^2 \varphi + \frac{\gamma_1}{2} \lambda_{\text{ст}}^2 - \gamma_1 a \sin \varphi \lambda_{\text{ст}} + \frac{\gamma_2}{2} b^2 \sin^2 \varphi + m g a \sin \varphi - \frac{\gamma_1}{2} \lambda_{\text{ст}}^2.$$

Оскільки $\lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{\gamma_1}$, то остаточно знаходимо потенціальну енергію системи:

$$\Pi(\varphi) = \frac{\gamma_1}{2} a^2 \sin^2 \varphi + \frac{\gamma_2}{2} b^2 \sin^2 \varphi.$$

При вивченні малих коливань системи в околі положення стійкої рівноваги величину φ беруть як малу першого порядку. Обмежуючись величинами другого порядку малості, знаходимо наближений вираз потенціальної енергії системи:

$$\Pi(\varphi) \cong \frac{1}{2} (\gamma_1 a^2 + \gamma_2 b^2) \varphi^2 = \frac{1}{2} c \varphi^2, \quad (7)$$

де $c = \gamma_1 a^2 + \gamma_2 b^2$ — коефіцієнт пружності системи.

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичної енергії вантажу

$$T_{\text{в}} = \frac{mV_{\text{в}}^2}{2} = \frac{ma^2 \dot{\varphi}^2}{2}$$

та ламаного важеля з моментом інерції J

$$T_{\text{вж}} = \frac{J \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Кінетична енергія системи

$$T = T_{\text{в}} + T_{\text{вж}} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (J + ma^2) = \frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2, \quad (8)$$

де $A = J + ma^2$ — коефіцієнт інерції системи.

На підставі формул (27.76) знаходимо частоту та період малих вільних коливань системи:

$$k = \sqrt{\frac{c}{A}} = \sqrt{\frac{\gamma_1 a^2 + \gamma_2 b^2}{J + ma^2}}; \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J + ma^2}{\gamma_1 a^2 + \gamma_2 b^2}}.$$

Приклад 27.5. Скласти диференціальне рівняння малих коливань точки A (рис. 27.12) та визначити частоту згасаючих коливань. Вага точки A дорівнює P , коефіцієнт жорсткості пружини — c , відстань $OA = b$, $OB = l$. Сила опору середовища пропорційна першому ступеню швидкості, коефіцієнт пропорційності дорівнює α . Масою стрижня OB , шарнірно закріпленого у точці O , знехтувати. У положенні рівноваги стрижень займає горизонтальне положення. За якого значення коефіцієнта α рух буде аперіодичним?

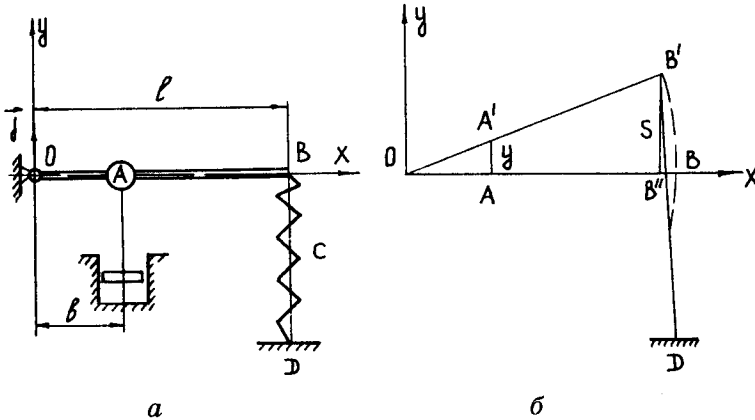


Рис. 27.12

Розв'язання

1. Механічна система складається зі стрижня OB , зосередженої маси A та пружини BD . Система має один ступінь вільності, оскільки одне обмеження перетворює її у нерухому систему.

2. За узагальнену координату беремо ординату $y_A = y$. Знайдемо потенціальну енергію системи як функцію y . Маємо

$$\Pi = \Pi_A + \Pi_n, \quad (1)$$

де Π_A , Π_n — потенціальна енергія відповідно вантажу A та пружини. Застосувавши відомі формули, знаходимо

$$\Pi_A = -\int P_y dy + \text{const}, \quad \Pi_n = \frac{c\Delta^2}{2} + \text{const},$$

де P_y — проекція сили ваги вантажу A на вісь Oy ; Δ — деформація пружини.

При даному напрямі осі Oy знаходимо

$$\Pi_A = Py + \text{const}. \quad (2)$$

Деформація пружини

$$\Delta = DB' - l_0,$$

де l_0 — довжина недеформованої пружини. Якщо $\lambda_{\text{ст}}$ — статична деформація пружини, то

$$l_0 = DB + \lambda_{\text{ст}}.$$

Таким чином,

$$\Delta = DB' - DB - \lambda_{\text{ст}}.$$

Оскільки ми розглядаємо малі коливання системи, то можна записати

$$DB' - DB \cong B'B'' = S = \frac{l}{b} y.$$

Тоді $\Delta = \frac{l}{b} y - \lambda_{\text{ст}}$.

Потенціальна енергія пружини

$$\Pi_n = \frac{c}{2} \left(\frac{l}{b} y - \lambda_{\text{ст}} \right)^2 + \text{const}. \quad (3)$$

Вирази (2) та (3) підставляємо в рівняння (1). Знаходимо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = \frac{c}{2} \left(\frac{l}{b} y - \lambda_{\text{ст}} \right)^2 + Py + \text{const}. \quad (4)$$

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (4):

$$\frac{d\Pi}{dy} = \frac{l}{b} c \left(\frac{l}{b} y - \lambda_{\text{ст}} \right) + P = 0.$$

Звідси знаходимо положення рівноваги системи:

$$y^* = \frac{b}{l} \left(\lambda_{\text{cr}} - \frac{Pb}{lc} \right). \quad (5)$$

Визначаємо знак другої похідної:

$$\frac{d^2\Pi}{dy^2} = c \frac{l^2}{b^2}.$$

Якщо $c > 0$, то $\frac{d^2\Pi}{dy^2} > 0$.

Таким чином, положення системи, що визначається ординатою y^* , є положенням стійкої рівноваги.

З рівності (5) випливає що $y^* = 0$, якщо

$$c\lambda_{\text{cr}}l = Pb, \quad (6)$$

тобто якщо момент сили пружності при статичній деформації відносно точки O дорівнює моменту сили ваги відносно тієї самої точки. Припустимо, що умову (6) виконано. Тоді положення стійкої рівноваги системи має місце при горизонтальному положенні стрижня OB , зображеному на рис. 27.12, а.

4. Нову узагальнену координату вибирати не слід, оскільки координата y відлічується від положення стійкої рівноваги при виконанні умови (6).

5. Потенціальна енергія системи (4) при виконанні умови (6) визначається за рівністю

$$\Pi = \frac{cl^2}{2b^2} y^2 + \text{const}. \quad (7)$$

Кінетична енергія системи дорівнює кінетичній енергії зосередженої маси A :

$$T = \frac{P}{2g} \dot{y}^2. \quad (8)$$

Знайдемо дисипативну функцію системи. Якщо сила опору $\vec{R} = -\bar{j}\alpha \dot{y}$, то згідно з формулою (27.29) дисипативна функція визначається за рівністю

$$\Phi = \frac{\alpha}{2} \dot{y}^2. \quad (9)$$

6. Збурювальні сили на систему не діють.

7. Рівняння Лагранжа II роду в даному випадку має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad L = T - \Pi.$$

Підставляючи в це рівняння вирази (7)—(9), знаходимо диференціальне рівняння руху системи

$$\frac{P}{y} \ddot{y} + \alpha \dot{y} + \frac{cl^2}{b^2} y = 0,$$

або

$$\ddot{y} + 2h \dot{y} + k^2 y = 0, \quad 2h = \frac{\alpha g}{P}, \quad k^2 = \frac{cl^2 g}{b^2 P}. \quad (10)$$

Загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (11)$$

де λ_1 та λ_2 — корені характеристичного рівняння $\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0$.

Маємо

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}. \quad (12)$$

Якщо $k^2 > h^2$, то корені характеристичного рівняння є комплексними, тобто

$$\lambda_{1,2} = -h \pm i\sqrt{k^2 - h^2},$$

і розв'язок (11) матиме вигляд

$$y = e^{-ht} \left(c_1 \cos \sqrt{k^2 - h^2} t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - h^2} t \right). \quad (13)$$

Рух системи, що описує рівняння (13), називається згасаючими коливаннями.

8. Надамо розв'язку (13) вигляду, більш зручного для дослідження. Введемо $c_1 = A \sin \alpha$, $c_2 = A \cos \alpha$, де A та α — дві нові сталі інтегрування, що виражаються через сталі c_1 та c_2 :

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{c_1}{c_2}.$$

На підставі цих співвідношень кінематичне рівняння згасаючих коливань (13) набуває вигляду

$$y = A e^{-ht} \sin \left(\sqrt{k^2 - h^2} t + \alpha \right).$$

Звідси видно, що згасаючі коливання системи відбуваються з амплітудою

$$B = Ae^{-ht} \text{ та частотою } k' = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{\frac{cl^2g}{Pb^2} - \frac{\alpha^2g^2}{4P^2}} \left(\frac{1}{c}\right).$$

З рівнянь (11) та (12) випливає, що рух системи є аперіодичним, якщо корені λ_1 та λ_2 будуть дійсними числами, тобто у випадку $h \geq k$, або, маючи на увазі позначення у рівнянні (10),

$$\frac{\alpha g}{2P} \geq \sqrt{\frac{cl^2g}{b^2P}}, \quad \alpha \geq \frac{2l}{b} \sqrt{\frac{cP}{g}}.$$

Звідси видно, як необхідно змінювати параметри системи, щоб керувати її рухом.

Приклад 27.6. У вібрографі, що застосовується для запису вертикальних коливань, стрижень OA , з'єднаний із записувальним пером приладу, може обертатися відносно горизонтальної осі O . Стрижень OA на кінці A має вагу Q та утримується в горизонтальному положенні рівноваги спіральною пружиною (рис. 27.13, а). Визначити відносний рух стрижня OA , якщо віброграф закріплений на фундаменті, що здійснює вертикальні коливання за законом $z = 0,2 \sin 25t$ см. Жорсткість пружини $\gamma = 1$ Н·см, момент інерції стрижня OA з вагою Q відносно осі O $J = 4$ кг·см², $Ql = 100$ Н·см². Власними коливаннями стрижня знехтувати.

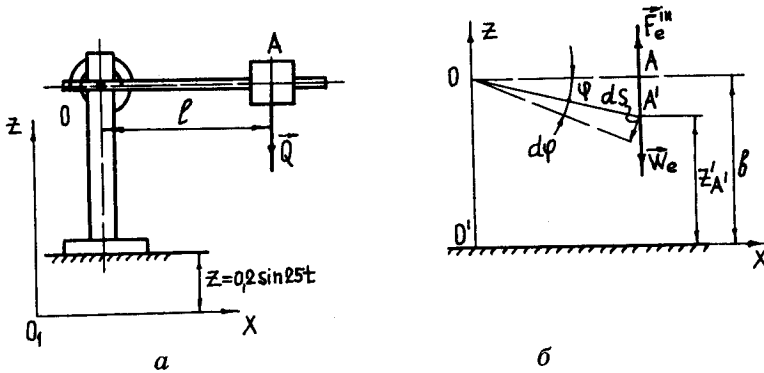


Рис. 27.13

Розв'язання

1. Механічна система складається зі стрижня OA , вантажу Q на кінці A та спіральної пружини на протилежному кінці стрижня OA . Система має один ступінь вільності, оскільки одне обмеження перетворює її у нерухому систему відносно фундаменту.

2. За узагальнену координату беремо кут відхилення стрижня φ (рис. 27.13, б). Знайдемо потенціальну енергію як функцію цього кута. Маємо

$$\Pi = \Pi_n + \Pi_p, \quad (1)$$

де Π_n , Π_p — потенціальна енергія відповідно пружини та вантажу.

Як відомо, при напрямі осі $O'z$, зображеному на рис. 27.13, б, маємо

$$\Pi_n = \frac{\gamma(\lambda_{cr} + \varphi)^2}{2} + \text{const}, \quad \Pi_p = mgz'_A + \text{const}, \quad (2)$$

де λ_{cr} — статична деформація пружини.

Припускаючи, що φ є величиною першого порядку малості, обмежимося величинами не вище другого порядку малості. Тоді $z'_A \cong b - l\varphi$. На підставі цього співвідношення та рівнянь (1) та (2) знаходимо наближений вираз потенціальної енергії системи:

$$\Pi \cong \frac{\gamma}{2}(\lambda_{cr} + \varphi)^2 - mgl\varphi + \text{const}. \quad (3)$$

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (3). Маємо

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = \gamma(\lambda_{cr} + \varphi) - mgl = 0.$$

Звідси знаходимо положення рівноваги системи:

$$\varphi^* = \frac{mgl}{\gamma} - \lambda_{cr}.$$

За умовами задачі маємо, що момент сили ваги вантажу відносно точки O дорівнює моменту сили пружності при статичній деформації:

$$mgl = \gamma\lambda_{cr}. \quad (4)$$

У цьому випадку положення рівноваги системи визначається кутом $\varphi^* = 0$. Це положення рівноваги системи є положенням стійкої рівноваги. Дійсно, при $\gamma > 0$

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = \gamma > 0.$$

4. Вибирати нову узагальнену координату не потрібно, оскільки узагальнена координата φ при виконанні умови (4) відлічується від положення стійкої рівноваги.

5. Потенціальна енергія системи (3) при виконанні умови (4) визначається за рівністю

$$\Pi = \frac{\gamma\varphi^2}{2} + \text{const}, \quad (5)$$

де const має дорівнювати нулю, щоб виконувалась умова $\Pi(0) = 0$.

Зауважимо, що значення const у рівнянні (5) не впливає на результат розв'язання.

Кінетична енергія системи дорівнює кінетичній енергії стрижня з вантажем:

$$T = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}. \quad (6)$$

6. Рівняння (5) та (6) визначають потенціальну та кінетичну енергію системи з точністю до величин другого порядку малості відносно φ і $\dot{\varphi}$ включно. З цих рівнянь знаходимо коефіцієнт пружності системи $c = \gamma$ і коефіцієнт інерції системи $a = J$.

7. Оскільки в задачі необхідно визначити відносний рух стрижня, то до сил, що діють на систему (сила ваги, сила пружності пружини, реакція ідеального шарніра O), необхідно додати переносну силу інерції вантажу $\vec{F}_e^{\text{ін}} = -m\vec{W}_e$. Дія на систему потенціальних сил (сили ваги та сили пружності) враховується потенціальною енергією системи. Момент реакції шарніра O відносно цієї точки дорівнює нулю. Сила інерції вантажу є збурювальною силою, що діє на систему у відносному русі. Щоб визначити узагальнену збурювальну силу, надамо координаті φ приросту $\Delta\varphi \cong d\varphi$ (див. рис. 27.13, б) та знайдемо роботу сили $\vec{F}_e^{\text{ін}}$ на переміщенні, що відповідає цьому приросту:

$$d'A = |\vec{F}_e^{\text{ін}}| dS \cos \left[\pi - \left(\varphi + \frac{d\varphi}{2} \right) \right] = -|\vec{F}_e^{\text{ін}}| dS \cos \left(\varphi + \frac{d\varphi}{2} \right) \cong |\vec{F}_e^{\text{ін}}| dS = -|\vec{F}_e^{\text{ін}}| l d\varphi.$$

Звідси знаходимо узагальнену збурювальну силу:

$$Q_\varphi^{(3)} = -|\vec{F}_e^{\text{ін}}| l = -\frac{Q}{g} |\vec{W}_e| l = -\frac{Ql}{g} 0,2(25)^2 \sin 25t. \quad (7)$$

8. Рівняння Лагранжа II роду в даному випадку має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^{(3)}.$$

Підставляючи сюди вирази (4)—(6), знаходимо диференціальне рівняння змушених коливань системи

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = Q_0 \sin 25t, \quad (8)$$

де $k^2 = \frac{\gamma}{J}$, $Q_0 = -\frac{Qa}{gJ} 0,2(25)^2$.

Змушені коливання системи, як відомо, визначаються частинним розв'язком неоднорідних диференціальних рівнянь, що описують рух системи. Рівняння (8) є неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку відносно φ зі сталими коефіцієнтами. Частинний розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$\varphi = A \sin 25t, \quad (9)$$

де A необхідно підібрати так, що розв'язок (9) задовольняв рівняння (8). Маємо $\ddot{\varphi} = -A(25)^2 \sin 25t$. Підставляючи цей вираз та функцію (9) в рівняння (8), дістанемо

$$\left[-(25)^2 + k^2 \right] A \sin 25t = Q_0 \sin 25t. \quad (10)$$

Ця рівність має виконуватися за будь-яких значень аргументу функції $\sin 25t$ і, таким чином, за тих, за яких $\sin 25t \neq 0$. Тоді з рівняння (10) випливає:

$$\left[-(25)^2 + k^2 \right] A = Q_0.$$

Звідси знаходимо $A = \frac{Q_0}{k^2 - (25)^2}$. Підставляючи сюди числові значення,

остаточно матимемо

$$A = -\frac{Qa 0,2(25)^2}{gJ \left[\frac{\gamma}{J} - (25)^2 \right]} = -\frac{100 \cdot 0,2 \cdot 625}{981 \cdot 4 \left[0,25 - (25)^2 \right]} = 0,005 \text{ см.}$$

Таким чином, відносний рух стрижня OA описується рівнянням

$$\varphi = 0,005 \sin 25t. \quad (11)$$

Відносний рух є гармонічним коливанням з амплітудою $A = 0,005$ см та частотою $k = 25 \frac{1}{\text{с}}$. Період змушених коливань $T = \frac{2\pi}{k} = 0,08\pi$ с.

Приклад 27.7. У вібрографі, що розглядався в прикладі 27.6, стрижень має електромагнітне гальмо у вигляді алюмінієвої пластини, що коливається між полюсами нерухомо закріплених магнітів. Вихрові потоки, що виникають в пластині, створюють гальмування, пропорційне першому ступеню швидкості руху пластини і доведене до межі аперіодичності. Визначити змушені коливання стрілки приладу, якщо він закріплений на фундаменті, що здійснює вертикальні коливання за законом $z = h \sin pt$.

Розв'язання. При розв'язанні даного прикладу чотири перших етапи розв'язання прикладу 27.6 повторюються без змін.

Окрім кінетичної та потенціальної енергії необхідно знайти дисипативну функцію:

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{\varphi}^2, \quad (12)$$

де b — коефіцієнт опору, що визначається за умовою: гальмування, доведене до межі аперіодичності.

Визначається узагальнена збурювальна сила, як і в прикладі 27.6. У позначеннях даної задачі знаходимо

$$Q_{\varphi}^{(a)} = -\frac{Q}{g} \left| z \right| l = -\frac{Ql}{g} h p^2 \sin pt. \quad (13)$$

Рівняння Лагранжа II роду для даної задачі має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} + Q_{\varphi}^{(a)}. \quad (14)$$

Підставляємо в рівняння (14) значення Π , T , Φ , $Q_{\varphi}^{(a)}$, що визначаються за рівностями (5), (6), (12), (13). Рівності (5), (6) наведено у розв'язку попередньої задачі. Після елементарних перетворень знаходимо диференціальне рівняння, що описує рух даної системи:

$$\ddot{\varphi} + 2n \dot{\varphi} + k^2 \varphi = Q_0 \sin pt, \quad (15)$$

$$\text{де } 2n = \frac{b}{J}, \quad k^2 = \frac{\gamma}{J}, \quad Q_0 = -\frac{Ql}{Jg} h p^2.$$

Гальмування буде доведене до межі аперіодичності, якщо $n = k$ або

$\frac{b}{2J} = \sqrt{\frac{\gamma}{J}}$. Звідси знаходимо коефіцієнт опору: $b = 2\sqrt{\gamma J}$. Якщо цю умову буде виконано, то диференціальне рівняння (15) набирає вигляду

$$\ddot{\varphi} + 2k\dot{\varphi} + k^2\varphi = Q_0 \sin pt. \quad (16)$$

Змушені коливання системи визначаються частинним розв'язком рівняння (16):

$$\varphi = M \cos pt + N \sin pt, \quad (17)$$

де M та N необхідно підібрати так, щоб розв'язок (17) задовольняв рівняння (16). Визначимо похідні функції (17):

$$\dot{\varphi} = -Mp \sin pt + Np \cos pt, \quad \ddot{\varphi} = -Mp^2 \cos pt + Np^2 \sin pt.$$

Підставляючи ці похідні, а також функцію (17) у рівняння (16), порівнюючи співмножники при $\sin pt$ і $\cos pt$ ліворуч та праворуч, знайдемо систему двох алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів M та N :

$$\begin{aligned} -2kpM + (k^2 - p^2)N &= Q_0; \\ (k^2 - p^2)M + 2kpN &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо:

$$M = -\frac{2kpQ_0}{(k^2 - p^2)^2 + 4k^2p^2} = -\frac{2kpQ_0}{(k^2 + p^2)^2}, \quad N = \frac{Q_0(k^2 - p^2)}{(k^2 + p^2)^2}.$$

Щоб дослідити отриманий розв'язок, надамо йому іншого вигляду. Візьмемо

$$M = -D \sin \varepsilon, \quad N = D \cos \varepsilon,$$

де

$$D = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{|Q_0|}{k^2 + p^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{M}{N} = \frac{2kp}{k^2 - p^2} = \frac{2p}{k \left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right)}. \quad (19)$$

Тоді розв'язок (17) набирає вигляду

$$\varphi = D \sin(pt - \varepsilon).$$

Звідси видно, що змушені коливання системи відбуваються із запізненням за фазою порівняно з фазою збудовальної сили.

Перетворюємо вирази, що визначають D та $\operatorname{tg} \varepsilon$, маючи на увазі прийняті раніше позначення:

$$D = \frac{Qlh p^2}{Jg p^2 \left(1 + \frac{k^2}{p^2}\right)} = \frac{Qlh}{Jg \left(1 + \frac{\gamma}{Jp^2}\right)}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\sqrt{\frac{J}{\gamma}} p}{1 - \frac{J}{\gamma} p^2}. \quad (20)$$

З рівнянь (19) випливає, що змушені коливання системи відбуваються із запізненням за фазою на величину ε порівняно з фазою збудовальної сили.

Запізнення $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ при $k^2 = p^2$. З рівняння (20) випливає, що амплітуда зму-

шених коливань D прямо пропорційна вазі вантажу Q , довжині плеча l та амплітуді коливань фундаменту h . З того самого рівняння видно, що у випадку збігу частот власних коливань k з частотою збудовальної сили p , тобто коли $k = p$, амплітуда змушених коливань має скінченне значення. Рекомендуємо порівняти цей результат з одержаним у попередньому прикладі.

Приклад 27.8. Для запису крутильних коливань використовують торсіограф, що складається з легкого алюмінієвого шківів A , закріпленого нерухомо на валу B , та важкого маховичка D , який може вільно обертатися відносно вала B (рис. 27.14). Вал, зв'язаний з маховичком D спіральною пружиною жорсткості γ , обертається за законом $\varphi = \omega t + \varphi_0 \sin \omega t$ (рівномірне обертання з накладанням гармонічних коливань). Момент інерції маховичка відносно осі обертання — J . Дослідити змушені коливання маховичка торсіографа.

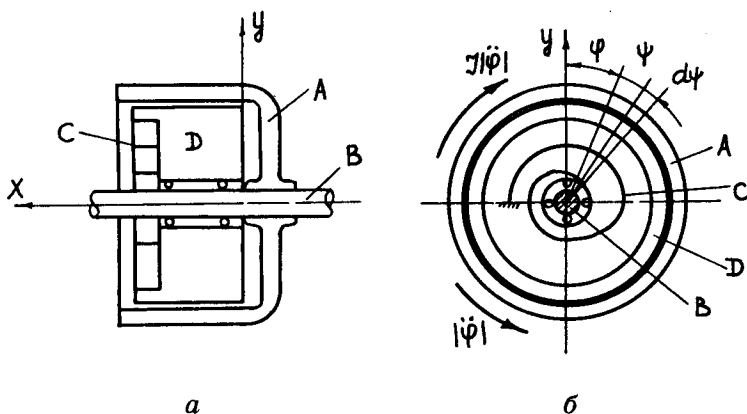


Рис. 27.14

Розв'язання

1. Обираємо механічну систему, що складається з маховичка D та пружини C . Система має один ступінь вільності, оскільки одне обмеження перетворює маховичок D у нерухоме тіло відносно вала B .

2. За узагальнену координату беремо кут обертання маховичка D відносно вала B . Позначимо цей кут ψ (рис. 27.14, б) та визначимо потенціальну енергію системи як функцію цієї координати.

3. Припускаємо, що центр ваги маховичка D розташований на осі вала B . Тоді потенціальна енергія маховичка буде сталою величиною. Дійсно, потенціальна енергія маховичка

$$\Pi_m = -\int dA + \text{const.}$$

При обраній системі координат (рис. 27.14, а) $dA = -Pdy_c$, де P — вага маховичка; y_c — ордината його центра ваги. Тоді

$$\Pi_m = Py_c + \text{const.}$$

За припущенням $y_c = 0$. Таким чином,

$$\Pi_m = \text{const.} \quad (1)$$

Визначимо потенціальну енергію спіральної пружини. Оскільки один кінець пружини закріплений на осі вала, а другий — на маховичку (рис. 27.14, б), то динамічна деформація пружини дорівнює ψ . Припустимо, що пружина спочатку не напружена, тобто при нерухомому маховичку відносно вала B пружина C недеформована. Тоді потенціальна енергія пружини

$$\Pi_n = \frac{\gamma\psi^2}{2} + \text{const.} \quad (2)$$

Це рівняння при другому значенні const визначатиме потенціальну енергію даної системи.

4. Досліджуємо екстремальні властивості функції (2). Маємо

$$\frac{d\Pi}{d\psi} = \gamma\psi = 0 \Rightarrow \psi = 0, \quad \left. \frac{d^2\Pi}{d\psi^2} \right|_{\psi=0} = \gamma > 0.$$

Звідси випливає, що положення маховичка, яке визначається кутом $\psi = 0$, є положенням стійкої рівноваги при $\gamma > 0$.

5. Немає потреби вибирати нову узагальнену координату для даної задачі, оскільки координата ψ відлічується від положення стійкої рівноваги.

6. Визначаємо кінетичну енергію системи. Оскільки пружина невагома, то кінетична енергія системи у відносному русі дорівнює кінетичній енергії маховичка:

$$T = \frac{J \dot{\psi}^2}{2}. \quad (3)$$

7. З рівнянь (2) та (3) випливає, що коефіцієнт пружності системи дорівнює жорсткості пружини γ , тобто $c = \gamma$; коефіцієнт інерції системи дорівнює моменту інерції маховичка J , тобто $a = J$.

8. Визначимо узагальнену збудовальну силу. У цій задачі збудовальні сили — це переносні сили інерції. Головний момент переносних сил інерції маховичка відносно осі вала дорівнює $J \left| \ddot{\varphi} \right|$. Він прагне обертати маховичок у протилежний бік його прискореного обертання (рис. 27.14, б). Щоб знайти узагальнену силу, скористаємося правилом, наведеним у кінці параграфу 27.2. Надамо узагальненій координаті ψ приросту $\Delta\psi \cong d\psi$ (рис. 27.14, б) та визначимо елементарну роботу переносних сил інерції маховичка на цьому переміщенні:

$$d'A = J \left| \ddot{\varphi} \right| d\psi.$$

Зауважимо, що елементарна робота сили ваги маховичка на цьому переміщенні дорівнює нулю за припущенням $y_C = 0$. Звідси видно, що узагальнена збудовальна сила

$$Q_{\varphi}^{(3)} = J \left| \ddot{\varphi} \right| = J\varphi_0\omega^2 \sin \omega t. \quad (4)$$

9. На підставі рівнянь (2)—(4) складаємо диференціальне рівняння відносного обертання маховичка:

$$J \ddot{\psi} + \gamma\psi = J\varphi_0\omega^2 \sin \omega t,$$

або

$$\ddot{\psi} + k^2\psi = \varphi_0\omega^2 \sin \omega t, \quad (5)$$

де $k^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{J}}$ — частота власних коливань маховичка.

Припускаючи, що $\omega \neq k$, шукаємо частинний розв'язок рівняння (5) у вигляді

$$\psi = A \sin \omega t, \quad (6)$$

де A — амплітуда змушених коливань маховичка. Визначаємо A так, щоб розв'язок (6) задовольняв рівняння (5). Підставляємо розв'язок (6) у рівняння (5) та порівнюємо співмножники при $\sin \omega t$ ліворуч і праворуч. Це можна зробити, оскільки розв'язок (6) має місце за будь-яких значень часу t :

$$(-\omega^2 + k^2)A = \varphi_0 \omega^2 \Rightarrow A = \frac{\varphi_0 \omega^2}{k^2 - \omega^2}.$$

Таким чином, змушені коливання маховичка відносно положення стійкої рівноваги описуються рівнянням

$$\psi = \frac{\varphi_0 \omega^2}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t = \frac{\varphi_0}{n^2 - 1} \sin \omega t. \quad (7)$$

10. Аналізуємо розв'язок (7). Величина $n = \frac{k}{\omega}$ називається *безрозмірною частотою*. Чим більша n , тим менша амплітуда змушених коливань, і навпаки. При $k < \omega$, $n^2 < 1$ розв'язок (7) матиме такий вигляд:

$$\psi = \frac{\varphi_0}{1 - n^2} \sin(\pi + \omega t).$$

Звідси випливає, що змушені коливання маховичка при малій частоті власних коливань порівняно з частотою збудовувальних сил відбуваються з випередженням за фазою на величину π порівняно з фазою збудовувальної сили.

Задачі з теорії малих коливань системи з двома ступенями вільності у загальній постановці рекомендується розв'язувати у такій послідовності:

1) вибрати механічну систему та переконатися в тому, що вона має два ступеня вільності;

2) вибрати дві довільні узагальнені координати та знайти потенціальну енергію системи як функцію цих координат;

3) знайти положення системи, в якому значення потенціальної енергії буде мінімальним, тобто знайти положення стійкої рівноваги системи, в околі якої система здійснює малі коливання.

Зазначимо, що в деяких випадках системи з двома ступенями вільності так само, як у випадку системи з одним ступенем вільності, положення стійкої рівноваги є очевидним, в інших необхідно визначити співвідношення між параметрами системи, за якого знайдене (або очевидне) положення рівноваги буде стійким;

4) вибрати нові узагальнені координати, відлічуючи їх від положення стійкої рівноваги;

5) знайти вираз потенціальної та кінетичної енергії, дисипативної функції системи з точністю до величин другого порядку малості відносно нових узагальнених координат q_1 , q_2 та узагальнених швидкостей \dot{q}_1 , \dot{q}_2 , припускаючи, що вони є величинами першого порядку малості;

6) знайти збурювальні сили, що діють на точки системи, визначити узагальнені збурювальні сили;

7) підставити величини, отримані при виконанні п. 5 та 6, у рівняння Лагранжа II роду. Спростити та проінтегрувати ці рівняння; розв'язок рівнянь підпорядкувати початковим умовам.

Нагадуємо, що змушені коливання системи визначаються частинним розв'язком системи неоднорідних диференціальних рівнянь і не залежать від початкових умов;

8) проаналізувати одержані результати.

Зазначимо, що в деяких задачах для відповіді на поставлені запитання немає потреби виконувати всі етапи. У цьому випадку відповідні етапи опускаємо.

Приклад 27.9. Подвійний фізичний маятник складається з однорідного прямолінійного стрижня O_1O_2 , що має довжину $2a$ і вагу P_1 та може обертатися навколо нерухомої горизонтальної осі O_1 , і з однорідного прямолінійного стрижня AB , що має вагу P_2 . Стрижень AB шарнірно з'єднаний своїм центром мас з кінцем O_2 першого стрижня (рис. 27.15). Визначити рух системи, якщо в початковий момент стрижень O_1O_2 відхилений на кут φ_0 від вертикалі, а стрижень AB займає вертикальне положення і має початкову кутову швидкість ω_0 .

Розв'язання

1. Розглядаємо механічну систему — подвійний фізичний маятник. Система має два ступені вільності, оскільки два обмеження перетворюють її у нерухому систему: одне ліквідує обертання навколо осі O_1 , друге — навколо осі O_2 .

2. За узагальнені координати беремо кути φ та ψ (рис. 27.15). Визначимо потенціальну енергію системи як функцію цих координат. Маємо

$$\Pi = \Pi_{O_1O_2} + \Pi_{AB}, \quad (1)$$

де $\Pi_{O_1O_2}$, Π_{AB} — потенціальна енергія відповідно стрижнів O_1O_2 та AB .

Щоб визначити потенціальну енергію, застосуємо відому формулу

$$\Pi = -\int dA + \text{const}. \quad (2)$$

Вибираємо вісь O_1x , як зображено на рис. 27.15. Дістанемо

$$\Pi_{O_1O_2} = -\int P_{1x} dx_1 + \text{const}, \quad \Pi_{AB} = -\int P_{2x} dx_2 + \text{const}.$$

Інтегруємо:

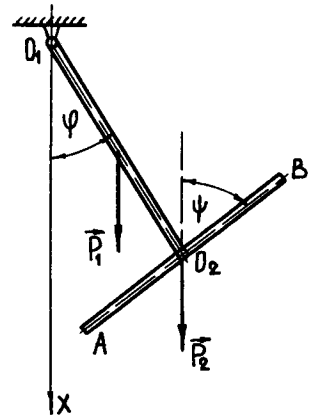


Рис. 27.15

$$\Pi_{O_1O_2} = -P_1x_1 + \text{const}, \quad \Pi_{AB} = -P_2x_2 + \text{const}. \quad (3)$$

де x_1, x_2 — координати центра мас відповідних стрижнів.

З рис. 27.15 визначаємо:

$$x_1 = a \cos \varphi, \quad x_2 = 2a \cos \varphi. \quad (4)$$

Підставляємо ці значення в рівність (3):

$$\Pi = -(P_1 + 2P_2)a \cos \varphi + \text{const}. \quad (5)$$

З виразу (5) випливає, що потенціальна енергія системи не залежить від узагальненої координати ψ .

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (5). Маємо

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = (P_1 + 2P_2)a \sin \varphi = 0.$$

Звідси знаходимо: $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$.

Визначаємо знак другої похідної:

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = (P_1 + 2P_2)a \cos \varphi, \quad \left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = (P_1 + 2P_2)a > 0,$$

$$\left. \frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\pi} = -(P_1 + 2P_2)a < 0.$$

Таким чином, значення $\varphi_1 = 0$ відповідає мінімуму потенціальної енергії. За теоремою Діріхле положення стійкої рівноваги системи визначається кутом $\varphi_1 = 0$. При цьому кут ψ може бути будь-яким. Будемо відлічувати кут φ від вертикального положення стрижня AB , як зображено на рис. 27.15. Тоді у положенні стійкої рівноваги кут $\psi = 0$.

4. Оскільки в положенні стійкої рівноваги узагальнені координати φ та ψ дорівнюють нулю, то вибирати нові узагальнені координати не потрібно.

5. Вираз потенціальної енергії (5) перетворюємо так, щоб він утримував малі величини до другого порядку включно, якщо визнавати φ величиною першого порядку малості. Для цього розкладаємо $\cos \varphi$ у ряд Маклорена:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots$$

У цьому розкладі утримуємо два перших члени і підставляємо їх у рівність (5). Маємо наближений вираз потенціальної енергії:

$$\Pi \cong -(P_1 + 2P_2)a \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) + \text{const.} \quad (6)$$

Сталу інтегрування const можна визначити так, щоб у положенні стійкої рівноваги потенціальна енергія дорівнювала нулю:

$$\Pi(\varphi)\Big|_{\varphi=0} = -(P_1 + 2P_2)a + \text{const} = 0.$$

Звідси

$$\text{const} = (P_1 + 2P_2)a.$$

Підставляючи це значення в рівність (6), маємо

$$\Pi = (P_1 + 2P_2) \frac{a\varphi^2}{2}. \quad (7)$$

Визначаємо кінетичну енергію системи:

$$T = T_{O_1O_2} + T_{AB},$$

де $T_{O_1O_2}$, T_{AB} — кінетична енергія відповідно стрижнів O_1O_2 та AB .

Стрижень O_1O_2 обертається навколо нерухомої осі O_1 , а стрижень AB здійснює плоскопаралельний рух. Отже,

$$T_{O_1O_2} = \frac{J_{O_1} \dot{\varphi}^2}{2}, \quad T_{AB} = \frac{P_2}{2g} V_{O_2}^2 + \frac{J_{O_2} \dot{\psi}^2}{2};$$

$$J_{O_1} = \frac{P_1 (2a)^2}{g \cdot 3}, \quad V_{O_2} = 2a \dot{\varphi}, \quad J_{O_2} = \frac{P_2 l^2}{g \cdot 12},$$

де l — довжина стрижня AB .

Після елементарних перетворень знаходимо вираз кінетичної енергії системи:

$$T = \frac{a^2 \dot{\varphi}^2}{g} \left(\frac{2}{3} P_1 + 2P_2 \right) + \frac{P_2 l^2 \dot{\psi}^2}{24g}. \quad (8)$$

6. Складаємо рівняння Лагранжа II роду. Система, що розглядається, є консервативною, оскільки активні сили (сили ваги) потенціальні. У цьому випадку рівняння Лагранжа II роду відносно φ та ψ мають вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad (9)$$

де $L = T - \Pi$ — кінетичний потенціал системи.

Беручи до уваги рівності (7) та (9), визначаємо похідні, що містять рівняння (9):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{4a^2 \dot{\varphi}}{3g} (P_1 + 3P_2); \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -(P_1 + 2P_2) a \varphi;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{P_2 l^2 \dot{\psi}}{12g}; \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = 0.$$

Ці вирази підставляємо в рівняння (9). Після елементарних перетворень знаходимо диференціальне рівняння руху системи:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad \ddot{\psi} = 0, \quad (10)$$

де

$$k^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{P_1 + 2P_2}{P_1 + 3P_2} \right) \frac{g}{a}. \quad (10a)$$

Інтегруємо рівняння (10):

$$\varphi = A \sin(kt + \alpha), \quad \psi = c_1 t + c_2. \quad (11)$$

Чотири сталі інтегрування визначаємо так, щоб задовольнялися початкові умови задачі. За початковий час беремо той момент часу, в якому стрижень $O_1 O_2$ є відхиленим від вертикалі на кут φ_0 , а стрижень AB займає вертикальне положення і має кутову швидкість ω_0 . Тоді при $t = 0$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \psi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = \omega_0. \quad (12)$$

Щоб задовольнити ці початкові умови, необхідно знати закон зміни за часом функцій $\dot{\varphi}$ та $\dot{\psi}$. На підставі рівностей (11)

$$\dot{\varphi} = Ak \cos(kt + \alpha), \quad \dot{\psi} = c_1. \quad (13)$$

Початкові умови (12) підставляємо в рівності (11) та (13). Знаходимо:

$$\varphi_0 = A \sin \alpha; \quad c_2 = 0; \quad 0 = Ak \cos \alpha; \quad \omega_0 = c_1. \quad (14)$$

Звідси визначаємо: $c_1 = \omega_0$, $c_2 = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $A = \varphi_0$.

Ці значення сталих підставляємо в рівності (11):

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt, \quad \psi = \varphi_0 t.$$

Одержані рівності є кінематичними рівняннями руху системи, з яких випливає, що стрижень O_1O_2 здійснює гармонічні коливання, а стрижень AB рівномірно обертається навколо свого центра мас.

З виразів (8) та (9) випливає, що потенціальна та кінетична енергії системи утримують узагальнені координати та узагальнені швидкості системи тільки у другому ступені. При цьому координата ψ не входить явно у функцію L . Таким чином, узагальнені координати φ та ψ є головними координатами, а координата ψ , окрім того, є циклічною координатою. Тому кожна координата визначена з незалежного рівняння, а координата ψ — із закону збереження узагальненого імпульсу:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{P_2 l^2}{12g} \dot{\psi} = \frac{P_2 l^2}{12g} \omega_0 = \text{const.}$$

Приклад 27.10. Дослідити коливання залізничного вагона (рис. 27.16, а) в його середній вертикальній площині, якщо вага підресорної частини вагона P , відстань центра мас від вертикальних площин, що проходять через осі, $l_1 = l_2 = l$; радіус інерції відносно центральної осі, паралельної осям вагона, ρ ; жорсткість ресор обох осей однакова: $c_1 = c_2 = c$.

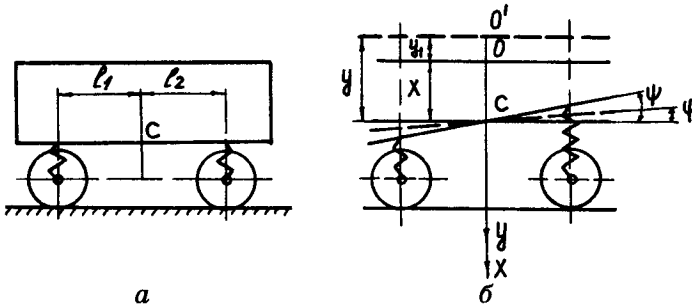


Рис. 27.16

Розв'язання

1. Розглянемо систему, що складається з вагона та двох ресор. Система має два ступеня вільності, оскільки два обмеження перетворюють її в нерухому систему відносно рейок. Одне обмеження ліквідує переміщення центра мас вагона по вертикалі, друге — обертання навколо центральної осі, паралельної осям вагона.

2. Нехай центр мас вагона при недеформованих ресорах розташований в точці O' (рис. 27.16, б). Візьмемо цю точку за початок відліку координати y центра мас вагона. За узагальнені координати беремо координату y та кут обертання підлоги вагона φ відносно центральної осі, паралельної осям коліс вагона: $q_1 = y$, $q_2 = \varphi$. Знайдемо потенціальну енергію системи як функцію узагальнених координат:

$$\Pi = \Pi_{\text{в}} + \Pi_{\text{р}}, \quad (1)$$

де $\Pi_{\text{в}}$, $\Pi_{\text{р}}$ — потенціальна енергія відповідно вагона та ресор. Визначимо кожну складову рівняння (1):

$$\Pi_{\text{в}} = -\int dA + \text{const}; \quad dA = Pdy; \quad \Pi_{\text{р}} = -Py + \text{const}. \quad (2)$$

Визначаючи потенціальну енергію ресор, беремо до уваги, що їх деформації неоднакові. Знаходимо:

$$\Pi_{\text{р}} = \frac{c}{2}(y + l \sin \varphi)^2 + \frac{c}{2}(y - l \sin \varphi)^2 + \text{const}. \quad (3)$$

На підставі рівностей (1)—(3) визначаємо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = \frac{c}{2}(y + l \sin \varphi)^2 + \frac{c}{2}(y - l \sin \varphi)^2 - Py + \text{const}. \quad (4)$$

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (4):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = c(y + l \sin \varphi) + c(y - l \sin \varphi) - P = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c(y + l \sin \varphi)l \cos \varphi - c(y - l \sin \varphi)l \cos \varphi = 0.$$

Після спрощення цієї системи знаходимо:

$$2cy - P = 0; \quad cl^2 \sin 2\varphi = 0.$$

Звідси визначаємо два положення рівноваги системи:

$$y_{1,2} = \frac{P}{2c}; \quad \varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Доведемо, що положення системи, що визначається координатами

$y_1 = \frac{P}{2c}$, $\varphi_1 = 0$, відповідає мінімуму потенціальної енергії.

З курсу математики відомо, що функція двох змінних $z = f(x, y)$ має мінімум, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ і

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0.$$

У задачі, що розглядається, маємо:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 2c > 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = 2cl^2 \cos 2\varphi, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial \varphi} = 0;$$

$$\Delta(\varphi) = 4cl^2 \cos 2\varphi, \quad \Delta(\varphi_1) = 4cl^2 > 0, \quad \Delta(\varphi_2) = -4cl^2.$$

Таким чином, на підставі теореми Діріхле стверджуємо, що положення системи, що визначається координатами $y_1 = \frac{P}{2c}$, $\varphi_1 = 0$, є положенням стійкої рівноваги, оскільки у цьому положенні потенціальна енергія системи має мінімальне значення.

4. На рис. 27.16, б показано положення стійкої рівноваги. Візьмемо це положення за початок відліку нових узагальнених координат x та $\psi = \varphi$.

5. Визначаємо потенціальну та кінетичну енергію системи у вигляді функцій узагальнених координат x , ψ та їх похідних. Для положення системи, що визначається координатами x та ψ , потенціальну енергію знайдемо

на підставі рівності (4), беручи до уваги, що $y = y_1 + x = \frac{P}{2c} + x$, $\varphi = \psi$:

$$\Pi = \frac{c}{2} \left(\frac{P}{2c} + x + l \sin \psi \right)^2 + \frac{c}{2} \left(\frac{P}{2c} - l \sin \psi + x \right)^2 - P \left(\frac{P}{2c} + x \right) + \text{const.} \quad (5)$$

У теорії малих коливань, як відомо, припускають, що узагальнені координати та узагальнені швидкості є величинами першого порядку малості. Обмежувачись величинами другого порядку малості, утримуємо у розкладі

$$\sin \psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \dots$$

лише перший член ряду. Тоді вираз (5) набирає вигляду

$$\Pi = \frac{c}{2} \left(\frac{P}{2c} + x + l\psi \right)^2 + \frac{c}{2} \left(\frac{P}{2c} + x - l\psi \right)^2 - P \left(\frac{P}{2c} + x \right) + \text{const.} \quad (6)$$

Сталу інтегрування const визначаємо так, щоб потенціальна енергія у положенні стійкої рівноваги дорівнювала нулю, тобто визначаємо з рівняння

$$\Pi(x, \psi)_{\substack{x=0 \\ \psi=0}} = \frac{c}{2} \left(\frac{P}{2c} \right)^2 + \frac{c}{2} \left(\frac{P}{2c} \right)^2 - \frac{P^2}{2c} + \text{const} = 0.$$

Звідси

$$\text{const} = \frac{P^2}{4c}. \quad (7)$$

У рівняння (5) підставляємо вираз (7):

$$\Pi = c(x^2 + l^2\psi^2). \quad (8)$$

Визначаємо кінетичну енергію системи, зважаючи на те, що вагон рухається плоскопаралельно, а пружини не мають мас:

$$T = \frac{P \dot{x}^2}{2g} + \frac{J_c \dot{\psi}^2}{2}, \quad (9)$$

де $J_c = \frac{P}{g} \rho^2$ — момент інерції вагона відносно його центральної осі, що є паралельною осям коліс вагона. Зі співвідношень (8) та (9) видно, що координати x та ψ є головними координатами, оскільки Π та T не мають доданків вигляду відповідно $x\psi$ та $\dot{x}\dot{\psi}$.

6. Складаємо рівняння Лагранжа II роду. Система є консервативною, оскільки сили, що діють на неї (сила ваги та дві сили пружності), потенціальні.

Рівняння Лагранжа II роду для консервативної системи відносно координат x та ψ мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad (10)$$

де $L = T - \Pi$ — кінетичний потенціал системи.

Знайдемо похідні L , що містить рівняння (10), беручи до уваги вирази (8) та (9):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P}{g} \dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{P}{g} \rho^2 \dot{\psi};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -2cx, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = -2cl^2 \psi.$$

Підставляємо ці похідні в рівняння (10) і після перетворень знайдемо диференціальні рівняння руху системи:

$$\ddot{x} + k_1^2 x = 0, \quad \ddot{\psi} + k_2^2 \psi = 0, \quad (11)$$

де

$$k_1 = \sqrt{\frac{2cg}{P}}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{2cgl^2}{P\rho^2}}. \quad (12)$$

Зі співвідношень (11) видно, що система диференціальних рівнянь розкла-лася на два незалежних рівняння відносно головних координат x та ψ . Рівнян-ня (11) — однорідні диференціальні рівняння другого порядку відносно x та ψ зі сталими коефіцієнтами. Такі рівняння неодноразово розглядалися рані-ше. Не повторюючи відомі методи інтегрування таких рівнянь, знаходимо загальний розв'язок кожного з них:

$$x = A \sin(k_1 t + \alpha), \quad \psi = B \sin(k_2 t + \beta), \quad (13)$$

де сталі A , B , α , β визначаються з початкових умов, а головні частоти систе-ми k_1 та k_2 — з рівностей (12).

Визначаємо сталі A , B , α , β за такими, наприклад, початковими умовами при $t = 0$:

$$x(0) = -\frac{P}{2c}; \quad \psi(0) = \psi_0; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad \dot{\psi}(0) = 0. \quad (14)$$

Знайдемо похідні від функцій (13):

$$\dot{x} = Ak_1 \cos(k_1 t + \alpha), \quad \dot{\psi} = Bk_2 \cos(k_2 t + \beta). \quad (15)$$

У рівності (13) та (15) підставляємо початкові умови (14). Знаходимо рівнян-ня для визначення чотирьох сталих інтегрування:

$$-\frac{P}{c} = A \sin \alpha; \quad \psi_0 = B \sin \beta; \quad 0 = Ak_1 \cos \alpha; \quad 0 = Bk_2 \cos \beta.$$

З двох останніх рівнянь знаходимо $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$. Підставляючи ці значення

в два перших рівняння, отримуємо: $A = -\frac{P}{c}$, $B = \psi_0$.

Розв'язок (13) у цьому випадку має вигляд:

$$x = -\frac{P}{c} \cos k_1 t, \quad \psi = \psi_0 \cos k_2 t. \quad (16)$$

Кожна узагальнена координата змінюється за гармонічним законом. Якщо взяти $\psi_0 = 0$, то вагон буде рухатися поступально разом з центром мас.

Приклад 27.11. Дослідити малі вільні коливання навантаженої платформи, що має вагу P і опирається в точках A і B на дві ресори однакової жорсткості c (рис. 27.17, *a*). Центр мас C платформи з вантажем розташований на прямій AB , причому $AC = a$, $CB = b$. Платформу виведено з положення рівноваги шляхом надання центру мас початкової швидкості V_0 , що має напрям вертикально вниз без початкового відхилення. Масою ресор та силами тертя знехтувати. Момент інерції платформи відносно горизонтальної поперечної осі, що проходить через центр мас платформи, $J_C = 0,1(a^2 + b^2) \frac{P}{g}$. Коливання

відбуваються у вертикальній площині. За узагальнені координати взяти: y — відхилення центра мас від положення рівноваги до низу, ψ — кут обертання платформи навколо центра мас.

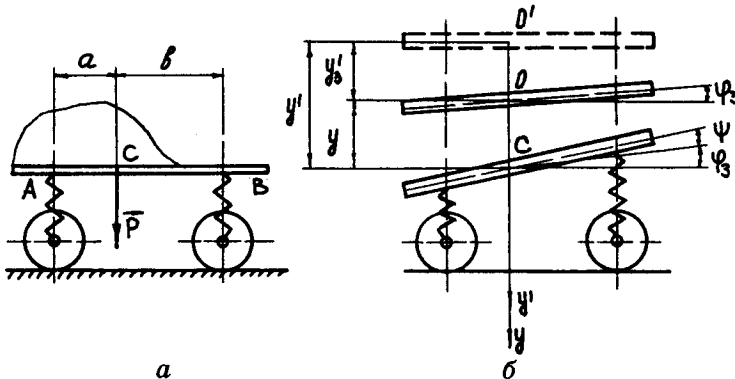


Рис. 27.17

Розв'язання

1. Система, що розглядається, складається з платформи з вантажем та двох ресор. Вона має два ступеня вільності, оскільки два обмеження перетворюють її у нерухому систему відносно рейок. Надалі, щоб скоротити нову назву, платформу з вантажем будемо називати платформою.

2. Нехай центр мас платформи при недеформованих ресорах розміщений у точці O' (рис. 27.17, б). Візьмемо цю точку за початок відліку координати y' центра мас платформи. За другу узагальнену координату візьмемо кут φ — кут обертання платформи навколо центра мас ($q_1 = y'$, $q_2 = \varphi$). Знайдемо потенціальну енергію системи як функцію узагальнених координат.

Маємо

$$\Pi = \Pi_n + \Pi_p, \quad (1)$$

де Π_n , Π_p — потенціальна енергія відповідно платформи та ресор.

Визначимо кожну з них:

$$\Pi_n = -\int dA + \text{const}; \quad dA = Pdy'; \quad \Pi_n = -Py' + \text{const}. \quad (2)$$

Беремо до уваги, що платформа опирається на дві різні деформовані ресори. Тому

$$\Pi_p = \frac{c}{2}(y' + a \sin \varphi)^2 + \frac{c}{2}(y' - b \sin \varphi)^2 + \text{const}. \quad (3)$$

Потенціальну енергію знаходимо на підставі співвідношень (1)—(3):

$$\Pi = \frac{c}{2}(y' + a \sin \varphi)^2 + \frac{c}{2}(y' - b \sin \varphi)^2 - Py' + \text{const}. \quad (4)$$

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (4). Точки екстремуму знаходимо із системи рівнянь:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y'} = c(y' + a \sin \varphi) + c(y' - b \sin \varphi) - P = 0;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c(y' + a \sin \varphi) a \cos \varphi - c(y' - b \sin \varphi) b \cos \varphi = 0.$$

Подамо цю систему у вигляді

$$\begin{aligned} 2cy' + c(a - b)\sin \varphi - P &= 0, \\ cy'(a - b)\cos \varphi + c(a^2 + b^2)\sin \varphi \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

З першого рівняння системи (5) знаходимо

$$y' = \frac{1}{2c}[P - c(a - b)\sin \varphi]. \quad (6)$$

Підставляючи цей вираз у друге рівняння, одержимо рівняння відносно кута φ :

$$\frac{1}{2} \left[P(a-b) + c(a+b)^2 \sin \varphi \right] \cos \varphi = 0. \quad (7)$$

Розв'язуючи рівняння (7), знаходимо значення кутів:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{3}{2}\pi, \quad \varphi_3 = \arcsin \frac{P(b-a)}{c(a+b)^2}, \quad (8)$$

які підставляємо в рівність (6) і знаходимо три значення ординати центра мас платформи:

$$y'_1 = \frac{1}{2c} [P - c(a-b)]; \quad y'_2 = \frac{1}{2c} [P + c(a-b)]; \quad y'_3 = \frac{P(a^2 + b^2)}{c(a+b)^2}.$$

Таким чином, маємо три положення рівноваги системи.

Зазначимо, що при $a = b$ рівності (6) та (7) матимуть такий вигляд:

$$y' = \frac{P}{2c}, \quad ca^2 \sin 2\varphi = 0.$$

Звідси визначаємо два положення рівноваги системи:

$$y_1 = \frac{P}{2c}, \quad \varphi_1 = 0; \quad y_2 = \frac{P}{2c}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Переконаємося у тому, що потенціальна енергія має мінімум у положенні $q_1 = y'_3$; $q_2 = \varphi_3$. Визначаємо другі похідні Π :

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial (y')^2} = 2c; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -cy'(a-b) \sin \varphi + c(a^2 + b^2) \cos 2\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y' \partial \varphi} = c(a-b) \cos \varphi.$$

Складаємо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial (y')^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y' \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y' \partial \varphi} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \end{vmatrix} = 2c \left[-cy'(a-b) \sin \varphi + c(a^2 + b^2) \cos 2\varphi \right] - \\ - c^2 (a-b)^2 \cos^2 \varphi = c^2 \left[2y'(b-a) \sin \varphi - 2(a^2 + b^2) \sin^2 \varphi + (a+b)^2 \cos^2 \varphi \right].$$

Обчислюємо значення цього визначника у трьох положеннях рівноваги системи:

$$1) \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, y'_1 = \frac{1}{2c} [P - c(a - b)], \Delta_1 = c^2 \left[\frac{P}{c}(b - a) - (a + b)^2 \right];$$

$$2) \varphi_2 = \frac{3}{2}\pi, y'_2 = \frac{1}{2c} [P + c(a - b)], \Delta_2 = -c^2 \left[\frac{P}{c}(b - a) + (a + b)^2 \right];$$

$$3) \varphi_3 = \arcsin \frac{P(b - a)}{c(a + b)^2}, y'_3 = \frac{P(a^2 + b^2)}{c(a + b)^2}, \Delta_3 = \frac{c^2(a + b)^4 - P^2(b - a)^2}{(a + b)^2}.$$

Визначаємо знаки величин $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Зі знайдених виразів випливає, що

$\Delta_1 > 0$, якщо $\frac{P}{c} > \frac{(a + b)^2}{b - a}$. Ця нерівність має виконуватися за будь-яких значень величин a та b і, отже, при $a = b$. Однак у цьому випадку нерівність не має сенсу. Наведене дає підставу стверджувати, що Δ_1 не є додатною величиною і, отже, перше положення не відповідає мінімуму потенціальної енергії системи, тобто не є положенням стійкої рівноваги. Друге положення рівноваги також не є стійким, оскільки $\Delta_2 < 0$ за припущенням $b > a$. За умови

$\frac{P}{c} < \frac{(a + b)^2}{b - a}$ маємо $\Delta_3 > 0$. Припускаючи, що ця умова виконується, та беручи

до уваги, що $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial (y')^2} = 2c > 0$, стверджуємо, що третє положення рівноваги системи є положенням стійкої рівноваги, якщо виконується умова

$$P \geq 2c(b - a).$$

4. На рис. 27.17, б положення стійкої рівноваги системи визначено координатами y'_3, φ_3 . Беремо нові узагальнені координати y та ψ , відлічуючи їх від положення стійкої рівноваги.

5. Визначаємо потенціальну та кінетичну енергію системи у вигляді функцій узагальнених координат y, ψ та їх похідних.

Для положення системи, що визначається координатами y та ψ (рис. 27.17, б), потенціальну енергію знайдемо на підставі рівності (4) та співвідношень $y' = y'_3 + y, \varphi = \varphi_3 + \psi$:

$$\Pi = \frac{c}{2} [y'_3 + y + a \sin(\varphi_3 + \psi)]^2 + \frac{c}{2} [y'_3 + y - b \sin(\varphi_3 + \psi)]^2 - P(y'_3 + y) + \text{const.} \quad (9)$$

У теорії малих коливань, як відомо, припускають, що узагальнені швидкості є величинами першого порядку малості. Обмежуючись величинами другого порядку малості, розкладемо $\sin(\varphi_3 + \psi)$ у ряд Маклорена:

$$\sin(\varphi_3 + \psi) = \varphi_3 + \psi - \frac{1}{3!}(\varphi_3 + \psi)^3 + \dots$$

та утримуємо у цьому розкладі перший член. Тоді наближене значення потенціальної енергії системи буде визначатися за рівністю

$$\Pi \cong \frac{c}{2} [y'_3 + y + a(\varphi_3 + \psi)]^2 + \frac{c}{2} [y'_3 + y - b(\varphi_3 + \psi)]^2 - P(y'_3 + y) + \text{const.} \quad (10)$$

Цей вираз можна спростити, якщо взяти до уваги рівності

$$y'_3 = \frac{P(a^2 + b^2)}{c(a+b)^2}; \quad \sin \varphi_3 \cong \varphi_3 = \frac{P(b-a)}{c(a+b)^2}.$$

Маємо

$$y'_3 + a\varphi_3 = \frac{Pb}{c(a+b)}; \quad y'_3 - b\varphi_3 = \frac{Pa}{c(a+b)}. \quad (11)$$

Крім того, сталу інтегрування const у виразі (10) можна підібрати за умови перетворення в нуль потенціальної енергії в положенні стійкої рівноваги:

$$\Pi \Big|_{\substack{y=0 \\ \psi=0}} = \frac{c}{2} (y'_3 + a\varphi_3)^2 + \frac{c}{2} (y'_3 - b\varphi_3)^2 - Py'_3 + \text{const} = 0.$$

Звідси знаходимо, маючи на увазі рівності (11):

$$\text{const} = Py'_3 - \frac{c}{2} [(y'_3 + a\varphi_3)^2 + (y'_3 - b\varphi_3)^2] = 0. \quad (12)$$

На підставі співвідношень (11) та (12) рівність (10) набирає вигляду

$$\Pi = \frac{c}{2} [(y + a\psi)^2 + (y - b\psi)^2]. \quad (13)$$

Визначасмо кінетичну енергію системи. Оскільки масою ресор нехтуємо, а платформа рухається плоскопаралельно, то на підставі відомої формули знаходимо

$$T = \frac{P}{g} \cdot \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{1}{2} J_c \dot{\psi}^2. \quad (14)$$

6. Система, що розглядається, є консервативною, оскільки сили, що діють на неї, є потенціальними. Рівняння (27.21) у цьому випадку набирає вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad (15)$$

Підставляємо сюди значення $L = T - \Pi$ з рівностей (13) та (14) та визначаємо попередньо похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{P}{g} \dot{y}, & \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -c[2y + (a-b)\psi]; \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = J_c \dot{\psi}, & \frac{\partial L}{\partial \psi} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = -c[(a-b)y + (a^2 + b^2)\psi]. \end{aligned} \quad (16)$$

Підставляючи вирази (16) в рівняння (15), знаходимо диференціальні рівняння малих коливань системи:

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \ddot{y} + 2cy + c(a-b)\psi &= 0, \\ J_c \ddot{\psi} + c(a-b)y + c(a^2 + b^2)\psi &= 0, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{y} + c_{11}y + c_{12}\psi &= 0; \\ a_{22} \ddot{\psi} + c_{21}y + c_{22}\psi &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

де $a_{11} = \frac{P}{g}$; $c_{11} = 2c$; $c_{12} = c_{21} = c(a-b)$; $c_{22} = c(a^2 + b^2)$.

Рівності (17) — система двох однорідних диференціальних рівнянь другого порядку відносно y та ψ зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок системи (17) шукаємо у вигляді

$$y = A \sin(kt + \beta), \quad \psi = B \sin(kt + \beta), \quad (18)$$

де A , B , k , α необхідно підібрати так, щоб задовольнялися рівняння (17) та початкові умови при $t = 0$:

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = V_0; \quad \psi(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = 0. \quad (19)$$

Розв'язок (18) підставляємо в рівняння (17). Після перетворень знаходимо:

$$\begin{aligned}(-k^2 a_{11} + c_{11})A + c_{12} + B &= 0; \\ c_{21}A + (-k^2 a_{22} + c_{22})B &= 0.\end{aligned}\quad (20)$$

Рівності (20) — система двох алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів A та B . Вона має розв'язок, відмінний від нуля, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -k^2 a_{11} + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -k^2 a_{22} + c_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$(-k^2 a_{11} + c_{11})(-k^2 a_{22} + c_{22}) - c_{12}^2 = 0. \quad (21)$$

Рівність (21) є алгебричним рівнянням другого ступеня відносно k і називається характеристичним рівнянням системи (17).

Розв'язуючи рівняння (21), знаходимо головні частоти системи:

$$k_{1,2}^2 = \frac{6cg}{P} \left[1 \pm \sqrt{1 - 0,278 \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2}} \right]. \quad (22)$$

Ця рівність визначає дві пари коренів характеристичного рівняння. Як було зазначено, при знаходженні незалежних частинних розв'язків беруть до уваги тільки корені з додатними знаками.

Якщо підставити значення $+k_1$ та $+k_2$ у систему (20), то одне з рівнянь системи буде наслідком другого ($+k_1$ та $+k_2$ підібрані так, що визначник цієї системи дорівнює нулю). Таким чином, із системи (20) можна визначити лише відношення шуканих коефіцієнтів:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1^2 a_{11} - c_{11}}{c_{12}} = \frac{k_1^2 \frac{P}{g} - 2c}{c(a-b)}, \quad \frac{B_2}{A_2} = \frac{k_2^2 a_{11} - c_{11}}{c_{12}} = \frac{k_2^2 \frac{P}{g} - 2c}{c(a-b)}.$$

Звідси знаходимо зв'язок між шуканими коефіцієнтами:

$$B_1 = A_1 \frac{2c - \frac{P}{g} k_1^2}{c(b-a)} = A_1 \alpha_1, \quad B_2 = A_2 \frac{2c - k_2^2 \frac{P}{g}}{c(b-a)} = A_2 \alpha_2.$$

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{aligned} y &= A_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(k_2 t + \beta_2); \\ \psi &= A_1 \alpha_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + A_2 \alpha_2 \sin(k_2 t + \beta_2). \end{aligned} \quad (23)$$

Підпорядковуємо цей розв'язок початковим умовам (19). Попередньо знайдемо похідні за часом розв'язків (23):

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + A_2 k_2 \cos(k_2 t + \beta_2); \\ \dot{\psi} &= A_1 \alpha_1 k_1 \cos(k_1 t + \beta_1) + A_2 \alpha_2 k_2 \cos(k_2 t + \beta_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Підставляючи в рівності (23) та (24) початкові умови (19), маємо систему чотирьох рівнянь для визначення величин A_1 , A_2 , α_1 , α_2 :

$$\begin{aligned} A_1 \sin \beta_1 + A_2 \sin \beta_2 &= 0; \quad A_1 k_1 \cos \beta_1 + A_2 k_2 \cos \beta_2 = V_0; \\ A_1 \alpha_1 \sin \beta_1 + A_2 \alpha_2 \sin \beta_2 &= 0; \quad A_1 \alpha_1 k_1 \cos \beta_1 + A_2 \alpha_2 k_2 \cos \beta_2 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Перше рівняння множимо на α_1 та віднімаємо від нього друге.

Маємо

$$A_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \sin \beta_2 = 0.$$

У даному випадку $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Тому знайдена рівність справедлива, якщо $\sin \beta_2 = 0$. Отже, $\beta_2 = 0$. Підставляючи це значення в одне з двох перших рівнянь, знаходимо

$$A_1 \alpha_1 \sin \beta_1 = 0.$$

Звідси випливає, що $\beta_1 = 0$, оскільки $\alpha_1 \neq 0$, $A \neq 0$. Значення $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ підставляємо в два останніх рівняння системи (25):

$$A_1 k_1 + A_2 k_2 = V_0; \quad A_1 \alpha_1 k_1 + A_2 \alpha_2 k_2 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему, маємо:

$$A_1 = \frac{V_0 \alpha_2}{k_1 (\alpha_2 - \alpha_1)}; \quad A_2 = \frac{V_0 \alpha_1}{k_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Тоді

$$B_1 = \frac{V_0 \alpha_1 \alpha_2}{k_1 (\alpha_2 - \alpha_1)}; \quad B_2 = \frac{V_0 \alpha_1 \alpha_2}{k_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Розв'язок (23) набирає вигляду:

$$y = \frac{V_0}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{k_1} \sin k_1 t - \frac{\alpha_1}{k_2 \alpha_2} \sin k_2 t \right);$$

$$\psi = \frac{V_0 \alpha_1}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{k_1} \sin k_1 t - \frac{1}{k_2} \sin k_2 t \right),$$

де $k_{1,2}$ — головні частоти системи, що визначаються рівністю (22), а коефіцієнти α_1 та α_2 — співвідношеннями

$$\alpha_1 = \frac{2c - \frac{P}{g} k_1^2}{c(b-a)}; \quad \alpha_2 = \frac{2c - \frac{P}{g} k_2^2}{c(b-a)}.$$

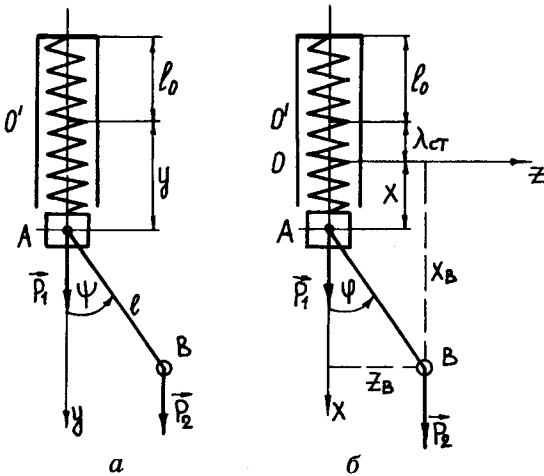


Рис. 27.18

Приклад 27.12. Визначити малі коливання математичного маятника, що має довжину l та вагу P_2 . Маятник підвішений до повзуна A , що рухається вертикально і має вагу P_1 та прикріплений до пружини жорсткістю c (рис. 27.18, *a*). Повзун при русі зазнає опору, що є пропорційним його швидкості (b — коефіцієнт пропорційності). Знайти умови, за яких у випадку $b = 0$ головні частоти цієї системи будуть однаковими.

Розв'язання.

1. Система складена з математичного маятника AB , повзуна A та пружини. Система має два ступеня віль-

ності, оскільки два обмеження перетворюють її у нерухому систему.

2. Нехай недеформована пружина має довжину l_0 та її кінець розміщений в точці O' (рис. 27.18, *б*). Беремо її за початок відліку осі $O'y$, вздовж якої рухається точка A — центр ваги повзуна. За узагальнену координату беремо координати $q_1 = y$, $q_2 = \psi$.

3. Визначаємо потенціальну енергію системи як функцію узагальнених координат y та ψ . Маємо

$$\Pi = \Pi_A + \Pi_B + \Pi_n, \quad (1)$$

де Π_A , Π_B , Π_n — потенціальна енергія відповідно повзуна A , маятника B та пружини. Визначимо кожний доданок, беручи до уваги рис. 27.18, *a*:

$$\begin{aligned} \Pi_A &= -\int dA_1 + \text{const}, \quad \Pi_B = -\int dA_2 + \text{const}, \quad \Pi_{\pi} = \frac{cy^2}{2} + \text{const}; \\ dA_1 &= P_1 dy_1, \quad dA_2 = P_2 dy_2, \quad \Pi_A = -P_1 y_1 + \text{const}, \quad \Pi_B = -P_2 y_2 + \text{const}; \\ y_1 &= y, \quad y_2 = y + l \cos \psi. \end{aligned}$$

На підставі цих співвідношень та рівності (1) визначаємо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = -P_1 y - P_2 (y + l \cos \psi) + \frac{cy^2}{2} + \text{const}. \quad (2)$$

4. Досліджуємо екстремальні властивості функції (2):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -(P_1 + P_2) + cy = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = P_2 l \sin \psi = 0. \quad (3)$$

Розв'язуючи систему (3) відносно y та ψ , знаходимо:

$$y = \frac{P_1 + P_2}{c}, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \pi. \quad (4)$$

Звідси видно, що система має два положення рівноваги:

$$y_1 = \frac{P_1 + P_2}{c}, \quad \psi_1 = 0;$$

$$y_2 = \frac{P_1 + P_2}{c}, \quad \psi_2 = \pi.$$

Переконаємося в тому, що перше положення рівноваги буде положенням стійкої рівноваги системи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} &= c, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \psi^2} = P_2 l \cos \psi, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial \psi} = 0; \\ \Delta &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial \psi} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial \psi} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \psi^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & P_2 l \cos \psi \end{vmatrix} = P_2 l c \cos \psi. \end{aligned}$$

Припускаємо, що $c > 0$. Тоді при $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = c > 0$ у першому положенні рівно-

ваги маємо $\Delta = P_2 l c > 0$, у другому — $\Delta = -P_2 l c < 0$. Відповідно до теорії екс-

тремуму функцій двох змінних у першому положенні рівноваги система має мінімальну потенціальну енергію. На підставі теореми Діріхле переконаємося в тому, що положення системи, яке визначається значеннями узагальне-

них координат $y_1 = \frac{P_1 + P_2}{c}$, $\psi_1 = 0$, є положенням стійкої рівноваги. Величи-

на $\frac{P_1 + P_2}{c}$ називається статичною деформацією пружини. Позначаємо її

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{P_1 + P_2}{c}.$$

5. Положення системи, що визначається координатами $y = \lambda_{\text{ст}}$, $\psi = 0$, беремо за початок відліку узагальнених координат x та φ (рис. 27.18, б).

6. Визначаємо потенціальну та кінетичну енергії системи як функції координат x та φ .

У рівність (2) необхідно підставити $y = \lambda_{\text{ст}} + x$, $\psi = \varphi$. Дістанемо

$$\Pi = -(P_1 + P_2)(\lambda_{\text{ст}} + x) - P_2 l \cos \varphi + \frac{c}{2}(x + \lambda_{\text{ст}})^2 + \text{const.} \quad (5)$$

Коли вивчають малі коливання системи, приймають величину φ малою першого порядку. Щоб у виразі Π зберегти величини до другого порядку малості включно, розкладемо $\cos \varphi$ у ряд Маклорена:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

і залишимо у цьому розкладі два перших члени ряду. Тоді рівність (5) набере вигляду

$$\Pi = -(P_1 + P_2)(\lambda_{\text{ст}} + x) - P_2 l \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{c}{2}(x + \lambda_{\text{ст}})^2 + \text{const.} \quad (6)$$

Сталу інтегрування const підбираємо так, щоб у положенні стійкої рівноваги ($x = 0$, $\varphi = 0$) потенціальна енергія дорівнювала нулю:

$$-(P_1 + P_2)\lambda_{\text{ст}} - P_2 l + \frac{c\lambda_{\text{ст}}^2}{2} + \text{const} = 0.$$

Звідси

$$\text{const} = (P_1 + P_2)\lambda_{\text{ст}} + P_2 l - \frac{c\lambda_{\text{ст}}^2}{2}. \quad (7)$$

Це значення const підставляємо в рівність (6) та беремо до уваги співвідношення $\lambda_{\text{ст}} = \frac{P_1 + P_2}{c}$. Маємо остаточний вираз потенціальної енергії системи:

$$\Pi = P_2 l \frac{\varphi^2}{2} + \frac{cx^2}{2}. \quad (8)$$

Визначаємо кінетичну енергію системи, беручи до уваги, що повзун A рухається поступально, а маятник AB (по суті це точка B , оскільки масою стрижня AB нехтуємо) здійснює складний рух:

$$\Pi = P_2 l \frac{\varphi^2}{2} + \frac{cx^2}{2}. \quad (9)$$

де V_B — абсолютна швидкість точки B .

Знайдемо цю швидкість, використовуючи рис. 27.18, б:

$$\begin{aligned} V_B^2 &= \dot{x}_B^2 + \dot{z}_B^2; \quad x_B = x + l \cos \varphi; \quad z_B = l \sin \varphi; \quad \dot{x}_B = \dot{x} - l \dot{\varphi} \sin \varphi; \\ \dot{z}_B &= l \dot{\varphi} \cos \varphi; \quad V_B^2 = \dot{x}^2 - 2l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \\ &+ l \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Щоб вираз кінетичної енергії мав малі величини до другого порядку малості включно, розкладемо в ряд Маклорена функцію

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots$$

та залишаємо в цьому розкладі перший член. Проте тоді останній доданок у виразі V_B^2 буде величиною третього порядку малості. Відповідно до прийнятої точності цей доданок треба відкинути. Враховуючи це, на підставі рівності (9) знаходимо приблизний вираз кінетичної енергії системи:

$$T = \frac{P_1 \dot{x}^2}{2g} + \frac{P_2}{g} \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 \right). \quad (10)$$

З рівностей (8) та (10) випливає, що координати x та φ є головними координатами, оскільки Π та T мають узагальнені координати x , φ та узагальнені швидкості \dot{x} , $\dot{\varphi}$ тільки у другому ступені. Визначаємо дисипативну функцію Φ . Сила опору $\vec{F}_i = -i\dot{b} \dot{x}$ прикладена тільки до повзуна, що рухається поступально.

На підставі формули (27.29) знаходимо дисипативну функцію системи:

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{x}^2. \quad (11)$$

7. Система, що розглядається, є дисипативною. Рівняння Лагранжа II роду в даному випадку набирають вигляду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}}. \quad (12)$$

Враховуючи рівність $L = T - \Pi$, а також співвідношення (8), (10), (11), знаходимо похідні, що входять у систему (12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P_1 + P_2}{g} \dot{x}; & \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P_2 l^2}{g} \dot{\varphi}; \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -P_2 l \varphi; & \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} &= b \dot{x}; & \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} &= 0. \end{aligned}$$

Підставляючи ці значення в систему (12), знайдемо диференціальні рівняння руху системи:

$$\frac{P_1 + P_2}{g} \ddot{x} + b \dot{x} + cx = 0; \quad \frac{P_2 l^2}{y} \ddot{\varphi} + P_2 l \varphi = 0,$$

або

$$\ddot{x} + 2h \dot{x} - k_1^2 x = 0, \quad \ddot{\varphi} + k_2^2 \varphi = 0, \quad (13)$$

де

$$k_1^2 = \frac{cg}{P_1 + P_2}, \quad k_2^2 = \frac{g}{l}, \quad h = \frac{bg}{2(P_1 + P_2)}. \quad (13a)$$

З рівностей (13), (13a) випливає, що система рівнянь Лагранжа II роду розклалася на два незалежних рівняння відносно x та φ . Цього слід було очікувати, тому що координати x та φ є головними координатами. Загальний розв'язок цих рівнянь має вигляд

$$x = M e^{-ht} \sin\left(t\sqrt{k_1^2 - h^2} + \alpha_1\right), \quad \varphi = N \sin(k_2 t + \alpha_2), \quad (14)$$

де M , N , α_1 , α_2 — сталі інтегрування, що визначаються за початковими умовами.

Нехай початковими умовами будуть при $t = 0$:

$$x(0) = -\lambda_{\text{cr}}; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0. \quad (15)$$

Визначаємо похідні від функції (14):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Mhe^{-ht} \sin\left(t\sqrt{k_1^2 - h^2} + \alpha_1\right) + M\sqrt{k_1^2 - h^2} e^{-ht} \cos\left(t\sqrt{k_1^2 - h^2} + \alpha_1\right); \\ \dot{\varphi} &= Nk_2 \cos(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (16)$$

У рівності (14) та (16) підставляємо початкові умови (15):

$$-\lambda_{\text{cr}} = M \sin \alpha_1; \quad 0 = N \sin \alpha_2; \quad (17)$$

$$0 = -Mh \sin \alpha_1 + M\sqrt{k_1^2 - h^2} \cos \alpha_1; \quad \omega_0 = Nk_2 \cos \alpha_2. \quad (17a)$$

З другого рівняння знаходимо $\alpha_2 = 0$. З останнього — $N = \frac{\omega_0}{k_2}$. Розв'язуємо систему першого та третього рівнянь:

$$\alpha_1 = \arctg \frac{\sqrt{k_1^2 - h^2}}{h}; \quad M = -\frac{\lambda_{\text{cr}} k_1^2}{k_1^2 - h^2}.$$

8. Досліджуємо розв'язок задачі. З рівностей (14) випливає, що повзун буде здійснювати згасаючі коливання з амплітудою Me^{ht} , частотою $\sqrt{k_1^2 - h^2}$ та початковою фазою α_1 ; маятник B — гармонічні коливання з амплітудою N , частотою k_2 та початковою фазою α_2 .

При $b = 0$ (за відсутності опору) головні частоти будуть збігатися, якщо жорсткість пружини c буде задовольняти умову $c = \frac{P_1 + P_2}{l}$, що випливає з формул (13а).

Приклад 27.13. Визначити частоту вільних крутильних коливаний системи, що складається з вала та дисків (рис. 27.19). Моменти інерції кожного диска — відносно осі вала J , жорсткість ділянок вала $c_1 = c_2 = c$. Масою вала знехтувати.

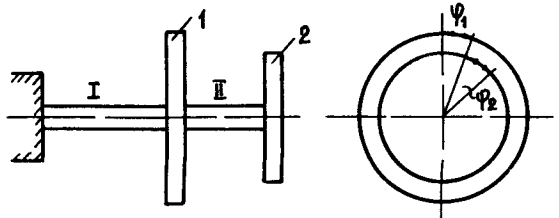


Рис. 27.19

Розв'язання

1. Система, що складена з пружного вала та дисків, має два ступеня вільності, оскільки два обмеження перетворюють її у нерухому.

2. За узагальнені координати беремо кути обертання дисків φ_1 та φ_2 . Визначаємо потенціальну енергію системи як функцію φ_1 та φ_2 :

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} + \Pi_1 + \Pi_2, \quad (1)$$

де Π_I , Π_{II} — потенціальна енергія відповідно ділянок I та II пружного вала; Π_1 , Π_2 — потенціальна енергія відповідно 1 та 2 дисків.

Припускаємо, що диски є однорідними, тобто центри їх ваги розміщені на осі вала. При закручуванні вала ці центри по вертикалі не переміщуються, тому потенціальна енергія дисків зберігається сталою:

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \text{const.} \quad (2)$$

На ділянці I вал закручується на кут φ_1 , тому потенціальна енергія вала на цій ділянці визначається за формулою

$$\Pi_I = \frac{c\varphi_1^2}{2} + \text{const.} \quad (3)$$

На ділянці II вал закручується на кут $\varphi_2 - \varphi_1$:

$$\Pi_{II} = \frac{c(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} + \text{const.} \quad (4)$$

Вирази (2)—(4) підставляємо в рівність (1). Знаходимо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = \frac{c}{2}\varphi_1^2 + \frac{c}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \text{const.} \quad (5)$$

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (5):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = c\varphi_1 - c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0.$$

Розв'язок цієї системи має вигляд

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Щоб визначити характер екстремуму, знайдемо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} = 2c; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} = c; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} = -c.$$

Складаємо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{vmatrix} = 2c^2 - c^2 = c^2 > 0.$$

Припустимо, що $c > 0$, тоді маємо $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} = 2c > 0$. З теорії екстремуму

функцій двох змінних випливає, що Π має мінімум при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, оскільки

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi_1^2} > 0 \text{ і } \Delta > 0.$$

Відповідно до теореми Діріхле положення системи, що визначається кутами $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, є положенням стійкої рівноваги. Наведені тут розрахунки підтверджують очевидний факт.

4. Обирати нові узагальнені координати не потрібно, оскільки φ_1 та φ_2 дорівнюють нулю у положенні стійкої рівноваги, тобто відлічуються від цього положення.

5. Сталу інтегрування const у виразі (5) можна підібрати так, щоб потенціальна енергія у положенні стійкої рівноваги дорівнювала нулю. З виразу (5) випливає, що $\text{const} = 0$. Зауважимо, що визначати const не обов'язково, тому що в рівняння Лагранжа II роду входять похідні Π за узагальненими координатами. Отже,

$$\Pi = \frac{c}{2} \varphi_1^2 + \frac{c}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (6)$$

Оскільки масою вала нехтуємо, а диски обертаються навколо нерухомої осі, то кінетична енергія системи

$$T = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2} = \frac{J}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2), \quad (J_1 = J_2 = J). \quad (7)$$

З рівностей (6) та (7) видно, що Π та T визначені з точністю до величин другого порядку малості відносно φ_1 , φ_2 , $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$.

6. Збурювальні сили на систему не діють.

7. Система, що розглядається, є консервативною. Рівняння Лагранжа II роду мають вигляд (27.21). Подамо їх для даного випадку:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0 \quad (8)$$

та візьмемо до уваги, що $L = T - \Pi$, де Π та T визначаються за рівностями (6) та (7). Виконуючи необхідні обчислення, знайдемо диференціальні рівняння руху системи:

$$J \ddot{\varphi}_1 + 2c\varphi_1 - c\varphi_2 = 0, \quad -c\varphi_1 + J \ddot{\varphi}_2 + c\varphi_2 = 0. \quad (9)$$

Розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$\varphi_1 = A \sin(kt + \alpha), \quad \varphi_2 = B \sin(kt + \alpha). \quad (10)$$

Ці функції підставляємо в рівняння (9) та прирівнюємо співмножники при $\sin(kt + \alpha)$ до нуля. Знаходимо систему двох однорідних алгебричних рівнянь відносно A та B :

$$(-Jk^2 + 2c)A - cB = 0; \quad -cA + (-Jk^2 + c)B = 0. \quad (11)$$

Система (11) має ненульовий розв'язок, якщо визначник цієї системи дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -Jk^2 + 2c & -c \\ -c & -Jk^2 + c \end{vmatrix} = (-Jk^2 + 2c)(-Jk^2 + c) - c^2 = 0,$$

або

$$J^2 k^4 - 3Jck^2 + c^2 = 0. \quad (12)$$

Рівняння (12) є характеристичним рівнянням системи диференціальних рівнянь (9). Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$k_1^2 = \frac{c}{2J}(3 - \sqrt{5}) = 0,38 \frac{c}{J}; \quad k_2^2 = \frac{c}{2J}(3 + \sqrt{5}) = 2,62 \frac{c}{J}.$$

Звідси знаходимо головні частоти системи:

$$k_1 = +\sqrt{0,38 \frac{c}{J}} = 0,62\sqrt{\frac{c}{J}}; \quad k_2 = +\sqrt{2,62 \frac{c}{J}} = 1,62\sqrt{\frac{c}{J}}.$$

8. З одержаних формул видно, як шляхом зміни жорсткості вала та моментів інерції дисків можна “керувати” головними частотами системи.

Приклад 27.14. Визначити рівняння змушених коливань системи дисків, що описані в прикладі 27.13, якщо на середній диск діє збурювальний момент $M = M_0 \sin pt$.

Розв'язання. Розв'язуючи задачу, скористаємося деякими результатами, що були одержані при розв'язанні прикладу 27.13. Тому рекомендуємо ознайомитися зі змістом перших п'яти етапів розв'язку цього прикладу. Тут наведені лише підсумки проведених там досліджень. Виявлено, що положення стійкої рівноваги системи є положенням, за якого вал є недеформованим. Якщо φ_1 та φ_2 є кутами обертання дисків 1 та 2 відносно недеформованого вала, то кінетична та потенціальна енергії визначаються з рівностей

$$T = \frac{J \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{J \dot{\varphi}_2^2}{2}; \quad \Pi = \frac{c}{2} \varphi_1^2 + \frac{c}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (1)$$

Переходимо до наступних етапів розв'язання задачі.

1. Щоб визначити узагальнені збурювальні сили, скористаємося правилом знаходження узагальнених сил системи, що складається з вала та двох дисків (див. параграф 27.2). Відповідно до цього правила надамо узагальненим координатам φ_1 та φ_2 приросту, що наближено дорівнює їх диференціалам $d\varphi_1$, $d\varphi_2$. На цих переміщеннях збурювальний момент виконує роботу

$$d'A = M d\varphi_1.$$

Звідси випливає, що узагальнені збурювальні сили системи

$$Q_1^{(a)} = M = M_0 \sin pt, \quad Q_2^{(a)} = 0. \quad (2)$$

2. На систему діють як потенціальні, так і непотенціальні (збурювальні) сили. Тому рівняння Лагранжа II роду мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = Q_1^{(a)}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = Q_2^{(a)}. \quad (3)$$

Підставляючи сюди співвідношення (1) і (2) та беручи до уваги співвідношення $L = T - \Pi$, знаходимо неоднорідні диференціальні рівняння, що описують рух системи:

$$J \ddot{\varphi}_1 + 2c\varphi_1 - c\varphi_2 = M_0 \sin pt; \quad J \ddot{\varphi}_2 + c\varphi_2 - c\varphi_1 = 0. \quad (4)$$

Змушені коливання, як відомо, описуються частинним розв'язком рівнянь (4). Шукаємо його у вигляді

$$\varphi_1 = A \sin pt, \quad \varphi_2 = B \sin pt, \quad (5)$$

де A та B необхідно підібрати так, щоб задовольнялися рівняння (4). Визначаємо другі похідні функцій (5) та підставляємо їх у рівняння (4). Прирівнюючи співмножники при $\sin pt$ праворуч та ліворуч у цих рівняннях, маємо систему двох неоднорідних алгебричних рівнянь відносно A та B :

$$A(-p^2J + 2c) - Bc = M_0; \quad -Ac + B(-p^2J + c) = 0.$$

Розв'язуємо цю систему за методом Крамера:

$$M = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad N = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} -p^2J + 2c & -c \\ -c & -p^2J + 2c \end{vmatrix} = (-p^2J + 2c)(-p^2J + c) - c^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} M_0 & -c \\ 0 & -p^2J + c \end{vmatrix} = M_0(c - p^2J); \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -p^2J + 2c & M_0 \\ -c & 0 \end{vmatrix} = M_0c.$$

Значення амплітуд змущених коливань A та B підставляємо в рівності (5). Знаходимо закон змущених коливань системи:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{M_0(c - p^2J)}{(-p^2J + 2c)(-p^2J + c) - c^2} \sin pt; \\ \varphi_2 &= \frac{M_0c}{(-p^2J + 2c)(-p^2J + c) - c^2} \sin pt. \end{aligned} \quad (6)$$

З рівностей (6) випливає, що змущені коливання системи здійснюються з частотою збурювальної сили p . Досліджуємо амплітуди змущених коливань A та B . Зі співвідношень (6) видно, що знаменник амплітуд A та B є квадратним багаточленом відносно p^2 , а коренями цього багаточлена є квадрати головних частот системи k_1^2 та k_2^2 (див. п. 7 у прикладі 27.13). З курсу елементарної алгебри відомо: якщо k_1^2 та k_2^2 є коренями рівняння

$$\Delta = (-k^2J + 2c)(-k^2J + c) - c^2 = 0,$$

то це рівняння можна записати у вигляді

$$\Delta = J^2(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2) = 0.$$

Тому амплітуди змущених коливань системи будуть визначатися за формулами:

$$\begin{aligned} A &= \frac{M_0(c - p^2J)}{(-p^2J + 2c)(-p^2J + c) - c^2} = \frac{M_0(c - p^2J)}{J^2(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)}; \\ B &= \frac{M_0c}{(-p^2J + 2c)(-p^2J + c) - c^2} = \frac{M_0c}{J^2(p^2 - k_1^2)(p^2 - k_2^2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

З рівностей (7) видно: якщо частота збурювального моменту p збігається з одною з головних частот, тобто $p = k_1$ або $p = k_2$, то амплітуди A та B необме-

жено зростають. Це явище резонансу. Відповідні значення частот збурювального моменту називаються критичними.

Припустимо, що частота збурювального моменту p не дорівнює критичній. Тоді знаменники в рівняннях (7) відмінні від нуля. Якщо, окрім того, підібрати жорсткість вала $c = Jp^2$, то $A = 0$, тобто перший диск не здійснюватиме змушених коливань. Другий диск при цьому матиме амплітуду змушених коливань

$B = -\frac{M_0}{c}$ та відіграватиме роль гасителя змушених коливань першого

диска. Оскільки при цьому $c = Jp^2$, то підбором J можна добитися, щоб амплітуда B не перевищувала наперед заданого значення. Задача подібного роду розв'язується в прикладі 27.15.

Приклад 27.15. Фундамент машини, що має масу $m_1 = 102 \cdot 10^2$ кг і розміщений на пружному ґрунті, здійснює вертикальні змушені коливання під дією вертикальної збурювальної сили, що змінюється згідно із законом $F = 98 \sin \omega t$ кН. З метою усунення резонансних коливань, що мають місце при кутовій швидкості вала машини $\omega = 100$ рад/с, на фундаменті на пружних пружинах розміщений гаситель у вигляді важкої рами. Необхідно так підібрати масу рами m_2 та сумарну жорсткість пружин c_2 гасителя, щоб амплітуди змушених коливань фундаменту при вказаній швидкості вала дорівнювали нулю, а амплітуда коливань гасителя не була більшою ніж $A = 2$ мм.

Розв'язання.

1. Система складається з фундаменту M_1 , гасителя M_2 , пружини жорсткості c_2 та пружного ґрунту, який імітуємо системою пружин з еквівалентною жорсткістю c_1 (рис. 27.20, а). Система має два ступеня вільності, оскільки два обмеження перетворюють її у нерухому систему.

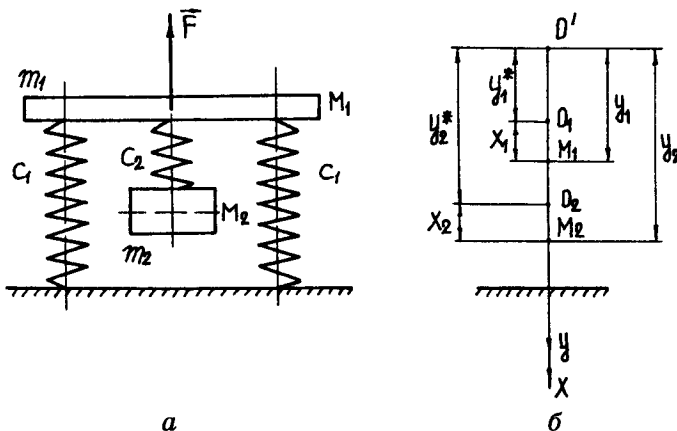


Рис. 27.20

2. Припустимо, що за відсутності фундаменту та гасителя верхня площина пружного ґрунту розташована в точці O' (нехай ґрунт рухається поступально). Беремо в точці O' початок відліку осі Oy (рис. 27.20, б). Позначимо координати точок M_1 та M_2 (центрів мас фундаменту та гасителя відповідно) на цій осі y_1 та y_2 та візьмемо їх за узагальнені координати системи, що розглядається. Знайдемо потенціальну енергію системи як функцію цих координат:

$$\Pi = \Pi_{M_1} + \Pi_{M_2} + \Pi_1 + \Pi_2, \quad (1)$$

де Π_{M_1} , Π_{M_2} — потенціальна енергія відповідно фундаменту та гасителя; Π_1 , Π_2 — потенціальна енергія відповідно ґрунту та пружини жорсткості c_2 .

Беремо до уваги, що деформація ґрунту дорівнює y_1 , а пружини жорсткості $c_2 - y_2 - y_1 - l_0$, де l_0 — довжина недеформованої пружини. За відомими формулами визначаємо потенціальну енергію кожного тіла:

$$\begin{aligned} \Pi_{M_1} &= -m_1 g y_1 + \text{const}; \quad \Pi_{M_2} = -m_2 g y_2 + \text{const}; \\ \Pi_1 &= \frac{c_1 y_1^2}{2} + \text{const}; \quad \Pi_2 = \frac{c_2 (y_2 - y_1 - l_0)^2}{2} + \text{const}. \end{aligned}$$

Підставляючи ці значення в рівність (1), знаходимо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = \frac{c_1 y_1^2}{2} + \frac{c_2 (y_2 - y_1 - l_0)^2}{2} - m_1 g y_1 - m_2 g y_2 + \text{const}. \quad (2)$$

3. Досліджуємо екстремальні властивості функції (2). Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} &= c_1 y_1 - c_2 (y_2 - y_1 - l_0) - m_1 g = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y_2} &= c_2 (y_2 - y_1 - l_0) - m_2 g = 0. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему відносно y_1 та y_2 , знаходимо:

$$y_1^* = \frac{(m_1 + m_2) g}{c}, \quad y_2^* = l_0 + \frac{(m_1 + m_2) g}{c_1} + \frac{m_2 g}{c_2}. \quad (3)$$

Досліджуємо характер екстремуму:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_1^2} = c_1 + c_2; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_2^2} = c_2; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_1 \partial y_2} = -c_2;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_2^2} \end{vmatrix} = c_2 (c_1 + c_2) - c_2^2 = c_1 c_2.$$

Якщо жорсткості пружини та ґрунту мають однакові знаки, то $\Delta = c_1 c_2 > 0$.

При $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y_1^2} = c_1 + c_2 > 0$ система має мінімальну потенціальну енергію в поло-

женні, що визначається координатами y_1^* та y_2^* . Припустимо, що ці умови виконано. Тоді згідно з теоремою Діріхле зазначене положення системи є положенням стійкої рівноваги системи. Це положення подано на рис. 27.20, б у точках O_1 та O_2 .

4. Точки O_1 та O_2 беремо за початок відліку нових узагальнених координат x_1 та x_2 (див. рис. 27.20, б).

5. Знайдемо вираз кінетичної та потенціальної енергії системи у вигляді функцій x_1 , x_2 , \dot{x}_1 , \dot{x}_2 . З рис. 27.20, б видно, що $y_1 = y_1^* + x_1$; $y_2 = y_2^* + x_2$. Підставляємо ці вирази в рівність (2):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{c_1 (y_1^* + x_1)^2}{2} + \frac{c_2 (y_2^* + x_2 - y_1^* - x_1 - l_0)^2}{2} - \\ & - m_1 g (y_1^* + x_1) - m_2 g (y_2^* + x_2) + \text{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

Щоб спростити цей вираз, оберемо таку сталу інтегрування const , щоб у положенні стійкої рівноваги Π перетворювалась в нуль. Маємо при $x_1 = x_2 = 0$ з рівності (4)

$$0 = \frac{c_1 y_1^*}{2} + \frac{c_2 (y_2^* - y_1^* - l_0)^2}{2} - m_1 g y_1^* - m_2 g y_2^* + \text{const}. \quad (5)$$

Звідси визначаємо const та підставляємо її в рівність (4). Якщо взяти до уваги рівність (3), то потенціальна енергія системи (4) буде визначатися за формулою

$$\Pi = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2}{2} (x_2 - x_1)^2. \quad (6)$$

Визначаємо кінетичну енергію системи, беручи до уваги, що пружина жорсткості c_2 та пружина жорсткості c_1 , що імітує пружний ґрунт, маси не мають, тому їх кінетична енергія дорівнює нулю. Ненульову кінетичну енергію мають фундамент машини та гаситель. Дістанемо

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}. \quad (7)$$

З формул (6) та (7) видно, що Π та T визначаються з точністю до величин другого порядку малості відносно x_1 , x_2 , \dot{x}_1 , \dot{x}_2 .

6. Узагальнені збурювальні сили знаходимо за формулою (27.3):

$$Q_1^{(a)} = -\bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_1} = \bar{F} \cdot \bar{i} = F_x; \quad Q_2^{(a)} = 0.$$

7. Рівняння Лагранжа II роду відносно координат x_1 та x_2 мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F_x; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0; \quad L = T - \Pi; \quad F_x = -F_0 = -98 \text{ кН}.$$

Підставляючи сюди рівності (6) та (7), знаходимо диференціальне рівняння змушених коливань системи:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= -F_0 \sin \omega t; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 - c_2 x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Змушені коливання системи визначаються частинним розв'язком системи (8). Шукаємо його у вигляді

$$x_1 = B \sin \omega t; \quad x_2 = A \sin \omega t, \quad (9)$$

де A та B необхідно підібрати так, щоб цей розв'язок задовольняв рівняння (8). Підставляємо функції (9) у рівняння (8) та прирівнюємо співмножники при $\sin \omega t$ праворуч та ліворуч. Знайдемо систему неоднорідних алгебричних рівнянь відносно амплітуд змушених коливань A та B :

$$\begin{aligned} (-m_1 \omega^2 + c_1 + c_2)B - c_2 A &= -F_0; \\ -c_2 B + (c_2 - m_2 \omega^2)A &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язуємо цю систему за правилом Крамера:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad A = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \Delta = (-m_1 \omega^2 + c_1 + c_2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2; \\ \Delta_1 &= -F_0(c_2 - m_2 \omega^2); \quad \Delta_2 = c_2 F_0. \end{aligned}$$

На підставі цих співвідношень знаходимо амплітуди змушених коливань системи:

$$B = -\frac{F_0 (c_2 - m_2 \omega^2)}{(-m_1 \omega^2 + c_1 + c_2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}; \quad (10)$$

$$A = -\frac{F_0 c_2}{(-m_1 \omega^2 + c_1 + c_2)(c_2 - m_2 \omega^2) - c_2^2}. \quad (11)$$

8. Амплітуда змушених коливань фундаменту перетворюється в нуль, якщо чисельник у виразі (10) дорівнює нулю:

$$c_2 - m_2 \omega^2 = 0. \quad (12)$$

Друге рівняння для визначення шуканих величин знайдемо з умови $A = 0,002$ м:

$$0,002 = \frac{F_0}{c_2}. \quad (13)$$

З рівняння (12) маємо

$$c_2 = \frac{F_0}{0,002} = \frac{98}{0,002} = 49 \cdot 10^3 \text{ кН/м} = 49 \cdot 10^6 \text{ Н/м}.$$

Це значення підставляємо в рівність (12):

$$m_2 = \frac{c_2}{\omega^2} = \frac{49 \cdot 10^6}{10^4} = 4,9 \cdot 10^3 \text{ кг}.$$

З рівності (12) випливає, що гаситель змушених коливань, прикріплений до нерухокої опори, має частоту вільних коливань, що збігається з частотою збурювальної сили:

$$k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} = \omega.$$

Ця частота не збігається з жодною з головних частот системи. Пропонуємо переконатися в цьому шляхом обчислень.

Запитання для самоперевірки

1. Виведіть рівняння Лагранжа II роду як наслідок основного закону динаміки.
2. Що являє собою функція Лагранжа, або кінетичний потенціал?
3. Запишіть рівняння Лагранжа II роду для консервативних систем.

4. Які узагальнені координати називаються циклічними? Що називається узагальненим імпульсом механічної системи? Як записується закон збереження узагальненого імпульсу системи?

5. Який вигляд мають рівняння Лагранжа II роду у випадку, коли на точки механічної системи крім потенціальних сил діють ще непотенціальні сили?

6. За якою формулою визначається дисипативна функція?

7. Запишіть рівняння Лагранжа II роду дисипативної системи.

8. За якими формулами визначаються кінетична енергія і дисипативна функція механічної системи в узагальнених координатах?

9. Які є узагальнені умови рівноваги механічної системи? За яких початкових умов вони необхідні й достатні для рівноваги механічної системи?

10. Які є види рівноваги системи? Яка рівновага системи називається стійкою?

11. Сформулюйте теорему Діріхле і теореми Ляпунова.

12. За якими формулами визначаються кінетична і потенціальна енергії механічної системи з одним ступенем вільності при її русі в малому околі положення стійкої рівноваги?

13. За якою формулою визначається дисипативна функція механічної системи з одним ступенем вільності при її русі в малому околі положення стійкої рівноваги?

14. Запишіть диференціальне рівняння вільних коливань механічної системи з одним ступенем вільності в малому околі положення стійкої рівноваги.

15. За якою формулою визначається закон вільних коливань механічної системи з одним ступенем вільності в малому околі положення стійкої рівноваги?

16. За якими формулами визначаються період і частота вільних коливань механічної системи з одним ступенем вільності?

17. Яка механічна система називається гармонічним осцилятором?

18. Запишіть диференціальне рівняння згасаючих коливань механічної системи з одним ступенем вільності в малому околі положення стійкої рівноваги.

19. За якими формулами визначаються період і частота згасаючих коливань механічної системи з одним ступенем вільності?

20. Як визначаються декремент і логарифмічний декремент коливань механічної системи з одним ступенем вільності?

21. Запишіть диференціальне рівняння змушених коливань механічної системи з одним ступенем вільності в малому околі положення стійкої рівноваги.

22. За якою формулою визначається закон змушених коливань механічної системи з одним ступенем вільності в малому околі положення стійкої рівноваги?

23. У чому полягає явище резонансу? Як змінюється з часом амплітуда змушених коливань механічної системи з одним ступенем вільності?

24. Як сили опору впливають на змушені коливання механічної системи з одним ступенем вільності?
25. Запишіть диференціальне рівняння вільних коливань механічної системи з двома ступенями вільності в малому околі положення стійкої рівноваги.
26. Запишіть характеристичне рівняння вільних коливань механічної системи з двома ступенями вільності.
27. За якими формулами визначається закон вільних коливань консервативної механічної системи з двома ступенями вільності в малому околі положення стійкої рівноваги?
28. Що називається головними координатами механічної системи?
29. Який вигляд мають рівняння руху механічної системи в головних координатах?
30. У чому полягає спосіб визначення головних координат механічної системи з двома ступенями вільності?
31. Запишіть диференціальне рівняння згасаючих коливань механічної системи з двома ступенями вільності в малому околі положення стійкої рівноваги.
32. За якими формулами визначається закон згасаючих коливань консервативної механічної системи з двома ступенями вільності в малому околі положення стійкої рівноваги?
33. Запишіть диференціальні рівняння змушених коливань механічної системи з двома ступенями вільності в малому околі положення стійкої рівноваги.
34. За якими формулами визначається закон змушених коливань консервативної механічної системи з двома ступенями вільності в малому околі стійкої рівноваги?
35. Що таке критичні частоти?
36. За якими формулами визначається закон змушених коливань консервативної механічної системи з двома ступенями вільності в малому околі стійкої рівноваги при резонансі?
37. За яким принципом побудована теорія динамічних гасителів змушених коливань?

Глава 28

ОСНОВИ ДИНАМІКИ СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

28.1. Диференціальні рівняння руху суцільного середовища

Як було зазначено в розділах “Статика” і “Кінематика”, абстракція у вигляді абсолютно твердого тіла дає можливість вивчати рух матеріальних об’єктів, не пов’язаний з істотними змінами їх форми. Вивчення руху тіл, який істотно залежить від їх деформації, а також руху рідини і газів здійснюється на підставі іншої абстракції — суцільного середовища. Суцільне середовище — це змінна система матеріальних точок, що неперервно заповнюють частину простору, кожна з яких можна подати як деякий об’єм, тобто як малу частку цього середовища. Якій ці частки характеризуються тим, що відношення найбільшого їх розміру до довжини, протягом якої істотно змінюються рух середовища або параметри, що характеризують його фізичний стан, значно менше за одиницю. З іншого боку, розміри цієї частки достатньо великі, щоб кількість атомів або молекул, що містяться в ній, давала можливість усереднювати величини, які характеризують фізичний стан середовища.

Така своєрідність моделі суцільного середовища змушує застосовувати особливі способи визначення її руху.

Відокремимо в суцільному середовищі, що рухається, довільний індивідуальний малий скінченний об’єм υ , який складається з елементарних об’ємів $d\upsilon$ і обмежений деякою поверхнею S . Застосовуючи до цього об’єму теорему про зміну кількості руху механічної системи, складемо диференціальні рівняння його руху.

Кількість руху об’єму υ визначимо за формулою

$$\vec{Q} = \int_{(M)} \vec{V} dm = \int_{(v)} \rho \vec{V} dv, \quad (28.1)$$

де M — маса об'єму v ; \vec{V} — вектор швидкості елементарної частки середовища dv ; dm — маса елементарної частки середовища; ρ — густина середовища.

У загальному випадку на об'єм, що розглядається, можуть діяти як зовнішні об'ємні (масові) сили, так і зовнішні поверхневі сили. Головний вектор зовнішніх об'ємних (масових) сил визначимо за формулою (9.6) (див. розділ "Статика", параграф 9.1)

$$\vec{R}_{(об)}^e = \int_{(v)} \rho \vec{F} dv, \quad (28.2)$$

де \vec{F} — щільність розподілу об'ємних сил.

Головний вектор зовнішніх поверхневих сил визначимо за формулою (9.10), яка в даному випадку набирає вигляду

$$\vec{R}_{(пов)}^e = \int_{(S)} \vec{q}_n dS, \quad (28.3)$$

де \vec{q}_n — щільність розподілу поверхневих сил або напруження, лінія дії якої збігається з нормаллю до поверхні S .

На підставі теореми про зміну кількості руху механічної системи можна записати

$$\frac{d}{dt} \int_{(v)} \rho \vec{V} dv = \int_{(v)} \rho \vec{F} dv + \int_{(S)} \vec{q}_n dS. \quad (28.4)$$

Рівняння (28.4) є математичним виразом теореми про зміну кількості руху суцільного середовища за Лагранжем: *перша похідна за часом від кількості руху довільного скінченного малого об'єму суцільного середовища дорівнює геометричній сумі всіх діючих на об'єм масових і поверхневих сил, що діють на об'єм.*

Рівнянню (28.4) можна надати іншого вигляду:

$$d \int_{(v)} \rho \vec{V} dv = \int_{(v)} \rho \vec{F} dv dt + \int_{(S)} \vec{q}_n dS dt. \quad (28.5)$$

Рівняння (28.5) називається *рівнянням імпульсів.*

Щоб дістати диференціальні рівняння руху середовища, перетворимо рівняння (28.4). Для цього, по-перше, обчислимо похідну за часом від вектора кількості руху середовища, беручи до уваги закон збереження елементарної маси

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho dV) = 0.$$

Матимемо

$$\frac{d}{dt} \int_{(v)} \rho \vec{V} dV = \int_{(v)} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dV + \int_{(v)} \vec{V} \frac{d\rho}{dt} dV = d \int_{(v)} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dV. \quad (28.6)$$

Далі перетворимо поверхневий інтеграл зовнішніх поверхневих сил в інтеграл за об'ємом. Для цього застосуємо формулу Гаусса – Остроградського¹

$$\int_{(S)} \vec{q}_n dS = \int_{(v)} \left(\frac{\partial \vec{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{q}_z}{\partial z} \right) dV. \quad (28.7)$$

Рівності (28.6) і (28.7) підставляємо в рівняння (28.5) і після елементарних перетворень дістанемо вираз

$$\int_{(v)} \left[\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \rho \vec{F} - \left(\frac{\partial \vec{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{q}_z}{\partial z} \right) \right] dV = \vec{0},$$

звідки випливає

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \rho \vec{F} - \left(\frac{\partial \vec{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{q}_z}{\partial z} \right) = \vec{0},$$

або

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} + \left(\frac{\partial \vec{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{q}_z}{\partial z} \right). \quad (28.8)$$

Проекціюючи рівняння (28.8) на осі нерухомої декартової системи координат з урахуванням, що

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z},$$

а $q_{xx} = \sigma_x$; $q_{yy} = \sigma_y$; $q_{zz} = \sigma_z$; $q_{xy} = \tau_{xy}$; $q_{zx} = \tau_{zx}$; $q_{xy} = \tau_{xy}$; $q_{zy} = \tau_{zy}$; $q_{xz} = \tau_{xz}$; $q_{yz} = \tau_{yz}$ (див. розділ “Статика”, параграф 9.3), дістанемо систему рівнянь:

¹ Карл Фрідріх Гаусс (1777—1855) — німецький математик, астроном і фізик. Михайло Васильович Остроградський (1801—1862) — російський математик. член Петербурзької академії наук.

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) &= \rho F_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}; \\ \rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) &= \rho F_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}; \\ \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) &= \rho F_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \end{aligned} \right. \quad (28.9)$$

Рівняння (28.9) є диференціальними рівняннями руху суцільного середовища, які були запропоновані Лагранжем згідно з його концепцією визначення руху суцільного середовища (див. розділ “Кінематика”, параграф 15.1).

28.2. Диференціальне рівняння руху ідеальної рідини

Під ідеальною рідиною розуміють абстрактне суцільне середовище, яке має такі властивості: а) абсолютно нестисливе; б) абсолютно не чинить опору розриву; в) має абсолютну рухомість, тобто характеризується повною відсутністю в'язкості.

При вивченні руху рідини та газу модель “ідеальна рідина” відіграє таку саму роль, як і модель “абсолютно тверде тіло” при вивченні руху твердих тіл.

Диференціальні рівняння руху ідеальної рідини безпосередньо впливають з рівнянь (28.9), якщо провести їх перетворення відповідно до моделі “ідеальна рідина”.

Оскільки розглядається ідеальна рідина, то дотичні напруження дорівнюють нулю: $\tau_{yx} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = \tau_{zy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ (відсутня в'язкість середовища).

Нормальні напруження σ_x , σ_y і σ_z рівні між собою: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, де p — гідростатичний тиск (див. розділ “Статика”, параграф 10.1). Отже, з урахуванням зазначеного рівняння (28.9) набирають вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}; \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}; \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}. \end{aligned} \right. \quad (28.10)$$

Якщо рух ідеальної рідини усталений, то рівняння набирають вигляду:

$$\begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}; \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}; \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}. \end{cases} \quad (28.11)$$

Рівняння (28.10) і (28.11) називаються *диференціальними рівняннями руху ідеальної рідини* або *рівняннями Ейлера*.

Проаналізуємо рівняння (28.10) і (28.11) з метою визначення невідомих, що містять ці рівняння. Об'ємні сили F_x , F_y , F_z , як правило, відомі. Якщо рідина є нестисливою, то густина ρ є сталою і відомою. Отже, в системі трьох рівнянь Ейлера містяться чотири невідомі величини: p , V_x , V_y , V_z . Щоб розв'язати цю систему відносно руху нестисливої ідеальної рідини, необхідно мати ще одне рівняння. Таким рівнянням є рівняння нерозривності (15.29) (див. розділ "Кінематика", параграф 15.2):

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

або

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (28.12)$$

Рівняння Ейлера в сукупності з рівняннями нерозривності утворюють систему чотирьох диференціальних рівнянь з чотирма невідомими. Отже, сумісним інтегруванням цієї системи рівнянь задача про рух нестисливої ідеальної рідини може бути розв'язаною.

У векторній формі рівняння (28.10) можна записати у вигляді

$$\vec{F} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V}, \quad (28.13)$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ — символічний оператор.

Якщо ідеальна рідина стислива, наприклад газ, то за відомих об'ємних сил F_x , F_y , F_z система, що складається з рівнянь Ейлера і рівняння нерозривності, буде містити п'ять невідомих: густина ρ , тиск p і компоненти швидкості V_x , V_y , V_z . Отже, для її розв'язання потрібне додаткове рівняння. Та-

ким рівнянням може бути, наприклад, рівняння стану газу Клапейрона — Менделєєва¹: $p = RT\rho$.

Зауважимо, що при інтегруванні розглянутих вище систем диференціальних рівнянь руху ідеальної рідини з частинними похідними виникають не просто сталі, а довільні функції координат. Ці функції можна визначити з граничних умов. Отже, до розглянутих рівнянь необхідно додати ще граничні умови. Граничні умови можуть бути кінематичними і динамічними. Наприклад, якщо ідеальна рідина обмежена нерухомою твердою поверхнею, нормаль до якої \vec{n} , то граничною умовою вздовж цієї поверхні буде $\vec{n} \cdot \vec{V} = 0$. Розглянута умова є прикладом кінематичної граничної умови, оскільки накладає обмеження на швидкість рідини.

Якщо ідеальна рідина стикається, наприклад, з іншим нерухомим середовищем (рідина, газ), то вздовж межі цих середовищ тиск буде сталим. Ця умова накладає обмеження на поверхневі сили і є прикладом динамічної граничної умови.

28.3. Рівняння Ейлера в функції компонентів вихру для об'ємних сил, що мають потенціал

З розділу “Кінематика” відомо, що рух ідеальної рідини можна поділити на: а) потенціальний (безвихровий); б) завихрений. Рівняння Ейлера (28.10) справедливі для будь-яких рухів. Проте якщо перетворити рівняння Ейлера для кожного виду рухів рідини окремо, то з'явиться можливість виявити відміну між поведінкою рідини у потенціальному і завихреному рухах не тільки з кінематичного погляду, а й з енергетичного.

Перетворимо рівняння Ейлера так, щоб їх форма відображала наявність завихреного або потенціального руху.

Розглянемо перше рівняння системи (28.10).

Беручи від цього виразу частинну похідну за x , матимемо

$$F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}. \quad (28.14)$$

У правій частині цього рівняння додамо і віднімемо суму членів

$$V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x},$$

тоді права частина рівняння (28.14) набирає вигляду

¹ Бенуа Поль Еміль Клапейрон (1799—1864) — французький учений, член Паризької академії наук.

Дмитро Іванович Менделєєв (1834—1907) — російський вчений-хімік.

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + \left[\left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right] + V_z \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) - V_y \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right). \quad (28.15)$$

Частина виразу (28.15) у квадратних дужках являє собою частинну похідну за x від половини квадрата швидкості в даній точці. Дійсно, з кінематики відомо, що

$$\frac{V^2}{2} = \frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x}. \quad (28.16)$$

Двочлени в круглих дужках виразу (28.15) є подвійними компонентами вихру (див. розділ “Кінематика”, параграф 15.4). Отже, на підставі формул (15.37) можна записати

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z), \quad (28.17)$$

і перше рівняння системи (28.10) набирає вигляду

$$F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z).$$

Проводячи аналогічні перетворення інших двох рівнянь системи (28.10), дістанемо:

$$\begin{cases} F_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z); \\ F_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_x \omega_z - V_z \omega_x); \\ F_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(V_y \omega_x - V_x \omega_y). \end{cases} \quad (28.18)$$

Рівняння (28.18) було отримане російським професором І.С. Громека і тому назване його ім'ям.

Рівняння (28.18) дають можливість реалізувати відміну між потенціальним і завихреним рухами рідини. Так, у випадку потенціального руху рідини компоненти вихру в рівнянні (28.18) належить прирівняти до нуля.

Якщо об'ємні сили F_x, F_y, F_z мають потенціал, тобто наявна силова функція координат $U = f(x, y, z)$, то компоненти об'ємних сил є частинними похідними цієї функції за відповідними координатами:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (28.19)$$

Підставляючи рівності (28.19) у рівняння (28.18), дістанемо:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial V_x}{\partial t} + 2(V_z \omega_y - V_y \omega_z); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial V_y}{\partial t} + 2(V_x \omega_z - V_z \omega_x); \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial V_z}{\partial t} + 2(V_y \omega_x - V_x \omega_y). \end{cases} \quad (28.20)$$

Рівняння (28.20) є диференціальним рівнянням Ейлера у функції компонентів вихру для об'ємних сил, що мають потенціал U .

Якщо рідина є баротропною, тобто густина рідини є функцією тільки тиску $\rho = f(p)$, то можна ввести функцію тиску $p = \int \frac{dp}{\rho}$. Тоді рівняння (28.20)

можна записати у векторному вигляді так:

$$\overline{\text{grad}} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (28.21)$$

Подамо значення деяких силових функцій об'ємних сил.

Якщо рух рідини відбувається у потенціальному силовому полі сил тяжіння, то компоненти об'ємних сил, що діють на одиницю маси рідини, становлять: $F_x = 0, F_y = 0, F_z = -g$. Оскільки в даному випадку $\partial U = F_z \partial z$, то після інтегрування цього виразу матимемо значення силової функції об'ємних сил у вигляді

$$U = -gz + \text{const.}$$

Якщо рух рідини відбувається у відцентровому полі сил інерції і обертання рідини відбувається відносно осі z зі сталою кутовою швидкістю ω , то складові прискорення вздовж осей x і y будуть дорівнювати $-\omega^2 x - \omega^2 y$. Тоді компоненти об'ємних сил, що діють на одиницю маси рідини, будуть мати значення: $F_x = -\omega^2 x, F_y = -\omega^2 y, F_z = 0$. Повний диференціал силової функції буде

$$dU = F_x dx + F_y dy = -\omega^2 x dx - \omega^2 y dy.$$

Після інтегрування цього виразу матимемо значення силової функції об'ємних сил у вигляді

$$U = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \text{const.}$$

Зауважимо, що системи рівнянь (28.10), (28.18) і (28.20) у загальному випадку не інтегруються. Тільки в деяких окремих випадках, коли обумовлюються положення про об'ємні сили і характер руху рідини, вдається їх проінтегрувати або одержати їх перші інтеграли, які аналогічні теоремі про зміну кінетичної енергії механічної системи і відіграють таку саму істотну роль, як в механіці твердого тіла означена теорема, оскільки дають змогу значно спростити математичну сторону задачі.

У наступних двох параграфах буде розглянуто такі інтеграли.

28.4. Інтеграл Бернуллі¹

Зробимо такі припущення: 1. Рідина ідеальна. Рух рідини описується рівнянням (28.21). 2. Рух рідини усталений, тобто всі змінні, що входять в рівняння руху, не залежать від часу t . 3. Об'ємні сили, що діють на рідину, потенціальні, тобто $\vec{F} = \overline{\text{grad}}U$. 4. Рідина баротропна, тобто $\rho = f(p)$.

З урахуванням зроблених припущень рівнянню (28.21) можна надати вигляду

$$\overline{\text{grad}}\left(U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{V^2}{2}\right) = \vec{\omega} \times \vec{V},$$

або

$$\overline{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U\right) = \vec{V} \times \vec{\omega}. \quad (28.22)$$

Помножимо скалярно почленно рівняння (28.22) на $d\vec{r} = \vec{V}dt$, тобто на елементарне переміщення рідини вздовж лінії течії:

$$\overline{\text{grad}}\left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U\right) \cdot d\vec{r} = (\vec{V} \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r}.$$

¹ Даниїл Бернуллі (1700—1782) — швейцарський фізик і математик, почесний член Петербурзької академії наук.

Оскільки

$$\overline{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U \right) \cdot d\vec{r} = d \left(\frac{U^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U \right),$$

то рівнянню (28.22) можна надати вигляду

$$d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U \right) = c_n, \quad (28.23)$$

де $c_n = (\vec{V} \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r}$ — стала для даної лінії течії.

Взагалі константа c_n має різні значення вздовж різних ліній течії або вихрових ліній. Якщо $(\vec{V} \times \vec{\omega}) = \vec{0}$, то вираз (28.23) набирає вигляду

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = \text{const}, \quad (28.24)$$

тобто зберігає одне і те саме значення в усьому просторі, заповненому потоком рідини або газу.

Вираз (28.24) називається *інтегралом Бернуллі*.

Векторний добуток $(\vec{V} \times \vec{\omega})$ дорівнює нулю у двох випадках.

1. $\vec{\omega} = \vec{0}$. Це є умовою потенціального руху рідини. Інтеграл Бернуллі може бути застосованим до будь-якого потенціального потоку в цілому.

2. $\vec{\omega} \parallel \vec{V}$. Це випадок, коли вихрові лінії збігаються з лініями течії, тобто має місце гвинтовий рух.

Тепер розглянемо окремі форми інтеграла Бернуллі при різних баротропних процесах.

Випадок руху нестисливої рідини, тобто $\rho = \text{const}$ і $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \text{const}$. Якщо об'ємні сили, що діють на рідину, це сили тяжіння, то силова функція $U = -gz + \text{const}$ (див. попередній параграф) й інтеграл Бернуллі (28.24) набирає вигляду

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (28.25)$$

Рівняння (28.25) — це рівняння Бернуллі для нестисливої ідеальної рідини, яка перебуває під дією тільки сил тяжіння.

Виразу (28.25) можна надати іншого вигляду:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const.} \quad (28.26)$$

Розмірність усіх складових у виразі (28.26) є розмірністю довжини. Розглянемо фізичний зміст складових виразу (28.26). $\frac{V^2}{2g}$ — висота, на яку піднімається у вакуумі матеріальна точка, що кинули вертикально вгору з початковою швидкістю \vec{V} . Ця висота називається *швидкісною висотою* або *швидкісним напором*. $\frac{p}{\rho g}$ — висота стовпа рідини, що перебуває у стані спокою і в основі якого тиск дорівнює p . Ця висота називається *п'езометричною висотою* або *п'езометричним напором*. z — висота частки рідини лінії течії над деякою основною горизонтальною поверхнею. Ця висота називається *геометричною висотою* або *висотним напором*.

Таким чином, з рівняння (28.26) випливає, що сума висот геометричної, швидкісної і п'езометричної вздовж лінії течії залишається сталою величиною.

Якщо об'ємними силами порівняно з поверхневими можна знехтувати, то рівняння (28.26) набирає вигляду

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = \text{const.} \quad (28.27)$$

Якщо рідина стислива, то у випадку ізотермічного руху густина і тиск пов'язані співвідношенням

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p;$$

тоді

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0},$$

і рівняння (28.27) набирає іншого вигляду:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = \text{const.} \quad (28.28)$$

При адиабатичному русі стисливої рідини густина і тиск пов'язані таким співвідношенням:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/n},$$

де n — показник політропи.

Тоді

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{np_0}{(n-1)\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right],$$

і рівняння (28.27) набуває вигляду

$$\frac{V^2}{2} - \frac{np_0}{(n-1)\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] = \text{const.} \quad (28.29)$$

28.5. Інтеграл Лагранжа — Коші¹

Розглянемо другий інтеграл диференціальних рівнянь руху ідеальної рідини (28.21). Він має місце за таких припущень. 1. Рідина ідеальна. 2. Рух рідини потенціальний, тобто вектор завихрення дорівнює нулю: $\vec{\omega} = \vec{0}$, звідки $\vec{V} = \overline{\text{grad}}\varphi$, де $\varphi(x, y, z, t)$ — функція потенціалу швидкостей. 3. Рідина баротропна, тобто $\rho = f(p)$.

Беручи до уваги що $\frac{\partial}{\partial t} \overline{\text{grad}}\varphi = \overline{\text{grad}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, рівнянню (28.21) можна надати вигляду

$$\overline{\text{grad}} \left(U + \int \frac{dp}{p} - \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \vec{0}. \quad (28.30)$$

Якщо градієнт деякої функції $Q = Q(x, y, z, t)$ дорівнює нулю, то функція, що перебуває під знаком градієнта, є функцією тільки часу t :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{p} - U = f(t). \quad (28.31)$$

Вираз (28.31) називається *інтегралом Лагранжа — Коші*.

¹ Огюстен Луї Коші (1789—1857) — французький математик, член Паризької і Петербурзької академії наук.

Довільна функція часу $f(t)$ є однаковою для всієї області течії рідини і визначається з граничних умов руху рідини.

Інтеграл Лагранжа — Коші відіграє в теорії неусталеного руху ідеальної рідини таку саму роль, що й інтеграл Бернуллі при усталеному русі ідеальної рідини. Дійсно, при усталеному русі $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, а $f(t) = c$, і рівняння (28.31) набирає вигляду рівняння (28.24).

У випадку руху нестисливої рідини за відсутності об'ємних сил ($U = 0$, $\rho = \text{const}$) матимемо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t). \quad (28.32)$$

28.6. Теорема про зміну моменту кількості руху суцільного середовища

Відокремимо в суцільному середовищі, що рухається, довільний індивідуальний малий скінченний об'єм v , який складається з елементарних об'ємів $d\nu$ і обмежений деякою поверхнею S .

Момент кількості руху об'єму v суцільного середовища відносно довільного нерухомого центра (точки) визначимо за формулою

$$\vec{K}_O = \int_{(v)} \vec{r} \times \rho \vec{V} d\nu, \quad (28.33)$$

де \vec{r} — радіус-вектор елементарної частки $d\nu$ середовища відносно довільного нерухомого центра (точки).

Головний момент зовнішніх об'ємних (масових) сил, прикладених до об'єму, рух якого розглядається, визначимо за формулою

$$\vec{M}_{(об)}^e = \int_{(v)} \vec{r} \times \rho \vec{F} d\nu. \quad (28.34)$$

Головний момент зовнішніх поверхневих сил, прикладених до об'єму, що розглядається, визначимо за формулою

$$\vec{M}_{(об)}^e = \int_{(S)} \vec{r} \times \rho \vec{q}_n dS. \quad (28.35)$$

На підставі теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи відносно довільного нерухомого центра (точки) можна записати

$$\frac{d}{dt} \int_{(v)} \vec{r} \times \rho \vec{V} d\nu = \int_{(v)} \vec{r} \times \rho \vec{F} d\nu + \int_{(S)} \vec{r} \times \rho \vec{q}_n dS. \quad (28.36)$$

Рівняння (28.36) є математичним виразом теореми про зміну моменту кількості руху суцільного середовища відносно нерухомого довільного центра (точки): *перша похідна за часом від моменту кількості руху скінченного малого об'єму в суцільного середовища відносно довільного нерухомого центра (точки) дорівнює геометричній сумі головних моментів зовнішніх масових і поверхневих сил, що прикладені до об'єму, відносно того самого центра (точки).*

Рівнянню (28.36) можна надати іншого вигляду. Для цього, по-перше, обчислимо похідну в лівій частині рівняння (28.36):

$$\frac{d}{dt} \int_{(v)} \vec{r} \times \rho \vec{V} d\nu = \int_{(v)} \frac{d\vec{r}}{dt} \times \rho \vec{V} d\nu + \int_{(v)} \vec{r} \times \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\nu = \int_{(v)} \vec{r} \times \rho \frac{d\vec{V}}{dt} d\nu, \quad (28.37)$$

де $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \rho \vec{V} d\nu = \vec{V} \times \rho \vec{V} d\nu = \vec{0}$.

Поверхневий інтеграл у правій частині рівняння (28.36) перетворимо в інтеграл за об'ємом за формулою Гаусса – Остроградського:

$$\begin{aligned} \int_{(s)} \vec{r} \times \vec{q}_n dS &= \int_{(v)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\vec{r} \times \vec{q}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{r} \times \vec{q}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{r} \times \vec{q}_z) \right] d\nu = \\ &= \int_{(v)} \left[\vec{r} \times \left(\frac{\partial \vec{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{q}_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{q}_x \right) + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{q}_y \right) + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{q}_z \right) \right] d\nu. \end{aligned} \quad (28.38)$$

Підставляючи рівності (28.37) і (28.38) у рівняння (28.35) і проводячі елементарні перетворення, здобудемо

$$\int_{(v)} \left[\vec{r} \times \left(\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{q}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{q}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{q}_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{q}_x \right) - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{q}_y \right) - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{q}_z \right) \right] d\nu = 0,$$

звідки матимемо:

$$\vec{r} \times \left(\rho \frac{d\vec{V}}{dt} - \rho \vec{F} - \frac{\partial \vec{q}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{q}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{q}_z}{\partial z} \right) = \vec{0}, \quad (28.39)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \vec{q}_x \right) + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \vec{q}_y \right) + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \vec{q}_z \right) = \vec{0}. \quad (28.40)$$

Оскільки

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{i};$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{j};$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{k},$$

то рівнянню (28.40) можна надати вигляду

$$(\vec{i} \times \vec{q}_x) + (\vec{j} \times \vec{q}_y) + (\vec{k} \times \vec{q}_z) = \vec{0}. \quad (28.41)$$

Проекціюючи рівняння (28.41) на осі нерухомої декартової системи координат, здобудемо:

$$q_{xy} = q_{yx}; \quad q_{yz} = q_{zy}; \quad q_{zx} = q_{xz},$$

або, беручи до уваги загальне позначення дотичних напружень,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (28.42)$$

Рівності (28.42) становлять зміст *закоу парності дотичних напружень* (див. також розділ “Статика”, параграф 9.2).

Отже, рівняння (28.36) набирає вигляду

$$\vec{r} \times \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{r} \times \left(\rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{q}_z}{\partial z} \right). \quad (28.43)$$

Зауважимо, що закон парності дотичних напружень доводить, що з дев'яти компонентів напружень незалежними будуть тільки шість.

28.7. Теорема про зміну кінетичної енергії суцільного середовища

Подамо теорему про зміну кінетичної енергії суцільного середовища для окремого випадку його руху — руху, за якого механічна енергія середовища не перетворюється в інші види енергії і прилив будь-якої енергії іззовні відсутній.

Відокремимо в суцільному середовищі, що рухається, довільний індивідуальний малий скінченний об'єм v , який складається з елементарних об'ємів dv і обмежений деякою поверхнею S , і вивчимо його рух на підставі теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі, яка у даному випадку набирає вигляду

$$dT = d'A^e. \quad (28.44)$$

Кінетичну енергію об'єму v , що розглядається, визначимо за формулою

$$T = \int_{(v)} \rho \frac{V^2}{2} d\upsilon. \quad (28.45)$$

Роботу об'ємних (масових) і поверхневих зовнішніх сил визначимо за формулами:

$$A_{(об)}^e = \int_{M_0 M_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(v)} \rho \vec{F} \cdot d\vec{r} d\upsilon, \quad (28.46)$$

$$A_{(пов)}^e = \int_{(S)} \vec{q}_n \cdot d\vec{r} dS. \quad (28.47)$$

Підставляючи значення T , $A_{(об)}^e$ і $A_{(пов)}^e$ в рівність (28.44) і враховуючи, що

$$d'A^e = d'A_{(об)}^e + d'A_{(пов)}^e, \text{ дістанемо}$$

$$d \int_{(v)} \rho \frac{V^2}{2} d\upsilon = d \int_{(v)} \rho \vec{F} \cdot d\vec{r} d\upsilon + d \int_{(S)} \vec{q}_n \cdot d\vec{r} dS. \quad (28.48)$$

Диференціюючи рівняння (28.48) за часом, здобудемо

$$\frac{d}{dt} \int_{(v)} \rho \frac{V^2}{2} d\upsilon = \int_{(v)} \rho \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} d\upsilon + \int_{(S)} \vec{q}_n \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dS,$$

або

$$\frac{d}{dt} \int_{(v)} \rho \frac{V^2}{2} d\upsilon = \int_{(v)} \rho \vec{F} \cdot \vec{V} d\upsilon + \int_{(S)} \vec{q}_n \cdot \vec{V} dS, \quad (28.49)$$

де скалярні добутки $\vec{F} \cdot \vec{V}$ і $\vec{q}_n \cdot \vec{V}$ визначають щільність розподілу потужностей масових і поверхневих сил, що діють на об'єм υ .

Отже, з рівняння (28.49) випливає, що якщо при русі довільного скінченного малого об'єму υ суцільного середовища механічна енергія не перетворюється в інші види енергії, а також відсутній приплив енергії іззовні, то похідна за часом від кінетичної енергії об'єму, що розглядається, дорівнює алгебричній сумі потужностей масових і поверхневих сил, що діють на цей об'єм. Розглянуте становить зміст теореми про зміну кінетичної енергії суцільного середовища.

Надамо рівнянню (28.49) іншого вигляду. Для цього перетворимо інтеграл $\frac{d}{dt} \int_{(v)} \rho \frac{V^2}{2} d\upsilon$ у такий спосіб:

$$\frac{d}{dt} \int_{(v)} \rho \frac{V^2}{2} d\nu = \int_{(v)} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) d\nu + \int_{(v)} \frac{V^2}{2} \frac{d\rho}{dt} d\nu = \int_{(v)} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) d\nu, \quad (28.50)$$

оскільки на підставі закону збереження елементарної маси $\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho d\nu) = 0$.

На підставі формули Гаусса — Остроградського поверхневий інтеграл $\int_{(S)} \vec{q}_n \cdot \vec{V} dS$ може бути перетворено в об'ємний:

$$\int_{(S)} \vec{q}_n \cdot \vec{V} dS = \int_{(v)} \text{div}(\vec{q}_n \vec{V}) d\nu. \quad (28.51)$$

З урахуванням розглянутого рівняння (28.49) можна надати вигляду

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \cdot \vec{V} + \text{div}(\vec{q}_n \vec{V}). \quad (28.52)$$

Зауважимо, що диференціальні рівняння руху середовища (28.9), рівняння нерозривності, закон парності дотичних напружень і теорема про зміну кінетичної енергії (28.52) становлять основну систему рівнянь динаміки суцільного середовища, які дають змогу розв'язувати практичні задачі динаміки будь-якого суцільного середовища.

28.8. Приклади розв'язання задач динаміки ідеальної рідини

Технологічні процеси харчової і хімічної промисловості відбуваються одночасно з допоміжними і транспортувальними операціями. Підведення компонентів технологічного процесу і відведення продуктів із технологічних апаратів є невід'ємною частиною хімічної і харчової технологій. При цьому транспортування робочих середовищ малої в'язкості має велике поширення. Моделлю таких середовищ є ідеальна рідина, рух якої описується диференціальними рівняннями Ейлера, інтегралами Бернуллі і Лагранжа — Коші. Розглянемо кілька прикладів застосування зазначених рівнянь для розв'язання задач динаміки ідеальної рідини.

Приклад 28.1. У цукровому виробництві після транспортування і миття цукрових буряків забруднена твердими частками вода подається у відстійник напівнеперервної дії (рис. 28.1). Забруднена вода, що має густину ρ_1 , повільно рухається вздовж відстійника. Під час руху забрудненої води тверді

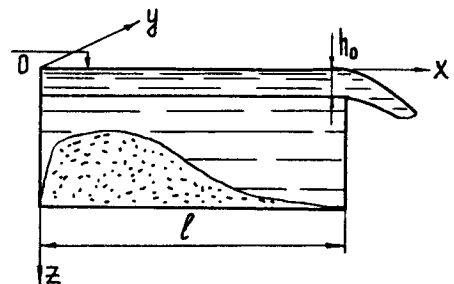


Рис. 28.1

частки осідають на дно відстійника. Скласти диференціальне рівняння руху потоку забрудненої води при її усталеному русі, а також визначити тиск у середньому шарі потоку, висота якого на виході з відстійника дорівнює h_0 . Довжина відстійника дорівнює ℓ ; проекції швидкості руху окремих часток води на нерухомі осі координат задані рівняннями:

$$V_x = 0,025x, \quad V_y = V_z = 0.$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі застосуємо диференціальне рівняння Ейлера, тобто рівняння (28.1). Згідно з умовою течії середовища маємо: $V_y = V_z = 0$; $F_x = F_y = 0$; $F_z = g$. Підставляючи ці значення в рівняння Ейлера, дістанемо:

$$\begin{cases} \rho_1 V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}; \\ 0 = \rho g - \frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases} \quad (1)$$

де ρ — густина чистої води.

Помножимо кожне рівняння системи (1) відповідно на dx , dy і dz :

$$\begin{cases} \rho_1 V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dx = -\frac{\partial p}{\partial x} dx; \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} dy; \\ 0 = \rho g dz - \frac{\partial p}{\partial z} dz. \end{cases} \quad (2)$$

Складаючи почленно рівняння системи (2), здобудемо

$$\rho_1 V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dx = \rho g dz - \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right),$$

звідки матимемо

$$\rho_1 V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dx = \rho g dz - dp. \quad (3)$$

Оскільки

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0,025x \frac{\partial(0,025x)}{\partial x} = 0,000625x,$$

то сукупне диференціальне рівняння руху потоку має вигляд

$$0,000625 \rho_e x dx = \rho g dz - dp. \quad (4)$$

Інтегруючи диференціальне рівняння (4), дістанемо

$$\rho g z - p = \rho_1 \frac{0,000625x^2}{2} + c. \quad (5)$$

Початкові умови: $t = 0$; $x(0) = 0$; $z(0) = 0$, а також $p(0) = p_0$, де p_0 — атмосферний тиск. Отже, $c = -p_0$.

Тиск у шарі потоку середовища визначаємо за формулою (5):

$$p = (\rho g z + p_0) - \rho_1 0,0003125x^2. \quad (6)$$

Оскільки $z = \frac{h_0}{2}$, $x = l$, то остаточно матимемо

$$p = \left(\rho g \frac{h_0}{2} + p_0 \right) - \rho_1 0,0003125l^2.$$

Приклад 28.2. Якою буде зміна тиску на ділянці похилої труби між перерізами I—I і II—II, якщо витрата малов'язкого робочого середовища $Q \left[\frac{\text{м}^3}{\text{с}} \right]$ —

величина стала. Висота положення осі труби при переході від перерізу I—I до перерізу II—II змінюється на величину h (рис. 28.2). Радіус труби вздовж її осі змінюється за законом $R = R_0 - kl$. Кут нахилу осі труби до горизонту дорівнює α . Довжина труби дорівнює l , k — сталий коефіцієнт.

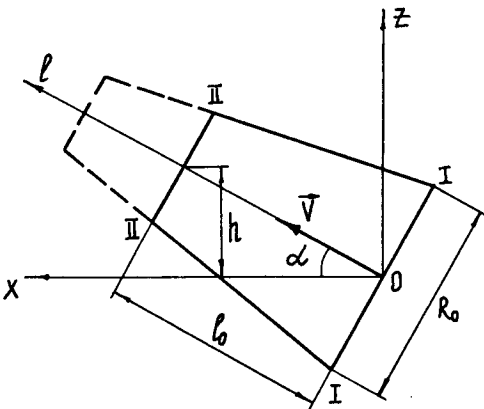


Рис. 28.2

Розв'язання. Задачу розв'язуємо на підставі такої моделі: ідеальна рідина здійснює усталений потенціальний рух. Оскільки рух рідини відбувається під кутом до горизонту, то проєкціюємо рівняння (28.13) на вісь l , взявши за змінну довжину труби l :

$$F_l - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l} = V_l \frac{\partial V_l}{\partial l}. \quad (1)$$

Об'ємна сила F_l змінюється по довжині потоку рідини, тому за величиною

$$F_l = -g \frac{\partial z}{\partial l}. \quad (2)$$

Вираз у правій частині рівняння (1) можна подати у вигляді

$$V_l \frac{\partial V_l}{\partial l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_l^2}{\partial l} \right). \quad (3)$$

Швидкість у довільному перерізі труби

$$V_l = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{Q}{\pi (R_0 - kl)^2}. \quad (4)$$

З урахуванням розглянутого рівняння (1) набирає вигляду

$$-g \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{Q^2}{2\pi^2 (R_0 - kl)^4} \right),$$

або

$$\frac{\partial p}{\partial l} = -\rho g \frac{\partial z}{\partial l} - \rho \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{Q^2}{2\pi^2 (R_0 - kl)^4} \right). \quad (5)$$

З рис. 28.2 випливає, що $h = l \sin \alpha$; тоді

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \sin \alpha = \frac{h}{l_0}.$$

Підставляючи це значення в рівняння (5) і проводячи елементарні перетворення, остаточно збудемо

$$\frac{\partial p}{\partial l} = -\frac{2\rho Q^2 k}{\pi^2 (R_0 - kl)^5} - \frac{\rho g h}{l_0}. \quad (6)$$

Отже, зміна тиску під час переміщення рідини від перерізу I—I до перерізу II—II визначається за формулою (6).

Приклад 28.3. Скласти диференціальне рівняння усталеного потоку ідеальної рідини, який рухається в потенціальному силовому полі тяжіння. Про-

екції швидкості руху окремих точок потоку задані рівняннями $V_x = 3x$; $V_y = 4y$; $V_z = 0$. Визначити також тиск у точці A потоку, яка має координати $x_A = 2$; $y_A = 2$; $z_A = 1$; при цьому початок координат розміщений на поверхні потоку і вісь z напрямлена в глибину потоку.

Розв'язання. Для розв'язання задачі застосуємо диференціальні рівняння руху ідеальної рідини, тобто рівняння Ейлера, які в даному випадку набувають вигляду:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 9x; \\ -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 16y; \\ g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

оскільки при усталеному русі потоку в потенціальному силовому полі тяжіння

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_z}{\partial y} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} = 3; \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} = 4; \quad F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = g. \end{aligned}$$

Перетворимо систему рівнянь (1) у такий спосіб: помножимо ліві і праві частини рівнянь (1) відповідно на dx , dy , dz , а потім складемо ці рівняння почленно, здобудемо сукупне диференціальне рівняння

$$g dz - \frac{1}{\rho} dp = 9x dx + 16y dy. \quad (2)$$

Після інтегрування рівняння (2) матимемо

$$gz - \frac{p}{\rho} = \frac{9x^2}{2} + \frac{16y^2}{2} + c. \quad (3)$$

Довільну сталу c визначимо за початковими умовами: $t = 0$; $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $z(0) = 0$, а також $p = p_0 = 1$ ат. Тоді з рівняння (3) дістанемо

$$c = -\frac{P_0}{\rho}.$$

Підставляючи значення c у рівняння (3) і розв'язуючи його відносно p , знайдемо

$$p = p_0 + \rho gz - \frac{g\rho}{2}x^2 - \frac{16\rho y^2}{2},$$

звідки при $x_A = 2$; $y_A = 2$; $z_A = 1$ здобудемо величину тиску в точці А:

$$p = 0,59 \text{ ат.}$$

Приклад 28.4. Для фільтрації робочих середовищ у харчовій промисловості застосовуються центрифуги (рис. 28.3). Барабан центрифуги обертається з кутовою швидкістю ω . Скласти диференціальне рівняння усталеного руху робочого середовища у середині барабана і визначити величину тиску середовища в довільній точці його об'єму, якщо проекції швидкості руху окремих часток середовища на осі координат, зображені на рис. 28.3, відповідно становлять:

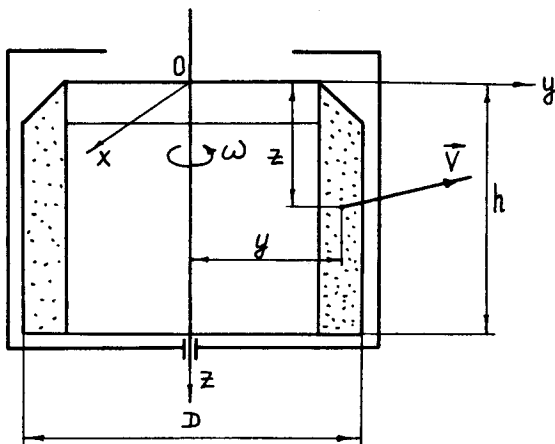


Рис. 28.3

$$V_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}; V_y = \frac{x}{x^2 + y^2}; V_z = 0.$$

Зміною густини середовища знехтувати.

Розв'язання. Для розв'язання задачі застосуємо рівняння Ейлера. Оскільки рух середовища відбувається одночасно у гравітаційному і відцентровому полях, то об'ємні сили в обраній системі координат такі:

$$F_x = \omega^2 x; F_y = \omega^2 y; F_z = g.$$

Оскільки рух середовища усталений, то

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial V_z}{\partial t} = 0.$$

З урахуванням розглянутого рівняння Ейлера набирають вигляду:

$$\begin{cases} \omega^2 x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y}; \\ \omega^2 y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}; \\ g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Визначаємо частинні похідні в рівнянні (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \frac{\partial V_y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Визначаємо суми в правих частинах рівнянь (1):

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \left[\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] + \frac{x}{x^2 + y^2} \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \\ &= -\frac{x}{(x^2 + y^2)^2}; \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] + \frac{x}{x^2 + y^2} \left[-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \\ &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Враховуючи розглянуте, рівняння (1) набирає вигляду

$$\begin{cases} \omega^2 x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \omega^2 y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^2}; \\ g - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Помножимо ліві і праві частини рівнянь (2) відповідно на dx , dy , dz , а потім складемо ці рівняння почленно. Матимемо сукупне диференціальне рівняння

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz - \frac{1}{\rho} dp = -\frac{x dx}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (3)$$

Рух робочого середовища відбувається у потенціальному силовому полі сил тяжіння і відцентрових сил, тому об'ємні сили мають силову функцію U , повний диференціал якої

$$dU = \omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz = d\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} + gz\right).$$

Права частина рівняння (3) становить:

$$-\frac{x dx}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2} d\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

Отже, рівнянню (3) можна надати вигляду

$$d\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} + gz\right) - \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{2} d\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right). \quad (4)$$

Рівняння (4) є диференціальним рівнянням руху робочого середовища у середині барабана центрифуги.

Інтегруючи рівняння (4), дістанемо

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} + gz - \frac{1}{2(x^2 + y^2)} + c. \quad (5)$$

При $t = 0$ $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $z(0) = 0$; $p(0) = p_0$. Щоб виконати такі умови, необхідно поставити вимогу $\frac{1}{x^2 + y^2} = 0$. Тоді з рівняння (5) випливає, що

$$c = \frac{p_0}{\rho}.$$

Враховуючи значення c , остаточно маємо

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + gz + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2(x^2 + y^2)}. \quad (6)$$

Таким чином, тиск у довільній точці робочого середовища, що розташована у середині барабана центрифуги, визначається за формулою (6).

Приклад 28.5. Визначити тиск в неусталеному потоці важкої нестисливої малов'язкої рідини, яка рухається у потенціальному полі сил тяжіння і має потенціал швидкості $\varphi = \frac{2t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, якщо в початковий момент часу

тиск у потоці дорівнював p_0 .

Розв'язання. Для розв'язання задачі застосуємо інтеграл Лагранжа — Коші, який у випадку, що розглядається, має вигляд

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(t). \quad (1)$$

Якщо вісь z напрямлена у глибину рідини вниз, то силова функція

$$U = gz.$$

Визначаємо компоненти швидкості рідини:

$$V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{2tx}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}; \quad V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{2ty}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}};$$

$$V_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{2tz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

Визначаємо V^2 :

$$V^2 = \left(-\frac{2tx}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right)^2 + \left(-\frac{2ty}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right)^2 + \left(-\frac{2tz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right)^2 = \frac{4t^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Визначаємо похідну від потенціалу швидкості за часом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Сталу інтегрування $f(t)$ визначаємо з початкових умов: $t = 0$; $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $z(0) = 0$; $p(0) = p_0$. Щоб виконати такі умови, необхідно поставити вимогу $\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$. Тоді з рівняння (1) дістанемо

$$f(t) = \frac{p_0}{\rho}.$$

Враховуючи значення $f(t)$, рівнянню (1) надаємо вигляду

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + gz - \frac{2t^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{2}$$

Тиск у неусталеному потоці важкої нестисливої малов'язкої рідини визначається за формулою (2).

Приклад 28.6. Перехідну ділянку трубопроводу від вихідного дифузора насоса до нагнітального трубопроводу зображено на рис. 28.4. Визначити необхідний тиск у вихідному перерізі дифузора 1—1, якщо у нагнітальному трубопроводі швидкість робочого середовища має бути

$$V_{2-2} = 7,5 \text{ м/с, а тиск } p_{2-2} = 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

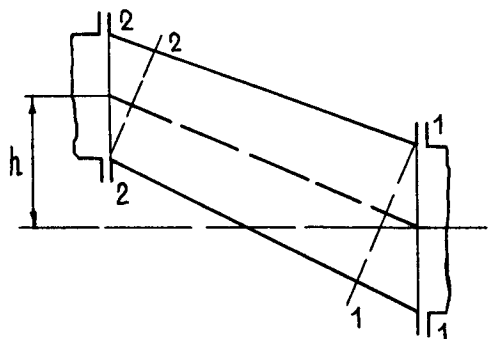


Рис. 28.4

Діаметр перерізу 1—1 становить: $d_{1-1} = 0,45$ м, діаметр перерізу 2—2 — $d_{2-2} = 0,3$ м. Центр перерізу 2—2 розміщений вище положення центра перерізу 1—1 на величину $h = 1,5$ м. Робоче середовище — вода.

Розв'язання. Вважаємо рух робочого середовища усталеним і нерозривним. Тому для розв'язання задачі застосуємо інтеграл Бернуллі та умову нерозривності робочого середовища.

З умови нерозривності $V_{1-1}S_{1-1} = V_{2-2}S_{2-2}$ визначаємо швидкість у перерізі 1—1:

$$V_{1-1} = V_{2-2} \frac{S_{2-2}}{S_{1-1}} = V_{2-2} \frac{d_{2-2}^2}{d_{1-1}^2} = 7,5 \frac{0,3^2}{0,45^2} = 3,33 \text{ м/с.}$$

Оскільки на ділянці 1—1 — 2—2 немає ніяких перешкод, то на підставі інтеграла Бернуллі матимемо

$$\frac{p_{1-1}}{\rho g} + \frac{V_{1-1}^2}{2g} + h_{1-1} = \frac{p_{2-2}}{\rho g} + \frac{V_{2-2}^2}{2g} + h_{2-2}. \quad (1)$$

Беручи до уваги, що $\rho g = \gamma$, $h_{1-1} = 0$, і розв'язуючи рівняння (1) відносно p_{1-1} , здобудемо

$$p_{1-1} = \frac{\gamma}{2g} (V_{2-2}^2 - V_{1-1}^2) + p_{2-2} + h_{2-2} = \frac{10000}{19,8} (7,5^2 - 3,33^2) + 1,5 \cdot 10^5 + 1,5 = 1,73 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Приклад 28.7. Відцентровий насос призначений для подачі води з водойми у кількості $Q = 0,2$ м³/с по трубопроводу діаметром $d = 50$ мм = 0,05 м (рис. 28.5). Визначити висоту Z_n установки насоса над горизонтом води, враховуючи втрати напору потоку води під час течії по трубопроводу.

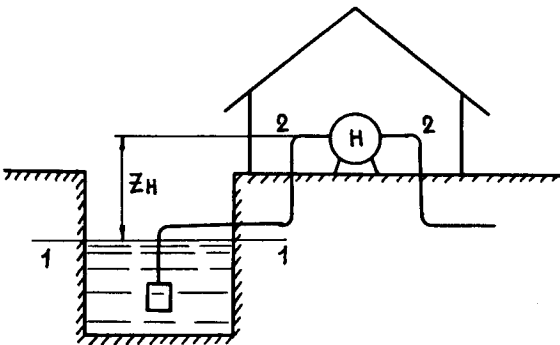


Рис. 28.5

Розв'язання. Розглядаємо усталений і нерозривний рух води по трубопроводу. Швидкість руху води визначаємо за формулою

$$Q = VS = V \frac{\pi d^2}{4},$$

звідки

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

Записуємо інтеграл Бернуллі для перерізів 1—1 і 2—2, вважаючи, що швидкість $V_{1-1} = 0$:

$$\frac{p_{1-1}}{\rho g} = Z_n + \frac{p_{2-2}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + \sum h_{\text{втр}}, \quad (1)$$

де $\sum h_{\text{втр}}$ — сумарне значення втрат напору на ділянці між перерізами 1—1 і 2—2, які віднесені до одиниці ваги рідини, що проходить через переріз за одиницю часу.

Рівнянню (1) можна надати іншого вигляду:

$$\frac{p_{1-1}}{\rho g} = Z_n + \frac{p_{2-2}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + (1 + \sum \zeta), \quad (2)$$

де $\sum \zeta$ — сумарний коефіцієнт шляхових втрат напору $\left(\sum \zeta = 1 + \frac{\sum h_{\text{втр}} \cdot 2g}{V^2} \right)$.

Коефіцієнт $\sum \zeta$ визначається дослідним шляхом.

З рівняння (2) здобудемо

$$Z_n = \frac{p_{1-1} - p_{2-2}}{\rho g} - (1 + \sum \zeta) \frac{V^2}{2g}.$$

Приклад 28.8. Визначити потужність, яку необхідно мати насосу, щоб підтримувати усталений режим течії робочого середовища при його перекачуванні зі швидкістю V по горизонтальному трубопроводу. Густина рідини дорівнює ρ .

Розв'язання. Для розв'язання задачі застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії суцільного середовища, тобто рівняння (28.48). Оскільки для горизонтального трубопроводу (вісь x напрямляємо вздовж трубопроводу) $F_x = 0$, то рівняння зміни кінетичної енергії середовища вздовж осі x набуває вигляду

$$\frac{d}{dt} \int_{(v)} \frac{\rho V^2}{2} dv = \int_{(s)} pV ds,$$

або

$$d \int_{(v)} \frac{\rho V^2}{2} dv = \int_{(s)} (pV ds) dt, \quad (1)$$

де $d \int_{(v)} \frac{\rho V^2}{2} d v = dT$ — приріст кінетичної енергії потоку середовища при його

переміщенні; $\int_{(s)} (pVdS) dt = d'A$ — приріст роботи сил тиску при переміщенні середовища.

Визначаємо dT і $d'A$:

$$dT = \frac{\rho}{2} d \int_{(v)} V^2 d v = \frac{1}{2} \rho v d(V^2) = \frac{M}{2} d(V^2);$$

$$d'A = pVS dt = N dt,$$

де $\rho v = M$ — маса потоку робочого середовища, яке потрібно перекачати за час t ; $pVS = N$ — необхідна потужність сил тиску для перекачування робочого середовища.

Враховуючи розглянуте, рівнянню (1) можна надати вигляду

$$dT = d'A. \quad (2)$$

Інтегруючи рівняння (2) з урахуванням значень dT і $d'A$ у визначених межах, здобудемо

$$\int_{V_0}^V \frac{M}{2} dV^2 = \int_0^t N dt,$$

або

$$\frac{M}{2} (V^2 - V_0^2) = Nt,$$

звідки

$$N = \frac{M}{2t} (V^2 - V_0^2) = \frac{m}{2} (V^2 - V_0^2), \quad (3)$$

де $m = \frac{M}{t}$ — секундна маса робочого середовища, що перекачується.

Якщо площа перерізу трубопроводу дорівнює S , то $m = \rho VS$ і, отже,

$$N = \frac{\rho SV}{2} (V^2 - V_0^2).$$

Запитання для самоперевірки

1. Виведіть диференціальні рівняння руху суцільного середовища, запроваджені Лагранжем.
2. Запишіть рівняння Ейлера для усталеного і неусталеного руху ідеальної рідини у векторній і скалярній формах.
3. Запишіть диференціальні рівняння Ейлера у функції компонентів виходу для об'ємних сил, що мають потенціал у векторній і скалярній формах.
4. За якою формулою визначається інтеграл Бернуллі для усталеного руху нестисливої ідеальної рідини?
5. Що таке висотний, швидкісний і п'єзометричний напори?
6. За якою формулою визначається інтеграл Бернуллі для усталеного руху нестисливої рідини за відсутності об'ємних сил?
7. За якими формулами визначається інтеграл Бернуллі для усталеного руху стисливої рідини у випадках ізотермічного й адіабатичного рухів за відсутності об'ємних сил?
8. Запишіть інтеграл Лагранжа — Коші для випадку руху баротропної ідеальної рідини.
9. За якою формулою визначається інтеграл Лагранжа — Коші у випадку руху нестисливої рідини за відсутності об'ємних сил?
10. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху суцільного середовища.
11. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії суцільного середовища у випадку руху середовища, за якого механічна енергія не перетворюється в інші види енергії і припливу енергії ззовні немає.

ОСНОВНІ ЕТАПИ РОЗВИТКУ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Історію механіки як науки про машини і механізми можна починати з глибокої давнини. Народи Давнього Сходу були добре знайомі з такими механічними знаряддями, як важіль і клин. Перші єгипетські піраміди будувалися за три тисячі років до нашої ери. Найвища з пірамід — піраміда фараона Хеопса — складається з 23 300 000 кам'яних брил, середня вага яких дорівнює 2,5 т. Піднімання важких брил здійснювалося за допомогою похилої площини. Так, похилий шлях до піраміди Хефрена мав висоту 45,8 м і довжину 494,6 м, отже, кут нахилу до горизонту становив близько $5,3^\circ$, і виграш у силі при підніманні важких брил на цю висоту був значним. Піднімання і горизонтальне переміщення кам'яних брил здійснювалося за допомогою важеля.

Проте текстів з описом дії важеля та інших найпростіших механічних знарядь, що використовувалися в Давньому Єгипті або Вавилоні, не існує. Отже, механіку Давнього Сходу можна віднести до періоду передісторії сучасної механіки, що характеризувався застосуванням результатів нагромадженого практичного досвіду без його теоретичної обробки.

Перші трактати з механіки, де розглядалися властивості найпростіших машин, з'явилися в Давній Греції. Характерною рисою механіки Давньої Греції було розмежування вчення про рух (кінематики) і вчення про рівновагу (статики). Вчення про рух розроблялося в межах загального вчення про природу; питання про сутність руху було одним з фундаментальних проблем філософії. Вчення про рівновагу розроблялося, ґрунтуючись на досвіді застосування різних механічних пристроїв.

У грецькій філософії вже на ранній стадії розвитку можна виявити дві різні механічні концепції: кінетичну і динамічну. За динамічною концепцією, саморух матерії неможливий — сама по собі матерія може перебувати тільки у спокої; рух матерії визначається дією на неї активних начал. Відомими представниками цієї концепції були Емпедокл (бл. 490—430 рр. до н. е.) і філософи елейської школи Парменід (кінець VI — V ст. до н. е.) і Зенон (V ст. до н. е.). Так, Зенон у своїх відомих “Парадоксах” (Стріла, що летить, нерухома; Прудконогий Ахіллес не може наздогнати черепаха та ін.) обґрунтував відсутність руху взагалі. Розглядаючи рух стріли, Зенон стверджував, що стріла в кожний момент часу займає деяку частину простору, але займати деяку частину простору означає бути або перебувати у спокої у певному місці. Таким чином, у кожний момент стріла, що летить, займає деяке місце, тобто перебуває у спокої в цьому місці. А із сукупності станів спокою рух виникнути не може. Звідси Зенон робить висновок про неможливість руху.

За кінетичною концепцією, матерії властивий саморух; у природі не існує яких-небудь особливих рухів, які б не були пов’язані з матерією; природа нічого не містить, крім матерії, яка рухається у пустому просторі. Найбільш послідовними представниками цієї концепції були атомісти — Левкіпп (бл. 500—440 рр. до н. е.), Демокріт (бл. 460—370 рр. до н. е.), Епікур (341—270 рр. до н. е.), Лукрецій (бл. 99—55 рр. до н. е.) і Геракліт із Ефеса (бл. 530—470 рр. до н. е.).

Достатньо повне викладення загальних понять античної механіки містяться в працях Арістотеля (384—322 рр. до н. е.). Арістотель народився у Фракії у 384 р. до н. е. Батько Арістотеля був лікарем македонського царя. В 367 р. до н. е. Арістотель оселяється в Афінах, де здобуває філософську освіту в Академії філософа-ідеаліста Платона. В 343 р. до н. е. Арістотеля було запрошено як вихователя Александра Македонського. Александр Македонський казав про Арістотеля так: “Я вшановую Арістотеля нарівні зі своїм батьком; якщо батьку я зобов’язаний життям, то Арістотелю я зобов’язаний усім, що дає йому ціну”. В 335 р. до н. е. Арістотель заснував в Афінах свою філософську школу, яка дістала назву школи перипатетиків, оскільки Арістотель мав звичай проводити філософські розмови під час прогулянок, а слово “перипатетик” з грецької мови перекладається як “любитель прогулянок”.

В арістотелівській натурфілософії значне місце посідає вчення про рух. Його праці “Фізика”, “Про небо”, “Про виникнення і знищення”, “Про метеорити” і “Метафізика” містять загальні поняття механіки. Проте система механіки Арістотеля була побудована не на дослідах, а на абстрактних висновках, що випливали з філософії Арістотеля — осмислити все суще і подати його в найбільш простій і гармонійній формі.

Центральною в ученні Арістотеля є ідея млявості, пасивності матерії. На перший план виступає різниця між рухомим і рушійним. Далі Арістотель розрізняє два види руху: “природний” і “насильницький”. “Природний” рух здійснюється сам по собі, без будь-якого втручання ззовні. “Насильницький”

рух для свого здійснення потребує такого втручання. Для пояснення причин “природного” руху, що не пов’язаний з рухом небесних тіл, Арістотель впроваджує поняття “природне місце”. Потяг до “природного місця” закладений в кожному тілі, що здійснює “природний” рух.

Здебільшого міркування Арістотеля про механічні явища наївні, заплутані і непослідовні. Нехтування дослідом (у рабовласницькій Греції дослід і експеримент вважалися справою рабів, а не вільних громадян) призводить Арістотеля до результатів, що не підтверджуються дослідом. Так, Арістотель вважав, що в околі земної поверхні важкі тіла падають швидше, а легкі повільніше, навіть якщо нехтувати опором повітря. Порівнюючи швидкості падіння важкого тіла певної форми в повітрі й у воді, він стверджував, що швидкість у воді буде у стільки разів меншою, у скільки разів густина води більша за густину повітря. Механічний рух Арістотель поділяв на прямолінійний і криволінійний. Криволінійний рух, за Арістотелем, є більш досконалим. Найдосконалішою кривою у давніх геометрів вважалося коло. Арістотель робить висновок, що планети, будучи створеними досконалою істотою — Богом, мають рухатися по найдосконалішим траєкторіям, тобто по колу. Арістотель також вважав, що для підтримування прямолінійного і рівномірного руху тіла необхідно до тіла прикласти сталу силу. За Арістотелем, у природі не існує порожнечі, як і дії на відстані.

Цікава доля ідей Арістотеля. Теологічні моменти, наявні у фізичному вченні Арістотеля, середньовічна схоластика роздула і догматизувала. В 1336 р. церковний декрет наказував вивчати твори Арістотеля, а потім природознавчі погляди Арістотеля були догматизовані і будь-які заперечення проти них проголошувалися ересю.

Фундатором механіки як науки слід вважати не Арістотеля, а видатного математика і механіка Архімеда (бл. 287—212 рр. до н. е.). Вже на перших етапах наукової діяльності механіка цікавила Архімеда більш за все, причому перехід до теоретичних узагальнень йшов від прикладних питань. Архімед збагатив античну техніку значною кількістю чудових винаходів. Давні автори приписували Архімеду винахід водяного гвинта. За допомогою механічних пристроїв він пересував по суходолу важкі кораблі сиракузького тирана Гіерона. За час осади Сіракуз римлянами мешканці міста застосовували для оборони військові машини, які були побудовані за вказівками Архімеда: знаряддя, що кидали снаряди, поворотні крани-“клюви”, що скидали величезні каміння на ворожі кораблі, прив’язані до ланцюгів залізні лапи, які зачепляли ніс корабля і ставили корабель вертикально на корму.

В працях “Про рівновагу плоских фігур”, “Про центр ваги плоских фігур”, “Про тіла, що плавають” і “Ефод, або послання до Ератосфена про механічні теореми” Архімед на підставі сформульованих ним аксіом, які цілком узгоджуються з дослідом, а саме:

1. Рівні вантажі, прикладені до рівних плеч важеля, зрівноважуються.
2. Рівні вантажі, прикладені до нерівних плеч важеля, не перебувають у рівновазі. Вантаж, прикладений до довшого плеча, падає вниз.

3. Якщо вантажі, підвішені на будь-яких плечах важеля, перебувають у рівновазі, то якщо до одного з вантажів що-небудь додати, рівновага порушиться і вантаж, до якого було додано, буде падати вниз.

4. Аналогічно, якщо від одного вантажу що-небудь відняти, то рівновага порушиться і вантаж, від якого не було віднято, падає вниз;

встановлює закон рівноваги важеля: *будь-які вантажі перебувають у рівновазі, коли плечі важеля обернено пропорційні вантажам.*

Аксиоми Архімеда є першим важливим кроком до поняття моменту сили. Академік А.М. Крилов писав: “Ми бачимо, що він (Архімед) вводить тут новий елемент, що спричинює рух, саме добуток сили на її відстань до точки опори, — те, що згодом почали називати моментом сили і що зумовлює обертовий рух тіла”.

Архімед вперше застосував важливе поняття геометричної статички — центр ваги твердого тіла — і запропонував методи його визначення. Архімед започаткував основи гідростатички, відкривши закон про підйомну силу (закон Архімеда).

Архімед розумів значення для людства точного і систематичного наукового дослідження, і саме йому приписують вислів: “Дайте мені точку опори — і я зрушу Землю”.

Архімед загинув від меча римського вояки під час різни, що була зчинена римлянами при захваті Сіракуз. За переказом, Архімед, заглиблений у розгляд геометричних фігур, сказав вояку, що підійшов до нього: “Чоловік, не займай моїх креслень”. Солдат, побачивши в цих словах ображення могутності переможців, відрубав йому голову.

Як було зазначено вище, вчення про рівновагу — статика в Давній Греції — розроблялося на основі досвіду застосування різних механічних пристроїв. При цьому мали місце два напрями: кінематичний і геометричний. Прикладом геометричного напрямку статички є статика Архімеда.

Початок кінематичного напрямку в статичці пов'язаний з трактатом “Механічні проблеми” Псевдоарістотеля (почат. III ст. до н. е.). Подальше дослідження кінематичного напрямку статички викладене в трактаті “Механіка” Герона Александрійського (I—II ст. н. е.). Основний метод вивчення рівноваги у Герона — вивчення переміщень, які отримують точки прикладання сил при порушенні цього стану. Герон дуже близько підійшов до елементарної форми принципу можливих переміщень. Герону належать також три трактати з прикладної механіки: про механізми, що рухаються під дією нагрітого повітря або пари; про конструкції саморушних механізмів; про конструкції різних видів зброї.

Механіці присвячений також трактат “Десять книг про архітектуру” будівельника-практика Марка Полліона Вітрувія (I ст. до н. е.). Трактат містить опис різних механізмів для піднімання важких тіл, а також практичні правила і будівельні поради.

У трактаті “Математична збірка” Паппа Александрійського (III ст. н. е.) наведена значна кількість уривків з робіт Архімеда, розглядається застосу-

вання геометричної статистики для розв'язання конкретних технічних задач. Трактат містить і власні дослідження автора про визначення об'єму і площі, що утворюються внаслідок обертання плоских кривих (теорема Паппа — Гюльдена).

Розвиток кінематичних уявлень у механіці пов'язаний з грецькою астрономією. Перша спроба моделювання видимого руху небесних тіл — теорія обертаних концентричних сфер — була розроблена античним математиком і астрономом Євдоксом Книдським (IV ст. до н. е.). За теорією Євдокса, навколо центра, в якому перебуває нерухома Земля, обертаються 27 концентричних сфер. На зовнішній сфері розташовані нерухомі зірки. За допомогою інших сфер Євдокс пояснював рух Сонця, Місяця і п'яти інших планет.

Арістотель удосконалив систему Євдокса, довівши кількість сфер до 56 і ввівши сфери, що “оберталися назад”. Ці удосконалення давали змогу розглядати обертання будь-якої сфери незалежно від сфери, що її охоплює.

Інша, більш досконала кінематико-геометрична модель руху небесних тіл була запропонована Аполлонієм (III ст. до н. е.) і розвинута Гіппархом (II ст. до н. е.) і Птолемеєм (II ст. н. е.).

Птолемей у праці “Велика математична побудова астрономії в XIII книгах” (“Альмагест”) розробив геоцентричну систему світу, в якій видимі рухи небосхилу і планет пояснював виходячи з припущення, що Земля нерухома і є центром Всесвіту. Небосхил робить повний оберт навколо Землі за 24 години, і зірки беруть участь тільки в добовому русі, зберігаючи своє відносне розташування незмінним; планети, крім того, рухаються і на небосхилі, змінюючи своє положення відносно зірок. Закони видимих рухів планет були встановлені Птолемеєм настільки досконалим, що це зробило можливим визначення їх положень відносно сфери нерухомих зірок.

У середньовіччі геоцентрична система світу Птолемея була догматизована католицькою церквою і будь-які заперечення проти неї оголошувалися ересю.

Вже в епоху розквіту Римської імперії, і тим більше в епоху її розпаду, в механіці все більш значну роль починає відігравати реміснича традиція (на відміну від теоретичної). Про це свідчать зміст і спрямованість робіт Герона, Паппа і Вітрувія, які здебільшого мали компілятивний характер. Після розпаду Римської імперії теоретична традиція античного наукового спадку була втрачена остаточно і під механікою розуміли тільки архітектурно-будівельне й інженерне мистецтво.

Бурхливий розвиток теоретичної традиції в механіці почався в епоху Відродження — з перших десятиліть XV ст. в Італії, а потім і в інших країнах. Значний внесок в механіку зробили такі видатні вчені, як Кузанський, Леонардо да Вінчі, Стевін, Коперник, Тарталья, Бенедетті, Кардано, Кеплер та ін.

Микола Кузанський — один з попередників Коперника в розробці геліоцентричної системи світу; ним висунуті ідеї про відносний рух і обертання Землі: “Для нас ясно, що Земля дійсно перебуває в русі, хоч нам так і не здається, тому, що ми помічаємо рух відносно до чогось нерухомого... кожний,

будь він на Землі, або на Сонці, або на іншій зірці, вважає, що він перебуває у нерухомому центрі, а все інше рухається". В галузі динаміки Кузанський робить перші кроки до поняття інерціального руху.

Відомий італійський художник, математик, механік і інженер Леонардо да Вінчі (1452—1519) займався дослідженнями з теорії механізмів, вивчав тертя в машинах, досліджував рух води в трубах і рух тіл по похилій площині. Він вперше застосовував нове поняття в механіці — момент сили відносно точки. Досліджуючи рівновагу сил, що діють на блок, Леонардо да Вінчі встановив, що роль плеча сили відіграє довжина перпендикуляра, побудованого із нерухомої точки блока на напрям канату, що несе вантаж. Рівновага блока можлива тільки за умови, що сума моментів сил відносно точки підвісу блока буде дорівнювати нулю.

Найбільш послідовним представником геометричного напрямку статички був Сімон Стевін (1548—1620) — голландський математик і механік. Наукові праці Стевіна зіграли завершальну роль у розвитку геометричного напрямку елементарної статички і гідростатички. В книзі "Початок статички" Стевін дає серію аксіоматичних визначень, які ґрунтуються на основних постулатах Архімеда. Закон рівноваги важеля Стевін встановлює, спираючись на ці визначення. Застосовуючи правило рівноваги вантажу на похилій площині, він встановлює закон складання і розкладання сил. Стевін вперше вводить позначення сил за допомогою стрілок, а також поняття про силовий трикутник і доводить теорему про три непаралельні сили.

У гідростатичці Стевін установлює закон гідростатичного тиску і розв'язує задачі про визначення тиску води на бічні стінки посудин.

З ім'ям польського вченого Міколая Коперника (1473—1543) пов'язане створення геліоцентричної системи світу. Результати сорокарічної праці були узагальнені Коперником у книзі "Про обертання небесних сфер". З появою цієї праці "...починає своє літочислення звільнення природознавства від теології", — писав Ф. Енгельс.

Система Коперника суто кінематична; створюючи цю систему, Коперник виходив із просторово-часових співвідношень, оскільки головною його метою було раціональне пояснення видимого руху небесних тіл. Основою теорії Коперника є поняття руху, що не спричинює ніяких ефектів у системі, що рухається.

Міркування про відносність механічного руху допомогли Копернику пояснити видимий рух небесних тіл, який спостерігається з Землі, за допомогою уявлення про рухомість Землі, її добове обертання і річне обертання навколо Сонця.

У полеміці з прибічниками геоцентричної системи про добове обертання Землі Коперник стверджував, що будь-яке тіло, що падає або кинуте з поверхні Землі, окрім властивого йому руху, "природного" або "насильницького", має ще один рух — колоподібний. "Істинний рух" тіла, або "рух відносно Всесвіту", складається з двох рухів. Як бачимо, Коперник достатньо близько підійшов до поняття про відносний і переносний рух.

Цікаво, що революційний характер геліоцентричної системи був сприйнятий католицькою церквою тільки після того, як Галілей та інші дослідники зробили явною філософську спадщину вчення Коперника. В 1616 р. декретом інквізиції праця Коперника була внесена до списку заборонених книжок і залишалася під забороною до 1822 р.

Подальшою розробкою кінематичного напряму в статисті займалися такі відомі математики і механіки, як Тарталья і Кардано. З ім'ям Джеронімо Кардано (1501—1576) пов'язують також карданну передачу і карданний підвіс.

Суттєвий внесок у розвиток динамічних уявлень зробив Нікколо Тарталья (1499—1557). Праці “Нова наука” і “Різні питання і винаходи” присвячені дослідженню руху важкого тіла, тобто балістиці. Тартальї належить перша спроба математизації питань балістики. Він знав, що максимальна дальність польоту снаряда досягається при стрільбі під кутом 45° до горизонту. Коли Сулейман I Кануні захотів зруйнувати вільну Венецію, Тарталья написав герцогу Урбінському, правителю Венеції: “Я не можу мовчати. Я знаю, що дальність польоту снаряда найкраща при 45° ”. Проте це правильне твердження не впливає з міркувань Тартальї, що були викладені в його працях, а встановлено суто інтуїтивно.

Основними досягненнями Тартальї на шляху створення нової механіки — динаміки — можна вважати його перші кроки до розуміння єдності аристотелівських “природного” і “насильницького” рухів.

Вирішальний удар по аристотелівській теорії протиставлення “природного” і “насильницького” рухів завдав учень Тартальї Джованні Бенедетті (1530—1590). В працях “Розв'язання всіх задач Евкліда, а також інших при єдино завданому розхилі циркуля” і “Книжка різних математичних і фізичних міркувань” Бенедетті безпосередньо підійшов до двох фундаментальних положень: досконалого “природного” руху не існує; в природі змінного “природного” і “насильницького” рухів немає принципової різниці.

Йоганн Кеплер (1571—1630) — німецький астроном — відкриттям трьох законів руху планет завершив створення наукової кінематики Сонячної системи. До досліджень Коперника і Кеплера в астрономії панували два догматичних твердження: Земля перебуває у спокої і є центром Всесвіту; всі планети за волею творця рухаються зі сталою швидкістю по колах як найбільш досконалих кривих.

Коперник спростував першу догму, а Кеплер — другу, довівши, що всі планети рухаються по еліпсах і в одному із фокусів цих еліпсів перебуває Сонце.

Закони руху планет Кеплер установив шляхом обчислень результатів спостережень датського астронома Тіхо Браге (1546—1601). Для того щоб установити закон: “квадрати часу обертання планет навколо Сонця співвідносяться, як куби їх середньої відстані від Сонця”, Кеплер виконує обчислення. Одне обчислення — 10 сторінок. Одне обчислення робиться 70 разів для перевірки його правильності. Таких обчислень сім томів.

Галілео Галілей (1564—1642) — геніальний італійський учений. Праці Галілея мали фундаментальне значення для розвитку динаміки. В книзі під назвою “Бесіди і математичні доведення, що стосуються двох нових галузей науки, віднесених до механіки і місцевого руху” Галілей пише: “Ми створюємо нову науку, предмет якої є надзвичайно старим. У природі немає нічого давнішого за рух, але саме відносно нього філософами написано вельми мало значного”.

Галілей вперше впроваджує в механіку поняття швидкості і прискорення. Він формулює принцип відносності класичної механіки, встановлює закон інерції і закони вільного падіння тіл.

Галілеєм була побудована кількісна теорія руху важкого тіла по похилій площині і теорія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту. Крім того, Галілей займався дослідженням міцності стрижнів і опором рідини тілам, що рухаються в ній.

Галілей був переконаним послідовником Коперника. В 1609 р. він побудував свій перший телескоп (трикратного збільшення), а потім довів збільшення до 32 разів. За допомогою телескопів Галілей зробив значні астрономічні відкриття: фази Венери, плями на Сонці і обертання Сонця, вивчив рух супутників Юпітера тощо.

Дослідження Галілея в галузі механіки важливі не тільки результатами, які йому вдалося одержати, а й послідовним введенням у механіку експериментального методу. Так, закон ізохронності коливання маятника, закони руху точки по похилій площині, а також закони падіння тіл були встановлені Галілеєм шляхом ретельних дослідів.

Галілей проводив послідовну і наполегливу боротьбу проти схоластики Арістотеля і застарілої системи Птолемея, антинаукових канонів католицької церкви. В листі до одного зі своїх опонентів, прихильника схоластичних формулювань “обожненого” Арістотеля, він писав: “якщо філософія — це те, що міститься в книжках Арістотеля, то ваша милість була би, певно, найбільшим філософом у світі, через те що ви володієте всіма цитатами з нього, тримаючи їх наготові. Я ж гадаю, що книжка філософії — це те, що завжди розкрито перед очима; але оскільки ця книжка написана іншими літерами, ніж літери нашого алфавіту, то вона не може бути прочитаною всіма. Літерами цієї книжки є трикутники, кола, кулі, конуси, піраміди й інші математичні фігури, дуже придатні для її читання”.

Проти Галілея в 1633 р. інквізиція порушує судовий процес, після якого Галілей 9 років був “в’язнем інквізиції”. Після смерті Галілея інквізиція вимагала спалення всіх листів і рукописів ученого.

Хрiстiан Гюйгенс (1629—1695) розвив і продовжив праці Галілея. Гюйгенс розробив теорію коливань фізичного маятника і встановив закони дії відцентрових сил. Він поширив теорію прискорених і сповільнених рухів однієї точки (поступальний рух тіла) на обертальний рух тіла, що було значним кроком уперед. Гюйгенс впроваджує у механіку поняття про момент інерції тіла відносно

осі й визначає центр хитань фізичного маятника. Низка праць Гюйгенса стосується теорії удару твердих тіл. Він створив конструкції маятникових годинників і винайшов регулятор ходу кишенькових годинників.

Гюйгенс пропагував механічний світогляд. Він писав: “В істинній філософії причину всіх природних явищ досягають за допомогою міркувань механічного характеру. На мою думку, так і належить робити; у протилежному разі необхідно відмовитися від будь-якої надії коли-небудь і що-небудь зрозуміти в фізиці”.

Рене Декарт (1596—1650) — французький філософ, математик, фізик і фізіолог. Декарт вперше впроваджує у механіці поняття кількості руху як міру механічного руху і формулює закон збереження кількості руху. В праці “Початок філософії” він дає близьке до ньютонівського формулювання закону інерції: “Будь-яка річ перебуває у тому стані, поки ніщо його не змінить; будь-яке тіло, що рухається, прагне продовжувати свій рух по прямій”.

У працях Декарта вперше досліджується питання про складання довільного числа рухів матеріальної точки.

Декарт вивчав також проблему визначення природи сили тяжіння на підставі досліду: “Єдине, що можна сказати, що природа тяжіння є питанням факту, тобто люди не можуть визначити її інакше, як проводячи досліди”. Декарт дає опис необхідного досліду. Дослід за описом Декарта був проведений Гуком, але в силу об’єктивних труднощів, які виникали при проведенні досліду (до речі, про них знали як Декарт, так і Гук), він закінчився невдало.

Декарт висунув також гіпотезу про вихрі “дуже тонкої рідинної матерії”, що заповнюють світовий простір. Спираючись на цю гіпотезу, він розробив механістичне учення про обертання й обернення планет Сонячної систем. Гіпотеза вихрів Декарта була відхилена Ньютоном.

Роберт Гук (1635—1703) — англійський природознавець. Йому належить відкриття закону пропорційності між силою, прикладеної до пружного тіла, і його деформацією. Закон Гука є основним співвідношенням, що застосовується в механіці при розрахунках конструкцій і споруджень на жорсткість, міцність і стійкість.

Як і Декарт, Гук займався визначенням сили тяжіння. В 1674 р. у праці “Спроба довести річний рух Землі на підставі спостережень” Гук подає систему світу, що ґрунтується на трьох положеннях. По-перше, всі небесні тіла спричиняють притягання до своїх центрів. Отже, не тільки Сонце і Місяць впливають на форму і рух Землі, а Земля — на Місяць і Сонце, а й Меркурій, Венера, Марс, Юпітер і Сатурн впливають на рух Землі; у свою чергу, притягання Землі впливає на рух кожної планети. Друге припущення Гука — це закон інерції: “Будь-яке тіло, отримавши одного разу простий прямолінійний рух, продовжує рухатися по прямій доти, поки не відхилиться в своєму русі іншою силою і не буде змушене описувати коло, еліпс або іншу складну лінію”. Третє припущення — “сили притягання діють тим більше, чим ближче тіло, на яке вони діють, до центра притягання”. І далі: “Щодо ступеня цієї

сили, то я не можу ще визначити його за допомогою досліду; але у всякому разі, як тільки цей ступінь стане відомим, він надзвичайно полегшить астрономам задачу визначення закону небесних рухів”.

Задача визначення сили всесвітнього тяжіння була розв’язана Ньютоном у його праці “Математичні початки натуральної філософії”.

Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646—1716) — німецький учений, математик, філософ і механік. Лейбніц вперше ввів у механіці термін “динаміка”. Значною заслугою Лейбніца є розробка (поряд із Ньютоном) диференціального й інтегрального обчислення. Лейбніц впроваджує в механіку поняття “живої сили” (кінетичної енергії) як міри механічного руху і встановлює закон збереження “живих сил”, що по суті є першим формулюванням закону збереження енергії.

Отже, Лейбніц і Декарт сходилися в тому, що рух у природі не зникає і не збільшується. Розбіжності у їхніх поглядах починалася з питання, за якою формулою вимірювати величину руху. Різниця у поглядах на міру механічного руху призвела до дискусії між прихильниками Лейбніца і Декарта (картезіанцями). Ця дискусія поділила всю вчену Європу на два ворожих табори.

Формула $mV = \text{const}$, яка застосовується в механіці, до Лейбніца не відповідала тому призначенню, яке надає силі Лейбніц. Тому Лейбніц вважав помилкою Декарта, що той, визнаючи, що сила руху зберігається, ототожнює її з величиною mV . Лейбніц пояснює, що ця рівність має випадковий характер, що взагалі має зберігатися рівність добутків вантажів і висот. А оскільки висоти, за законом Галілея, пропорційні квадратам швидкостей, то і міру руху необхідно вважати пропорційною квадрату швидкості. Як відомо, ця дискусія була розв’язана тільки в XIX ст. на підставі чіткого поняття про силу і закону збереження енергії.

Ісаак Ньютон (1643—1727) — видатний англійський математик і механік — у праці “Математичні початки натуральної філософії” виклав достатньо повну систему законів класичної механіки, за Ньютоном — учення про рух, що створюється будь-якими силами, і про сили, потрібні для створення будь-яких рухів.

Ньютону належить відкриття двох законів механіки: закону дії і протидії і закону всесвітнього тяжіння. Закон дії і протидії дає можливість вивчати рух механічних систем (систем матеріальних точок) і закони невільного руху. Закон всесвітнього тяжіння дає наукову основу для опрацювання астрономічних спостережень і теоретичних розрахунків руху небесних тіл.

Основний закон механіки (другий закон Ньютона) був сформульований Ньютоном у диференціальній формі. Це дало можливість розглянути численні задачі, де рух визначається змінними силами. Механічні задачі, які були розв’язані Галілеєм, перетворилися після дослідження Ньютона в прості окремі випадки. Ньютоном були сформульовані також закон паралелограма сил і закон складання рухів. Ньютон перший звернув увагу на різницю між поняттям інертної маси і гравітаційної маси.

Крім точного формулювання основних законів механіки, Ньютоном було розв'язано значне число частинних задач механіки й астрономії. Разом з Лейбніцем Ньютон є фундатором диференціального й інтегрального числення.

У другий книзі “Початків”, де Ньютон розглядає рух і дію сил з урахуванням впливу середовища, він відхиляє картезіанську фізику і, зокрема, гіпотезу Декарта про вихрі. За Декартом, вихровий рух тонкої флюїдної матерії, що перебуває навколо Сонця, втягує за собою планети, які обертаються і навколо своєї осі, — за аналогією з тим, що можна спостерігати на прикладі шматочків дерева, що втягуються вихровим рухом води й одночасно набувають обертового руху.

Ньютон пише: “Гіпотеза вихрів пригнічує багатьма труднощами. Щоб планета змогла описувати радіусом, проведеним до Сонця, площі, пропорційні часу, необхідно, щоб час обертання частин вихра був пропорційний квадратам відстані їх до Сонця. Щоб час обертання планет був у напівкубічному відношенні до їх відстаней до Сонця, і час обертання частин вихра був також у напівкубічному відношенні до їх відстаней до Сонця, щоб менші вихрі навколо Сатурна, Юпітера й інших планет змогли зберігати своє обертання і спокійно плавати у вихрі Сонця, терміни обертання частин сонячного вихра мають бути між собою рівними. Обертання Сонця і планет навколо своїх осей, які мають бути узгодженими з рухами вихрів, абсолютно не узгоджуються з цими пропорціями. Рух комет підпорядковується тим самим законам, що і рух планет, і не може бути поясненим вихрами. Комети мають ексцентричні орбіти у всіх областях неба, чого бути не може, якщо тільки вихрів не знищити.

Таким чином, гіпотеза вихрів цілком суперечить астрономічним явищам і призводить не стільки до пояснення руху тіл, скільки до їх заплутування”.

У “Початках” розглянуто також задачі притягання суцільних мас, теорія припливів і відпливів, теорія фігури Землі, закладено основи теорії подібності, розглянуто питання гідростатики і гідродинаміки, зокрема питання про форму поверхні важкої рідини, що обертається у циліндричній посудині.

П'єр Варіньйон (1654—1722) — французький математик і механік. У наукових працях Варіньйона геометричний напрям у статиці отримав свій подальший розвиток.

Варіньйон установив в остаточному вигляді поняття моменту сили відносно точки і довів теорему про момент рівнодійної сили, згодом названу його ім'ям. У праці “Проект нової механіки” Варіньйон на підставі цієї теореми, а також методу складання і розкладання сил дає точну статичну теорію найпростіших машин. У цій праці вчення про статику твердого тіла набуває майже повного завершення.

Леонард Ейлер (1707—1783) — один з видатних учених, що справив значний вплив на розвиток фізико-математичних наук у XVIII ст. Наукова діяльність Ейлера пов'язана з трьома містами: з Базелем, де він вчився, з Петербургом, де він почав і закінчив свою наукову діяльність, і з Берліном, де він працював з 1741 до 1766 рр.

Першим його трактатом, в якому була побудована система механіки, був трактат “Механіка, або Наука про рух в аналітичному викладенні”. Ейлер пише, що це є “...праця про рух, в якій я виклав аналітичним методом і в зручному порядку як те, що я знайшов у інших працях, так і те, що я здобув як результат своїх міркувань”.

У “Механіці” Ейлер не тільки дав математичне формулювання другого закону Ньютона в диференціальній формі, а й спростив її, розглядаючи пропорційність сили тільки до приросту швидкості. Ньютонівське “зміна кількості руху” у Ейлера має кількісний вираз у вигляді похідної за часом від кількості руху матеріальної точки. Ейлер розвиває теорію вільного і невільного руху матеріальної точки і вперше дає рівняння руху точки в натуральних координатах.

У праці “Теорія руху твердих тіл” Ейлер розробив кінематику і динаміку твердого тіла. Тут він дає в загальному вигляді диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла, що названі його ім’ям. У своїх численних наукових працях Ейлер, крім суто математичних досліджень, займався також і різними технічними задачами. Цьому присвячені його праці з астрономії, теорії морських припливів, теорії руху снаряда. У гідродинаміці Ейлеру належить виведення диференціальних рівнянь руху ідеальної рідини.

Творча сила Ейлера, його захоплення науковими дослідженнями, його напружена праця, що не припинялася до останнього дня життя, є неперевершеною в усій історії науки.

Працями І. Ньютона і Л. Ейлера в основному завершується побудова наукової теорії динаміки матеріальної точки. Тому подальший розвиток механіки відбувається у напрямі динаміки механічної системи (системи матеріальних точок) та твердого тіла.

Жан Лерон Д’Аламбер (1717—1783) — французький математик і механік. У науковій праці “Трактат з динаміки” Д’Аламбер установлює важливий принцип механіки, названий його ім’ям. За допомогою цього принципу можна порівняно просто скласти рівняння для будь-якої задачі про рух невільної механічної системи. Метод Д’Аламбера приводить всі закони руху тіл до законів їх рівноваги і, отже, зводить динаміку до статички.

Розвиток аналітичного напрямку в механіці набуває найбільш яскравого виявлення в працях французького математика і механіка Жозефа Луї Лагранжа (1736—1813). В його праці “Аналітична механіка” уся механіка викладена аналітично на підставі єдиного загального принципу — принципу можливих переміщень, який було сформульовано Йоганном Бернуллі (1667—1748). Лагранжу належить подальший розвиток і математична розробка застосування цього принципу до розв’язання задач механіки. При цьому Лагранж не обмежується застосуванням цього принципу тільки для задач статички; поєднавши принцип можливих переміщень з принципом Д’Аламбера, він отримує в загальному вигляді диференціальні рівняння руху механічної системи, названі його ім’ям. Ці рівняння Лагранж застосовує, зокрема, для розв’язання важливої задачі про малі коливання механічних систем.

Подальший розвиток геометричного напрямку статички пов'язаний з ім'ям французького механіка і геометра Луї Пуансо (1777—1859). У науковій праці “Елементи статички” Пуансо впроваджує в механіку поняття пари сил, розробляє теорію пар і застосовує цю теорію для розв'язання в загальному випадку задачі про зведення до найпростішого виду системи сил, прикладених до твердого тіла, і для здобуття умов рівноваги твердого тіла.

У праці “Елементи статички” Пуансо широко застосовує поняття сили і прагне дати чітке уявлення про силу. Він пише: “Не знаючи сили як такої, ми, однак, не менш чітко уявляємо собі, що вона діє у деякому напрямі з деяким напруженням. Уявлення про напрям і напруження сили ми отримуємо майже з народження: відчуття тяжіння, що діє завжди в одному напрямі, образ тіла, що падає або залишається підвішеним на кінці нитки, різниця ваги, що відчувається рукою, і безліч інших, не менш простих явищ, дають нам уявлення про напрям і напруження сили так само незаперечне, як і саме наше існування.

Отож, ми вважаємо очевидним, що будь-яка сила діє на точку, до якої вона прикладена, в деякому напрямі із деяким напруженням”.

Праця Пуансо “Елементи статички” завершує оформлення геометричного напрямку в статистиці, початок якої пов'язаний з ім'ям Архімеда.

В XIX ст. продовжується інтенсивний розвиток динаміки механічних систем і твердого тіла. В динаміці твердого тіла результати, отримані Ейлером і Лагранжем, а потім С.В. Ковалевською при дослідженні руху твердого тіла навколо нерухомої точки, є основою теорії гіроскопів і її практичного застосування.

С.В. Ковалевська (1850—1891) — російський математик. У науковій праці “Задачі про рух твердого тіла навколо нерухомої точки” здобула розв'язок цієї задачі для нового випадку руху, значно складнішого порівняно з випадками, що були розглянуті Ейлером і Лагранжем. За цю працю в 1888 р. С.В. Ковалевська одержала премію в конкурсі Паризької академії наук.

Подальшому розвитку принципів механіки були присвячені дослідження М.В. Остроградського (1801—1862), У. Гамільтона (1805—1865), К. Якобі (1804—1851) і Г. Герца (1857—1894).

М.В. Остроградський — видатний російський представник аналітичного напрямку в механіці. Він узагальнив принцип можливих переміщень для односторонніх в'язей і в перше застосував його в загальній теорії удару. М.В. Остроградський незалежно від У. Гамільтона і в більш загальній формі встановив один з основних принципів механіки — принцип найменшої дії.

Теорії стійкості рівноваги і руху механічних систем присвячені наукові праці Е. Рауса (1831—1907), М.Є. Жуковського (1847—1921), А. Пуанкаре (1854—1912) і особливо О.М. Ляпунова (1857—1918).

О.М. Ляпунов — російський математик і механік. Він дав точне вирішення питання про те, коли при розв'язанні задачі про стійкість руху можна обмежитися розглядом першого наближення. Він також установив особливі випадки, в яких застосування першого наближення не розв'язує задачу

стійкості руху. Значною заслугою О.М. Ляпунова є ґрунтовне дослідження рівнянь, в яких коефіцієнтами є періодичні функції з одним і тим самим періодом. Він вказав ознаки стійкості і нестійкості для періодичних рухів. О.М. Ляпунов вперше довів теорему, згідно з якою положення рівноваги за деяких додаткових умов нестійке, якщо у положенні рівноваги потенціальна енергія не має мінімуму.

Французький учений Г. Коріоліс (1792—1843) довів теорему про складання прискорень, яку було покладено в основу динаміки відносного руху.

Кінематика, яка розвивалася одночасно з динамікою, у другій половині XIX ст. відокремлюється у самостійний розділ механіки.

Значного розвитку у XIX ст. набуває механіка суцільного середовища. Вченими К. Нав'є (1785—1836) і О. Коші (1789—1857) встановлені загальні рівняння теорії пружності. Подальші фундаментальні результати в цій галузі здобули вчені Дж. Грін (1793—1841), У. Томсон (1824—1907), С. Пуассон (1781—1840). А. Сен-Венан (1797—1886), Г. Ламе (1795—1870), Г. Кірхгоф (1824—1887) та ін.

Дослідження К. Нав'є і Дж. Стокса (1819—1903) дали змогу визначити диференціальні рівняння руху в'язкої рідини. Значний внесок у подальший розвиток динаміки ідеальної і в'язкої рідини зробили вчені Г. Гельмгольц (1821—1894) — учення про вихрі, Г. Кірхгоф (1824—1887) — дослідження уривчастого обтікання тіл, О. Рейнольдс (1842—1912) — початок вивчення турбулентних течій, Л. Прандтль (1875—1953) — теорія граничного шару — і М.Є. Жуковський — уривчасте обтікання тіл.

М.Є. Жуковський — видатний російський механік — є фундатором сучасної теоретичної і експериментальної аеродинаміки. З наукових праць М.Є. Жуковського з гідромеханіки найбільш значними є: “Кінематика рідинного тіла” — присвячена вивченню розподілу швидкостей і прискорень в рідині, що рухається, “Про рух твердого тіла, яке має порожнини, наповнені однорідною краплинною рідиною” і “Видозмінювання методу Кірхгофа”. В цій праці М.Є. Жуковський розробив новий метод дослідження струминної течії краплинної рідини і застосував його для розв'язання нових задач. Важливе практичне значення мала праця М.Є. Жуковського “Про гідравлічний удар”.

М.Є. Жуковський є автором вихрової теорії гребного гвинта, на підставі якої проектуються і будуються пропелери сучасних літаків. Відома теорема М.Є. Жуковського про підйомну силу є основою сучасної теорії крила літака.

М.Є. Жуковський заснував блискучу школу російських гідро- і аеромеханіків. Одним з видатних представників цієї школи є С.О. Чаплигін (1869—1942).

З динаміки твердого тіла С.О. Чаплигіним написані праці, що стосуються задач про катання твердого тіла по шорсткій поверхні і про рух твердого тіла навколо нерухомої точки. Низка наукових праць С.О. Чаплигіна присвячена теорії літака: “Про тиск плоскопаралельного потоку на перегороджувальні тіла”, “До загальної теорії крила моноплана”, “Теорія ґратчастого крила” та ін. Разом зі своїм учителем М.Є. Жуковським С.О. Чаплигін зробив значний внесок у розвиток російської авіації.

Фундатором російської школи механіків-кораблебудівників є А.М. Крилов (1863—1945). Він започаткував дослідження і створення теорії плавучості і остійності корабля, хитавиці корабля. Він вивів диференціальні рівняння коливань корабля і дав їх розв'язок, розробив теорію вібрації корабля, яка виникає при роботі силової установки корабля.

Наприкінці XIX ст. виникає новий розділ механіки — механіка тіла змінної маси. Фундатором цього напрямку механіки є автор відомого збірника задач з теоретичної механіки І.В. Мещерський (1859—1935). І.В. Мещерський вперше сформулював у загальному вигляді задачу про рух матеріальної точки, маса якої змінюється з часом, і вивів основне диференціальне рівняння руху такої точки. Тепер механіка тіла змінної маси є основою теорії реактивних двигунів і динаміки ракет.

У XX ст. інтенсивно розвивається новий напрям у механіці — теорія нелінійних коливань, основи якої було закладено науковими працями О.М. Ляпунова і А. Пуанкаре і розвинуті в наукових працях М.М. Крилова (1879—1955) і М.М. Боголюбова.

Значний внесок у розвиток багатьох напрямів механіки в XX ст. зробили також вчені, які працювали або працюють у системі НАН України. Ф.П. Белянкін (1892—1972), академік АН УРСР з 1948 р., розробив теорію міцності матеріалів і інженерних конструкцій, вивчав міцність сталі, гірських порід, дерева і дерев'яних конструкцій. Він розвинув теорію граничної несівної спроможності і стійкості дерев'яних стрижнів при крученні, запропонував нову теорію міцності деревини при сколюванні.

М.М. Боголюбов (1909—1992), академік АН УРСР з 1948 р., — фундатор школи нелінійної механіки (сумісно з М.М. Криловим).

В.Т. Грінченко (народився 1937 р.) — академік НАН України з 1995 р. Основні наукові напрями діяльності: вивчення напруженого стану оболонкових конструкцій і просторових пружних тіл; вивчення коливань пружних тіл під дією пульсацій тиску; розробка аналітичних методів розв'язання граничних задач теорії пружності.

О.М. Гузь (народився 1939 р.) — академік НАН України з 1978 р. Його основні дослідження стосуються механіки твердого тіла, що деформується. Отримав важливі результати з питань теорії стійкості тіл, що деформуються, поширення хвиль у пружних тілах, концентрації напружень навколо отворів в оболонках і пластинах. Він працює також у галузі аерогідропружності і плоскої задачі теорії пружності.

О.М. Диннік (1876—1950) — академік АН УРСР з 1929 р. Наукові праці присвячені теорії пружності, опору матеріалів, аналітичної і прикладної механіки. Розвинув теорію гірського тиску, теорію розрахунків шахтних підйомних канатів. Зробив вагомий внесок у теорію стійкості стрижнів, пластин, оболонок і стрижневих систем, в теорію коливання і теорію пружності анізотропного середовища.

О.Ю. Ішлінський (народився 1913 р.) — академік АН УРСР з 1948 р. Наукові розробки стосуються загальної механіки, динаміки твердого тіла і

гіроскопів, теорії коливань, теорії систем інерціальної навігації і керування, теорії тертя, пружності і пластичності. Важливі результати здобуті ним у механіці гіроскопічних систем. Він розвинув теорію інерціальної навігації на земній сфері і розробив математичні основи одного з можливих варіантів автономного керування рухом балістичних ракет без застосування зовнішньої інформації. Фундаментальні результати здобуті О.Ю. Ішлінським у галузі нелінійної механіки, теорії стійкості, динаміки відносного руху, теорії коливань, механіки ракет. Під його керівництвом і за його активної участі розроблено новий метод динамічного балансування швидкообертючих тіл.

М.О. Кільчевський (1909—1979) — академік АН УРСР з 1964 р. Основні дослідження стосуються загальної механіки, теорії оболонок, статичних і динамічних контактних задач теорії пружності, теорії удару. М.О. Кільчевський розробив загальний метод зведення тривимірних задач теорії пружності до двовимірних, розвинув метод розв'язання задач теорії оболонок шляхом застосування інтегральних рівнянь. Узагальнив постановку і методи розв'язання статичних і динамічних тривимірних контактних пружних і пружно-пластичних задач. Розробив новий підхід до аналітичного опису процесів, що супроводжують динамічну контактну взаємодію твердих тіл.

А.Д. Коваленко (1905—1973) — академік АН УРСР з 1961 р. Основні дослідження присвячені теорії пружності і термопружності стосовно конструкцій нової техніки. Він розробив термодинамічні основи теорії термопружності. Отримав точні розв'язки ряду задач про напружений стан круглих пластин і оболонок обертання змінної товщини, розробив методи розрахунків елементів турбомашин, які широко застосовуються у промисловості.

В.О. Кононенко (1918—1975) — академік АН УРСР з 1964 р. Основний напрям досліджень — нелінійна механіка і її практичне застосування. Він розв'язав ряд технічних задач з автоколивання (автоколивання при різанні металів, фрикційні автоколивання в машинах і системах керування і боротьба з ними). Досліджував також технічне застосування теорії періодичних коливань зі змінними параметрами.

О.С. Космодам'янський (народився 1925 р.) — член-кореспондент НАН України з 1965 р. Дослідження присвячені розробці наближених методів визначення напруженого стану багатозв'язних середовищ у лінійній і нелінійній постановках. Він запропонував наближене розв'язання задач кручення і згину анізотропних стрижнів із циліндричними порожнинами. Низка праць О.С. Космодам'янського присвячена проблемам гірського тиску.

М.В. Корноухов (1903—1958) — академік АН УРСР з 1951 р. Основні дослідження присвячені питанням міцності і стійкості будівельних конструкцій — стрижневих, пластинчатих, гладеньких і ребристих оболонок. Він розробив точний метод розрахунку стійкості плоских рам, дослідив стійкість просторових рамних каркасів. Розвинув теорію об'єднаного розрахунку на міцність і стійкість у межах і за межами пружності стрижнів і стрижневих систем.

М.О. Лаврент'єв (1900—1980) — академік АН УРСР з 1939 р. Дослідження стосуються різних напрямів математики і механіки. У науковій творчості

М.О. Лаврентьєв поєднував теорію з практикою. Важливі результати отримав у механіці суцільного середовища. Він розвинув метод побудови профілю крила літака, розв'язав задачу про коливання крила. Запропонував нову схему плоского усталеного руху ідеальної нестисливої рідини, дослідив теорію довгих хвиль і теорію струменів. М.О. Лаврентьєв запропонував гідродинамічну трактовку явища кумуляції. На підставі цих досліджень створив теорію напрямленого вибуху і ряд її практичних застосувань – зварювання вибухом, високошвидкісний удар.

О.М. Пеньков (1906—1968) — член-кореспондент АН УРСР з 1951 р. Дослідження стосуються теорії стійкості, теорії коливань, міцності і довговічності авіаційних конструкцій. Він розробив теорію резонансу при квазігармонічних коливаннях, а також узагальнений метод розрахунку на стійкість стрижневих систем. Вивчав питання міцності конструкцій машин і споруд.

Г.С. Писаренко (1910—2000) — академік НАН України з 1964 р. Основні наукові праці присвячені теорії механічних коливань і теорії міцності. Провів дослідження з теорії нелінійних коливань з урахуванням енергетичних втрат, вивчав міцність матеріалів і несівну спроможність елементів конструкцій в умовах значних температур за різного характеру силового і теплового навантаження.

Г.Ф. Проскура (1876—1958) — академік АН УРСР з 1929 р. Основний напрям досліджень — динаміка гідравлічних машин. Створив гідродинамічну трубу. Дослідив гідродинаміку турбомашин. Виконав важливі роботи в теорії пропелерних турбін і насосів, вивчав явище кавітації в гідромашинах. Має наукові праці в галузі загальної механіки, теорії коливання ходу машин, авіації.

Г.М. Савін (1907—1975) — академік АН УРСР з 1948 р. Основні наукові праці стосуються механіки суцільного середовища. Вивчав питання концентрації напружень в ізотропних і анізотропних середовищах навколо отворів, контактні задачі теорії пружності, динаміку пружної нитки змінної довжини. Досліджував механіку композиційних матеріалів і питання реології. Важливе значення мають роботи Г.М. Савіна про гірський тиск і з динамічної теорії розрахунку шахтних канатів.

Ю.Д. Соколов (1896—1971) — член-кореспондент АН УРСР з 1939 р. Основний напрям досліджень — небесна механіка, гідромеханіка, теорія диференціальних рівнянь. Зробив значний внесок у розв'язок проблеми n тіл у класичній і узагальненій постановці. Розвинув теорію особливих траєкторій системи вільних матеріальних точок, що взаємно притягуються і відштовхуються з певною силою. В теорії фільтрації ґрунтових вод отримав практичні результати. Запропонував метод усереднення функціональних поправок – ефективний метод наближеного розв'язання диференціальних і інтегральних рівнянь, що широко застосовуються в механіці.

С.П. Тимошенко (1878—1972) — академік АН УРСР з 1919 р. Основні наукові праці стосуються механіки твердих тіл, що деформуються, будівель-

ної механіки, опору матеріалів і теорії споруд. Досліджував згин, кручення, коливання і удар стрижнів, розробляв теорію тонких пластин і оболонок. Розв'язав задачу про концентрацію напружень в околі отворів. Розвинув теорію стійкості пружних систем, розробив ефективні варіаційні методи теорії пружності.

Й.Я. Штаерман (1891—1962) — член-кореспондент АН УРСР з 1939 р. Основні дослідження стосуються прикладної теорії пружності. Він досліджував теорію розрахунку тонкостінних оболонок і теорію стійкості арок при великих і малих прогинах. Деякі праці присвячені теорії диференціальних рівнянь, загальної теорії пружності, прикладної математики, теорії гнучкої нитки.

А.Ф. Улітко (народився 1934 р.) — член-кореспондент НАН України з 1982 р. Основні дослідження присвячені механіці деформованого твердого тіла, електропружності, розв'язанню деяких ключових задач просторової теорії пружності, теорії коливань п'езокерамічних тіл, спряжених полів і процесів.

Механіка пройшла довгий шлях розвитку і, як бачимо, досі є наукою, що інтенсивно розвивається.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Архангельский М.М.* Курс физики. Механика. — М.: Просвещение, 1975. — 419 с.
2. *Агроскин И.И., Дмитриев Г.Т.* Гидравлика. — М.: ГЗИ, 1944. — 329 с.
3. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1985. — Т. 2. — 544 с.
4. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1973. — Т. 3. — 488 с.
5. *Боголюбов А.Н.* Биографический справочник. Математики, механики. — К.: Наук. думка, 1983. — 637 с.
6. *Бондаренко А.А., Ремізова Н.Л., Переяславцев О.М.* Малі коливання механічних систем. — К.: НМК ВО, 1993. — 228 с.
7. *Теоретична механіка.* Програма, робочий план, методичні вказівки до вивчення курсу і розв'язання задач / Н.К. Бойко, Л.Ф. Вржижевський, Г.А. Уздебська та ін. — К.: Вища шк., 1974. — 256 с.
8. *Бородин А.И., Бугай А.С.* Биографический словарь деятелей в области математики. — К.: Радянська шк., 1979. — 607 с.
9. *Бутенин Н.В., Лунц Я. Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1979. — Т. 1. — 270 с.; Т. 2. — 542 с.
10. *Бутенин Н.В.* Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1971. — 264 с.
11. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. — М.: Наука, 1972. — Ч. 2. — 332 с.

12. *Веселовский И.Н.* Очерки по истории теоретической механики. — М.: Высш. шк., 1974. — 287 с.
13. *Воронков И.М.* Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1966. — 596 с.
14. *Геронимус Я.Л.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1973. — 511 с.
15. *Григорьян А.Т.* Механика от античности до наших дней. — М.: Наука, 1974. — 478 с.
16. *Голубева О.В.* Механика сплошных сред. — М.: Высш. шк., 1973. — 365 с.
17. *Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л.* Курс теоретической механики. — М.: Высш. шк., 1974. — 528 с.
18. *Методические указания к решению задач по разделу “Динамика” курса “Теоретическая механика” / О.А. Дубинин, А.А. Бондаренко, А.Н. Перяславцев и др.* — К.: КТИПП, 1985. — 89 с.
19. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. — 811 с.
20. *Знаменский Г.М.* Технологическое оборудование свеклосахарных заводов. — М.: Пищепромиздат, 1955. — 452 с.
21. *Касаткин А.Г.* Основные процессы и аппараты химической технологии. — М.: Химия, 1973. — 750 с.
22. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. — М.: Просвещение, 1966. — Ч. 2. — 396 с.
23. *Космодемьянский А.А.* Теоретическая механика и современная техника. — М.: Просвещение, 1969. — 255 с.
24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 795 с.
25. *Лишевский В.П.* Педагогическое мастерство ученого. — М.: Наука, 1975. — 117 с.
26. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. — М.: ГИТТЛ, 1948. — 580 с.
27. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 847 с.
28. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1982. — Ч. 2. — 640 с.
29. *Мецгерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1986. — 448 с.
30. *Николаи Е.Л.* Теоретическая механика. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. — 484 с.
31. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии // Крылов А.Н. Собрание трудов. — М., 1936. — Т. 7.
32. *Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф.* Теоретическая механика. Динамика. — К.: Выща шк., 1990. — 480 с.
33. *Петкевич В.В.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1981. — 496 с.

-
34. *Савин Г.Н., Кильчевский Н.А., Путьята Т.В.* Теоретическая механика. — К.: Гостехиздат, 1963. — 610 с.
35. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973. — Т. 1. — 536 с.; Т. 2. — 584 с.
36. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1965. — 386 с.
37. *Сиротина Г.Н., Ерлыкина Е.С.* Задачник по гидромеханике. — М.: Речной транспорт, 1956. — 133 с.
38. *Процессы и аппараты пищевых производств* / В.Н. Стабников, В.Д. Попов, В.М. Лысянский и др. — М.: Пищевая промышленность, 1976. — 663 с.
39. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. — М.: Наука, 1970. — 476 с.
40. *Яблонский А.А.* Курс теоретической механики. — М.: Высшая шк., 1984. — 423 с.

Навчальне видання

Серія “Вища освіта ХХІ століття”

БОНДАРЕНКО Анатолій Андрійович,
ДУБІНІН Олег Олександрович,
ПЕРЕЯСЛАВЦЕВ Олександр Миколайович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Підручник

У двох частинах

Частина 2

ДИНАМІКА

Підп. до друку 17.12.2003. Формат 70×100 1/16.
Папір офс. Друк офс. Гарнітура шкільна.
Ум. друк. арк. 47,73. Обл.-вид. арк. 47,3. Зам. 4-100.

Видавництво “Знання”

01042, м. Київ-34, вул. Стрілецька, 28

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 1591 від 03.12.2003

Тел.: (044) 234-80-43, 234-23-36

E-mail: sales@znannia.com.ua

[http // www.znannia.com.ua](http://www.znannia.com.ua)

ISBN 966-8148-02-9



9 789668 148026 >

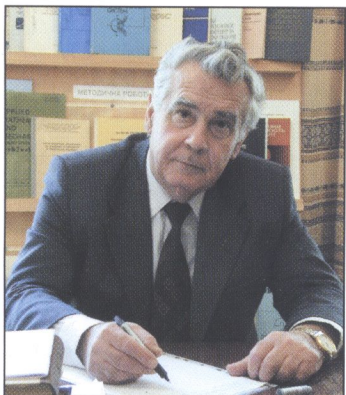
Віддруковано на ВАТ “Білоцерківська книжкова фабрика”,
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.

В Україні книгу можна придбати за адресами:

- м. Київ, вул. Л. Толстого, 11/61, маг. “Буква”, тел. (044)234-75-08;
- м. Київ, вул. М. Грушевського, 4, маг. “Наукова думка”, тел. (044)228-06-96;
- м. Київ, Майдан Незалежності, ТЦ “Глобус”, магазин “Книжковий світ”, тел.: (044)238-59-41;
- м. Київ, вул. Архітектора Вербицького, 30-б, маг. “Буква”, тел. (044)422-57-26;
- м. Вінниця, вул. Гагаріна, 2, маг. “Буква-Вінниця”, тел. (0432)35-90-61;
- м. Донецьк, вул. Артема, 147-а, маг. “Будинок книги”, тел. (0622)55-44-76;
- м. Євпаторія, вул. Фрунзе, 42, маг. “Буква-Євпаторія”, тел. (06569)3-31-44;
- м. Житомир, вул. Київська, 17, маг. “Знання”, тел. (0412)37-29-02;
- м. Запоріжжя, просп. Леніна, 147, маг. “Буква-Запоріжжя”, тел. (0612)49-00-08;
- м. Івано-Франківськ, Вічовий майдан, 3, маг. “Сучасна українська книга”, тел. (03422)3-04-60;
- м. Івано-Франківськ, вул. Незалежності, 19, маг. “Букініст”, тел. (03422)2-38-28;
- м. Івано-Франківськ, вул. Незалежності, 44, маг. “Книжковий дім “Буква”, тел. (03422)7-58-49, 7-58-51;
- м. Кіровоград, вул. Набережна, 13, маг. “Книжковий світ”, тел. (0522)24-94-64;
- м. Кривий Ріг, пл. Визволення, 1, маг. “Букініст”, тел. (0564)92-37-32;
- м. Львів, просп. Шевченка, 8, книгарня ДВЦ НТШ, тел. (0322)79-85-80;
- м. Львів, просп. Шевченка, 16, маг. “Ноти”, тел. (0322)72-67-96;
- м. Луганськ, вул. Радянська, 58, маг. “Глобус-книга”, тел. (0642)53-62-30;
- м. Луцьк, просп. Волі, 41, маг. “Знання”, тел. (03322)4-23-98;
- м. Рівне, просп. Миру, 16, маг. “Буква-Рівне”, тел. (0362)62-04-65;
- м. Сімферополь, вул. Пушкіна, 6, маг. “Знание”, тел. (0652)27-54-68;
- м. Сімферополь, вул. Сергєєва-Ценського, 4а, маг. “Буква-Сімферополь”, тел. (0652)27-31-53;
- м. Суми, вул. Кірова, 8, маг. “Будинок книги”, тел. (0542)22-51-17;
- м. Харків, вул. Петровського, 6/8, маг. “Вища школа”, тел. (0572)47-80-20;
- м. Херсон, вул. Леніна, 14/16, маг. “Книжковий ряд”, тел. (0552)24-64-23, 22-14-56;
- м. Хмельницький, вул. Подільська, 25, маг. “Книжковий світ”, тел. (03822)6-60-73;
- м. Черкаси, вул. Б. Вишневецького, 38, маг. “Світоч”, тел. (0472)47-92-20;
- м. Чернігів, вул. Леніна, 45, маг. “Будинок книги”, тел. (04622)7-30-03;
- м. Ялта, вул. Московська, 9-а, маг. “Будинок книги”, тел. (0654)32-16-00;
- м. Ялта, вул. Гоголя, 24, маг. “Буква-Ялта”, тел. (0654)32-37-41.

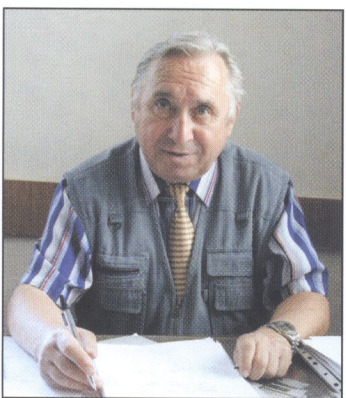
Книготорговельним організаціям та оптовим покупцям звертатися за тел.: (044) 238-82-62, 234-80-43; факс: 238-82-68.

E-mail: sales@books.com.ua <http://www.books.com.ua>



БОНДАРЕНКО Анатолій Андрійович

Відомий вчений у галузі динаміки елементів конструкцій, коливань механічних систем, демпфуючих властивостей конструкційних матеріалів, динамічної стійкості оболонкових конструкцій, ударостійкості одно- та багатопарових оболонок і пластин. Народився в 1932 році в м. Прилуках на Чернігівщині. Вищу освіту здобув у Київському політехнічному інституті (1955 р.). Працював в Інституті механіки НАН України. З 1984 р. — завідувач кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Національного університету харчових технологій. Доцент, кандидат технічних наук, заслужений працівник освіти України. Автор та співавтор 200 наукових праць, чотирьох монографій та двох навчальних посібників, має більше 10 авторських свідоцтв на винаходи.



ДУБІНІН Олег Олександрович

Вчений у галузі статичної і динамічної елементів конструкцій та статичної і динамічної суцільного середовища. Народився в 1936 р. у м. Москві. Вищу освіту здобув у Київському політехнічному інституті (1958 р.). З 1962 р. працює на кафедрі теоретичної механіки та опору матеріалів Національного університету харчових технологій. Доцент, кандидат технічних наук. В 1978—1981 рр. читав лекції з курсів “Теоретична механіка”, “Опір матеріалів” та “Будівельна механіка” (фр. мовою) студентам Вищої інженерної школи в м. Бамако (Республіка Малі). Автор та співавтор 70 наукових і методичних праць, навчального посібника.



ПЕРЕЯСЛАВЦЕВ Олександр Миколайович

Вчений у галузі статичної і динамічної елементів конструкцій, коливань механічних систем та статичної і динамічної суцільного середовища. Народився в 1941 р. у м. Свердловську. Вищу освіту здобув у Київському технологічному інституті харчової промисловості (1969 р.). З 1972 р. працює на кафедрі теоретичної механіки та опору матеріалів Національного університету харчових технологій. Доцент, кандидат технічних наук. У 1986—1989 рр. читав лекції з курсу “Теоретична механіка” (фр. мовою) студентам університету у м. Константін (НДР Алжир). Автор та співавтор більше 60 наукових та методичних праць, двох навчальних посібників.