

Г.Ф.Бушок, Є.Ф.Венгер

# Курс Фізики

Фізичні основи механіки  
Молекулярна фізика  
і термодинаміка

Книга **1**

• Виша школа •

53(073)  
Б94

Г.Ф.Бушок, Є.Ф.Венгер

---

# Курс ФІЗИКИ

Книга 1

---

*Фізичні основи механіки  
Молекулярна фізика  
і термодинаміка*

*Рекомендовано Міністерством освіти  
і науки України*

*Навчальний посібник для студентів  
фізико-математичних факультетів  
вищих педагогічних навчальних закладів*

КИЇВ  
«ВИЩА ШКОЛА»  
2002

УДК 531/534:536:539.1(075.8)  
ББК 22.3я73  
Б94

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист від 11 лютого 2002 р. № 14/18.2-322)

Рецензенти: *О. В. Мельничук* – д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри фізики Ніжинського державного педагогічного університету ім. М. Гоголя; *М. І. Гриценко* – д-р фіз.-мат. наук, проф., завідувач кафедри фізики Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т. Г. Шевченка

Редакція літератури з економіки і фундаментальних наук  
Редактор *В. Ф. Хміль*

442 235

**НТБ ВНТУ**  
**М. Вінниця**

**Бушок Г. Ф., Венгер Є. Ф.**

Б94 Курс фізики: У 3 кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка: Навч. посіб. – К: Вища шк., 2002. – 375 с.: іл.

ISBN 966-642-123-2 (кн. 1)

ISBN 966-642-124-0

Систематизовано викладено програмний матеріал з механіки, молекулярної фізики і термодинаміки. Значну увагу приділено розкриттю логічної структури фізики як науки, висвітленню її зв'язку з іншими природничими науками, математикою, технікою. Короткі історичні довідки про різні здобутки наукового пізнання сприяють більш повному уявленню про розвиток фізики.

Для студентів фізико-математичних факультетів вищих педагогічних навчальних закладів.

УДК 531/534:536:539.1(075.8)  
ББК 22.3я73

ISBN 966-642-123-2 (кн. 1)

ISBN 966-642-124-0

© Г. Ф. Бушок, Є. Ф. Венгер, 2002

**Предмет фізики і її завдання.** Фізика вивчає найпростіші та найзагальніші властивості матерії, а також форми її існування. Під *матерією* розуміють усе те, що реально існує поза нашою свідомістю і що може сприйматися нашими органами чуття безпосередньо чи за допомогою приладів. Відчуття тепла або холоду, звуку, світла тощо є нашими реакціями на навколишню дійсність.

У фізиці розрізняють два види матерії – *речовину* та *поле*. Проте цим не вичерпується поняття матерії як філософської категорії, використовуваної для означення у всесвіті об'єктивної реальності, яка копіюється, фіксується, відображується нашими відчуттями, існуючи незалежно від них.

Увесь розвиток науки свідчить, що матерія перебуває у вічному і безперервному русі. Під *рухом* розуміють будь-яку зміну, що відбувається з матерією, починаючи від простого переміщення тіла у просторі та закінчуючи мисленням. Геологія вивчає безперервні зміни земної кори, біологія – розвиток живих організмів, астрономія – рухи і зміни небесних тіл і т. д. Усі явища у природі є нічим іншим, як проявами різних рухів матерії. Матерію не можна уявити без руху, так само, як і рух без матерії. Рух є формою буття матерії; спокій має відносний характер, він є окремим випадком руху.

Природничі науки досліджують різні види рухів. Зокрема, фізика вивчає механічні, теплові, електричні, світлові, внутріатомні рухи, а також такі властивості матерії, як інертність, тяжіння тощо, які притаманні живим і неживим тілам природи.

У природі різні явища відбуваються у певній послідовності та мають більшу або меншу тривалість, тобто безперервні зміни і розвиток матерії відбуваються у часі. Власне, відлік часу можливий завдяки змінам у природі: тільки в такому разі якусь подію можна взяти за початок відліку часу та вказати на послідовність певних змін, що відбулися пізніше. Тривалість деякого процесу беремо за одиницю часу і через порівняння з нею вимірюємо час – тривалість

інших процесів. Якби припинилися всякі зміни у природі, то зникло б поняття часу. Зміни у природі відбуваються не тільки в часі, а й у просторі. Різні матеріальні об'єкти мають певну просторову протяжність, певним способом розміщуються один відносно одного. Зміни у природі зумовлюють зміни у протяжності та взаємному розміщенні тіл. Простір, як і час, неможливий без матерії та її руху. Тому рух, простір і час називають *формами існування матерії*.

Колись простір та час розглядали як незалежні «вмістилища» матеріальних об'єктів. Однак із розвитком науки ці метафізичні погляди було спростовано. Ще у XIX ст. російський математик М. І. Лобачевський (1792–1856) передбачав, що геометричні властивості простору мають залежати від наявності матеріальних об'єктів і характеру їхніх рухів. У XX ст. це довів фізик А. Ейнштейн (1879–1955) у теорії відносності. Він показав, що простір та час становлять загальний чотиривимірний континуум матеріального світу; простір і час взаємозв'язані, змінюються у разі переходу від однієї системи відліку до іншої, залежать від швидкості руху матеріальних систем. Теорія відносності доводить, що згаданий чотиривимірний простір відмінний від евклідового, він характеризується певною кривиною та властивостями, залежними від характеру руху і густини маси матеріального світу.

Фізика існує не як наука для науки. Життя вимагає від людини не стільки споглядання природи, скільки активного втручання у перебіг процесів природи з тим, щоб змінювати та спрямовувати їх на користь людині. За висловом російського фізика М. О. Умова (1846–1915), мета природознавства полягає в тому, щоб установлювати владу людини над енергією, часом і простором. Фізика займає чільне місце серед природничих наук й істотно впливає на розвиток виробничих сил суспільства.

**Методи фізичного дослідження.** Для вивчення фізичних явищ і закономірностей, яким вони підлягають, використовують: метод спостереження явища у природному вигляді; метод експерименту, коли явище штучно відтворюється у лабораторних умовах; метод теоретичного узагальнення даних спостереження та експерименту. Наприклад, методом спостереження було вивчено закономірності руху планет у Сонячній системі; методом експерименту знайдено закони вільного падіння тіл; існування електромагнітних хвиль уперше було передбачено теоретичними узагальненнями англійського фізика Дж. К. Максвелла (1831–1879).

У цілому всі згадані методи дослідження взаємозв'язані й доповнюють один одного, повсякчас збагачуються новими ідеями і технічними засобами.

Пізнання природи – складний процес, що охоплює як спостереження явищ природи, лабораторні та технічні досліді, так і аналіз, побудову моделі й окреслення закономірності перебігу явища; критерієм істинності здобутків наукового пізнання є їх узгодження з практикою.

**Фізичні величини та їх вимірювання.** Різні фізичні властивості матерії та її рух визначаються з кількісного боку відповідними фізичними величинами. Характерною ознакою фізичних величин є їх вимірність. Вимірювання величин – це порівняння заданої величини з однорідною їй величиною, взятою за одиницю. Наприклад, довжину тіла вимірюють, порівнюючи її з довжиною еталона – метра; масу тіла порівнюють із масою еталона – кілограма і т. д.

Різні фізичні величини перебувають у певних залежностях, що виражаються фізичними формулами та законами. Ці залежності дають змогу визначити одні величини через інші, зручніші й досяжні для вимірювання. Наприклад, середню швидкість руху знаходять через відношення довжини шляху до відповідного проміжку часу; розмір молекули – через об'єм та площу розпливання гасу на поверхні води; розмір ядра атома – через ефективний переріз розсіяння пучка нейтронів на речовині тощо.

Щоб означити будь-яку величину, треба насамперед з'ясувати, яку властивість матерії чи явища вона характеризує, а потім – способи її вимірювання. Наприклад, маса є мірою інертності та тяжіння тіл; швидкість є величиною, що характеризує кожний момент руху; робота є фізичною величиною, яка визначає перетворення руху з однієї форми на іншу, і т. д.

**Фізичні поняття, закони і теорії.** Процес наукового пізнання природи характеризується певною стадійністю та рангованими результатами. На першій стадії виділяють і вивчають споріднені факти, виявляють у них особливе й узагальнювальне, що лягає в основу наукового поняття. У поняттях відображаються фрагменти дійсності. Наприклад, у понятті сили – передавання руху, у понятті електричного струму – потік заряджених частинок і т. д.

Фізичні об'єкти та процеси у природі перебувають у певних причинних зв'язках. Завдання фізики полягає в тому, щоб розкрити ці зв'язки і визначити деякі загальні закономірності, яким підлягає певна сукупність різних явищ. Такі істотні відношення між предметами та явищами називаються *фізичними законами*. Наприклад, за законом, сформульованим у 1660 р. англійським ученим Р. Гуком (1635–1703), деформація пропорційна діючій силі.

Надбання відповідних наукових понять, фактів, законів і наслідків з них на певному етапі переростають у якісно вищу та наймісткішу форму наукового пізнання – теорію, яку ще називають

структурною одиницею наукових знань. Такими є класична механіка Ньютона, молекулярно-кінетична теорія (МКТ) будови речовини та ін.

Набуті внаслідок наукового дослідження предметів і явищ природи фізичні поняття, закони та теорії об'єктивно відображають структуру і розвиток матеріального світу. Оскільки наші знання про природу далеко не повні, а пізнання природи є процесом, що невинно продовжується й удосконалюється, наявні наукові здобутки не є чимось непохитним, раз і назавжди визначеним. Вони відображають тільки один зі ступенів пізнання людиною природи.

З розвитком науки до деяких законів було внесено поправки, окреслено межі їх застосування, сформовано більш загальні закони та якісно нові теорії – теорію відносності, квантову механіку.

З викладеного випливає, що під фізикою як наукою слід розуміти комплекс наукових знань, методів і технічних засобів пізнання, специфічних видів діяльності дослідника. Для засвоєння фізики цілісно в навчальному процесі практикуються лекційні, лабораторні заняття, розв'язування фізичних задач, індивідуальні завдання пошукового характеру.

Структура навчальної дисципліни та цього посібника підпорядковані *принципу генералізації*, тобто групуванню наукового матеріалу за основними фізичними теоріями.

**Зв'язок фізики з іншими науками і технікою.** Фізика як наука про природу має спільні об'єкти і методи дослідження з іншими природничими науками. На межі між фізикою та хімією виникли такі науки, як фізична хімія і хімічна фізика, між фізикою та біологією – біофізика. Широке застосування фізичних методів у геології й астрономії привело до виділення як окремих наук геофізики та астрофізики. Оскільки фізика вивчає найпростіші й найзагальніші властивості матерії і види її рухів, її розвиток завжди помітно позначався на розвитку решти наук.

Фізика тісно пов'язана з математикою. Математичні методи завжди були засобом оброблення дослідних даних та вираженням функціональних характеристик фізичних явищ. У процесі математичного оброблення дослідних даних нерідко передбачалося і відкривалося нове у фізиці. Наприклад, було передбачено існування електромагнітних хвиль, хвильових властивостей частинок речовини, нейтронів та нейтрино тощо. Італійський вчений Леонардо да Вінчі (1452–1519) мав рацію, стверджуючи, що ніяке людське знання не може претендувати на назву істинної науки, якщо воно не користується математичними доведеннями.

Фізичні проблеми нерідко ставили нові завдання перед математикою і стимулювали її розвиток. Чимало видатних математиків

зробили істотний внесок у математику та фізику одночасно. У минулому це І. Ньютон, Л. Ейлер і П. С. Лаплас, у наш час – М. М. Боголюбов, М. О. Лаврентьев та ін.

У роботі вчителя фізичні явища та їх закономірності завжди є найкращою ілюстрацією функціональних залежностей і змістом для математичних задач.

Фізика тісно пов'язана з філософією. Взаємозв'язки цих наук обумовлені єдністю окремого й загального у формуванні людського пізнання. Кожний вчений для оцінювання й осмислення окремих наукових результатів не може обійтися без зіставлення їх із навколишньою дійсністю. І справжнє осмислення цих результатів можливе тільки на засадах правильного загального погляду на природу та правильного способу мислення дослідника. Проте останні – суть категорії філософії. Недарма Ф. Енгельс (1820–1895) у «Діалектиці природи» (1894) переконливо довів, що дослідники природи, які ігнорують або заперечують значення філософії як науки, несвідомо нею користуються і все-таки потрапляють у полон до філософії, але нерідко – до найгіршої.

Уся історія розвитку науки є історією протистояння двох світоглядів – матеріалістичного й ідеалістичного. Матеріалісти обстоюють об'єктивне існування світу та можливість пізнання законів його розвитку; критерієм істини для них є практика. З погляду ідеалістів світ є творінням нашої свідомості, відчуттів і уявлень; у вивченні останніх вони вбачають покликання науки.

Всупереч ідеалістичним догмам потреби суспільного виробництва постійно зумовлювали розвиток природничих наук, а з їх розвитком матеріалізм збагатився діалектичним методом пізнання світу.

За діалектичним методом природу слід розглядати як єдине ціле, де все перебуває у зв'язку та взаємодії, рухається і змінюється; в усіх процесах природи поступові кількісні зміни приводять до стрибкоподібних якісних змін; предметам та явищам природи властиві внутрішні суперечності; все має свої негативний і позитивний аспекти; боротьба суперечностей зумовлює розвиток.

Усі здобутки фізики яскраво підтверджують основні положення діалектичного матеріалізму, а її вивчення сприяє формуванню діалектико-матеріалістичного світогляду.

Фізика є науковою основою техніки. Академік С. І. Вавилов (1891–1951) слушно зазначав, що багато галузей сучасної техніки зобов'язані своїм існуванням застосуванню фізики. Таким є весь механізований транспорт – наземний, морський та повітряний, такими є вся електротехніка, теплотехніка, всі технічні застосування світла, вся автоматика й телемеханіка, значна частина будівельної техніки. Нині можна пересвідчитися, що нові розділи фізики по-



роджують нові галузі техніки. Наприклад, з ядерної фізики почався розвиток ядерної енергетики, фізика напівпровідників зумовила появу напівпровідникової техніки, така сама передісторія електронної й обчислювальної техніки, лазерної технології тощо.

Розвиток техніки, у свою чергу, сприяє вдосконаленню експериментальних методів дослідження у фізиці та подальшому її розвитку. У фізичних лабораторіях використовують прилади, виготовлені на основі найновіших досягнень техніки: мас-спектрометри, електронні мікроскопи, автоматичні лічильники і прискорювачі заряджених частинок, лазери та ін.

Знання фізики – важлива складова політехнічної підготовки студентської й учнівської молоді нашої країни. Вивчення фізичних явищ і їх закономірностей супроводиться розглядом найважливіших застосувань фізики на практиці.

# Фізичні основи механіки

- ◆ Кінематика матеріальної точки
- ◆ Динаміка матеріальної точки
- ◆ Особливості деяких сил
- ◆ Енергія і робота
- ◆ Механіка твердого тіла
- ◆ Механіка рідин і газів
- ◆ Елементи теорії відносності
- ◆ Механічні коливання і хвилі
- ◆ Елементи акустики
- ◆ Метод Лагранжа

## КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

### § 1. Предмет і завдання механіки

Механіка вивчає найпростішу форму руху матерії – *механічний рух*, тобто зміни взаємних положень тіл або їхніх частин. Звичайно під *механікою*, яку тепер називають *класичною*, розуміють вчення про рухи макроскопічних тіл, швидкості яких малі порівняно зі швидкістю світла. В її основі лежать закони механіки Ньютона. Рухи тіл, швидкості яких близькі до швидкості світла, описуються в теорії відносності; рухи мікрочастинок вивчаються у квантовій механіці.

Механіка поділяється на кінематику і динаміку. У *кінематиці* вивчаються переміщення тіл залежно від часу без урахування їхньої маси і сил, що діють на тіла; у *динаміці* – рухи тіл під дією прикладених до них сил; сюди відносять також *статіку* – вчення про умови рівноваги тіл.

Механічні рухи різних тіл та їхніх частин бувають дуже різноманітними. Наприклад, різняться рухи копра, колеса лебідки, годинникового маятника, ковша екскаватора тощо. Можуть різнитися рухи різних частин робочого тіла. Завдання механіки полягає у вивченні різних рухів і визначенні їх законів. Останні дають можливість наперед передбачати потрібні рухи та конструювати робочі механізми й машини.

Для визначення законів руху потрібно врахувати маси тіл, зв'язки між ними та зовнішні сили. Ці задачі розв'язуються у динаміці. Проте перш ніж перейти до розв'язування їх, розглянемо спочатку методи опису рухів. Ці методи вивчає кінематика, знання їх полегшує розв'язування задач динаміки.

Для опису руху тіла користуються аналітичним і графічним методами. При цьому абстрагуються від тіла до матеріальної точки або системи матеріальних точок. Положення матеріальної точки у просторі визначається як положення геометричної точки, а це істотно спрощує розв'язування задач із механіки.

Під *матеріальною точкою* розуміють реальний об'єкт нескінченно малих розмірів, що має масу. Практично тіло можна розглядати як матеріальну точку тоді, коли його розміри дуже малі

порівняно з відстанню переміщення тіла у просторі. Наприклад, Землю та інші планети, що обертаються навколо Сонця, можна розглядати як матеріальні точки, оскільки їхні розміри у десятки тисяч разів менші від радіусів орбіт. Тіло можна вважати матеріальною точкою, коли описуємо його поступальний рух, оскільки він цілком визначається рухом центра маси тіла. Нарешті, розмірами тіла можна знехтувати тоді, коли рух довільної точки на тілі одночасно визначає рух усього тіла. Так, увечері рух світної фари визначає рух автомобіля.

У задачах, де треба враховувати розміри тіла, його уявно поділяють на систему матеріальних точок. За рухом окремих точок тіла знаходять закономірності руху тіла в цілому. Отже, щоб вивчити рух будь-якого реального тіла, треба спочатку розглянути основні характеристики руху матеріальної точки.

## § 2. Система відліку. Переміщення тіла

У природі всі тіла перебувають у русі. Щоб описати рух будь-якого тіла, треба вказати на інше тіло або групу тіл, які умовно вважатимуться нерухомими і відносно яких розглядатиметься рух заданого тіла. Іншими словами, щоб описати рух матеріальної точки, треба вибрати певне тіло відліку.

Залежно від вибору тіла відліку рух того самого тіла матиме різний вигляд. Наприклад, якщо за тіло відліку взято автобус, то пасажир, який сидить у ньому, вважатиметься нерухомими; якщо тілом відліку є поверхня Землі, то пасажир переміщуватиметься з такою самою швидкістю, як і автобус. Отже, всякий рух тіла відносний, так само як і стан спокою тіла.

Коли говорять про певний рух тіла, то мають на увазі вже певне тіло відліку, хоч іноді за очевидністю його не називають. Зокрема, часто не називають такі тіла відліку, як поверхня Землі й різні нерухоми на ній предмети – автобусну станцію, стіни або дошку в аудиторії тощо.

Із вибраним тілом відліку пов'язують якусь систему координат, здебільшого прямокутну, за допомогою якої можна визначити просторове положення рухомої точки в будь-який момент часу. Тіло відліку та пов'язану з ним систему координат і сукупність синхронізованих годинників у різних точках простору в цілому називають *системою відліку*.

Рух матеріальної точки буде визначено, якщо в системі відліку будуть знайдені координати точки як функції часу:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (1)$$

За цими функціями для будь-якого моменту часу можна обчислити координати точки і знайти її положення.

Лінія, яку описує матеріальна точка у просторі, називається *траєкторією руху*. Рівняння (1) є рівнянням траєкторії у параметричній формі. Щоб знайти рівняння траєкторії в явному вигляді, треба з рівняннями (1) провести такі операції, щоб був виключений час (тобто знайти зв'язок між її координатами в довільний момент часу).

**Приклад.** Рух частинки відбувається так, що  $x = a \sin \omega t$ ,  $y = b(1 + \cos \omega t)$ ,  $z = 0$ , де  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$  ( $a > b$ ) – додатні константи. Визначити форму траєкторії руху частинки.

**Розв'язання.** Якщо з двох перших рівнянь визначити тригонометричні функції, піднести їх до квадрата і додати, то дістанемо рівняння траєкторії

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1.$$

Отже, траєкторією руху частинки буде еліпс, зміщений у верхню півплощину на малу піввісь (рис. 1).

Зауважимо, що форма траєкторії руху точки істотно залежить від вибору системи відліку. Наприклад, у системі відліку, пов'язаній із Сонцем, траєкторії руху планет мають форму еліпсів; у системі відліку, пов'язаній із Землею, їхні траєкторії ускладнюються, включаючи петлеподібні рухи. Точка пропелера рухомого літака з погляду пілота перебуває в коловому русі; в системі відліку, пов'язаній з Землею, її траєкторія має гвинтоподібну форму. До вибору системи відліку треба підходити з урахуванням простоти і зручності опису в ній руху матеріальної точки.

Сумарна довжина елементів траєкторії, пройдена точкою за заданий проміжок часу, називається *шляхом*. З означення випливає, що шлях є монотонно зростаючою функцією часу:

$$s = f(t). \quad (2)$$

Таким є *координатний спосіб* опису руху точки.

Розглянемо *векторний спосіб* опису руху точки, який у деяких задачах є більш раціональним. За цим способом положення точки у просторі визначається радіусом-вектором  $\vec{r}$ , пов'язаним із системою відліку (точкою  $O$ , рис. 2,  $a$ ):

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (3)$$

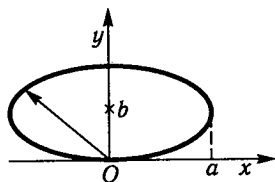


Рис. 1

Рух точки за час  $\Delta t$  визначається вектором переміщення  $\Delta \vec{r}$ . Цей вектор чи-

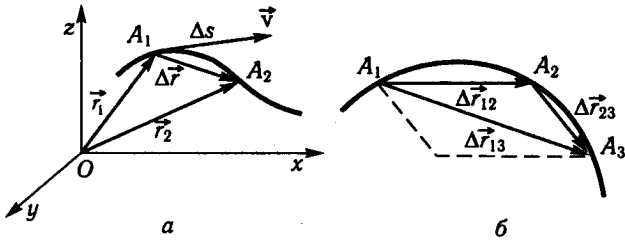


Рис. 2

сельно дорівнює довжині відрізка прямої, що сполучає початкове і кінцеве положення точки через час  $\Delta t$ ; стрілка в кінці відрізка вказує на напрям руху точки. В разі кількох послідовних переміщень точки сумарний вектор переміщення знаходять за правилом паралелограма (або послідовного відкладання векторів, рис. 2, б). Такі величини, як переміщення, швидкість, прискорення, сила та інші, що задаються числовим значенням і напрямом та додаються за правилом паралелограма, називаються *векторними*.

Величини, для визначення яких досить тільки числового значення, називаються *скалярними* (скалярами). Такими, наприклад, є час, шлях, маса.

У письмових текстах вектори позначають літерами зі стрілкою над ними або жирними літерами. Числове значення вектора називається його *модулем* (додатне число). Модуль вектора записують відповідними літерами без стрілок або жирними літерами, обмеженими двома вертикальними рисками.

Із правила додавання векторів випливає, що кожний вектор можна розкласти на дві й більше складових.

Крім додавання виконується також операція віднімання векторів. Її відображено на рис. 2, а:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

де вектор переміщення  $\Delta \vec{r}$  визначає зміну радіуса-вектора рухомої точки за час  $\Delta t$ .

Вектор  $\vec{r}_1$  може бути помножений (або поділений) на скаляр  $m$ . При цьому матимемо вектор  $\vec{r}_2$ , за модулем у  $m$  разів більший, такого самого або протилежного напрямку залежно від знака скаляра:

$$\vec{r}_2 = m\vec{r}_1.$$

Пізніше користуватимемося також добутками двох векторів – векторним і скалярним (ділення вектора на вектор не існує).

Між векторним та координатним способами опису руху точки існує безпосередній зв'язок, а саме:

1) числові значення проєкцій радіуса-вектора рухомої точки на координатні осі системи з тим самим початком відліку дорівнюють координатам точки, тобто

$$r_x = x = f_1(t), \quad r_y = y = f_2(t), \quad r_z = z = f_3(t);$$

іншими словами, радіус-вектор можна задати через координати точки, тобто

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – *орти* (одичні вектори, напрямлені вздовж відповідних координатних осей);

2) траєкторією руху точки є *годограф* радіуса-вектора (крива, яку описує кінець вектора на рис. 2, а). Рівняння (1) є рівнянням годографа;

3) вектор переміщення виражається через відповідні зміни координат рухомої точки, тобто

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}.$$

У разі  $\Delta t \rightarrow 0$  вектор переміщення  $\Delta\vec{r}$  збігається з відповідним елементом траєкторії  $\Delta s$ , проте для довільного проміжку часу модуль кінцевого вектора переміщення і довжина пройденого шляху – взагалі величини різні. Наприклад, модуль переміщення Землі відносно Сонця як системи відліку через півроку дорівнює діаметру орбіти –  $300 \cdot 10^6$  км, а через рік – нулю, тоді як пройдений шлях відповідно дорівнюватиме  $470 \cdot 10^6$  і  $940 \cdot 10^6$  км (тобто півдовжині й довжині орбіти).

### § 3. Приклад опису прямолінійного руху

Розглянемо для прикладу *аналітичний* і *графічний* способи опису прямолінійного руху тіла. За систему відліку тут доцільно взяти пряму, по якій воно рухається. Вважатимемо цю пряму віссю координат  $Ox$ . За початок координат візьмемо початкове положення точки  $O$  (рис. 3, а).

Положення в будь-який момент часу визначатиметься координатою  $x$  як функцією часу  $t$ . Рух буде аналітично описаний, якщо знайдено функцію  $x = f(t)$ . Наприклад, для рівномірного прямолінійного руху

$$x = vt, \tag{1}$$

де  $v$  – швидкість руху.

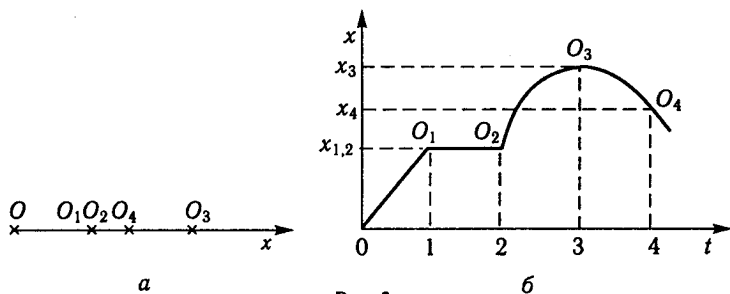


Рис. 3

Для рівнозмінного руху

$$x = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \quad (2)$$

де  $v_0$  – початкова швидкість;  $a$  – прискорення руху.

Для гармонічного коливального руху

$$x = A \sin \omega t, \quad (3)$$

де  $A$  – амплітуда;  $\omega$  – циклічна частота коливання.

Практично миттєві положення рухомого тіла і відповідні моменти часу можна фіксувати секундоміром та фотоапаратом або спеціальними пристроями, прикріпленими до тіла, – крапельницею чи самописом, які через однакові проміжки часу наносять позначки. На підставі останніх роблять висновок про характер руху тіла. Так можна дістати точки  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  на прямій  $Ox$  (див. рис. 3, а). Механічне переміщення тіла уявляється як неперервний процес зміни його положення у просторі, тому функція  $x = f(t)$  є неперервною.

Наочним і зручним для аналізу руху точки є графічний спосіб вираження залежності координати  $x$  від часу  $t$  (рис. 3, б). Графік руху показує, що там, де зі збільшенням  $t$  крива  $x = f(t)$  йде вгору, точка віддаляється від  $O$  і тим швидше, чим крутіше піднімається крива; ділянка, паралельна осі часу  $t$ , відповідає зупинці точки; там, де крива спадає вниз, точка рухається у зворотному напрямі – до точки  $O$ .

Зауважимо, що значення кінцевої координати рухомої точки не можна ототожнювати з пройденим нею шляхом. Зокрема, з наведеного на рис. 3, б графіка випливає, що для знаходження пройденого точкою шляху треба до найбільшої координати  $x_3$  додати відрізок  $(x_3 - x_4)$ , пройдений точкою у зворотному напрямі, і т. д. Якби точка рухалася весь час у напрямі осі  $x$ , то лише тоді координата точки та шлях були б однакові (якщо початок координат збігається з початковим положенням точки).



Нам уже відомо графіки прямолінійних рухів (рівномірного, рівнозмірного) і гармонічного коливання. За графіком ми легко пізнаємо рух, можемо схарактеризувати його так само, як і рівняннями (1)–(3).

## § 4. Швидкість і прискорення

Основними кінематичними величинами, що характеризують рух матеріального тіла у просторі, є швидкість і прискорення.

*Швидкість* – це характеристика руху тіла в кожний момент часу або в кожній точці його траєкторії. Швидкість визначається границею відношення вектора переміщення тіла  $\Delta \vec{r}$  до відповідного проміжку часу  $\Delta t$  за умови, коли останній прямує до нуля, тобто

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1)$$

Рух тіла можна уявити як сукупність миттєвих перебувань його в послідовних точках траєкторії, тому вказану характеристику руху називають *миттєвою швидкістю*.

Швидкість – це вектор, прикладений у заданій точці траєкторії і напрямлений по дотичній до неї в цій самій точці у бік руху.

Вектор швидкості нерідко виражають у проекціях на координатні осі:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

або у вигляді

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}, \quad (2)$$

а модуль вектора знаходять за формулою

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3)$$

Такий суто фізичний зміст швидкості як міри руху окремого тіла.

Поряд із цим на практиці в описах рухів часто задовольняються *середньою швидкістю*, що дорівнює відношенню вектора переміщення до відповідного проміжку часу, за який воно відбулось, тобто

$$\vec{v}_c = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (4)$$

а також *середньою «скалярною швидкістю»*, що дорівнює відношенню пройденого шляху до відповідного часу, за який цей шлях

пройдено, тобто

$$v_c = \frac{s}{t}. \quad (5)$$

Формула (5) є характеристикою руху транспортних засобів, сільськогосподарських машин і живих істот на тривалих проміжках часу (коли швидкості в окремі моменти часу не цікавлять). Інша річ, коли йдеться про характеристику вогнепальної зброї – тут буває необхідно знати швидкість кулі в момент пострілу; під час запуску космічного корабля потрібно точно визначити його швидкість у момент виходу на орбіту; водій транспорту зобов'язаний контролювати швидкість у кожний момент часу за допомогою спідометра.

Одиницею швидкості в СІ є метр за секунду (м/с); на практиці широко користуються кілометром за годину (км/год), у морській справі – вузлом (1 вузол = 1 морська миля/год = 1,853 км/год), у реактивній авіації –  $M$ -числом ( $1 M \approx 1200$  км/год).

Для прикладу наведемо значення швидкостей руху деяких тіл:

Пішохід	5...6 км/год
Швидкий поїзд	120 км/год
Автомобіль ВАЗ-2109	До 150 км/год
Транспортний літак	200...800 км/год
Морський корабель	40 вузлів
Літак-винишувач	До 3 $M$

Зазначимо, що під середньою швидкістю треба розуміти не середнє арифметичне різних швидкостей на ділянці траєкторії, а середнє значення її на ділянці в часі, причому існує принципова відмінність у значеннях середньої скалярної і середньої векторної швидкостей рухів тіл на складних трасах. Для усвідомлення цього розглянемо конкретні приклади.

**Приклад 1.** На першому проміжку часу  $t_1$  швидкість тіла на трасі дорівнювала  $v_1$ , а на наступному проміжку часу  $t_2$  вона становила  $v_2$ . З якою середньою швидкістю рухалося тіло?

*Розв'язання.* В умові йдеться про знаходження середньої скалярної швидкості, тому за її означенням

$$v_c = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

**Приклад 2.** Першу половину часу тіло рухалося зі швидкістю  $v_1 = 20$  м/с під кутом  $\alpha_1 = 60^\circ$  до заданого напрямку, а другу – зі швидкістю  $v_2 = 40$  м/с під кутом  $\alpha_2 = 120^\circ$  до того самого напрямку. Знайти середню швидкість руху тіла.

*Розв'язання.* Йдеться про знаходження середньої векторної швидкості. Оскільки тіло зазнало двох переміщень, сумарне його переміщення знайдемо за векторною сумою (рис. 4):

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_2,$$

НТБ ВНТУ  
м.Вінниця

звідки

$$\bar{v}_c = \frac{\Delta\bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{r}_1 + \Delta\bar{r}_2}{2\Delta t_i} = \frac{1}{2}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2).$$

Відображаючи векторну рівність у проєкціях, дістаємо

$$v_{cx} = \frac{v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2}{2}; \quad v_{cx} = -5 \text{ м/с};$$

$$v_{cy} = \frac{v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2}{2}; \quad v_{cy} = 15\sqrt{3} \text{ м/с}.$$

За одержаними значеннями можна знайти модуль вектора середньої швидкості та її напрям  $\alpha$ .

У змінному русі швидкість може змінюватися і за значенням, і за напрямом. Повну зміну швидкості за час  $\Delta t$  знаходять за векторною різницею (рис. 5):

$$\bar{v}' - \bar{v} = \Delta\bar{v}. \quad (6)$$

Для оцінювання зміни швидкості в часі введено фізичну величину, що називається *прискоренням*. У певний момент часу або в заданій точці траєкторії прискорення є границею відношення вектора зміни швидкості  $\Delta\bar{v}$  до відповідного проміжку часу  $\Delta t$ :

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (7)$$

Прискорення – це вектор, який за напрямом збігається з вектором  $\Delta\bar{v}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Запис вектора прискорення за координатними складовими набирає вигляду

$$\bar{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \bar{k}. \quad (8)$$

Зазначимо, що  $\Delta\bar{v}$  може не збігатися з вектором швидкості (як на рис. 5), тому вектор прискорення взагалі не збігається з напрямом вектора швидкості.

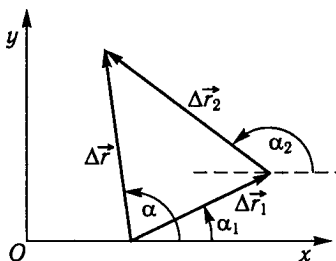


Рис. 4

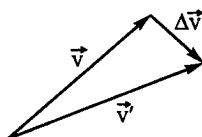


Рис. 5

За виразами (7) і (8) розв'язують задачі двох типів: на знаходження прискорення, коли відомо функції  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ ,  $z = f_3(t)$  або  $v = f(t)$ , і на відношення цих функцій, коли відомо прискорення. Задачі першого типу розв'язують методом диференціювання, другого – методом інтегрування. Наприклад, для випадку рівномірно прискореного руху ( $a = \text{const}$ ), що відбувається в напрямі осі  $Ox$ , з виразу (7) дістаємо

$$dv_x = a dt,$$

звідки інтегруванням знаходимо відомі вирази для швидкості та шляху:

$$v_x = at + C_1; \quad x = \frac{at^2}{2} + C_1t + C_2,$$

де  $C_1$ ,  $C_2$  – сталі інтегрування. Вони визначаються з початкових умов, а саме: при  $t = 0$  маємо  $C_1 = v_0$ ,  $C_2 = x_0$ .

Отже, для розв'язання названих задач, крім прискорення, мають бути задані початкові умови, тобто координати початкового положення точки  $(x_0, y_0, z_0)$  і початкова швидкість її руху  $\vec{v}_0 (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ .

## § 5. Криволінійний рух, тангенціальне і нормальне прискорення

Розглянемо в загальному вигляді криволінійний (плоский) рух, в якому швидкість змінюється за значенням та напрямом.

Нехай тіло, що рухається криволінійно, у точці  $A$  (рис. 6, *a*) має швидкість  $\vec{v}$ , а через час  $\Delta t$ , в сусідній точці  $A_1$ , його швидкість буде  $\vec{v}_1$ . Тоді прискорення руху в точці  $A$  визначимо за формулою

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

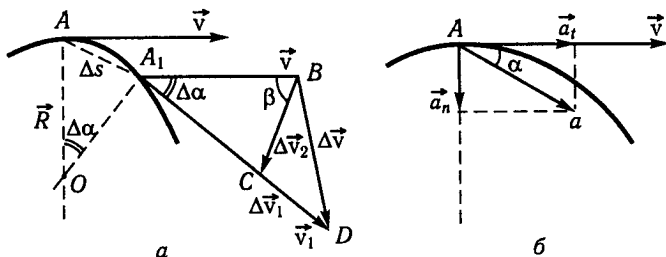


Рис. 6

Тут вектор  $\Delta\vec{v}$  виражає зміну швидкості за модулем і напрямом.

Розкладемо вектор  $\Delta\vec{v}$  на дві складові:  $\Delta\vec{v}_1$ , що визначає зміну швидкості за модулем за час  $\Delta t$ , та  $\Delta\vec{v}_2$ , що визначає зміну швидкості за напрямом за цей самий час. Щоб знайти  $\Delta\vec{v}_1$ , досить визначити різницю відрізків  $A_1D - A_1B = A_1D - A_1C = CD$ , а щоб знайти  $\Delta\vec{v}_2$ , досить сполучити точки  $B$  і  $C$  та визначити напрям вектора за умови, що

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2.$$

Отже, повне прискорення можна виразити як суму двох складових:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}.$$

Перша складова прискорення

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_t}{dt}, \quad (1)$$

що визначає зміну швидкості за модулем, називається *тангенціальним прискоренням*.

Тангенціальне прискорення напрямлено по дотичній до траєкторії руху в напрямі швидкості або проти неї залежно від того, збільшується чи зменшується швидкість.

Друга складова прискорення

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_n}{dt}, \quad (2)$$

що визначає зміну швидкості за напрямом, називається *нормальним, або доцентровим, прискоренням*. Це прискорення напрямлено перпендикулярно до вектора швидкості. Справді, при  $\Delta t \rightarrow 0$  у рівнобедреному трикутнику  $BA_1C$  кут  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ , тому кут  $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , а отже,  $\Delta\vec{v}_2 \perp \vec{v}$ .

Щоб обчислити модуль нормального прискорення, треба знайти  $\Delta v_2$ . Для цього скористаємося рівністю відношень відповідних сторін подібних трикутників  $OAA_1$  і  $A_1BC$ , а саме:

$$\frac{\Delta v_2}{v} = \frac{\Delta s}{R}; \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}; \quad (3)$$

Знаючи тангенціальне та нормальне прискорення, можна знайти модуль і напрям повного прискорення руху в заданій точці траєкторії (рис. 6, б), а саме:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_t}.$$

Тангенціальне і нормальне прискорення можуть бути ознаками різних рухів, наприклад:

- 1)  $a_t = \text{const}$  – рівнозмінний рух;
- 2)  $a_t = 0, a_n \neq 0$  – рівномірний криволінійний рух;
- 3)  $a_t = 0, a_n = \text{const}$  – рівномірний рух по колу і т. д.

## § 6. Приклади основних задач кінематики

З рівнянням руху  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$  формально пов'язані два типи основних задач кінематики:

1) *пряма задача*, що полягає в знаходженні будь-якого параметра руху за відомим рівнянням руху (її розв'язують за допомогою послідовного застосування відповідних формул кінематики);

2) *обернена задача*, що полягає у відшуканні рівняння руху за будь-яким відомим параметром руху (вектором швидкості або прискорення). Оборнена задача взагалі значно важча від прямої.

**Приклад 1.** Матеріальна точка рухається за рівнянням  $\vec{r} = \alpha \sin(5t)\vec{i} + \beta \cos^2(5t)\vec{j}$ , де  $\alpha = 2$  м,  $\beta = 3$  м. Визначити вектор швидкості, вектор прискорення і траєкторію руху матеріальної точки.

*Розв'язання.* За рівнянням руху послідовно знаходимо складові радіуса-вектора:

$$x(t) = \alpha \sin(5t); \quad y(t) = \beta \cos^2(5t); \quad z(t) = 0; \quad (1)$$

констатуємо, що рух матеріальної точки відбувається в площині  $xOy$ . Далі знаходимо складові вектора швидкості

$$v_x(t) = 5\alpha \cos(5t); \quad v_y(t) = -5\beta \sin(10t). \quad (2)$$

За рівняннями (2) визначаємо складові вектора прискорення

$$a_x(t) = -25\alpha \sin(5t); \quad a_y(t) = -50\beta \cos(10t). \quad (3)$$

Для знаходження рівняння траєкторії виключимо час  $t$  із системи рівнянь (1), тоді

$$y = 3 - \frac{3}{4}x^2. \quad (4)$$

Отже, матеріальна точка рухається по параболі.

**Приклад 2.** Прискорення матеріальної точки змінюється за законом  $\vec{a} = \alpha t^2\vec{i} - \beta\vec{j}$ , де  $\alpha = 3$  м/с<sup>2</sup>,  $\beta = 3$  м/с<sup>2</sup>. Знайти, на якій відстані від початку координат вона буде в момент часу  $t = 1$  с, якщо при  $t = 0$  маємо  $v_0 = 0$  і  $z_0 = 0$ .

*Розв'язання.* З умови випливає, що матеріальна точка рухається в площині  $xOy$ . Для знаходження відстані точки від початку координат у заданий момент часу необхідно знати рівняння руху.

Спочатку за складовими прискорення визначимо відповідні складові швидкості:

$$\frac{dv_x}{dt} = \alpha t^2; \quad \frac{dv_y}{dt} = -\beta; \quad v_x = \frac{\alpha t^3}{3} + C_1; \quad v_y = \beta t + C_2. \quad (1)$$

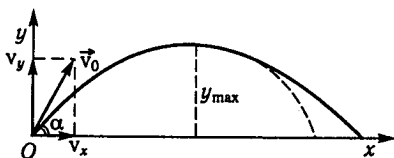


Рис. 7

З урахуванням початкових умов при  $t = 0$  дістаємо  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$ . Далі за системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha t^3}{3}, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta t$$

знаходимо складові радіуса-вектора

$$x(t) = \frac{\alpha t^4}{12} + C_3; \quad y(t) = -\frac{\beta t^2}{2} + C_4, \quad (2)$$

де згідно з початковими умовами  $C_3 = C_4 = 0$ . Рівняння руху знайдено:

$$\vec{r}(t) = \frac{\alpha t^4}{12} \vec{i} - \frac{\beta t^2}{2} \vec{j}. \quad (3)$$

За модулем радіуса-вектора визначаємо шукану відстань матеріальної точки від початку координат у момент часу  $t = 1$  с:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad r = 1,52 \text{ м.}$$

**Приклад 3.** Описати рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, якщо тілу надали початкової швидкості  $v_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту (рис. 7). Знайти:

- 1) рівняння руху тіла;
- 2) траєкторію його руху;
- 3) найбільшу висоту підняття над горизонтом;
- 4) дальність польоту.

**Розв'язання.** 1. За складовими швидкості по координатних осях

$$v_x = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

робимо висновок, що в напрямі осі  $Ox$  точка рухатиметься рівномірно, оскільки  $v_x = \text{const}$ , а в напрямі осі  $Oy$  – рівномірно сповільнено, бо  $v_y$  рівномірно зменшується з часом. Тому координатами точки для будь-якого моменту часу будуть

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad (1)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad (2)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

2. Якщо з рівнянь (1) і (2) виключити час, то дістанемо рівняння траєкторії в явному вигляді. З рівняння (1)  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ . Підставивши це значення в рівняння (2), матимемо

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (3)$$

Отже, тіло летітиме по параболічній траєкторії.

3. Найбільшу висоту підняття тіла над горизонтом знайдемо як максимум координати  $y$  із рівняння (2). Знаходимо похідну і прирівнюємо її до нуля:

$$\dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

звідки

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (4)$$

де  $t_1$  – час, за який тіло досягає максимальної висоти. Підставивши це значення в рівняння (2), дістанемо

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (5)$$

4. Час (4), що відповідає найвищому положенню тіла над горизонтом, визначає час підняття тіла по траєкторії руху (або час зниження). Тому весь час польоту тіла

$$t_n = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

а далькість польоту

$$x = 2v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (6)$$

Із формули (6) випливає, що далькість польоту тіла залежить від кута, під яким його кинули до горизонту, причому максимальне значення ця величина має при  $\alpha = 45^\circ$ .

Проте в розглянутому прикладі не враховано опору середовища. Насправді внаслідок опору повітря тіла рухаються не по параболі, а по балістичній кривій (штрихова крива на рис. 7).

## § 7. Рух точки по колу, кутова швидкість і кутове прискорення

Поширеною різновидністю криволінійного руху є рух точки по колу, коли вектор швидкості весь час змінює свій напрям ( $a_n \neq 0$ ) і може змінюватися також за модулем.

Звертаємо увагу на те, що коли обертається кілька жорстко зв'язаних точок, наприклад  $A$  і  $B$  (рис. 8), то вони мають різні лінійні швидкості, але всі точки за проміжок часу  $\Delta t$  зміщуються на той самий кут  $\Delta \varphi$ . Тому в цілому їх рух визначають вектором *кутового зміщення*  $\Delta \vec{\varphi}$  (аналогічним вектору переміщення  $\Delta \vec{r}$  у поступальному русі тіла). Проте на відміну від векторів переміщення, швидкості, прискорення й інших полярних векторів, напрям яких очевидні, напрям вектора кутового зміщення визначається за певною умовою і належить до *аксіальних векторів*.

*Вектор кутового зміщення є відрізком, довжина якого в певному масштабі чисельно дорівнює куту повороту, а напрямлений він по осі обертання в бік, що визначається правилом правого гвинта.* За цим правилом на-

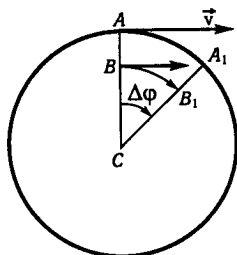


Рис. 8



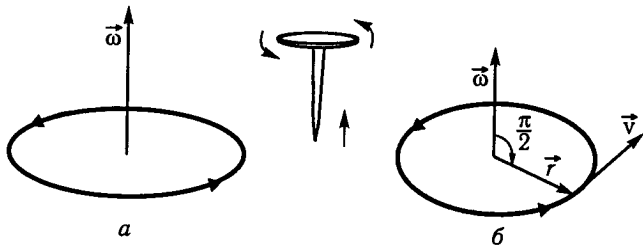


Рис. 9

прям вектора кутового зміщення має збігатися з поступальним рухом гвинта, якщо його головку повертати в напрямі обертання тіла (рис. 9, а).

Ще одне зауваження. Для того щоб кутові зміщення можна було задати векторами, необхідно, щоб вони додавалися за правилом паралелограма. Ця умова справджується лише для елементарних кутових зміщень.

Основними кінематичними величинами, що характеризують обертальний рух точки, є її кутова швидкість і кутове прискорення.

Кутова швидкість точки в певний момент часу визначається границею відношення вектора кутового зміщення  $\Delta\vec{\varphi}$  до відповідного проміжку часу  $\Delta t$ :

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1)$$

Кутова швидкість – це вектор, напрямлений по осі обертання за правилом правого гвинта (див. рис. 9, а). Отже, кутова швидкість поряд із кількісною характеристикою обертання показує також напрям обертання в кожний момент часу. За одиницю кутової швидкості в СІ прийнято радіан за секунду (рад/с).

Для пояснення обертальних рухів зчеплених зубчастих коліс і в деяких інших випадках треба знати зв'язок між кутовою та лінійною швидкостями точки. Виразимо кутову швидкість через лінійну. Для цього у формулу кутової швидкості (1) підставимо

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}:$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{1}{r} = \frac{v}{r}. \quad (2)$$

Оскільки для двох зчеплених зубчастих коліс лінійна швидкість зубців однакова, відповідно до виразу (2) кутові швидкості коліс обернено пропорційні їхнім радіусам.

Вираз (2) показує залежність тільки між модулями векторів  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{v}$  і  $\vec{r}$  для заданої точки. Співвідношення цих векторів повніше виражається векторним добутком

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]. \quad (3)$$

*Векторний добуток* – це вектор, модуль якого дорівнює  $\omega r \sin \alpha$  (де  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{\omega}$  та  $\vec{r}$ ), що напрямлений перпендикулярно до  $\vec{\omega}$  і  $\vec{r}$  у той бік, в який поступально переміщується гвинт, коли його головка робить найкоротший поворот від  $\vec{\omega}$  до  $\vec{r}$  (рис. 9, б).

Якщо в обертальному русі кутова швидкість змінюється, то цю зміну оцінюють кутовим прискоренням

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (4)$$

*Кутове прискорення* – це вектор, що збігається з напрямом кутової швидкості у прискорених рухах або напрямлений проти кутової швидкості у сповільнених рухах.

Кутове прискорення пов'язане з тангенціальним прискоренням точки, а саме:

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega r)}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \beta r. \quad (5)$$

Кутове прискорення може бути ознакою різних видів обертальних рухів точки, наприклад: при  $\beta = 0$  маємо рівномірний обертальний рух; при  $\beta = \text{const}$  – рівнозмінний обертальний рух. Для цього руху на підставі виразу (4)  $d\omega = \beta dt$ , звідки інтегруванням знаходимо формули для визначення швидкості і кута повороту тіла:

$$\omega = \omega_0 + \beta t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}.$$

## § 8. Зміщення, швидкість і прискорення у гармонічному коливальному русі

*Коливальним* називається рух, у якому матеріальна точка (або система точок), багаторазово відхиляючись від свого положення рівноваги, щоразу знову повертається у нього. Коливальний рух, у якому відповідні положення тіла точно повторюються через однакові проміжки часу, називають *періодичним*. Такими є рухи маятника годинника, ніжки камертона, натягнутої струни, моста тощо.

Мінімальний проміжок часу, через який повторюється положення тіла в коливальному русі, називають *періодом*.

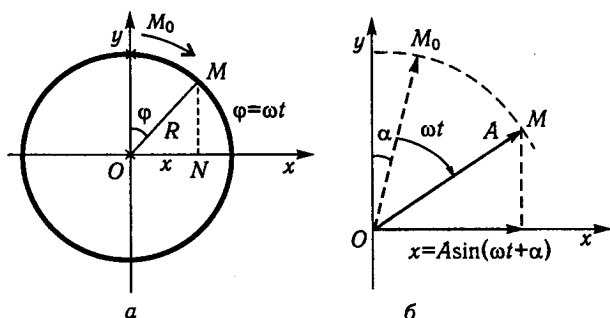


Рис. 10

Серед різних коливальних рухів у природі й техніці важливе значення мають гармонічні. *Гармонічним* називають коливальний рух, у якому зміщення матеріальної точки від положення рівноваги змінюється за рівнянням синуса або косинуса. Важливість його пояснюється тим, що коливання у природі та техніці часто дуже близькі до гармонічних, а крім того, будь-які періодичні зміни величин зі складнішою залежністю від часу можна розкласти на гармонічні коливання.

Прикладом гармонічного коливання може бути рух проекції точки, що рівномірно рухається по колу, на будь-яку пряму у площині руху (рис. 10, а). Якщо радіус кола  $R$ , а кутова швидкість точки  $\omega$ , то координата її проекції

$$x = R \sin \omega t. \quad (1)$$

Визначимо кінематичні елементи цього руху:  $x$  – відстань точки, що перебуває в коливальному русі, від положення рівноваги; її називають *зміщенням*. Найбільше значення зміщення точки в коливальному русі ( $x = R = A$ ) називають *амплітудою*. Період коливання  $T$  точки  $M$ , очевидно, буде

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2)$$

оскільки через час одного оберту точки  $M$  зміщення її проекції  $N$  точно повторюватиметься; тут  $\omega$  – циклічна (або колова) частота гармонічного коливання.

Кількість коливань за секунду називають *частотою коливань*  $\nu$ . Із наведених означень випливають такі залежності:

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad (3)$$

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (4)$$

Добуток  $\omega t$ , що входить під знак синуса у виразі (1), називають *фазою*. Фаза – це аргумент, який дає змогу визначити числове значення і напрям зміщення, а отже, положення точки в коливальному русі у будь-який момент часу.

Рівняння гармонічного коливального руху в загальному вигляді має вигляд

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (5)$$

де  $\alpha$  – початкова фаза, тобто значення фази у початковий момент часу ( $t = 0$ ).

Швидкість точки в гармонічному коливанні знайдемо як першу похідну зміщення за часом:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

або

$$v = \omega A \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (7)$$

Прискорення точки в гармонічному коливанні

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha), \quad (8)$$

інакше

$$a = -\omega^2 x; \quad (9)$$

$$a = \omega^2 A \sin(\omega t + \alpha + \pi). \quad (10)$$

Зміщення, швидкість і прискорення у гармонічному коливальному русі є гармонічно змінними величинами з однаковим періодом, але з різницею за фазою відповідно  $\frac{\pi}{2}$  та  $\pi$ .

Крім аналітичного відображення гармонічного коливання у вигляді рівняння координати  $x$  точки  $M$ , його можна також відобразити у вигляді зміни проекції вектора амплітуди  $A$ , що рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  (див. рис. 10, *а*). Ця проекція  $x = A \sin(\omega t + \alpha)$  чисельно дорівнює зміщенню точки  $N$  в коливальному русі. Звідси зрозуміло, чому  $\omega$  в коливальному русі називається також *коловою частотою*.

Зручним іноді є відображення гармонічного коливання за допомогою комплексної амплітуди. За цим методом площину (рис. 10, *б*) можна розглядати як поле комплексних величин ( $a = \alpha + \beta i$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ).

Якщо вісь  $Oy$  вважати віссю уявних чисел, то вектор амплітуди  $A$  виражатиметься комплексною величиною

$$a = A \sin(\omega t + \alpha) + i A \cos(\omega t + \alpha),$$

в якій дійсна частина має фізичний зміст.

Останній вираз за формулою Ейлера можна записати у вигляді

$$a = Ae^{i(\omega t + \alpha)} = Ae^{i\alpha} e^{i\omega t},$$

де незалежний від часу множник

$$\bar{A} = Ae^{i\alpha}$$

називається *комплексною амплітудою*. Вона визначає амплітуду і початкову фазу коливання.

Перехід від рівнянь гармонічних коливань до відповідних комплексних величин полегшує операції диференціювання та інтегрування їх. Цей метод, як і метод векторних амплітуд, дуже зручний для додавання коливань.

## § 9. Завдання динаміки

Динаміка вивчає рухи тіл під дією прикладених до них сил. Стан спокою або руху тіла змінюється внаслідок взаємодії його з іншим тілом. Наприклад, молоток під час забивання цвяха дістає рух завдяки взаємодії з рукою людини, а зупиняється він унаслідок взаємодії з цвяхом, і т. д. Величину, що є мірою взаємодії тіл, називають *силою*.

Для розуміння явищ природи потрібно з'ясувати відношення сили до руху. Початкові спостереження за переміщенням знарядь праці наводили на думку, що сила є причиною руху. Саме це стверджував давньогрецький філософ і вчений Арістотель (384–322 до н. е.). Цей погляд проіснував понад 19 століть як очевидна істина. Протягом цього часу поняття сили розглядали відокремлено від руху; у простіших випадках силою наділяли певні живі та неживі тіла, у складніших явищах вбачали прояв надприродних сил. Природним станом матерії вважали стан спокою.

Тільки в XVII ст. видатний італійський вчений Галілео Галілей (1564–1642) розкрив справжній закон руху тіл. Він показав, що всяке тіло має властивість зберігати рух – швидкість руху, а сила є лише причиною зміни руху. У цьому переконуємося на простих прикладах. Якщо м'яч покотити по траві, то він швидко зупиниться, а по льоду він котиться значно далі. Сила тертя сповільнює рух м'яча. Зусилля коня при переміщенні воза, зусилля людини при їзді на велосипеді по горизонтальному шляху зводяться до подолання сил тертя. Очевидно, якби на тіло не діяли ніякі сили, то його природним станом був би рівномірний прямолінійний рух або стан спокою.

Властивість тіла зберігати рівномірний прямолінійний рух або стан відносного спокою називають *інертністю*. Інертність – властивість матерії зберігати швидкість руху, перебувати в русі. Саме явище збереження швидкості руху або стану спокою у разі зрівноваження зовнішніх дій на тіло називають *інерцією*. Відкриття інертності тіл було важливим кроком у розвитку фізики і філософії. Воно свідчило, що природним станом матерії є стан руху, а сила взаємодії є лише причиною зміни швидкості руху – прискорення.

Практичні завдання динаміки зводяться до визначення прискорення руху за заданими силами або до знаходження діючих сил за змінами руху, які спричиняють ці сили.

## § 10. Перший закон Ньютона

Узагальнюючи досягнення науки свого часу, великий англійський вчений І. Ньютон (1643–1727) сформулював основні закони динаміки. Вони викладені в його знаменитій праці «Математичні начала натуральної філософії», опублікованій у 1687 р. Властивість інертності тіл І. Ньютон сформулював як перший закон механіки: *будь-яке тіло перебуває у стані спокою або прямолінійного і рівномірного руху, доки й оскільки воно не змушене буде прикладеними силами змінити цей стан.*

Опис руху тіла залежить від вибору системи відліку. І. Ньютон допускав існування абсолютного простору та часу, а отже, нерухомої системи відліку і стосовно неї формулював закон.

Пізніше прийшло переконання, що такої абсолютно нерухомої системи відліку не існує, проте було виявлено, що закон справджується у системах, пов'язаних із тілами, які переміщуються рівномірно та прямолінійно відносно нерухомої гіпотетичної системи. Такі системи стали називати *інерціальними*, а перший закон Ньютона дістав уточнене формулювання: *існують такі системи, в яких тіло перебуватиме у спокої або прямолінійному і рівномірному русі, якщо дія на нього решти тіл компенсується.*

У системі, пов'язаній з поверхнею Землі, можна навести приклади збереження тілом стану спокою; складніше показати збереження ним рівномірного та прямолінійного руху, оскільки неможливо створити такі умови, в яких на тіло не діяли б сили. Проте навіть прості досліди з бруском на візку (рис. 11) переконують в існуванні інертності:

1) коли візок зі стану спокою раптово починає рухатися, то брусок, аби зберегти стан спокою, падає в напрямі, протилежному руху;

2) якщо візок, що перебуває в русі, раптово зупинити, то брусок падає в напрямі руху;

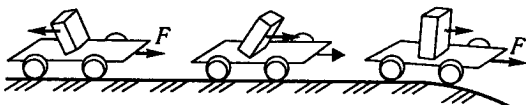


Рис. 11

3) якщо прямолінійний рух візка змінюється на криволінійний, то брусок падає в напрямі попереднього руху.

Явище інерції має істотне значення на практиці. Інертність ураховують у транспорті (в разі зрушення з місця, розгону і гальмування транспортних засобів перед зупинкою – в усіх цих випадках для зміни стану потрібен певний час, навіть при значній діючій силі); куля і снаряд після вильоту зі ствола рухаються за інерцією; на інерції ґрунтується дія зернопультів, механізмів для передавання силосної маси; явище інерції використовується у різних автоматичних пристроях.

## § 11. Маса тіла

Важливою фізичною величиною, що визначає властивості матерії, є *маса*.

Початкове поняття маси як міри кількості речовини склалося з практики ще до формування основних законів механіки. У процесі товарного обміну люди порівнювали тіла за їхньою вагою і навіть Г. Галілей ототожнював поняття маси і ваги. Згодом було виявлено, що вага тіла змінюється залежно від географічної широти. У зв'язку з цим виникла потреба уточнити поняття маси та ваги.

І. Ньютон провів серію дослідів і знайшов, що відношення сили тяжіння тіла до прискорення вільного падіння цього тіла в порожнечі є сталою величиною, яка не залежить від положення тіла на земній поверхні. За Ньютоном, під цією сталою і незмінною величиною стали розуміти масу тіла. По суті те поняття маси, що склалося у процесі дослідження взаємодії тіл із Землею, характеризує гравітаційні властивості речовини. Тому цю величину доцільніше було б назвати *гравітаційною масою*.

Першим законом механіки визначено ще одну загальну властивість речовини – інертність. У дослідах було доведено, що відношення будь-якої сили до прискорення, якого вона надає тілу, є сталою величиною і не залежить від походження сили. Під цією сталою та незмінною величиною стали розуміти масу тіла як міру інертності речовини. Тому її можна було б назвати *інертною масою*.

Так у класичну фізику ввійшло двоїсте поняття маси як відображення двох різних властивостей речовини: міри інертності та міри гравітаційних властивостей.

Численні досліді, проведені І. Ньютоном й особливо угорським фізиком Л. Етвешем (1848–1919), показали, що для будь-яких двох тіл відношення мас тяжіння дорівнює відношенню їхніх інертних мас. Це впливає з того, що всі тіла падають на поверхню Землі з однаковим прискоренням. Справді, тут силу, що діє на тіло, мож-



на виразити через масу тяжіння  $m_T$  або інертну масу  $m_i$ . Для двох тіл матимемо:

$$\gamma \frac{m'_T M}{r^2} = m'_i g; \quad (1)$$

$$\gamma \frac{m''_T M}{r^2} = m''_i g. \quad (2)$$

Якщо поділити першу рівність на другу, то дістанемо  $\frac{m'_T}{m''_T} = \frac{m'_i}{m''_i}$ , тобто маси тяжіння тіл пропорційні їхнім інертним масам.

Щоб перевірити цю залежність, І. Ньютон вимірював прискорення земного тяжіння маятниками різних мас і матеріалів. У всіх випадках  $g$  було однакове в заданому місці.

Одиницю гравітаційної маси можна було б визначити незалежно від одиниці інертної маси за законом тяжіння

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3)$$

поклавши, наприклад,  $\gamma = 1$ . Проте, зважаючи на пропорційність гравітаційної та інертної мас, для спрощення обчислень одиницю гравітаційної маси вибрали так, щоб для заданого тіла гравітаційна маса виражалася однакоvim числом з інертною масою і мала однакове найменування, наприклад:

$$m_i = 200 \text{ г}; \quad m_T = 200 \text{ г}.$$

У такому разі коефіцієнт пропорційності матиме певне значення та найменування. На практиці вимірювання інертної маси ґрунтується на порівнянні мас тяжіння за допомогою терезів.

У класичній фізиці пропорційність гравітаційної та інертної мас уявлялась випадковою, оскільки властивість інерції, а також закони механіки зберігають свій зміст і без сили тяжіння. Лише в теорії відносності було з'ясовано зв'язок між законами механіки та законом тяжіння, прямим наслідком якого є пропорційність гравітаційної та інертної мас. Саме тому числові значення мас у фізиці не розрізняють.

## § 12. Другий закон Ньютона

Із першого закону механіки відомо, що сила спричинює зміну руху тіла, зумовлює його прискорення. Другий закон Ньютона стверджує: зміна кількості руху пропорційна прикладеній рушійній силі й відбувається по прямій, по якій діє ця сила.

З метою конкретизації змісту закону і виходу на експериментальну перевірку його формулюють у такому вигляді: *тіло, на яке діють сили, рухається з прискоренням, значення і напрям якого визначаються відношенням рівнодійної всіх сил до маси тіла:*

$$\vec{a} = \vec{F}/m.$$

Зауважимо, що для спрощення вимірювання сили коефіцієнт пропорційності у правій частині рівності взято за такий, що дорівнює одиниці.

Оскільки прискорення руху  $\vec{a}$  є функцією двох змінних, для перевірки закону доцільно провести дві серії дослідів:

- 1) при  $m = \text{const}$  знайти  $a = f_1(F)$ ;
- 2) при  $F = \text{const}$  знайти  $a = f_2(m)$ .

Другий закон механіки можна перевірити за допомогою приладу, зображеного на рис. 12, а. Спочатку через блоки перекидають нитки із системою тягарців однакових мас ( $2m_1 + 2m_2$ ), але розміщують їх так, щоб системи приводились у рух різними тягарцями, наприклад, ліва – одним ( $m_1$ ), права – двома ( $2m_1$ ).

Якщо відпустити петлю, що зв'язує обидві системи тягарців, то вони почнуть рухатися та одночасно зупиняться, коли петля дійде до затримної скоби. За пройденими шляхами знаходимо відношення прискорень:

$$s_1 = \frac{a_1 t^2}{2}; \quad s_2 = \frac{a_2 t^2}{2}; \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

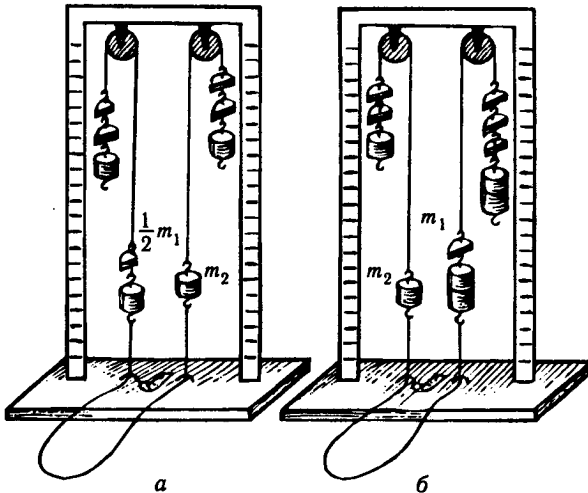


Рис. 12

Дослід показує, що прискорення руху прямо пропорційні діючим силам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_1}{F_2}.$$

У дослідах із системи тягарців різних мас ( $2m_1 + 2m_2$  і  $4m_1 + 4m_2$ ), які рухаються під дією однакових тягарців ( $2m_1$ ) (рис. 12, б), бачимо, що прискорення руху обернено пропорційні масам тіл (права система тягарців проходить удвічі менший шлях).

Здебільшого другий закон механіки записують у вигляді

$$m\bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}. \quad (1)$$

Вище розглянуто другий закон механіки для випадків, коли маса точки залишається незмінною. У низці механічних задач, наприклад розглядаючи рух ракети, маса не залишається сталою. У таких випадках треба користуватися формулюванням закону в загальному вигляді, а саме: *зміна механічного імпульсу тіла пропорційна прикладеній силі й відбувається в напрямі діючої сили*:

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}, \quad (2)$$

де  $m\bar{v} = \bar{p}$  – імпульс (кількість руху тіла);  $\bar{F}$  – результуюча зовнішня сила.

Інакше, за виразом (2) сила визначається швидкістю зміни імпульсу тіла:

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}. \quad (3)$$

Ще французький вчений Р. Декарт (1596–1650), досліджуючи взаємодію тіл, дійшов висновку про існування певної міри механічного руху. Цією мірою є імпульс –  $m\bar{v}$ . Імпульс тіла – це вектор однакового з вектором його швидкості напрямку.

Імпульс відіграє істотну роль у фізиці та на практиці. Наприклад, шофер знає, що час, потрібний для того, щоб зупинити навантажену машину, навіть при малій швидкості, не менший від часу гальмування розвантаженої машини при великій швидкості. Механічні рухи машини еквівалентні, якщо однакові добутки її маси на швидкість.

Рівняння (3) можна записати у вигляді

$$d\bar{p} = \bar{F}dt,$$

звідки випливає, що зміна імпульсу тіла залежить не лише від прикладеної сили, а й від часу її дії. Тому та сама зміна імпульсу може

бути спричинена великою силою за малий час дії та малою силою за великий час дії. Добуток сили на час її дії називають *імпульсом сили*.

Вирази (1) і (3) називаються *рівняннями динаміки матеріальної точки*.

Під час розв'язування задач на рух тіла сталої маси спочатку складають рівняння динаміки у векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i,$$

а потім виражають його у проекціях на координатні осі:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_x; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_y; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_z. \quad (4)$$

За формулами (4) розв'язують задачі з механіки двох типів: на знаходження діючих сил, коли відомо масу матеріальної точки та її координати як функції часу  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ ,  $z = f_3(t)$ , і на знаходження цих функцій, коли відомо діючі сили. Задачі першого типу розв'язують методом диференціювання, другого – методом інтегрування. Зрозуміло, що в останніх задачах для визначення сталих інтегрування мають бути задані початкові умови: координати початкового положення точки  $(x_0, y_0, z_0)$  та її початкова швидкість  $v_0 (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ .

Вираз другого закону Ньютона називають *основним рівнянням динаміки матеріальної точки*.

### § 13. Третій закон Ньютона

За третім законом механіки зовнішня дія на тіло, яка зумовлює зміну його руху, має характер взаємодії: якщо на тіло діє сила, то це означає, що на нього діє інше тіло, причому останнє, у свою чергу, зазнає впливу першого.

Третій закон Ньютона стверджує: *дії завжди відповідає рівна протидія, іншими словами, сили дії двох матеріальних точок одна на одну однакові за значенням і протилежні за напрямом*:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (1)$$

Зауважимо, що сили дії і протидії прикладено до різних тіл; тому не можна вважати, що вони мають рівнодійну, до того ж таку, яка дорівнює нулю.

Наочною ілюстрацією закону є статичні взаємодії тіл, за яких тіла перебувають у рівновазі. Наприклад, сила тиску предметів на стіл, обумовлена їхньою масою, дорівнює протидії сил пружності,

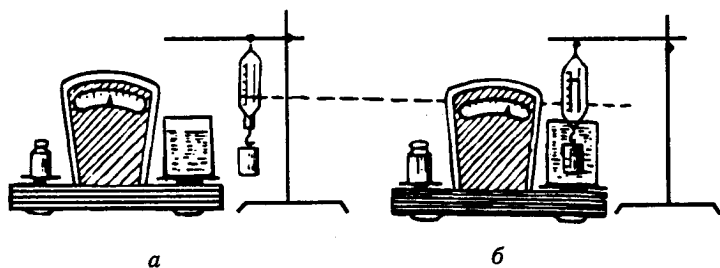


Рис. 13

зумовлених деформацією стола; сила тиску повітря у гумовій камері м'яча дорівнює сумі сили пружності, зумовленої деформацією розтягу стінок м'яча, і сили зовнішнього тиску. У прикладі, наведеному І. Ньютоном, сила тиску гори дорівнює силі тиску Землі на гору, бо інакше з'явився б надлишок сили в одному напрямі, що привело б систему двох тіл у прискорений рух, а це суперечить першому закону механіки.

Рівність дії та протидії можна продемонструвати на такому досліді. Якщо на шальці терезів зрівноважити склянку з водою (рис. 13, *a*) та після цього занурити у воду залізний циліндр, підвішений на динамометрі, то рівновага на терезах порушиться (рис. 13, *б*). Шалька з посудиною опуститься, а розтяг пружини динамометра зменшиться. На циліндр діє виштовхувальна сила води; отже, така сама сила діє також на воду.

Щоб відновити рівновагу на терезах, треба на ліву шальку покласти додаткові важки.

Рівність дії та протидії тіл у стані руху можна проілюструвати взаємодією магнітного і залізного брусків. Якщо їх розмістити за допомогою поплавків на поверхні води, то вони одночасно попливуть назустріч один одному. Так само двоє людей, які стоять на низьких легко рухомих візках і натягують вірвовку (рис. 14), рухаються назустріч один одному незалежно від того, чи тягне за вірвовку один із них, чи натягують її обоє разом. У кожному випадку візки перебувають під дією рівних і протилежно напрямлених

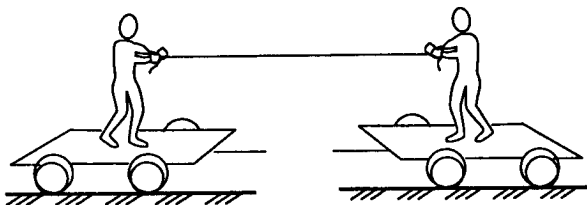


Рис. 14

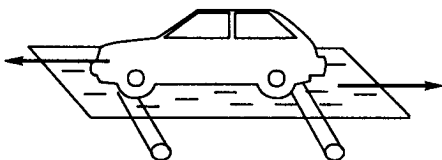


Рис. 15

сил, а прискорення їхніх рухів і пройдені шляхи обернено пропорційні їхнім масам.

Йдучи, людина по суті весь час відштовхує Землю назад, а Земля з такою самою силою штовхає людину вперед. Оскільки маса Землі дуже велика, її зміщення від поштовху людини непомітне. Так само автомобілі та локомотиви рухаються унаслідок відштовхування їхніх ведучих коліс від Землі через тертя.

Це можна проілюструвати на досліді з іграшковим заводним автомобілем. Якщо його поставити на скляну пластинку, то під час руху автомобіля пластинка зміщуватиметься у протилежному напрямі (рис. 15). Оскільки для руху автомобіля і локомотива істотне значення має тертя, що виникає між ведучими колесами та поверхнею, по якій вони переміщуються, силу тертя в цих випадках називають *рушійною*, в інших – *гальмівною*.

## § 14. Сила.

### Статистичний і динамічний прояви сили

Сила – це міра зовнішньої дії на тіло, що виникає у процесі його взаємодії з іншим тілом.

Вводячи поняття «сила» для з'ясування різних фізичних явищ, не треба забувати про справжнє відношення сили до руху. Ще Ф. Енгельс у своїй «Діалектиці природи» пояснював, що коли будь-який рух переноситься з одного тіла на інше, то, оскільки рух переходить, тобто активний, його можна розглядати як причину руху і цей активний рух виступає як сила; коли ж цей самий рух є переносним, пасивним, він виступає як прояв сили. Тобто сила як активний бік руху вимірюється своїм проявом, кількістю переданого руху. Згідно із законом незнищеності руху сила точно дорівнює своєму прояву, бо в обох випадках це – один і той самий рух.

У поясненні сили треба виходити з закону незнищеності руху. Рух не створюється з нічого якоюсь незалежною силою, що існує поза рухом, він є невід'ємною формою існування матерії. Сила – це фізична величина, введена для характеристики передавання руху від одного тіла до іншого. Силу не можна розглядати ізольовано від матерії та її руху. Нерозуміння цього в історичному минулому

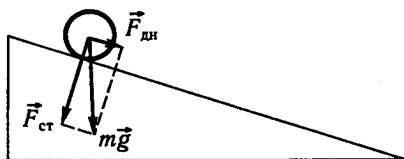


Рис. 16

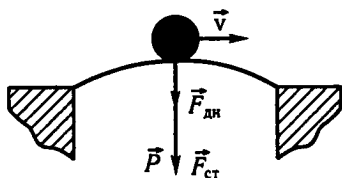


Рис. 17

призводило до фетишизації сили в щось таке, що існує самостійно, тобто поза матерією.

Результат дії сили залежить від її значення, напрямку у просторі та точки прикладання до тіла. Сила – це векторна величина. Коли в заданій точці прикладено кілька сил, то їх можна додати за правилом паралелограма і знайти рівнодійну силу.

Якщо під дією кількох сил тіло зберігає свій стан спокою або рівномірно прямолінійного руху, то таку систему діючих сил називають *зрівноваженою*, або *еквівалентною нулю*.

Результати дії сили в різних практичних прикладах легше пояснити, якщо розрізняти вслід за І. Ньютоном статичні та динамічні прояви сили. Відповідно розрізняють статичний і динамічний способи вимірювання сили.

Результатами статичного прояву сили є тиск на тіла, що перешкоджають рухові, та їх деформація. За цими результатами дії сили важільними або пружинними терезами здійснюють статичне вимірювання сили. Зрозуміло, що сила, яка виявляється статично, завжди зумовлює рівну їй за значенням і протилежну за напрямом реакцію опори – силу пружної деформації.

Результатом динамічного прояву сили є прискорення – тангенціальне або нормальне. У таких випадках силу визначають за другим законом механіки  $F = ma$ , зокрема за виразом доцентрової сили  $F = \frac{mv^2}{r}$ .

Заслужують на увагу випадки, коли сила одночасно виявляється і статичною, і динамічною. Наприклад, у русі тіла по гладенькій похилій площині (рис. 16) складова його сили тяжіння, перпендикулярна до площини, проявляється статично, а складова сили тяжіння, паралельна площині, – динамічно. Коли автомашина проїжджає опуклий міст (рис. 17), її сила тяжіння виявляється частково динамічно як доцентрова сила, а частково статично як сила тиску на міст. Тому сила тиску автомашини на опуклий міст менша від її сили тяжіння до Землі.

Співвідношення між статичним і динамічним проявами сили тяжіння можна проілюструвати на такому прикладі. Нехай в кабіні

ліфта пасажир стоїть на площадці пружинних терезів (рис. 18). У нерухомому положенні вага пасажера 588 Н. Що показуватимуть терези, коли кабіна опускатиметься?

Відповідаючи на це запитання, слід указати на статичний прояв сили тяжіння, для чого треба визначити спочатку її динамічний прояв. Розглянемо деякі можливі випадки:

1) коли кабіна рівномірно опускається ( $v = \text{const}$ ), динамічний прояв сили тяжіння дорівнює нулю, тому терези показують 588 Н;

2) якщо кабіна опускається із прискоренням, наприклад,  $4,9 \text{ м/с}^2$ , то динамічний прояв сили тяжіння дорівнюватиме 294 Н, а статичний  $588 - 294 = 294 \text{ Н}$ . Таку силу показуватимуть терези;

3) якщо кабіна опускатиметься із прискоренням  $9,8 \text{ м/с}^2$ , то вся сила тяжіння проявлятиметься динамічно; тому терези показуватимуть нуль.

Випадки, в яких сила тяжіння тіла повністю проявляється динамічно, називають *станом невагомості тіла*. Це буває, коли тіло вільно падає, рухається по вертикальній петлі (у верхній точці), а також під час руху штучних супутників Землі. Стан невагомості для людини незвичний. Стоячи на підлозі, вона не відчуває звичайного напруження ніг; піднімаючи руку або предмет, не відчуває звичайних зусиль. У непідготовленої людини це може спричинити психічні та фізіологічні розлади, проте польоти космонавтів показали, що у стані невагомості підготовлена людина може почувати себе добре і виконувати різні види робіт.

За характером взаємодії в механіці розрізняють три типи сил: *пружні сили, сили тертя та сили тяжіння*. Сили перших двох типів виникають від взаємодії тіл унаслідок дотику; сили тяжіння проявляються унаслідок взаємодії тіл на відстані через особливе гравітаційне поле, що існує як окремий вид матерії навколо кожного тіла.

Із викладеного випливає, що не можна плутати вагу тіла із силою тяжіння. Вага тіла – це тільки складова сили тяжіння, що проявляється статично. *Вагою тіла* називають силу  $\vec{G}$  (рис. 19), з якою тіло діє на нерухому відносно нього горизонтальну підставку або на нерухомий відносно нього підвіс. Вага тіла прикладається до опор і може істотно змінюватися залежно від їх руху. На розглянуте тіло, крім сили тяжіння  $m\vec{g}$ , діє реакція опори  $\vec{N}$ ; тому основне рівняння динаміки для нього матиме



Рис. 18



ВИГЛЯД

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Наведемо типові приклади розв'язування задач з динаміки.

**Приклад 1.** Горизонтальний струмінь води з поперечним перерізом  $4 \text{ см}^2$  б'є зі швидкістю  $5 \text{ м/с}$  у вертикальну стіну і вільно стікає по ній вниз. Визначити горизонтальну силу, з якою струмінь діє на стіну.

*Розв'язання.* Застосуємо до деякої незначної частини струменя другий закон механіки у вигляді

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = F.$$

Урахувавши, що  $\Delta(mv) = 0 - mv$  і що за час  $\Delta t$  у стінку вдаряється частина струменя завдовжки  $v\Delta t$  та масою  $m = \rho Sv\Delta t$ , знайдемо

$$\Delta(mv) = -\rho Sv^2 \Delta t.$$

Підставивши зміну імпульсу у вираз сили, дістанемо

$$F = -\frac{\rho Sv^2 \Delta t}{\Delta t} = -\rho Sv^2; \quad F = -4 \text{ Н.}$$

Знак «мінус» указує на те, що сила дії стінки на струмінь напрямлена проти її швидкості. Такою самою за значенням буде сила дії струменя на стінку у горизонтальному напрямі.

**Приклад 2.** На рис. 20 у спрощеному вигляді зображено центрифугу. У пробірці нерухокої центрифуги налили рідину густиною  $1,1 \text{ г/см}^3$  до висоти  $6 \text{ см}$ . Під час обертання центрифуги пробірки займають майже горизонтальне положення. Визначити тиск рідини на дно пробірок під час обертання центрифуги, якщо дно пробірки рухається на відстані  $10 \text{ см}$  від осі обертання і частота обертання центрифуги дорівнює  $20 \text{ с}^{-1}$ .

*Розв'язання.* Розглянемо рідину у пробірці в обертовій системі координат. За цих умов на частинки рідини діють відцентрові сили, які передаються до дна посудини та створюють сумарний тиск на дно.

Виділимо елемент рідини  $dm$  на відстані  $x$  від осі обертання і знайдемо відцентрову силу, що діє на нього,

$$dF = dm \omega^2 x.$$

Оскільки  $dm = \rho S dx$ , маємо  $dF = \rho S \omega^2 x dx$ , а створюваний цією силою тиск

$$dp = \frac{dF}{S} = \rho \omega^2 x dx.$$

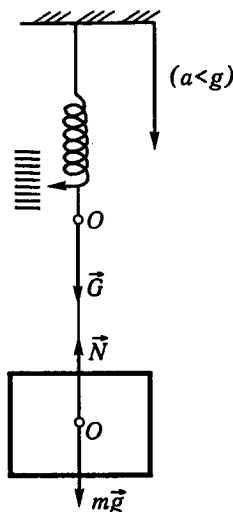


Рис. 19

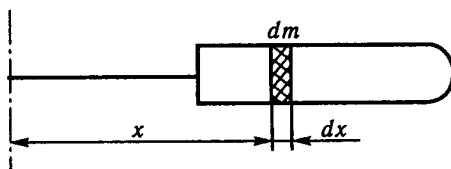


Рис. 20

Сумарний тиск стовпчика рідини на дно пробірки становитиме

$$p = \int_0^{10} \rho \omega^2 x dx; \quad p = 0,72 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Цей вираз тиску відрізняється від виразу тиску стовпчика рідини у полі тяжіння.

**Приклад 3.** Через нерухомий блок перекинуто легку нитку, до кінців якої підвішено два важки однакової маси  $m_1 = m_2 = m$ . На лівий важок покладено переважок масою  $\Delta m$ . Знайти силу тиску переважка на важок і прискорення системи. Масою та тертям блока знехтувати.

**Розв'язання.** Визначаємо діючі сили на кожне з тіл (рис. 21). На важок масою  $m_1$  діють сила тяжіння  $m_1 \vec{g}$ , сила натягу нитки  $\vec{T}_1$ , сила тиску переважка  $\vec{P}$ ; на важок масою  $m_2$  – сила тяжіння  $m_2 \vec{g}$  і сила натягу нитки  $\vec{T}_2$ ; на переважок – сила тяжіння  $\Delta m \vec{g}$  та сила реакції  $\vec{Q}$  з боку основного важка.

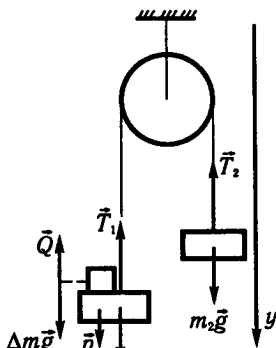


Рис. 21

Записуємо для кожного з тіл рівняння динаміки:

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{P};$$

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2;$$

$$\Delta m \vec{a}_1 = \Delta m \vec{g} + \vec{Q}.$$

Вибираємо вісь  $y$  і переходимо від векторної форми запису рівнянь до скалярної (у проєкціях). При цьому враховуємо, що  $m_1 = m_2 = m$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ,  $T_1 = T_2 = T$ , оскільки масою та тертям блока і масою нитки нехтуємо;  $Q = -P$  за третім законом Ньютона. Тоді

$$ma = mg - T + P;$$

$$-ma = mg - T;$$

$$\Delta ma = \Delta mg - Q.$$

Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо

$$a = \frac{\Delta mg}{2m + \Delta m};$$

далі знайдемо

$$P = \frac{2m\Delta m}{2m + \Delta m} g.$$

## § 15. Закон збереження імпульсу

Одним із найважливіших законів природи є закон збереження імпульсу. Прояви цього закону вперше помітив Р. Декарт, досліджуючи удар двох тіл. Він дійшов висновку, що одне тіло, стикаючись з іншим, передає йому стільки руху, скільки саме при цьому втрачає. Р. Декарт помилково розумів під імпульсом скалярну величину, що дорівнює добутку маси тіла на його швидкість. У 1668 р.

голландський вчений Х. Гюйгенс (1629–1695) уточнив формулювання закону збереження імпульсу, вказавши на векторний характер імпульсу.

Зміст закону збереження імпульсу розкрив І. Ньютон, сформулювавши через зміну цієї величини другий закон механіки. Було з'ясовано, що закон збереження імпульсу під час взаємодії тіл в ізолюваній системі відображається у сутності самих законів механіки. Справді, якщо вступають у взаємодію дві матеріальні точки, що мають маси  $m_1$ ,  $m_2$  і початкові швидкості  $v_1$ ,  $v_2$ , то через час  $\Delta t$  їхні швидкості стануть іншими –  $v'_1$ ,  $v'_2$ . Зміна кількості руху кожної точки визначається за другим законом механіки, а саме:

$$\begin{aligned} m_1 v'_1 - m_1 v_1 &= F_1 \Delta t; \\ m_2 v'_2 - m_2 v_2 &= F_2 \Delta t. \end{aligned}$$

Однак за третім законом механіки

$$F_1 \Delta t = -F_2 \Delta t;$$

тому

$$m_1 v'_1 - m_1 v_1 = -(m_2 v'_2 - m_2 v_2), \quad (1)$$

звідки

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

тобто сумарна кількість руху точок до і після їх взаємодії однакова.

Цей висновок можна поширити на довільну кількість точок ізолюваної системи, оскільки взаємодія будь-якої пари точок за принципом незалежності дії сил відповідатиме рівності (1). Закон збереження імпульсу виражають так:

$$\sum m_i \vec{v}_i = \text{const},$$

тобто при всяких взаємодіях точок ізолюваної системи векторна сума їхніх імпульсів залишається сталою.

Наведемо приклади, що ілюструють закон збереження імпульсу.

1. Коли людина хоче вийти з човна і переміщується у ньому до берега, човен одночасно відходить від берега. Тут імпульс, якого набуває людина, компенсується імпульсом човна. Швидкості руху обох тіл обернено пропорційні їхнім масам; тому чим масивніший човен, тим легше з нього зійти на берег.

2. Імпульс системи гармата–снаряд до та після пострілу має залишатися сталим і дорівнювати нулю. Тому імпульс, якого набуває снаряд, що вилітає зі ствола, компенсується імпульсом гармати протилежного напрямку – її відкочуванням.

У сучасних гарматах зміщується лише ствол, а лафет утримується на місці вкопаними в землю сошниками. При відбої ствола сти-

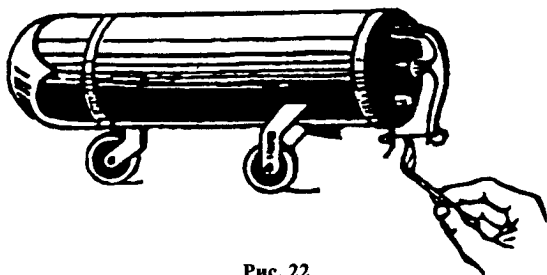


Рис. 22

скається пружина або повітря амортизатора, які потім повертають ствол на місце. В автоматичній зброї відбій використовується для її перезаряджання.

3. На законі збереження імпульсу ґрунтується сучасна реактивна техніка. Рух ракети можна продемонструвати на моделі реактивного візка (рис. 22). Для цього в його балон через нижню трубку з ніпелем нагнітають повітря. У центрі знаходиться реактивне сопло, закрите гумовою пластинкою на важелі, рухомий кінець якого прикріплений ниткою до корпусу візка. Якщо нитку перепалити, то стиснуте повітря із шумом вирветься через сопло, а візок рухатиметься у протилежний бік. Імпульс повітря, що виходить через реактивне сопло, компенсується імпульсом візка.

У справжній ракеті через реактивне сопло виходять газоподібні продукти згоряння заряду ракети. Чим більші сумарна маса і швидкість вилітних газів, тим більшої швидкості набуває ракета. Підвищуючи ці характеристики, досягають значних швидкостей руху ракети. Тому видатний російський вчений К. Е. Цюлковський (1857–1935) стверджував, що єдино можливим засобом для виходу в космос і переміщення у безповітряному просторі є ракета.

## § 16. Принцип відносності Галілея. Межі застосування класичної механіки

З'ясуємо, відносно якої системи відліку справджуються закони механіки. І. Ньютон припускав, що існують абсолютно нерухомий простір та абсолютно незалежний плин часу, відносно яких справджуються ці закони.

Проте ще Г. Галілей поставив принципове для науки питання: чи можна спостереженнями в системі, що перебуває в рівномірному і прямолінійному русі, виявити цей інерціальний рух та визначити його швидкість?

У 1632 р. Г. Галілей з погляду спостерігача, який знаходиться у закритій каюті корабля, довів, що ніякими механічними дослідженнями

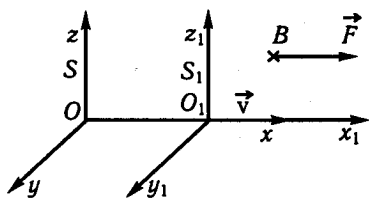


Рис. 23

неможливо з'ясувати, перебуває система в стані спокою чи в стані рівномірного і прямолінійного руху. Адже відомо, що на пароплавах та у вагонах, коли вони рухаються рівномірно і прямолінійно, досліди відбуваються так само, як тоді, коли вони перебувають у стані спокою.

Усе це привело Г. Галілея, а після нього й І. Ньютона до висновку, що ту чи іншу систему можна лише умовно вважати за нерухому, оскільки її інерціальний рух не можна виявити. У цьому суть *механічного принципу відносності Галілея*. Уже тоді І. Ньютон висловив думку: може виявитися, що насправді не існує тіла в абсолютному спокої, відносно якого можна було б вивчати рухи інших тіл.

Розглянемо докладніше дві системи відліку  $S$  і  $S_1$  (рис. 23), одна з яких ( $S_1$ ) переміщується рівномірно та прямолінійно відносно нерухомої системи  $S$  зі швидкістю  $v$  у напрямі осі  $Ox$ . Нехай у момент часу  $t = 0$  обидві системи координат суміщалися. З переходом від системи  $S_1$  до  $S$  галілеєві формули перетворення координат матимуть такий вигляд:

$$x = x_1 + vt; \quad y = y_1; \quad z = z_1; \quad t = t_1. \quad (1)$$

Узявши похідні координат точки за часом, дістанемо співвідношення проєкцій швидкостей і правило додавання швидкостей переносного та відносного рухів точки:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + v; \quad \dot{y} = \dot{y}_1; \quad \dot{z} = \dot{z}_1; \quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{v}. \quad (2)$$

Припустимо, що в системі  $S$  у напрямі осі  $Ox$  на тіло  $B$  діє сила  $F$ . Порівняємо її з діючою силою в системі  $S_1$ :

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2 (x_1 + vt)}{dt_1^2} = m \frac{d^2 x_1}{dt_1^2} = F_1.$$

Значення діючої сили (і прискорення руху точки) в системі  $S_1$ , що переміщується рівномірно та прямолінійно відносно системи  $S$ , таке саме, як у системі  $S$ .

У системі  $S_1$  справджуватимуться також закон інерції та третій закон механіки.

Зако́ни механіки Ньютона не справджуватимуться у системі  $S_1$ , якщо вона рухатиметься відносно системи  $S$  із прискоренням.

Астрономічні спостереження й обчислення показують, що зако́ни механіки Ньютона справджуються у системах координат, пов'язаних із Сонцем або іншими зірками всесвіту (Сонце рівномірно

прямолинійно переміщується зі швидкістю 18 км/с в напрямі сузір'я Геркулеса). На коротких проміжках часу закони з достатньою практичною точністю справджуються у системі, пов'язаній із Землею. Проте, оскільки Земля рухається навколо Сонця та обертається навколо своєї осі, її не можна віднести до інерціальних систем; але для малих проміжків часу і багатьох практичних задач з механіки її можна вважати інерціальною. Наприклад, Земля за 30 хв руху навколо Сонця проходить дугу близько  $1'$ , тому на цій ділянці її рух можна вважати прямолинійним та рівномірним (більше впливатиме на відхилення від законів механіки добове обертання Землі навколо своєї осі). Названі системи можна віднести до інерціальних. Інерціальною буде також усяка інша система, яка відносно іншої інерціальної перебуватиме у прямолинійному і рівномірному русі.

Класична механіка, що ґрунтується на законах Ньютона, з достатньою точністю справджується лише для макроскопічних тіл і тільки тоді, коли швидкості їхніх рухів малі порівняно зі швидкістю світла ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с).

Точніші спостереження над деякими небесними тілами, швидкості яких дуже великі, наприклад над планетою Меркурій, швидкість якої досягає 100 км/с, а особливо вивчення рухів прискорених заряджених частинок у ядерній фізиці показали різючі відхилення від «істин» класичної механіки. У механіці великих швидкостей виявляються складніші закономірності, їх відображає теорія відносності Ейнштейна.

У теорії відносності, про яку докладніше йтиметься далі, розкрито сучасні погляди щодо понять простору й часу. Якщо у класичній фізиці простір і час уявлялися абсолютними та незалежними від тіл і їхніх рухів, то в теорії відносності простір і час – категорії, які залежать від тіл та їхніх рухів. У зв'язку з цим формули перетворення координат Галілея (1) втрачають зміст і поступаються місцем формулам Лоренца.

Класична механіка виявилася непридатною для опису властивостей мікроструктур та поведінки елементарних частинок – фотонів, електронів, протонів, нейтронів тощо. У характеристиках мікрочастинок проявляються деякі абсолютні міри – певна маса, електричний заряд, момент імпульсу, стала Планка і т. д. Нерідко в рухомих елементарних частинок виразно проявляються хвильові властивості

(хвиля де Бройля  $\lambda = \frac{h}{mv}$ ). У таких випадках переміщення елементарних частинок ближче до поширення хвилі, ніж до руху частинок по траєкторії. Такі характеристики матеріальної точки, як її координати та траєкторія руху, якими оперує класична механіка, втрачають зміст, коли розглядати елементарні частинки з їхніми хвильовими властивостями. Особливості мікросвіту описуються квантовою механікою.

## § 17. Рух тіл зі змінною масою. Рівняння Мещерського

Класичним прикладом руху тіла змінної маси вважається рух важкого ланцюга, який спадає вниз із горизонтальної підставки так, що весь час падають усе нові його ланки. Як приклад руху тіл із змінною масою можна назвати рух автоцистерни, коли з неї поливають вулицю, рух аеростата, коли з нього викидають баласт, рух ракет, реактивних літаків і реактивних снарядів, розмотування руло-ну паперу або намотування ниток; змінною є маса Сонця – вона збільшується через захоплення космічного пилу та зменшується унаслідок випромінювання.

Знайдемо основне рівняння динаміки поступального руху тіла змінної маси. Виходячи з другого закону Ньютона, згідно з яким усяка зміна імпульсу системи є результатом дії зовнішньої сили,

$$d\vec{K} = \vec{F}dt. \quad (1)$$

Для конкретності під рухом тіла змінної маси розумітимемо найпростіший рух ракети, а також вважатимемо, що її маса змінюється неперервно, без стрибків і вихід продуктів згоряння не змінює центра маси ракети. Іншими словами, під ракетою уявлятимемо матеріальну точку змінної маси.

Нехай у момент часу  $t$  маса ракети була  $m$ , а її швидкість відносно нерухомої системи координат –  $\vec{v}$ ; нехай за час  $dt$  з ракети вилітають продукти згоряння масою  $dm$  зі швидкістю  $\vec{w}$ .

У результаті за час  $dt$  маса ракети буде  $m - dm$ , а її швидкість становитиме  $\vec{v} + d\vec{v}$ .

Застосуємо до ракети рівність (1). Зважаючи, що в момент часу  $t$  імпульс ракети дорівнював  $m\vec{v}$ , а в момент  $(t + dt)$  він буде  $(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm\vec{w}$ , дістаємо

$$(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm\vec{w} - m\vec{v} = \vec{F}dt. \quad (2)$$

Якщо у виразі (2) перемножити члени в дужках і знехтувати членом другого порядку малості  $dm d\vec{v}$ , то матимемо

$$m d\vec{v} + (\vec{w} - \vec{v})dm = \vec{F}dt. \quad (3)$$

Якщо останню рівність поділити на  $dt$  та врахувати, що для ракети  $\frac{dm}{dt} < 0$ , оскільки у польоті маса її зменшується, і перегрупувати члени, то дістанемо таке рівняння:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{w} - \vec{v}) \frac{dm}{dt}. \quad (4)$$

Це рівняння, виведене російським ученим І. В. Мещерським (1859–1935), є основним рівнянням динаміки поступального руху тіла змінної маси. У його правій частині  $\vec{F}$  – рівнодійна зовнішніх сил, що діють на ракету (сили тяжіння та опору середовища); другий член виражає реактивну силу, що діє на ракету з боку газів, які вилітають. Отже, за рівнянням Мещерського добуток маси ракети на її прискорення у будь-який момент часу дорівнює векторній сумі рівнодійної зовнішніх сил і реактивної сили, що діють на ракету;  $\vec{w} - \vec{v} = \vec{u}$  – швидкість вилітання газів відносно ракети.

Увівши нове позначення цієї швидкості в рівняння (4), дістанемо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt}. \quad (5)$$

При  $\frac{dm}{dt} = 0$  рівняння (5) переходить у вираз другого закону Ньютона в разі сталої маси.

## § 18. Системи одиниць

Вимірювання будь-якої величини зводиться до порівняння її з однорідною величиною, взятою за одиницю. Міри різних величин потрібні для наукових досліджень та економічного й культурного спілкування народів. Міжнародна метрична система мір є наслідком реформ Великої Французької революції.

У 1791 р. на пропозицію спеціальної комісії Французької академії наук, до складу якої входили такі визначні вчені, як П. С. Лаплас, Ж. Л. Лагранж, Г. Монж та ін., за одиницю довжини було взято одну десятимільйонну частку паризького меридіана, а для системи одиниць – десяткову основу. Комісія усвідомлювала, що взяті з природи одиниці та зручна десяткова основа мір дістануть міжнародне визнання.

Для визначення метра було виміряно довжину дуги меридіана  $9^{\circ}40'$  між містами Дюнкерком і Барселоною (близько 1000 км). Потім із платиноїридієвого сплаву було виготовлено еталон метра.

Еталон кілограма – одиниці маси, що дорівнює масі 1  $\text{дм}^3$  води за температури  $4^{\circ}\text{C}$ , виготовили з того самого сплаву.

У 1875 р. в Парижі 17 країн, у тому числі й Росія, підписали Метричну конвенцію.

У 1889 р. з нагоди 100-річчя Великої Французької революції було виготовлено 34 копії метра та 43 копії кілограма. Перша Генеральна конференція мір і ваг затвердила їх як національні еталони для держав Метричної конвенції.

З того часу вченими багатьох країн проведено значну науково-дослідну роботу з удосконалення та уточнення мір. Зокрема, було



помічено, що металеві еталони метра з часом зазнають деяких непередбачених змін. Еталон метра довелося порівняти з певною довжиною світлової хвилі.

*Метр* дорівнює довжині шляху, який проходить у вакуумі світло за  $1/299\,792\,458$  частки секунди.

Виявлено, що період добового обертання Землі, взятий за еталон часу, не залишається сталим. З 1872 до 1903 р. середня тривалість доби збільшилася на 0,07 с, а з 1903 до 1934 р. вона зменшилася на 0,005 с, після чого знову зростає. Довелося вибрати більш надійний еталон частоти і часу у вигляді цезієвого генератора та через нього дати означення секунди.

*Секунда* є час, що дорівнює  $9\,192\,631\,770$  періодам випромінювання, яке відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію-133.

Одиницею маси є кілограм, представлений масою міжнародного прототипу кілограма.

У фізиці доводиться вимірювати багато різних величин. Усі вони відображають властивості матерії, її рух і тому перебувають у певних залежностях. Виходячи з цього, німецький вчений К. Ф. Гаусс (1777–1855) у 1832 р. дійшов висновку, що коли вибрати довільно одиниці для деяких найуживаніших величин, наприклад довжини, маси та часу, то для решти величин можна знайти похідні одиниці, і так дістати систему одиниць.

Втілюючи ідею К. Ф. Гаусса, Міжнародний конгрес електриків у 1881 р. прийняв систему одиниць СГС, основними в якій були такі: одиниця довжини – сантиметр, одиниця маси – грам, одиниця часу – секунда.

Пізніше з'явилися системи з іншими основними одиницями, більш уживаними – метром, кілограмом, секундою, ампером (МКСА) та ін. У певних галузях науки і техніки перевага надавалася одній системі одиниць, в інших – іншій, але в цілому це створювало значні труднощі у переведеннях результатів вимірювання та різних констант з однієї системи в іншу. Відчувалась потреба у створенні єдиної системи одиниць.

Після тривалої підготовчої роботи на XI Генеральній конференції мір і ваг у 1960 р. було прийнято Міжнародну систему одиниць (СІ), яка має сім основних одиниць (табл. 1).

Істотною перевагою цієї системи є те, що вона охоплює і пов'язує найзручніші для практики одиниці механічних, теплових, електричних, світлових та інших величин (їх розглянуто у відповідних розділах посібника).

Похідні одиниці швидкості та прискорення в системі СІ – метр за секунду (м/с) і метр за секунду у квадраті (м/с<sup>2</sup>). Одиницею сили є ньютон (Н). Цю одиницю визначено за формулою другого закону

Таблиця 1

Величина	Одиниця	Скорочене позначення	
		українське	міжнародне
Довжина	метр	м	m
Маса	кілограм	кг	kg
Час	секунда	с	s
Термодинамічна температура	кельвін	К	K
Сила електричного струму	ампер	А	A
Сила світла	кандела	кд	cd
Кількість речовини	моль	моль	mol

механіки:  $F = ma$  за умови, що  $m = 1$  кг,  $a = 1$  м/с<sup>2</sup>, тобто

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2.$$

*Ньютон* – це сила, яка масі 1 кг надає прискорення 1 м/с<sup>2</sup> у напрямі дії сили.

З 01.01.99 в Україні чинні ДСТУ 3651.0–97 «Метрологія. Одиниці фізичних величин. Основні одиниці фізичних величин Міжнародної системи одиниць. Основні положення, назви та позначення» і ДСТУ 3651.1 – 97 «Метрологія. Одиниці фізичних величин. Похідні одиниці фізичних величин Міжнародної системи одиниць та позасистемні одиниці. Основні поняття, назви та позначення».

Цими стандартами визначено обов'язкове використання одиниць СІ та допущених одиниць нарівні з ними як у науково-технічній літературі, так і в навчальному процесі закладів освіти всіх рівнів.

Зазначимо, що крім одиниць СІ допускаються:

а) дуже поширені одиниці – тонна; хвилина, година, доба; кутові градус, мінута, секунда; літр; градус Цельсія;

б) у спеціальних галузях – астрономічна одиниця, світловий рік, парсек (у астрономії); електрон-вольт, діоптрія, атомна одиниця маси (у фізиці); вольт-ампер, вар (в електротехніці); гектар (у сільському і лісовому господарстві) та ін.

## § 19. Сили пружних деформацій

При розв'язуванні механічних задач, зокрема при складанні рівняння динаміки, необхідно враховувати особливості наявних діючих сил. У різних розділах посібника докладно розглянуто всі відомі у природі елементарні взаємодії: сильні (ядерні), електромагнітні, слабкі й гравітаційні.

У механічних явищах домінуючими є сили пружних деформацій, сили тертя і гравітаційні сили. Перші два види сил мають електромагнітну природу. Будь-які тіла взаємодіють через їх дотик або певне матеріальне середовище між ними, яке називають *полем*. Електромагнітні взаємодії здійснюються за допомогою електромагнітного поля, гравітаційні – гравітаційного поля. Взаємодії тіл на відстані без проміжного матеріального середовища між ними неможливі.

Кожне тверде тіло під дією зовнішньої сили зазнає певної деформації, тобто зміни розмірів або форми. Різновиди деформацій залежать від характеру зовнішньої дії. Найзагальнішими з них є деформації *розтягу, стиску, зсуву, кручення*.

**Деформація розтягу.** Найпростішу деформацію розтягу можна здійснити на довгому стрижні, якщо один кінець його закріпити, а до другого прикласти розтяжну силу  $\vec{F}_n$  (рис. 24, а). Під дією цієї сили стрижень подовжиться на  $\Delta l$ . Деформацію розтягу можна відобразити графічно, якщо, наприклад, на осі абсцис відкласти видовження тіла, а на осі ординат – діючу силу (рис. 25).

На графіку можна виділити такі області:  $OA$  – область пружних деформацій, тобто таких, які повністю зникають після припинення дії зовнішньої сили;  $AB$  – область залишкових деформацій;  $BC$  – область плинності перед руйнуванням тіла. У різних тілах ці області деформацій мають різну відносну протяжність. За цією ознакою тіла умовно поділяють на *пружні* й *пластичні*. Умовно, бо в кожному тілі при переході певної діючої сили виникають стани залишкових деформацій; крім того, властивості тіл істотно залежать від тиску, температури, оброблення. Наприклад, пружна сталь під великим тиском стає пластичною, а пластичний свинець за дуже

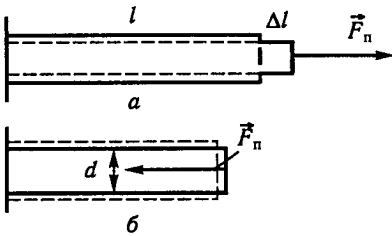


Рис. 24

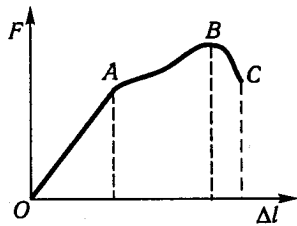


Рис. 25

низьких температур – досить пружним; для зміни властивостей сталі її гартують або відпускають, вводять домішки – хром, нікель, молібден тощо. Пружні властивості тіл залежать від тривалості деформації: пружина, що довгий час буде в деформованому стані, може «засвоїти» цей стан – зберігати його після усунення зовнішніх дій.

У процесі здійснення пружної деформації виникають внутрішні сили, які намагаються надати тілу попередніх розмірів і форми. Їх називають *повертальними*, або *пружними*, *силами*. За законом Гука, *сили, що виникають при пружній деформації, прямо пропорційні їй і напрямлені в бік її зменшення*:

$$F = -kx, \quad (1)$$

де  $k$  – коефіцієнт жорсткості тіла;  $x$  – значення пружної деформації.

Витоки наведених особливостей механіки деформацій криються у внутрішній кристалічній будові твердих тіл. Не вдаючись до подробиць, зазначимо, що складові мікрочастинки твердих тіл – атоми, молекули, іони – утворюють різноманітні симетричні структури (кристалічні ґратки). Мікрочастинки займають у ґратці стійкі положення рівноваги, які називають *вузлами ґратки*. Утворення стійких станів рівноваги забезпечується одночасним існуванням між частинками сил притягання і сил відштовхування з різними їх залежностями від відстані  $r$  між частинками (рис. 26). У стані рівноваги частинок на відстані  $r_0$  ці сили компенсуються; у разі зменшення відстані між розглянутими частинками переважною стає сила відштовхування, а в разі збільшення відстані – сила притягання.

На рис. 26 показано круте зростання сили відштовхування між частинками (при  $r < r_0$ ); отже, розкрито причину утруднення деформації стиску тіла. На кривій виділяється лише незначна прямолінійна ділянка в околі положення рівноваги частинки. З цього випливає, що чинність закону Гука має певні межі. У разі надмірних зовнішніх зусиль будуть виникати необоротні зміщен-

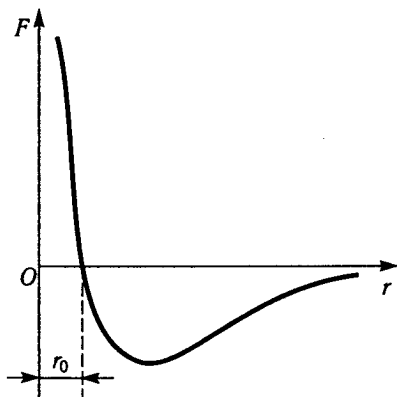


Рис. 26

ня частинок кристалічної ґратки – пластичні деформації.

Розглянемо кількісне оцінювання пружної деформації розтягу. З досліду можна визначити, що при наявній діючій силі видовження стрижня  $\Delta l$  буде різним залежно від його початкової довжини; отже, для характеристики деформації потрібно оперувати відносним видовженням

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon.$$

Для стрижнів різного перерізу відносне видовження залежить не тільки від діючої сили, а й від площі перерізу стрижня. Тому результат деформації необхідно зрівнювати з відношенням діючої сили до площі поперечного перерізу стрижня

$\frac{F_n}{S} = \sigma_n$ ; цю величину називають *механічним напруженням*. Його іменують *нормальним*, якщо сила направлена нормально до поверхні зразка, і *тангенціальним*, якщо сила дотична до цієї поверхні.

Нами окреслено методику дослідного оцінювання внутрішніх сил пружної деформації за вимірами зовнішніх діючих сил та розмірів зразка. Суть полягає в тому, що при будь-якій деформації результуюча внутрішніх пружних сил, що виникають у статичному стані тіла, чисельно дорівнює прикладеній до нього зовнішній силі. Знайдений таким чином закон Гука стверджує: напруження пружної деформації розтягу пропорційне відносному видовженню зразка:

$$\sigma_n = E \frac{\Delta l}{l}, \quad (2)$$

де  $E$  – модуль пружності, що залежить від речовини стрижня і його фізичного стану. Цей модуль був уведений англійським ученим Т. Юнгом (1773–1829) і дістав його ім'я.

Поклавши у виразі (2)  $\frac{\Delta l}{l} = 1$ , знайдемо, що модуль Юнга чисельно дорівнює напруженню, яке виникло б у разі збільшення довжини зразка у 2 рази за інших незмінних умов. Насправді майже всі матеріали розриваються раніше, ніж вони будуть видовжені вдвічі (виняток – гума).

Величина  $\alpha = \frac{1}{E}$  називається *коефіцієнтом пружності* в деформації розтягу; вона також є характеристикою матеріалу стрижня.

**Деформація стиску.** Однобічну деформацію стиску можна здійснити на стрижні, якщо один кінець його закріпити, а до другого прикласти стискну силу  $F_n$ , яка створює напруження  $\sigma_n$  (рис. 24, б). Закон Гука для такої пружної деформації виражають через відносне потовщення стрижня  $\frac{\Delta d}{d}$ , а саме:

$$\sigma_n = \frac{1}{\beta} \frac{\Delta d}{d}, \quad (3)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт однобічного стиску.

Зважаючи на неодмінне поєднання деформацій розтягу та стиску, деформація поздовжнього розтягу або стиску супроводиться зміною поперечних розмірів стрижня і характеризується коефіцієнтом

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (4)$$

уведеним французьким ученим С. Д. Пуассоном (1781–1840).

Для більшості однорідних та ізотропних тіл (металів)  $\mu \approx \frac{1}{4}$ .

**Деформація зсуву.** Ця деформація полягає в зміщенні одних шарів тіла відносно інших. Це можна спостерігати на бруску, якщо його нижню частину закріпити, а до верхньої прикласти тангенціальну силу  $F_t$  (рис. 27). У цій деформації  $bb'$  – абсолютний зсув,  $\psi = \frac{bb'}{d}$  – відносний зсув.

Закон Гука тут записують так:

$$\sigma_\tau = G\psi, \quad (5)$$

де  $G$  – модуль зсуву, що залежить від властивостей матеріалу. Для більшості однорідних та ізотропних тіл (металів)  $G \approx 0,4E$ .

**Деформація кручення.** Якщо стрижень циліндричної форми з одного кінця закріпити, а до іншого прикласти момент сил  $\vec{M}$ , то стрижень зазнає деформації кручення (рис. 28). Деформації кручення зазнають вали різних двигунів і верстатів. Кут закручування  $\phi$  в цій деформації змінюється від нуля до деякого найбільшого значення; ним визначають абсолютне кручення,  $\phi/b$  – відносне кручення. Для пружного кручення закон Гука набирає

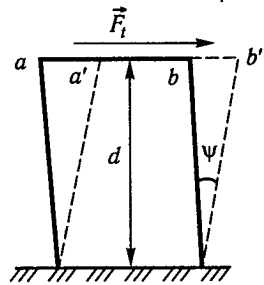


Рис. 27

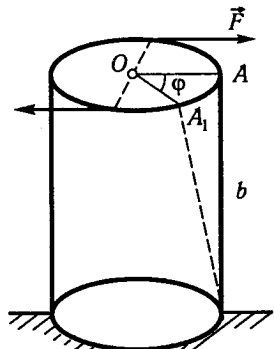


Рис. 28

вигляду

$$M = D \frac{\varphi}{b}, \quad (6)$$

де  $D$  – модуль кручення стрижня або дротини.

На відміну від попередніх характеристик пружних властивостей матеріалів  $E$ ,  $G$ ,  $\mu$  модуль кручення залежить не лише від матеріалу зразка, а й від радіуса  $R$  та довжини  $b$  циліндра. Модуль кручення пов'язаний з модулем зсуву співвідношенням

$$D = \frac{\pi R^4}{2 b} G. \quad (7)$$

Ми розглянули основні види і характеристики пружних деформацій.

Для повнішої характеристики пружних властивостей матеріалів, крім модуля пружності, треба ще знати границю пружності та границю міцності (табл. 2).

**Приклад.** З вежі заввишки  $h = 30$  м звисає сталевий дріт діаметром  $d = 2$  мм. Визначити, як зміниться довжина дроту, якщо до нього підвісити вантаж масою  $m = 60$  кг. Чи виникатиме залишкова деформація, якщо зняти вантаж? Визначити найбільшу масу вантажу, за якої дріт не розривається.

**Розв'язання.** Виводження дроту визначимо за законом Гука:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \sigma_n, \quad (1)$$

де  $\sigma_n = \frac{mg}{s}$ ;  $s = \frac{\pi d^2}{4}$ . Звідси

$$\Delta l = \frac{1}{E} \frac{4mg}{\pi d^2}.$$

Оскільки  $E = 22 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, маємо

$$\Delta l = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Щоб з'ясувати, чи виникатиме залишкова деформація, потрібно порівняти діюче напруження з границею пружності сталі  $\sigma_n = 6 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>. Діюче напруження

$$\sigma = \frac{4mg}{\pi d^2}; \quad \sigma = 1,87 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2.$$

Оскільки  $\sigma < \sigma_n$ , залишкової деформації не буде.

Таблиця 2

Матеріал	Модуль Юнга, 10 <sup>10</sup> Н/м <sup>2</sup>	Границя пружності, 10 <sup>7</sup> Н/м <sup>2</sup>	Границя міцності, 10 <sup>7</sup> Н/м <sup>2</sup>
Свинець	1,8	0,25	2
Мідь	10,0	3,00	20
Сталь:			
вуглецева	20,0	33,00	75
молібденова	22,0	60,00	150

Для визначення граничної маси  $M$  вантажу скористаємося умовою

$$\frac{4Mg}{\pi d^2} = \sigma_M,$$

де  $\sigma_M = 15 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  – границя міцності молібденової сталі.  
Тоді

$$M = \frac{\pi d^2 \sigma_M}{4g}; \quad M = 481 \text{ кг.}$$

## § 20. Сили тертя

Сили, що виникають під час руху одних тіл або їхніх частин по поверхні інших та істотно впливають на їх відносне переміщення, називаються *силами тертя*. Вони напрямлені тангенціально до взаємодіючих поверхонь, можуть виступати в ролі гальмівних і рушійних сил.

Розрізняють зовнішнє (сухе) та внутрішнє тертя. *Сухим тертям* називають взаємодію твердих тіл у місцях їх дотику. Ця взаємодія зводиться до деформацій і молекулярних зчеплень у частинах тіл, що стикаються. Сухе тертя, яке виникає між рухомими тілами, називається *кінематичним*, а сухе тертя між взаємно нерухомими тілами – *тертям спокою*. Останнє проявляється в тому, що для приведення в рух одного з тіл до нього треба прикласти зовнішню силу  $F < F_0$ , де  $F_0$  – максимальна сила тертя спокою. Тертя спокою широко використовується в пасових передачах та фрикційних муфтах для передавання зусиль від одних деталей машин до інших. У транспортних засобах між ведучими колесами і трасою воно є рушійною силою.

У разі руху твердих тіл розрізняють *тертя ковзання* (рис. 29) і *тертя кочення* (рис. 30). У першому наближенні вважають, що ці сили тертя прямо пропорційні силі нормального тиску  $P_n$  на тертьові поверхні й не залежать від швидкості руху тіл. Тому силу тертя ковзання виражають так:

$$F_T = k' P_n, \quad (1)$$

де  $k'$  – коефіцієнт тертя ковзання (безрозмірна величина, що залежить від виду тіл і стану поверхні).

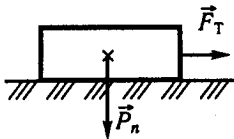


Рис. 29

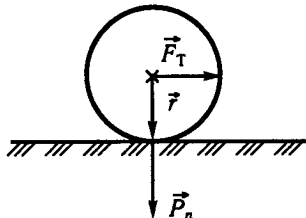


Рис. 30



Силу тертя кочення виражають у вигляді

$$F_T = k'' \frac{P_n}{r}, \quad (2)$$

де  $k''$  – коефіцієнт тертя кочення, що має розмірність довжини і залежить від роду тіл;  $r$  – радіус тіла кочення.

Точніші дослідження показали, що сила сухого тертя дещо залежить від швидкості (рис. 31). При малих швидкостях вона майже незмінна, із збільшенням швидкості в деякому інтервалі сила тертя зменшується, а потім зростає.

Зменшення шорсткості поверхонь із метою послаблення сил тертя показало, що при дуже гладеньких поверхнях тіл сили тертя ковзання не зменшуються, а, навпаки, зростають. У разі щільного дотику поверхонь істотно проявляються атомно-молекулярні сили зчеплення. Російський вчений Б. П. Дерягін довів, що в таких випадках необхідно використовувати двочленний вираз закону тертя ковзання:

$$F_T = k(P_n + Sp_0),$$

де  $k$  – справжній коефіцієнт тертя;  $S$  – сумарна площа взаємодіючих поверхонь між тілами;  $p_0$  – додатковий тиск, обумовлений силами молекулярного притягання.

Щоб зменшити сухе тертя між деталями машин, використовують підшипники (для заміщення процесу ковзання на кочення) та рідкі мастила, однак у разі застосування останніх слід урахувувати коефіцієнт внутрішнього тертя.

*Внутрішнім* називають тертя між шарами рідин і газів. До нього зводиться також тертя на межі твердих тіл з рідинами та газами, оскільки в такому контакті поверхня твердого тіла вкрита шаром прилиплої рідини або газу.

Механізм виникнення внутрішнього тертя такий. Коли рідина протікає по трубці, швидкість шару прилипання до стінок дорівнює нулю, а з віддаленням від стінок до осі швидкість рідини поступово збільшується (рис. 32). Там одні шари рідини немовби ковзають по поверхні інших. Так виникає сила внутрішнього тертя.

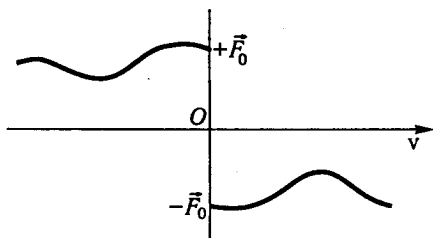


Рис. 31

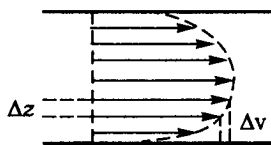


Рис. 32

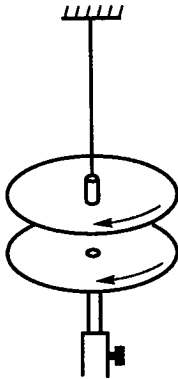


Рис. 33

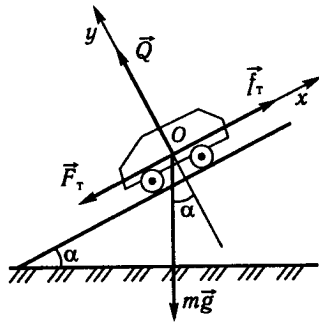


Рис. 34

Сила внутрішнього тертя є результатом дії сил молекулярного зчеплення на межі двох шарів і переходу молекул з одного шару в інший. Такий перехід, особливо в газах, відбувається унаслідок теплового хаотичного руху, але при цьому молекули переносять певну кількість руху шару. Тому кількість руху шару, який має більшу швидкість, зменшується, а шару, що має меншу швидкість, відповідно збільшується. За другим законом механіки зміна кількості руху шару рідини за одиницю часу визначає силу, що діє на нього, тобто силу внутрішнього тертя.

Передавання руху між шарами рідини або газу можна спостерігати на досліді з двома дисками (рис. 33). Коли нижній диск привести в обертання, то через якийсь час почне обертатися й верхній. Якщо верхній диск підвісити на пружній нитці, то за кутом закручування нитки можна зробити висновок про силу внутрішнього тертя в середовищі між дисками.

**Приклад 1.** Автомобіль масою  $m$ , рухаючись по похилій площині вниз, кут нахилу якої  $\alpha$ , на шляху  $\Delta s$  збільшує свою швидкість від  $v_0$  до  $v$ . Вважаючи, що коефіцієнт гальмівного тертя дорівнює  $k$ , знайти силу рушійного тертя.

**Розв'язання.** Зазначимо, що сила рушійного тертя  $\vec{f}_T$  виникає під час взаємодії ведучих коліс із поверхнею землі; тертя неведучих коліс  $\vec{F}_T$  — гальмівне. Крім цих сил, на автомобіль діють сила тяжіння  $m\vec{g}$  та сила реакції гори  $\vec{Q}$  (рис. 34). Рух автомобіля описується за другим законом механіки:

$$m\vec{a} = \vec{f}_T + \vec{F}_T + m\vec{g} + \vec{Q}.$$

Якщо розглядати рух автомобіля в системі координат, вісь  $Ox$  якої паралельна, а вісь  $Oy$  перпендикулярна до його швидкості, то у проєкціях на координатні осі дістанемо

$$ma_x = f_T - mg \sin \alpha - F_T; \quad ma_y = Q - mg \cos \alpha.$$

Ураховуючи, що  $a_y = 0$ , маємо  $Q = mg \cos \alpha$ . Тоді

$$F_T = kQ = kmg \cos \alpha; \quad a_x = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta s},$$

так що

$$m \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta s} = f_T - mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha,$$

звідки

$$f_T = mg \sin \alpha + kmg \cos \alpha + m \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta s}.$$

Знайдений вираз показує, що справді сила рушійного тертя автомобіля долає складову сили тяжіння, паралельну похилій площині та напрямлену вниз, силу гальмівного тертя і, нарешті, надає автомобілю прискорення.

**Приклад 2.** Тіло масою  $m$ , рухаючись зі швидкістю  $v_0$ , потрапляє у в'язке середовище. На нього починає діяти сила внутрішнього тертя, пропорційна швидкості руху. Знайти закон гальмування тіла.

*Розв'язання.* Знаючи діючу силу, записуємо рівняння динаміки

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Розділяючи змінні, дістаємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt.$$

Ураховуючи початкові умови, проводимо інтегрування

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt.$$

Звідси знаходимо закон гальмування

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де  $\frac{m}{k} = \tau$  – характерний для системи час, який називають *часом релаксації*.

## § 21. Сили тяжіння

Учення про *сили тяжіння (гравітаційні сили)* формувалося у тісному зв'язку з пізнанням будови навколишнього світу.

**Закони Кеплера.** Видимий рух Сонця зі сходу на захід і видимий рух Місяця та зірок відносно горизонту наводили людей на думку, що всі небесні світила рухаються навколо нерухомої Землі. З цих уявлень склалося геоцентричне вчення про будову всесвіту, виразником якого був александрійський вчений К. Птолемей (100–178).

Спостереження показали, що при добових обертаннях Землі розташування зірок залишається незмінним, а планети на зоряному небі переміщуються і раз на рік описують петлю. Для пояснення петлеподібних рухів планет К. Птолемей припускав, що кожна

планета рівномірно рухається по малому колу – епіциклу, центр якого, у свою чергу, рухається по великому колу навколо Землі.

Дедалі все точніші спостереження за рухом планет важче було узгоджувати з ученням К. Птолемея, на сторожі якого стояла католицька церква (це вчення не суперечило Біблії).

Першим революційним актом, що проголошував новий світогляд і викривав догми церкви, було видання у 1543 р. безсмертного твору «Про обертання небесних тіл» польського астронома М. Коперника (1473–1543). У ньому розвивалося учення про Сонячну систему та пояснювалося: що добове обертання небозводу із сходу на захід є явищем позірним і що насправді Земля обертається навколо своєї осі у протилежному напрямі; що річне переміщення Сонця між зірками також позірне, бо насправді Земля обертається протягом року навколо Сонця; що планети, як і Земля, обертаються навколо Сонця і чим далі планета від Сонця, тим повільніше вона переміщується; що петлеподібний рух планет позірний та зумовлюється поєднанням руху спостерігача разом із Землею у просторі зі справжнім рухом планети навколо Сонця по коловій орбіті (рис. 35, літерами  $T$  і  $P$  позначено справжні положення Землі та Марса,  $B$  – позірні положення Марса). У цій праці наводилися дані про відстань планет від Сонця, нахил осі Землі до площини орбіти тощо.

Учення М. Коперника переслідували церковники. Вони чинили ганебні розправи над його послідовниками, зокрема, спалили на вогнищі італійського філософа Дж. Бруно (1548–1600), переслідували Г. Галілея. Проте, як зазначав пізніше Ф. Енгельс, уже з цього часу дослідження природи по суті звільнилось від релігії.

У 1609 р. Г. Галілей побудував телескоп, за допомогою якого відкрив гори на Місяці, чотири супутники Юпітера, фази Венери – світіння її відбитим сонячним світлом, плями на Сонці та його обертання навколо своєї осі. Усе це підтверджувало вчення про геліоцентризм всесвіту.

М. Коперник помилково вважав, що планети обертаються навколо Сонця по колових орбітах. Точніші спостереження за рухом

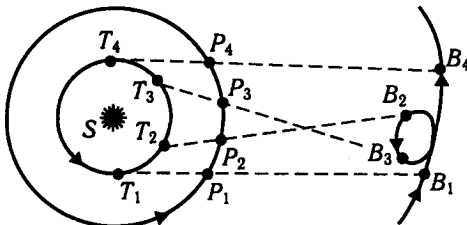


Рис. 35

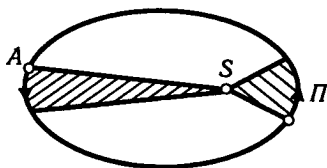


Рис. 36

планет провів датський астроном Т. Браге (1546–1601). Опрацювавши їх, німецький астроном Й. Кеплер (1571–1630) сформулював основні закони рухів планет.

1. Кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце.

2. Радіус-вектор планети за однакові проміжки часу описує однакові площі. З рівності площ (рис. 36) випливає, що поблизу перигелію швидкість планети найбільша, а поблизу афелію – найменша.

3. Квадрати періодів обертань планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їхніх еліптичних орбіт:  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$ .

За цією рівністю визначають великі півосі орбіт планет відносно великої півосі Землі – астрономічної одиниці, що дорівнює 149 500 000 км. Велику піввісь орбіти планети іноді називають середньою відстанню від Сонця, оскільки вона дорівнює півсумі відстаней планети від Сонця в афелії та перигелії.

Еліптичні орбіти планет дуже мало відрізняються від колових. Наприклад, ексцентриситет орбіти Венери дорівнює 0,007, Землі – 0,017, Марса – 0,093 і т. д. Тому у першому наближенні вважатимемо їх коловими.

**Закон всесвітнього тяжіння.** Закони Кеплера відображають основні питання кінематики Сонячної системи. Природу сил, що зумовлюють відомі рухи планет, з'ясовує закон всесвітнього тяжіння. Його відкрив І. Ньютон, проаналізувавши закони Кеплера.

Оскільки планети перебувають в обертальному русі навколо Сонця, на них мають діяти доцентрові сили. Припустивши, що планети рухаються по колових орбітах, ці сили для будь-яких двох планет можна записати так:

$$F_1 = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2}; \quad F_2 = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2}.$$

Якщо у відношення цих сил

$$F_1 : F_2 = \frac{m_1 r_1}{T_1^2} : \frac{m_2 r_2}{T_2^2}$$

замість квадратів періодів обертання планет підставити пропорційні їм величини за третім законом Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3},$$

то дістанемо

$$F_1 : F_2 = \frac{m_1}{r_1^2} : \frac{m_2}{r_2^2}.$$

З цього відношення можна записати загальний вираз доцентрової сили, з якою Сонце діє на планету:

$$F = k \frac{m}{r^2}, \quad (1)$$

де  $k$  – стала, що не залежить від маси планети;  $m$  – маса планети;  $r$  – відстань планети від Сонця.

За третім законом механіки планета з такою самою силою має діяти на Сонце. Якщо два матеріальних тіла (планета–Сонце) взаємодіють, то природа діючої і протидіючої сил, очевидно, та сама. Отже, вираз сили дії планети на Сонце буде аналогічний виразу (1):

$$F' = k' \frac{M}{r^2}, \quad (2)$$

де  $k'$  – стала, що не залежить від маси Сонця;  $M$  – маса Сонця. Із формул (1) та (2) випливає, що сила взаємодії між планетою і Сонцем пропорційна масі тіла, а отже, вона пропорційна добутку їхніх мас і її можна записати в такому вигляді:

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}, \quad (3)$$

де  $\gamma$  – стала, що не залежить від мас взаємодіючих тіл.

Так було знайдено силу тяжіння між Сонцем і планетами. І. Ньютон завбачав у цих силах тяжіння загальну властивість матеріальних тіл. Для переконання в цьому він перевіряв формулу (3) на взаємодії Землі й Місяця.

Коли припустити, що Місяць притягується до Землі із силою, обернено пропорційною квадрату відстані між їхніми центрами, то його прискорення буде:

а) на поверхні Землі (відстань  $R$  – радіус Землі)

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2;$$

б) на орбіті Місяця (відстань  $r = 60 R$ ), коли  $\frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{r^2}$ ,

$$g_1 = g \frac{R^2}{r^2} = 9,81 \cdot \frac{1}{60^2} \text{ м/с}^2 = 0,0027 \text{ м/с}^2.$$

Виявилось, що знайдене так прискорення збігається зі справжнім прискоренням Місяця – доцентровим, визначеним за

формулою

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

де  $r = 380\,000$  км – відстань Місяця від Землі;  $T = 27,3$  доби – період обертання Місяця.

Збіг здобутого результату зі справжнім прискоренням Місяця вказував на відображення у виразі (3) закону всесвітнього тяжіння, який стверджує, що *всякі матеріальні частинки притягуються одна до одної із силою, прямо пропорційною добутку їхніх мас та обернено пропорційною квадрату відстані між ними:*

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (4)$$

де  $\gamma$  – гравітаційна стала.

За цим законом почали задалегідь розраховувати рухи небесних тіл і явища затемнення. Було з'ясовано, що припливи та відпливи в морях і океанах зумовлюються дією Місяця. Доведено, що планета має дещо зміщуватися з кеплерівської орбіти під дією сусідньої планети; так, за зміщенням планети Уран було передбачено, а потім відкрито німецьким астрономом Й. Г. Галле (1812–1910) планету Нептун (1846). За зміщенням останньої спочатку розрахували, а потім відкрили планету Плутон (1930). Це зробив американський астроном К. У. Томбо. За законом всесвітнього тяжіння розраховують траєкторії сучасних космічних кораблів.

**Гравітаційна стала.** Коефіцієнт пропорційності в законі всесвітнього тяжіння називається *гравітаційною сталою*. Фізичний зміст її стає очевидним, якщо покласти у виразі цього закону

$m_1 = m_2 = 1$  кг,  $r = 1$  м. Тоді  $F = \gamma$ , тобто гравітаційна стала чисельно дорівнює силі взаємодії двох матеріальних точок із масами по 1 кг кожна на відстані 1 м.

Закон всесвітнього тяжіння в лабораторних умовах у 1798 р. перевірів англійський вчений Г. Кавендіш (1731–1810) за допомогою крутильних терезів. Він уперше визначив значення гравітаційної сталої. У його досліді дві свинцеві кульки масою 520 і 730 г підвішувалися на пружній нитці (рис. 37). За допомогою головки нитки мож-

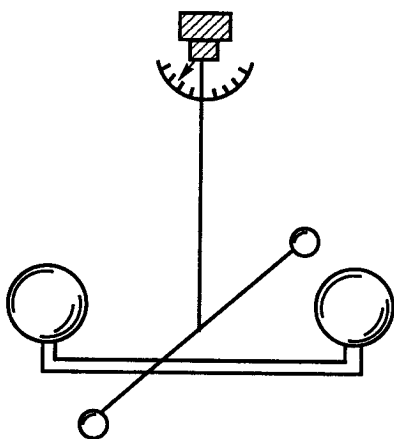


Рис. 37

на було закручувати в той або інший бік і так переміщувати легкі кульки. До цих кульок на спеціальному стояку підводилися дві свинцеві кулі масою 155 та 158 кг. Уже при зближенні куль на 20 см спостерігалося зміщення маленьких кульок у бік великих кульок майже на 2 см. Потім, повертаючи головку, нитку підвішування закручували у протилежному напрямі доти, доки кульки не поверталися у початкове положення. При цьому момент кручення нитки  $M$  зрівноважував момент сили тяжіння:

$$M = Fl; \quad M = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} l.$$

За цією рівністю, змінюючи  $r$  і  $m$ , перевіряли закон всесвітнього тяжіння і визначали гравітаційну сталу.

Із багатьох дослідів було знайдено, що гравітаційна стала

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \text{ с}^{-2}. \quad (5)$$

Найточніше гравітаційну сталу виміряв німецький вчений Ф. Ріхарц у 1898 р. У його дослідах дві кульки однакової маси підвішували на важільних терезах так, що одна кулька була над свинцевою плитою масою 100 т, друга – під нею (рис. 38).

Рівновага коромисла на терезах порушувалася, оскільки плита збільшує масу кульки  $A$  і зменшує масу кульки  $B$ , а саме:

$$F_A = \gamma \frac{(M_3 + m_{\text{п}})m}{R^2}; \quad F_B = \gamma \frac{(M_3 - m_{\text{п}})m}{R^2},$$

де  $M_3$  – маса Землі. Звідси

$$F_A - F_B = 2\gamma \frac{mm_{\text{п}}}{R^2}.$$

За додатковими тягарцями (що дорівнюють  $F_A - F_B$ ), якими відновлювали рівновагу, масою плити  $m_{\text{п}}$ , масою кульки  $m$  і середнім радіусом Землі визначили гравітаційну сталу

$$\gamma = \frac{(F_A - F_B)R^2}{2mm_{\text{п}}}.$$

Знання гравітаційної сталої дало можливість визначити масу Землі та інших небесних тіл. Зокрема, прискорення вільного падіння на поверхні Землі визначається виразом

$$g = \gamma \frac{M_3}{R^2},$$

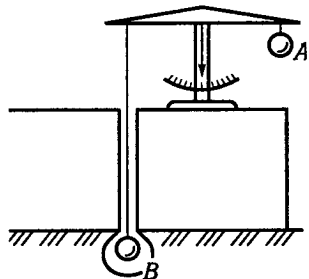


Рис. 38



звідки маса Землі

$$M_3 = \frac{gR^2}{\gamma}. \quad (6)$$

Підставляючи сюди значення середнього радіуса Землі  $R = 6370$  км, значення  $g$  і  $\gamma$ , знаходимо масу Землі  $M_3 = 5,96 \cdot 10^{24}$  кг, а за нею середню густину Землі  $\rho = 5,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Зауважимо, що останнє значення більш як удвічі перевищує середню густину поверхневих шарів Землі та дає підставу гадати, що всередині Землі є більш щільне ядро.

Щоб знайти масу Сонця, врахуємо, що сила тяжіння між Сонцем і планетою є доцентровою силою в обертовому русі планети навколо Сонця:

$$\gamma \frac{M_C m}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

звідки

$$M_C = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2}. \quad (7)$$

Підставивши в (7) дані (наприклад, для руху Землі навколо Сонця  $r = 149 \cdot 10^6$  км – середня відстань від Сонця,  $T = 1$  рік  $= 3,16 \cdot 10^7$  с – період обертання,  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  Н · м<sup>2</sup>/кг<sup>2</sup>), знайдемо масу Сонця

$$M_C = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ кг.}$$

Із порівняння бачимо, що маса Сонця приблизно в 330 000 разів більша за масу Землі.

**Особливості сил тяжіння.** Розуміння якісних відмін різних типів взаємодій між окремими об'єктами природи дає ключ до розуміння першооснов структури всесвіту.

З'ясовано, що сильні взаємодії у 137 разів більші від електромагнітних, у 10<sup>14</sup> – від слабких і в 10<sup>39</sup> – від сил тяжіння. У пропедевтичних цілях також зауважимо, що між частинками ядра атома домінуючими є сильні взаємодії, які зумовлюють ущільнення ядерної речовини до 10<sup>18</sup> кг/м<sup>3</sup>. Однак ці сили дуже короткодійні й ними можна знехтувати вже в об'ємах молекул, де відстані між ядрами 10<sup>-10</sup> м. Слабкі взаємодії також належать до короткодійних.

У певних межах макроутворень з атомів і молекул вирішальну роль відіграють електромагнітні сили. Їх примітними утвореннями є кристалічні ґратки твердих тіл; ці сили зумовлюють густину речовини, наприклад, заліза – 7,8 · 10<sup>3</sup> кг/м<sup>3</sup>, платини – 21,4 · 10<sup>3</sup> кг/м<sup>3</sup> і т. д.

У макроутвореннях великих мас сили тяжіння стають домінуючими завдяки двом чинникам. Сили тяжіння, як і електричні, є да-

лекодійними, тобто повільно спадають зі збільшенням відстані. Проте електричні сили мають різні знаки: електрони притягуються до протонів, але відштовхуються від електронів. У системі з однаковою кількістю позитивних та негативних частинок ці сили були б майже скомпенсовані. Сили тяжіння – це тільки сили притягання, і тому зі збільшенням кількості частинок у системі вони відповідно зростають.

Розрахунки показують, що коли б маса холодного тіла збільшилась до маси Сонця  $\approx 2 \cdot 10^{30}$  кг, то сили тяжіння зумовили б ущільнення тіла до густини  $10^9$  кг/м<sup>3</sup>. У майбутньому до такого стану має прийти Сонце; нині воно гаряче, тому його густина мала.

Які можливі кінцеві стани зірок, маса яких ще більша? Чим більша маса, тим більші сили тяжіння, тим більше стиснення зірки. Внаслідок цього зростає енергія електронів, які протидіють стисненню тіла. Розрахунки показують, що при густині  $10^{10}$  кг/м<sup>3</sup> енергія електронів стає такою, що вони можуть вступати в ядерні реакції, перетворюючи протони на нейтрони. Так було передбачено, а пізніше відкрито нейтронні зірки – пульсари. Новий якісний стан зірки виникає при масі, більшій від трьох мас Сонця. Відповідно до загальної теорії відносності їхнє поле тяжіння утримуватиме фотони випромінювання. Утворюються так звані чорні діри.

Як можна виявити чорну діру? По-перше, її можна було б виявити за спостереженнями світної ракети при наближенні до діри. Рух світного маяка був би дуже прискореним, виникало б значне червоне зміщення його спектра і відбувався б спад інтенсивності випромінювання до нуля. По-друге, діру можна виявити за її впливом на сусідні космічні тіла – за збуреннями, зміною моменту імпульсу сусідів (коли чорна діра обертається, то вона має захоплювати в обертання сусідні тіла). За останніми спостереженнями до чорних дір відносять нововідкриту зірку Лебідь X-1.

Варто зауважити, що на можливість існування чорних дір указував ще французький вчений П. С. Лаплас (1749–1827). У своїх міркуваннях стосовно випромінювання світла у полі тяжіння він спирався на умову виходу пробного тіла масою  $m$  з поверхні опорного тіла масою  $M$  за межі його гравітаційного притягання. Для цього пробне тіло повинно мати енергію, достатню для виконання відповідної роботи виходу:

$$\frac{mv^2}{2} \geq \int_R^{\infty} \gamma \frac{mM}{r^2} dr,$$

звідки

$$\frac{v^2}{2} \geq \gamma \frac{M}{R}, \quad (8)$$

де  $R$  – радіус опорного тіла.

Із припущення, що співвідношення (8) справедливе також для світла ( $v = c$ ), можна було дійти такого висновку: якщо маса об'єкта зосереджена в об'ємі радіусом, меншим від так званого гравітаційного радіуса

$$R_g \leq 2 \frac{\gamma M}{c^2},$$

то навіть випромінюване світло не вийде за межі такого тіла.

За розрахунками для Сонця  $R_g = 3$  км, а для Землі  $\sim 1$  см.

Космічне тіло, стиснуте до розмірів свого гравітаційного радіуса, назвали *чорною дірою*, а поверхню, що обмежує область, звідки неможливий вихід сигналів, – *горизонтом подій*.

## § 22. Гравітаційне поле

Визнання сил тяжіння між тілами у вільному просторі поставило питання стосовно природи і механізму передавання такої взаємодії. Початкові уявлення про можливість передавання дії як такої без матеріального посередника у вигляді магічних миттєвих впливів у науковому пізнанні світу були визнані безпідставними.

За сучасними поглядами, з кожним об'єктом речовини масою  $M$  пов'язаний інший вид матерії – гравітаційне поле, яке залежить від маси та конфігурації тіла. Саме одним із проявів поля є його силова дія на інше тіло масою  $m$ , розміщене в будь-якій точці поля; звичайно, пробне тіло своїм полем чинитиме силову дію на перше тіло.

Тепер відомо, що крім силової дії поле тяжіння обумовлює зміни фізичних і геометричних властивостей вільного простору. Зокрема, якщо у вільному від речовини просторі найкоротшою відстанню між двома точками є пряма, плин часу в усіх точках його однаковий, промені світла прямолінійні, то у просторі поблизу масивного тіла буде інша картина – найкоротшою відстанню між двома точками буде деяка крива, вигляд та розміри якої залежатимуть від маси тіла і відстані від нього до розглянутих точок. Світло, як і раніше, поширюється по найкоротшій відстані між двома точками, але тепер уже світлові промені викривляються; плин часу поблизу масивних тіл сповільнюється.

Поле тяжіння реально існує незалежно від нашої свідомості, має специфічні властивості, які вірогідно виявляються різними способами, тобто є видом матерії.

Для кількісної характеристики гравітаційного поля найзручнішим є значення обумовленої силової дії поля на внесене в нього пробне тіло; її називають *напруженістю*. Це вектор, який чисельно дорівнює силі дії поля у перерахунку на одиницю маси пробного

тіла в заданій точці, тобто

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1)$$

Взявши до уваги вираз сили за законом тяжіння, для поля точкового тіла масою  $M$  знаходимо

$$\vec{G} = -\gamma \frac{M}{R^3} \vec{R}, \quad (2)$$

де  $\vec{R}$  – радіус-вектор, напрямлений від материнського тіла  $M$  до заданої точки поля; знак «мінус» указує на те, що вектор напруженості, колінеарний з вектором сили тяжіння, завжди напрямлений протилежно до радіуса-вектора. Вектор напруженості поля за напрямом збігається з напрямом сили тяжіння.

Гравітаційні поля і їхні напруженості підлягають принципу суперпозиції (накладання). Сумарна напруженість кількох полів у заданій точці дорівнює векторній сумі напруженостей усіх полів:

$$\vec{G} = \sum \vec{G}_i. \quad (3)$$

Примітним у виразах напруженості гравітаційного поля є незалежність вектора від маси пробного тіла. Зіставляючи вираз (1) із другим законом механіки, знаходимо, що за фізичним змістом напруженість поля збігається із прискоренням пробного тіла в заданій точці. Оскільки напруженість поля не залежить від маси пробного тіла, всі тіла незалежно від їхньої маси рухаються в заданій точці гравітаційного поля з однаковим прискоренням. Саме тому на поверхні Землі в заданому пункті всі тіла падають під дією сили тяжіння з однаковим прискоренням.

Крім описаного аналітичного способу кількісного оцінювання гравітаційного поля у випадку, коли задане тіло  $M$  – скінченного розміру, більш раціональним буває графічний метод відображення і визначення напруженості поля. У цьому разі користуються лініями напруженості (силовими лініями). *Лінією напруженості* називають лінію, дотична до якої в будь-якій точці збігається з напрямом вектора напруженості. Лінія напруженості завжди напрямлена до заданого тіла  $M$ . Отже, за силовою лінією можна вказати напрям вектора напруженості в будь-якій точці.

Для відображення модуля вектора лінії напруженості проводять густіше там, де поле сильніше, і рідше – де поле слабше. Так, щоб кількість ліній  $\Delta N$ , яка пронизує елемент поверхні  $\Delta S_n$ , перпендикулярної до ліній, в розрахунку на одиницю площі цієї поверхні дорівнювала (або була пропорційна) модулю вектора напруженості поля в заданій точці, за умовою

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_n} = G. \quad (4)$$

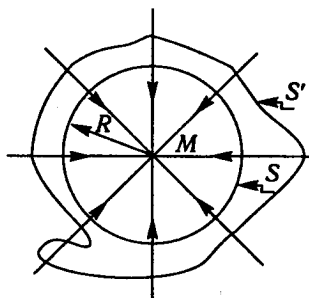


Рис. 39

Згідно з умовою (4) скалярну величину

$$\Delta N = G \Delta S_n \quad (5)$$

називають *поток вектора напруженості* через елемент поверхні. У разі орієнтації елемента поверхні під кутом  $\alpha$  до напруженості

$$\Delta N = G \Delta S \cos \alpha.$$

Якщо в полі виділяється деякий об'єм, обмежений замкненою поверхнею, то потік вважають додатним, коли

лінії напруженості виходять назовні, і від'ємним, коли лінії входять в об'єм.

Постає питання: як увесь потік напруженості має пов'язуватися із заданим тілом  $M$ , щоб у його полі задовольнялася умова (4)?

Відповідь на це питання дає теорема Остроградського–Гаусса. Для з'ясування її сутності припустимо, що точкове тіло масою  $M$  обмежено сферичною поверхнею радіусом  $R$  із центром у точці  $M$  (рис. 39). За виразом (5) повний потік вектора напруженості

$$N = \sum G \Delta S_i = -\gamma \frac{M}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi\gamma M; \quad (6)$$

такою є кількість ліній напруженості, що пронизують вибрану сферичну поверхню.

У подальшому припустимо, що точкове тіло  $M$  і попередня сферична поверхня навколо нього охоплюються довільною замкненою поверхнею  $S'$ , як на рис. 39. Із рисунка випливає, що потік через обидві поверхні однаковий; та лінія, яка перетинає поверхню  $S'$  кілька разів, при вході в об'єм додатна, а при виході – від'ємна, тому рахується лише один раз. Якщо в об'ємі, обмеженому замкненою поверхнею, буде кілька тіл різних мас, то потік напруженості через цю поверхню залежатиме від суми мас тих тіл, що лежать усередині поверхні; потік через замкнену поверхню від тіл, які знаходяться поза цією поверхнею, дорівнює нулю. Тому теорема Остроградського–Гаусса стверджує: якщо в полі, пов'язаному з багатьма тілами  $M_k$ , виділити довільну замкнену поверхню  $S$ , то потік напруженості через цю поверхню

$$N = -4\pi\gamma \sum M_i, \quad (7)$$

де в суму входять маси тільки тих тіл, які лежать усередині поверхні ( $k \geq i$ ).

Теорема істотно полегшує знаходження напруженості поля при симетричному розміщенні мас заданих тіл.

Поле точкового тіла називають *радіальним*, або *центральним*. Поле, в усіх точках якого напруженість однакова за значенням і напрямом, називають *однорідним*; таким, наприклад, є поле в незначному просторі поблизу поверхні Землі.

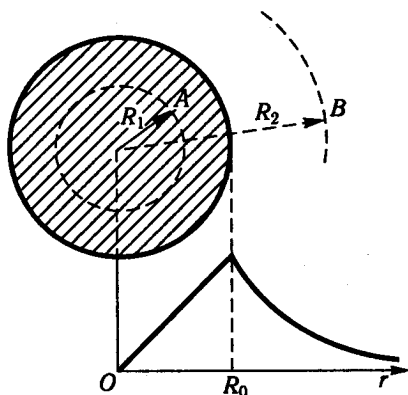


Рис. 40

**Приклад.** Знайти напруженість гравітаційного поля однорідної кулі густиною  $\rho$  та радіусом  $R_0$ :

1) в точці  $A$  на відстані  $R_1 < R_0$ ;

2) в точці  $B$  на відстані  $R_2 > R_0$

від центра.

**Розв'язання.** 1. З центра кулі проведемо через точку  $A$  сферичну поверхню радіусом  $R_1$  (рис. 40). Очевидно, в усіх точках її напруженість за значенням дорівнює  $G_1$ . Завдяки цьому потік напруженості через поверхню можна виразити через шукану напруженість:

$$N_1 = -G_1 4\pi R_1^2,$$

і за теоремою Остроградського–Гаусса

$$N_1 = -4\pi\gamma M_1 = 4\pi\gamma\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3,$$

звідки знаходимо

$$G = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho R_1.$$

Із розв'язання випливають два наслідки:

- із віддаленням від центра кулі до її поверхні напруженість лінійно зростає з кутовим коефіцієнтом, пропорційним густині речовини;
- якби в центрі кулі існувала порожнина радіусом  $R_1$ , то в точці  $A$  і решті точок порожнини напруженість дорівнювала б нулю.

2. З центра кулі проведемо через точку  $B$  сферичну поверхню радіусом  $R_2$  (див. рис. 40). Оскільки в усіх її точках напруженість дорівнює  $G_2$ , її потік

$$N_2 = -G_2 4\pi R_2^2;$$

за теоремою Остроградського–Гаусса

$$N_2 = -4\pi\gamma M = -4\pi\gamma\rho \frac{4}{3}\pi R_0^3.$$

Порівнявши праві частини виразів потоку, знайдемо

$$G_2 = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho R_0^3 \frac{1}{R_2^2}.$$

Із розв'язання випливає, що при віддаленні від центра до поверхні кулі напруженість лінійно зростає, а за її межами спадає подібно до напруженості поля точкового тіла (див. рис. 40).

## § 23. Неінерціальні системи відліку і сили інерції

Системи відліку, що перебувають у прискореному русі відносно інерціальної системи, називаються *неінерціальними*.

Уже було з'ясовано, що закони механіки Ньютона справджуються в інерціальній системі. У неінерціальній системі відліку спостерігаються різкі відхилення від законів механіки. Зокрема, тіло не зберігає стану спокою, хоча на нього і не діють сили. Так, на візку, що перебуває у прискореному русі, поліно весь час скочується у бік, протилежний руху візка (рис. 41). З огляду людини, яка сидить на візку, поліно рухається із прискоренням, причому без дії зовнішньої сили (інших тіл).

Чи треба зовсім відкинути закони механіки Ньютона з переходом у неінерціальну систему? Ні, їх можна зберегти, якщо внести деякі поправки. Виявляється, що закони механіки Ньютона справджуватимуться в неінерціальній системі, якщо ввести сили інерції. Тоді стосовно попереднього прикладу руху поліна з прискоренням зазначимо, що воно перебуває під дією сили інерції. Так збережеться основне твердження механіки, що прискорення є результатом дії сили.

*Сили інерції* не можна ставити в один ряд із силами тяжіння, пружності або тертя, які є наслідком взаємодії двох тіл. Сили інерції – це не результат дії іншого тіла, а властивість системи відліку; для сили інерції не існує протидіючої сили. Тому сили інерції іноді називають фіктивними.

Другий закон механіки в неінерціальній системі відліку треба записувати в такому вигляді:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ін}}, \quad (1)$$

де  $\vec{a}$  – прискорення тіла в неінерціальній системі відліку;  $\vec{F}$  – рівнодійна зовнішніх сил (дій інших тіл);  $\vec{F}_{\text{ін}}$  – сила інерції.

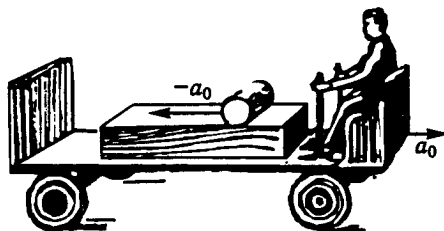


Рис. 41

Розглянемо деякі види сил інерції.

1. Якщо неінерціальна система перебуває у поступальному русі з прискоренням  $a_0$  відносно інерціальної системи відліку, то  $-a_0$  буде прискоренням тіла в неінерціальній системі відліку. Отже, сила інерції матиме такий вигляд:

$$\vec{F}_{\text{ін}} = -m\vec{a}_0. \quad (2)$$

2. Якщо неінерціальна система перебуває в обертальному русі відносно інерціальної системи відліку, то різні точки неінерціальної системи матимуть різне прискорення і сила інерції залежатиме від положення тіла в обертальній системі відліку. Щоб знайти вираз цієї сили, розглянемо конкретні приклади.

Нехай на диску, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , одночасно обертається настромлена на спицю та прикріплена до осі пружиною кулька (рис. 42). З погляду спостерігача в інерціальній системі кулька перебуває в обертальному русі під дією доцентрової сили  $F = m\omega^2 r$ , якою є сила пружності розтягнутої пружини. З погляду спостерігача в неінерціальній системі кулька перебуває у стані спокою, оскільки сила інерції зрівноважується силою пружності розтягнутої пружини. Тут сила інерції напрямлена по радіусу від центра, її називають *відцентровою силою інерції*. Її значення знайдемо за розтягом пружини:

$$F_{\text{ін}} = m\omega^2 r. \quad (3)$$

Відцентрова сила інерції в неінерціальній системі діє на тіло незалежно від того, в якому стані перебуває тіло – спокою чи відносного руху.

В обертальній неінерціальній системі відліку, крім відцентрової сили інерції, діє ще коріолісова сила інерції. Дію цієї сили можна спостерігати в такому досліді.

Припустимо, що кульці, яка знаходиться на диску, надали швидкості  $v_0$  (рис. 43) у радіальному напрямі  $OA$ . Доки диск залишати-

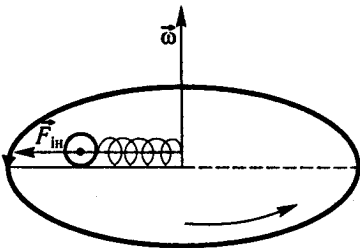


Рис. 42

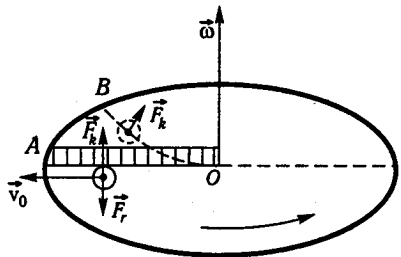


Рис. 43



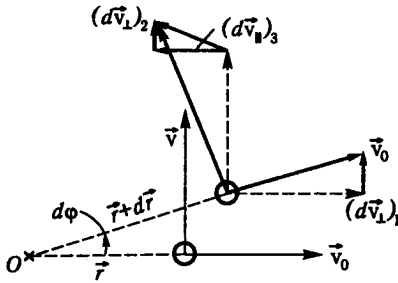


Рис. 44

меться у стані спокою, кулька рухатиметься прямолінійно по  $AO$ . Якщо диск привести в обертання, то кулька рухатиметься криволінійно по  $OB$ . Спостерігач в обертальній системі констатує, що на кульку діє сила  $\vec{F}_k$ , перпендикулярна до її швидкості. Це і є *кориолісова сила інерції*, яку ввів французький вчений Г. Г. Кориоліс (1792–1843).

Щоб утримати кульку на обертальному диску в русі по радіальній прямій  $AO$ , треба було б поставити вздовж радіуса напрямну стінку. Кориолісова сила створюватиме на цю стінку тиск і зрівноважуватиметься реакцією стінки  $\vec{F}_r$ .

Щоб визначити кориолісову силу, знайдемо спочатку створюване нею прискорення з огляду спостерігача в інерціальній системі відліку.

Нехай тіло зі швидкістю  $\vec{v}_0$  переміщується уздовж радіуса на диску, що рівномірно обертається, з кутовою швидкістю  $\omega$ . І нехай у момент часу  $t$  тіло знаходиться на відстані  $r$  від осі обертання (рис. 44). Його швидкість відносно нерухомої системи відліку має дві складові – радіальну  $\vec{v}_0$  і тангенціальну  $\vec{v} = \omega \vec{r}$ .

За час  $dt$  диск повернеться на кут  $d\varphi = \omega dt$ , а тіло в радіальному напрямі зміститься на  $d\vec{r} = \vec{v}_0 dt$ . При цьому обидві складові швидкості зазнають змін, а саме: радіальна  $\vec{v}_0$  – за напрямом, а тангенціальна  $\vec{v}$  – за модулем та напрямом. Щоб визначити ці прирости швидкості, знайдемо відповідні різниці векторів, а також виділимо прирости, напрямлені паралельно та перпендикулярно до радіуса-вектора тіла.

У загальній зміні швидкості тіла за час  $dt$  можна виділити три таких її прирости:

1) приріст, обумовлений поворотом вектора радіальної швидкості  $\vec{v}_0$ , тобто

$$(d\vec{v}_\perp)_1 = \vec{v}_0 d\varphi = \vec{v}_0 \omega dt;$$

2) приріст тангенціальної складової швидкості, зумовлений переходом тіла на більшу відстань від центра ( $\vec{r} + d\vec{r}$ ), тобто

$$(d\vec{v}_\perp)_2 = \omega(\vec{r} + d\vec{r}) - \omega r = \omega dr = \omega \vec{v}_0 dt;$$

3) приріст, обумовлений поворотом вектора тангенціальної швидкості  $\vec{v}$ , тобто

$$(d\vec{v}_\parallel)_3 = \vec{v} d\varphi = \omega r \omega dt = \omega^2 r dt.$$

Знаючи прирости складових швидкості тіла за час  $dt$ , можна знайти відповідні складові прискорення.

Тангенціальну, або перпендикулярну до радіуса, складову прискорення знайдемо, якщо суму приростів швидкості в цьому напрямі поділимо на  $dt$ :

$$a_k = \frac{(d\vec{v}_\perp)_1 + (d\vec{v}_\perp)_2}{dt} = \frac{2\omega\vec{v}_0 dt}{dt} = 2\omega\vec{v}_0.$$

Це і є коріолісове прискорення.

Коріолісове прискорення перпендикулярне до швидкості тіла на диску  $\vec{v}_0$ , його можна записати у вигляді векторного добутку

$$\vec{a}_k = 2 [\vec{\omega}\vec{v}_0]$$

з погляду спостерігача в інерціальній системі відліку або як

$$\vec{a}_k = 2 [\vec{v}_0 \vec{\omega}] \quad (4)$$

в неінерціальній системі відліку.

Аналогічно знайдемо радіальну складову прискорення

$$\vec{a}_r = \frac{(d\vec{v}_\parallel)_3}{dt} = \frac{\omega_2 r dt}{dt} = \omega^2 r. \quad (5)$$

Ця складова прискорення не залежить від швидкості тіла на диску. Добуток її на  $m$  дає вже відому нам відцентрову силу інерції (3).

Коріолісову силу знайдемо, якщо масу тіла помножимо на коріолісове прискорення (4):

$$\vec{F}_k = 2m [\vec{v}_0 \vec{\omega}], \quad (6)$$

де  $\vec{v}_0$  – будь-яка відносна швидкість тіла в обертальній системі відліку.

Внаслідок коріолісової сили, зумовленої добовим обертанням Землі, у ріках, що течуть у північній півкулі, більше підмивається правий берег. Цю закономірність уперше виявив російський вчений К. М. Бер (1792–1876). Підмивання правого берега іноді буває причиною помітної зміни русла ріки. Наприклад, р. Волга в часи Івана Грозного (XVI ст.) підходила до самого м. Казані, розташованого на її лівому березі, а до наших днів вона змістилася праворуч від старого міста на 8 км. Під дією коріолісової сили зміщуються морські течії, вітри, снаряди. З цих причин під час обстрілу німцями Парижа у першій світовій війні з відстані 110 км відхилення снарядів від цілі досягало 1600 м; при пострілі з гвинтівки куля за 1 с зміщується на 3,5 см. Названі зміщення ураховуються передусім у далекобійній артилерії та наведеннях ракет далекої дії.

## § 24. Еквівалентність сил інерції та сил тяжіння

Сили інерції виникають у прискорених (неінерціальних) системах відліку – як поступальних, так і обертальних. Значення сили інерції знаходять добутком маси тіла на прискорення системи. Характерним є те, що для тіл різних мас у заданій неінерціальній системі прискорення є однаковим, тобто сили інерції надають різним тілам однакового прискорення. Відомо, що такі властивості притаманні також силам тяжіння. Ці факти дають підставу говорити про *еквівалентність сил інерції та сил тяжіння*.

Оскільки сили інерції еквівалентні силам тяжіння, їх іноді не можна розрізнити. Уявімо ліфт поза полем тяжіння. Коли б хтось зовні прив'язав до ліфта канат і переміщував його вгору з прискоренням, яке дорівнювало б, наприклад, прискоренню вільного падіння  $g$ , то, очевидно, спостерігач у кабіні ліфта відчував би свою власну масу і бачив би падіння тіл додолу так само, як і у випадку нерухомого ліфта, але у полі тяжіння.

Правда, коли б кабіна ліфта мала досить великі розміри, то спостерігач за допомогою точних вимірів модуля та напрямку діючих сил міг би відрізнити сили інерції від сил тяжіння. Сили інерції, які діяли б на тіло в різних точках, були б рівні та паралельні; сили тяжіння з підняттям над підлогою зменшувалися б, а за напрямками в різних точках являли б собою систему сил, що сходяться. У малих кабінах ліфта спостерігач цих сил не відрізнитиме.

Так само спостерігач не відрізняв би сил інерції від сил тяжіння, якби перебував у кабіні, що обертається навколо осі, віддаль до якої була б значною. В усіх точках цієї кабіни прискорення були б однакові, а за умови їх рівності  $g$  сили інерції були б еквівалентні силам тяжіння поблизу Землі.

Ми розглянули уявні неінерціальні системи поза полем тяжіння. Перебуваючи насправді в неінерціальних системах у полі тяжіння і враховуючи еквівалентність сил інерції та сил тяжіння, ми змушені практично рахуватися з деякою результуючою ефективною силою тяжіння у цих системах. Наприклад, перебуваючи в кабіні космічного корабля під час його підняття з прискоренням  $a \gg g$ , космонавт зазнає дії ефективної сили тяжіння, яка значно перевищує силу тяжіння Землі; це саме відбувається, коли космічний корабель, повертаючись на Землю, входить у густі шари атмосфери і сильно гальмується.

Коли космічний корабель рухається навколо Землі як її супутник, відцентрова сила інерції, що діє на космонавта, зрівноважує відповідну силу тяжіння (отже, ефективна сила тяжіння стає нульовою); космонавт перебуває у полі невагомості.

Хоча еквівалентність сил інерції та сил тяжіння має локальний характер, тобто справджується у порівняно малих об'ємах, хоча за походженням ці сили різні (сили інерції виникають при тих або інших змінах швидкості руху системи і мають тимчасовий характер, а сили тяжіння є результатом постійної взаємодії тіл, незалежної від характеру руху цих тіл), усе ж еквівалентність цих сил має важливе практичне і теоретичне значення.

На практиці за допомогою відцентрової сили інерції, що виникає в центрифугі, створюється штучне перевантаження, потрібне для тренування космонавтів; аналогічно можна було б усунути також невагомість у космічному кораблі, надавши йому обертально-го руху (звичайно, це ускладнило б космонавту спостереження навколишнього простору) і т. д.

До важливих результатів спеціальної теорії відносності належить констатація рівності інертних та гравітаційних мас тіл. Із цієї рівності випливає еквівалентність сил інерції і сил тяжіння. Обидва ці факти спонукали до нових наукових пошуків. Справді, якщо інертні та гравітаційні властивості тіл взаємозв'язані, то мають існувати більш загальні фізичні закони, які відображали б ці зв'язки, тобто включали як закони руху, так і закон тяжіння. Що ж до еквівалентності сил інерції та сил тяжіння, то вона вказує на той перекидний місток, через який можуть проходити узагальнення фізичних законів до таких форм, при яких принцип відносності задовольнявся б не тільки для інерціальних систем координат, а й для неінерціальних. Саме ці завдання спонукали А. Ейнштейна до пошуку загальної теорії відносності.

**Приклад.** Через блок перекинута нитка, до кінців якої прив'язано тягарці масою  $m_1 = 3$  кг і  $m_2 = 1$  кг. Уся система знаходиться у ліфті, який піднімається з прискоренням  $a_0 = 2,2$  м/с<sup>2</sup>. Нехтуючи тертям, масами блока та нитки, визначити відносне прискорення руху тягарців і силу тиску блока на вісь (рис. 45).

**Розв'язання.** Розглядаючи рух тягарців відносно неінерціальної системи відліку, пов'язаної з ліфтом, необхідно, крім сил, обумовлених взаємодіями тіл, увести сили інерції. Оскільки система рухається поступально,  $F_i = -m_i a_0$ . На кожний тягарець діятимуть сили тяжіння, сила натягу нитки і сила інерції. Тому рівняння руху набирають такого вигляду:

для тягарця  $m_1$

$$m_1 \vec{a}_{в1} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{i1};$$

для тягарця  $m_2$

$$m_2 \vec{a}_{в2} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{i2},$$

де в скалярному запису  $a_{в1} = a_{в2} = a_{в}$ ;  $T_1 = T_2 = T$ ;  
 $F_{i1} = F_{i2}$ .

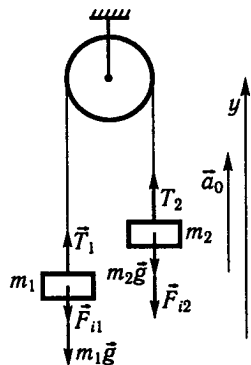


Рис. 45

Запишемо ці рівняння у проекціях на вісь у:

$$-m_1 a_B = -m_1 g + T - m_1 a_0; \quad (1)$$

$$m_2 a_B = -m_2 g + T - m_2 a_0. \quad (2)$$

Для зручності розв'язування системи поділимо (1) на (2) і виключимо  $a_B$ , тоді

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a_0).$$

Відповідно сила тиску блока на вісь

$$F_T = 2T; \quad F_T = 36 \text{ Н},$$

а відносне прискорення

$$a_B = \frac{(m_1 - m_2)(g + a_0)}{m_1 + m_2}.$$

Остаточно

$$a_B = 6 \text{ м/с}^2.$$

## § 25. Енергія

Енергія і робота мають важливе значення в житті людини, тому займають особливе місце в науці. Завдяки енергії виконується робота в усіх сферах виробництва. Енергоозброєність людини визначає загальний технічний розвиток суспільства.

З'ясуємо відношення енергії до матерії та руху. Невід'ємною властивістю матерії є рух. Однак рухи матерії різняться за формою (якістю). Наприклад, різні за формою механічний, тепловий, електричний та інші рухи.

У різних явищах природи можна спостерігати передавання руху і перетворення однієї форми руху на іншу. Цей процес завжди відбувається принаймні між двома тілами, з яких одне втрачає певну частку руху однієї якості (наприклад, механічного руху), а інше дістає відповідне додання руху іншої якості (наприклад, теплового або електричного руху). Істотно, що в таких перетвореннях руху змінюється лише якість, а кількісна міра руху, яку називають *енергією*, залишається тією самою. У цьому полягає сутність закону перетворення і збереження енергії.

*Енергія – це міра руху в явищах перетворення однієї форми руху на іншу.* Відповідно до різних форм руху розрізняють енергію механічну, внутрішню, електричну тощо.

Механічна енергія є мірою механічного руху. Оскільки стан механічного руху системи в будь-який момент часу визначений, якщо відомо взаємне положення і швидкості тіл, в механіці розрізняють два види енергії: *кінетичну*, що залежить від швидкості тіл, та *потенціальну*, яка залежить від взаємного положення тіл.

Кінетичну енергію визначають за формулою.

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Її запропонував німецький вчений Г. Л. Ф. Гельмгольц (1821–1894), дослідивши процес перетворення механічного руху на внутрішній тепловий рух. Залежно від характеру взаємодії тіл системи формула для обчислення потенціальної енергії має різний

вигляд. Зокрема, по-різному виражаються потенціальна енергія тіла, піднятого над Землею, енергія розтягнутої пружини, енергія стиснутого газу. Ці випадки розглянемо пізніше.

Зауважимо, що Р. Декарт, вивчаючи поведінку тіл при пружних зіткненнях, дійшов висновку, що механічний рух потрібно характеризувати добутком маси на швидкість. Пізніше німецький вчений Г. В. Лейбніц (1646–1716) за даними перетворення механічного руху на тепловий довів, що мірою механічного руху має бути величина, пропорційна добутку маси на квадрат швидкості тіла. Цю величину він називав «жива сила». З того часу в науці розпочалася дискусія про те, що треба вважати мірою механічного руху. Вона закінчилася тільки в середині XIX ст. з відкриттям закону збереження енергії.

Між імпульсом та енергією як об'єктивними мірами руху існує зв'язок:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

ним широко користуються у теоретичних аналізах фізичних явищ. Примітним при цьому є те, що два тіла з однаковим імпульсом взагалі можуть мати різні значення енергії та, навпаки, при однаковій енергії – різні значення імпульсів:

$$T_1 = \frac{p^2}{2m_1}; \quad T_2 = \frac{p^2}{2m_2}.$$

Енергія й імпульс – істотно різні міри механічного руху.

## § 26. Робота і потужність

Поняття роботи у фізиці почали використовувати на початку XIX ст., зокрема ним оперував французький вчений Ж. В. Понселе у праці «Вступ до технічної механіки» (1829). Однак тільки у 1853 р. шотландський вчений У. Дж. М. Ренкін (1820–1872) пов'язав це поняття з перетворенням енергії. Насправді, коли взаємодіють два тіла, то відбуваються передавання і перетворення однієї форми руху на іншу. Процеси, в яких змінюється форма руху, а отже, енергія перетворюється з одного виду на інший, називають *роботою*.

*Робота як фізична величина визначає кількість енергії, перетвореної з одного виду на інший.* Співвідношення між роботою та енергією можна записати так:

$$A = -\Delta E. \quad (1)$$

Тому кажуть, що тіло внаслідок утрати своєї енергії  $\Delta E$  виконало роботу  $A$ . Навпаки, якщо робота виконується над системою

(тілом), то вона є мірою збільшення енергії системи. За цією залежністю далі визначатимемо енергію тіла, піднятого над Землею, пружно деформованого тіла та ін.

Знайдемо роботу, виконану завдяки кінетичній енергії протягом деякого малого проміжку часу  $\Delta t$ . Робота дорівнюватиме зміні енергії:

$$\Delta A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (2)$$

Цей вираз можна записати інакше:

$$\Delta A = m \frac{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}{2},$$

а якщо його помножити і поділити на час  $\Delta t$ , то матимемо

$$\Delta A = m \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t,$$

звідки дістанемо

$$\Delta A = F \Delta r. \quad (3)$$

Як бачимо, робота також чисельно дорівнює добутку сили на переміщення тіла в напрямі діючої сили. Тому користуються поняттям *робота сили*.

*Роботою сили  $\vec{F}$ , яка діє на матеріальну точку, називають фізичну величину, що дорівнює скалярному добутку вектора діючої сили на вектор переміщення точки  $d\vec{r}$ :*

$$dA = (\vec{F} d\vec{r}) = F dr \cos(\vec{F}, \hat{d\vec{r}}). \quad (4)$$

Інакше записують  $dA = F \cos \alpha ds$  (рис. 46).

Робота – скалярна величина; залежно від кута між напрямом діючої сили та переміщення вона може бути додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Нулю дорівнює робота сили, перпендикулярної до напрямку переміщення, зокрема робота доцентрової сили, робота сили тяжіння під час руху тіла в горизонтальній площині та ін.

Здебільшого, наприклад під час рівномірного піднімання тіла, робота діючої сили зводиться до подолання сили тяжіння; у разі рівномірного руху тіла на горизонтальній поверхні – до подолання сили тертя, у виробничій сфері – до подолання опору ґрунту, опору різних матеріалів при обробленні тощо. Тому під роботою на практиці розуміють процес подолання опору при переміщеннях тіл.

Виражають роботу в СІ у джоулях. *Джоуль* – це робота сили в 1 Н на шляху в 1 м за

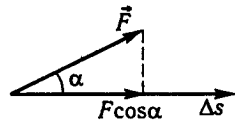


Рис. 46



умови, що напрям дії сили і напрям переміщення збігаються. В аналітичному запису

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 (\text{кг} \cdot \text{м}^2) / \text{с}^2.$$

Раніше ми розглянули спосіб обчислення роботи сталої сили при прямолінійному переміщенні тіла. Роботу змінної сили, або добутку змінної проекції сили на напрям переміщення, визначають за формулою (4), яку можна застосувати лише для нескінченно малого переміщення  $d\vec{r}$ .

Роботу на всьому шляху знайдемо як суму робіт на всіх елементарних переміщеннях, на які поділено шлях. Ця операція зводиться до обчислення інтеграла

$$A = \int_s F \cos \alpha \, ds. \quad (5)$$

Поряд з аналітичним широко використовують графічний спосіб визначення роботи. Відклавши по осі  $Oy$  проекцію діючої сили  $F \cos \alpha$ , а по осі  $Ox$  – пройдений тілом шлях  $s$  (рис. 47), дістанемо графічну залежність між ними у вигляді кривої  $AB$ . Звідси випливає, що робота на елементарному переміщенні

$$dA = F \cos \alpha \, ds$$

дорівнює площі заштрихованої смужки, а робота на всьому шляху – площі фігури  $OABC$ . Наприклад, якщо обчислити площу фігури за допомогою індикатора (індикатор – прилад, що фіксує зміни будь-якого параметра чи об'єкта у формі, найзручніший для безпосереднього сприйняття людиною), то можна визначити роботу газу в циліндрі теплової машини.

Розглянемо важливий приклад роботи сили тяжіння при русі тіла по деякій кривій  $AB$  (рис. 48).

Поділимо весь шлях на такі малі частини, щоб їх можна було вважати прямолінійними. Робота на одній з них

$$\Delta A = mg \Delta s \cos \alpha = mg \Delta h.$$

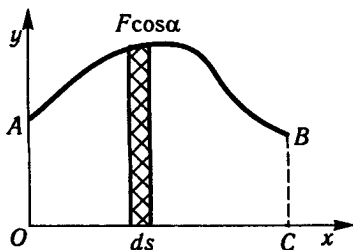


Рис. 47

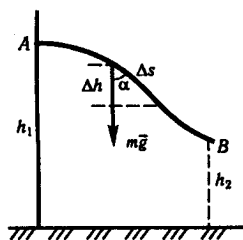


Рис. 48

Роботу на всьому шляху знайдемо як суму робіт на окремих його частинах:

$$A = \sum mg \Delta h = mg \sum \Delta h = mg (h_1 - h_2). \quad (6)$$

Як бачимо, робота сили тяжіння (або робота проти сили тяжіння) для тіла, що переміщується у полі тяжіння, не залежить від форми траєкторії, а залежить лише від різниці висот її початкової та кінцевої точок прикладання. Якби тіло у полі тяжіння описало замкнену траєкторію, то сумарна робота сили тяжіння дорівнювала б нулю: позитивна робота тіла, коли воно опускається, компенсується негативною роботою тіла, коли воно піднімається.

Сили, робота яких не залежить від траєкторії руху тіла, а залежить лише від початкового і кінцевого його положень, називаються *потенціальними*. Такими є, наприклад, сили всесвітнього тяжіння, сили пружності, електростатичні сили. Поля, в яких виявляється дія таких сил, називаються *потенціальними*. Система тіл називається *консервативною*, якщо в ній внутрішні сили взаємодії потенціальні, а зовнішні сили, що діють на ці тіла, – стаціонарні та потенціальні.

Для виконання роботи використовують різні машини – механічні, теплові, електричні. Їх роботоздатність характеризується потужністю.

*Потужність чисельно дорівнює роботі, яку машина може виконати за одиницю часу.* Розрізняють середню потужність

$$\bar{N} = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad (7)$$

та миттєву, тобто потужність у певний момент часу:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Потужністю також характеризують прилади, що споживають або перетворюють певну енергію (наприклад, потужність електричної лампи, холодильника, вентилятора тощо).

Одиницею потужності в СІ є

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}.$$

Великі потужності у практиці вимірюють у кіло- і мегаватах:

$$1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт};$$

$$1 \text{ МВт} = 10^6 \text{ Вт}.$$

Для вимірювання потужності машин та пояснення їхньої роботи при різних навантаженнях користуються також виразом потуж-

ності через діючу силу і швидкість руху, а саме:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F}d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \vec{v}) = Fv \cos(\vec{F} \wedge, \vec{v}). \quad (8)$$

Отже, при заданій потужності машина може розвивати більшу силу тяги, коли швидкість менша, і навпаки. Тому транспортні машини зі збільшенням сили опору на шляху за допомогою коробки передач переходять на меншу швидкість.

Якщо врахувати, що сила опору повітря відносно літака у польоті та сила опору води під час руху корабля пропорційні квадрату швидкості, то за формулою (8) потужність їхніх двигунів має зростати пропорційно кубу швидкості. Це означає, що для збільшення швидкості літака або корабля у 2 рази потужність двигунів треба підвищити у 8 разів.

Наведемо приклади середніх потужностей:

Кінь	600 Вт
Трактор К-701	220 кВт
Автомобіль вантажний МАЗ-525	220 кВт
Тепловоз ТЕ-10 Л	2210 кВт
Літак Іл-18	11 800 кВт
Криголам «Арктика»	54 200 кВт

Для тягових машин розрізняють потужність двигунів і потужність на причіпному гаку, тобто потужність без тієї частини, що відбирається на переміщення самої машини. Наприклад, потужність двигуна трактора ДТ-80 – 59 кВт, а тягова потужність – 40 кВт.

## § 27. Кінетична і потенціальна енергія

*Кінетичною* називають ту частину механічної енергії, яка залежить від швидкості руху тіл. Як зазначалося, кінетичну енергію матеріальної точки визначають за формулою

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Цю формулу можна вивести, дослідивши перетворення механічного руху на інші форми руху, наприклад на внутрішній, що відбувається унаслідок непружного удару тіл або їх гальмування. Кількість теплоти, яка виділяється в таких перетвореннях, пропорційна масі та квадрату швидкості тіла.

*Потенціальною* називають ту частину механічної енергії, яка залежить від взаємного розміщення частин системи і їх положення у зовнішньому силовому полі.

Потенціальну енергію визначатимемо за тією роботою, що виконується над системою, щоб перевести її з деякого нульового положення у заданий стан. Для прикладу визначимо потенціальну енергію тіла над Землею.

Якщо тіло рівномірно піднімається над Землею, то робота проти сили тяжіння дорівнює збільшенню потенціальної енергії системи тіло–Земля. Коли висота підняття незначна ( $h \ll R_3$ ), силу тяжіння вважаємо сталою; тому можна записати

$$Ph = \Pi - \Pi_0,$$

де  $\Pi$  і  $\Pi_0$  – потенціальна енергія тіла відповідно на висоті  $h$  та на поверхні Землі. Потенціальну енергію на поверхні Землі беруть за нульовий рівень ( $\Pi_0 = 0$ ); тому формула потенціальної енергії тіла, що знаходиться на висоті  $h$ , має такий вигляд:

$$\Pi = mgh. \quad (2)$$

За цією формулою потенціальна енергія тіла, опущеного у шахту, виражається від'ємним числом.

Потенціальну енергію тяжіння у загальному вигляді, тобто для будь-якої відстані тіла від Землі, знайдемо з виразу роботи проти змінної сили тяжіння.

Елементарна робота, яку виконує тіло, що віддаляється від Землі,

$$dA = \gamma \frac{mM}{r^2} dr.$$

Робота тіла, що переміщується з точки  $A$  в точку  $B$ , які знаходяться від центра Землі на відстанях відповідно  $r_1$  і  $r_2$ ,

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM}{r_2} + \gamma \frac{mM}{r_1} = \Pi_2 - \Pi_1.$$

У загальному вигляді визначена робота дорівнює зміні потенціальної енергії сили тяжіння. Звідси знаходимо формулу для визначення потенціальної енергії тяжіння

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{r}. \quad (3)$$

Із формули (3) випливає, що потенціальна енергія сили тяжіння з віддаленням тіла від поверхні Землі збільшується. Із цим узгоджується також наближена формула для визначення енергії тіл, які перебувають поблизу Землі.

Формули (2) і (3) справедливі для різних початків відліку енергії, їх вибір суто умовний, оскільки практичне значення має не сама енергія, а її зміна. Формулу (2) можна вивести із загального виразу потенціальної енергії тяжіння (3). Для цього треба у (3) підстави-

ти  $r = R + h$ , де  $R$  – радіус Землі ( $h \ll R$ ), і виконати такі перетворення:

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{R+h} = -\frac{\frac{1}{R}\gamma mM}{1+\frac{h}{R}} = -\frac{1}{R}\gamma mM \left(1 - \frac{h}{R}\right),$$

звідки,

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{R} + mgh.$$

Узявши потенціальну енергію тіла на поверхні Землі (перший член суми) за нульовий рівень, дістанемо  $\Pi = mgh$ .

Визначимо потенціальну енергію пружнодеформованого тіла. Для здійснення деформації треба виконати роботу проти сили пружності. Ця робота буде мірою потенціальної енергії деформації. Розглянемо для прикладу роботу, потрібну для розтягу пружини (рис. 49). Силу пружності за законом Гука визначають так:  $F = -kx$ , де  $k$  – коефіцієнт жорсткості пружини;  $x$  – її видовження. Тому елементарна робота, що виконується при будь-якому розтязі пружини на  $dx$ , становитиме

$$dA = Fdx = kx dx.$$

Уся робота, що виконується для розтягу пружини,

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Так виражається робота будь-якої деформації. Тому формулу для визначення потенціальної енергії пружної деформації запишемо так:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}. \quad (4)$$

Розглянуті приклади обчислення механічної енергії системи дають можливість визначити загальну властивість енергії. З формули для визначення кінетичної енергії випливає, що її значення залежить від швидкості, але не від того, як тіло набуло її. Значення потенціальної енергії тяжіння, у свою чергу, залежить лише від взаємного положення тіл системи, але не від того, як тіла переводилися в нього. Те саме можна сказати стосовно енергії пружної деформації. Отже, енергія системи визначається лише її наявним станом і не залежить від попередньої історії. Іншими словами, енергія є функцією стану системи.

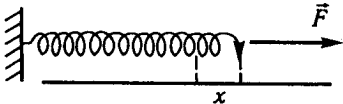


Рис. 49

## § 28. Закон збереження енергії

Вище були розглянуті системи, в яких робота проти сил тяжіння або сил пружності підвищувала потенціальну енергію.

Відомо, що коли не діють зовнішні сили і, зокрема, сили тертя, тіла під дією згаданих потенціальних сил приводяться у прискорений рух. Завдяки роботі цих сил кінетична енергія тіл збільшується:

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \quad (1)$$

й одночасно відповідно зменшується потенціальна енергія системи

$$A = \Pi_0 - \Pi. \quad (2)$$

Дослідження таких перетворень механічної енергії показує, що на скільки зменшується потенціальна енергія системи, на стільки збільшується її кінетична енергія, і навпаки. Так, кулька, падаючи з висоти  $h$ , дістає таку кінетичну енергію, завдяки якій знову може піднятися на висоту  $h$ ; рухома кулька, натикаючись на пружину, стискає її такою мірою, що пружина здатна відновити швидкість кульки. Отже, можна записати рівність

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi,$$

звідки

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0,$$

тобто *при всяких змінах в ізольованій консервативній системі її повна енергія залишається незмінною*. Так можна сформулювати закон збереження енергії в механічних явищах.

Доведено, що закон збереження енергії справджується в усіх явищах природи. Відкриттям цього закону було завершено вчення про зв'язок і взаємне перетворення різних форм руху матерії; на цій основі сформулювалося саме поняття енергії.

Закон збереження енергії є окремим виразом загального закону збереження матерії та руху, сформульованого М. В. Ломоносовим (1711–1765) у 1748 р. Тоді геніальний російський вчений писав: «Усі переміни, що в натурі трапляються, такого суть стану, що скільки чого в одного тіла віднімається, стільки додається до іншого. Цей загальний природний закон стосується і самих правил руху: бо тіло, яке рухає своєю силою інше, стільки ж її у себе втрачає, скільки надає іншому, яке від нього рух дістає».

Низький рівень техніки та панування в науці механістичних поглядів на явища природи в епоху Ломоносова не дали йому можливості розкрити якісні перетворення різних форм руху матерії.

У цій частині закон збереження був всебічно розкритий пізніше. Якщо М. В. Ломоносов лише обґрунтував єдність механічного руху і теплоти, спростовуючи теорію теплецю, то Б. Румфорд (1753–1814) у 1798 р. довів перетворення механічного руху на теплоту, а використання теплових машин незаперечно свідчило про перетворення теплоти на механічний рух. У 1800 р. італійський вчений А. Вольта (1745–1827) винайшов елемент, що ілюстрував зв'язок хімічних та електричних явищ, а в 1831 р. англійський фізик М. Фарадей (1791–1867) відкрив явище електромагнітної індукції – механічний рух провідника в магнітному полі породжував електричний струм і т. д. Дослідні дані взаємного перетворення різних форм руху матерії узагальнив німецький вчений Ю. Р. Майєр (1814–1878) у 1842–1845 рр. у законі збереження і перетворення енергії.

Відкриття цього закону було одним з найвидатніших досягнень людства на шляху пізнання природи й удосконалення виробничої діяльності. Цим законом було спростовано безплідну ідею створення вічного двигуна першого роду (*perpetuum mobile I*), тобто двигуна, який, раз приведений у дію, безупинно зберігав би рух і виконував роботу без споживання енергії ззовні. Закон спрямовував зусилля учених та винахідників на використання різних джерел енергії для виконання роботи. На основі закону збереження і перетворення енергії проектується та споруджуються сучасні двигуни й енергетичні станції.

## § 29. Застосування законів збереження до центрального удару куль

Явище удару є короткочасною взаємодією тіл, що супроводиться зміною їх руху. Воно у свій час привертало увагу Г. Галілея, Х. Гюйгенса, І. Ньютона та інших учених. У граничних випадках розрізняють непружний і пружний удари тіл.

**Непружний удар куль.** Розглянемо ідеально непружний удар куль, тобто такий, після якого обидві кулі залишаються здеформованими і рухаються як одне ціле. Нехай кулі з масами  $m_1$  та  $m_2$  рухаються в одному напрямі зі швидкостями  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  (рис. 50). Знайдемо їх спільну швидкість  $\vec{u}$  після удару.

Застосовуючи закон збереження імпульсу, дістаємо

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}$$

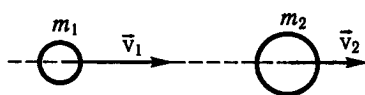


Рис. 50

звідки

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Зрозуміло, що на деформацію тіл витрачено деяку енергію, яка визначається виразом

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Ця частина кінетичної енергії тіл перетворилася на внутрішню енергію тіл (наприклад, на їх нагрівання від удару).

**Пружний удар куль.** Під час ідеально пружного удару в першій стадії тіла деформуються, а їхні швидкості вирівнюються; у другій стадії тіла повністю відновлюють свою форму. Завдяки силам пружності, що відновлюють форму, швидкості тіл стають різними. Знайдемо їх.

Нехай кулі з масами  $m_1$  та  $m_2$  до удару мали швидкості відповідно  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  (див. рис. 50), а після удару вони стали відповідно  $\vec{u}_1$  та  $\vec{u}_2$ ; розглядається центральний удар, тому швидкості до і після удару паралельні тій самій прямій.

Оскільки від удару на тілах не залишається будь-яких слідів, сумарна кінетична енергія їх залишається незмінною:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (1)$$

За законом збереження імпульсу системи

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (2)$$

Якщо в одержаних рівняннях зібрати зліва і справа члени з однаковими масами, а потім перше рівняння поділити на друге, то дістанемо систему двох лінійних рівнянь, з якої легко знайти швидкості куль після удару. Вони відповідно становитимуть

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Розглянемо окремі випадки удару:

- якщо  $m_1 = m_2$ , то  $u_1 = v_2$ ,  $u_2 = v_1$ , тобто тіла, що вдарилися, обмінюються швидкостями. Це добре спостерігається на більярдних кулях. Найкращим сповільнювачем швидкої частинки, очевидно, буде друга частинка такої самої маси, але з малою швидкістю. Так, наприклад, в атомній фізиці вирішуються питання щодо сповільнення нейтронів тощо;

- якщо  $m_2 \rightarrow \infty$ ,  $v_2 = 0$ , то  $u_1 = -v_1$ ;  $u_2 = 0$ , тобто перше тіло відскакує від другого з тією самою швидкістю. Наприклад, м'яч, ударившись об підлогу, змінює напрям руху на протилежний тощо.



### § 30. Енергетична характеристика поля тяжіння. Потенціал

У попередніх параграфах ми констатували потенціальний характер сил тяжіння і визначали в загальному вигляді роботу цих сил у центральному полі в разі переміщення тіла масою  $m$ . Наведемо вираз цієї роботи в дещо іншому вигляді, а саме:

$$A = -\gamma \frac{mM}{r_2} + \gamma \frac{mM}{r_1} = m \left( -\gamma \frac{M}{r_2} + \gamma \frac{M}{r_1} \right),$$

де в дужках виділено величини, що стосуються характеристик поля тяжіння. Зважаючи на їх значення як для визначення роботи, так і для оцінювання поля, ці величини позначають відповідно  $\varphi_2$ ,  $\varphi_1$  і називають *потенціалами гравітаційного поля*. Отже, можна записати

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{r},$$

а робота сил тяжіння між двома точками поля

$$A = m(\varphi_1 - \varphi_2).$$

За останнім виразом можна розкрити фізичний зміст потенціалу. Якщо припустити, що  $r_2 \rightarrow \infty$ , то

$$\varphi_1 = \frac{A_\infty}{m}.$$

Потенціал у заданій точці дорівнює роботі, яку виконує сила тяжіння під час переміщення тіла одиничної маси із заданої точки на нескінченність (ця робота від'ємна, оскільки кут між силою і переміщенням дорівнює  $180^\circ$ ; іншими словами, тому що для цього має бути залучена зовнішня сила).

Потенціал є енергетичною характеристикою поля в кожній точці. На нескінченності енергія тіла точкової маси  $m$  дорівнює нулю, а під час переміщення у точку  $r_1$  сила поля виконує роботу і при цьому тіло набуває кінетичної енергії.

Зазначимо, що вибір нульового значення потенціалу має умовний характер, оскільки в усіх розрахунках практичне значення має лише різниця потенціалів, а не їхні абсолютні значення. Наприклад, в однорідному полі поблизу поверхні Землі за нульовий потенціал беруть точки її поверхні (при цьому з підняттям над поверхнею значення потенціалу рівномірно зростає).

Оскільки потенціал є скалярною функцією, у полі тяжіння, обумовленому системою матеріальних точок, потенціал у кожній точці визначається сумою потенціалів полів окремих тіл. Якщо матеріальна точка масою  $m$  потрапляє у поле тяжіння інших тіл, то її

потенціальна енергія

$$П = m\varphi,$$

де  $\varphi$  – потенціал поля у місці розміщення унесеного тіла.

Як було вже зазначено, силовою характеристикою гравітаційного поля в кожній точці є вектор напруженості  $\vec{G}$ , який характеризує енергетичну властивість поля – потенціал. Між цими величинами є певний зв'язок і його можна навести, скориставшись рівністю виразів роботи переміщення матеріальної точки  $m$  на тій самій ділянці поля.

Коли припустити, що тіло переміщується на ділянці  $\Delta l$  у напрямі лінії напруженості, то виконана робота становитиме

$$Gm\Delta l = -m\Delta\varphi,$$

звідки

$$\vec{G} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}\vec{n}_0,$$

де  $\vec{n}_0$  – одиничний вектор, напрямлений у бік найбільшого зростання потенціалу.

У векторному аналізі вказаний зв'язок виражають за допомогою векторної функції – градієнта потенціала:

$$\vec{G} = -\text{grad}\varphi;$$

у прямокутній системі координат вектор  $\text{grad}\varphi$  виражається так:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Для графічного відображення гравітаційного поля, крім ліній напруженості, користуються також еквіпотенціальними поверхнями, тобто поверхнями, всі точки яких мають однаковий потенціал. У полі точкового тіла це сферичні поверхні, спільним центром яких є задане тіло; в однорідному полі це плоскі поверхні, перпендикулярні до ліній напруженості (оскільки робота під час переміщення тіла по еквіпотенціальній поверхні дорівнює нулю). Такий аналіз еквіпотенціальних поверхонь і ліній напруженості характерний для всіх полів тяжіння.

### § 31. Космічні швидкості. Супутники

Рухи тіл, які посилають із Землі в космічний простір, розраховують на основі закону всесвітнього тяжіння.

Припустимо, що ці тіла посилають у горизонтальному напрямі високо над Землею, де опором атмосфери можна знехтувати. Роз-

рахунки і практика показують, що тіло, яке рухається зі швидкістю, меншою від 7,9 км/с, під дією сили тяжіння падає на поверхню Землі (наприклад, балістична ракета), а якщо швидкість тіла становить  $\approx 7,9$  км/с, то воно обертається навколо Землі як супутник. Визначаючи цю швидкість, виходимо з того, що вже в коловому русі тіла навколо Землі сила тяжіння має відігравати роль доцентрової сили:

$$mg = \frac{mv_I^2}{r}; \quad v_I = \sqrt{gr}, \quad (1)$$

де  $m$  – маса Землі;  $g$  – стала тяжіння;  $r$  – відстань від центра Землі до точки, де тіло набуває швидкості  $v_I$ .

Таку швидкість  $v_I$ , при якій тіло може стати супутником іншого тіла (планети), називають *першою космічною*.

Якщо швидкість тіла збільшувати, то орбіта його руху навколо Землі витягуватиметься і, нарешті, при швидкості 11,2 км/с тіло перейде на параболічну орбіту й полишить Землю. Цю швидкість  $v_{II}$ , при якій тіло переборює гравітаційне тяжіння, називають *другою космічною*. Її можна обчислити за тією кінетичною енергією, яку повинно мати тіло, щоб виконати роботу виходу за межі земного тяжіння, а саме:

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \int_R^{\infty} \gamma \frac{mM_3}{r^2} dr.$$

Звідси

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \gamma \frac{mM_3}{R}; \quad v_{II} = \sqrt{2\gamma \frac{M_3}{R}} = \sqrt{2gR}, \quad (2)$$

де  $R$  – радіус Землі.

Зазначимо, що космічні швидкості визначено без урахування опору атмосфери та впливу тяжіння інших планет і тому вони дещо наближені.

Надаючи космічному апарату швидкості понад 11,2 км/с, можна посилати його у сфери тяжіння інших планет або Сонця. Саме так було створено штучну планету, що обертається навколо Сонця, відправлено космічні ракети в бік Венери та космічну лабораторію для вивчення Марса.

Запускаючи космічний корабель із Землі, йому можна надати і такої швидкості, при якій корабель полишить Сонячну систему. Цю швидкість  $v_{III}$  називають *третьою космічною*. Її значення залежить від напрямку запуску корабля відносно орбітального руху Землі; найменше значення третьої космічної швидкості буде тоді, коли корабель запустити у напрямі орбітального руху Землі.

Третю космічну швидкість можна обчислити за тією кінетичною енергією, яку повинно мати тіло для виконання роботи виходу

за межі тяжіння спочатку Землі, а потім Сонця. Зауважимо, що рух космічного корабля зручно розраховувати в системі координат, пов'язаній з тим небесним тілом, у сфері тяжіння якого перебуває корабель.

Щоб вийти за сферу тяжіння Сонця, корабель повинен мати кінетичну енергію, достатню для виконання роботи виходу:

$$\frac{mv_{\text{п}}^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} \gamma \frac{mM_{\text{С}}}{r^2} dr.$$

Звідси

$$v_{\text{п}} = \sqrt{2\gamma \frac{M_{\text{С}}}{R_0}} = \sqrt{2}v_3, \quad (3)$$

де  $v_{\text{п}}$  – параболічна швидкість корабля у Сонячній системі;  $M_{\text{С}}$  – маса Сонця;  $R_0$  – радіус орбіти Землі;  $v_3$  – орбітальна швидкість Землі. Врахувавши, що  $v_3 = 29,75$  км/с, знайдемо  $v_{\text{п}} = 42$  км/с. Такою є параболічна швидкість корабля у Сонячній системі.

У геоцентричній системі, коли швидкість корабля на межі тяжіння Землі та швидкість її орбітального руху збігаються, ця швидкість становитиме

$$v'_{\text{п}} = v_{\text{п}} - v_3 = 12,25 \text{ км/с.}$$

Отже, щоб запустити корабель із Землі для польоту за межі тяжіння Сонця, йому треба надати кінетичної енергії, достатньої для виходу за сферу тяжіння Землі та збереження параболічної швидкості  $v_{\text{п}}$ , для виходу за сферу тяжіння Сонця:

$$\frac{mv_{\text{III}}^2}{2} = \frac{mv_{\text{п}}^2}{2} + \frac{mv_{\text{п}}'^2}{2},$$

звідки

$$v_{\text{III}} = \sqrt{v_{\text{п}}^2 + v_{\text{п}}'^2} = 16,7 \text{ км/с.} \quad (4)$$

Таким є мінімальне значення третьої космічної швидкості. Зауважимо, що, вийшовши при такій швидкості за сферу тяжіння Сонця, корабель рухатиметься по траєкторії, мало відмінній від траєкторії Сонця. Для цілеспрямованого міжзоряного польоту корабля йому потрібно надати швидкості, значно більшої, ніж третя космічна.

Надання тілам космічних швидкостей і керування ними в небесному просторі стало можливим завдяки розвитку ракетної техніки. Великі заслуги в цій галузі належать видатним російським ученим І. В. Мещерському і К. Е. Ціолковському. Вони заклали основи динаміки тіл змінної маси, докладно розглянули рух ракети у полі тяжіння Землі та за його межами.

К. Е. Ціолковський довів, що тільки за допомогою ракети людина може подолати тяжіння і вийти в космос, бо лише ракета дає змогу досягти космічних швидкостей (7,9; 11,2; 16,7 км/с), і що реактивний рух – єдино можливий засіб переміщення у безповітряному просторі. У праці «Дослідження світових просторів реактивними приладами», опублікованій у 1903 р., вчений запропонував принципову конструкцію ракети (рис. 51) та вивів формулу для обчислення її кінцевої швидкості  $v$  залежно від швидкості виходу газів  $u$  і співвідношення мас на початку та після витрати пального ракети  $m_0/m_k$  для руху у вільному просторі:

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_k}, \quad (5)$$

де  $v_0$  – початкова швидкість ракети.

Формула (5) ґрунтується на законі збереження імпульсу: імпульс речовин, що виходять через реактивне сопло, дорівнює імпульсу ракети, тобто

$$-dmu = (m - dm) dv.$$

Якщо знехтувати малими величинами вищого порядку, розділити змінні та проінтегрувати рівність

$$\int_{v_0}^v dv = - \int_{m_0}^{m_k} u \frac{dm}{m},$$

то дістанемо формулу Ціолковського (5). Із неї випливає, що кінцева швидкість ракети не залежить від закону зміни маси в часі (режиму зміни реактивної тяги), а залежить тільки від параметрів  $u$ ,  $m_0$ ,  $m_k$ . Формулою (5) можна користуватися для наближеного розрахунку кінцевої швидкості ракети у полі тяжіння і за наявності опору, коли останній незначний порівняно з реактивною силою.

Аналіз формули (5) показує, що для досягнення першої космічної швидкості (в разі використання в ракеті пального, яке дає швидкість газів на виході 4...5 км/с) відношення стартової маси

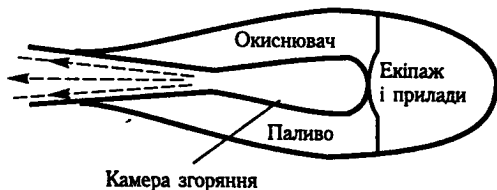


Рис. 51

ракети до її маси після використання пального має бути більшим 20. Технічно виготовити ракету з такою конструктивною характеристикою на рідкому паливі неможливо, оскільки навіть для пташиного яйця відношення його маси до маси шкаралупи не перевищує 12. Для ракети з міцною оболонкою, внутрішніми конструкціями і приладами це відношення ще менше.

Вихід знайшов К. Е. Ціолковський. Він запропонував використати багатоступеневі ракети. Після витрати пального з ракети першого ступеня відкидається її корпус, починає працювати вже прискорена ракета другого ступеня і т. д. Так корпусу останнього ступеня ракети з приладами та екіпажем можна надати потрібної космічної швидкості. Ефективнішими виявилися реактивні двигуни на твердому паливі.

Тріумфом науки і техніки був запуск 4 жовтня 1957 р. в колишньому СРСР першого в історії людства штучного супутника Землі. Цей супутник – алюмінієва куля діаметром 58 см та масою 83,6 кг з радіопередавачем на борту – сигналізував усьому світу про початок ери завоювання космосу.

Услід за цим було запущено серію супутників Землі, обладнаних різною телеметричною апаратурою для досліджень складу і густини високих шарів атмосфери Землі, короткохвильового випромінювання Сонця, складу космічного проміння, поширення радіохвиль в іоносфері, біологічних процесів в умовах супутника та ін. Виконано програму підготовки до польоту людини в космос.

12 квітня 1961 р. відбулася знаменна подія в історії людства: космічний корабель-супутник «Восток», на борту якого був майор Ю. О. Гагарін (1934–1968), піднявся в космос, облетів земну кулю і повернувся на Землю. Було покладено початок польотам людини в космос.

Шлях людини в космос нелегкий. На старті ракета надає кораблю прискорення, яке значно перевищує прискорення вільного падіння. Тому космонавт зазнає значних перевантажень унаслідок дії сил інерції. Виходячи на задану орбіту навколо Землі, космонавт потрапляє в умови невагомості. Незвичні психофізіологічні відчуття невагомості – це нові випробування для космонавта. Складною є також посадка космічного корабля – знову перевантаження, пов'язане з гасінням космічної швидкості.

Космонавти довели, що після відповідних тренувань людина може вийти в космос і працювати в умовах невагомості.

З кожним роком удосконалюються космічні кораблі та збільшується кількість космонавтів, розширюються програма космічних досліджень і міжнародне співробітництво у мирному використанні космічного простору. За допомогою супутників зв'язку забезпечуються радіозв'язок та передавання телевізійних зобра-

жень на всі точки земної кулі. У навколосемному просторі створюються постійно діючі космічні станції, пристосовані для приймання кораблів постачання і кораблів із космонавтами на борту. У комплексі вони утворюють широкопланові космічні лабораторії і, можливо, прообрази майбутніх космічних поселень землян. На станціях проводяться дослідження космічного простору та біосфери Землі, картографічні зйомки поверхні земної кулі, випробовуються технологічні процеси в умовах невагомості тощо.

9 червня 1995 р. українською ракетою-носієм «Циклон» був запущений перший український штучний супутник Землі «Січ-1». Незалежна Україна стала космічною державою.

## Розділ 5

---

# МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

### § 32. Тверде тіло як система матеріальних точок. Центр мас

Переходячи від механіки матеріальної точки до механіки твердого тіла, ми власне переходимо до тих задач, де треба враховувати форму і розміри тіла. У цьому розділі для спрощення розглядатимемо абсолютно тверде тіло, тобто таке, яке під дією прикладених до нього сил зовсім не деформується. У такому тілі взаємне положення його частин залишається незмінним. Зрозуміло, що всі реальні тіла під дією зовнішніх сил деформуються, але в багатьох задачах цим можна знехтувати.

Задачі, в яких деформації твердих тіл мають істотне значення, виділяють в окремий розділ.

Тверде тіло розглядатимемо як певну систему матеріальних точок. Знаючи основні закони руху матеріальної точки, спробуємо знайти деякі загальні характеристики руху твердого тіла в цілому.

Що треба розуміти під рухом твердого тіла взагалі, якщо уявляти його як систему матеріальних точок? Під рухом твердого тіла в цілому розуміють рух центра його маси (центра інерції).

*Центром маси системи матеріальних точок називають таку точку, в якій зібралася б уся маса системи матеріальних точок, якби вони взаємодіяли з нескінченно зростаючими силами притягання.*

З означення випливає, що центром мас двох матеріальних точок є точка, яка ділить відстань між ними на відрізки, обернено пропорційні їхнім масам. Справді, під час взаємодії двох матеріальних точок  $F_1 = -F_2$ , або  $m_1 a_1 = -m_2 a_2$ , звідки

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_2}{a_1}. \quad (1)$$

Якби точки зближалися, то пройдені ними шляхи відповідно становили б  $l_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$ ,  $l_2 = \frac{a_2 t^2}{2}$ . Тому замість відношення прискорень в (1) можна підставити відношення пройдених шляхів:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (2)$$



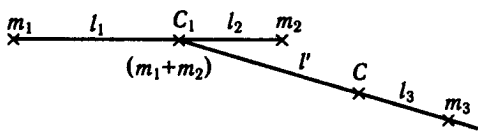


Рис. 52

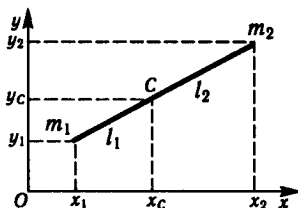


Рис. 53

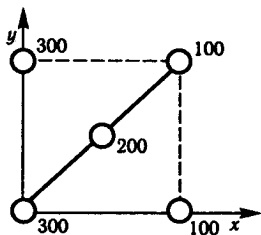


Рис. 54

Знайшовши центр мас для двох матеріальних точок і зосередивши там їхні маси, так само можна шукати центр мас із третьою точкою і т. д. (рис. 52).

Визначення центра мас полегшується, якщо користуватися системою координат. Наприклад, якщо у прямокутній системі координат (рис. 53) координати матеріальних точок  $m_1(x_1, y_1)$ ,  $m_2(x_2, y_2)$  відомі, то координати  $x_c$ ,  $y_c$  центра їхніх мас мож-

на знайти за рівністю (2).

Оскільки

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1},$$

масмо

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1}.$$

Звідси

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Аналогічно знаходимо

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Вирази координат центра мас для двох матеріальних точок можна поширити на будь-яку кількість матеріальних точок у просторі:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad (3)$$

Для ілюстрації визначимо центр мас системи матеріальних точок (їхні маси вказано на рис. 54), які знаходяться у вершинах і центрі квадрата зі стороною 10 см. Зв'язавши з ними систему ко-

ординат так, як показано на рис. 54, визначаємо координати всіх точок, а за формулами (3) – координати центра мас:

$$x_c = \frac{200 \cdot 5 + 100 \cdot 10 + 100 \cdot 10}{300 + 300 + 200 + 100 + 100} = 3 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{300 \cdot 10 + 200 \cdot 5 + 100 \cdot 10}{1000} = 5 \text{ см}.$$

### § 33. Закон руху центра мас

Розглянемо систему матеріальних точок, на які зовнішні сили не діють.

Відомо, що якби матеріальні точки взаємодіяли із силами притягання, які нескінченно зростають, то всі вони зібранися б у центрі мас. Застосувавши до такої системи закон збереження імпульсу, дістанемо

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = M \vec{v}, \quad (1)$$

де  $M$  – маса всієї системи;  $\vec{v}$  – швидкість руху її центра мас (центра інерції).

Рівність (1) показує, що за швидкістю руху центра мас можна визначити імпульс усієї системи, а також оцінити імпульс системи, що перебуває в обертальному русі відносно осі, яка проходить через центр маси (імпульс дорівнюватиме нулю) і поза центром маси, тощо.

Якщо на систему матеріальних точок діють зовнішні сили, то, застосувавши до кожної з них другий закон механіки, дістанемо такі рівності:

$$\frac{d(m_1 \vec{v}_1)}{dt} = \vec{f}_1 + \vec{F}_1; \quad \frac{d(m_2 \vec{v}_2)}{dt} = \vec{f}_2 + \vec{F}_2; \quad \dots; \quad \frac{d(m_n \vec{v}_n)}{dt} = \vec{f}_n + \vec{F}_n,$$

де  $\vec{f}_n$  – внутрішня сила взаємодії;  $\vec{F}_n$  – зовнішня сила, прикладена до  $n$ -ї матеріальної точки;  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Узявши суму лівих та правих частин цих рівностей і врахувавши, що сума внутрішніх сил взаємодії дорівнює нулю (бо всі вони попарно рівні за модулем і протилежні за напрямом), знайдемо

$$\frac{d}{dt}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n) = \sum \vec{F}_i.$$

Замінивши суму в дужках відповідно до рівності (1), остаточно матимемо

$$\frac{d}{dt}(M \vec{v}) = \sum \vec{F}_i. \quad (2)$$

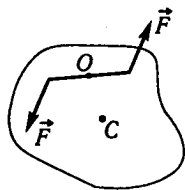


Рис. 55

Це рівняння, яке власне є виразом другого закону механіки в застосуванні до системи матеріальних точок, називається *законом руху центра мас*. Центр мас системи рухається так, наче в ньому зосереджено всю масу системи і до нього прикладено всі зовнішні сили, що діють на систему.

Сформульований закон має важливе значення для дослідження руху центра мас будь-якої системи тіл. У таких задачах внутрішні сили не враховують. Внутрішні взаємодії між частинами системи на рух центра мас не впливають. Уявляючи всю масу системи зосередженою в центрі інерції, а всі зовнішні сили – прикладеними в цій точці, для дослідження руху центра мас можемо скористатися законами динаміки для матеріальної точки.

На основі закону про рух центра мас констатуємо, що за відсутності дії зовнішніх сил центр мас системи перебуватиме або у стані спокою, або в рівномірному прямолінійному русі, причому цей стан не зможуть змінити ніякі внутрішні взаємодії частин та їх переміщення в системі. Наприклад, можна вирішити питання про рух центра мас Сонячної системи, оскільки силами зовнішніх дій далеких зірок можна знехтувати.

Стан спокою або рівномірного прямолінійного руху центра мас зберігатиметься і тоді, коли рівнодійна всіх зовнішніх сил, перенесених у центр системи, дорівнюватиме нулю. Зокрема, будь-яка пара сил, прикладена до системи, не може змінювати положення центра мас, бо їх сума дорівнює нулю. Оскільки пара сил обумовлює обертальний рух тіла, очевидно, він завжди відбуватиметься навколо центра маси тіла незалежно від того, де прикладено пару сил (помилково може здаватися, що обертання тіла відбуватиметься навколо середньої точки  $O$  на рис. 55 між парою сил).

У разі дії зовнішніх сил визначення руху центра мас системи зводиться до визначення руху матеріальної точки (з масою, що дорівнює масі системи), до якої прикладено зовнішні сили. Наприклад, визначення руху центра маси снаряда при пострілі (якщо опором повітря знехтувати, то зовнішньою дією буде сила тяжіння) зводиться до відомої задачі на рух матеріальної точки, кинutoї під кутом до горизонту в полі тяжіння. Тому можна стверджувати, що центр маси снаряда рухається по параболічній траєкторії, яку не може змінити ні обертання снаряда, ні навіть його вибух у польоті.

### § 34. Поступальний та обертальний рухи твердого тіла

Будь-який складний рух тіла можна розкласти на поступальний рух разом із центром мас і на обертальний рух навколо цього центра. Розглянемо ці рухи окремо.

*Поступальним* називають такий рух твердого тіла, коли пряма, пов'язана з будь-якими двома точками тіла, переміщується паралельно сама собі. Прикладом такого руху є рух кузова автобуса або вагона на прямолінійній ділянці шляху; з наближенням можна вважати поступальним рух поїзда на всьому шляху. Поступальний рух можна продемонструвати, обходячи стіл (рис. 56) із паралельно простягнутими в боки руками; такими є рухи кабін вертикального колеса огляду в парках відпочинку та ін.

Зрозуміло, що у випадку поступального руху твердого тіла всі точки переміщуються з однаковими швидкостями і прискореннями. Рух твердого тіла визначається рухом його центра мас, якщо припустити, що в ньому зосереджено всю масу тіла. Іншими словами, у разі поступального руху маємо право розглядати тверде тіло як матеріальну точку, а динаміку матеріальної точки ми вже розглянули.

В *обертальному русі* всі частинки твердого тіла переміщуються по колах, центри яких лежать на нерухомій прямій, що називається *віссю*. Цей рух твердого тіла є одним із найпоширеніших у техніці.

В обертальному русі різні частини тіла переміщуються з різними лінійними швидкостями, але всі вони мають однакові кутову швидкість і кутове прискорення. Тому кутова швидкість та кутове прискорення є характеристиками обертального руху твердого тіла в цілому. Такою є кінематика обертального руху твердого тіла.

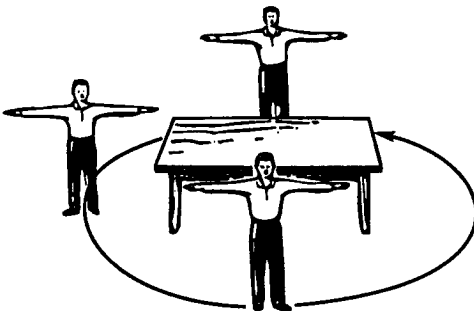


Рис. 56

### § 35. Умови рівноваги тіла відносно нерухомої осі обертання. Момент сили

З'ясуємо умови рівноваги твердого тіла, що має нерухому вісь обертання. Такими тілами є важіль, ротор турбіни, кермо автомобіля тощо. Тут нерухома вісь має вигляд стрижня, що фіксується двома підшипниками.

Під дією зовнішніх сил тверде тіло з нерухомою віссю може приводитися в обертання з певним кутовим прискоренням. Однак не будь-яка зовнішня сила спричинює такі результати. Зокрема, на обертання тіла не впливає сила, перпендикулярна до площини обертання (паралельна осі). Вона зумовлює лише тиск на підшипники. У динаміці обертального руху твердого тіла з нерухомою віссю обертання треба враховувати тільки сили або їхні складові, що лежать у площині обертання.

Ураховавши сили, які діють у площині обертання, з'ясуємо умову рівноваги твердого тіла. Нехай на тіло з віссю обертання, перпендикулярною до площини рис. 57 у точці  $O$ , діють дві сили  $\vec{F}_1$  та  $\vec{F}_2$  у площині рисунка. Очевидно, тіло буде в рівновазі тоді, коли результуюча цих сил  $\vec{F}$  проходить через вісь обертання. У такому разі вона створюватиме лише бічний тиск на вісь. Умову рівноваги тіла можна виразити, застосувавши до трикутника сил  $DCF$  теорему синусів:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

Із прямокутних трикутників  $CMO$  і  $CNO$  знаходимо

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{h_2}{h_1}, \quad (2)$$

де  $h_1$ ,  $h_2$  – відстані діючих сил від осі обертання, або, інакше, плечі сил.

Зіставивши (1) та (2), дістанемо рівність, що виражає рівновагу двох сил відносно осі обертання:

$$F_1 h_1 = F_2 h_2. \quad (3)$$

Отже, результат дії сили в обертальному русі тіла залежить не тільки від значення сили, а й від відстані її від осі обертання. Для визначення результату дії сили в динаміці обертального руху користуються величиною, яка називається *моментом сили*.

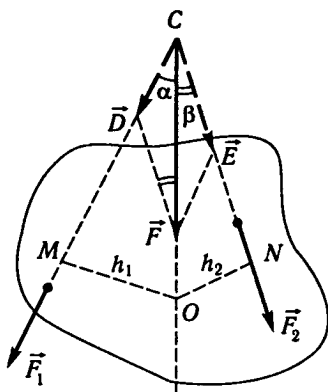


Рис. 57

Момент сили  $M$  дорівнює добутку сили на плече:

$$M = Fh. \quad (4)$$

Момент сили виражають у ньютон-метрах (Н · м).

Момент сили – це аксіальний вектор, який виражається векторним добутком

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}],$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки прикладання сили відносно точки  $O$  осі обертання (рис. 58).

Ураховуючи моменти діючих сил, можна знайти умову рівноваги тіла. Тіло з нерухомою віссю обертання буде в рівновазі, якщо сума моментів сил, які діють за рухом годинникової стрілки, дорівнюватиме сумі моментів сил, що діють проти руху годинникової стрілки. Іншими словами, якщо моменти сил, які обертають тіло за рухом годинникової стрілки, вважати додатними, а моменти сил, що обертають тіло проти руху годинникової стрілки, – від'ємними, то тіло буде в рівновазі тоді, коли алгебрична сума моментів сил відносно осі обертання дорівнюватиме нулю:

$$\sum M_i = 0. \quad (5)$$

Коли алгебрична сума моментів сил не дорівнює нулю, то тіло обертатиметься прискорено.

### § 36. Основне рівняння динаміки обертального руху. Момент інерції

Тверде тіло з нерухомою віссю обертання під дією сил, результуючий момент яких відносно осі не дорівнює нулю, приводиться в обертальний рух із певним кутовим прискоренням. Знайдемо залежність між результуючим моментом сил і кутовим прискоренням обертального руху тіла.

Уявляючи тіло як систему матеріальних точок, розглянемо одну з них – із масою  $m_i$ , що лежить на відстані  $\vec{r}_i$  від осі обертання та перебуває під дією сили  $\vec{F}_i$  (рис. 59). Масмо на увазі, що сила  $\vec{F}_i$  – тангенціальна, бо тільки така сила може впливати на обертання.

Застосувавши до цієї точки другий закон механіки

$$F_i = m_i a_i \quad (1)$$

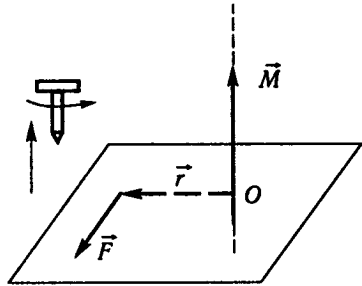


Рис. 58

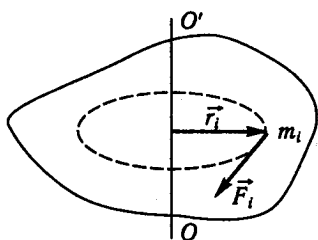


Рис. 59

і ввівши замість тангенціального прискорення кутове, однакове для всіх точок тіла, матимемо

$$F_i = m_i r_i \beta, \quad (2)$$

де  $\beta$  – кутове прискорення. Оскільки в динаміці обертального руху істотну роль відіграє момент діючої сили, для введення його помножимо вираз сили (2) на плече  $r_i$ :

$$M_i = m_i r_i^2 \beta, \quad (3)$$

де  $M_i$  – момент сили  $F_i$  відносно осі обертання  $OO'$ .

Записавши такі залежності для всіх матеріальних точок, на які поділено тіло, та взявши їх суму, дістанемо

$$\sum M_i = \sum m_i r_i^2 \beta,$$

де  $\sum M_i = M$  – результуючий момент обертаючих сил;  $\beta$  – кутове прискорення, однакове для всіх точок, яке можна винести за знак суми:

$$M = \left( \sum m_i r_i^2 \right) \beta. \quad (4)$$

Вираз (4) є основним рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла. Він аналогічний рівнянню динаміки поступального (прямолінійного) руху  $F = ma$ , тільки для обертального руху сила замінюється моментом сили, лінійне прискорення – кутовим, а маса як міра інертності – величиною  $\sum m_i r_i^2$ . Останню називають *моментом інерції* тіла відносно осі обертання і позначають літерою  $I$ :

$$I = \sum m_i r_i^2, \quad (5)$$

де  $m_i r_i^2$  – добуток маси  $i$ -ї точки на квадрат відстані від осі обертання – є моментом інерції матеріальної точки.

Момент інерції є мірою інертності тіла в обертальному русі. Це скалярна величина; в СІ момент інерції виражають у кілограмах на квадратний метр ( $\text{кг/м}^2$ ).

Остаточно основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла записують у такому вигляді:

$$\vec{M} = I \vec{\beta}. \quad (6)$$

При сталому моменті інерції тіла кутове прискорення прямо пропорційне результуючому моменту діючих сил. Якщо результуючий момент дорівнює нулю, то кутове прискорення також дорівнює нулю, а отже, тіло перебуває у стані спокою або рівномірного обертального руху.

### § 37. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

З'ясуємо суть основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла щодо передавання механічного руху під час взаємодії тіл. Для цього рівняння динаміки зведемо до такого вигляду:

$$\vec{M} = I\vec{\beta} = I \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Оскільки для твердого тіла з нерухомою віссю обертання момент інерції  $I$  є сталою величиною, її можна внести під знак  $\Delta$ :

$$\vec{M} = \frac{\Delta(I\vec{\omega})}{\Delta t}. \quad (1)$$

Добуток  $I_i\omega$  для довільної матеріальної точки інакше можна виразити так:

$$I_i\omega = m_i r_i^2 \omega = m_i v_i r_i,$$

де  $m_i v_i$  – імпульс точки;  $r_i$  – відстань її від осі обертання.

Векторний добуток вектора імпульсу на радіус-вектор називають *моментом імпульсу точки*. Очевидно, сума моментів імпульсів усіх матеріальних точок, на які поділено тіло, дорівнює моменту імпульсу всього тіла:

$$\vec{L} = \sum m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i] = I\vec{\omega}. \quad (2)$$

Момент імпульсу – це вектор однакового напрямку з вектором кутової швидкості.

Із виразу (1) випливає, що зміна моменту імпульсу тіла під час обертання пропорційна результуючому моменту діючих сил і відбувається в напрямі діючого моменту. Такий зміст основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

Вираз (1) цілком аналогічний виразу другого закону механіки (див. § 12), тільки в ньому замість сили фігурує момент сили, замість зміни імпульсу – зміна моменту імпульсу. Висновок: момент імпульсу є мірою обертального руху тіл в явищах передавання руху, що відбуваються унаслідок взаємодії тіл.

Очевидно, коли задане тіло не взаємодіє з іншими зовнішніми тілами, то рух не передається, а отже, момент імпульсу тіла залишається незмінним. До цього приходимо аналітично з виразу (1), а саме: при  $M = 0$  маємо  $\Delta(I\vec{\omega}) = 0$ , тому

$$I\vec{\omega} = \text{const}. \quad (3)$$

Рівність (3) виражає закон збереження моменту імпульсу системи. Він стверджує, що коли не діють зовнішні сили (або результу-



ючий момент їх дорівнює нулю), момент імпульсу системи залишається незмінним.

Закон збереження моменту імпульсу є окремим вираженням загального закону збереження матерії та руху, відкритого М. В. Ломоносовим. Закон справджується і для одного твердого тіла, і для системи твердих тіл, які перебувають в обертальному русі.

Прояви закону, що виражається рівністю (3), можна ілюструвати на дослідах та прикладах із природи і практики. Наприклад, якщо підвішений на нитці тягарець привести в обертання (рис. 60), то нитка намотуватиметься на палицю і зумовлюватиме зміну моменту інерції тягарця; тому його кутова швидкість збільшуватиметься так, щоб добуток  $I\omega$  залишався сталим.

Різні прояви закону можна продемонструвати на лаві Жуковського (рис. 61), що з дуже малим тертям може обертатися навколо вертикальної осі. Лаву з людиною на ній, яка тримає в розведених руках гантелі, приводять в обертання. Як тільки людина опускає руки і її момент інерції зменшується, кутова швидкість обертання помітно збільшується; швидкість обертання зменшується, коли знову розвести руки. Коли людина на нерухомій лаві повертає руки з гантелями та тулуб ліворуч, то її ноги з лавою повертаються праворуч. На початку досліду момент імпульсу дорівнював нулю; тому момент імпульсу, зумовлений поворотом рук, компенсується протилежним моментом імпульсу ніг і лави.

Закон збереження моменту імпульсу як векторної величини виявляється також у збереженні напрямку вектора. Збереження напрямку вектора моменту імпульсу (або осі обертання) добре спостерігається в дослідах із дзигогою. Під час швидкого обертання її вісь стійко утримується у вертикальному положенні. Навіть на іграшковому гіроскопі, підвішеному на нитці, можна показати, що при великій

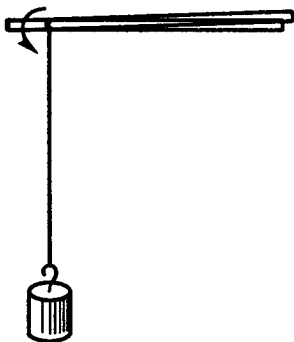


Рис. 60

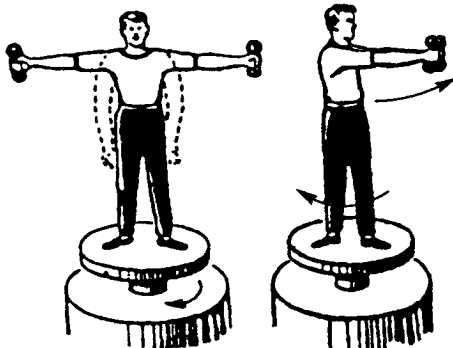


Рис. 61

швидкості обертання його вісь зберігає той напрям, в якому її зорієнтували.

Збереження напрямку осі при обертанні використовують у нарізній вогнепальній зброї для забезпечення стійкості польоту куль і снарядів, у гіроскопічних приладах тощо.

Відповідно до закону збереження моменту імпульсу планета в апогеї (найвіддаленішому від Сонця положенні) має найменшу кутову швидкість під час руху навколо Сонця, а в перигеї (найближчому до Сонця положенні) – найбільшу кутову швидкість. Завдяки добовому обертанню Земля зберігає орієнтацію своєї осі у просторі.

### § 38. Кінетична енергія обертального руху тіла

Різні точки твердого тіла, що перебуває в обертальному русі, мають різну лінійну швидкість. Тому вираз кінетичної енергії обертального руху тіла знаходитимемо як суму кінетичних енергій матеріальних точок, на які можна поділити тіло.

Кінетична енергія будь-якої матеріальної точки

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (1)$$

Увівши замість лінійної швидкості кутову ( $v_i = \omega r_i$ ), дістанемо

$$T_i = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}. \quad (2)$$

Кінетична енергія тіла як сума енергії всіх його елементів

$$T = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2}.$$

Якщо винести спільний множник  $\frac{\omega^2}{2}$  за знак суми і врахувати, що  $\sum m_i r_i^2 = I$  є моментом інерції тіла відносно осі обертання, то кінетична енергія тіла виразиться такою формулою:

$$T = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (3)$$

Із формули випливає, що вираз кінетичної енергії обертального руху тіла аналогічний виразу кінетичної енергії поступального (прямолінійного) руху тіла, тільки замість маси у формулу входить момент інерції, а замість лінійної швидкості – кутова.

У практиці кінетична енергія обертального руху маховиків забезпечує рівномірну роботу машини, тобто коли навантаження раптово збільшується, кінетична енергія маховика, що накопичи-

Таблиця 3

Поступальний рух	Формула	Обертальний рух	Формула
Лінійна швидкість	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Кутова швидкість	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Лінійне прискорення	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Кутове прискорення	$\beta = \frac{d\omega}{dt}$
Маса	$m$	Момент інерції	$I = \sum m_i r_i^2$
Імпульс	$m\vec{v}$	Момент імпульсу	$I\omega$
Сила	$\vec{F}$	Момент сили	$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$
Основне рівняння динаміки	$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} \\ \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \end{cases}$	Основне рівняння динаміки	$\begin{cases} \vec{M} = I\vec{\beta} \\ \vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} \end{cases}$
Кінетична енергія	$T = \frac{mv^2}{2}$	Кінетична енергія	$T = \frac{I\omega^2}{2}$
Робота	$dA = (\vec{F}d\vec{r})$	Робота	$dA = (\vec{M}d\vec{\varphi})$
Потужність	$N = (\vec{F}\vec{v})$	Потужність	$N = (\vec{M}\vec{\omega})$

лася, допомагає двигуну машини і рівномірність її роботи не порушується. Наприклад, у прокатному стані маховик діаметром 3,5 м та масою 41 т при нормальній частоті обертання 10 об/с має таку енергію, яка в момент захоплення болванки забезпечує прокатному стану додаткову потужність  $\sim 20\,000$  кВт.

Якщо тіло одночасно перебуває у прямолінійному й обертальному рухах (наприклад, у разі скочування бочки з похилої площини, руху колеса тощо), то кінетична енергія тіла дорівнюватиме сумі енергії прямолінійного та обертального рухів:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (4)$$

Підсумовуючи закономірності розглянутих рухів тіла, зіставимо основні величини і залежності його прямолінійного та обертального рухів навколо осі (табл. 3).

### § 39. Визначення моменту інерції деяких тіл. Теорема Штейнера

Мірою інертності тіла в обертальному русі є *момент інерції*. Ця величина входить в основне рівняння динаміки обертального руху, у формули для визначення моменту імпульсу і кінетичної енергії

обертального руху тіла. Розглянемо деякі способи визначення моменту інерції тіла.

Момент інерції тіл правильної геометричної форми можна визначити, користуючись методами диференціального та інтегрального числення.

Для прикладу визначимо момент інерції однорідного стрижня відносно осі, що проходить через його середину перпендикулярно до нього (рис. 62). Нехай маса стрижня  $m$ , його довжина  $l$ .

Поділимо стрижень на елементарні частинки у вигляді нескінченно тонких пластинок, паралельних осі обертання. Момент інерції довільно виділеної частинки

$$dI = dmr^2. \quad (1)$$

Масу частинки інакше можна виразити так:

$$dm = \rho S dr,$$

тому

$$dI = \rho S r^2 dr, \quad (2)$$

де  $\rho$  – густина речовини стрижня;  $S$  – площа його поперечного перерізу;  $dr$  – товщина частинки стрижня;  $r$  – її відстань від осі.

Інтегруючи вираз (2), знаходимо суму моментів інерції всіх елементарних частинок, на які поділено стрижень, тобто момент інерції всього стрижня:

$$I = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \rho S r^2 dr = \frac{1}{12} \rho S l^3 = \frac{1}{12} ml^2.$$

Отже, момент інерції стрижня відносно осі, що проходить через центр маси перпендикулярно до його довжини,

$$I = \frac{1}{12} ml^2. \quad (3)$$

Так само знаходимо, що момент інерції стрижня відносно осі, яка проходить через його кінець перпендикулярно до стрижня,

$$I = \frac{1}{3} ml^2. \quad (4)$$

Момент інерції диска відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини диска,

$$I = \frac{1}{2} mR^2. \quad (5)$$

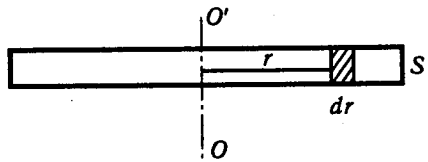


Рис. 62

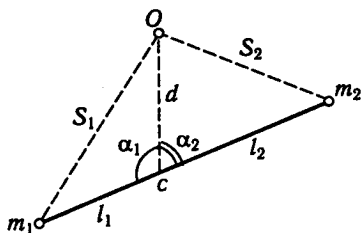


Рис. 63

Момент інерції кулі відносно осі, яка проходить через її центр,

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (6)$$

Знаючи момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр його маси, за теоремою, сформульованою німецьким математиком Я. Штейнером (1796–1863), можна знайти момент

інерції тіла відносно будь-якої іншої осі, паралельної першій. За цією теоремою *момент інерції відносно будь-якої осі обертання дорівнює моменту інерції відносно паралельної їй осі, що проходить через центр маси, доданому до добутку маси тіла на квадрат відстані центра маси від осі обертання* (рис. 63):

$$I = I_C + md^2. \quad (7)$$

Для доведення теореми розглянемо тіло, що складається із двох матеріальних точок  $m_1$  і  $m_2$  з центром мас у точці  $C$ . Момент інерції цих точок відносно осі, яка проходить через центр маси перпендикулярно до площини рис. 63,

$$I_C = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2. \quad (8)$$

Момент інерції цих самих точок відносно осі, яка паралельна першій, але проходить через точку  $O$ ,

$$I = m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2. \quad (9)$$

Із трикутників  $m_1 CO$  та  $m_2 CO$  визначаємо сторони  $s_1^2$  і  $s_2^2$  за теоремою косинусів:

$$s_1^2 = l_1^2 + d^2 - 2l_1 d \cos \alpha_1;$$

$$s_2^2 = l_2^2 + d^2 - 2l_2 d \cos \alpha_2.$$

Підставивши ці значення у вираз (9), дістанемо

$$I = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) + (m_1 + m_2) d^2 - (2m_1 l_1 d \cos \alpha_1 + 2m_2 l_2 d \cos \alpha_2),$$

де сума в перших дужках дорівнює моменту інерції точок відносно осі, яка проходить через центр мас; наступний член  $(m_1 + m_2) d^2 = md^2$  є добутком маси системи точок на квадрат відстані центра маси від паралельної осі обертання (входить до виразу (7)); сума останніх двох членів дорівнює нулю, бо  $m_1 l_1 = m_2 l_2$  з означення центра мас двох точок, а  $\cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2$ , оскільки  $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ . Отже, теорему (7) доведено.

Момент інерції тіла неправильної форми визначають або з дослідження обертального руху тіла і застосування до нього основного рівняння динаміки  $M = I\beta$ , або з дослідження коливання тіла та використання виразу періоду коливання фізичного маятника, куди входить  $I$ ; частіше застосовують до обох згаданих рухів закон перетворення і збереження енергії.

### § 40. Вільні осі обертання

Під час обертального руху тіла навколо нерухомої осі остання, як правило, утримується підшипниками. Чи завжди потрібні підшипники?

Якщо тіло довільно зорієнтоване відносно нерухомої осі, що проходить через центр маси (рис. 64, а), то доцентрові сили, потрібні для обертання частин тіла, які лежать вище і нижче від центра маси  $C$ , створюються реакціями підшипників  $O$  та  $O'$ , що діють на вісь. При цьому вісь створює певний тиск на підшипники, що й зумовлює їх спрацювання. Характерно, що ці сили обертаються разом із тілом; тому вони створюють на підшипники змінне навантаження, а воно передається і шкідливо впливає на всю машину.

Однак якби тіло могло повертатися навколо горизонтальної осі, то воно зайняло б таке положення, в якому зрівноважувалися б усі доцентрові сили, що діють на окремі частини тіла (рис. 64, б). У такому разі на вісь  $OO'$  не діяли б ніякі сили і верхній підшипник був би зайвим.

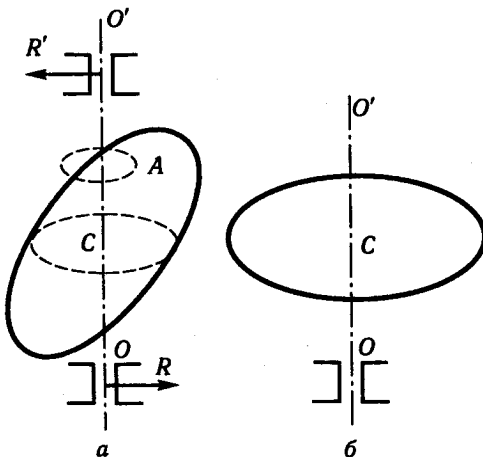


Рис. 64

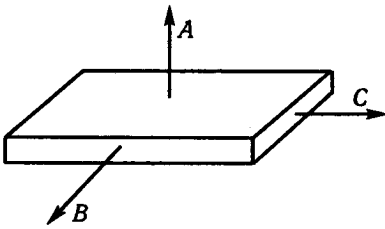


Рис. 65

Вісь, відносно якої всі доцентрові сили, що діють на окремі частини тіла, взаємно зрівноважуються, називається *вільною вісю обертання*.

Обертання тіла навколо вільної осі технічно найдоцільніше. Про це особливо доводиться дбати під час швидких обертань масивних тіл – маховиків, водяних та парових турбін тощо, оскільки доцентрова сила, потрібна для обертання тіла, пропорційна квадрату кутової швидкості:

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r. \quad (1)$$

Для кращого центрування відносно вільної осі обертання тілам надають форми тіл обертання або тіл з певними осями симетрії тощо. Проте забезпечити точне центрування тіл відносно вільної осі обробленням і компонованням їх майже неможливо. Тому практикують, наприклад, гнучкі вали для осей. На великих частотах обертання такий вал прогинається так, що тіло самоцентрується відносно вільної осі обертання.

Тіло може мати три взаємно перпендикулярні вільні осі обертання. Для прямокутного паралелепіпеда це будуть осі *A, B, C* (рис. 65), проведені через центр мас перпендикулярно до бічних граней. Момент інерції тіла відносно осі *A* – найбільший, а відносно осі *C* – найменший.

Теорія і досліди показують, що стійким буде обертання тіла лише навколо тих вільних осей, відносно яких момент інерції тіла найбільший або найменший. Обертання тіла навколо осі, відносно якої момент інерції має проміжне значення, нестійке. Це можна про-

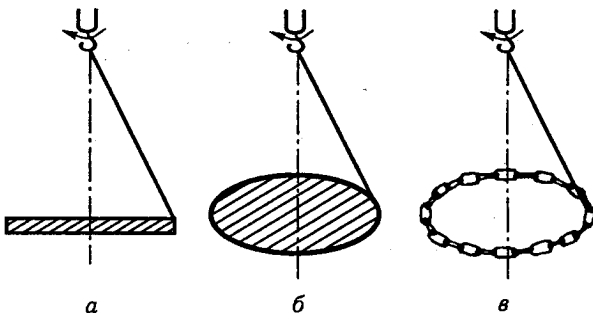


Рис. 66

ілюструвати на таких дослідах. Якщо до осі відцентрової машини підвісити на шнурку металеві стрижень, диск або замкнений ланцюжок (рис. 66, *a*, *b* та *в* відповідно) і привести їх у швидке обертання, то вони зорієнтуються навколо вільних осей обертання, відносно яких їхні моменти інерції найбільші.

## § 41. Гіроскопічний ефект і його застосування

*Гіроскоп* – симетричне тверде тіло, що дуже швидко обертається навколо осі, яка може змінювати свій напрям у просторі. В гіроскопічних приладах це масивний, добре відцентрований металевий диск, який приводиться у швидке обертання електродвигуном або стиснутим повітрям. В останньому випадку диск є ротором газової турбіни. Усю систему монтують на кардановому підвісі або на поплавку в посудині з рідиною. Це забезпечує гіроскопу всі три ступені вільності. Досягаючи 20 000...30 000 об/хв, гіроскоп надійно зберігає напрям своєї осі. Такими є гірокомпас у морській справі, показчик горизонту в авіації, стабілізатор руху торпеди та ін.

Головною проблемою в теорії гіроскопа є визначення залежностей між діючими зовнішніми силами і зміною положення осі гіроскопа. Найважливішу з цих залежностей виражає *гіроскопічний ефект*.

*Якщо до обертового гіроскопа прикласти пару сил, що намагаються повернути його навколо осі, перпендикулярної до осі його обертання, то він (всупереч очікуванню) почне повертатися навколо третьої осі, перпендикулярної до двох перших.*

Докладніший розгляд показує, що гіроскопічний ефект повністю відповідає основному рівнянню динаміки обертального руху твердого тіла. Саме за цим законом треба визначати зміну моменту імпульсу гіроскопа  $\Delta \vec{L}$  під дією зовнішнього моменту сил  $\vec{M}$  :

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t.$$

Проілюструємо це. Нехай гіроскоп (рис. 67) обертається навколо осі  $OO'$  в напрямі, показаному стрілкою, а пара зовнішніх сил  $\vec{F}$  та  $\vec{F}'$ , перпендикулярних до площини рисунка, намагається повернути його навколо осі  $CC'$  (по цій осі напрямлений момент зовнішніх сил  $\vec{M}$ ). За час  $\Delta t$  в напрямі діючого моменту сил  $\vec{M}$  відбудеться приріст моменту імпульсу гіроскопа  $\Delta \vec{L}$ , і в результаті момент імпульсу гіроскопа  $\vec{L}'$  буде векторною сумою:

$$\vec{L}' = \vec{L} + \Delta \vec{L}.$$

Вектор  $\vec{L}'$  лежить у площині рисунка й визначає нове положення осі гіроскопа через час  $\Delta t$ . Це зміщення осі гіроскопа відпові-



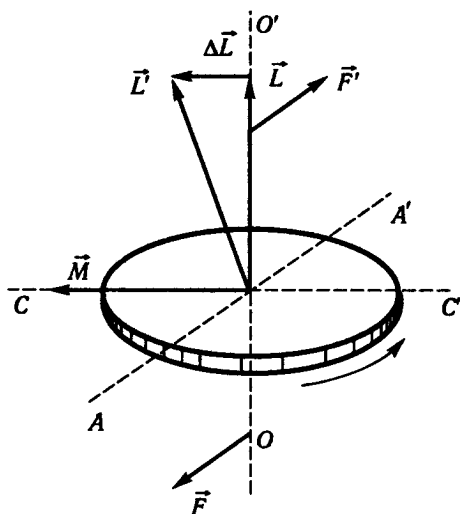


Рис. 67

дає його повороту навколо осі  $AA'$ , перпендикулярної до двох перших. Одночасно констатуємо, що це переміщення осі гіроскопа напрямлене до суміщення з віссю вимушеного обертання (з вектором  $\vec{M}$ ).

Переміщення осі гіроскопа до суміщення з віссю додаткового обертання є основною особливістю поведінки гіроскопа. Її використано в гірокомпасі. Під дією добового обертання Землі гіроскоп набуває додаткового обертання відносно осі Землі, тому його власна вісь обертання зміщується та орієнтується у напрямі меридіана (вісь гірокомпаса обмежують так, щоб вона могла рухатися тільки в горизонтальній площині).

Намагання осі гіроскопа суміститися з віссю вимушеного обертання зумовлює дію гіроскопічних сил на опори осі гіроскопа. Ці сили доводиться урахувувати при конструюванні підшипників для парових турбін на кораблях та гвинтів літака, оскільки ротор турбіни і гвинт літака – це масивні гіроскопи. Гіроскопічний ефект на них проявляється у кильовій хитавиці корабля, розворотах літака.

## § 42. Гідроаеростатика. Закон Паскаля

Рідини і гази за своїми властивостями істотно відрізняються від твердих тіл: якщо тверде тіло характеризується певним об'ємом та формою, то рідина – лише певним об'ємом, набираючи довільної форми посудини, а гази не мають ні власного об'єму, ні форми. Тверде тіло виявляє пружність у деформаціях будь-якого виду, рідини і гази в цілому виявляють пружність лише в деформаціях різнобічного стиску (за специфічних умов – у деформаціях розтягу). Коефіцієнт стисливості рідин за кімнатних умов

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp} \right)_T$$

має значення від  $10^{-9}$  до  $10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>, для газів він дорівнює  $10^{-5}$  Па<sup>-1</sup>.

Характерною ознакою рідин і газів є їх плинність, тобто практична відсутність пружності в деформаціях зсуву – паралельного зміщення одного їх шару відносно іншого. Це зумовлює виразну рухливість частинок рідини та газу.

Реальним рідинам і газам притаманні стисливість та внутрішнє тертя – в'язкість. Проте у першому наближенні опису їх механічних рухів названими властивостями будемо нехтувати і користуватимемося ідеальною моделлю рідини та газу.

Розглянемо спочатку основні питання гідроаеростатики – вчення про умови і закономірності рівноваги рідин та газів під дією прикладених до них сил. Одним з основних її завдань є визначення тиску всередині нерухомих рідини і газу. Це завдання можна вирішувати за принципом твердіння: рівновага рідини не порушиться, якщо будь-який елемент її об'єму  $\Delta V$  вважати ствердлим (із тими самими об'ємом та густиною).

На виділений елемент рідини  $\Delta V$  (рис. 68) діють два типи зовнішніх сил: сила тяжіння  $\vec{F}_{\text{тяж}}$ , прикладена в центрі мас виділеного об'єму, і поверхневі сили  $\vec{F}_{\text{пов}}$  з боку навколишньої рідини; останні перпендикулярні до поверхні виділеного об'єму зав-

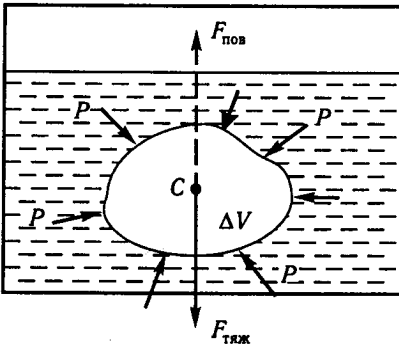


Рис. 68

дяки плинності рідини. Умовами рівноваги виділеного об'єму рідини буде рівність нулю суми діючих сил:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} + \vec{F}_{\text{пов}} = 0, \quad (1)$$

де  $\vec{F}_{\text{пов}}$  – результуюча поверхневих сил, та суми моментів цих сил відносно центра мас:

$$\vec{M}_{\text{тяж}} + \vec{M}_{\text{пов}} = 0. \quad (2)$$

За умовою (1) знаходимо, що результуюча поверхневих

сил чисельно дорівнює силі тяжіння виділеного об'єму рідини і напрямлена вертикально вгору:

$$\vec{F}_{\text{пов}} = -\vec{F}_{\text{тяж}}, \quad (3)$$

оскільки сила  $\vec{F}_{\text{тяж}}$  прикладена до центра мас, а її момент дорівнює нулю. Згідно з рівністю (2) момент  $\vec{M}_{\text{пов}}$  також дорівнює нулю. Це означає, що точка прикладання результуючої поверхневих сил  $\vec{F}_{\text{пов}}$  збігається з центром мас виділеної рідини. Отже, виділена частина рідини буде в стані рівноваги, якщо результуючі масових та поверхневих сил будуть рівні за модулем, протилежні за напрямом і прикладені в центрі мас цієї рідини.

Завдяки легкорухливості частинок рідини та газів *зовнішній тиск на них передається в усі боки рівномірно.*

Це твердження було сформульовано французьким ученим Б. Паскалем (1623–1662) у 1653 р. Закон, який підтверджується на дослідах й узгоджується із законом збереження енергії, знайшов практичне застосування, зокрема у побудові гідравлічних пресів, домкратів, гальмівних систем тощо.

Принцип їх дії наочно відображається у взаємодії двох різних циліндрів з рідиною, закритих поршнями відповідних перерізів  $S_1$  і  $S_2$  (рис. 69). Якщо під дією сили  $F_1$  менший поршень створює

на рідину тиск  $p = \frac{F_1}{S_1}$ , то цей

тиск передається рідиною на поршень із перерізом  $S_2$  й

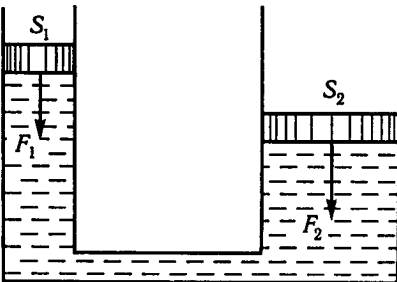


Рис. 69

обумовлює діючу на нього силу, якій за умови рівноваги протидіє сила  $F_2$  :

$$F_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2,$$

звідки  $\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}$ .

Розглянута гідравлічна система дає виграш у силі.

### § 43. Вплив тяжіння на тиск у рідині й газах. Закон Архімеда

Завдяки силам тяжіння нижчі шари рідини й газів зазнають тиску верхніх шарів, тому всередині їх товщі існує тиск, який передається рівномірно в усі боки. Наочно демонструють цей факт за допомогою мембранного манометра – при будь-якій орієнтації площини мембрани тиск у тому самому місці рідини або газу залишається незмінним.

З'ясуємо питання розподілу тиску, зумовленого силами тяжіння у нерухомій рідині. Виділимо в рідині елемент у вигляді вертикального прямого циліндра (рис. 70). На його рівновагу впливають лише сили вертикального напрямку – вага стовпчика  $\rho Shg$  та сили тиску на основи  $p_c S$  і  $p_d S$ ; сили, які діють на бічну поверхню циліндра, зрівноважуються.

За вказаними силами можна записати рівняння рівноваги елемента рідини, виражене через відповідні тиски:

$$p_c = p_d + \rho gh. \quad (1)$$

Із рівняння (1) випливає, що при  $h = 0$   $p_c = p_d$ , тобто тиск рідини на горизонтальному рівні однаковий. Якщо на рідину ззовні діє тиск  $p_0$ , то за законом Паскаля він передається і додається до тиску, зумовленого вагою рідини. У такому разі тиск у рідині на глибині  $h$  становитиме

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (2)$$

де тиск  $p_0$  може бути атмосферним.

За рівнянням (2) визначають тиск рідини на дно посудини і висоту стовпчиків різнорідних рідин у сполучених посудинах.

З'ясуємо залежність тиску газу в полі тяжіння від висоти у посудині, зокрема залежність атмосферного тиску від висоти підняття над рівнем моря. Для цьо-

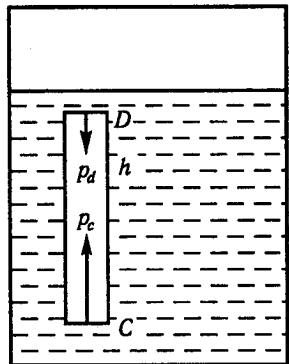


Рис. 70

го виділимо стовп повітря (рис. 71) та зауважимо, що тиск  $p$  на будь-якій висоті  $h$  обумовлюється вагою повітря, яке знаходиться над цим рівнем. Тому з дальшим підняттям на  $dh$  тиск відповідно зменшиться на  $dp$ . Оскільки в тонкому шарі  $dh$  густину повітря  $\rho$  можна вважати сталою, зміна тиску

$$dp = -\rho g dh. \quad (3)$$

Якщо температура газу стала по всій висоті стовпа, то між тиском і густиною існує пропорційна залежність:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0};$$

тому рівняння (3) можна записати у вигляді

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dh.$$

Після інтегрування знаходимо розподіл тиску газу в полі тяжіння

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} h}. \quad (4)$$

Вираз (4) називають *барометричною формулою*. Зауважимо, що вона справджується для спокійної атмосфери незмінного складу і сталої температури.

Розрахунки за формулою (4) показують, що при підніманні вгору на 8 м тиск зменшується на 0,13 Па; до 66 Па він зменшується на висоті 5,6 км. На висоті 19 км зафіксовано тиск 6650 Па, на висоті 22 км – 6000 Па. Розрахункові значення тиску для цих висот зі зрозумілих причин дещо більші.

Розглянуті питання рівноваги та розподілу тиску в рідинах і газах ведуть до усвідомлення сутності закону, сформульованого давньогрецьким ученим Архімедом (287–212 рр. до н. е.): *на тіло, занурене в рідину або газ, діє виштовхувальна сила, що дорівнює вазі витісненої ним рідини або газу.*

Закон Архімеда в шкільному курсі фізики визначається на основі проведених дослідів. У нашому викладі з посиланням на умови рівноваги будь-якого елемента нерухомої рідини або газу (див. рис. 68) архімедова сила є результуючою поверхневих сил, із якими рідини і гази діють на занурене в них тіло; з посиланням на рівняння розподілу тиску в рідинах і газах у полі тяжіння ар-

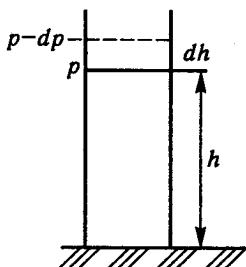


Рис. 71

хімедова сила є результатом різниці тисків на нижню та верхню частини зануреного тіла. Ці сили напрямлені вертикально вгору, прикладені в центрі мас довільно виділеного елемента рідини або газу, що дорівнюють за модулем вазі цього елемента, залишаються такими і тоді, коли виділений об'єм рідини або газу заповнюється зануреним твердим тілом.

З урахуванням архімедової сили  $\vec{F}_A$  і сили тяжіння  $m\vec{g}$  та їхніх моментів визначаються умови рівноважного плавання тіл. Теоретичне обґрунтування цього питання належить російському вченому О. М. Крилову (1863–1945).

Першою умовою плавання є рівність виштовхувальної сили Архімеда та сили тяжіння тіла. Якщо остання менша від ваги витісненої тілом рідини, то воно спливатиме нагору й частково виступатиме з рідини, доки вага плаваючого тіла не зрівняється з вагою витісненої ним рідини.

За другою умовою необхідно, щоб результуючий момент сил, які діють на тіло, дорівнював нулю. Для плаваючого тіла умова задовольнятиметься тоді, коли центр тіла  $C$  і центр мас витісненої рідини  $A$  лежатимуть на одній прямій (рис. 72, а). Звичайно центр мас плаваючого тіла лежить вище від центра мас витісненої рідини.

Якщо корабель нахилився (рис. 72, б) так, що його площина симетрії вже не є вертикальною, то центр мас витісненої рідини  $A$  зміститься за межі цієї площини корабля, унаслідок чого виникне момент пари сил  $\vec{F}_A$  і  $m\vec{g}$ , який намагатиметься повернути корабель у положення рівноваги. Такі умови будуть складатись доти, доки центр мас корабля лежить нижче *метацентра* – точки, в якій вертикаль, що проходить через точку  $A$ , перетинає площину симетрії корабля. Інакше момент пари сил  $\vec{F}_A$  та  $m\vec{g}$  намагатиметься ще більше відхилити корабель від положення рівноваги (рис. 72, в). Чим вище буде метацентр над центром мас корабля, тим більша буде його остійність.

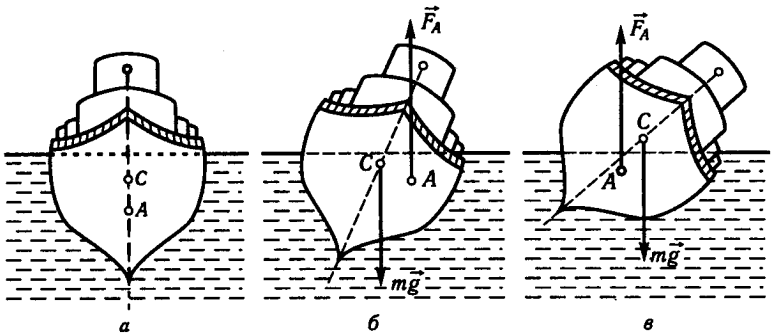


Рис. 72

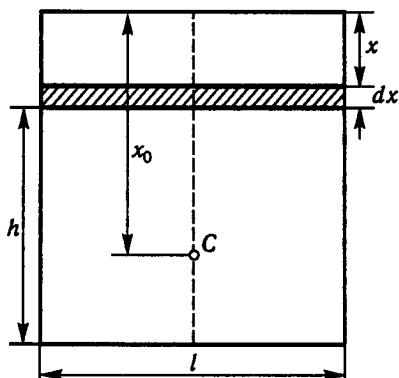


Рис. 73

Найважливішою властивістю корабля є його плавучість, тобто здатність триматись на воді. Мірою плавучості корабля є об'єм витискуваної ним води (водотоннажність корабля).

На законі Архімеда ґрунтуються розрахунки плавучості підводних човнів і понтонів для побудови мостів та підняття затонулих кораблів, плаваючих вантажних кранів, аеростатів і дирижаблів тощо.

**Приклад.** Воду в шлюзі каналу перекривають спеціальним щитом.

Ширина каналу  $l = 4$  м, висота рівня води  $h = 5$  м. Знайти силу  $F$  тиску води на щит і точку її прикладання.

**Розв'язання.** Тиск води на щит рівномірно зростає із заглибленням, але залишається однаковим на будь-якій горизонтальній вузькій смужці  $dx$  на глибині  $x$  (рис. 73). Сила тиску на цю смужку

$$dF = \rho g l x dx. \quad (1)$$

Повну силу  $F$  визначимо інтегруванням сил по всіх таких смужках від 0 до  $h$ :

$$F = \int_0^h \rho g l x dx = \rho g l \frac{h^2}{2}; \quad F = 5 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

З міркувань симетрії точка прикладання сили  $F$  лежить на вертикалі, проведеної через середину щита; позначимо цю точку  $C$ , а її глибину —  $x_0$ . Щоб визначити  $x_0$ , прирівняємо до нуля алгебричну суму всіх моментів сил тиску, що діють на окремі смужки. Силу, яка діє на заштриховану смужку, можна вважати прикладеною в її центрі; тому момент смужки відносно точки  $C$  становитиме

$$dM = \rho g l x dx (x - x_0), \quad (2)$$

де  $(x - x_0)$  — плече сили.

Визначення повного моменту сил зводиться до інтегрування виразу (2) по  $x$  від 0 до  $h$ . Водночас зміна знака моментів сил, що діють на смужки, вищі та нижчі від точки  $C$ , враховується автоматично завдяки зміні знака плеча  $(x - x_0)$  сили. Отже,

$$M = \int_0^h \rho g l x (x - x_0) dx = \rho g l \left( \frac{h^3}{3} - x_0 \frac{h^2}{2} \right) = 0,$$

звідки

$$x_0 = \frac{2}{3} h; \quad x_0 = 3,3 \text{ м.}$$

## § 44. Стаціонарний потік рідин і газів

Вивчення законів руху рідин і газів та сил, з якими рідини і гази діють на тверді тіла, що переміщуються у них, є основним завданням гідро- та аеродинаміки. Такі знання потрібні для спорудження водо- і нафтопроводів, удосконалення наземного, морського та повітряного транспорту, будівництва гідроелектростанцій.

Особливістю рідин і газів є рухливість їхніх частинок. Унаслідок цього рідини та гази змінюють свою форму під дією як завжди малих сил, тобто не виявляють будь-якого опору в деформаціях зсуву. Рідини і гази виявляють пружні сили опору лише тоді, коли змінюється їхній об'єм.

Для опису руху рідин та газів їх поділяють (аналогічно методиці вивчення твердих тіл) на окремі елементи так, щоб кожний з них можна було вважати матеріальною точкою і застосувати до неї загальні закони механіки. Вивчення рідин та газів ускладнюється тим, що їхні елементи можуть змінювати взаємне положення. Однак про рух рідин і газів загалом можна скласти уявлення, якщо простежити за рухом кожної їхньої частинки окремо. Такий метод вивчення руху рідин та газів, запропонований французьким ученим Ж. Л. Лагранжем (1736–1813), зводиться до знаходження траєкторії кожного елемента і його швидкості як функції часу. Методом Лагранжа, зокрема, користуються для опису коливального руху в рідинах.

Інший метод вивчення руху рідин та газів запропонував Л. Ейлер (1707–1783). За цим методом замість дослідження руху кожного елемента рідини або газу визначають швидкість у кожній точці потоку в різний час; ця швидкість стосується не певної, а будь-якої частинки, що міститься в заданій точці потоку. Зрозуміло, що коли будуть знайдені розподіл швидкостей у потоці та характер зміни його в часі, то потік рідини або газу стане повністю визначеним. Іншими словами, за методом Ейлера потік рідини або газу задається полем векторів швидкості.

Експериментально можна скласти уявлення про поле швидкостей за фотографією потоку, якщо з ним пов'язати легкі тверді частинки (алюмінієвий порошок, фарбу тощо). За короткий час експозиції на фотопластинці шлях кожної частинки зобразатиметься рискою, довжина якої пропорційна швидкості частинки та потоку в цій точці.

Потік, у якому поле швидкостей з часом залишається незмінним, називається *стаціонарним*. У ньому будь-яка частинка проходить задану точку простору з такою самою швидкістю, як і всі попередні. Зважаючи на практичне значення, далі вивчатимемо в основному стаціонарний потік.

Графічно потік зображують не векторами швидкостей у кожній точці, а лініями потоку. Вони проводяться так, щоб у кожній точці



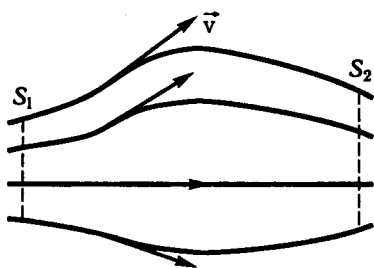


Рис. 74

лінії вектор швидкості був дотичною (рис. 74). Цих ліній проводять стільки, щоб густина їх (тобто кількість ліній на одиницю перпендикулярної до них площадки  $\frac{\Delta N}{\Delta S_n}$ ) була пропорційна швидкості в усіх місцях потоку.

Так, лініями потоку відображають напрям і модуль швидкості в різних місцях потоку: де швид-

кість більша, лінії потоку йдуть гущіше, а де вона менша, – рідше.

Зауважимо, що лінії потоку не слід ототожнювати з траєкторіями частинок; лише для стаціонарного потоку лінії потоку збігаються із траєкторіями частинок.

Частину рідини або газу, обмежену лініями потоку, називають *трубкою потоку*. Оскільки швидкості частинок дотичні до ліній потоку, вони залишаються дотичними також до поверхні трубки потоку; тому частинки рідини у своєму русі не виходять за межі трубки потоку.

З'ясуємо питання про кількість рідини або газу, що протікає через будь-який поперечний переріз трубки потоку за 1 с. Якщо в одному місці площа перерізу трубки  $\Delta S_1$ , швидкість потоку  $v_1$  та густина речовини  $\rho_1$ , а в другому місці – відповідно  $\Delta S_2$ ,  $v_2$ ,  $\rho_2$  (рис. 75), то у стаціонарному потоці рідини або газу матимемо

$$\rho_1 \Delta S_1 v_1 = \rho_2 \Delta S_2 v_2, \quad (1)$$

оскільки між розглянутими перерізами кількість речовини весь час збільшувалася б або зменшувалася і не існувало б стаціонарного потоку.

Розрахунки показують, що у стаціонарному потоці змінами густини не тільки рідини, а й газу можна знехтувати. Тому рівність (1) можна записати так:

$$\Delta S_1 v_1 = \Delta S_2 v_2,$$

а в узагальненому вигляді

$$\Delta S v = \text{const}. \quad (2)$$

Здобута рівність становить сутність теореми про нерозривність потоку. Хоча її доведено для вузької трубки потоку, теорему можна застосувати для всього потоку, якщо швидкості у перерізі мало різняться і для кожного перерізу можна задати одне значення відповідної швидкості.

З теореми про нерозривність потоку випливає, що в тих місцях, де трубка ширша, швидкість потоку менша, і навпаки, де вона вужча, там швидкість потоку більша. Іншими словами, в трубці змінного перерізу швидкість потоку змінюється, зокрема під час переходу з ширшого перерізу у вужчий рідина або газ переміщуються із додатним прискоренням. Постає запитання – під дією якої сили? Відповідь на нього дає рівняння Бернуллі.

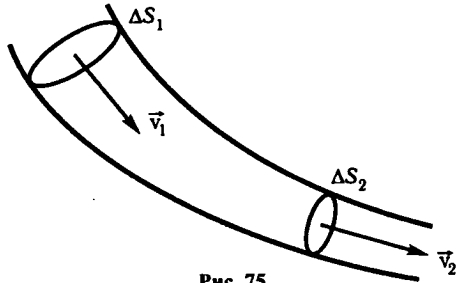


Рис. 75

## § 45. Рівняння Бернуллі

Звичайно рідини і гази у потоках перебувають під певним тиском, який створюється насосними станціями, власною масою рідин або газів тощо. Тиск усередині потоку змінюється під час переходу з ширшого перерізу у вужчий або навпаки. Проте ці зміни істотно не впливають на об'єм і густину речовини у стаціонарному потоці. Коефіцієнт стисливості рідин взагалі дуже малий. Наприклад, для води при 15 °C і тисках до 10 МПа він становить приблизно  $5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ , а при вищих тисках – ще менше. Для газів, швидкості яких менші від швидкості звуку, змінами густини у потоці теж можна знехтувати. Вивчаючи стаціонарний потік рідин та газів, у першому наближенні їх можна вважати нестисливими.

Зважаючи на рухливість частинок рідин і газів, що виявляється в довільній зміні їхньої форми, можна також у першому наближенні знехтувати їхньою в'язкістю, тобто знехтувати силами тертя у разі переміщення одних шарів речовини відносно інших.

Рідина, абсолютно нестислива та нев'язка, називається *ідеальною*.

Для стаціонарного потоку ідеальних рідин і газів справджується рівняння Бернуллі. Щоб з'ясувати його сутність, виділимо з потоку вузьку трубку (рис. 76) і розглянемо деяку кількість рідини, обмежену перерізами  $S_1$ ,  $S_2$ . За час  $\Delta t$  ця рідина зміститься у трубці; верхня межа  $S_1$  переміститься в положення  $S'_1$ , а нижня межа  $S_2$  займе положення  $S'_2$ .

Зміна енергії рідини має дорівнювати роботі, виконаній силами тиску над рідиною. Знайдемо ці величини.

Енергія розглянутої рідини дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергії тяжіння окремих її частинок. Розглядаючи рис. 76,

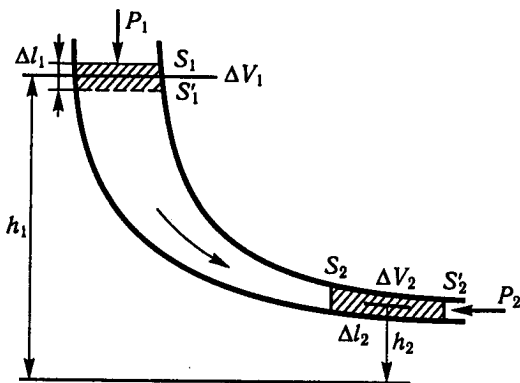


Рис. 76

можна дійти висновку, що енергія рідини змінилася завдяки частинкам поблизу верхньої і нижньої меж (у заштрихованих об'ємах), які за час  $\Delta t$  залишили місця, що належали виділеному об'єму рідини на початку. Енергія частинок, які через час  $\Delta t$  залишилися в незаштрихованій частині об'єму рідини, така сама, як і тих частинок, що займали цю частину об'єму на початку, оскільки у стаціонарному потоці в тих самих точках різні частинки мають ту саму швидкість, а отже, ту саму кінетичну та потенціальну енергію.

Із зазначеного випливає, що зміна енергії розглянутої рідини дорівнюватиме різниці енергії частинок у заштригованих об'ємах  $\Delta V_1$  і  $\Delta V_2$ . Оскільки потік неперервний, а рідина нестислива,  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ . Нехай ці об'єми настільки малі, що для частинок у кожному з них можна вважати однаковими швидкість  $v$ , висоту  $h$  та тиск  $p$ . Тоді для різниці енергії матимемо такий вираз:

$$\Delta E = \left( \frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2 \right) - \left( \frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1 \right), \quad (1)$$

де  $\rho \Delta V = \Delta m$  – маса речовини в об'ємі  $\Delta V$ ;  $\rho$  – густина рідини.

Роботу сил тиску, що виконується над рідиною за час  $\Delta t$ , визначимо за тиском  $p$ , площею перерізу  $S$  і зміщенням  $\Delta l$  верхньої та нижньої меж рідини. Зауважимо, що сила тиску в нижньому перерізі напрямлена проти зміщення, бо з якою силою рідина діє на рідину, що є перед нею, такої самої вона зазнає протидії. Отже, для роботи матимемо вираз

$$\Delta A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V. \quad (2)$$

Якщо прирівняти вирази (1) і (2), скоротити їх на  $\Delta V$  та згрупувати члени з однаковими індексами, то дістанемо

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \quad (3)$$

Оскільки для розгляду деякої кількості рідини у трубці потоку перерізи були взяті довільно, рівність (3) справджується для всіх перерізів цієї трубки потоку, а отже, можна записати

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const.}$$

Це важливе рівняння гідродинаміки вивів швейцарський вчений Д. Бернуллі (1700–1782) у 1738 р. Воно є окремим вираженням загального закону збереження і перетворення енергії стосовно стаціонарного потоку ідеальної рідини. Записане для одиниці об'єму рідини рівняння стверджує, що *в усіх перерізах трубки потоку сума кінетичної енергії, потенціальної енергії тяжіння та потенціальної енергії тиску залишається сталою*. Рівняння з достатньою точністю справджується для реальних рідин, у яких в'язкість мала, а також для газів.

## § 46. Наслідки рівняння Бернуллі

Розглянемо деякі наслідки рівняння Бернуллі та прилади, дія яких пояснюється цим рівнянням.

1. Якщо потік горизонтальний, то рівняння дещо спрощується і набуває такого вигляду:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Звідси випливає, що там, де швидкість потоку більша, тиск менший, і навпаки. Зокрема, у трубці змінного перерізу, коли рідина переходить з ширшої частини трубки у вузьку, збільшення швидкості супроводиться зменшенням тиску:

$$\frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = p_1 - p_2.$$

Ця різниця тисків визначає прискорювальну силу, що діє на одиницю площі потоку рідини.

2. Значне зниження тиску у швидких струменях рідин або газів використовують при конструюванні водоструминних, ртутних або масляних насосів, інжекторів, пульверизаторів тощо.

Розглянемо будову і дію водоструминного насоса (рис. 77). У ньому вода з водопроводу потрапляє у трубку, яка звужується до

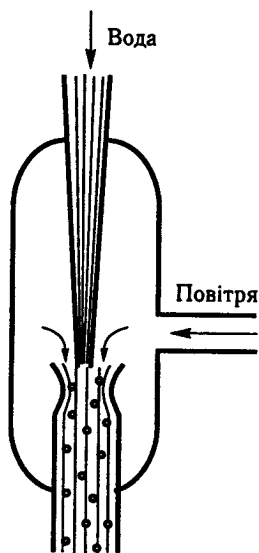


Рис. 77

кінця, унаслідок чого швидкість води на виході дуже збільшується, а тиск знижується.

У цю область низького тиску засмоктується повітря з резервуара, в якому воно розріджується, і потім виноситься струменем води назовні. Такими насосами досягають розрідження до  $10^4$  Па.

У ртутних та масляних насосах повітря засмоктується відповідно струменями пари ртуті або масла; інжектор – пароструминний насос, призначений для засмоктування і подавання води у парові котли; у пульверизаторі струмінь повітря засмоктує та розпилює рідину.

Зниженням тиску у швидких потоках рідин і газів пояснюється втягуюча дія повітря поблизу швидкого поїзда, втягуюча дія потоку води в каналах і річках, збільшення тяги в димоходах під час вітру тощо.

3. Для вимірювання швидкості потоку рідини або газу використовується прилад, запропонований французьким ученим А. Піто (1695–1771). Цей прилад має дві трубки:

одну з отвором проти потоку й другу з отвором, паралельним потоку (рис. 78, а). Трубки з'єднано з диференціальним манометром (рис. 78, б). В отворі першої трубки швидкість рідини або газу дорівнює нулю, а в отворі другої швидкість потоку зберігається. Застосувавши рівняння Бернуллі для частинок потоку в отворах трубок, дістанемо

$$p_1 = \frac{\rho v^2}{2} + p_2. \quad (1)$$

Складову  $\frac{\rho v^2}{2}$ , що має розмірність тиску, називають *динамічним тиском*, а складову  $p_2$  – *статичним*.

Із рівняння (1) визначимо швидкість потоку

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}. \quad (2)$$

Тут  $\rho$  – густина речовини у потоці;  $(p_1 - p_2)$  знаходять за різницею висот рідини в манометрі (див. рис. 78, а). Відповідно до формули (2) можна проградувати манометр у трубці Піто для вимірювання швидкості потоку (див. рис. 78, б). Трубку Піто використовують для вимірювання швидкості кораблів і літаків.

Із рівняння (1) випливає, що у двох окремих вертикальних трубках, уведених отворами в потік (рис. 79), рідина підніматиметься

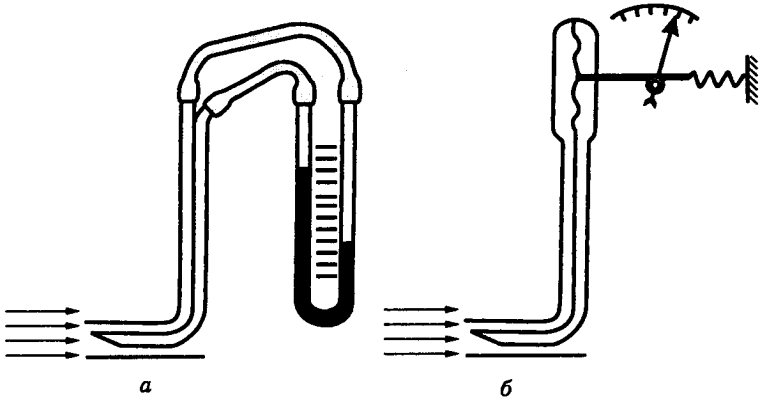


Рис. 78

так, що тиск стовпчика рідини у трубці 1 дорівнюватиме сумі динамічного і статичного тисків у потоці, а у трубці 2 – статичному тиску.

4. Знайдемо швидкість витікання рідини з бака (рис. 80). Для цього виділимо в рідині трубку потоку (показану штриховою лінією) та застосуємо до її перерізів (узятих один – на поверхні рідини в баці, а інший – в отворі витікання) рівняння Бернуллі. Якщо при цьому врахувати, що тиски в обох перерізах однакові й дорівнюють атмосферному, а швидкість у перерізі на поверхні рідини в баці прирівняти до нуля, то дістанемо

$$\rho gh_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh_2.$$

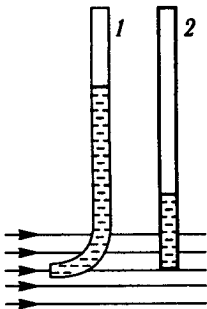


Рис. 79

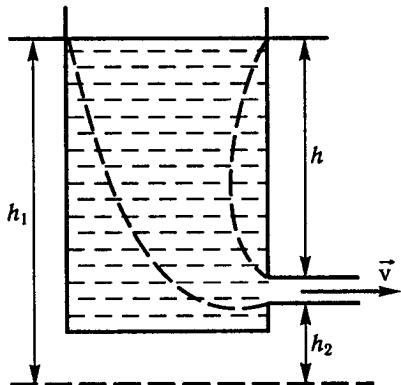


Рис. 80

Звідси знаходимо  $v$  – швидкість витікання рідини з бака:

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

Оскільки  $h_1 - h_2 = h$  – висота рівня рідини в баці над отвором витікання, остаточно

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Цю формулу вивів італійський вчений Е. Торрічеллі (1608–1647) у 1641 р. З неї випливає, що швидкість витікання рідини (ідеальної) з посудини така, якої набуло б тіло, вільно падаючи з висоти  $h$ .

**Приклад.** Циліндричну посудину заввишки  $h_0 = 70$  см із площею дна  $S = 600$  см<sup>2</sup> заповнено водою. У дні посудини утворився отвір  $S_1 = 1$  см<sup>2</sup>. За який час витече вода з посудини?

**Розв'язання.** Взв'язавши до уваги, що швидкість витікання води з посудини з часом змінюється, оскільки змінюється рівень води  $h$ , визначимо спочатку її об'єм витікання за час  $dt$ :

$$dV = S_1 v dt,$$

де  $v = \sqrt{2gh}$  ( $h$  – рівень води в заданий момент часу); тому

$$dV = S_1 \sqrt{2gh} dt. \quad (1)$$

Цей об'єм витікання можна виразити через зниження рівня води:

$$dV = -S dh. \quad (2)$$

Якщо прирівняти вирази (1) і (2) та розділити змінні, то дістанемо диференціальне рівняння

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{S_1}{S} \sqrt{2g} dt.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, маємо

$$2\sqrt{h} = -\frac{S_1}{S} \sqrt{2g} t + C. \quad (3)$$

Знайдемо сталу інтегрування. Оскільки при  $t = 0$   $h = h_0$ , знаходимо  $C = 2\sqrt{h_0}$ . Тоді розв'язок (3) набирає вигляду

$$\sqrt{h_0} - \sqrt{h} = \frac{S_1 \sqrt{2g}}{2S} t. \quad (4)$$

У разі повного витікання води ( $h = 0$ ) за формулою (4) знаходимо

$$t = \frac{2S}{S_1} \sqrt{\frac{h_0}{2g}}; \quad t = 227 \text{ с.}$$

## § 47. В'язкість рідин і газів

*В'язкістю* називають властивість рідин і газів протидіяти відносному переміщенню їхніх суміжних частин чи шарів. Унаслідок в'язкості у реальних рухомих рідинах та газах виникає внутрішнє тер-

тя і діють відповідні сили. Кількісно в'язкість рідин і газів оцінюється *коефіцієнтом в'язкості*.

І. Ньютон виявив, що сила  $F$  внутрішнього тертя пропорційна градієнту швидкості  $\left(\frac{\Delta v}{\Delta z}\right)$  та площі  $S$  суміжних шарів, між якими діє сила тертя:

$$F = \eta \left(\frac{\Delta v}{\Delta z}\right) S, \quad (1)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості.

Градієнт швидкості в цій формулі виражає зміну швидкості, розраховану на одиницю відстані по нормалі між розглянутими шарами,  $\Delta z$  – відстань між шарами (див. рис. 32). Розмірність одиниці градієнта швидкості –  $\text{с}^{-1}$ .

Коефіцієнт в'язкості  $\eta$  залежить від виду рідини або газу та їх температури, причому з підвищенням температури в'язкість рідин дуже зменшується, а в'язкість газів збільшується.

Одиницею коефіцієнта в'язкості в СІ відповідно до формули (1) є  $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = \text{Па} \cdot \text{с}$  (паскаль-секунда).

На подолання сил внутрішнього тертя у потоці весь час витрачається частина енергії рідини або газу. Зокрема, про це свідчить спад тиску у потоці рідини по горизонтальній трубі однакового перерізу (рис. 81). Якби рідина була ідеально нев'язка, то тиск в усіх перерізах був би однаковий.

Досліджуючи потік рідини в капілярних трубках, у яких найкраще зберігається стаціонарний потік (усуваються перемішування і завихрювання рідини), французький вчений Ж. Л. М. Пуазейль (1799–1869) виявив, що спад тиску  $\Delta p$  у потоці значною мірою залежить від радіуса  $r$  трубки, коефіцієнта в'язкості  $\eta$  рідини, довжини  $l$  трубки та швидкості  $v$  потоку, а саме:

$$\Delta p = \frac{8\eta l v}{r^2}. \quad (2)$$

Якщо з цієї залежності визначити швидкість і підставити у формулу для обчислення об'єму рідини  $V = \pi r^2 v t$ , що витікає крізь капіляр за час  $t$ , то матимемо

$$V = \frac{\pi r^2 \Delta p}{8\eta l} t. \quad (3)$$

У такому вигляді формулу Пуазейля застосовують для дослідного визначення коефіцієнта в'язкості рідини

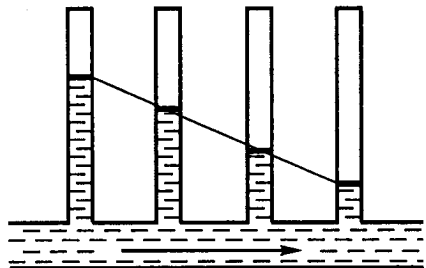


Рис. 81



Таблиця 4

Рідина	$\eta$ , Па · с		Газ	$\eta$ , $10^{-7}$ Па · с	
	0 °С	15 °С		0 °С	15 °С
Вода	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	Повітря	171	181
Гліцерин	4,6	1,1	Водень	86	89
Ртуть	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	Діоксид вуглецю	139	146

( $\Delta p$  – різницю тисків на кінцях трубки при вертикальному її положенні – знаходять за висотою стовпчика рідини над верхнім перерізом капіляра). Відповідний прилад для вимірювання коефіцієнта в'язкості рідин називається *віскозиметром*.

В'язкість є важливою характеристикою рідин і газів. Унаслідок в'язкості вода та повітря чинять значний опір швидкохідному транспорту; у трубопроводах в'язкість рідин і газів обумовлює спад тиску; в'язкість характеризує якість технічних мастил тощо.

Значення коефіцієнтів в'язкості деяких рідин та газів наведено в табл. 4.

## § 48. Ламінарний і турбулентний потоки

Внутрішнє тертя істотно впливає на характер течії рідин і газів.

У потоках рідин та газів, що мають малу швидкість, за відсутності сторонніх збуджень зберігається певне розміщення шарів з різними швидкостями – одні шари ковзають по поверхні інших без перемішування. Такий потік називають *ламінарним*. Якщо в ламінарний потік рідини ввести забарвлену струминку рідини, то вона мало розпливається на всьому шляху потоку (рис. 82). У газах ламінарний потік можна виявити за сталим розміщенням вовняної нитки, яку прив'язують одним кінцем до дроту і вводять у потік.

Коли швидкість потоку стає значною, спочатку біля стінок труби, а потім по всьому об'єму виникають безладні завихрення рідини або газу – відбувається перемішування їхніх шарів. Такий потік називають *турбулентним*. Якщо в турбулентний потік рідини ввести забарвлену струминку рідини, то вона швидко розмивається по всьому об'єму (рис. 83); вовняна нитка, внесена в турбулентний потік повітря, весь час тріпотить і звивається.

У трубі з турбулентним потоком різко спадає тиск. Якщо в ламінарному потоці спад тиску пропорційний швидкості (закон Пуазейля), то в турбулентному потоці він пропорційний квадрату швидкості рідини або газу. Іншим стає розподіл швидкостей у перерізі: біля стінок труби градієнт швидкості стає дуже великим, а в середній частині труби – незначним.

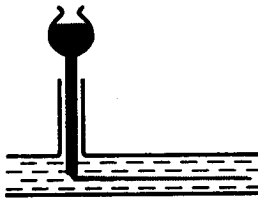


Рис. 82

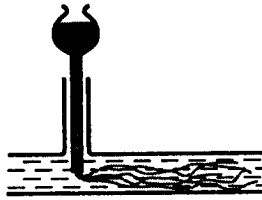


Рис. 83

Англійський вчений О. Рейнольдс (1842–1912), досліджуючи потоки рідин та газів, виявив, що характер будь-якого потоку визначається безрозмірним числом

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина рідини або газу;  $v$  – швидкість потоку;  $l$  – діаметр труби;  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості. Знайдене таким способом число називають *числом Рейнольдса* ( $Re$ ).

Було виявлено, що поки для потоку в круглій трубці  $Re < 2000$ , потік ламінарний, а коли  $Re > 2000$ , потік нестійкий і легко переходить у турбулентний. Це число є ніби ознакою подібності різних потоків: потоки різних рідин та газів у трубах різного перерізу будуть однакового характеру, якщо числа Рейнольдса для них однакові.

Число Рейнольдса використовують для визначення опору і підйимальної сили у випадках руху твердих тіл у рідинах та газах. Його записують ще так:

$$Re = \frac{v l}{\nu}, \quad (2)$$

де  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  – кінематична в'язкість ( $\eta$  – динамічна в'язкість).

## § 49. Сила лобового опору

Важливим завданням гідро- й аеродинаміки є вивчення сил, що діють на тверді тіла, які рухаються в рідинах і газах. Однією з таких є *сила лобового опору*. На подолання лобового опору витрачається значна потужність. Наприклад, у автомобілі «Таврія» при швидкості 110 км/год витрата потужності розподіляється так: на тертя у трансмісії – 3680 Вт, на тертя кочення шин – 14,72 кВт і на подолання опору повітря – 18,4 кВт.

Сила лобового опору є результируючою двох сил: *сили внутрішнього тертя* та *сили тиску середовища*. З'ясуємо сутність цих двох складових. Зазначимо, що за теорією відносності рухів ці самі сили діятимуть на нерухоме тіло у в'язкому рухомому потоці.

Якщо тверде тіло рухається у в'язкому середовищі, то на його поверхні утворюється супровідний потік рідини або газу. Шар безпосереднього прилипання до твердого тіла переміщується з ним як одне ціле, від нього внаслідок внутрішнього тертя починають рухатися віддалені шари середовища. З віддаленням від поверхні твердого тіла швидкість шарів середовища зменшується, на деякій відстані вона вже дорівнює нулю. Так навколо твердого тіла утворюється потік зі значним градієнтом швидкості. Цей потік інакше називають *пограничним шаром*. Його товщина тим більша, чим більша в'язкість середовища. Сили внутрішнього тертя, що виникають у пограничному шарі з твердим тілом, чинять опір його руху.

Внутрішнє тертя у пограничному шарі перешкоджає повному обтіканню тіла рідиною або газом і зумовлює відривання потоку від поверхні тіла в його тильній частині. Позаду тіла утворюється область завихрення, в якій тиск менший від тиску набігаючого потоку в лобовій частині. Така різниця тисків протидіє руху твердого тіла.

Це можна проілюструвати на прикладі обтікання в'язкою рідиною нерухомого циліндра (рис. 84). У лобовій точці *A* циліндра швидкість частинок потоку дорівнює нулю, тому тиск рідини тут найбільший. Уздовж поверхні циліндра на шляху від точки *A* до точок *C* та *D* швидкість частинок рідини збільшується, тому тиск зменшується. У точках *C* і *D* частинки потоку мають найбільшу кінетичну енергію. Якби рідина була ідеальною, то завдяки цій енергії частинки далі переміщувалися б у область зростаючого тиску і якраз досягли б точки *B*, де їхня швидкість дорівнює нулю, а тиск найбільший. Так закінчувалося б повне обтікання циліндра, а результуюча сила тиску на тіло дорівнювала б нулю.

У реальних рідинах в'язкість обумовлює зменшення енергії частинок при обтіканні тіла, тому енергія частинок у точках *C* та *D* буде недостатньою, щоб перейти через область зростаючого тиску і потрапити в точку *B*. Частинки зупинятимуться ближче до точки *B*, а потім зміщуватимуться назад у бік меншого тиску. Коли зворотний потік зіткнеться з основним, у тильній частині циліндра виникнуть завихрення, які відривають основний потік від тіла. За тілом в області завихрення тиск спадає, тому в лобовій частині буде надлишок тиску.

Співвідношення між складовими силами лобового опору, тобто силою тертя та силою тиску, залежить від форми тіла і швидкості його руху, точні-

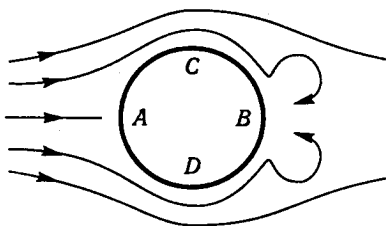


Рис. 84

ше – від числа Рейнольдса (водночас для  $l$  у його виразі береться лінійний розмір перерізу тіла, а  $v$  – відносна швидкість руху тіла). Якщо форма тіла така, що за ним утворюються дуже малі завихрення (рис. 85), то сила тиску також мала. Такої форми надають сучасним швидкісним літакам, автомобілям тощо.

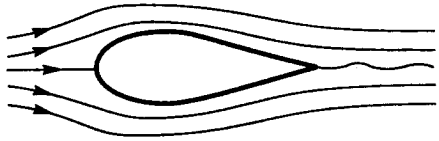


Рис. 85

Дослідження показали, що коли швидкості малі (в межах кількох сантиметрів за секунду), сила лобового опору пропорційна швидкості, а коли великі – квадрату швидкості:

$$F_1 = k_1 v; \quad (1)$$

$$F = kv^2. \quad (2)$$

Важливе практичне значення мають точніші формули для визначення цих сил, зокрема формула, виведена англійським ученим Дж. Г. Стоксом (1819–1903) у 1851 р. для обчислення лобового опору кульки при малих швидкостях її руху у в'язкому середовищі:

$$F_1 = 6\pi r\eta v, \quad (3)$$

де  $r$  – радіус кульки;  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості середовища, а також формула Ньютона для обчислення лобового опору будь-якого тіла:

$$F = C_x \rho S v^2, \quad (4)$$

де  $C_x$  – коефіцієнт опору;  $\rho$  – густина середовища;  $S$  – площа проекції тіла на площину, перпендикулярну до напрямку руху (діаметральний переріз).

Коефіцієнт опору  $C_x$  є функцією числа Рейнольдса і залежить від форми тіла. Наприклад, при  $Re \approx 10^5$  коефіцієнт опору має такі значення:

Пластинка, перпендикулярна до потоку	0,64
Куля	0,25
Обтічне тіло	0,013

Функція  $C_x = f(Re)$  має складний характер. Велика заслуга в її вивченні належить російському вченому М. Є. Жуковському (1847–1921). Він вивів теоретичні формули для визначення коефіцієнта опору і розробив методику дослідження моделей, геометрично подібних до реальних тіл, за допомогою аеродинамічної труби. Зокрема було виявлено, що результати досліджень на моделі відповідатимуть співвідношенню сил, що діють на об'єкт, коли для них будуть однакові значення числа Рейнольдса.

В аеродинамічній трубі нерухома модель обдувається швидким потоком повітря, який створюється потужним компресором або

батаресю газгольдерів. Досліджувана модель з'єднується важелями і тягами з аеродинамічними терезами, які вимірюють сили, що діють на неї. Особливого значення такі дослідження набули в наш час, коли швидкості літальних апаратів досягають і в кілька разів перевищують швидкість звуку.

При надзвукових швидкостях на рух тіла істотно впливають зміни густини середовища. Їх вивчення є предметом газодинаміки. Швидкість тіла тут оцінюють числом *Маха* ( $M$ ), тобто відношенням швидкості тіла  $v$  до швидкості звуку  $a$ :

$$M = \frac{v}{a}. \quad (5)$$

Коефіцієнт опору тіла з наближенням до звукової швидкості зростає, при  $M = 1,2$  він набуває максимального значення і потім спадає. Ця залежність для ракети має такий вигляд:

$M$	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$C_x$	0,30	0,56	0,60	0,84	0,68	0,48	0,40	0,34	0,30	0,26

Підвищений опір поблизу звукової швидкості називають *звуковим бар'єром*. Для пояснення його існування треба враховувати таке. Рухаючись, тверде тіло створює певний тиск на зустрічне повітря і змушує його до обтікання. Цей імпульс тиску поширюється у різних напрямках зі швидкістю звуку. Поки тіло має дозвукову швидкість, зустрічне повітря заздалегідь піддається дії імпульсу тиску, а отже, поступово збільшує свою швидкість і плавно обтікає тіло. При надзвуковій швидкості тіла імпульс тиску ніби стікає назад, не виходячи за межі деякого конуса з вершиною в лобовій частині тіла. Зустрічне повітря піддається раптовій дії тіла, густина та тиск повітря дуже збільшуються. Перед тілом утворюється смуга значного ущільнення – *ударна хвиля* (рис. 86). Вона створює додатковий *хвильовий опір*.

При надзвукових швидкостях найдосконалішими є гостролобі форми тіл, оскільки перед ними виникають менш потужні ударні хвилі. Таку форму мають снаряди, ракети тощо.

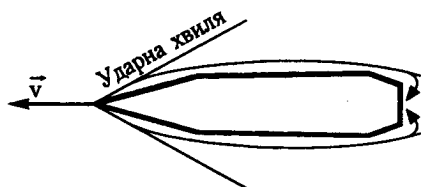


Рис. 86

**Приклад 1.** Свинцева куля діаметром 5 мм пролітає у повітрі зі швидкістю 300 м/с. Вважаючи, що густина повітря дорівнює  $1,2 \text{ кг/м}^3$ , визначити:

- число Рейнольдса;
- прискоренням, з яким рухається куля.

**Розв'язання.** а) Характер руху середовища (або тіла відносно середовища) визначається безрозмірним числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}. \quad (1)$$

Підставивши у формулу (1) задані в умові величини і табличне значення в'язкості повітря  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$  при  $0^\circ \text{C}$ , знайдемо

$$Re = \frac{1,2 \cdot 300 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 10^5.$$

б) На рухому кулю діє сила лобового опору  $F_x = C_x \rho S v^2$ , яка зумовлює відповідне від'ємне прискорення

$$a = -\frac{C_x \rho S v^2}{m}. \quad (2)$$

Урахуємо, що при  $Re = 10^5$  для кулі  $C_x = 0,25$ ;  $\rho$  – густина повітря;  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  – діаметральний переріз кулі;  $m = \rho_c \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3$  – маса свинцевої кулі.

Підставивши відповідні величини у вираз (2) і спростивши його, дістанемо

$$a = -\frac{3C_x \rho v^2}{2\rho_c d},$$

а в числовому вираженні

$$a = -\frac{3 \cdot 0,25 \cdot 1,2 \cdot 9 \cdot 10^4}{2 \cdot 11,3 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = -720 \text{ м}/\text{с}^2.$$

**Приклад 2.** Яку потужність поглинає повітряний потік, що набігає на автомобіль, швидкість руху якого 100 км/год? Площа лобової поверхні машини становить приблизно  $2,5 \text{ м}^2$ , густина повітря дорівнює  $1,3 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

**Розв'язання.** Потужність, яку поглинає набігаючий потік повітря, можна визначити за потужністю автомобіля, яку він витрачає під час свого руху в безповітряному середовищі. За такої умови автомобіль виштовхує повітря із зазначеною швидкістю, надаючи йому кінетичної енергії (виконуючи роботу).

Витіснена маса повітря за одиницю часу

$$m = \rho S v.$$

Надана їй кінетична енергія за одиницю часу – шукана потужність

$$N = \frac{\rho S v^3}{2};$$

$$N = \frac{1,3 \cdot 2,5 \left(\frac{10^3}{36}\right)^3}{2} = 34,8 \text{ кВт}.$$

## § 50. Падіння тіл у в'язкому середовищі

Відомо, що в порожнечі всі тіла падають з однаковим прискоренням. На тіло, що падає у в'язкому середовищі, крім сили тяжіння  $mg$  і виштовхувальної сили  $P'$ , яку знаходять за законом Архі-

меда, діє ще сила лобового опору  $F$ . Тому рівняння динаміки для нього має такий вигляд:

$$ma = mg - P' - F. \quad (1)$$

Силу  $mg$  та виштовхувальну силу  $P'$  можна вважати сталими; сила опору  $F$  зі збільшенням швидкості падіння зростає і через деякий час становитиме

$$F = mg - P'; \quad a = 0. \quad (2)$$

Отже, падіння тіла у в'язкому середовищі лише спочатку буде відбуватися із прискоренням, а через незначний проміжок часу тіло падатиме зі сталою швидкістю. Значення цієї швидкості для різних тіл різне, воно залежить також від середовища. Наприклад, в атмосфері малі дошові краплі падають зі швидкістю 0,2 м/с, великі – 10 м/с; швидкість падіння людини становить 60 м/с, а з парашутом, коли штучно збільшується опір, – 5 м/с.

Оскільки маса тіла пропорційна його об'єму, тобто кубу лінійних розмірів, а сила опору – площі перерізу тіла, тобто квадрату лінійних розмірів, зі збільшенням розмірів однорідного тіла певної форми його сила тяжіння зростає швидше, ніж сила опору. Тому більші тіла падають у в'язкому середовищі з більшою швидкістю, ніж менші тіла тієї самої форми.

Оскільки швидкість падіння малих тіл у в'язкому середовищі мала, для таких тіл кулястої форми можна застосувати закон Стокса:

$$F = 6\pi\eta r v,$$

де  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості рідини;  $r$  – радіус кульки;  $v$  – її швидкість.

Підставивши це значення сили в рівняння (2) і виразивши  $mg$  та  $P'$  через об'єм кульки, її густину  $\rho$ , густину середовища  $\rho'$ , прискорення вільного падіння  $g$ , можна знайти швидкість падіння кульки, а саме:

$$6\pi\eta r v = \rho g \frac{4}{3}\pi r^3 - \rho' g \frac{4}{3}\pi r^3,$$

звідки

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho - \rho'}{\eta} g r^2. \quad (3)$$

Цю формулу застосовують для обчислення коефіцієнта в'язкості рідини і визначення радіуса дуже маленьких частинок.

Треба пам'ятати, що закон Стокса, а отже, і формула (3), досить точно справджуються лише для випадків, коли  $Re < 1$ . Для дослідження в'язкої рідини за падінням металевих або фарфорових

кульок радіус останніх має бути менше 1 мм. Формула дає правильні результати для краплинок рідини радіусом 0,1 мм та менше, для великих дощових крапель вона непридатна.

## § 51. Підймальна сила крила літака

На крило літака під час польоту діють сила лобового опору і підймальна сила. Конструктори цим силам приділяють особливу увагу. Відомо, що сила лобового опору шкідлива, на її подолання марно витрачається потужність двигунів літака. Зменшення сили опору досягається вибором обтічної форми крила.

*Підймальна сила*, яка зрівноважує силу тяжіння літака у польоті, утворюється завдяки використанню крила особливого профілю — профілю Жуковського (рис. 87). Механізм виникнення підймаль-

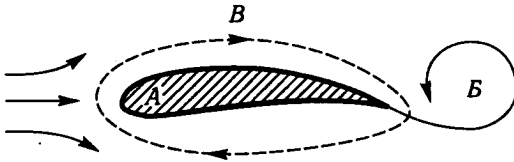


Рис. 87

ної сили на крилі такий. Внаслідок великої швидкості літака та специфічної форми його крила вже на початку польоту за крилом *A* виникає і зривається потужний розгінний вихор *B*, в якому частинки повітря рухаються у напрямі проти руху годинникової стрілки, а навколо крила виникає компенсаційна циркуляція повітря *B* у протилежному напрямі.

Циркуляція накладається на основний потік повітря зверху і знизу крила, збільшуючи його швидкість зверху та зменшуючи знизу. Тиск повітря на крило стає знизу більший, а зверху менший. Знизу крила виникає результуюча сила тиску *R* (рис. 88). Вертикальна складова її  $F_y$  є підйальною силою, а горизонтальна  $F_x$  — силою лобового опору.

Формулу для підйальної сили крила літака вивів М. Є. Жуковський у 1905–1906 рр.:

$$F_y = C_y \rho S v^2, \quad (1)$$

де  $C_y$  — коефіцієнт підйальної сили;  $\rho$  — густина повітря;  $S$  — площа крила;  $v$  — швидкість польоту.

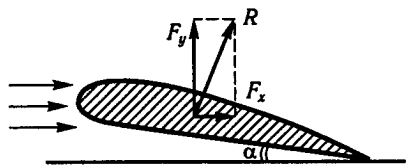


Рис. 88



Складову опору  $F_x$  визначають за формулою

$$F_x = C_x \rho S v^2, \quad (2)$$

де  $C_x$  – коефіцієнт сили опору.

Коефіцієнт підйимальної сили  $C_y$  залежить від форми крила і нахилу його до напрямку польоту – *кута атаки*  $\alpha$  (див. рис. 88).

Найвигідніший кут атаки для заданого крила буде при найбільшому значенні відношення

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{C_y}{C_x}.$$

Це відношення називають *якістю крила*. Максимальне значення воно має при кутах атаки  $4 \dots 6^\circ$ .

Основоположником теорії підйимальної сили крила літака та експериментальної аеродинаміки був М. Є. Жуковський (1847–1921). Його називали батьком російської авіації.

З переходом до надзвукових швидкостей профіль і розміри крила зазнали істотних змін. Крило надзвукових літаків має тонкий профіль і гострий передній край. При певному куті атаки під крилом утворюються потужна ударна хвиля та більший тиск, ніж над крилом. Підвищений тиск знизу крила зумовлює підйимальну силу літака. Тому в надзвукових літаках крило має значно менші розміри і дуже скошене назад.

## § 52. Передумови спеціальної теорії відносності. Постулати Ейнштейна

Спеціальна теорія відносності – одне з найвидатніших досягнень фізики ХХ ст.; вона істотно змінила наші поняття про простір і час. Перед цим у класичній механіці утвердилися уявлення про існування незалежного евклідового простору та абсолютного часу, безвідносного до простору і поведінки матеріальних об'єктів у ньому. Такі погляди знайшли аналітичне відображення у перетвореннях Галілея для інерціальних систем відліку

$$x = x_1 + vt; \quad y = y_1; \quad z = z_1; \quad t = t_1 \quad (1)$$

та у формулі для додавання швидкостей

$$\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}.$$

У цих виразах привертає увагу однаковий час фіксації об'єкта незалежно від положення спостерігача або системи відліку. Цим самим неявно визначається існування миттєвих сигналів з місця події та передачі взаємодії між тілами з нескінченно великою швидкістю.

В утвердженні уявлень про існування «миттєвостей» вирішальну роль зіграли світлові сигнали, які доставляють значну інформацію про навколишній світ. Оскільки в щоденному житті скінченна швидкість світла помітно не проявляється, підсвідомо вона вважалася нескінченно великою.

З подальшим розвитком науки було виявлено, що у природі миттєвих сигналів не існує, що швидкість світла скінченна – близько  $3 \cdot 10^8$  м/с. Аналізуючи дійсний стан речей, А. Ейнштейн зауважив, що в науці при фактичному вимірюванні часу  $t$  віддаленої події, як і в буденному житті, використовуються не уявні миттєві, а реальні світлові сигнали, які поширюються з кінцевою швидкістю  $c$ . Отже, цей час пов'язаний із часом спостереження не рівністю  $t_r = t$ , а виразом

$$t_r = t + \frac{r}{c}, \quad (2)$$

де  $r$  – відстань до події. В останньому виразі вже відображено нерозривний зв'язок між поняттями простору і часу: для того щоб

зафіксувати час  $t$  деякої події, необхідно знати відстань  $r$  до цієї події та синхронізувати годинники.

А. Ейнштейн запропонував спосіб синхронізації годинників за допомогою світлових сигналів. Нехай сигнал, що посилається з точки  $A$  в часі  $t_A^{\text{відпр}}$ , доходить до точки  $B$ , відбивається і повертається у точку  $A$  в момент часу  $t_A^{\text{прих}}$ . З урахуванням сталості швидкості світла спостерігач у точці  $A$  визначить, що тривалість поширення сигналу між точками

$$\Delta t = \frac{1}{2} (t_A^{\text{прих}} - t_A^{\text{відпр}}).$$

Після цього спостерігач у точці  $A$  пропонує спостерігачеві в точці  $B$  у момент одержання сигналу зафіксувати на годиннику час  $t_1$ , а самому послати сигнал у момент  $t_1 - \Delta t$ . Таким чином можна синхронізувати всі годинники в системі. Для синхронізації годинників двох систем спостерігачі сходяться у початках координат і в момент збігу останніх фіксують на своїх годинниках однакові покази. А. Ейнштейн слушно зауважував: «Щоб надати поняттю часу фізичного змісту, потрібні такі процеси, які дали б можливість установити зв'язок між різними точками простору». Skorистаємося цим висловом і покажемо, що просторові та часові дані мають не фіктивне, а реальне фізичне значення.

Лабораторні виміри швидкості світла показали, що в різних середовищах вона різна. Для пояснення поширення світлових хвиль у вакуумі було введено поняття особливого середовища – ефіру. Фізик, який спирався на формулу для додавання швидкостей у класичній механіці, змушений був констатувати, що вона залежить також від швидкості системи відліку. З цих міркувань у 1881 р. американський фізик А. А. Майкельсон (1852–1931) поставив оптичні досліди з метою визначення абсолютного руху Землі у світовому просторі. З погляду спостерігача на Землі він сподівався визначити

рух Землі відносно нерухомого ефіру, порівнюючи швидкості світла в різних напрямках щодо руху Землі у просторі. Для порівняння швидкостей світла в різних напрямках було використано спеціальний інтерферометр (рис. 89).

У дослідах пучок світла від джерела  $S$ , потрапляючи на напівпрозору посріблену пластинку  $\Pi$ , розділявся на два промені: один  $\Pi M$  – у напрямі руху Землі, інший  $\Pi M'$  – у напрямі, перпендикулярному до руху Землі. Відбиваючись від дзеркал  $M$  і  $M'$ ,

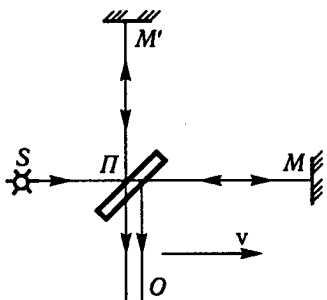


Рис. 89

обидва промені поверталися знову до пластинки  $\Pi$ , а від неї виходили в напрямі  $\Pi O$  та інтерферували. Оскільки відстані  $\Pi M$  і  $\Pi M'$  рівні, різниця ходів обох променів може виникнути лише через різний час проходження відрізків  $\Pi M = \Pi M' = l$ . Час проходження першим променем відрізка  $\Pi M$  туди й назад

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2l}{c} (1+\beta^2), \quad (3)$$

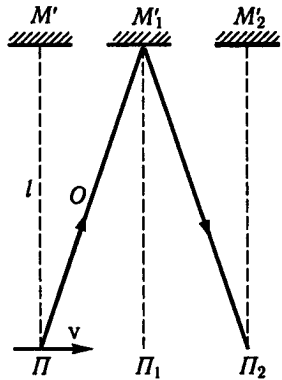


Рис. 90

де  $c$  – швидкість світла в ефірі;  $v$  – швидкість руху Землі відносно ефіру;  $\beta = \frac{v}{c}$  – досить мала величина.

Для унаочнення способу визначення часу проходження другим променем відрізка  $\Pi M'$  туди й назад позначимо на рис. 90 положення пластинки  $\Pi$  і дзеркала  $M'$  для трьох моментів часу: початкового, коли промінь залишає пластинку  $\Pi$  (точки  $\Pi$  та  $M'$ ); проміжного, коли промінь досягає дзеркала  $M'$  (точки  $\Pi_1$  і  $M'_1$ ), та кінцевого, коли промінь повертається до пластинки  $\Pi$  (точки  $\Pi_2$  і  $M'_2$ ).

Неважко помітити, що світловий промінь під час руху від пластинки  $\Pi$  до дзеркала  $M'$  і назад пройде шлях у ефірі  $\Pi M'_1 + M'_1 \Pi_2 = ct_2$ ; за цей час прилад переміститься в ефірі на відстань  $\Pi \Pi_2 = vt_2$ . Застосувавши до  $\Delta \Pi M'_1 \Pi_2$  теорему Піфагора

$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2,$$

знайдемо

$$t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2l}{c} \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right). \quad (4)$$

Отже, різниця в часі

$$\Delta t' = t_1 - t_2 \approx \frac{l\beta^2}{c}. \quad (5)$$

Якщо повернути весь прилад на  $90^\circ$  так, щоб плече  $\Pi M'$  інтерферометра було зорієнтоване в напрямі руху, а плече  $\Pi M$  – перпендикулярно до руху Землі, то знак різниці  $(t_1 - t_2) = \Delta t'$  змінить-

ся на протилежний, а в цілому поворот інтерферометра має зумовити зміщення інтерференційної картини, еквівалентне різниці в часі:

$$\Delta t = \Delta t' - \Delta t'' = \frac{2l\beta^2}{c}. \quad (6)$$

Іншими словами, має виникнути зміщення інтерференційної картини на таку частину смуги, яку  $\Delta t$  становить відносно періоду  $T$  світлової хвилі:

$$k = \frac{\Delta t}{T} = \frac{2l\beta^2}{cT} = \frac{2l}{\lambda} \beta^2. \quad (7)$$

В останніх дослідах А. А. Майкельсона при  $l = 12$  м і використанні світла з довжиною хвилі  $\lambda = 590$  нм треба було чекати зміщення картини на  $k = 0,4$  смуги; точність приладу давала можливість фіксувати зміщення на кілька сотих смуги, проте насправді досліди ніякого зміщення інтерференційної картини не виявили.

Негативні результати дослідів А. А. Майкельсона стали причиною широких наукових дискусій. З одного боку, робилися спроби пояснити їх штучними доповненнями до теорії ефіру. Так, Дж. Фітцджеральд висунув гіпотезу про скорочення тіл у напрямі руху відносно ефіру з коефіцієнтом  $\sqrt{1-\beta^2}$ , спеціально підібраним так, щоб у дослідах  $\Delta t = 0$ . Швейцарський вчений В. Рітц (1878–1909) висунув гіпотезу про залежність швидкості світла від швидкості руху джерела. А оскільки в дослідах А. А. Майкельсона джерело світла і Земля переміщуються з однаковою швидкістю, зміна положення інтерферометра відносно напрямку руху Землі не впливає на характер інтерференційної картини. Проте ця гіпотеза заперечувалася даними спостережень за рухом подвійних зірок.

Як відомо, до 20 % усіх зірок – подвійні: обидві зірки обертаються навколо спільного центра мас із досить великими швидкостями. Рух цих зірок строго періодичний у повній відповідності до закону всесвітнього тяжіння. Однак якби швидкість світла залежала від швидкості руху джерела, то дуже різнився б час поширення світла від зірки з різних точок на орбіті до Землі, і така періодичність у їхніх рухах не спостерігалася б.

Так звана балістична гіпотеза Рітца не підтвердилася також у дослідах Томашека, який в установці для визначення швидкості руху Землі використав світло від позаземних об'єктів (Сонця, зірок), однак дістав такі самі результати, як і А. А. Майкельсон. З іншого боку, було проведено та проаналізовано досліди іншого типу (також безуспішні) з визначення абсолютного руху Землі. Це, зокрема, досліди Г. Роуlanda й О. Ейхенвальда з використанням конвекційних електричних струмів, спостереження Ф. Трутона та

Нобля за поведінкою підвишеного зарядженого конденсатора в рухомій системі координат, якою була Земля.

Науковий аналіз цих дослідів привів до висновку, що припущення про існування ефіру сумнівні, оскільки вони суперечать дослідним фактам, що не існує середовища, яке могло б бути абсолютно нерухомою системою відліку. Довелось констатувати, що: швидкість світла у вакуумі не залежить від значення і напряму швидкості руху системи відліку; перетворення Галілея та відповідне їм правило додавання швидкостей мають обмежену сферу застосування, зокрема вони непридатні для опису явищ, пов'язаних із поширенням світла для відображення електродинамічних рівнянь Максвелла.

Тут доречно нагадати, що в класичній механіці пріоритетне місце займали інерціальні системи. За допомогою перетворень Галілея можна було показати, що закони Ньютона інваріантні у разі переходу від однієї такої системи відліку до іншої. Ще у 1632 р. Г. Галілей у ролі експериментатора в закритій каюті корабля доводив, що ніякими механічними дослідями, проведеними всередині системи, не можна виявити її рівномірного прямолінійного руху і тим паче виміряти швидкість її руху.

На межі XIX–XX ст. стали відомими факти, які не вкладалися в закономірності класичної фізики. Найістотніші з них – негативні результати дослідів А. А. Майкельсона, порушення інваріантності відносно перетворень Галілея рівнянь електродинаміки Максвелла, виявлення залежності маси частинки від швидкості у вимірах питомого заряду електрона в дослідях англійського фізика Дж. Дж. Томсона (1856–1940).

Аналізуючи труднощі класичної фізики у поясненні нових наукових фактів, зокрема дослідів А. А. Майкельсона, А. Ейнштейн констатував, що Земля на малому відрізку траєкторії протягом дослідів являла собою інерціальну систему; поставлені в ній електромагнітні й оптичні дослідів, так само як і механічні Г. Галілея, не дали змоги визначити її рух. Отже, проявляється у більш широкому розумінні принцип відносності; поряд із цим погляди на простір та час, відображені у перетвореннях Галілея, не відповідають дійсності.

У 1905 р. А. Ейнштейн сформулював два постулати, які лягли в основу спеціальної теорії відносності:

1) усі інерціальні системи відліку рівноправні, в усіх таких системах не тільки механічні, а й усякі інші явища природи відбуваються однаково;

2) в усіх інерціальних системах швидкість світла у вакуумі однакова і не залежить від руху джерела світла.

Застосування цих постулатів, передусім постулату сталості швидкості світла, при поясненні деяких оптичних дослідів привело до докорінної зміни звичних поглядів на простір та час. Розглянемо це на конкретних прикладах.

### § 53. Спростування поняття ефіру. Відносність одночасності

Принцип відносності Ейнштейна спростовує не тільки поняття абсолютного руху й абсолютного спокою, а й гіпотезу про існування всюдисущого неперервного ефіру, який ніби міг бути абсолютною системою відліку. Справді, якщо досліди в усіх інерціальних системах відбуваються однаково, то в жодній з них, як і на Землі в дослідах А. А. Майкельсона, не повинен проявлятися «ефірний вітер», але для цього ефір має бути в стані відносного спокою з будь-якою інерціальною системою, що явно абсурдно.

Нагадаємо, що з погляду класичної фізики перебіг часу рівномірний та безвідносний до будь-чого зовнішнього; з цього, зокрема, випливало, що дві події, одночасні в якійсь одній системі, будуть одночасними також у будь-якій іншій системі відліку. Покажемо, як такі погляди спростовуються другим постулатом Ейнштейна.

Розглянемо уявний дослід у двох інерціальних системах, з яких одна пов'язана з рухомим вагоном, а інша з нерухомими стовпами поруч. Припустимо, що у вагоні (рис. 91) стінки прозорі й у ньому точно посередині розміщено лампочку  $S$  для світлового сигналу. Як приймачі сигналу використано фотоелементи  $A'$  і  $B'$ , укріплені на передній та задній стінках вагона, а також фотоелементи  $A$  і  $B$ , укріплені на такій самій відстані на стовпах уздовж колії. Нехай у момент спалаху лампочки  $S$  фотоелементи  $A$  та  $A'$  і  $B$  та  $B'$  попарно збігалися. Згідно з другим постулатом швидкість світла в обох системах однакова і не залежить від руху джерела. Так в обох системах забезпечувалися однакові умови для виникнення сигналу та його сприймання. Отже, відповідно до першого постулату Ейнштейна в обох системах усе має відбуватися так само. Проте аналіз досліду свідчив інше.

За умови сталості швидкості світла сигнал мусить досягати приймачів  $A$  та  $B$  в один і той самий момент часу. Проте такої одночасності не може бути на приймачах  $A'$  та  $B'$ , оскільки приймач  $A'$  рухається назустріч світловому сигналу, а приймач  $B'$  віддаляється від сигналу; приймач  $A'$  фіксуватиме сигнал раніше, ніж  $B'$ . Таким чином, дві одночасні події – сприймання сигналу фотоелементами

$A$  і  $B$  в одній системі – неодночасні в іншій системі з приймачами  $A'$  та  $B'$ .

У результаті аналізу подібних дослідів А. Ейнштейн дійшов такого висновку: події, одночасні в одній системі відліку, не є одночасними в іншій системі відліку;

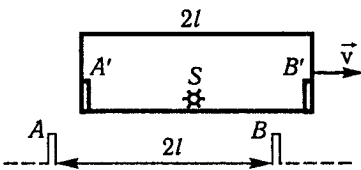


Рис. 91

одночасність є поняттям відносним; у різних системах відліку перебіг часу різний.

Спеціальна теорія відносності спростувала припущення класичної фізики про існування абсолютного простору й абсолютного часу як такі, що не відповідають дійсності.

### § 54. Перетворення Лоренца

Залежність перебігу часу від системи відліку істотно позначається на формулах перетворення координат у разі переходу від однієї інерціальної системи до іншої.

Розглянемо дві інерціальні системи відліку  $S$  і  $S'$ , що перебувають одна відносно іншої у прямолінійному та рівномірному русі зі швидкістю  $v$ , напрямленою вздовж осі  $Ox$  або  $Ox'$  (рис. 92). Очевидно, що при такій орієнтації координатних осей  $y = y', z = z'$ .

Нехай у момент часу  $t = 0$  початки обох систем  $O$  й  $O'$  збігаються; початок відліку часу виберемо так, щоб  $t' = 0$ , коли  $t = 0$ .

Припустимо, що в момент  $t = 0$  в точці  $O$ , яка в цей момент є спільним початком координат обох систем, виникає світловий спалах. Простежимо за поширенням цього світлового сигналу в обох системах.

Спостерігач у системі  $S$  через  $t$  секунд констатуватиме, що світловий сигнал поширився в усіх напрямках зі швидкістю  $c$  на відстань  $ct$  і досягнув поверхні сфери:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \tag{1}$$

або

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Цей світловий сигнал може виявити прилад  $M$ .

Спостерігач у системі  $S'$ , що перебуває, скажімо, в точці  $O'$ , теж констатуватиме, що світловий сигнал із початку координат поширюється зі швидкістю  $c$  (згідно з другим постулатом) і за час  $t'$  (який відповідає  $t$ ) досягне поверхні сфери

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

або

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \tag{2}$$

Спостерігач вважатиме себе нерухомим у центрі  $O'$  цієї сферичної хвилі.

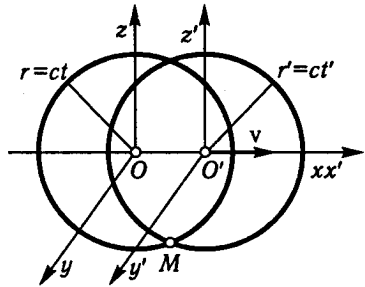


Рис. 92



Оскільки координати  $(x, y, z, t)$  та  $(x', y', z', t')$  є координатами того самого явища, наприклад прийому сигналів у точці  $M$  у системі  $S$  через час  $t$ , вирази (1) і (2) згідно з першим постулатом мають тотожно перетворюватися один на одній в разі переходу від системи  $S$  до  $S'$ . Отже,

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (3)$$

У теорії відносності, де відкидається поняття абсолютного часу, рівність (3) визначає форму інваріанта для координат та часу в разі переходу від однієї системи відліку до іншої. Неважко помітити, що цей інваріант не може задовольнятися галілеєвими формулами перетворення координат, де час вважається однаковим для всіх систем відліку. Отже, в теорії відносності мають існувати інші формули перетворення координат у разі переходу від однієї системи відліку до іншої. Продовжимо пошуки їх.

Оскільки системи  $S$  і  $S'$  одна відносно іншої перебувають у русі зі швидкістю  $v$ , з цього випливає, що точка  $O'$  у системі  $S$  переміщується зі швидкістю  $v$ , а точка  $O$  в системі  $S'$  — зі швидкістю  $-v$ . Тоді при  $x' = 0$   $x = vt$ , а при  $x = 0$   $x' = -vt'$ . Із цих умов легко скласти рівняння для координат  $x$  та  $x'$ , а саме:

$$x' = k(x - vt); \quad (4)$$

$$x = k'(x' + vt'), \quad (5)$$

де  $k$  і  $k'$  — коефіцієнти, що залежать від швидкості  $v$ .

Підставивши у вираз (5) значення  $x'$  із виразу (4) та визначивши  $t'$ , дістанемо

$$t' = k \left[ t - \frac{x}{v} \left( 1 - \frac{1}{kk'} \right) \right]. \quad (6)$$

Рівняння (4) і (6) виражають значення  $x'$  та  $t'$  через  $x$  і  $t$ . Підставивши ці значення для  $x'$  та  $t'$  у праву частину рівності (3) і прирівнявши коефіцієнти при  $x^2$ ,  $t^2$ ,  $xt$  (за припущенням  $y = y'$ ,  $z = z'$ ), дістанемо три рівняння для невідомих  $k$  та  $k'$ . Розв'язавши ці рівняння, знайдемо, що всі вони справджуються при

$$k = k' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7)$$

Підставляючи значення  $k$  і  $k'$  у рівняння (4)–(6), дістаємо формули перетворення координат у разі переходу від однієї системи

відліку до іншої в теорії відносності, а саме:

від системи  $S$  до  $S'$

від системи  $S'$  до  $S$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x - vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\
 y' &= y; \quad z' = z; & y &= y'; \quad z = z'; \\
 t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; & t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Формули перетворення координат (8) у теорії відносності називаються *перетвореннями Лоренца*. Ці перетворення голландський вчений Х. А. Лоренц (1853–1928) одержав дещо раніше за А. Ейнштейна, щоправда розуміючи під  $t'$  не істинний фізичний час у системі  $S'$ , а деяку допоміжну величину.

Формули перетворення Лоренца в разі переходу з однієї системи в іншу відповідно до принципу відносності зберігають інваріантну симетрію з урахуванням лише того, що знак відносною швидкості  $v$  в системі  $S$  протилежний до її знака в системі  $S'$ .

У формулах перетворень Лоренца особливу увагу привертають перша й остання рівності. Вони наочно вказують на взаємозв'язок простору і часу: якщо перша з них указує на залежність координати  $x$  від відліку часу  $t$ , то друга – на залежність часу  $t$  від координати  $x$  та швидкості  $v$  системи. Час у класичній механіці Галілея–Ньютона абсолютний, однаковий для всіх систем; час у теорії Ейнштейна відносний.

Привертає увагу також те, що при  $v > c$  формули перетворень Лоренца втрачають зміст (бо під квадратним коренем дістаємо від'ємне число). Це свідчить, що в теорії відносності швидкість світла у вакуумі є граничною для всіх систем відліку.

Дуже істотно, що при  $v \ll c$  формули Лоренца переходять у формули перетворення Галілея:

$$\begin{aligned}
 x' &= x - vt; \\
 y' &= y; \quad z' = z; \quad t' = t.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Отже, перетворення Лоренца, які ґрунтуються на принципі відносності, є більш загальними відображеннями процесів природи, а перетворення Галілея–Ньютона і закономірності класичної фізики, що пов'язуються з ними, дійсні лише для швидкостей, малих порівняно зі швидкістю світла.

Інші найважливіші наслідки з перетворень Лоренца розглянемо в наступних параграфах.

## § 55. Відносність довжини і проміжку часу

У перетвореннях координат Галілея—Ньютона відстань між двома точками або довжина стрижня у разі переходу від однієї системи до іншої залишається незмінною, тобто є інваріантом. Якщо за даними ракети-носія «Восток» її загальна довжина дорівнює 38 м, то нікому й на думку не спаде уточнювати, чи це довжина ракети в стані спокою, чи під час найбільшої її швидкості. Проте з погляду перетворень Лоренца, як побачимо далі, таке уточнення не позбавлене сенсу.

Нехай у системі  $S$  уздовж осі  $Ox$  зорієнтовано стрижень завдовжки  $l_0$ . Виразивши довжину стрижня через координати його кінців, дістанемо  $x_2 - x_1 = l_0$ . Знайдемо довжину цього стрижня у системі  $S'$ , яка, як і раніше, переміщується відносно системи  $S$  зі швидкістю  $v$  у напрямі осі  $Ox$ .

Щоб визначити довжину стрижня, треба знайти різницю координат його кінців  $x'_2 - x'_1 = l$  у той самий момент часу за годинником системи  $S'$ . За формулами перетворення Лоренца знайдемо координати кінців стрижня:

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

За умови, що  $t'_1 = t'_2$ , їх різниця

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

або

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1)$$

Із виразу (1) випливає, що довжина стрижня у теорії відносності залежить від системи відліку. Найбільшу довжину  $l_0$  стрижень має в тій системі відліку, в якій він перебуває у стані спокою. У кожній рухомій системі відносно стрижня його довжина  $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , тобто тим менша, чим більша швидкість руху системи.

Зауважимо, що скорочення зазнають лише ті лінійні розміри тіл, які паралельні швидкості руху системи. Розміри, перпендикулярні до  $v$ , ніяких змін не зазнають, тому що у формулах перетворень  $y = y'$ ,  $z = z'$ . Оскільки лише один розмір тіла зазнає скорочення, очевидно, об'єм тіла  $V$  під час руху теж зазнаватиме зменшення у  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  разів:

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (2)$$

де  $V_0$  – об'єм нерухомого тіла.

Скорочення лінійних розмірів тіла в напрямі руху позначається на зміні форми тіла. Так, куля, що перебуває у спокої в системі  $S$ , відповідно до перетворень у системі  $S'$  набиратиме форми еліпсоїда обертання.

Проте твердження про скорочення лінійних розмірів тіл у напрямі руху не означає якогось фізичного процесу у стрижні, подібного до деформації системи; йдеться про вимірювання стрижня у різних системах відліку. Це переконливо впливає з такого досліду. Уявімо два паралельних стрижні  $A$  і  $B$  однакової довжини, що перебувають у спокої в системі  $S$ . Припустимо, що стрижень  $A$  лишається у спокої, а стрижень  $B$  приводиться в рух у напрямі його довжини зі швидкістю  $v$ ; зв'яжемо з ним систему  $S'$ . Тепер відповідно до перетворень у системі  $S$  стрижень  $B$  буде коротший від стрижня  $A$ . Завдяки таким змінам у системі  $S'$  стрижень  $B$  перебуватиме в стані спокою, а стрижень  $A$  – в русі; тому стрижень  $A$  буде коротший від стрижня  $B$ . Стає очевидним, що один і той самий стрижень має різну довжину в різних системах відліку.

Можна провести аналогію між відносністю довжини в різних системах відліку та відносністю кута зору, під яким розглядається предмет. Як відомо, цей кут зменшується у разі віддалення від предмета, хоча це аж ніяк не означає зменшення самого предмета в дійсності. Тому питання стосовно того, яка справжня довжина стрижня, позбавлене сенсу так само, як і питання про те, чому дорівнює справжній кут зору, під яким ми бачимо предмет.

Ми не можемо ставити також питання, яка справжня швидкість пасажира на палубі корабля: вона дорівнює 1,5 м/с відносно палуби, 10 м/с відносно берегів,  $3 \cdot 10^4$  м/с відносно Сонця і т. д. Такою є фізична сутність відносності довжини. Щоправда, це треба враховувати лише при великих швидкостях тіл; при малих порівняно зі швидкістю світла це питання не має практичного сенсу. Саме тому в класичній фізиці без якихось застережень довжина відрізка вважалася незмінною в різних системах відліку.

Розглянемо питання *одночасності*. За перетвореннями Лоренца неважко показати, що дві події, які відбуваються в системі  $S$  одночасно, але в різних точках простору, неодночасні в системі  $S'$ , що переміщується відносно  $S$  зі швидкістю  $v$ . Справді, якщо  $t_1 = t_2$ , то

$$t'_1 = \frac{t_1 - vx_1/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad t'_2 = \frac{t_2 - vx_2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Звідси впливає, що при  $x_1 \neq x_2$  маємо  $t'_1 \neq t'_2$ . Таким чином, одночасність є поняттям відносним.

Перейдемо до визначення *пряміжки часу* в теорії відносності. Нехай із двох систем  $S$  та  $S'$  система  $S'$  переміщується зі швидкіс-

тю  $v$  і в ній є годинник. Припустимо, що в тому місці, де він розташований, відбулися дві події, наприклад, початок та закінчення дзвону будильника, горіння сірника тощо. Нехай проміжок часу між цими подіями в системі  $S'$  становить  $T_0 = t'_2 - t'_1$ .

Знайдемо проміжок часу між зазначеними подіями в системі  $S$ . За формулами перетворень Лоренца дістанемо

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + vx'_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t'_1 + vx'_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Беручи до уваги, що події відбулися у тій самій точці ( $x'_1 = x'_2$ ), знаходимо

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

або

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3)$$

де  $T_0$  має зміст проміжку часу в тій системі відліку, де обидві події відбулися в одній і тій самій точці простору. Час  $T_0$  називають *власним часом*.

Із формули (3) випливає, що проміжок часу між двома подіями в теорії відносності залежить від системи відліку. Проміжок часу, вимірний в системі  $S$ , більший за проміжок часу, який зареєструє годинник, що рухається разом із системою  $S'$  і перебуває в тій точці, де відбулися події. Проміжок часу між двома подіями не інваріантний, він залежить від системи відліку.

Відносність проміжку часу можна проілюструвати на такому уявному досліді. Нехай два синхронних годинники  $A$  та  $B$  перебувають у спокої в системі  $S$ . Припустимо, що годинник  $A$  залишається у спокої, а годинник  $B$  рухається зі швидкістю  $v$ . Згідно з теорією відносності за формулою (3) в системі  $S$  годинник  $B$  відстає від годинника  $A$ . Якщо оцінювати плин часу відповідно в системі  $S'$ , то в ній годинник  $B$  перебуває у спокої, а годинник  $A$  переміщується зі швидкістю  $v$  у протилежний бік; тому годинник  $A$  відставатиме від годинника  $B$ . Проте обидва ці твердження не суперечать одне одному, оскільки йдеться лише про два різних способи порівняння показів годинників.

Справді, у першому випадку годинник  $B$  перебуває в русі відносно системи  $S$ ; тому в момент другої події його покази треба порівнювати з показами годинника  $A'$  у системі  $S$  (рис. 93), оскільки час залежить від координати і порівнювати покази годинників треба в тій самій точці простору. В цьому разі годинник  $B$  покаже раніший час, ніж годинник  $A'$ . Якщо відносно системи  $S'$  годинник  $A$

перебуває в русі, то в момент другої події його покази треба порівнювати з показами годинника  $B'$ . У цьому разі годинник  $A$  покаже менший час, ніж годинник  $B'$ . Як бачимо, суперечності тут немає, бо йдеться про порівняння різних пар годинників.

Із формули (3) також впливає, що при малих швидкостях систем порівняно зі швидкістю світла ( $v \ll c$ ) проміжок часу в різних системах відліку набирає змісту абсолютно незмінної величини, що якраз і відбувається у класичній фізиці.

Слід зауважити, що на відміну від формули для визначення скорочення довжини формула (3) дістала підтвердження у дослідженнях розпаду  $\mu$ -мезонів.  $\mu^+$  - і  $\mu^-$ -мезони – заряджені частинки, що мають масу, яка дорівнює близько 206 масам електрона, утворюються в атмосфері внаслідок взаємодій космічного проміння.  $\mu$ -Мезони – це нестабільні частинки, вони розпадаються на електрон та позитрон і дві нейтральні частинки – нейтрино ( $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + 2\nu$ ). Досліджуючи повільні  $\mu$ -мезони, виявили, що час їхнього життя  $T_0 \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$  с.

В атмосфері  $\mu$ -мезони мають дуже велику швидкість ( $v \approx c$ ) і, як виявлено, пролітають відстань до 20 км, що відповідає часу їхнього життя  $T \approx 0,7 \cdot 10^{-4}$  с. У системі відліку, пов'язаній із Землею (інакше її називають *лабораторною системою*), час життя швидких  $\mu$ -мезонів значно більший за  $T_0$ . Це добре узгоджується з формулою (3), згідно з якою в системі відліку, пов'язаній з рухомим мезоном, час спливає повільніше, ніж у лабораторній системі. Сповільнення часу в рухомій системі відліку було також підтверджено в дослідях американських фізиків Г. Айвса та Д. Стілуелла щодо виявлення поперечного ефекту Доплера.

Ми розглянули відстань між двома точками, виміряну в деякій системі координат у той самий момент часу, а також проміжок часу між двома подіями, що відбулися в деякій системі координат в одній точці. З'ясовано, що їхні числові значення залежать від вибору системи відліку і визначаються відповідно за формулами (1) та (3). Формули для обчислення відстані між двома точками і проміжку часу між двома подіями у разі переходу з однієї системи відліку в іншу ускладнюються, коли йдеться про дві події, що відбуваються у різних точках простору та в різні моменти часу.

Якщо для спрощення припустити, що в системі  $S$  відбулися дві події в точках, що лежать на осі  $Ox$  із координатами  $x_1$  та  $x_2$ , в

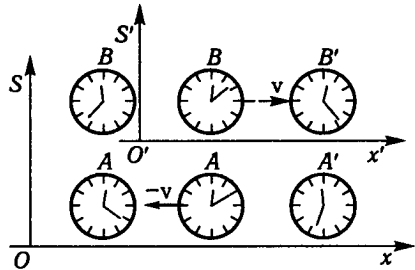


Рис. 93

моменти часу відповідно  $t_1$  і  $t_2$ , то в разі переходу до системи  $S'$ , яка переміщується відносно  $S$  зі швидкістю  $v$  в напрямі осі  $Ox$ , для відстані між подіями дістанемо

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (4)$$

а для проміжку часу між ними матимемо

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5)$$

Формули (4) і (5) свідчать, що такі величини, як відстань та проміжок часу, які в класичній фізиці відігравали роль абсолютних, насправді є відносними. Формули розкривають конкретні кількісні закономірності, що пов'язують зміни окремо взятих просторових і часових масштабів фізичних явищ та їхні залежності від швидкості матеріального об'єкта, з яким може бути пов'язана система відліку. Спеціальна теорія відносності конкретизує поняття простору і часу як форм існування матерії.

**Приклад 1.** Швидкість руху Землі навколо Сонця  $v = 30$  км/с. Знайти скорочення діаметра Землі в системі координат, пов'язаній з Сонцем.

*Розв'язання.* Віднімемо від середнього діаметра Землі  $D_0$  скорочений діаметр її в напрямі руху  $D = D_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Тоді

$$\Delta D = D_0 - D_0\sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad \Delta D = 12,7 \text{ см.}$$

**Приклад 2.** У двох нерухомих точках деякої інерціальної системи відліку, відстань між якими вздовж осі абсцис дорівнює  $l$ , одночасно сталися дві події. Знайти проміжок часу між цими подіями у довільній інерціальній системі відліку.

*Розв'язання.* Скористаємося перетвореннями Лоренца для часу:

$$\Delta t = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 + (v/c^2)x_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t_1 + (v/c^2)x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(t_2 - t_1) + (x_2 - x_1)v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Урахувавши, що  $t_2 - t_1 = 0$ ,  $x_2 - x_1 = l$ , знайдемо

$$\Delta t = \frac{lv}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

**Приклад 3.** Нехай є двоє близнюків – Ігор та Андрій віком по 20 років. Андрій летить до зірки Вега зі швидкістю  $v = 0,94$  с. Скільки років буде кожному з близнюків, коли Андрій повернеться на Землю, якщо відстань до зірки становить 26,7 світлового року?

*Розв'язання.* Для Ігора подорож Андрія триватиме

$$t = \frac{2 \cdot 26,7}{0,94} = 56,8 \text{ року,}$$

а для Андрія

$$t_0 = t\sqrt{1-v^2/c^2}; \quad t_0 = 18,9 \text{ року.}$$

Тому  $t_I = 76,8$  року,  $t_A = 38,9$  року.

## § 56. Теорема про додавання швидкостей

Припустимо, що в системі  $S'$ , яка переміщується відносно системи  $S$  зі швидкістю  $v$  у напрямі осі  $Ox$ , рухається деяке тіло зі швидкістю  $w$ . Знайдемо швидкість цього тіла в системі  $S$ .

Ця задача аналогічна класичній задачі визначення швидкості переміщення пасажера на кораблі відносно берега. Ми встановили, що коли швидкість пасажера на палубі  $w$ , а швидкість корабля  $v$ , то швидкість пасажера відносно берегів  $u$  є векторною сумою:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}. \quad (1)$$

Ця векторна сума повністю відповідає перетворенням координат Галілея–Ньютона.

У теорії відносності теорема про додавання швидкостей має інший вигляд. Щоб знайти швидкість тіла в системі  $S$  у сформульованій вище задачі, скористаємося перетвореннями Лоренца:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (2)$$

Продиференціювавши ці рівняння, дістанемо

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \\ dt &= \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Поділивши почленно ліві та праві частини перших трьох рівнянь (3) відповідно на ліву і праву частину четвертого рівняння, знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1-v^2/c^2}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}; \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz' \sqrt{1-v^2/c^2}}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}. \end{aligned} \quad (4)$$



Якщо поділити чисельник та знаменник правої частини кожного рівняння (4) на  $dt'$  і замінити похідні координат за часом відповідними складовими швидкостей, то дістанемо

$$u_x = \frac{w_x + v}{1 + \frac{w_x v}{c^2}}; \quad (5)$$

$$u_y = \frac{w_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{w_x v}{c^2}}; \quad u_z = \frac{w_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{w_x v}{c^2}}.$$

Формули (5) виражають теорему Ейнштейна про додавання швидкостей. Абсолютне значення швидкості визначається виразом

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

У найпростішому випадку, коли тіло в системі  $S'$  переміщується уздовж осі  $Ox$  ( $w_x = w$ ;  $w_y = 0$ ;  $w_z = 0$ ), формула для додавання швидкостей набирає такого вигляду:

$$u = \frac{w + v}{1 + \frac{wv}{c^2}}. \quad (6)$$

Із формули (6) випливає, що при малих швидкостях порівняно зі швидкістю світла ( $w \ll c$ ;  $v \ll c$ ) ейнштейнівська теорема про додавання швидкостей лише з деякою похибкою переходить у класичну формулу.

Слід зауважити, що в розрахунках результатів досліду А. А. Майкельсона помилково використовувалася класична формула для додавання швидкостей. У класичній фізиці швидкість світла в рухомому вагоні залежно від напрямку поширення дорівнює  $(c - v)$  або  $(c + v)$ , тоді як із формули (6) випливає, що коли хоч одна зі складових ( $v$  або  $w$ ) дорівнює швидкості світла  $c$ , то в обох випадках  $u = c$ . Отже, швидкість світла у вакуумі в усіх інерціальних системах відліку однакова і не залежить від напрямку поширення.

Із формули (6) випливає, що швидкість світла у вакуумі є граничною швидкістю і не може бути перевищена ні за яких умов, навіть у разі додавання швидкостей. Справді, підстановкою доведемо, що коли кожна зі складових швидкостей окремо дорівнюватиме швидкості світла ( $w = c$ ;  $v = c$ ), то їх результуюча не перевищуватиме швидкості світла ( $u = c$ ). Коли складові швидкостей кожна окремо будуть меншими від швидкості світла, то їх результуюча буде меншою від швидкості світла у вакуумі. Ніякі дослідні

факти в сучасній фізиці не суперечать висновку про те, що швидкість світла у вакуумі є межею можливих швидкостей у природі. До речі, в середовищі, відмінному від вакууму, швидкість частинки може бути більшою від швидкості світла в цьому самому середовищі ( $v > \frac{c}{n}$ ). Цей факт підтверджується в ефекті Черенкова–Вавилова.

**Приклад 1.** Дві ракети віддаляються від Землі у протилежних напрямках зі швидкістю  $0,8c$  відносно Землі. Знайти, з якою швидкістю переміщується одна ракета в системі відліку, пов'язаній з іншою ракетою.

*Розв'язання.* Оскільки швидкості ракет  $v_1$  і  $v_2$  лежать на одній прямій, шукаю відносну швидкість зводимо до алгебричної різниці. Враховуючи значні швидкості ракет, використовуємо релятивістську формулу оперування над ними:

$$v_{12} = \frac{v_1 - (-v_2)}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}; \quad v_{12} \approx 2,93 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

**Приклад 2.** Прискорювач надав радіоактивному ядру швидкості  $v_1 = 0,4c$ . В момент виходу з прискорювача ядро викинуло у напрямі свого руху  $\beta$ -частинку зі швидкістю  $v_2 = 0,75c$  відносно прискорювача. Знайти швидкість  $u_{21}$  частинки відносно ядра.

*Розв'язання.* Швидкість частинки  $v_2$  відносно прискорювача складається зі швидкості переносного руху  $v_1$  ядра та швидкості  $u_{21}$  викидання її з ядра. Зважаючи на значні швидкості, використовуємо релятивістську формулу оперування над ними:

$$v_2 = \frac{v_1 + u_{21}}{\sqrt{1 + \frac{v_1 u_{21}}{c^2}}}.$$

За цим виразом знаходимо  $u_{21} = 0,5c$ .

## § 57. Відносні й абсолютні величини релятивістської кінематики. Інтервал

Передусім застережемо, що з назви та попередніх результатів теорії відносності не повинна складатися хибна думка про те, що «все у світі відносне». Навпаки, назва теорії відображує лише один і до того ж не головний аспект проблеми. З приводу теорії відносності німецький фізик М. Планк (1858–1947) слушно писав: «Її привабливість для мене полягає в тому, що я прагнув з усіх її положень вивести те абсолютне, інваріантне, що лежить в її основі». Теорія відносності точніше, ніж класична фізика, відображує поняття відносного й абсолютного у розвитку матеріального світу та його пізнання.

Наведений у попередніх параграфах взаємозв'язок між простором і часом показує, що для математичного відображення будь-

якої події слід користуватися чотиривимірним континуумом, тобто неперервною множиною точок, де роль четвертої координати відіграє час. Точку в такому просторі, яка визначає певну подію, називають *світовою*.

Розглянемо дві події. Нехай у системі одна з них визначається координатами  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ , інша – координатами  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ . У цьому разі величину

$$s_{1,2} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

називають *інтервалом* між двома подіями.

Неважко показати, що інтервал між подіями залишається незмінним у разі переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої, тобто є інваріантним відносно перетворень Лоренца. Для спрощення викладок квадрат інтервалу в системі  $S$  можна записати у вигляді

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \quad (2)$$

а відповідний квадрат інтервалу між цими подіями в системі  $S'$  – як

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \quad (3)$$

Використавши формули

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \Delta y' = \Delta y; \quad \Delta z' = \Delta z; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4)$$

та підставивши відповідні значення у вираз (3), дістанемо

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2.$$

Інтервал між подіями (1) можна виразити також через такі дві складові: квадрат просторової відстані

$$l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

та квадрат проміжку часу  $t_{12}^2 = (t_2 - t_1)^2$ . Тоді

$$s_{1,2} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}. \quad (5)$$

Із виразу (5) випливає, що хоч обидві названі складові мають відносний характер, тобто змінюються у разі переходу від однієї системи до іншої, інтервал, як і швидкість світла у вакуумі, залишається незмінним. Останні в теорії відносності належать до абсолютних величин.

Розрізняють три типи інтервалів: часоподібні, просторовоподібні та нульові. Розглянемо їхні особливості.

1. Нехай у системі  $S$  є дві події, для яких  $s^2 > 0$ , тобто

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - l_{12}^2 > 0. \quad (6)$$

Звідси

$$(t_2 - t_1)^2 > \frac{l_{12}^2}{c^2}. \quad (7)$$

Це означає, що час між подіями більший від часу поширення світла між ними.

Прикладом таких двох подій може бути постріл з гармати і розрив снаряда під час падіння на землю (рис. 94). Цей приклад дає підставу розглядати нерівність (7) як умову, за якої одна із розглянутих подій може бути причиною іншої.

З'ясуємо, яких змін можуть зазнавати вказані події в разі переходу в іншу систему  $S'$ . Передусім з'ясуємо, чи може існувати така система, в якій події відбуватимуться в одній точці. Неважко збагнути, що такою системою для наведеного прикладу міг би бути літак, який переміщується зі швидкістю, що дорівнює середній горизонтальній швидкості снаряда.

За такої умови спалах під час пострілу та вибух снаряда спостерегалися б у тому самому ілюмінаторі, тобто події відбувалися б у тій самій точці ( $l'_{12} = 0$ ). У цьому разі інтервал повністю визначається лише через проміжок часу між подіями:

$$s' = c(t'_2 - t'_1).$$

Інтервали такого типу називають *часоподібними*.

З'ясуємо також, чи може існувати така система  $S'$ , в якій обидві події збігалися б у часі. Неважко помітити, що такої системи не існує, бо при  $t'_1 = t'_2$  порушувалася б початкова умова (6). Цей висновок повністю відповідає принципу причинності. На прикладі пострілу з гармати зрозуміло, що наслідок не може виникати одночасно з причиною, а тим більше раніше від неї. Теорія стверджує, що коли в одній системі  $t_2 > t_1$ , то в будь-якій іншій зберігатиметься нерівність  $t'_2 > t'_1$ . Таким чином, для двох причинно зв'язаних подій час першої події  $t_1$  набуває змісту абсолютно ми-

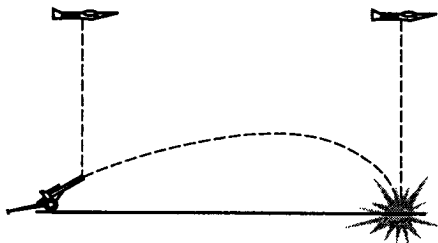


Рис. 94

нулого, а час другої  $t_2$  – абсолютно майбутнього відносно першого.

2. Нехай у системі  $S$  є дві події, які не перебувають у причинному зв'язку між собою. Наприклад, це спалах «нової» зірки, віддаленої на 100 світлових років від Землі, та видання довідника з астрономії за 20 років до прибуття сигналу (через 80 світлових років після спалаху зірки). Зрозуміло, що перша подія не мала ніякого впливу на другу. Математично ця незалежність може бути виражена нерівністю, в якій відстань між зіркою і Землею показано більшою від шляху, пройденого світловим сигналом за 80 років:

$$|x_2 - x_1| > c|t_2 - t_1|$$

або у більш загальному випадку

$$l_{12}^2 > c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (8)$$

За такої умови інтервал, що розділяє ці дві події, є уявною величиною:

$$s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - l_{12}^2}.$$

З'ясуємо, яких змін можуть зазнавати розглянуті події в разі переходу до іншої системи  $S'$ . Передусім з'ясуємо, чи існує така система, в якій обидві події стали б одномісними.

Із формул (4) випливає, що  $\Delta x' = x'_2 - x'_1$  може перетворюватися на нуль за умови

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1).$$

Однак, оскільки для цих подій

$$x_2 - x_1 > c(t_2 - t_1),$$

очікувана одномісність подій могла б існувати лише при  $v > c$ , що неможливо. Отже, події, які не перебувають у причинному зв'язку, не можуть стати одномісними. Такі події називають *абсолютно віддаленими*.

З'ясуємо також, чи може існувати така система відліку  $S'$ , в якій вказані події стали б одночасними.

Із формул (4) випливає, що  $\Delta t'$  дорівнюватиме нулю за умови

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1),$$

тобто при швидкості системи відліку

$$v = \frac{c^2(t_2 - t_1)}{x_2 - x_1}.$$

Якщо врахувати, що для розглянутих подій  $x_2 - x_1 > c(t_2 - t_1)$ , то матимемо  $v < c$ . Таким чином, принципово можлива така система  $S'$ , в якій ці події будуть одночасними: певно, при ще більшій швидкості системи може змінитися також знак різниці  $t'_2 - t'_1$ . Отже, для такого типу подій поняття «раніше» і «пізніше» мають відносний характер.

Оскільки для вказаних подій у системі  $S'$  значення  $\Delta t'$  може дорівнювати нулю, інтервал у цьому разі повністю визначатиметься лише через просторову відстань (залишаючись уявним):

$$s' = \sqrt{-l_{12}'^2}.$$

Інтервали такого типу називають *просторовоподібними*.

3. Нехай, нарешті, в системі  $S$  є такі дві події, з яких перша в точці  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  зводиться до посилання світлового сигналу, а друга – до приймання його в точці  $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ . Оскільки у цьому випадку  $l_{12} = c(t_2 - t_1)$ , інтервал, що розділяє ці події, дорівнює нулю:

$$s = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - l_{12}^2} = 0.$$

Зрозуміло, що нульовий інтервал відображує граничний випадок причинно зв'язаних подій. Він також є межею, що розділяє часоподібні та просторовоподібні інтервали.

Класифікація парних подій, а також інтервалів, які їх розділяють, стає чітко вираженою у графічному відображенні. Припустимо, що події відбуваються в одній площині, для якої  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Якщо по осі абсцис відкладати координату  $x$ , а по осі ординат – час події, помножений на  $c$  (рис. 95), то дістанемо множину точок, які відображатимуть усі можливі події. У точці перетину осей матимемо подію  $O$  ( $x = 0$ ,  $t = 0$ ) – нульову світову точку.

Будь-який рівномірний і прямолінійний рух у площині зобразитиметься прямою, тангенс кута нахилу якої до осі  $ct$  становитиме

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{cdt} = \frac{u}{c} = \beta,$$

де  $u$  – швидкість руху. Бісектриси координатних кутів відображатимуть поширення світлових сигналів ( $u = c$ ); вони будуть сукупністю точок – подій, які розділяються нульовими інтервалами. Бісектриси координатних кутів розділяють указану площину ( $x, ct$ )

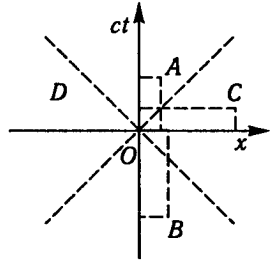


Рис. 95

на області  $A, B, C, D$ . Незавжно помітити, що області  $A$  і  $B$  включають точки – події, для яких  $|x| < ct$ ; всі вони розділяються часоподібними інтервалами. Оскільки для точок області  $A$  час  $t > 0$ , вони відображують події «абсолютно майбутні» відносно події  $O$ ; точки області  $B$ , для яких  $t \ll 0$ , відображують події «абсолютно минулі».

Області  $C$  та  $D$  включають точки-події, для яких  $|x| > ct$ ; всі вони розділяються просторовоподібними інтервалами. Оскільки для точок області  $C$  значення  $x > 0$ , вони відображують праві «абсолютно віддалені» події відносно події  $O$ ; точки області  $D$ , для яких  $x < 0$ , відображують ліві «абсолютно віддалені» події.

Отже, теорія Ейнштейна, стверджуючи відносність відстані та проміжку часу, в діалектико-матеріалістичному розумінні показує в них також елемент абсолютного, яким є інтервал. Беручи швидкість світла як граничну швидкість передачі взаємодії, вона констатує, що причинний зв'язок між подіями може здійснюватися лише за умови відповідної координації їх у просторі й часі. Цим самим теорія відносності на конкретних залежностях підтверджує правильність філософського вчення про рух, простір і час як об'єктивні форми існування матерії.

## § 58. Релятивістська динаміка. Залежність маси від швидкості

Розглянемо деякі питання динаміки в теорії відносності. Як відомо, закони динаміки Ньютона в класичній фізиці є інваріантними щодо перетворень Галілея, які справджуються лише для тіл з малими швидкостями порівняно зі швидкістю світла.

У теорії відносності мають бути знайдені такі узагальнені рівняння динаміки, які були б інваріантними щодо перетворень Лоренца і переходили в ньютонівські рівняння механіки в разі малих швидкостей. З цього погляду проаналізуємо кожний закон механіки окремо.

*Перший закон Ньютона* – закон збереження швидкості тіла за відсутності дії на нього інших тіл – не потребує ні нового формулювання поняття сили, ні нового поняття прискорення. Він описує стан тіла в інерціальній системі, тому зберігає свій фізичний зміст і в теорії відносності.

*Третій закон Ньютона*, що стверджує рівність дії та протидії, по суті є відображенням закону збереження імпульсу стосовно двох взаємодіючих тіл. Тому цей закон механіки поряд із такими загальними законами природи, як закон збереження імпульсу і закон збереження енергії, в тих самих формулюваннях треба віднести до основ релятивістської механіки.

Другий закон Ньютона слід визначати, спираючись на перший та третій закони Ньютона, тобто знайти зв'язок імпульсу й енергії з такими механічними величинами, як маса, швидкість та сила, і знати узагальнений вираз другого закону механіки.

Зауважимо, що на шляху до цього закону треба зробити припущення про існування дещо іншої залежності імпульсу від швидкості або залежності маси від швидкості. Бо коли, наприклад, маса тіла залишалась сталою, під дією сталої сили (при сталому прискоренні) тіло могло б досягати якої завгодно швидкості. Це суперечило б твердженню теорії відносності про існування граничної швидкості тіл, якою є швидкість світла у вакуумі.

Для з'ясування співвідношення імпульсу та маси і швидкості тіла в теорії відносності розглядають простий уявний дослід – пружний удар двох однакових кульок  $A$  і  $B$ , швидкості яких до удару в системі  $S$  дорівнюють одна одній за значенням та протилежні за напрямом (рис. 96). Позначимо проекції швидкості кульки  $A$  на координатні осі  $Ox$  і  $Oy$  відповідно  $a$  та  $b$ ; проекції швидкості кульки  $B$  дорівнюватимуть  $-a$  і  $-b$ . Нехай внаслідок удару  $x$ -складові швидкостей обох кульок залишаються незмінними; тоді  $y$ -складові їхніх швидкостей змінюватимуть свій знак на протилежний і кульки розлітатимуться у протилежні боки (див. зображення штриховою лінією на рис. 96).

Застосовуючи до удару кульок закон збереження імпульсу, робимо припущення, що маса кульки як міра її інертності є функцією швидкості:  $m = m(u)$ , або  $m = m(\sqrt{a^2 + b^2})$ . У розглянутій системі відліку  $S$  сумарний імпульс до та після удару кульок дорівнює нулю, про що свідчить сума  $x$ - і  $y$ -складових імпульсу:

$$\begin{aligned} & m(\sqrt{a^2 + b^2})a + m(\sqrt{a^2 + b^2})(-a) = \\ & = m(\sqrt{a^2 + b^2})a + m(\sqrt{a^2 + b^2})(-a); \\ & m(\sqrt{a^2 + b^2})b + m(\sqrt{a^2 + b^2})(-b) = \\ & = m(\sqrt{a^2 + b^2})(-b) + m(\sqrt{a^2 + b^2})b. \end{aligned}$$

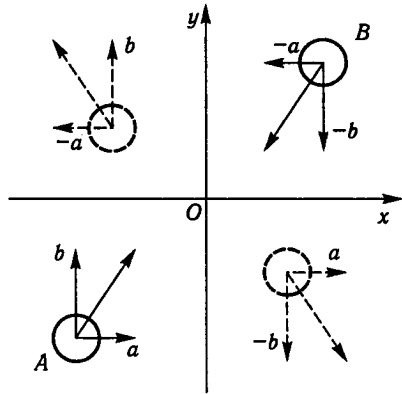


Рис. 96



Перейдемо далі до вираження закону збереження імпульсу для цього досліду в системі  $S'$ , яка переміщується зі швидкістю  $v = a$  відносно системи  $S$ . Для цього знайдемо спочатку складові швидкостей кульок у системі  $S'$ , користуючись ейнштейнівською теоремою про додавання швидкостей:

$$u'_x = \frac{u_x - a}{1 - \frac{u_x a}{c^2}}; \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - a^2/c^2}}{1 - \frac{u_x a}{c^2}}.$$

Підставивши у ці формули значення  $u_x$  та  $u_y$  для обох кульок до і після удару, знайдемо відповідні значення  $u'_x$  та  $u'_y$ , для зручності розмістивши їх у табл. 5.

Абсолютні значення швидкостей кульок, які знаходимо за формулою  $u = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2}$ , до і після удару однакові:

для кульки  $A$

$$u = \frac{b}{\sqrt{1 - a^2/c^2}};$$

для кульки  $B$

$$u = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2(1 - a^2/c^2)}}{1 + \frac{a^2}{c^2}}.$$

Відповідно до табл. 5 рух кульок  $A$  і  $B$  до та після удару в сис-

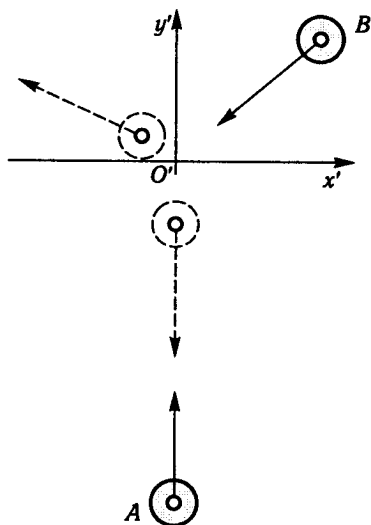


Рис. 97

Таблиця 5

Кулька	До удару		Після удару	
	$u'_x$	$u'_y$	$u'_x$	$u'_y$
$A$	0	$\frac{b}{\sqrt{1 - a^2/c^2}}$	0	$\frac{-b}{\sqrt{1 - a^2/c^2}}$
$B$	$-\frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}}$	$\frac{-b\sqrt{1 - a^2/c^2}}{1 + \frac{a^2}{c^2}}$	$-\frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}}$	$\frac{b\sqrt{1 - a^2/c^2}}{1 + \frac{a^2}{c^2}}$

темі  $S'$  відображено на рис. 97; кулька  $A$  до і після удару рухається вздовж осі  $Oy'$ .

Застосуємо до удару кульок у системі  $S'$  закон збереження імпульсу. З табл. 5 випливає, що закон збереження імпульсу для  $x$ -складової виконується тотожно, а для  $y$ -складової маємо таке рівняння:

$$\begin{aligned} & m \left( \frac{b}{\sqrt{1-a^2/c^2}} \right) \frac{b}{\sqrt{1-a^2/c^2}} - \\ & - m \left( \frac{\sqrt{4a^2 + b^2(1-a^2/c^2)}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \right) \frac{b\sqrt{1-a^2/c^2}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} = \\ & = m \left( \frac{b}{\sqrt{1-a^2/c^2}} \right) \frac{-b}{\sqrt{1-a^2/c^2}} + \\ & + m \left( \frac{\sqrt{4a^2 + b^2(1-a^2/c^2)}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \right) \frac{b\sqrt{1-a^2/c^2}}{1 + \frac{a^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Звідси після скорочення на  $b$  дістаємо таке функціональне рівняння:

$$m \left( \frac{\sqrt{4a^2 + b^2(1-a^2/c^2)}}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \right) = m \left( \frac{b}{\sqrt{1-a^2/c^2}} \right) \frac{1 + \frac{a^2}{c^2}}{1 - \frac{a^2}{c^2}}. \quad (1)$$

Це рівняння має тотожно справджуватися для будь-яких значень  $a$  і  $b$ . Якщо для спрощення покласти  $b = 0$ , то дістанемо

$$m \left( \frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} \right) = m(0) \frac{1 + \frac{a^2}{c^2}}{1 - \frac{a^2}{c^2}}, \quad (2)$$

де  $m(0) = m_0$  — стала величина, яку називають масою спокою.

При  $\frac{2a}{1 + \frac{a^2}{c^2}} = u$  маємо

$$\frac{1 + \frac{a^2}{c^2}}{1 - \frac{a^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Остаточно вираз функціональної залежності інертної маси тіла від його швидкості буде таким:

$$m(u) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (3)$$

Звідси випливає, що зі збільшенням швидкості тіла його маса зростає. При швидкості, близькій до швидкості світла у вакуумі, маса тіла нескінченно зростає; при малій швидкості порівняно зі швидкістю світла ( $u \ll c$ ) вона стає практично незмінною і дорівнює масі спокою ( $m \approx m_0$ ). До речі, коли йдеться про зміну маси в разі зміни швидкості тіла, не можна забувати, що йдеться про масу як фізичну величину, яка визначає інертні властивості тіла, а не про масу, під якою іноді розуміють кількість речовини (кількість молекул). Іншими словами, формула (3) вказує на те, що зі збільшенням швидкості тіла його інертність зростає.

Те, що маса тіла зростає зі збільшенням його швидкості, – експериментально підтверджений факт. Його враховують у розрахунках роботи прискорювачів заряджених частинок; там унаслідок великих швидкостей маса їх істотно зростає. Наприклад, у прискорювачах електронів, коли їхня енергія досягає 10 MeV, маса електрона  $m = 22,3 m_0$ , а при енергії 100 MeV –  $m = 198,8 m_0$ .

Беручи до уваги формулу (3) для залежності маси тіла від його швидкості, можна так записати узагальнений вираз імпульсу тіла:

$$p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (4)$$

Залежність його зміни від діючої сили, тобто узагальнений другий закон механіки, матиме вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = F. \quad (5)$$

Основний закон релятивістської динаміки має вже відомий нам зміст і форму вираження

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

проте в ньому імпульс визначається виразом (4). Завдяки цьому, оперуючи зміною імпульсу в такому вигляді, дістаємо різні коефіцієнти пропорційності між силою і прискоренням.

1. Якщо  $\vec{v} \parallel \vec{F}$  – рух прямолінійний, то рівняння динаміки можна записати в скалярній формі:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = F.$$

Після диференціювання дістанемо

$$\frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = F,$$

де коефіцієнт пропорційності між силою та прискоренням має вигляд

$$m_{\parallel} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

2. Якщо  $\vec{v} \perp \vec{F}$  – частинка рухається по колу, то модуль швидкості не змінюється, і рівняння динаміки набирає іншого вигляду:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

У цьому випадку коефіцієнт пропорційності між силою та прискоренням відрізняється від попереднього знаменником

$$m_{\perp} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Щоб підкреслити відмінності, коефіцієнт пропорційності між силою і прискоренням у першому випадку називають «поздовжньою» масою, у другому – «поперечною» масою.

Можна довести, що другий закон механіки в такому вигляді є інваріантним відносно перетворень Лоренца. Незавжди також помітити, що при малих швидкостях він переходить у вираз другого закону Ньютона класичної фізики.

Щоб знайти будь-яку динамічну величину при переході з «нерухомої» системи  $S$  у систему  $S'$ , яка переміщується відносно  $S$  зі швидкістю  $v$  у напрямі осі  $Ox$ , користуються перетвореннями Лоренца. Наприклад, для визначення імпульсу в системі  $S'$  виходимо з того, що в обох системах він виражається відповідно так:

$$p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad p' = \frac{m_0 u'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}.$$

Підставивши в останній вираз

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}},$$

після виконання математичних операцій дістанемо

$$p'_x = \frac{p_x - mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad p'_y = p_y; \quad p'_z = p_z.$$

Аналогічно знайдемо формулу перетворення для маси

$$m' = \frac{m - \frac{v}{c^2} p_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Дещо складнішими викладками з урахуванням формул перетворення швидкості та часу можна знайти формули перетворень для прискорення і сили. Зокрема, для сили дістанемо

$$f'_x = f_x; \quad f'_y = \frac{f_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad f'_z = \frac{f_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Зауважимо, що на відміну від класичної фізики у спеціальній теорії відносності прискорення та сила взаємодії тіл не є інваріантними величинами, в різних інерціальних системах вони різні.

## § 59. Взаємозв'язок між масою та енергією

Маючи узагальнений вираз другого закону механіки (вираз сили), можна знайти вираз кінетичної енергії тіла в релятивістській області. Справді, за означенням приріст кінетичної енергії тіла

дорівнює роботі сили:  $dT = Fu dt$ . Підставивши замість  $F dt$  відповідний вираз із рівняння (5) § 58, дістанемо

$$dT = ud \left( \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right).$$

Після диференціювання матимемо

$$dT = m_0 \left[ \frac{udu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{u^2 du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} c^2} \right].$$

Якщо суму в квадратних дужках звести до спільного знаменника, а в чисельнику прирівняти подібні члени, то дістанемо

$$dT = \frac{m_0 u du}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (1)$$

Як відомо, зі збільшенням швидкості зростає не тільки кінетична енергія тіла, а і його маса; відповідно до формули (3) § 58 маємо

$$dm = \frac{m_0 u du}{c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (2)$$

Зіставивши вирази (1) та (2), знайдемо взаємозв'язок між приростом енергії тіла  $dT$  і приростом його маси  $dm$ , а саме:

$$dT = c^2 dm. \quad (3)$$

Із виразу (3) випливає, що зміна енергії тіла прямо пропорційна зміні його маси. На підставі цієї залежності робимо висновок, що між енергією тіла в цілому та його масою існує взаємозв'язок, який виражається формулою

$$E = mc^2. \quad (4)$$

Залежність (4) інакше називають *законом взаємозв'язку маси й енергії*. З нього випливає, що маса тіла може змінитися не тільки внаслідок зміни кількості його атомів або молекул у процесах масообміну, а й через зміну енергії тіла (наприклад, у процесах передавання теплоти, під час випромінювання світла тощо) відповідно до формули

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (5)$$

Енергію тіла у стані спокою, що дорівнює

$$E_{\text{вн}} = m_0 c^2, \quad (6)$$

називають *внутрішньою енергією тіла*.

Експериментальні підтвердження закону взаємозв'язку маси та енергії дають ядерні реакції. Характерним наслідком їх є *дефект маси*  $\Delta m$ , тобто виникнення різниці між сумарною масою частинок до і після реакції. Зменшення маси спокою в ядерній реакції означає, що частина її перетворилася на кінетичну масу, а відповідна частина внутрішньої енергії початкових ядер – на кінетичну енергію нових ядер. За дефектом маси в сучасній фізиці визначають енергію ядерних реакцій. Формула  $E = mc^2$  указує на величезні запаси ядерної енергії.

Зауважимо, що іноді із закону взаємозв'язку маси та енергії роблять помилковий висновок щодо можливості перетворення маси на енергію. Так може думати тільки той, хто не розуміє відмінності між масою спокою, якою оперує класична фізика, і повною масою в теорії відносності. Насправді у будь-якій ядерній реакції повна маса уламків ядра дорівнює повній масі початкового ядра; так само повна енергія уламків дорівнює повній енергії початкового ядра. Як уже зазначалось, в ядерній реакції відбуваються лише перетворення частини маси спокою початкових ядер на кінетичну масу їхніх уламків та відповідне перетворення внутрішньої енергії початкових ядер на кінетичну енергію уламків.

**Приклад 1.** Електрон рухається зі швидкістю  $2 \cdot 10^8$  м/с. Визначити його кінетичну енергію за класичною і релятивістською формулами. Порівняти результати.

*Розв'язання.* За класичною формулою кінетична енергія електрона

$$T_{\text{кл}} = \frac{m_0 v^2}{2}; \quad T_{\text{кл}} = 114 \text{ кеВ.}$$

За релятивістською формулою

$$T_{\text{рел}} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad T_{\text{рел}} = 175 \text{ кеВ.}$$

**Приклад 2.** На Серпуховському синхрофазотроні протони прискорюються до енергії 76 млрд еВ. Обчислити релятивістську масу (в масах спокою) і швидкість цих частинок.

*Розв'язання.* Надану кінетичну енергію протона у прискорювачі знайдемо за різницею повної енергії протона та енергії його спокою:

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right), \quad (1)$$

$$\text{де } m_{\text{рел}} = \frac{T}{m_0 c^2} = \frac{76 \cdot 10^9}{931 \cdot 10^6} = 81 m_0.$$

Урахувавши останній результат, за рівністю (1) знайдемо

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{і} \quad v = \beta c.$$

Тоді

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1; \quad \beta = 0,994; \quad v = 0,994 c.$$

## § 60. Єдиний закон збереження маси, імпульсу й енергії

У сучасній фізиці, крім співвідношення енергії та маси, важливу роль відіграє співвідношення енергії й імпульсу.

Скористаємося виразами енергії та імпульсу

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right).$$

Піднесемо ці рівності до квадрата і першу поділимо на другу. Тоді матимемо

$$\frac{E^2}{p^2} = \frac{c^2}{\beta^2}. \quad (1)$$

Із виразу квадрата імпульсу визначимо  $\beta^2$ :

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2 \beta^2 c^2}{1-\beta^2}; \quad \beta^2 = \frac{p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}.$$

Підставивши це значення у рівність (1), дістанемо шукане співвідношення

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (2)$$

У класичній фізиці співвідношення енергії й імпульсу має такий вигляд:

$$E_{\text{кл}} = \frac{p^2}{2m_0}. \quad (3)$$

У теорії відносності співвідношення енергії і маси та енергії й імпульсу приводять до формулювання єдиного закону збереження маси, імпульсу й енергії. Продемонструємо це. Користуючись виразом (2), визначимо власну масу однієї частинки:

$$m_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - p_1^2}. \quad (4)$$



Поширимо цей вираз на ізольовану систему невзаємодіючих частинок. Енергія та імпульс системи визначаються відповідними сумами:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i; \quad P = \sum_{i=1}^n p_i,$$

де  $n$  – кількість частинок у системі.

Підставивши останні величини у вираз (4), знайдемо власну масу системи (масу спокою)

$$M = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - P^2}. \quad (5)$$

Оскільки для ізольованої системи справджуються закон збереження імпульсу і закон збереження енергії

$$P = \sum_{i=1}^n p_i = \text{const}_1; \quad E = \sum_{i=1}^n E_i = \text{const}_2,$$

відповідно до формули (5) зберігатиметься також власна маса системи:

$$M \equiv \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - P^2} = \text{const}. \quad (6)$$

Вираз (6) у теорії відносності має зміст єдиного закону збереження маси, імпульсу й енергії. У класичній фізиці, як відомо, розглядаються три окремі закони збереження маси, імпульсу та енергії.

Наведемо деякі істотні наслідки, що випливають із закону (6).

1. Застосуємо закон до системи, в якій центр мас перебуває у стані спокою, а тривимірний імпульс системи дорівнює нулю. Тоді дістанемо

$$M = \frac{E}{c^2} = \text{const}, \quad \text{або} \quad E = Mc^2 = \text{const}. \quad (7)$$

Визначимо енергію цієї системи через енергію її складових:

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum m_i c^2 = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i} c^2}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}. \quad (8)$$

Зіставляючи (7) і (8), знаходимо

$$M = \sum_{i=1}^n \frac{m_{0i}}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}; \quad \beta_i = \frac{v_i}{c}. \quad (9)$$

З останнього виразу випливає, що власна маса системи не дорівнює сумі власних мас складових, а визначається за складнішим

виразом (9); іншими словами, власна маса в теорії відносності не належить до адитивних величин.

2. Із законами збереження у фізиці тісно пов'язуються означення властивостей простору та часу. Зокрема, закон збереження імпульсу вказує на симетричність й однорідність простору, оскільки закон зберігає зміст незалежно від напрямку імпульсу; до того ж переміщення тіла з одного місця простору в інше не зумовлює зміни імпульсу, який змінюється лише внаслідок впливу зовнішніх тіл. Закон збереження енергії вказує на однорідність часу, оскільки неплин часу, а впливи зовнішніх сил змінюють енергію системи.

Теорія відносності спростувала уявлення класичної механіки про взаємну незалежність простору і часу та незалежність їх від руху матеріальних тіл. Єдиний закон збереження маси, імпульсу й енергії в теорії відносності свідчить про однорідність єдиного просторово-часового світу, його симетричність. Однак відповідно до закону діалектичної єдності просторово-часовий світ не позбавлений проявів асиметрії. Одним із загальних проявів асиметрії світу є напрямленість часу від сучасного до майбутнього.

## § 61. Загальна теорія відносності. Принцип еквівалентності

У викладеній спеціальній теорії відносності було показано, що закони природи інваріантні стосовно будь-яких інерціальних систем координат і для одержання інваріантних виразів фізичних законів потрібно задати їх у чотиривимірній формі. Так дістали інваріантну форму рівнянь Максвелла в електродинаміці (де «порушувалася» рівноправність систем тим, що нерухомий заряд в одній системі пов'язувався лише з електростатичним полем, а в іншій, відносно рухомій, – з електричним та магнітним полями); пізніше дістали інваріантну форму другого закону механіки.

Проте А. Ейнштейна не задовольняв той факт, що закони природи сформульовані тільки для особливого класу систем відліку – інерціальних. Тим більше, що такі системи важко знайти. Наближено інерціальною можна назвати систему, пов'язану із Землею; ближчою до інерціальної є система, пов'язана з Сонцем або з будь-якою іншою зіркою.

А. Ейнштейн поставив за мету знайти такі формулювання фізичних законів, в яких вони справджуватимуться в усіх системах відліку. Над цією проблемою він працював протягом 1906–1916 рр. В результаті аналізу явищ у прискорених системах А. Ейнштейн сформулював *принцип еквівалентності гравітаційних сил і сил інерції* та встановив зв'язок між метрикою простору – часу і тяжін-

ням. Точніше кажучи, йому вдалося створити *релятивістську теорію тяжіння*.

З'ясуємо мотиви, які привели А. Ейнштейна до формулювання принципу еквівалентності.

Розглядаючи інерціальні системи відліку, ми переконалися, що згідно зі спеціальним принципом відносності ніякими фізичними дослідженнями в системі неможливо виявити, перебуває вона у стані абсолютного рівномірного та прямолінійного руху чи ні. При переході до розгляду неінерціальних систем природно постає питання, а чи можна фізичними дослідженнями у такій системі виявити її прискорений рух. Щоб відповісти на це питання, уявімо лабораторію настільки віддалену від небесних тіл, що в ній відсутнє поле тяжіння. У такій лабораторії, очевидно, поняття «верх» і «низ» утрачають зміст, у ній всі тіла та нитки підвісу зберігають довільне розміщення. Однак коли таку лабораторію привести у рівноприскорений рух, скажімо, у напрямі від Землі, то все зміниться. Усі тіла в ній дістануть прискорення протилежного напрямку ( $-a$ ), нитки підвісу будуть натягнуті до Землі.

У § 23 йшлося про те, що у прискореній системі можна користуватися другим законом Ньютона, якщо до істинної сили  $\vec{F}$  додати силу інерції  $\vec{F}_{\text{ін}}$ , тобто

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ін}}, \quad (1)$$

де  $F_{\text{ін}} = -ma$ . Коли істинна сила (дія іншого тіла) дорівнює нулю, на кожне тіло у прискореній системі діятиме сила інерції, пропорційна масі тіла.

Спочатку здається, що, спираючись на силу інерції, можна дати позитивну відповідь на поставлене питання. Проте це не так. Сутність питання розкрив А. Ейнштейн. Він констатував, що рівноприскорена система зумовлює такі самі механічні ефекти, як і однорідне поле тяжіння. Сили тяжіння, як і сили інерції, пропорційні масам тіл та надають їм однакового прискорення. Знайдена ним закономірність, що дістала назву *принципу еквівалентності*, стверджує: перебіг усіх фізичних процесів однаковий в інерціальних системах, які перебувають в однорідному полі тяжіння, і в системі відліку, що поступально переміщується зі сталим прискоренням поза полем тяжіння.

Із практичного погляду принцип еквівалентності дає змогу створювати штучне поле тяжіння у системі переведенням її у прискорений рух або ж штучно усувати його, створюючи умови для вільного переміщення системи під дією сил тяжіння.

Покажемо, що принцип еквівалентності, проілюстрований на поступальній рівноприскореній системі, справджується також для

рівномірно обертальної системи. Ми вже знаємо, що в такій системі згідно з другим законом Ньютона до істинної сили  $\vec{F}$  додаються відцентрова сила інерції  $\vec{F}_B = m\omega^2\vec{r}$  та коріолісова сила інерції  $\vec{F}_K = 2m[\vec{v}\vec{\omega}]$ :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_B + \vec{F}_K. \quad (2)$$

Якщо істинна сила дорівнює нулю, то на тіло в обертальній системі діятимуть лише сили інерції. Останні, як випливає з формул (1) і (2), пропорційні масі тіла, а отже, надаватимуть усім тілам однакових прискорень, як і сили тяжіння.

Зауважимо, що сили інерції істотно відрізняються від сил тяжіння. Зокрема, відцентрова сила напрямлена по радіусу від осі та збільшується пропорційно його довжині; сила Коріоліса діє лише на рухоме тіло і не залежить від його координат. Істинні сили тяжіння зменшуються з віддаленням від тіл, що створюють поле. Проте в малих об'ємах простору ці сили не розрізнятимуться.

Принцип еквівалентності дає змогу створювати штучні локальні поля тяжіння або усувати їх. Прикладом цього може бути кабіна космічного корабля під час обертання його навколо Землі.

З викладеного зрозуміло, що принцип еквівалентності може бути поширений на довільні прискорені системи та відповідні гравітаційні поля. Таким чином, можна стверджувати: довільний рух системи відліку, пов'язаний із будь-яким змінним у часі прискоренням, деформаціями координатних осей тощо, еквівалентний відповідному змінному і неоднорідному гравітаційному полю.

## § 62. Зв'язок геометрії з полем тяжіння

У викладі різних питань курсу фізики підкреслювалося, що для опису будь-якого процесу необхідно передусім вибрати систему відліку (тіло відліку та систему координат). Досконалість вибору системи відліку визначається об'єктивними взаємозв'язками тіл.

Уже з розгляду інерціальних систем у спеціальній теорії відносності ми дізналися, що, рівноправні з погляду фізичних закономірностей, вони нерівноправні з погляду фізичних властивостей простору і часу, а також кінематичної форми руху, віднесеного до цих систем. Спростовуючи хибну думку стосовно рівноправності систем відліку, А. Ейнштейн писав: «Фізичні закони краще застосовувати в системі Коперника, ніж у системі Птолемея. Велич відкриття Коперника може бути високо оцінена лише з погляду фізики, яка показує, що для опису руху планет система координат, жорстко пов'язана з Сонцем, має величезні переваги».

Опис процесу у вибраній системі відліку здійснюється за допомогою координат. У разі тривимірного континууму користуються декартовими, сферичними, циліндричними координатами. Переходи від одних до інших координат забезпечуються простими співвідношеннями. Наприклад, для декартових та сферичних координат (рис. 98) вони мають вигляд:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta; \quad (1)$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

Основним у теорії відносності є питання переходу від однієї до іншої відносно рухомої системи відліку. Як відомо, для інерціальних систем такий перехід забезпечується перетвореннями Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z. \quad (2)$$

При малих швидкостях ( $v \ll c$ ) дістаємо формули перетворень Галілея. Названі координати і їх перетворення належать до таких, якими забезпечується непорушність основних рівнянь механіки.

Питання координат та їх перетворень істотно ускладнюється для систем, які перебувають у прискорених рухах. Уже зазначалося, що для збереження другого закону механіки у таких системах потрібно було б вводити сили інерції, проте принцип еквівалентності

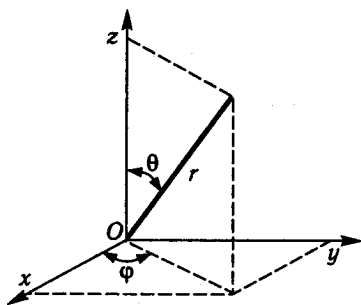


Рис. 98

дає змогу замінити їх полем тяжіння. Це дає змогу в більш загальному вигляді описати процеси, які відбуваються у прискорених і zdeформованих системах відліку. Йдеться про можливість накладання на інерціальні системи відліку поля тяжіння. Це означає, що замість декартових координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  для опису процесу в будь-якій системі можна скористатися деякими іншими координатами  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  як функціями декартових

координат часу, а для врахування зміни часу в разі переходу до рухомої системи ввести четверту координату  $x_4$  (також залежну від часу та координат). Таким чином, дістанемо найзагальнішу систему координат:

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(x, y, z, t); \\x_2 &= f_2(x, y, z, t); \\x_3 &= f_3(x, y, z, t); \\x_4 &= f_4(x, y, z, t).\end{aligned}\tag{3}$$

Відповідно пошуки загальної теорії можуть зводитися до таких формулювань законів природи, які були б інваріантними щодо будь-яких перетворень цих чотирьох координат.

Щоб мати конкретніші уявлення про названі перетворення, розглянемо особливості геометрії в довільних координатних системах.

У геометрії на площині в декартових координатах квадрат відстані між двома близькими точками виражається сумою квадратів диференціалів координат  $dx$ ,  $dy$  (зі сталими коефіцієнтами, що дорівнюють одиниці):

$$dl^2 = dx^2 + dy^2.\tag{4}$$

У інших координатах ця властивість утрачається. Наприклад, у полярних координатах

$$\begin{aligned}dx &= d\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi d\varphi; \\dy &= d\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi d\varphi,\end{aligned}$$

звідки дістаємо вираз

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2,\tag{5}$$

в якому перед квадратом диференціала координати  $\varphi$  з'являється змінний коефіцієнт  $\rho^2$ . Проте в геометрії на площині завжди можна перейти від будь-яких координат до декартових і мати вираз (4). Сутність цього полягає в тому, що в усіх оперуваннях на площині не виходять за межі законів геометрії Евкліда (на площині справджується теорема Піфагора, сума кутів будь-якого трикутника дорівнює  $\pi$ ).

У геометрії тривимірного простору дістаємо аналогічні співвідношення. Тут у декартових координатах квадрат відстані між двома близькими точками виражається сумою квадратів диференціалів координат:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.\tag{6}$$

В інших криволінійних координатах ця властивість утрачається. Наприклад, у сферичних координатах диференціюванням формул (1) дістаємо

$$\begin{aligned} dx &= dr \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi; \\ dy &= dr \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi; \\ dz &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta; \end{aligned}$$

після підстановки цих значень у вираз (6) матимемо

$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2, \quad (7)$$

де перед квадратами диференціалів координат  $\varphi$  і  $\theta$  записано змінні коефіцієнти  $r^2 \sin^2 \theta$  та  $r^2$ .

Однак і тут, як і в геометрії на площині, завжди можна перейти від криволінійних координат до декартових та дістати вираз (6). Це є свідченням того, що у тривимірному просторі справджуються закони геометрії Евкліда (зокрема, тривимірна теорема Піфагора: квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його ребер). Тому такий простір називають «плоским».

У геометрії на кривій поверхні та в геометрії «кривого» простору дістаємо інші співвідношення. Тут закони геометрії Евкліда не справджуються. Наприклад, у геометрії на сферичній поверхні теорема Піфагора втрачає сенс; сума кутів сферичного трикутника не дорівнює  $\pi$ ; відстань між двома точками на сферичній поверхні визначається відрізком дуги великого кола; при  $r = 1$ ,  $dr = 0$  маємо

$$dl^2 = \sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2.$$

Раніше вважали, що в реальному тривимірному просторі справджуються закони геометрії Евкліда. Проте це не завжди так. Геометрія як наука про властивості простору – це не витвір фантазії, а результат пізнання навколишнього світу. Глибоко розуміючи це, М. І. Лобачевський довів можливість побудови більш загальної неевклідової геометрії.

У спеціальній теорії відносності було показано, що простір і час як форми існування матерії становлять єдиний чотиривимірний континуум. Загальна теорія відносності доводить, що на цей континуум накладаються впливи поля тяжіння як виду матерії. Ці факти виходять за межі геометрії Евкліда. Зокрема, у спеціальній теорії відносності роль відстані між двома «світними точками» відіграє інтервал

$$dS^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (8)$$

в якому квадрат чотиривимірної «відстані» виражається сумою квадратів диференціалів координат зі сталими коефіцієнтами  $(c^2, -1, -1, -1)$ .

У разі використання інших координат, очевидно, змінюватиметься лише просторова частина інтервалу ( $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ), а часова ( $c^2 dt^2$ ) залишиться без змін. Як відомо, у процесі переходу до інерціальної системи інтервал залишається незмінним.

Інтервал зазнає істотних змін у разі переходу до прискореної системи відліку. Наприклад, переходячи до рівноприскореної системи, що переміщується у напрямі осі  $Ox$ , дістанемо (у нерелятивістському випадку)

$$x = x' + \frac{at^2}{2}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'. \quad (9)$$

Після підстановки диференціалів координат у вираз (8) квадрат інтервалу набере вигляду

$$dS^2 = (c^2 - a^2 t^2) dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 - 2at dx' dt.$$

У разі переходу до рівномірно обертальної системи відліку (рис. 99) дістанемо (у нерелятивістському наближенні)

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t; \\ y &= y' \cos \omega t + x' \sin \omega t; \\ z &= z'; \quad t = t'. \end{aligned}$$

Після підстановки диференціалів координат у вираз (8) квадрат інтервалу набере вигляду

$$\begin{aligned} dS^2 &= \left[ c^2 - \omega^2 (x'^2 + y'^2) \right] dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + \\ &+ 2\omega y' dx' dt - 2\omega x' dy' dt. \end{aligned}$$

Відмінність виразу квадрата інтервалу у прискорених системах полягає в тому, що крім квадратів координат він включає добутки диференціалів різних координат і зберігає однорідну квадратичну форму із взагалі незмінними коефіцієнтами.

З викладеного випливає, що в разі переходу від координат  $x, y, z, t$  до раніше введених координат чотиривимірного простору  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (а це за фізичною сутністю рівноцінно переходу до будь-якої прискореної та здеформованої

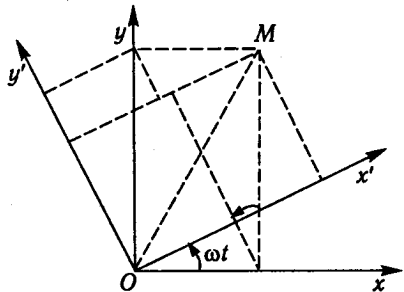


Рис. 99



системи відліку) квадрат інтервалу набере аналогічного вигляду:

$$dS^2 = g_{11}(x_1, \dots, x_4) dx_1^2 + g_{22}(x_1, \dots, x_4) dx_2^2 + g_{33}(x_1, \dots, x_4) dx_3^2 + \\ + g_{44}(x_1, \dots, x_4) dx_4^2 + 2g_{12}(x_1, \dots, x_4) dx_1 dx_2 + \\ + 2g_{13}(x_1, \dots, x_4) dx_1 dx_3 + 2g_{14}(x_1, \dots, x_4) dx_1 dx_4 + \\ + 2g_{23}(x_1, \dots, x_4) dx_2 dx_3 + 2g_{24}(x_1, \dots, x_4) dx_2 dx_4 + \\ + 2g_{34}(x_1, \dots, x_4) dx_3 dx_4,$$

або, в компактній формі,

$$dS^2 = \sum_{i=k=1}^4 g_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_i dx_k. \quad (10)$$

Сукупність величин  $g_{ik}$  утворює метричний тензор. Названі величини симетричні:

$$g_{ik}(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_{ki}(x_1, x_2, x_3, x_4);$$

тому тензор включає 10 різних складових:

$$g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{23}, g_{24}, g_{34},$$

які змінюються у разі переходу від однієї системи до іншої.

Важливо зазначити, що за відсутності істинного поля тяжіння завжди можна від криволінійних неінерціальних координат  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (як було показано раніше для рівноприскореної та рівномірно обертальної систем відліку) повернутися до інерціальної декартової системи відліку. Тоді інтервал набере вигляду (8), а складові метричного тензора становитимуть

$$g_{ik} = 0, \quad i \neq k; \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1; \quad g_{44} = c^2.$$

Це означає, що за відсутності істинного поля тяжіння чотиривимірний континуум є «плоским», а тривимірний простір підлягає геометрії Евкліда.

Для наявного істинного поля тяжіння ніякими перетвореннями координат  $x_1, x_2, x_3, x_4$  неможливо звести інтервал до вигляду (8). Це означає, що у полі тяжіння чотиривимірний континуум є «кривим», а тривимірний простір підлягає неевклідовій геометрії.

Загальна теорія відносності доводить, що геометричні властивості простору і перебіг часу визначаються густиною матерії у певній області Всесвіту. В тих місцях, де створилися скупчення мас і сильне поле тяжіння, простір і час «викривлені», геометрія стає неевклідовою, плин часу сповільнений.

Наведемо деякі дані, що підтверджують висновки загальної теорії відносності.

Істотним у цій теорії є припущення щодо дії поля тяжіння на світло. Завдяки цій дії світловий промінь, проходячи поблизу космічних тіл, має притягуватися до них і викривлятися. Таке відхилення променя світла у полі тяжіння Сонця добре спостерігається під час повного його затемнення. Унаслідок викривлення променів світла від зірок, розміщених поблизу сонячного диска, ми бачимо ці зірки зміщеними порівняно з попереднім положенням. Астрономи, фотографуючи небо, з 1919 р. фіксують викривлення світлових променів поблизу Сонця. Ці дані підтверджують тезу про гравітаційну масу світла.

Викривлення у полі тяжіння просторових ліній звичайних тіл і викривлення світлових променів свідчать про те, що у полі тяжіння немає фізичних прообразів прямої лінії. Це може свідчити про викривлений простір у цілому.

Одним із наслідків теорії є вплив поля тяжіння на плин часу. Ритм годинника на Сонці буде більш сповільнений, ніж на Землі; такий самий вплив має позначитися на ритмах атомів – частотах обертання електронів навколо їхніх ядер та частотах випромінюваного ними світла. Цей ефект стає помітним для надгустих зірок, якими є білі карлики. Їх густина досягає  $10^9$  кг/м<sup>3</sup>; тому на поверхні білих карликів поле тяжіння у мільйони разів сильніше, ніж на поверхні Землі. Порівняння спектрів тих самих атомів від земних джерел і надгустих зірок показує, що спектри останніх дещо зміщені в бік червоної частини. Цей факт підтверджує теорію та є одним із способів визначення маси зірок.

Теорія відносності є сучасною фізичною теорією простору, часу і тяжіння. Вона розкриває глибокий взаємозв'язок простору та часу між собою і з рухомою матерією.

## § 63. Динаміка гармонічних коливань

У викладі кінематики гармонічних коливань (див. § 8) було показано, що зміщення, швидкість і прискорення точки в гармонічному коливанні – періодично змінні величини. Характерною для гармонічного коливання є залежність між прискоренням та зміщенням:

$$a = -\omega^2 x, \quad (1)$$

тобто прискорення пропорційне зміщенню і напрямлене у бік, протилежний зміщенню.

Знаючи прискорення руху та масу точки, за другим законом механіки можна знайти діючу силу

$$F = -m\omega^2 x. \quad (2)$$

Ця сила пропорційна зміщенню точки від положення рівноваги і напрямлена до положення рівноваги, тому її називають *повертальною силою*. Формулу для визначення повертальної сили записують так:

$$F = -kx, \quad (3)$$

де  $k = m\omega^2$  – коефіцієнт повертальної сили. За цим коефіцієнтом знаходять циклічну частоту коливання і період:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad (4)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5)$$

Як видно, вираз (3) аналогічний виразу сили пружності. Тому повертальну силу називають *квазіпружною* (ніби пружною). Це означає, що не тільки пружна, а й будь-яка інша сила такого виду зумовлює гармонічне коливання. Наприклад, квазіпружними можуть бути: складова сили тяжіння кульки, підвішеної на нитці (маятник), при дуже малих кутах її відхилення; рівнодійна сили тяжіння-

ня і виштовхувальної сили Архімеда для тіла, що плаває на поверхні рідини, та ін.

З погляду динаміки гармонічним коливанням називають періодичний процес, який виникає під дією квазіпружної сили. На підтвердження цьому розглянемо поведінку кульки, підвешеної на пружині.

У положенні рівноваги в точці  $O$  (рис. 100, а) сила тяжіння зрівноважується силою пружності:

$$mg = k\Delta l.$$

Якщо кульку вивести з положення рівноваги (рис. 100, б) і вважати додатним напрямом зміщення  $x$  від положення рівноваги вниз, то рівняння динаміки для кульки матиме такий вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(\Delta l + x).$$

Однак оскільки  $mg = k\Delta l$ , можна записати

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad (6)$$

або після перетворення

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (7)$$

Легко перевірити підстановкою, що розв'язок цього рівняння виражає гармонічне коливання

$$x = A \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right) \quad (8)$$

з циклічною частотою

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9)$$

та періодом коливання

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (10)$$

У цих виразах  $k$  – коефіцієнт жорсткості пружини.

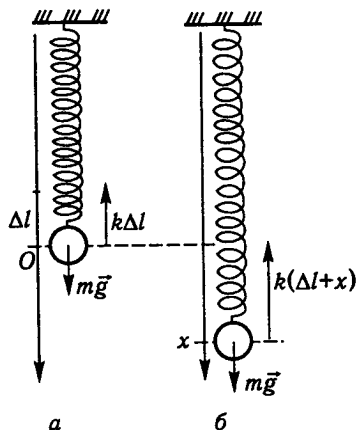


Рис. 100

Отже, кулька, підвішена на пружині і виведена з положення рівноваги, перебуватиме в гармонічному коливанні. Характерно, що її коливання не залежить від сили тяжіння, а залежить лише від поперечної сили пружності; тому воно буде однаковим в усіх місцях на Землі і навіть на інших планетах.

## § 64. Маятники

Систему, що описується рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

називають *гармонічним осцилятором*. Розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$x = A \sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Отже, гармонічним осцилятором можна назвати будь-яку систему, яка здійснює гармонічні коливання біля положення рівноваги.

Прикладом гармонічних коливань може бути коливання маятника при малих кутових відхиленнях від положення рівноваги. *Маятником* називають тіло, що коливається під дією сили тяжіння  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Розрізняють математичний і фізичний маятники; розглянемо їх окремо.

1. *Математичним маятником* називають матеріальну точку, підвішену на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 101).

Нехай маса маятника  $m$ , а довжина нитки підвішування  $l$ . З відхиленням маятника від положення рівноваги виникає поперечна сила  $\vec{F}$ , модуль якої

$$F = mg \sin \varphi,$$

де  $\varphi = \frac{x}{l}$  (рад) – кутове відхилення маятника. Складові  $\vec{N}$  зрівноважується реакцією нитки.

При малих кутових відхиленнях  $\sin \varphi \approx \varphi$ , тому формулу для поперечної сили можна записати у вигляді

$$F = -\frac{mg}{l} x, \quad (2)$$

де  $x$  – зміщення маятника від положення рівноваги, а знак «мінус» показує, що поперечна сила протилежна напрямку зміщення. Як бачимо, при малих кутах відхилення маятника по-

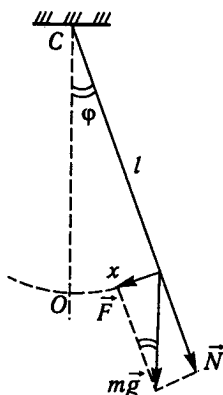


Рис. 101

вертальна сила квазіпружна; тому коливання маятника гармонічні. Дійсно, після підстановки  $F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$  у вираз (2) дістаємо рівняння гармонічного осцилятора

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0, \quad (3)$$

звідки

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Період коливання математичного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4)$$

Звідси випливають такі закономірності коливання математичного маятника:

- період його коливання не залежить від маси маятника;
- період коливання не залежить від амплітуди (ізохронність маятника);
- період коливання прямо пропорційний квадратному кореню з довжини маятника й обернено пропорційний квадратному кореню з прискорення вільного падіння.

Математичний маятник використовують для вимірювання прискорення вільного падіння  $g$ . Ми вже з'ясували, що з переміщенням від екватора до полюсів на поверхні Землі вага тіла, а відповідно і прискорення вільного падіння збільшуються. Ці зміни найкраще виявляють математичним маятником. Крім того, земна кора в різних місцях має неоднаковий склад; тому в місцях, де вона має більшу густину, прискорення вільного падіння зростає. Вимірюючи його математичним маятником, розвідують корисні копалини.

2. *Фізичним маятником* називають тверде тіло довільної форми, яке коливається під дією тяжіння навколо горизонтальної осі. Зрозуміло, що вісь коливання маятника розташовується вище від його центра маси.

Якщо маятник вивести з положення рівноваги (рис. 102), то на нього діятиме поворотальний момент  $M$  сили тяжіння, знак якого протилежний знаку кута відхилення маятника, а саме:

$$M = -mgx = -mgL \sin \varphi, \quad (5)$$

де  $OC = L$  – відстань центра мас від точки підвішування маятника.

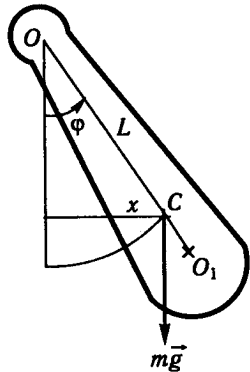


Рис. 102

При малих кутах відхилення  $\sin \varphi \approx \varphi$  (рад) поворотальний момент

$$M = -mgL\varphi. \quad (6)$$

Цей момент надає тілу кутового прискорення

$$\beta = \frac{M}{I}.$$

Після відповідних підстановок дістанемо рівняння фізичного маятника

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgL}{I}\varphi, \quad (7)$$

де  $I$  – момент інерції тіла відносно осі коливання.

Це рівняння цілком аналогічне рівнянню динаміки гармонічного осцилятора. І в цьому разі легко перевірити підстановкою, що розв'язок рівняння (7) задає гармонічне коливання

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (8)$$

з циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \quad (9)$$

та періодом коливання

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}. \quad (10)$$

Фізичний маятник також має властивість ізохронності, тобто його період коливань не залежить від амплітуди. Завдяки цій властивості він став важливою складовою годинника. Формулу для визначення періоду коливання фізичного маятника нерідко використовують як робочу формулу для обчислення прискорення вільного падіння  $g$  або моменту інерції тіла  $I$ .

Фізичний маятник можна розглядати також як сукупність багатьох математичних маятників різної довжини. Оскільки вони жорстко зв'язані, короткі маятники спонукають фізичний маятник до частіших коливань, довгі – до повільніших. Для кожного фізичного маятника можна підібрати такий математичний маятник, який матиме однаковий період коливання із фізичним. Довжина такого математичного маятника називається *зведеною довжиною фізичного маятника*.

З рівності періодів коливання цих маятників можна знайти вираз зведеної довжини  $l_0$  фізичного маятника:

$$l_0 = \frac{I}{mL}. \quad (11)$$

Точка  $O_1$  на фізичному маятнику (див. рис. 102), що відповідає зведеній довжині, називається *центром коливань*. Центр коливань  $O_1$  і точка підвішування  $O$  – спряжені точки; якщо їх поміняти місцями, то період фізичного маятника не зміниться.

**Приклад 1.** Найвище обжите людиною місце на земній кулі розташовується на висоті 5200 м над рівнем моря (Ронбузький монастир у Гімалаях). На скільки поспішатиме за добу маятниковий годинник, вивірений на зазначеній висоті, якщо перенести його на рівень моря?

**Розв'язання.** Час, що показує маятниковий годинник, пропорційний часу  $n$  повних коливань маятника. При заданому часі спостереження  $t$  це число залежить від періоду коливань, а отже, від довжини маятника та прискорення сили тяжіння. Покази точних і неточних маятникових годинників відповідно становитимуть  $t_1 = kn_1$  та  $t_2 = kn_2$ , де  $k$  – коефіцієнт, що залежить від конструкції годинника. Тоді

$$\pm \Delta t = t_1 - t_2 = t_1 \left( 1 - \frac{n_2}{n_1} \right). \quad (1)$$

Оскільки в умові йдеться про покази годинників за добу,  $t_1 = n_1 T_1 = n_2 T_2$ ; отже, рівність (1) набирає вигляду

$$\pm \Delta t = t_1 \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right);$$

при  $l_1 = l_2$ ,  $g_2 > g_1$  дістанемо

$$\Delta t = t_1 \left( 1 - \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} \right) = t_1 \left( 1 - \frac{R_3 + h}{R_3} \right) = -t_1 \frac{h}{R_3},$$

де  $R_3 = 6370$  км – радіус Землі.

Підставивши сюди числові значення величин, знайдемо, що за добу годинник поспішатиме на  $\Delta t = 70$  с.

**Приклад 2.** На гладенькому горизонтальному столі лежить куля масою  $M$ , прикріплена до стінки пружиною з коефіцієнтом жорсткості  $k$ . У кулю вдаряє інша куля масою  $m$  і швидкістю  $v_0$  у напрямі осі пружини. Вважаючи удар абсолютно непружним, знайти амплітуду та період коливання кулі.

**Розв'язання.** Після удару система з двох куль як ціле тіло здійснюватиме гармонічне коливання під дією пружної сили

$$F = -(M + m)\omega^2 x,$$

де

$$(M + m)\omega^2 = k; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M + m}{k}}.$$

Щоб знайти амплітуду  $A$  коливання, скористаємось рівністю потенціальної енергії  $\Pi$  амплітудного положення тіл і їхньої кінетичної енергії  $K$  в момент виходу з початкового положення:

$$\Pi = \frac{kA^2}{2}; \quad K = \frac{(M + m)v^2}{2}.$$

Швидкість  $v$  знайдемо за законом збереження імпульсу:

$$mv_0 = (M + m)v; \quad v = \frac{mv_0}{M + m}.$$



Отже,

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{(M+m)m^2 v_0^2}{2(M+m)^2},$$

звідки

$$A = \frac{mv_0}{M+m} \sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

**Приклад 3.** Визначити модуль  $D$  пружного кручення металевго дроту, використавши його для підвішування тіла з відомим моментом інерції  $I$  (кулі або диска) та здобуття крутильного маятника.

**Розв'язання.** Якщо підвішене тіло повернути навколо вертикальної осі, що збігається з віссю дроту, то воно здійснюватиме крутильні коливання під дією пружного моменту дроту  $M = -D\phi$ . Період коливання такого маятника знайдемо за рівнянням динаміки обертального руху підвішеного тіла

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} = -D\phi, \quad \text{або} \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{D}{I}\phi = 0.$$

Це рівняння є диференціальним рівнянням гармонічного коливання із циклічною частотою  $\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$ , тобто періодом  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$ , звідки

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} I.$$

Легко бачити, що при відомому модулі  $D$  крутильний маятник можна використовувати для підвішування і визначення моменту інерції тіл довільної форми відносно заданої осі обертання.

## § 65. Енергія коливального руху

Щоб надати матеріальній точці коливального руху, треба вивести її з положення рівноваги. Для цього виконують певну роботу проти повертальної сили. Ця робота буде мірою *потенціальної енергії*, наданої точці ззовні:

$$W = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}. \quad (1)$$

Потенціальна енергія точки в коливальному русі пропорційна квадрату зміщення.

Після припинення дії зовнішньої сили точка повертатиметься до положення рівноваги під дією квазіпружної сили. Зі зменшенням зміщення відповідно до закону збереження енергії потенціальна енергія точки перетворюватиметься на кінетичну.

Оскільки зміщення точки  $x = A \sin \omega t$  і коефіцієнт квазіпружної сили  $k = m\omega^2$ , потенціальну енергію точки в коливальному русі можна визначити за формулою

$$W = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t. \quad (2)$$

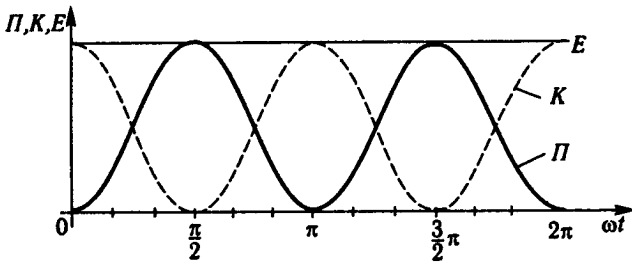


Рис. 103

Кінетичну енергію точки з масою  $m$  та швидкістю  $v$  запишемо так:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t. \quad (3)$$

У положеннях крайнього зміщення потенціальна енергія максимальна, а кінетична дорівнює нулю. З рухом до положення рівноваги потенціальна енергія зменшується, а кінетична збільшується; у момент рівноваги потенціальна енергія дорівнює нулю, а кінетична набуває максимального значення. Завдяки кінетичній енергії точка далі зміщується у протилежний бік. Такі періодичні (але не гармонічні) коливання потенціальної і кінетичної енергії (рис. 103) відбуваються у процесі гармонічного коливання точки.

Повна енергія точки в коливальному русі складатиметься із суми потенціальної та кінетичної енергії:

$$E = \Pi + K = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t, \quad (4)$$

або після спрощення

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2. \quad (5)$$

Отже, енергія точки в коливальному русі пропорційна квадрату амплітуди і квадрату частоти. Якщо система ізольована від інших зовнішніх впливів, а точка коливається без тертя, то згідно із законом збереження енергії  $E$  коливального руху точки залишається сталою. На графіку вона зображується прямою, паралельною осі абсцис (див. рис. 103).

## § 66. Згасаючі коливання. Автоколивання

Практично всяке коливання матеріальної точки, якщо воно не підтримується ззовні, згасає, його амплітуда з часом зменшується. Причинами згасання коливань є сила тертя у точці, де підвищено

тіло, сила опору середовища, передавання коливань іншим тілам, теплові ефекти в деформаціях пружин.

Найістотніше впливає на коливання тіла опір середовища. Коли швидкість руху тіла мала, сила опору середовища пропорційна швидкості:

$$F_x = -r \frac{dx}{dt}, \quad (1)$$

де  $r$  – коефіцієнт опору ( $r > 0$ ); знак «мінус» показує, що сила опору завжди напрямлена проти руху.

Щоб визначити зміщення як функцію часу в разі згасаючих коливань, треба розв'язати рівняння динаміки цього руху, яке складають за другим законом Ньютона.

На точку в коливальному русі діють квазіпружна сила і сила опору, тому рівняння динаміки має такий вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

Масу  $m$ , коефіцієнт пружності  $k$  та коефіцієнт опору  $r$  називають *параметрами коливальної системи*.

Поділивши рівняння (2) на масу  $m$  і ввівши позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{r}{m} = 2\beta, \quad (3)$$

дістанемо однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta \frac{dx}{dt}. \quad (4)$$

Підставивши в рівняння (4) значення

$$x = ze^{-\beta t}, \quad (5)$$

де  $z$  – нова змінна величина, матимемо нове рівняння

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0. \quad (6)$$

Розв'язок такого рівняння нам відомий. Якщо  $(\omega_0^2 - \beta^2) > 0$ , що завжди спостерігається у разі незначної дії сили опору, то

$$z = A_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad (7)$$

де  $A_0$  й  $\alpha$  – відповідно найбільше значення амплітуди та початкова фаза згасаючого коливання;  $\omega$  – умовна циклічна частота цього коливання, яку визначаємо за формулою

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (8)$$

де  $\omega_0$  – власна частота, тобто частота тіла, коли дії зовнішніх сил відсутні.

Користуючись формулою (8), знаходимо умовний період згасаючого коливання

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}. \quad (9)$$

Період називається умовним тому, що згасаючі коливання лише умовно можна вважати періодичними: внаслідок зменшення амплітуди коливання повторюються не абсолютно точно.

Період коливання тіла у в'язкому середовищі більший, ніж період його власного коливання. Коли опір середовища значний, коливання не виникає, зміщене тіло повільно без коливання повертається у положення рівноваги.

Загальний розв'язок диференціального рівняння для згасаючих коливань (2) має такий вигляд:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha). \quad (10)$$

Звідси випливає, що амплітуда згасаючих коливань зменшується за законом

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (11)$$

Графік згасаючих коливань показано на рис. 104. Швидкість згасання характеризують *логарифмічним декрементом згасання*, тобто логарифмом відношення двох послідовних амплітуд:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t-T)}} = \beta T. \quad (12)$$

Якщо сюди замість  $\beta$  підставити його значення з (3), то дістанемо

$$\lambda = \frac{r}{2m} T. \quad (13)$$

Логарифмічний декремент – безрозмірне число, яке дорівнює, наприклад, для камертона  $10^{-3}$ , для інших звукових коливальних систем – близько 0,1.

Вимірявши послідовно кілька значень логарифмічного декременту згасання, можна визначити коефіцієнт опору  $r$ .

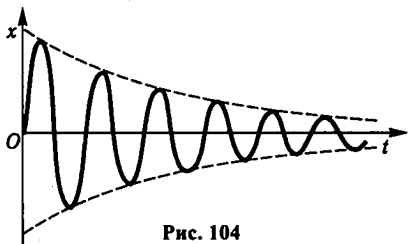


Рис. 104

Щоб коливання не згасали, до системи треба підводити енергію ззовні. Енергію можна поповнювати додатковими зовнішніми поштовхами в такт коливанням. Практично використовуються такі пристрої, за допомогою яких сама коливальна система у потрібний момент зумовлює зовнішній поштовх. Таку систему називають *автоколивною*, а її коливання – *автоколиваннями*. Прикладом автоколивної системи є годинник.

Теорію автоколивань розробили вчені О. М. Крилов, М. М. Боголюбов, О. О. Андронов та ін.

## § 67. Змушені коливання

Якщо коливальна система зазнала лише зовнішнього поштовху або була виведена з положення рівноваги і залишена сама на себе, то її коливання називають *вільними*. Якби не було сил опору, то ці коливання називалися б *власними*. Період та частота власних коливань залежать насамперед від речовини і геометричних особливостей тіла (камертон, струна, міст і т. д.).

Практично всякі вільні коливання є згасаючими. Незгасаючі коливання виникають під дією зовнішньої періодично змінної сили

$$F = F_0 \sin \omega_1 t. \quad (1)$$

Таку силу називають *змушувальною*, а коливання, що виникають під її дією, – *змушеними*. Змушених коливань зазнають мембрана гучномовця, фундамент поршневого двигуна, міст від поштовхів прохожих та ін.

Складемо рівняння динаміки змушених коливань. Водночас урахуємо, що крім змушувальної сили на систему діють також квазіпружна сила та сила опору середовища, що, як і раніше, сила опору пропорційна швидкості руху. Рівняння руху буде таким:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega_1 t. \quad (2)$$

Поділивши це рівняння на масу та ввівши позначення

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2; \quad \frac{r}{m} = 2\beta; \quad \frac{F_0}{m} = f_0, \quad (3)$$

дістанемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega_1 t. \quad (4)$$

Як відомо, загальний розв'язок такого рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (без довільних сталих). Першу частину розв'язку нам відомо – вона виражає зміщення згаданого коливання (див. § 66, (10)), яке через деякий проміжок часу практично дорівнює нулю. Залишається розглянути частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Шукатимемо його в такому вигляді:

$$x = A \sin(\omega_1 t + \alpha). \quad (5)$$

Через якийсь час устанавлюються коливання таких самих характеру та частоти, як і коливання змушувальної сили, лише з деяким зсувом за фазою  $\alpha$ . Однією з причин зсуву є сила опору. Її вплив легко зрозуміти. Припустимо, що у початковий момент часу точка була в стані спокою і на неї почала діяти змушувальна сила. Сила та зміщення точки відповідно зростатимуть і в кінці чверті періоду досягнуть максимуму. Згодом змушувальна сила почне зменшуватися, а точка під дією повертальної сили рухатиметься до положення рівноваги. Проте сила опору сповільнює рух точки, тому вона відставатиме від коливання змушувальної сили.

Щоб рівняння (5) було визначеним, треба знайти амплітуду  $A$  і зсув фази  $\alpha$  через параметри змущеного коливання.

Оскільки розв'язок має перетворювати рівняння на тотожність, рівняння (5) та його похідні

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A\omega_1 \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -A\omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \alpha) \end{aligned} \quad (6)$$

підставимо в рівняння (4). Якщо одночасно розгорнути синус і косинус суми та відповідно згрупувати члени рівняння, то матимемо

$$\begin{aligned} & \left[ A(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos \alpha - 2\beta A\omega_1 \sin \alpha \right] \sin \omega_1 t + \\ & + \left[ A(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin \alpha + 2\beta A\omega_1 \cos \alpha \right] \cos \omega_1 t = f_0 \sin \omega_1 t. \end{aligned} \quad (7)$$

Щоб це рівняння задовольнялося при всіх значеннях  $t$ , коефіцієнти при  $\sin \omega_1 t$  і  $\cos \omega_1 t$  в лівій та правій частинах рівняння мають бути рівними. З цього випливають такі дві умови (коефіцієнт при  $\cos \omega_1 t$  у правій частині дорівнює нулю):

$$\begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos \alpha - 2\beta A\omega_1 \sin \alpha &= f_0; \\ A(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin \alpha + 2\beta A\omega_1 \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Із цих двох рівнянь визначимо  $A$  й  $\alpha$ . Щоб визначити  $A$ , обидва рівняння піднесемо до квадрата і додамо їх:

$$A^2(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 A^2 \omega_1^2 = f_0^2,$$

звідки

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 \omega_1^2}}. \quad (9)$$

З другого рівняння знаходимо

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\beta \omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}. \quad (10)$$

Отже, вирази (5), (9) та (10) повністю визначають зміщення змушених коливань. Проаналізуємо їх.

Змушені коливання є гармонічними коливаннями, частота яких дорівнює частоті змушувальної сили. Амплітуда змушених коливань залежить не тільки від амплітудного значення змушувальної сили, а й від її частоти коливання. При певній частоті  $\omega_{\text{рез}}$  змушувальної сили амплітуда змушених коливань різко зростає, досягаючи максимального значення. Настає явище *резонансу*.

Резонансну частоту можна визначити з умови максимуму амплітуди  $\frac{dA}{d\omega} = 0$  або мінімуму підкореневого виразу в знаменнику виразу (9):

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (11)$$

Підставивши це значення частоти в (9), знайдемо резонансне значення амплітуди

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}. \quad (12)$$

З виразів (11) і (12) випливає, що коли опір середовища малий, то  $\omega_0^2 \gg 2\beta^2$  і резонансна частота збігається із частотою власних коливань:  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ . Тоді амплітуда змушених коливань стає дуже великою.

Залежність амплітуди змушених коливань від частоти та коефіцієнта згасання зображено на рис. 105. Зі зростанням коефіцієнта згасання  $\beta$  максимум резонансної кривої швидко зменшується і крива згладжується. Явище резонансу стає малопомітним.

Явище резонансу відіграє істотну роль у техніці. Його використовують в акустиці та радіотехніці, у приладах для вимірювання

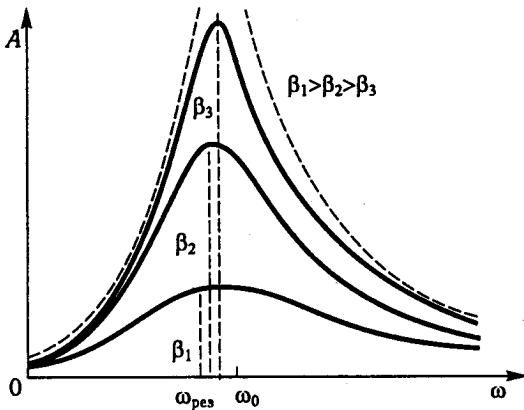


Рис. 105

частоти і т. д. Проте явище резонансу може спричинювати руйнування споруд та машин. Треба враховувати, що періодичні поштовхи від поршневих машин, силових валів турбін, гребних гвинтів і пропелерів передаються на фундаменти та інші частини машин. Тут резонанс дуже небезпечний. Тому, наприклад, власна частота вібрацій корпусу корабля або крил літака має дуже відрізнятися від частоти змушувальної сили, зумовленої обертанням силових гвинтів. Усе це враховують, конструюючи машини і споруди.

В окремих випадках резонанс призводив до руйнування мостів, коли по них проходила колона військ. Це пояснюється тим, що частота відбивання кроку збігалася із частотою власних коливань моста.

Зсув фаз залежить не тільки від сили опору, а й від співвідношення частот власних коливань  $\omega_0$  системи і змушувальної сили  $\omega_1$ . Коли  $\omega_1 = \omega_0$ , зсув фаз досягає  $-\frac{\pi}{2}$  (за фазою зміщення відстає від сили). У цьому випадку змушувальна сила на всьому шляху коливання точки збігається за напрямом із рухом точки, тому виконує позитивну роботу, внаслідок чого енергія системи збільшується. Такі умови характерні для явища резонансу.

Коли  $\omega_1 \gg \omega_0$ , зсув фаз наближається до  $-\pi$ , тобто коливання за фазою майже протилежні змушувальній силі. Коли зсув фаз відмінний від  $\frac{\pi}{2}$ , на деяких ділянках змушувальна сила напрямлена проти руху точки, тобто виконує негативну роботу, внаслідок чого енергія точки частково зменшується. Загалом умови поповнення енергії системи менш сприятливі, ніж умови резонансу.



## § 68. Додавання коливань однакового напрямку. Биття

Можливими є випадки, коли тіло перебуває одночасно в кількох коливаннях. Як приклад можна назвати коливання кульки, підвешеної на пружині у вагоні. Кулька коливається на пружині відносно точки підвішування і разом з вагоном коливається на ресорах відносно землі. Обидва ці коливання мають однаковий напрям.

Знайдемо результуючий рух точки, що одночасно перебуває у двох гармонічних коливаннях однакової частоти й однакового напрямку, заданих рівняннями

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \alpha_1); \\x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \alpha_2).\end{aligned}\quad (1)$$

Скористаймося геометричним відображенням гармонічних коливань (див. § 8, рис. 10, б). Тоді додавання заданих коливань зводиться до визначення суми проекцій векторів амплітуд  $\vec{A}_1$  й  $\vec{A}_2$  (рис. 106). Ця сума проекцій  $(x_1 + x_2)$  дорівнює проекції результуючого вектора амплітуд  $\vec{A}$ . Оскільки обидва вектори амплітуд  $\vec{A}_1$  та  $\vec{A}_2$  обертаються з однаковою швидкістю  $\omega$ , кут між ними весь час залишається сталим і дорівнює  $(\alpha_1 - \alpha_2)$ . Тому результуючий вектор амплітуди буде сталим за модулем й обертатиметься з тією самою кутовою швидкістю  $\omega$ . Його проекція

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \alpha).\quad (2)$$

Отже, якщо додати два гармонічних коливання однакової частоти й однакового напрямку, то результуючим рухом буде гармонічне коливання тих самих частоти та напрямку. Амплітуду  $A$  і початкову фазу  $\alpha$  визначають із векторної діаграми (див. рис. 106):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2);\quad (3)$$

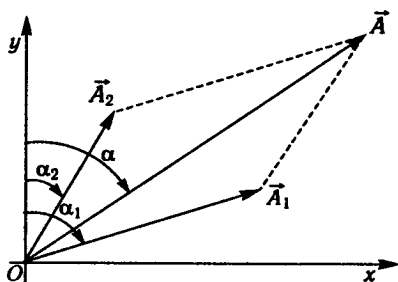


Рис. 106

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.\quad (4)$$

З виразу (3) випливає, що амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз його складових. Якщо різниця фаз  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ , то амплітуда результуючого коливання  $A = A_1 + A_2$ ; якщо  $\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \pi$ , тобто складові коливання перебувають у

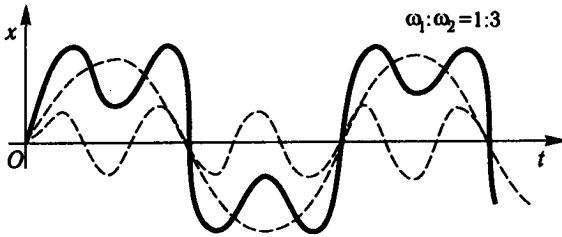


Рис. 107

протилежних фазах, то амплітуда результуючого коливання  $A = |A_1 - A_2|$ .

Коли додають гармонічні коливання із різними частотами, вектори амплітуд  $\vec{A}_1$  й  $\vec{A}_2$  обертаються із різними кутовими швидкостями  $\omega_1$  та  $\omega_2$ , тому результуючий вектор  $\vec{A}$  за модулем змінюється у вигляді пульсацій; кутова швидкість його обертання теж змінюється, і залежно від співвідношення частот відбуваються різні складні коливальні процеси (рис. 107).

Інтерес становить додавання двох гармонічних коливань із близькими частотами. Для спрощення викладу припустимо, що їхні амплітуди однакові, а початкові фази коливань дорівнюють нулю. Коли частоти коливань мало відрізняються, завжди можна вибрати початок відліку так, щоб початкові фази обох коливань дорівнювали нулю. Він відповідатиме тому моменту, коли одночасно в обох коливаннях точка проходить положення рівноваги в додатному напрямі осі  $Ox$ . За цієї умови рівняння складових коливань матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \sin \omega_1 t; \\ x_2 &= A \sin \omega_2 t. \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо додати ці два вирази і застосувати формулу для визначення суми синусів, то дістанемо

$$x = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (6)$$

Порівнявши цей вираз із рівнянням гармонічного коливання, можна дійти висновку, що результуюче коливання відбувається із частотою, яка дорівнює півсумі частот, але його амплітуда  $x_0 = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ , у свою чергу, змінюється із частотою пульсацій, що дорівнює піврізниці частот складових коливань. Таке результуюче коливання називають *биттям*.

Графік биття показано на рис. 108. Частота пульсацій амплітуди  $\Delta\omega$  значно менша, ніж частота  $\omega$  коливання точки.

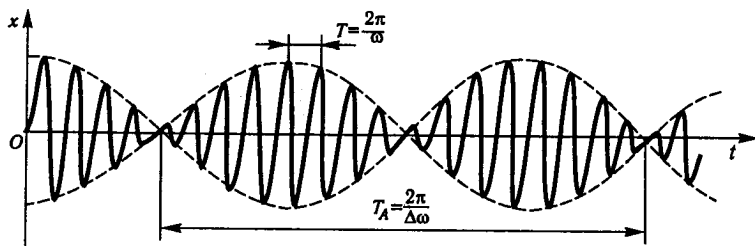


Рис. 108

### § 69. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Ми розглянули приклади накладання коливань однакового напрямку. Для повноти теми розглянемо ще додавання взаємно перпендикулярних коливань, наприклад коливань підвішеного у вагоні маятника.

Припустимо, що гармонічні коливання з однаковою частотою відбуваються у напрямі координатних осей  $x$  та  $y$ . Якщо момент відліку вибрати так, щоб початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю, то рівняння коливання матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin \omega t; \\ y &= A_2 \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\alpha$  – різниця фаз цих коливань.

Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху, для чого виключимо із заданих рівнянь час. Спочатку з першого рівняння визначимо

$$\sin \omega t = \frac{x}{A_1}, \quad (2)$$

звідки

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}. \quad (3)$$

Розгорнувши у другому рівнянні (1) синус суми і підставивши замість  $\sin \omega t$  та  $\cos \omega t$  їхні значення (2) і (3), дістанемо

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \alpha,$$

а якщо звільнитися від ірраціональності, то матимемо рівняння кривої другого порядку, віднесене до центра координат:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (4)$$

З дискримінанта рівняння

$$\frac{\cos^2 \alpha}{A_1^2 A_2^2} - \frac{1}{A_1^2 A_2^2} < 0$$

знаходимо, що воно є рівнянням еліпса, осі якого довільно зорієнтовані відносно координатних осей  $x$  та  $y$ .

Характеристики еліпса істотно залежать від різниці фаз  $\alpha$ . Дослідимо окремі випадки цієї залежності.

1. Коли різниця фаз  $\alpha = 0$ , то рівняння (4) перетворюється на рівняння прямої

$$y = \frac{A_2}{A_1} x, \quad (5)$$

тобто результуючий рух точки відбувається по прямій, що проходить через початок координат (рис. 109). Зміщення  $r$  точки по цій прямій від початку координат буде

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin \omega t. \quad (6)$$

Отже, точка перебуватиме в гармонічному коливанні з частотою  $\omega$  й амплітудою  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ .

2. Коли різниця фаз  $\alpha = \pm \pi$ , то результуючим рухом буде гармонічне коливання точки по прямій

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (7)$$

Такі результуючі рухи можна спостерігати, якщо під час коливання маятника нанести по ньому удар у перпендикулярному напрямі в момент, коли маятник проходить положення рівноваги.

3. Коли  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ , то рівняння (4) матиме такий вигляд:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1, \quad (8)$$

тобто результуючий рух точки відбуватиметься по еліпсу, зведеному до

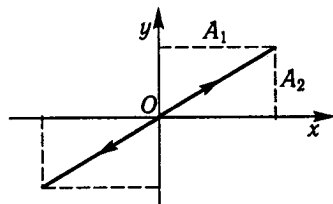


Рис. 109

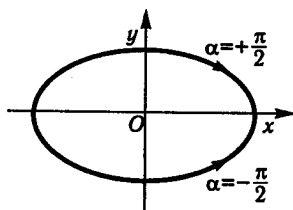


Рис. 110

координатних осей, у напрямі за рухом годинникової стрілки або у протилежному напрямі (рис. 110). Якщо  $A_1 = A_2$ , то еліпс вироджується у коло.

Такі результуючі рухи можна спостерігати, якщо під час коливання маятника нанести по ньому удар у перпендикулярному напрямі в момент, коли маятник перебуває в амплітудному положенні.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань різні, то залежно від їх співвідношення результуючі рухи відбуватимуться по складних траєкторіях у вигляді фігур (рис. 111), які вперше були вивчені французьким ученим Ж. Ліссажу (1822–1880) і названі його ім'ям.

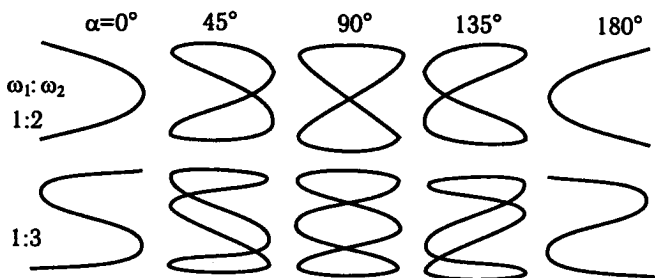


Рис. 111

Зауважимо, що кількість перетинів фігур Ліссажу з координатними осями дорівнює відношенню частот складових коливань. Це дає змогу за виглядом фігури визначити невідому частоту.

## § 70. Гармонічний аналіз

На прикладах додавання гармонічних коливань різних частот і напрямів було показано, що результуючий рух точки є складним коливальним процесом. Природно виникає думка, що кожний складний коливальний процес можна задати як суму простих гармонічних коливань. Дійсно, це так.

У математиці доводять, що будь-яку періодичну функцію

$$x = f(\omega t)$$

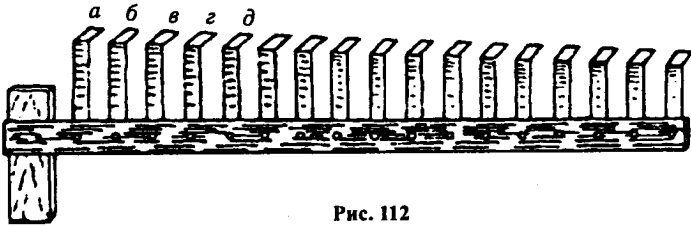


Рис. 112

з періодом  $2\pi$  можна подати як суму гармонічних функцій кратних частот:

$$x = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots,$$

яку називають *рядом Фур'є*.

Практично гармонічний аналіз складного коливального процесу можна провести за допомогою набору резонаторів з різною власною частотою. Таким є, наприклад, язичковий частотомір (рис. 112). Це набір пружних язичків (*а, б, в, ...*) різної довжини, прикріплених до пластини. Пластина зв'язується із досліджуваною коливальною системою. Коли частоти збігаються, окремі язички реагують на прості коливання, що входять до складного коливального процесу.

В акустиці для аналізу звуків використовують набір резонаторів Гельмгольца – порожнистих куль різних розмірів з двома отворами: один – для входу звуку, інший – для сполучення із каналом вуха (рис. 113).

Власну частоту коливань  $\nu_0$  резонаторів Гельмгольца визначають так:

$$\nu_0 = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{lV}},$$

де  $v$  – швидкість звуку;  $S$  – площа вхідного отвору;  $l$  – довжина вхідної шийки;  $V$  – об'єм порожнини резонатора.

Добираючи ті резонатори, які реагують на звук, можна дізнатися, з яких простих звуків утворюється складний.

## § 71. Утворення хвиль.

### Поперечні та поздовжні хвилі. Принцип Гюйгенса

Якщо в будь-якому пружному середовищі зовнішні сили збуджують коливання частинок в одному місці, то внаслідок взаємодій між частинками коливання передаватимуться до частинок в інших

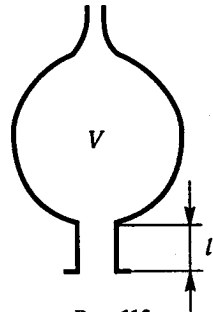


Рис. 113

місцях. Передавання коливань у середовищі називається *хвильовим процесом*.

Хвилі можна утворити на поверхні води або на довгій мотузці. Поширення хвиль не супроводиться перенесенням частинок середовища, вони коливаються тільки біля свого положення рівноваги. З хвилею переноситься енергія коливального руху.

Напрямок поширення хвилі називають *променем*. Залежно від напрямку коливання точок відносно променя хвилі поділяють на поперечні та поздовжні. *Поперечними* називають хвилі, в яких частинки коливаються у напрямі, перпендикулярному до променя хвилі; *поздовжніми* – хвилі, в яких частинки коливаються у напрямі променя хвилі.

Розглянемо процес утворення поперечних і поздовжніх хвиль. Для цього виділимо окремі частинки в напрямі променя та простежимо за їх положенням через кожну чверть періоду, рахуючи від початку коливання першої частинки (рис. 114). Нехай у момент часу  $t = 0$  всі точки середовища перебувають у положенні рівноваги, але точка 1 під дією зовнішньої сили набуває прискорення  $a$  вгору. За чверть періоду вона досягне амплітудного положення; від неї будуть приведені в рух точки 2, 3, а точка 4 тільки дістане прискорення вгору. За другу чверть періоду точка 1 під дією пружної сили повернеться до положення рівноваги і набуде певної швидкості вниз, точка 4 досягне амплітудного положення вгорі; від неї будуть приведені в рух точки 5, 6, а точка 7 тільки дістане прискорення вгору. За третю чверть періоду точка 1 завдяки кінетичній енергії зміститься у нижнє амплітудне положення, точка 4 повернеться до положення рівноваги, точка 7 досягне амплітудного положення вгорі; від неї будуть приведені в рух точки 8, 9, а точка 10 тільки дістане прискорення вгору. За останню чверть періоду точка 1 повернеться до положення рівноваги й набуде швидкості вгору, точка 4 зміститься у нижнє амплітудне положення, точка 7 повернеться до положення рівноваги і набуде швидкості вниз, точка 10 досягне амплітудного положення вгорі; від неї будуть приведені в рух точки 11, 12, а точка 13 тільки дістане прискорення. Так і далі продовжуватиметься процес передавання коливань у середовищі.

Як впливає з рис. 114, у поперечній хвилі тіло зазнає деформацій зсуву, а розміщення точок набирає вигляду синусоїди. Такий вигляд, наприклад, має струна в коливаннях. Очевидно, поперечні хвилі можуть виникати лише в твердих тілах, бо тільки в них виникають сили пружності в деформаціях зсуву.

На рис. 115 відображено поширення поздовжньої хвилі, в якій коливання передається аналогічно поперечній хвилі, різниця тільки в тому, що точки зміщуються у напрямі поширення хвилі.

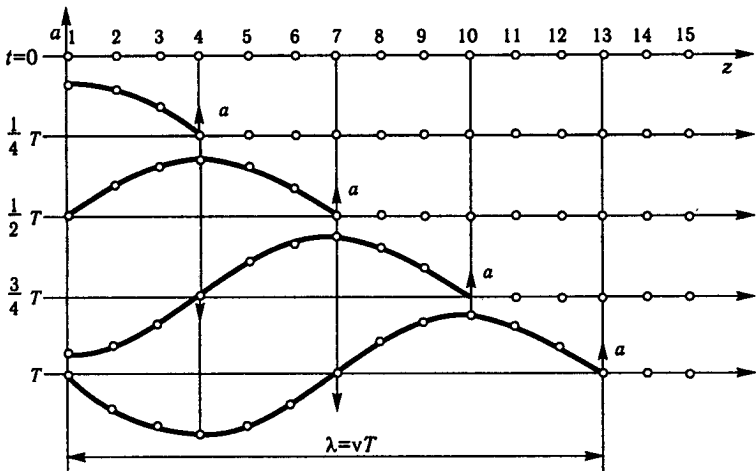


Рис. 114

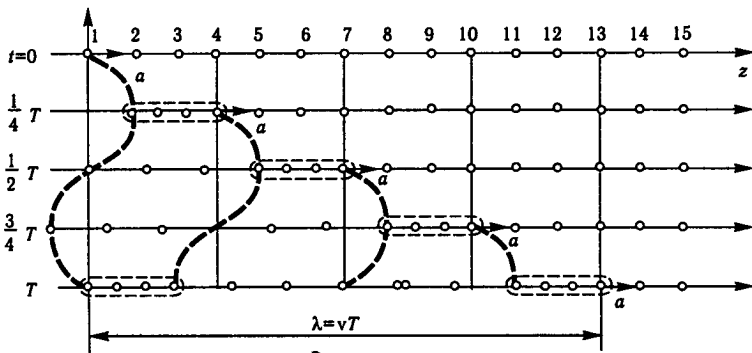


Рис. 115

Поширення поздовжньої хвилі в тілі супроводиться утворенням згущень (обведені на рис. 115 штриховою лінією) і розріджень частинок, тобто деформацій стиску й розтягу. При таких деформаціях в усіх тілах виявляються сили пружності, тому поздовжні хвилі можуть виникати в твердих тілах, рідинах та газах.

Із рис. 114 і 115 випливає, що різні точки у хвилях мають різну фазу коливання. Щодо точки 13, рух якої починається пізніше на  $\Delta t = T$  від руху точки 1, вважатимемо, що вона перебуває в однаковій фазі з точкою 1, виходячи з того, що за означенням періодичної функції  $f(t) = f(t + T)$ . Відстань між найближчими точками в напрямі поширення хвилі, які коливаються в однакових фазах, на-



зивається *довжиною хвилі*  $\lambda$ . Очевидно, довжина хвилі дорівнює відстані, на яку поширюється хвиля за період:

$$\lambda = vT.$$

У цій формулі  $v$  називають *фазовою швидкістю*.

Знайдемо швидкість поширення поздовжньої хвилі. Для цього уявімо пружний стрижень, до поперечного перерізу  $S$  якого прикладено силу  $F$ . У результаті за час  $\Delta t$  хвильовий імпульс пошириться по стрижню на відстань  $\Delta x = c \Delta t$ , а стрижень зазнає зміни довжини  $\Delta l$ . Наведемо для указаних змін кількісні залежності.

За законом Гука дістанемо

$$\frac{\Delta l}{c \Delta t} = \frac{1}{E} \frac{F}{S},$$

де  $c$  – швидкість хвилі;  $E$  – модуль Юнга.

Звідси

$$F = ES \frac{\Delta l}{c \Delta t}. \quad (1)$$

Виразимо діючу силу за зміною імпульсу частинок стрижня (за умови  $v_0 = 0$ ;  $v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ ):

$$F = \frac{\rho S \Delta x \Delta l / \Delta t}{\Delta t} = \frac{\rho S c \Delta l}{\Delta t}. \quad (2)$$

Прирівнявши праві частини рівностей (1) і (2), дістанемо

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (3)$$

де  $\rho$  – густина речовини.

Швидкість поширення поперечної хвилі визначається через модуль зсуву та густину за формулою

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (4)$$

Із формул (3) та (4) випливає, що в твердому тілі швидкість поширення поздовжніх хвиль більша, ніж поперечних. Наприклад, швидкість поздовжньої хвилі у сталі дорівнює 6100 м/с, а поперечної – 3300 м/с.

Ми розглянули утворення хвилі тільки в одному напрямі. У суцільному середовищі коливання так само поширюються в усіх напрямках від центра коливань. Геометричне місце точок, до яких дійшли коливання у деякий момент часу  $t$ , називається *фронтом хвилі*.

За формою фронту розрізняють хвилі *сферичні, плоскі* та ін. Геометричне місце точок, що коливаються в однако- вій фазі, називається *хвильовою поверх- нею*. Її можна провести через будь-яку точку простору, збудженого хвилею. Очевидно, фронт хвилі є також окремим випадком хвильової поверхні.

Визначення фронту хвилі, особливо в явищах відбиття і заломлення хвиль, полегшується, якщо користуватися принципом Гюйгенса, згідно з яким *усі точки фронту хвилі у певний момент часу можна розглядати як самостійні джерела хвиль*. Тому через час  $\Delta t$  від таких точок утворюються певні елементарні (вторинні хвилі). Новий фронт хвилі через час  $\Delta t$  знаходять як результуючий, будуючи обвідну поверхню вторинних хвиль (рис. 116). Так суто геометричним способом можна визначити фронт хвилі в наступний момент часу, якщо відомо фронт хвилі в заданий момент.

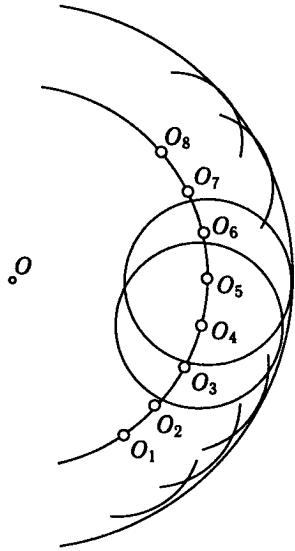


Рис. 116

## § 72. Рівняння хвилі

*Рівнянням хвилі* називають вираз, що визначає зміщення будь-якої точки, збудженої хвилею, як функцію часу і відстані від початкової точки (джерела).

Знайдемо спочатку рівняння плоскої хвилі за умови, що всі її точки здійснюють гармонічні коливання з однаковою амплітудою, тобто вважатимемо, що енергія хвилі не поглинається середовищем.

Припустимо, що хвиля поширюється у напрямі осі  $Oz$  (рис. 117), тобто хвильові поверхні перпендикулярні до осі  $Oz$ . Оскільки всі точки хвильової поверхні коливаються однаково, зміщення  $\xi$  залежить лише від  $z$  та  $t$  (зміщення взагалі не є координатою точки простору, тому позначаємо його літерою  $\xi$ ).

Нехай зміщення точок, що лежать у початковій площині ( $z = 0$ ), визначається рівнянням

$$\xi = A \sin \omega t. \quad (1)$$

Щоб визначити зміщення точок у площині, розміщений на відстані  $z$  від початкової, треба врахувати, що точки в ній були приведені в

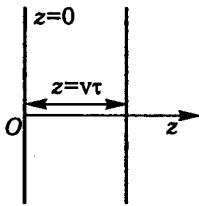


Рис. 117

коливання пізніше на час  $\tau$ , протягом якого хвиля поширювалась на відстань  $z$  зі швидкістю  $v$ :

$$\tau = \frac{z}{v}.$$

Отже, зміщення точок у такій площині

$$\xi = A \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right). \quad (2)$$

Вираз (2) є рівнянням плоскої хвилі. Це рівняння записують ще в такому вигляді:

$$\xi = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right), \quad (3)$$

де  $T$  – період коливання точок;  $\lambda$  – довжина хвилі.

Знайдемо тепер рівняння сферичної хвилі. Як і раніше, будемо шукати рівняння хвилі, виходячи з того що коливання точок має гармонічний характер й енергія хвилі середовищем не поглинається.

Сферичні хвилі утворюються у суцільному однорідному середовищі від точкових джерел. Точковим можна вважати будь-яке реальне джерело на відстані, значній порівняно з його розмірами.

Нехай зміщення точкового джерела визначається рівнянням

$$\xi = A \sin \omega t. \quad (4)$$

Знайдемо фазу та амплітуду для точок сферичної хвилі на відстані  $r$  від джерела. Порівняно з джерелом ці точки були приведені в коливання пізніше на час  $\tau$ , протягом якого хвиля поширювалась до них на відстань  $r$ , тобто

$$\tau = \frac{r}{v},$$

де  $v$  – швидкість поширення хвилі. Тому фаза коливання цих точок становить

$$\omega \left( t - \frac{r}{v} \right). \quad (5)$$

Неважко зрозуміти, що амплітуда точок під час поширення сферичної хвилі не залишається сталою навіть тоді, коли енергія хвилі не поглинається середовищем. Енергія сферичної хвилі залишається такою самою, але на дальшій сферичній поверхні кількість точок збільшується; тому енергія й амплітуда кожної з них зменшуються. Очевидно, енергія у сферичній хвилі, розрахована на одиницю площі поверхні, а також на одну частинку, обернено пропорційна квадрату радіуса хвилі. Знаючи, що енергія частинки пропорційна квадрату амплітуди зміщення, констатуємо, що амплітуда

літуда точок зменшується обернено пропорційно радіусу сферичної хвилі.

Знаючи вираз фази (5) та зміну амплітуди, можна записати рівняння сферичної хвилі

$$\xi = \frac{A}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{v} \right). \quad (6)$$

Зауважимо, що рівняння (6) справджується для джерел сферичної форми на будь-яких відстанях, а для джерел довільної форми – коли  $r$  значно перевищує розміри джерела хвиль.

Диференціюванням рівняння плоскості хвилі (2) по змінних  $t$  і  $z$  можна дістати відображення хвилі в диференціальній формі (це знадобиться при вивченні електромагнітних хвиль):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -A \omega^2 \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right); \\ \frac{d^2 \xi}{dz^2} &= -A \frac{\omega^2}{v^2} \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right), \end{aligned}$$

звідки

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 \xi}{dz^2}, \quad (7)$$

де друга похідна зміщення по часу пропорційна другій похідній зміщення по координаті, а коефіцієнтом пропорційності є квадрат швидкості хвилі. Залежність (7) називають *хвильовим рівнянням*.

### § 73. Енергія пружної хвилі. Потік енергії. Вектор Умова

Виділимо в середовищі, де поширюється плоска поздовжня хвиля, такий елементарний об'єм  $\Delta V$  (лінійні розміри якого значно менші від довжини хвилі), щоб швидкість руху і деформації в усіх точках цього об'єму можна було вважати незмінними, які відповідно дорівнюють  $\frac{d\xi}{dt}$  та  $\frac{d\xi}{dz}$ .

Виділеному об'єму притаманна певна кінетична і потенціальна енергія. Кінетична енергія

$$\Delta E_k = \frac{m}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 \Delta V,$$

де  $\rho$  – густина середовища. Підставивши сюди значення  $\frac{d\xi}{dt}$ , матимемо

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \Delta V. \quad (1)$$

Потенціальна енергія пружної деформації виділеного об'єму середовища

$$\Delta U = \frac{E\varepsilon^2}{2} \Delta V,$$

де  $E$  – модуль Юнга;  $\varepsilon = \frac{d\xi}{dz}$  – відносна деформація у хвилі.

Підставивши в останню рівність квадрат похідної  $\frac{d\xi}{dz}$ , а замість модуля  $E = \rho v^2$ , дістанемо

$$\Delta U = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \Delta V. \quad (2)$$

Примітним є той наслідок із виразів (1), (2), що зміна потенціальної енергії в часі та просторі аналогічна зміні кінетичної енергії. Інакше кажучи, максимум потенціальної енергії припадає саме на ті області середовища, в яких максимальна кінетична енергія. Така логічна особливість біжучої хвилі.

Повна енергія виділеного об'єму середовища у певний момент часу

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta U = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \Delta V. \quad (3)$$

Поділивши цей вираз на  $\Delta V$ , знайдемо миттєву густину енергії в різних точках простору. Отже, для фіксованої точки хвилі густина змінюється у часі пропорційно квадрату косинуса.

Оскільки середнє значення квадрата косинуса дорівнює  $1/2$ , середнє в часі значення густини енергії в кожній точці хвилі

$$w_{\text{сеп}} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (4)$$

Отже, під час поширення хвилі середовище дістає додаткову енергію, яку приносить хвиля від джерела.

Кількість енергії, яку переносить хвиля через деяку поверхню  $S$  за час  $t$ , називають *потокем енергії*  $\Phi$  через цю поверхню.

Кількість енергії, що переноситься хвилею через поверхню в  $1 \text{ м}^2$ , орієнтовану перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, за  $1 \text{ с}$ , називають *густиною потоку енергії*; її позначають літерою  $j$ . За фізичним змістом потік – векторна величина:

або

$$\vec{j} = w_{\text{сеп}} \vec{v},$$

$$\vec{j} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}, \quad (5)$$

де  $\vec{v}$  – вектор фазової швидкості, що збігається із напрямом поширення хвилі.

Вектор густини потоку енергії називають *вектором Умова*.

## § 74. Інтерференція хвиль

У середовищі одночасно можуть поширюватися кілька хвиль. Оскільки поширення хвилі практично не впливає на властивості середовища (йдеться про хвилі, що мають не дуже велику амплітуду), одночасне поширення іншої хвилі відбувається так само, як і тоді, коли першої хвилі немає. Це можна спостерігати на поверхні води, якщо утворити хвилі, кинувши два камінці. Колові хвилі від них перекриватимуться й далі розходиться, але скрізь матимуть вигляд колових хвиль, центри яких – у місцях падіння камінців. Завдяки незалежності існування хвиль у середовищі розрізняють одночасно мову різних людей, звучання різних музичних інструментів у оркестрі тощо.

Незалежність поширення хвиль у середовищі називається *принципом суперпозиції*. З нього випливає, що для визначення результуючого зміщення частинки в області перекриття хвиль треба знайти зміщення її в кожній хвилі окремо, а потім шукати їх геометричну суму.

Явище додавання хвиль у середовищі називається *інтерференцією*. Важливе значення має випадок додавання хвиль від двох джерел з однаковими періодами і напрямками коливань, коли фази їх однакові або коли різниця їхніх фаз залишається незмінною. Такі джерела називають *когерентними*. Наприклад, когерентними джерелами у ванні з водою будуть два стрижні, які коливаються на пластинчастій пружині й ударяють своїми кінцями по воді (рис. 118).

Розглянемо докладніше явище інтерференції. Припустимо, що хвилі поширюються від двох когерентних джерел  $S_1$  та  $S_2$  і перекриваються у точці  $O$  (рис. 119). Для спрощення вважатимемо, що

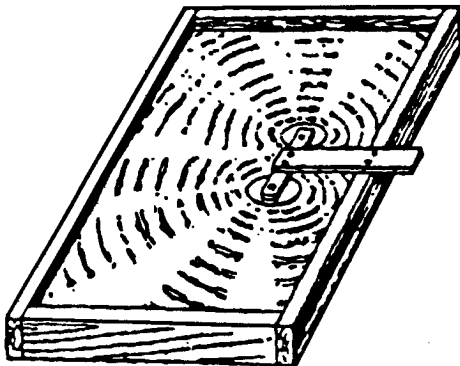


Рис. 118

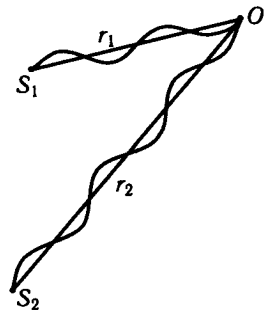


Рис. 119

їхні коливання відбуваються в однакових фазах. Щоб визначити результуючий рух точки  $O$ , знайдемо зміщення її в кожній хвилі окремо. Ці зміщення будуть

$$\begin{aligned}\xi_1 &= A_1 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right); \\ \xi_2 &= A_2 \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right),\end{aligned}\quad (1)$$

де  $r_1$  та  $r_2$  – відстані точки від джерел хвиль.

Результуюче зміщення дорівнюватиме алгебричній сумі зміщень  $\xi_1$  і  $\xi_2$ . Як відомо з § 68, у разі додавання двох гармонічних коливань результуюче коливання буде гармонічним із тими самими періодом та напрямом зміщення, але з іншими зсувом фази  $\alpha$  й амплітудою  $A$ , які визначаються такими виразами:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}; \quad (2)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (3)$$

За рівняннями (1)  $\alpha_1 = -2\pi \frac{r_1}{\lambda}$ ,  $\alpha_2 = -2\pi \frac{r_2}{\lambda}$ ,  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ , де  $r_2 - r_1$  – різниця ходів хвиль від джерел до точки, де хвилі накладаються.

Знайдемо окремі значення результуючої амплітуди коливання, збудженого хвилями, залежно від їх різниці ходів.

1. З виразу (3) випливає, що максимальна амплітуда результуючого коливання точки буде тоді, коли різниця фаз дорівнюватиме нулю або парному числу  $\pi$ :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi, \quad (4)$$

де  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Звідси

$$|r_2 - r_1| = k\lambda, \quad (5)$$

тобто максимальна амплітуда коливання буде в таких точках, для яких різниця ходів хвиль дорівнює нулю або цілому числу довжин хвиль.

2. Мінімальна амплітуда результуючого коливання буде тоді, коли різниця фаз дорівнюватиме непарному числу  $\pi$ :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = (2k + 1)\pi. \quad (6)$$

Звідси

$$|r_2 - r_1| = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (7)$$

тобто мінімальна амплітуда коливання буде в таких точках, для яких різниця ходів хвиль дорівнює непарному числу півхвиль.

3. Точки, для яких різниця ходів хвиль має проміжні значення між  $k\lambda$  і  $(2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ , коливаються із деякими середніми значеннями амплітуд.

Чергування інтерференційних максимумів та мінімумів добре спостерігається на поверхні води, що збуджується двома когерентними джерелами хвиль (див. рис. 118).

## § 75. Стоячі хвилі

Окремим випадком інтерференції хвиль є утворення *стоячих хвиль* у результаті додавання двох зустрічних плоских хвиль однакового періоду з однаковими амплітудами і напрямками зміщень точок. Такі хвилі виникають, наприклад, унаслідок додавання прямої та відбитої хвиль на струні, камертоні, повітряному стовпі в духових інструментах і т. д. Коли на тілі утворюються стоячі хвилі, все тіло поділяється нерухомими точками (вузлами) на стаціонарні частини, які коливаються ніби незалежно одна від одної. Стоячі хвилі добре спостерігаються на нитці, якщо один кінець її прикріпити до штатива, а інший – до вітки камертона з електромагнітним збуджувачем коливань (рис. 120).

Знайдемо рівняння стоячої хвилі. Припустимо, що пряма хвиля поширюється у напрямі осі  $Oz$ . Зміщення точок, збуджених прямою хвилею, визнається виразом

$$\xi_1 = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right), \quad (1)$$

а зміщення точок у зустрічній хвилі – виразом

$$\xi_2 = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right). \quad (2)$$

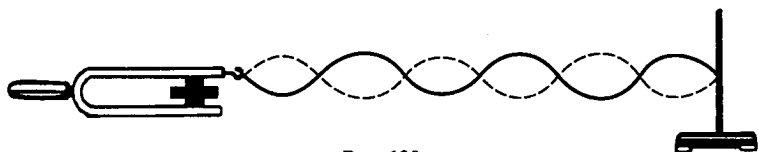


Рис. 120



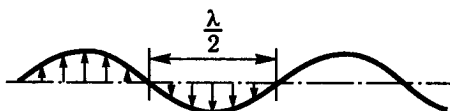


Рис. 121

Результуюче зміщення знайдемо як суму складових  $\xi_1$  і  $\xi_2$ , а саме:

$$\xi = 2A \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \omega t. \quad (3)$$

Рівняння (3) є рівнянням стоячої хвилі. Порівнюючи його з рівнянням біжучої хвилі, констатуємо, що множник

$$\rho = \left| 2A \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \right| \quad (4)$$

є виразом амплітуди коливання точок у стоячій хвилі. На відміну від біжучої хвилі амплітуда коливання у стоячій хвилі залежить від координати, тобто різні точки коливаються із різними амплітудами.

Множник  $\sin \omega t$  показує, що точки у стоячій хвилі коливаються із тією самою частотою, що й у зустрічних хвилях. Однак на відміну від останніх фаза точок у стоячій хвилі не залежить від їхніх координат. Це означає, що в одній півхвилі всі точки мають ту саму фазу  $\varphi$ , а в сусідній –  $\varphi + \pi$  (рис. 121).

Визначимо координати вузлів у стоячій хвилі, тобто координати точок, для яких амплітуда дорівнює нулю. Із виразу амплітуди (4) випливає, що вузли будуть у тих точках, для яких

$$\cos \frac{2\pi z}{\lambda} = 0.$$

У випадку

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = \pm (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

координати вузлів будуть

$$z = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (5)$$

де  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Відстань між двома сусідніми вузлами становить

$$z_{k+1} - z_k = \frac{\lambda}{2}.$$

Точки у стоячій хвилі, що коливаються із найбільшими амплітудами, називаються *пучностями*. Координати пучностей визначимо з умови максимуму амплітуди (4), а саме:

$$\left| \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \right| = 1,$$

або

$$\frac{2\pi z_k}{\lambda} = \pm k\pi.$$

Отже, координати пучностей у стоячій хвилі мають такі значення:

$$z_k = \pm k \frac{\lambda}{2}, \quad (6)$$

де  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Розглянемо поведінку точок у стоячій хвилі на межі відбиття біжучої хвилі. Легко переконатися, що на межі буде вузол, якщо хвиля відбивається від середовища, густішого порівняно з тим середовищем, в якому вона поширюється. Якщо хвиля відбивається від середовища з меншою густиною порівняно з тим, в якому вона поширюється, то на межі відбиття буде пучність. Наприклад, у стоячій хвилі на нитці в точці прикріплення її до штатива буде вузол.

Знаючи, що вузли у стоячій хвилі утворюються у тих точках, де додаються коливання у протилежних фазах, робимо висновок, що у процесі відбиття хвилі від густішого середовища її фаза змінюється на протилежну. Оскільки фаза змінюється на протилежну на відстані півдовжини хвилі, кажуть, що внаслідок відбиття від густішого середовища відбувається утрата півхвилі.

Коли хвиля відбивається від середовища з меншою густиною, її фаза не змінюється; тому півхвиля не втрачається.

З'ясуємо питання щодо розподілу і потоку енергії у стоячій хвилі. Для цього продиференціюємо рівняння стоячої хвилі (3) по  $z$  і  $t$  та знайдемо відповідно закономірності зміни деформацій середовища  $\epsilon$  і швидкості частинок  $v$  у стоячій хвилі:

$$\epsilon = \frac{d\xi}{dz} = -2A \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi z}{\lambda} \sin \omega t; \quad (7)$$

$$v = \frac{d\xi}{dt} = 2A\omega \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t. \quad (8)$$

Із рівнянь (7) та (8) випливає, що деформації середовища і швидкості частинок також утворюють стоячі хвилі. Вузли та пучності швидкості збігаються із вузлами і пучностями зміщень (хоча звичайно за фазою зміщення та швидкістю різняться на  $\frac{\pi}{2}$ ). Вузли деформацій припадають на пучності зміщень і, навпаки, пучності деформацій – на вузли зміщень.

Отже, коли точки у стоячій хвилі досягають амплітудного положення, їхні швидкість та кінетична енергія дорівнюють нулю, а потенціальна енергія максимальна. Ця потенціальна енергія хвилі зосереджена в основному в області її вузлів (там знаходяться пучності деформацій). Пояснимо це.

Розглядаючи маятник, ми констатували, що у положенні найбільшого відхилення від положення рівноваги його потенціальна енергія максимальна. Відбувалося взаємне перетворення енергії одиначної точки з кінетичної на потенціальну. Інша річ, коли йдеться про хвильовий рух, пов'язаний з множиною пружно зв'язаних точок. Тут потенціальна енергія певної кількості точок залежить не від їх зміщення у цілому (можна вирізати ділянку гумового шнура і як завгодно змістити її від початкового положення, але це не змінить її потенціальної енергії), а від взаємного їх розміщення, тобто від деформації тіла у певній області. У стоячій хвилі пучності деформацій припадають на вузли.

Коли точки у стоячій хвилі проходять положення рівноваги, їхня кінетична енергія стає максимальною; ця енергія хвилі зосереджена в основному в її пучностях (там і пучності швидкостей). Так двічі за період енергія стоячої хвилі перетворюється з потенціальної на кінетичну, перетікаючи з вузлів у сусідні пучності, й навпаки. Середній потік енергії в будь-якому перерізі стоячої хвилі дорівнює нулю.

## § 76. Основні характеристики звуку

Відчуття звуку виникає внаслідок впливу механічних коливань середовища, головним чином повітря, на слуховий апарат людини. Проте не всякі коливання, а тільки з частотами в інтервалі від 16 до 20 000 Гц обумовлюють слухові відчуття звуку. Тому пружні коливання із такими частотами і хвилі, що їм відповідають, називають *звуковими*. Пружні хвилі з частотою, нижчою від 16 Гц, називають *інфразвуком*, а з частотою понад 20 000 Гц – *ультразвуком*. Інфра- й ультразвук не зумовлюють слухових відчуттів у людини, але вони об'єднуються зі звуковими хвилями за спільністю фізичних властивостей.

Розділ фізики, в якому вивчаються способи збудження та властивості звукових хвиль, називається *акустикою*. В акустиці поєднується учення про звук як суто фізичне і психофізіологічне явище.

Як фізичне явище звук характеризується *частотою*, *швидкістю поширення* та *інтенсивністю*. Частково про ці характеристики вже йшлося у розділі про коливання і хвилі.

Звукові хвилі можуть поширюватися у будь-якому пружному середовищі. У рідинах і газах вони поширюються як поздовжні хвилі та спричиняють згущення і розрідження середовища. У твердих тілах звук поширюється поздовжніми і поперечними хвилями. Звук передається лише через пружне середовище. Якщо електричний дзвінок помістити під ковпак насоса й відкачувати звідти повітря, то звук слабшає і з часом зникає.

Швидкість поширення звуку в газах (повітрі) можна визначити, виходячи з формули (3) для обчислення швидкості поздовжньої пружної хвилі у твердому стрижні (див. § 71):

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де згідно із законом Гука

$$E = \frac{P_n}{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)}.$$

Для газового стовпа аналогічно

$$E = \frac{p_n}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)} = \frac{\Delta p}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)},$$

або

$$E = -\frac{dp}{\left(\frac{dV}{V}\right)}.$$

Зазначимо, що процес поширення звуку в газах є адіабатним процесом – таким, що відбувається без теплообміну і підпорядкований рівнянню Пуассона

$$pV^\gamma = \text{const},$$

де  $\gamma$  – стала, яка залежить від роду газу (для повітря  $\gamma = 1,4$ ).

Продиференціювавши рівняння Пуассона, дістанемо

$$dp = -\gamma p \frac{dV}{V},$$

а з урахуванням останнього виразу знайдемо

$$E = \gamma p.$$

Тому швидкість звуку в газах визначають за формулою

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad (1)$$

де  $\gamma p$  – адіабатний модуль об'ємного стиску;  $\rho$  – густина газу.

Якщо врахувати залежність густини газу від тиску, температури та хімічного складу, то дістанемо таку формулу для визначення швидкості звуку:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \quad (2)$$

де  $R$  – універсальна газова стала;  $\mu$  – маса моля газу.

Із формули (2) випливає, що швидкість звуку в газі прямо пропорційна кореню квадратному з абсолютної температури і не залежить від тиску. Наприклад, у повітрі при  $T = 273$  К швидкість звуку 331,5 м/с, а при  $T = 293$  К вона становить 344 м/с.

*Інтенсивністю звуку* називають кількість енергії, що переноситься хвилею за одиницю часу через одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі.

За фізичним змістом інтенсивність звуку відображає густину потоку енергії пружної хвилі (див. § 73) в діапазоні звукових час-

тот. До формули для визначення інтенсивності звуку можна дійти також з інших міркувань.

Якщо у формулу для визначення повної енергії коливального руху частинки (див. § 65)

$$E = \frac{1}{2} m_i \omega^2 A^2$$

ввести масу всіх частинок одиниці об'єму середовища, тобто густину  $\rho$ , то дістанемо об'ємну густину енергії середовища, збудженого хвилею,

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2.$$

Коли врахувати, що ця енергія поширюється зі швидкістю хвилі  $v$ , то потік густини енергії – інтенсивність звуку – становитиме

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v. \quad (3)$$

Інтенсивність звуку виражають у ватах на квадратний метр (Вт/м<sup>2</sup>).

Крім енергії, звукова хвиля переносить також певний імпульс руху, тому створює тиск на перепону. Існування звукового тиску вперше виявив російський фізик П. М. Лебедев (1866–1912). Схему радіометра – приладу для вимірювання тиску звукових хвиль – зображено на рис. 122. Його основою є чутливі крутильні терези. На важільці, який може обертатися навколо осі  $O$ , є легенький поршень  $\Pi$  й маленьке дзеркальце  $Дз$ . Щоб усунути дію сторонніх потоків повітря, терези закрито металевим кожухом, а отвір, крізь який звук потрапляє на поршень, закривають тонким цигарковим папером або негустою тканиною. Коли звукові хвилі потрапляють на поршень, важілець повертається, що й доводить наявність звукового тиску.

За теорією середній тиск на стінку, яка повністю відбиває звук,

$$p = (\gamma + 1) \frac{I}{v}, \quad (4)$$

де  $I$  – інтенсивність звуку;  $v$  – його швидкість ( $\gamma = 1,4$  для повітря).

Вимірявши тиск звуку за поворотом важільця радіометра, можна визначити інтенсивність звуку. Використання радіометра – один із найпростіших і точних методів визначення інтенсивності звуку в області середніх та високих ультразвукових частот.

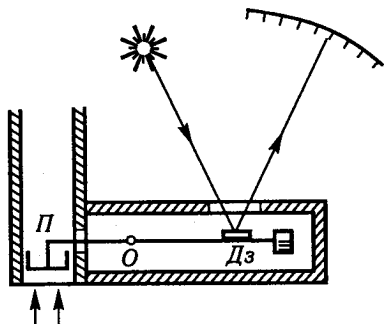


Рис. 122

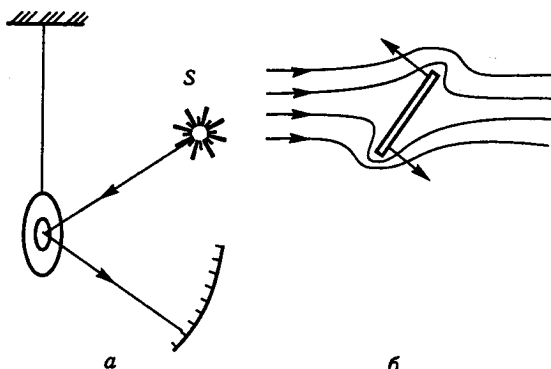


Рис. 123

Для вимірювання інтенсивності звуку широко застосовують також мікрофон і диск Релея. Мікрофон – прилад, який механічні коливання повітря перетворює на електричні коливання. Амплітуда останніх залежить від звукового тиску на мембрану мікрофона, а отже, від інтенсивності звуку. Це дає можливість електровимірювальний прилад у колі мікрофона проградувати на інтенсивність звуку.

Диск Релея – це тонкий слюдяний кружок діаметром близько 1 см, підвішений на тонкій кварцовій нитці (рис. 123, а). Його орієнтують під кутом  $45^\circ$  до напрямку поширення звуку, а під дією звукових хвиль диск намагається зорієнтуватися нормально до напрямку поширення хвиль. Це пояснюється різною акустичною швидкістю повітря, що обтікає диск. Як впливає з рис. 123, б, частинки повітря, обтікаючи нижній край диска, різко гальмуються, їхня швидкість зменшується. Швидкість частинок повітря спадає з тильного боку верхнього краю диска. У цих частинах диска відповідно до рівняння Бернуллі статичний тиск повітря збільшується; виникає обертальний момент сил тиску. Кут повороту диска відлічують за світловим променем. За кутом повороту диска можна визначити максимальну швидкість коливання частинок повітря у звуковій хвилі, а отже, обчислити інтенсивність звуку.

## § 77. Сприймання звуків

Звуки сприймаються людиною лише тоді, коли їхня інтенсивність достатня для чутності, тобто лежить у межах від  $10^{-12}$  до  $10 \text{ Вт/м}^2$ . Мінімальні значення інтенсивності, за яких стають чутними звуки, називають *нижнім порогом чутності*. Зі збільшенням інтенсивності звуку відчуття підсилюються, але до певної межі,

яку називають *больовим порогом відчуття*. Якщо інтенсивність звуку перевищує цей поріг, то вуха починають боліти і не сприймають звук. Значення обох порогів різні для різних частот.

Якщо на осі абсцис відкладати частоту, а на осі ординат – інтенсивність звуку, то за дослідними даними можна побудувати графіки порогу чутності та больового порогу (рис. 124), між якими буде область чутності звуків. Вуху людини найчутливіше в області частот 1000...3000 Гц, тому для цих частот найнижчий поріг чутності.

За слуховими відчуттями звук характеризують гучністю, висотою і тембром.

*Гучність* є складною функцією інтенсивності й частоти. Залежить головним чином від інтенсивності звуку. Проте за законом Вебера – Фехнера гучність зростає повільніше, ніж інтенсивність звуку. Якщо інтенсивність збільшується за геометричною прогресією, то гучність зростає приблизно за арифметичною прогресією. Тому для визначення рівня гучності звуку беруть логарифм відношення інтенсивності звуку  $I$  до інтенсивності нульового рівня  $I_0$ :

$$L = \lg \frac{I}{I_0}.$$

За нульовий рівень узято інтенсивність звуку  $I_0 = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup>, тобто поріг чутності для звуку частотою 1000 Гц.

Одиниця рівня гучності звуку – 1 бел. Частіше використовують 0,1 частину бела – децибел (дБ). Точніше, це – одиниці рівня інтенсивності (сили) звуку, оскільки лише наближено рівень інтенсивності визначає рівень гучності звуку. Наведемо такі приклади рівнів гучності: гучність мови людини – 50 дБ, оркестру – 80 дБ, шуму двигуна літака на близькій відстані – 120 дБ.

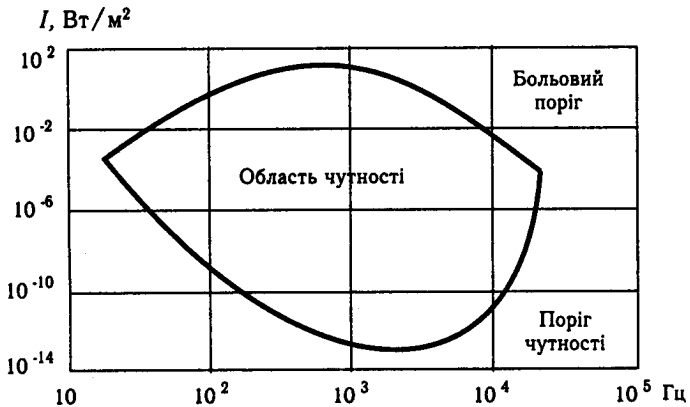


Рис. 124



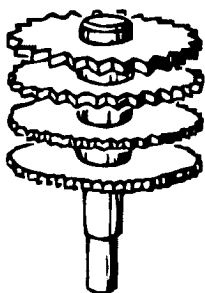


Рис. 125

*Висота звуку залежить лише від його частоти. Це можна продемонструвати, використавши зубчасті колеса Савара (рис. 125). Якщо їх привести в обертання і до зубців торкатись картоною пластинкою, то колесо з більшою кількістю зубців збуджує вищий звук. Збільшення частоти звуку у певну кількість разів обумовлює відчуття збільшення висоти звуку в стільки ж разів.*

Відношення частот звуків, що використовуються у музиці, називається *інтервалом*. Подвоєння частоти дає інтервал, який називають *октавою*; інтервал із відношенням частот 1:3 називають *квінтою*, 3:4 – *квартою* і т. д.

Голос людини може змінюватися за висотою в межах двох октав. За висотою звуку розрізняють такі типи голосів: бас – 80...320, баритон – 90...387, тенор – 122...488, контральто – 145...580, сопрано – 259...1034 Гц.

На слух людина вловлює різницю у частоті двох звуків до 0,1 Гц.

*Тембр* – певний відтінок, яким відрізняються звуки однакових висоти і сили від різних джерел. Із погляду фізики тембр визначається набором частот простих коливань, що входять до складу звуку. Наприклад, на струні під час звучання утворюється одночасно кілька стоячих хвиль: хвиля, довжина якої дорівнює довжині струни; хвиля, вдвоє коротша; хвиля, втриє коротша, і т. д. Перша хвиля, що має найменшу частоту коливань, визначає основний тон, інші хвилі визначають обертони. Саме останні (частоти та амплітуди обертонів) впливають на тембр звуку.

Наявність у людини парного слухового органа зумовлює *бінауральний ефект*, тобто можливість визначати положення джерела звуку. Коли приймач звукових сигналів розміщений симетрично відносно напрямку на джерело, звукова хвиля приходиться до нього в однаковій фазі, а при несиметричному розміщенні – з деякою різницею фаз. Саме завдяки високій чутливості до цієї різниці фаз людина здатна визначати напрям на джерело звуку з точністю до 2,5...3°. Бінауральний ефект можна підсилити, якщо до вух приставити довгі рупори. Цей принцип застосовують у звуковловлювачах.

## § 78. Явище Доплера

Коли йдеться про сприймання звукових хвиль, треба враховувати взаємний стан джерела і приймача хвиль. Якщо джерело та приймач хвиль нерухомі відносно середовища, яке передає коливання,

то частота сприйнятих коливань точно дорівнюватиме частоті коливань джерела. Якщо джерело або приймач переміщуються відносно середовища, то частота сприйнятих коливань відрізняється від частоти коливань джерела. Якщо, наприклад, на пероні вокзалу прислухатися до гудка потяга, що рухається, то з його наближенням відчувається підвищення звуку гудка, а з віддаленням – помітне зниження. Зміну частоти хвиль під час відносного руху джерела або приймача звуку називають *явищем Доплера* на честь австрійського фізика К. Доплера (1803–1853), який теоретично обґрунтував це явище в 1842 р.

Розглянемо докладніше різні взаємні стани джерела і приймача хвиль.

1. Джерело коливань  $S$  та приймач  $O$  нерухомі (відносно середовища, через яке передаються коливання) і розміщені на відстані  $l$  (рис. 126), частота коливань джерела дорівнює  $\nu_0$ . Приймач  $O$  перше з  $\nu_0$  коливань одержить через час  $t_1 = \frac{l}{v}$ , де  $v$  – швидкість хвиль у середовищі, а останнє – через час  $t_2 = \left(1 + \frac{l}{v}\right)$ . Усі  $\nu_0$  коливань приймач дістане за час  $t_2 - t_1 = 1$  с. Отже, частота сприйнятих коливань точно дорівнює частоті коливань  $\nu_0$  джерела. Спостерігач у точці  $O$  чутиме звук певної висоти (частоти  $\nu_0$ ).

2. Джерело коливань  $S$  віддаляється від приймача  $O$  зі швидкістю  $u$ . Тоді перше з  $\nu_0$  коливань приймач  $O$  одержить через час  $t_1 = \frac{l}{v}$ , а останнє – через час  $t_2 = \left(1 + \frac{l+u}{v}\right)$  з відстані  $(l+u)$ . Усі  $\nu_0$  коливань дійдуть до приймача за час  $t_2 - t_1 = \left(1 + \frac{u}{v}\right)$ . Частота сприйнятих коливань буде

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + \frac{u}{v}}. \quad (1)$$

Отже, частота сприйнятих коливань  $\nu_1$  менша від частоти  $\nu_0$  джерела. Звук від джерела сприйматиметься нижчим.

3. Якщо джерело коливань наближається до приймача  $O$ , то частоту сприйнятих коливань  $\nu_2$  можна знайти за формулою (1), узявши швидкість руху джерела  $u$  зі знаком «мінус», а саме:

$$\nu_2 = \frac{\nu_0}{1 - \frac{u}{v}}. \quad (2)$$

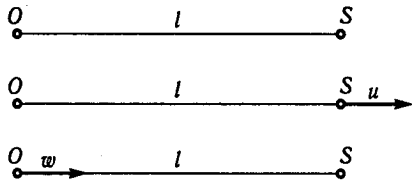


Рис. 126

Спостерігач сприйматиме коливання з частотою  $\nu_2$ , більшою від частоти  $\nu_0$  джерела, звук від джерела сприйматиметься вищим.

4. Джерело  $S$  нерухоме, а приймач  $O$  наближається до нього зі швидкістю  $w$ . За 1 с приймач переміститься на відстань  $w$ , тому повз нього за 1 с пройде кількість хвиль

$$\nu_3 = \nu_0 + \frac{w}{\lambda} = \nu_0 + \frac{w\nu_0}{v},$$

або

$$\nu_3 = \nu_0 \left(1 + \frac{w}{v}\right). \quad (3)$$

Звук від джерела сприйматиметься підвищеним.

5. Якщо приймач  $O$  віддаляється від джерела звуку  $S$ , то частоту сприйнятих коливань  $\nu_4$  можна знайти за формулою (3), взявши швидкість руху  $w$  приймача зі знаком «мінус», а саме:

$$\nu_4 = \nu_0 \left(1 - \frac{w}{v}\right). \quad (4)$$

У цьому разі звук від джерела сприйматиметься зниженим.

## § 79. Джерела і приймачі звуку

Джерелом звуку є коливне тіло. Коли звучить камертон, то легка бусинка, піднесена до нього, починає відскакувати, виявляючи коливання гілок камертона (рис. 127). Коливання струни, що звучить, можна виявити, посадивши на неї паперового «коника» (рис. 128). Коли звучить труба, то в ній коливаються частинки повітря, що легко виявити, піднісши до труби запалену свічку (рис. 129). Коливні тіла, які є джерелом звукових хвиль, називають *вібраторами*.

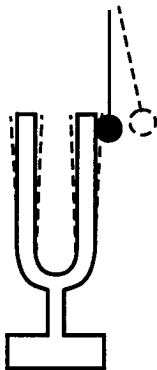


Рис. 127

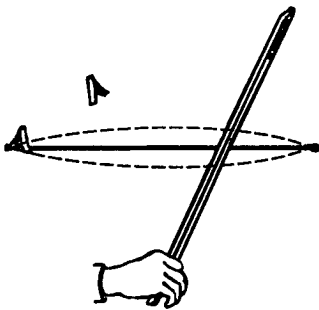


Рис. 128

Усі музичні інструменти в основному складаються із двох частин: вібратора і резонатора. Вібраторами є струни, пластинки, мембрани, стовпи повітря; резонаторами – ящики різноманітної форми, деки, труби тощо. Вібратори, маючи малі розміри, не можуть збуджувати у повітрі потужних звукових хвиль. Завдяки резонаторам звук випромінюється з більшої поверхні. У голосовому апараті людини вібраторами є голосові зв'язки (два м'язових валки в гортані), а резонаторами – порожнини рота та носоглотки.

На практиці широко застосовуються струна і пластинка. Як уже зазначалось, під час звучання струни на ній утворюється одночасно кілька стоячих хвиль: основний тон  $1$  й обертони  $2, 3$  (рис. 130).

Частота  $\nu_0$  основного тону залежить від довжини  $l$  струни, маси  $\gamma$  у одиниці її довжини і сили натягу  $F$  струни, а саме:

$$\nu_0 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\gamma}}, \quad (1)$$

де  $\lambda = 2l$  – довжина стоячої хвилі на струні;  $v = \sqrt{\frac{F}{\gamma}}$  – швидкість поширення поперечних хвиль у струні.

Коливання пластинок докладно вивчив німецький фізик Е. Ф. Ф. Хладні (1756–1827). Він довів, що під час звучання пластинок коливаються окремі їхні ділянки, які розділяються не вузловими точками, як у струнах, а вузловими лініями. Розподіл вузлових ліній залежить від форми та розмірів пластинки, її кріплення і місця збудження, а також від речовини пластинки. Вузлові лінії можна побачити на пластинці, насипавши на неї піску або тирси. Пісок розкидається із тих місць пластинки, які коливаються, та збирається на вузлових лініях (рис. 131). Вузлові лінії утворюють на пластинці фігури, які назвали *фігурами Хладні*.

У сучасному житті особливе значення мають електричні приймачі та джерела звуку. В області звукових частот «штучним вухом» є мікрофон, який перетворює звукові механічні коливання

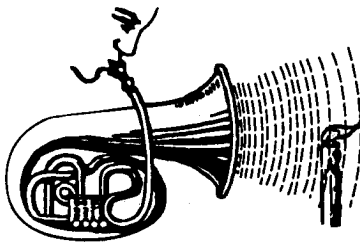


Рис. 129

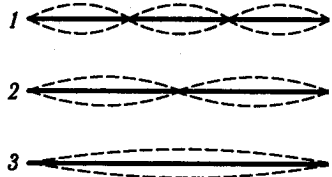


Рис. 130

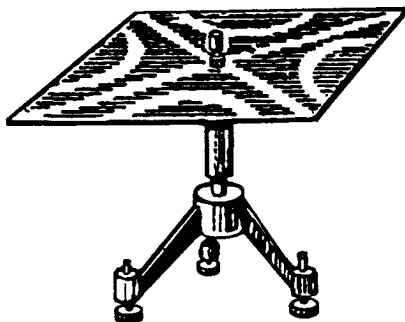


Рис. 131

повітря на електричні коливання. Останні передаються по проводах або по радіо. Широкого використання набули такі мікрофони: вугільний, електродинамічний і конденсаторний.

У капсулі *K* вугільного мікрофона (рис. 132) знаходиться вугільний порошок *П*. З одного боку до порошку щільно прилягає металева пластинка – мембрана *М*, а з іншого –

до нього дотикається крізь ізоляційну колодку *Н* електричний контакт *С*. Через капсулу *K* та контакт *С* мікрофон умикається в коло електричного струму. Провідність вугільного порошку залежить від того, на скільки він стискається мембраною. Тому змінний звуковий тиск на мембрану зумовлює такий самий змінний струм через вугільний порошок.

Вугільний мікрофон найпростіший, тому до 80-х років ХХ ст. він був найпоширенішим. Недоліками його є великий поріг чутності, різна чутливість до різних частот, а також те, що його опір швидко і нерегулярно змінюється, унаслідок чого виникають неконтрольовані шуми мікрофона. Вугільний мікрофон чутливий до найвищих частот порядку 10...12 кГц.

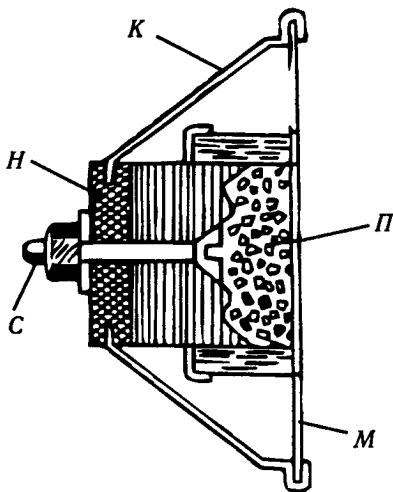


Рис. 132

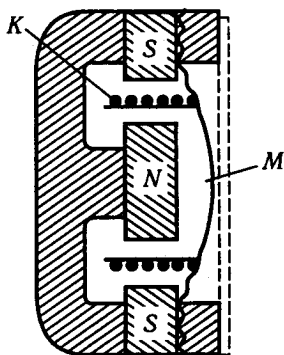


Рис. 133

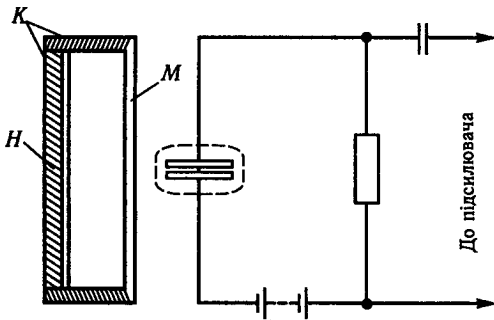


Рис. 134

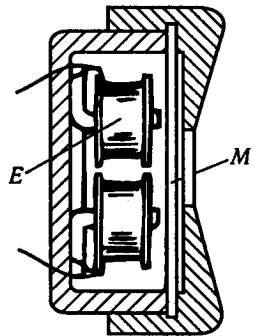


Рис. 135

На сьогодні широко використовуються електродинамічний та конденсаторний мікрофони.

В *електродинамічному* мікрофоні мембрану  $M$  (рис. 133) скріплено зі звуковою котушкою  $K$ , розміщеною в сильному магнітному полі. Під дією звуку мембрана і котушка коливаються, витки котушки перетинають магнітне поле й у них наводиться відповідна електрорушійна сила індукції, яка змінюється у такт зі змінами звукового тиску на мембрану.

Чутливість електродинамічного мікрофона менша, ніж вугільного, але якість відтворення звуку значно вища.

Добрі якості має *конденсаторний* мікрофон. За будовою це конденсатор, однією обкладкою якого є мембрана  $M$ , а іншою – нерухома металева стінка  $H$  в ізоляційному корпусі  $K$  (рис. 134). Обкладки конденсатора перебувають під електричною напругою батареї. Коли мембрана починає коливатися, ємність конденсатора змінюється; тому в колі виникає змінний струм. Точніше, із зближенням пластинок ємність збільшується, тому струм іде на зарядження конденсатора; з віддаленням пластинок ємність зменшується, тому виникає струм розрядження конденсатора протилежного напрямку. Ці струми зумовлюють на опорі  $R$  змінну напругу, що подається на підсилювач.

Найпоширенішими електричними джерелами звуку є телефон і динамік.

*Телефон* перетворює електричні коливання звукової частоти на механічні. У капсулі телефону вміщено електромагніт  $E$  (рис. 135), над полюсними наконечниками якого з невеликим зазором закріплено мембрану  $M$ . Коли в обмотці електромагніта струму немає, мембрана притягується намагніченим осердям і частково прогинається. Якщо на обмотку електромагніта подається змінний струм звукової частоти, то на тому півперіоді, на якому магнітне поле струму

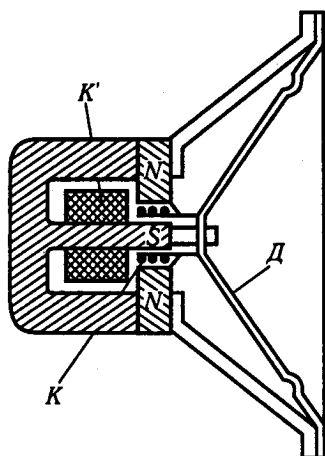


Рис. 136

суміщається із полем осердя, мембрана прогинається більше, а на наступному півперіоді, коли поле струму ослаблює магнітне поле осердя, мембрана випрямляється. Звукові коливання мембрани зумовлюють утворення звукових хвиль у повітрі.

Зазначимо, що магнітне поле струму в обмотках телефону не повинно перевищувати сталого поля осердя, інакше мембрана притягуватиметься до осердя при обох напрямках струму, тобто коливатиметься з частотою вдвічі більшою.

У динаміку використовується дія магнітного поля  $N$ ,  $S$  на змінний струм звукової частоти, що подається на легкорухому котушку  $K$  (рис. 136).

Унаслідок такої взаємодії котушка здійснює звукові коливання і випромінює звукові хвилі у повітря. Для збільшення площі випромінювання до звукової котушки жорстко кріпиться паперовий дифузор  $D$ .

Для утворення сильного магнітного поля у динаміку використовуються постійні магніти з висококоерцитивних матеріалів і котушка підмагнічування  $K'$ .

## § 80. Інфра- й ультразвуки, їхні властивості та застосування

Як уже зазначалось, пружні хвилі з частотами, меншими від 16 Гц, називають інфразвуком, а пружні хвилі з частотами понад 20 000 Гц – ультразвуком. Інфра- й ультразвуки органи слуху людини не сприймають.

Інфразвуки виникають при всяких коливаннях і раптових рухах масивних тіл. Наприклад, якщо раптово відчинити або зачинити двері, швидко пройти по кімнаті, то за коливанням полум'я свічки можна бачити виникнення інфразвуку. За коливаннями газового зонда академік В. В. Шулейкін (1895–1979) відкрив інфразвуки, що виникають над морем; він назвав їх «голосом моря». Вони утворюються унаслідок зіткнень вітру з горбами морських хвиль. Якщо припустити, що відстань між сусідніми горбами хвиль 1 м, а швидкість вітру 6 м/с, то виходить, що та сама маса повітря за 1 с шість разів натикається на горби хвиль, тобто зазнає стільки згущень та розріджень. Тоді виникають інфразвуки з частотою 6 Гц.

Інфразвуки поширюються зі швидкістю звуку і завдяки малим частотам зазнають лише незначного поглинання в атмосфері, тому набагато випереджають морські хвилі й можуть бути передвісником шторму. Очевидно, реагуючи на них, морські комахи з наближенням шторму переміщуються далі від води, а медузи та риби відходять далі в море.

Важливе практичне значення мають ультразвуки. Вони утворюються механічними й електромеханічними генераторами.

Механічним джерелом ультразвуку може бути свисток або сирена. Коливання в сирені виникають унаслідок періодичного переривання потужного струменя стиснутого повітря або пари, що проходить крізь отвори в системі двох дисків, з яких один нерухомий (статор), а інший приводиться в обертання (ротор). Частота звуку сирени  $\nu = Nn$ , де  $N$  – кількість отворів, рівномірно розміщених по колу на роторі й статорі;  $n$  – кількість обертів ротора за 1 с.

Сиреною можна утворювати ультразвуки значної інтенсивності, але порівняно низької частоти (у межах від  $20 \cdot 10^3$  до  $200 \cdot 10^3$  Гц).

Ультразвуки з частотами  $10^9 \dots 10^{14}$  Гц утворюються електромеханічними джерелами. Останні поділяються на два типи: електро- та магнітострикційні. В електрострикційному генераторі використовується властивість деяких кристалів – кварцу, турмаліну, сегнетової солі – змінювати свої розміри під дією електричного поля. Це явище називають *електрострикцією*. Напряв, в якому воно виявляється найбільше, називають *електричною віссю кристала*. Якщо перпендикулярно до цієї осі вирізати кристалічну пластинку і помістити її в змінне електричне поле, то пластинка приводитиметься у змушені коливання та стане випромінювачем ультразвуку. Вперше такі генератори ультразвуку створив французький фізик П. Ланжевен (1872–1946) і першим у 1916 р. використав ультразвук для підводної сигналізації та виявлення підводних човнів.

В *електрострикційному* ультразвуковому генераторі скомпоновано генератор високочастотних електричних коливань і кристалічну пластинку, що перебуває в змінному полі конденсатора. Обкладками конденсатора часто є тонкі шари металу, розпиленого на бічні поверхні пластинки, найчастіше кварцові. Вони міцні та температуростійкі. Випромінювання пластинки зростає з наближенням до умов резонансу.

Визначаючи власну частоту пластинки, виходять із того, що під час звучання на ній утворюються стоячі хвилі (рис. 137). Для основного тону

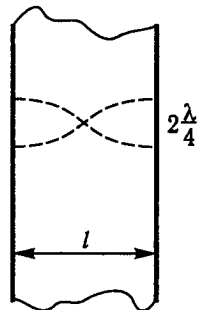


Рис. 137



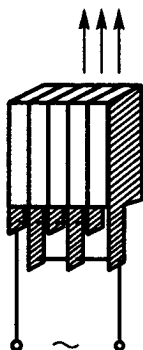


Рис. 138

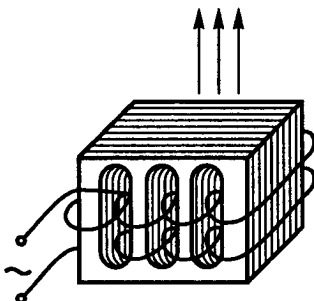


Рис. 139

$\lambda = 2l$ , тому власна частота буде

$$\nu_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l},$$

де  $l$  – товщина пластинки;  $v$  – швидкість звуку в ній. Наприклад, для її основного тону

$$\nu_0 = \frac{2700}{l} \text{ кГц.}$$

Коливаючись у режимі резонансу на обертонах, пластинка випромінює ультразвук із частотою, кратною основній частоті.

У *магніострикційному* ультразвуковому генераторі використовується властивість деяких тіл і сплавів (заліза, кобальту, нікелю та ін.) змінювати свої розміри під дією магнітного поля. Це явище називають *магніострикцією*. Якщо стрижень із названого матеріалу внести в котушку з високочастотним струмом, то під дією змінного магнітного поля струму стрижень приводитиметься у змушені коливання і стане випромінювачем ультразвуку.

Для збільшення потужності випромінювання в електро- та магніострикційному генераторах використовують стопи кристалічних пластинок, наприклад із сегнетової солі (рис. 138), або стопи листів з магніострикційного матеріалу, здебільшого з чистого нікелю (рис. 139).

Важливо, що явища електро- та магніострикції мають оборотний характер. Унаслідок стиску або розтягу згаданих кристалічних пластинок на їхніх поверхнях виникають різнойменні заряди, а отже, між бічними поверхнями пластинок створюється електрична напруга, значення якої залежить від зовнішньої дії. Це явище називають *п'єзоелектричним ефектом*. Унаслідок стиску або роз-

тягу магнітострикційних матеріалів виникають відповідні магнітні поля. Ці явища використано у приймачах ультразвуку.

Під дією змінного тиску звукової хвилі кристалічна пластинка стискається і розширюється, а це зумовлює відповідну зміну електричної напруги між її бічними поверхнями. Під дією змінного тиску звукової хвилі магнітострикційний стрижень деформується та зумовлює утворення відповідного змінного магнітного поля, яке наводить в обмотці змінний струм звукової частоти.

Ультразвуки застосовують у науці й у різних галузях техніки. Вони є основним засобом зв'язку, пеленгації та локації під водою. Пояснюється це тим, що поглинання ультразвуку у воді дуже незначне. Ультразвук використовується в ехолоті – приладі для вимірювання глибини моря. Для проведення гідролокації під корпусом корабля розміщують ультразвуковий генератор, який посилає короткі сигнали, а на певній відстані встановлюють приймач ультразвуку. Вимірюючи проміжок часу між посиленням і сприйманням сигналу, визначають відстань до перешкоди.

Ультразвукові промені застосовуються у дефектоскопії для виявлення внутрішніх дефектів у виробах із металу. Деталь занурюють у бак із маслом та «просвічують» ультразвуковим променем. Якщо в деталі немає дефекту, то ультразвук проходить добре, а коли є дефект, ультразвук дуже розсіюється і поглинається. Це фіксує приймач ультразвуку.

Під дією ультразвуку утворюються стійкі емульсії рідин; він використовується для поліпшення якості фарбування шкіри, тканин, хутра й очищення різних деталей від забруднення.

### § 81. Узагальнені координати. Принцип найменшої дії. Рівняння Лагранжа

Розглянувши різні рухи матеріальної точки (частинки) в декартовому просторі, робимо висновок, що для визначення механічного стану частинки в будь-який момент часу і передбачення її дальшого руху потрібно знати координати частинки та відповідні складові швидкості по координатних осях. Кількість величин (параметрів), які визначають стан частинки, може бути різною: для вільної частинки – це три координати і три складові швидкості по координатних осях; для невільної частинки, що переміщується по заданій поверхні, – дві координати та дві відповідні складові швидкості; для частинки, яка переміщується по заданій лінії, – одна координата і відповідна швидкість. Названі параметри залежно від особливостей задачі можуть бути виражені також в інших координатах – циліндричних або сферичних. Саме тому в механіці виявилось зручним описувати стан системи функціями цих величин.

У теоретичній фізиці для опису руху системи користуються поняттями узагальнених координат  $q_i$  й узагальнених швидкостей  $\dot{q}_i$ ; відповідно механічний стан системи характеризують функцією, введеною французьким ученим Ж. Л. Лагранжем (1736–1813):

$$L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (1)$$

де  $i = 1, 2, 3, \dots, s$  ( $s$  – число ступенів вільності системи).

Співвідношення, в яких пов'язуються прискорення із координатами і швидкостями, називаються *рівняннями руху*. Це диференціальні рівняння другого порядку, розв'язання яких приводить до визначення координат як функцій часу  $q_i(t)$ , а отже, і траєкторії руху.

Для відшукування диференціальних рівнянь руху Лагранжа виходять із того, що функція (1) має задовольняти найзагальніший закон механічного руху – *принцип найменшої дії Гамільтона*. За цим принципом, сформульованим у 1833 р. ірландським математиком У. Р. Гамільтоном (1805–1865), перехід динамічної системи між двома близькими станами, що характеризуються відповідними набора-

ми координат  $q^{(1)}$  та  $q^{(2)}$ , відбувається таким чином, що інтеграл

$$S = \int_{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (i = 1, 2, 3, \dots, s) \quad (2)$$

набуває найменшого можливого значення; цей інтеграл називають дією. Інакше кажучи, в дійсному русі системи під дією потенціальних сил інтеграл  $S$  має стаціонарне значення порівняно з близькими механічно можливими рухами, для яких початкове і кінцеве положення системи та час руху однакові з такими для дійсного руху.

Аналітично накладена умова на функціонал  $S$  виражається рівністю нулю варіації  $\delta S = 0$ . Зауважимо, що під варіацією функціонала розуміють головну лінійну частину приросту функціонала вздовж певного напрямку.

Для спрощення записів у реалізації накладеної умови припустимо спочатку, що частинка має лише один ступінь вільності, а отже,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0. \quad (3)$$

Розглянемо окремо другий інтеграл останньої суми. Враховуючи взаємну незалежність операцій варіювання і диференціювання, завдяки яким варіація похідної дорівнює похідній варіації, маємо

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d(\delta q).$$

Якщо проінтегрувати цей інтеграл частинами, то дістанемо

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt.$$

Перша частина тут дорівнює нулю, оскільки при  $t = t_1$  та  $t = t_2$  система займає положення, які характеризуються двома наборами координат  $q^{(1)}$  і  $q^{(2)}$ ; тому для цих станів відповідні варіації функції мають дорівнювати нулю:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

Повертаючись до рівності (3), дістаємо

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0.$$

Цей інтеграл може дорівнювати нулю за будь-яких значень меж інтегрування  $t_1$  та  $t_2$  лише за умови, що підінтегральна функція

дорівнює нулю, тобто

$$\left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q = 0.$$

Оскільки варіація узагальненої координати  $\delta q$  може набувати довільних значень, з останньої рівності випливає, що

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Це і є шуканим диференціальним рівнянням руху, що випливає з принципу найменшої дії. Очевидно, у випадку  $s$  ступенів вільності системи дістанемо  $s$  рівнянь такого самого вигляду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, s). \quad (4)$$

Одержані диференціальні рівняння називають *рівняннями Лагранжа*, вони є рівняннями руху системи.

Зауважимо, що рівняння Лагранжа не є диференціальними рівняннями в частинних похідних, оскільки ці рівняння не слугують для визначення функції Лагранжа. Останню у кожній конкретній задачі необхідно визначити до складання рівнянь Лагранжа. Після підстановки функції Лагранжа в рівняння Лагранжа останні перетворюються на звичайні диференціальні рівняння другого порядку відносно узагальнених координат.

## § 82. Визначення функції Лагранжа

Для складання рівнянь руху заданої системи необхідно передусім визначити функцію Лагранжа. При цьому треба враховувати таке.

1. Функції Лагранжа мають адитивні властивості. Якщо механічна система складається з двох частин  $A$  і  $B$ , для кожної з яких в замкненому стані є функції Лагранжа  $L_A$  та  $L_B$ , то функція системи за умови роз'єднання частин для виключення їх взаємодії наближатиметься до суми:

$$\lim L = L_A + L_B.$$

2. Множення функції Лагранжа на будь-яку сталу величину не впливає на рівняння руху.

3. Функція Лагранжа визначається лише з точністю до доданка повної похідної довільної функції координат і часу. Справді, якщо задані функції  $L'(q, \dot{q}, t)$  і  $L(q, \dot{q}, t)$  різняться доданком повної похідної функції  $f(q, t)$ , тобто

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t),$$

то відповідні інтеграли – дії – знаходитимуться у співвідношенні

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = \\ &= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1), \end{aligned}$$

звідки випливає, що умови мінімуму для обох дій  $\delta S' = 0$  та  $\delta S = 0$  збігаються, а отже, вигляд рівнянь руху буде таким самим.

Визначимо спочатку функцію Лагранжа для *вільнорухомої точки*. Розглядатимемо рух точки в інерціальній системі відліку, оскільки йдеться про закономірності класичної механіки. Зауважимо, що внаслідок однорідності простору і часу в інерціальній системі відліку шукана функція не повинна залежати в явній формі від радіуса-вектора точки та часу; отже, вона залежить лише від швидкості. Внаслідок ізотропності простору ця функція не повинна залежати від напрямку швидкості, а може залежати лише від її абсолютного значення, отже, від квадрата швидкості:  $L(v^2)$ .

Однозначний вигляд цієї функції розкривається на основі принципу відносності Галілея. Згідно з цим принципом рівняння руху в усіх інерціальних системах повинні мати однаковий вигляд; тому функції Лагранжа при переході від однієї системи до іншої мають зберігати той самий вигляд і можуть різнитися лише доданком повної похідної деякої функції координат та часу. Можна показати, що таку умову задовольняє функція

$$L = av^2. \quad (1)$$

Справді, при переході до іншої системи  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ , тому

$$L(v^2) = av^2 = a(v' + u)^2 = av'^2 + 2av'u + au^2.$$

Інакше, взявши до уваги, що  $v' = \frac{dr'}{dt}$ , матимемо

$$L(v^2) = L(v'^2) + \frac{d}{dt}(2ar'u + au^2t),$$

де другий доданок правої частини є повною похідною (його можна відкинути).

Коефіцієнт пропорційності  $a$  у виразі (1) замінюють на  $\frac{m}{2}$  та дістають функцію Лагранжа у вигляді

$$L = \frac{mv^2}{2}; \quad (2)$$

вона має зміст енергії.

Підставивши функції у рівняння Лагранжа, дістанемо

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = mv; \quad mv = \text{const},$$

тобто вільнорухома частинка переміщуватиметься зі сталою швидкістю. Цей результат підтверджується законом інерції.

Ураховуючи адитивні властивості функції Лагранжа, для системи незв'язаних точок матимемо

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}, \quad (3)$$

де  $a$  – номери точок.

Для замкненої системи взаємодіючих точок функцію Лагранжа дістанемо, якщо до правої частини виразу (3) додамо функцію, що залежить від характеру взаємодії частинок і має зміст потенціальної енергії системи:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(r_1, r_2, \dots). \quad (4)$$

Підставивши функції у рівняння Лагранжа, матимемо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_a} = \frac{\partial L}{\partial r_a}$$

або

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r_a},$$

тобто рівняння руху у вигляді другого закону Ньютона. Вираз у правій частині останнього рівняння визначає силу

$$F_a = -\frac{\partial U}{\partial r_a},$$

що діє на  $a$ -ту частинку.

Якщо задана частинка знаходиться у зовнішньому полі, то, очевидно, для неї функція Лагранжа матиме вигляд

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(r, t), \quad (5)$$

а рівняння руху – вигляд

$$\frac{d}{dt} (mv) = -\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Із викладеного випливає, що функція Лагранжа складається з кінетичної  $T$  та потенціальної  $U$  енергії системи (в будь-яких координатах):

$$L = T - U; \quad (6)$$

її інакше називають *кінетичним потенціалом*.

### § 83. Застосування методу Лагранжа до розв'язування деяких задач механіки

**Рівняння руху математичного маятника.** Розглянемо випадок, коли матеріальна точка має один ступінь вільності, тобто її узгаальною координатою є кут  $\varphi$  відхилення маятника від вертикалі (див. рис. 101). Якщо взяти за нульовий рівень потенціальної енергії рівень точки підвішування маятника, то функція Лагранжа матиме вигляд

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos \varphi.$$

Підставивши функції у рівняння Лагранжа і виконавши відповідні операції

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = ml^2\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi,$$

дістанемо

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

Знайдене рівняння ідентичне раніше одержаному рівнянню динаміки маятника (див. § 64, (3)).

**Задача двох тіл.** Заслугує на увагу спосіб спрощення задачі на рух двох взаємодіючих частинок, який зводиться до розкладання руху системи на рух центра мас та рух частинок відносно нього.

Оскільки потенціальна енергія взаємодіючих частинок залежить лише від відстані між ними, функція Лагранжа для системи матиме вигляд

$$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \quad (2)$$

Введемо вектор взаємної відстані частинок

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

і візьмемо за початок координат центр мас системи. Тоді

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0.$$

Якщо з двох останніх рівностей визначити  $\vec{r}_1$  та  $\vec{r}_2$ , тобто

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}; \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (3)$$



і підставити їх значення у вираз (2), то матимемо

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U(r), \quad (4)$$

де  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  – зведена маса системи.

Як свідчить вираз (4), таким способом задача двох взаємодіючих частинок зводиться до задачі руху однієї частинки в зовнішньому полі  $U(r)$ . Визначивши за рівнянням Лагранжа  $\vec{r}(t)$ , за виразами (3) знайдемо  $\vec{r}_1(t)$  та  $\vec{r}_2(t)$ .

**Рух частинки в центральному полі.** *Центральним* називають таке поле, в якому потенціальна енергія частинки залежить лише від відстані її до деякої нерухомої точки – центра поля. У цьому випадку діюча на частинку сила також залежить від відстані  $\vec{r}$  і напрямлена вздовж радіуса-вектора:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Користуючись полярними координатами  $(r, \varphi)$ , дістаємо функцію Лагранжа у вигляді

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Тоді функція не включає в явному вигляді координату  $\varphi$ . Таку координату, яка явно не входить у функцію Лагранжа, називають *циклічною*. Наявність циклічних координат приводить до істотного спрощення розв'язків рівнянь Лагранжа. Зокрема, розглядаючи рівняння Лагранжа за координатою  $\varphi$ , маємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

звідки

$$m r^2 \dot{\varphi} = P, \quad (5)$$

де  $P$  – стала, що має зміст моменту імпульсу. Так, у вигляді частинного розв'язку рівнянь Лагранжа дістанемо закон збереження моменту імпульсу. Його геометричним відображенням є закон збереження секторіальної швидкості (другий закон Кеплера):

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const}. \quad (6)$$

Спираючись на розв'язок (5), можна спростити повний розв'язок задачі: замість рівняння Лагранжа скористатись законом збереження енергії.

Із рівності (5) визначимо координату  $\phi$  і, підставивши її значення у вираз енергії, дістанемо

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{P^2}{2mr^2} + U(r), \quad (7)$$

звідки

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{P^2}{m^2 r^2}}. \quad (8)$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши цей вираз, матимемо

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{P^2}{m^2 r^2}}} + \text{const}, \quad (9)$$

тобто маємо вираз, який в неявному вигляді визначає координату  $r(t)$ .

Для визначення координати  $\phi$  за виразом (5) знайдемо

$$d\phi = \frac{P}{mr^2} dt,$$

підставимо сюди значення  $dt$  з виразу (8) і проведемо інтегрування. Тоді

$$\phi = \int \frac{\frac{P}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{P^2}{r^2}}} + \text{const}. \quad (10)$$

Вирази (9) та (10) є загальними розв'язками поставленої задачі; останній з них, що визначає зв'язок між  $r$  і  $\phi$ , є рівнянням траєкторії руху частинки. У конкретизованішому вигляді ці розв'язки нами відтворено та досліджено у третій книзі курсу фізики при викладенні дослідів англійського фізика Е. Резерфорда (1871–1937) з розсіювання  $\alpha$ -частинок у центральному полі ядра атома.

У підсумку слід зазначити, що рівняння Лагранжа є найзагальнішим і практично дуже зручним методом дослідження руху систем. Завдяки використанню узагальнених координат число рівнянь Лагранжа дорівнює числу ступенів вільності системи, а це число на практиці невелике навіть для складних систем.

# Молекулярна фізика і термодинаміка

- ◆ Молекулярно-кінетична теорія газів
- ◆ Молекулярні рухи і явища перенесення
- ◆ Фізичні основи термодинаміки
- ◆ Реальні гази і фазовий перехід газ-рідина
- ◆ Рідини
- ◆ Тверді тіла
- ◆ Міжфазові явища
- ◆ Основні рівняння газодинаміки

---

**МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ  
ГАЗІВ****§ 84. Предмет і завдання молекулярної фізики**

*Молекулярна фізика* – вчення про внутрішню молекулярну структуру речовин навколишнього світу: газів, рідин та твердих тіл; про процеси їх змін і взаємних перетворень, обумовлених зовнішніми температурними та механічними впливами; про явища на межах між речовинами в різних агрегатних станах.

Завдання молекулярної фізики полягає у з'ясуванні фізичних явищ із погляду їх внутрішнього механізму – взаємодії і рухів молекул, у наведенні взаємозв'язків між кількісними характеристиками молекул та параметрами макросистеми в цілому. За такими зв'язками стає можливим визначати характеристики молекул. Це одне з основних завдань сучасної фізики, а одночасно й сутність підготовки до розуміння фізичних явищ у молекулярній фізиці.

У навчальних цілях завдання цього посібника полягатиме в тому, щоб на основі уявлень про молекулярні рухи пояснити фізичні властивості речовини в газоподібному, рідкому і твердому станах, явища переходу з одного стану в інший, а також фізичні процеси, що відбуваються у речовинах у разі зовнішніх впливів. Іншим завданням є опанування статистичного методу молекулярної фізики.

**§ 85. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії будови речовини**

Учення про будову речовини лежить в основі всіх природничих наук. Воно дає ключ до розуміння найрізноманітніших явищ природи. Тому ще у стародавні часи прагнення до осмислення явищ навколишнього світу спонукало вчених до формування гіпотез про будову речовини.

Близько 2,5 тис. років тому давньогрецькі філософи Левкіпп, Демокріт та Епікур з великою прозорливістю склали уявлення про атомну будову речовини. Стисло їх сутність висловлено у відомому афоризмі Демокріта: «Нічого не існує, крім атомів і порожнього простору; все інше є поглядом».

Розвиваючи думку про атомну будову речовини, давньогрецькі філософи дійшли до матеріалістичних поглядів на будову всесвіту. Відтоді історія розвитку атомізму нерозривно пов'язана з історією протистояння матеріалізму та ідеалізму. У часи середньовіччя поширення атомістичного вчення заборонялося під загрозою смерті. Кару за такий «злочин» визначав, зокрема, декрет французького парламенту 1626 р.

В епоху Відродження погляди на атомну будову речовини розвивали Леонардо да Вінчі та П. Гассенді, у XVII ст. – Г. Галілей, а пізніше – Р. Бойль.

Минуло багато століть, поки геніальні здогадки давньогрецьких філософів переросли у наукове вчення про внутрішню будову речовини.

Сучасним ученням про будову речовини є атомно-молекулярна теорія. Основи її вперше виклав М. В. Ломоносов у праці «Елементи математичної хімії» у 1741 р. Пізніше це вчення дістало всебічне обґрунтування у працях Дж. Дальтона, Р. Клаузіуса, Дж. К. Максвелла, Л. Больцмана, Я. Д. ван дер Ваальса, Ж. Б. Перрена та ін.

Суть атомно-молекулярного вчення зводиться до таких основних положень.

1. *Усі тіла складаються з атомів або певних сполучень атомів, що називаються молекулами.* Для підтвердження цього можна послатися на факти розчинення твердого тіла в рідині або змішування рідин. Характерно, наприклад, що в разі змішування спирту і води об'єм суміші менший від суми об'ємів компонентів. Ці факти свідчать, що тіла тільки здаються суцільними, насправді вони складаються із частинок, між якими є проміжки. Ці проміжки під час змішування або розчинення частково можуть заповнюватися частинками іншої речовини, тому об'єм розчину або суміші зменшується. Зміна об'єму тіл унаслідок пружних деформацій стиску теж свідчить про наявність проміжків між складовими тіла.

Атомна будова речовини яскраво відображається у законі кратних відношень у хімічних сполуках. Англійський вчений Дж. Дальтон (1766–1844) у 1803 р. виявив, що коли два елементи утворюють один з одним кілька хімічних сполук, то масова кількість одного з елементів, що припадає у цих сполуках на ту саму кількість іншого, перебуває з ним у простих кратних відношеннях. Для ілюстрації закону скористаймося різними оксидами нітрогену:  $N_2O$ ,  $NO$ ,  $N_2O_3$ ,  $NO_2$ ,  $N_2O_5$ . У них на одну масову одиницю нітрогену припадає відповідно 0,57; 1,14; 1,71; 2,28; 2,85 масових одиниць оксигену. Ця кількість оксигену зростає у відношеннях 1 : 2 : 3 : 4 : 5.

Сутність закону неважко зрозуміти, припустивши, що прості тіла складаються з атомів, а у хімічних сполуках із них утворюються молекули. Тоді на певну кількість атомів однієї речовини може при-

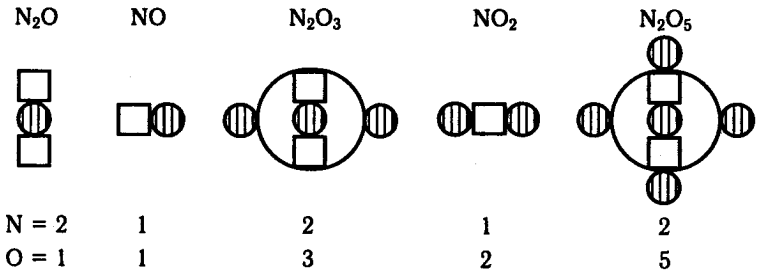


Рис. 140

падати по одному, два, три і більше атомів іншої речовини (рис. 140).

Як відомо, за законом кратних відношень було знайдено формули різних хімічних сполук. Через порівняння мас елементів у сполуках визначено їхню відносну атомну масу. Число, що виражає масу атома у відносних одиницях, називається *атомною масою*  $A$ . За одиницю атомної і молекулярної маси прийнято  $1/12$  маси атома вуглецю, причому

$$1 \text{ а.о.м.} = 1,665 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Для обґрунтування уявлень про молекулярну будову речовини необхідно послатися на хімічний закон, відкритий французьким ученим Ж. Л. Гей-Люссаком (1778–1850) у 1808 р.: *об'єми газів, які вступають у реакцію, відносяться один до одного і до об'ємів утворених газоподібних продуктів реакції як невеликі цілі числа* (рис. 141).

Як довів італійський учений А. Авогадро (1776–1856), закон легко може бути пояснений, якщо користуватися уявленнями про молекулу як найменшу частинку будь-якої речовини, здатної до самостійного існування. У 1811 р. він сформулював важливе тверджен-

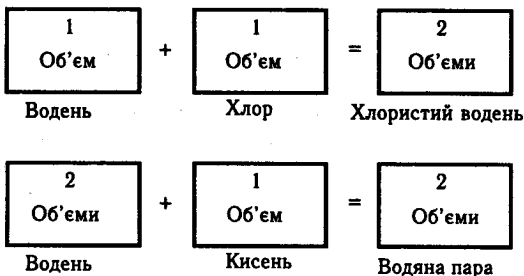


Рис. 141

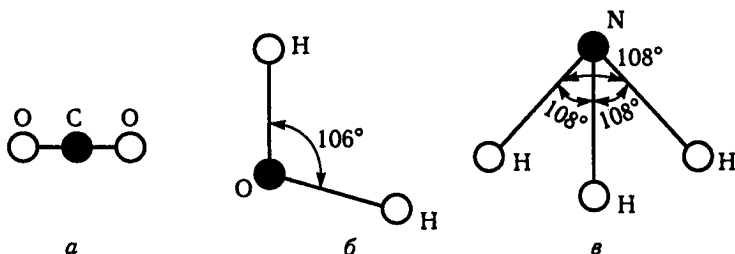


Рис. 142

ня: у рівних об'ємах будь-яких газів, узятих при однакових температурі та тиску, міститься однакове число молекул.

Ці положення лягли в основу формул молекул і молекулярних мас газоподібних речовин.

У сучасній фізиці методами рентгеноструктурного аналізу та за допомогою електронного мікроскопа можна не тільки одержувати наочні відображення молекулярної будови речовини (для обізнаності слід розглянути рентгенограму й електронограму речовини), а й розрізнити структуру молекул. З'ясовано, наприклад, що молекула діоксиду вуглецю має прямолінійну форму (рис. 142, а), молекула води – трикутну (рис. 142, б), молекула аміаку – пірамідальну (рис. 142, в) (на вершині піраміди знаходиться атом азоту, а кути між силами зв'язку дорівнюють  $108^\circ$ ). Форми молекул бувають різні залежно від їхньої складності, однак у більшості фізичних явищ молекули можна вважати кулеподібними.

Питання щодо молекулярної будови речовини можна вважати вирішеним, якщо будуть знайдені кількісні характеристики молекул – їхня маса і розмір. Після визначення відносних значень мас молекул, виражених в атомних одиницях маси (1 а.о.м. дорівнює  $1/12$  маси найпоширенішого нукліда – вуглецю), принципово важливо знайти абсолютне значення маси молекули. З цієї метою доцільно розглянути досліди французького фізика Ж. Б. Перрена (1870–1942). Користуючись при цьому барометричною формулою, можна констатувати, що густина повітря та його складових із висотою зменшується за експоненціальним законом.

За допомогою мікроскопа Ж. Б. Перрен виявив, що за таким самим законом із висотою зменшується кількість частинок в емульсії гумігуту. Однак якщо густина кисню в атмосфері стає меншою у 2 рази у випадку підняття на 5,5 км, то таке саме зменшення кількості частинок емульсії гумігуту у воді відбувається на висоті 30 мкм. Різниця висот спадання концентрації пов'язана з відмінностями мас частинок, що підтверджувалось спостереженнями різних емульсій.

Отже, можна вважати, що

$$\frac{m_{\text{ем}}}{m_{\text{кисн}}} = \frac{h_{\text{кисн}}}{h_{\text{ем}}}. \quad (1)$$

Маса частинки емульсії, знайдена за густиною і радіусом кульок гумігугу, в досліді дорівнювала  $8,5 \cdot 10^{-18}$  кг. Для маси молекули кисню було одержано значення

$$m_{\text{кисн}} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5500} 8,5 \cdot 10^{-18} \approx 5,1 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

Більш точно значення маси молекули кисню дорівнювало  $5,31 \cdot 10^{-26}$  кг, відповідно

$$1 \text{ а.о.м.} = \frac{5,31 \cdot 10^{-26}}{32} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.} \quad (2)$$

Для прищеплення об'єктивних уявлень про атоми та молекули користуються методом порівняння. Зокрема, для того щоб скласти уявлення про масу атома, зауважують, що земна куля у стільки разів важча від яблука, у скільки разів яблуко важче від атома гідрогену.

Знаючи масу молекули речовини, можна знайти кількість молекул у тілі. Число частинок тієї чи іншої речовини в тілі називають *кількістю речовини* в ньому. Щоб уникнути великих чисел, домовились виражати її в молях.

*Моль* – кількість речовини системи, що містить стільки ж структурних елементів, скільки міститься атомів у вуглецю-12 масою 0,012 кг. Кількість атомів, яка міститься в нукліді  $^{12}\text{C}$  масою 0,012 кг, називається *сталю Авогадро*:

$$N_A = \frac{0,012}{1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 12} = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}. \quad (3)$$

Моль як одиниця визначає лише число структурних елементів речовини, назву цього числа треба вказувати. Наприклад, у посудині знаходиться 2 моль молекул води (там само – 4 моль атомів гідрогену, 2 моль атомів кисню, 20 моль протонів, 16 моль нейтронів, 20 моль електронів).

У молекулярній фізиці користуються також поняттям «молярна маса», яка визначається як маса 1 моль речовини:

$$M = m_0 N_A,$$

де  $m_0$  – маса молекули в кілограмах.

Для визначення розмірів атомів і молекул, оскільки це завдання ставиться на початковому етапі вивчення розділу, доцільно відтворити метод іонного проектора, що розглядається у середній школі,



або метод вимірювання товщини моноатомної площі розливу гасу на поверхні води в кристалізаторі. За такими вимірами діаметр атома

$$d \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Зауважимо, що з деякими іншими методами визначення мас та розмірів молекул студенти будуть ознайомлені пізніше у лекційному курсі й лабораторному практикумі.

2. *Атоми і молекули в тілах перебувають у безперервному хаотичному русі.* Рухами цих частинок обумовлюються явище дифузії, броунівський рух, теплота та ін.

*Дифузія* – це явище самовільного проникнення однієї речовини в іншу. Дуже швидко дифундують гази: внесена в кімнату пахуча речовина за короткий час заповнює всю кімнату. Дещо повільніше дифундують рідини. Якщо в мензурку поверх мідного купоросу обережно налити води, то через одну-дві доби за блакитним забарвленням стовпчика води виявимо дифузію мідного купоросу у воду. Дифундують також тверді тіла, але дуже повільно.

Явище дифузії відбувається швидше з підвищенням температури тіл. Очевидно, при цьому швидкість руху їхніх молекул збільшується.

Рух молекул яскраво відображається у броунівському русі. Через мікроскоп можна бачити, що будь-які мікроскопічні частинки (наприклад, спори лікоподію або частинки туші), що зависли у рідині, перебувають у безперервному хаотичному русі. Вперше такий рух виявив англійський ботанік Р. Броун у 1827 р., тому рух названо його ім'ям.

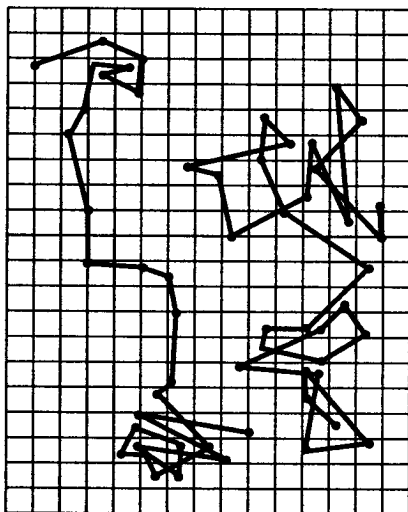


Рис. 143

Дослідив і пояснив броунівський рух французький фізик Ж. Б. Перрен. Фіксуючи положення окремих частинок через кожні 30 с, він дістав картину траєкторій їх рухів (рис. 143); виявив, що з підвищенням температури броунівський рух стає інтенсивнішим; показав, що броунівський рух – це результат хаотичних ударів молекул у мікроскопічну частинку. На велику частинку в кожний момент часу з усіх боків припадає так багато ударів молекул, що в середньому всі ці імпульси зрівноважуються. Коли частинка надто мала, то кількість ударів молекул дуже

зменшується і проявляється деякий результуючий імпульс ударів. Тому мікроскопічна частинка набуває броунівського руху.

У підсумку слід зазначити, що молекулярний рух є однією із форм руху матерії, та, незважаючи на безладність руху частинок, у молекулярному русі проявляються статистичні закономірності; крім поступальних переміщень молекулам притаманні також обертальні й коливальні рухи.

3. Між молекулами речовини одночасно проявляються сили взаємного притягання (зчеплення)  $F_1$  і сили взаємного відштовхування  $F_2$  (рис. 144, а).

Сили притягання обумовлюють міцність тіл на розрив, явище прилипання, змочування, утворення краплин та плівок. Ці сили проявляються на відстані  $\approx 10^{-9}$  м, тому для демонстрації прилипання двох твердих тіл їхні поверхні слід відполірувати (так виготовляються плитки Югансона) і щільно притиснути (це легко досягається зі свинцевими стрижнями).

За своєю природою це електромагнітні сили. Серед них розрізняють дипольно-орієнтаційні (сили Кеєзона), індукційні (сили Дебая), дисперсійні (сили Лондона) види сил. Перші два види сил мають електростатичну природу, дисперсійні – це квантово-механічні сили, які належать до проявів електромагнітних полів, що виникають унаслідок обертальних рухів молекул. У цілому сили притягання молекул називають *вандерваальсовими* на честь голландського фізика Я. Д. ван дер Ваальса (1837–1923), які він узяв до уваги (1873) для пояснення властивостей реальних газів і рідин.

Сили відштовхування між молекулами легко виявляються у деформаціях стиснення твердих тіл та рідин. Виникнення цих сил під час зближення молекул пояснюється в основному електростатичним відштовхуванням ядер, домінування останніх – наслідок

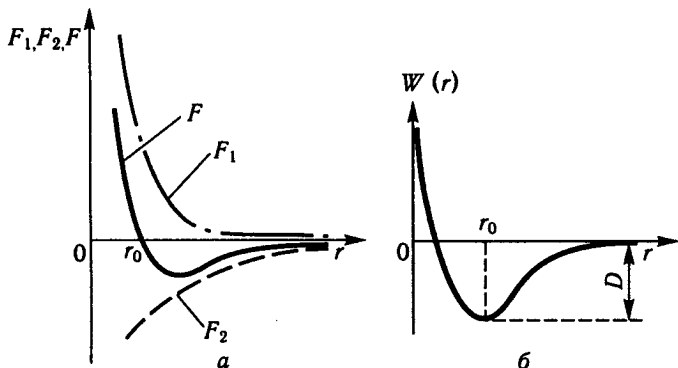


Рис. 144

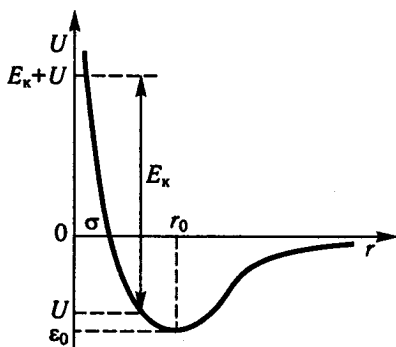


Рис. 145

взаємного проникнення електронних оболонок і порушення симетричності в розподілі заряджених частинок у молекулах.

Залежність згаданих сил від відстані між двома молекулами можна проілюструвати графіками (див. рис. 144, а). Слід зазначити, що найважливішою характеристикою молекулярної взаємодії є потенціальна крива, або потенціал взаємодії, яка виражає залежність потенціальної енергії взаємодії молекул від їх відстані (рис. 144, б; 145).

При  $r = r_0$  маємо положення стійкої рівноваги молекул, воно відповідає мінімуму потенціальної енергії; таке положення називають *потенціальною ямою*. Існування такого стійкого стану – примітна особливість у структурі речовини: якби його не було, не було б молекул рідкої та твердої фаз, частинки або нескінченно віддалялися б, або, навпаки, зливалися б одна з одною.

Аналітично потенціал молекулярної взаємодії приблизно визначається виразом

$$U(r) = 4\epsilon_0 \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right], \quad (4)$$

де у квадратних дужках перший член відображає силу відштовхування, а другий – притягання. Значення величини  $\epsilon_0$ , що характеризує енергію взаємодії двох молекул за рівності сил притягання і відштовхування (див. рис. 145), дорівнює 0,1...0,01 еВ. Ця так звана енергія ван дер Ваальса на один-два порядки менша від енергії хімічної взаємодії частинок.

Вираз (4) широко використовується у теорії рідин та газів, його називають *потенціалом Леннард-Джонса*.

Поблизу рівноваги сили молекулярних взаємодій зростають лінійно зі збільшенням зміщення молекул. Завдяки цьому при малих деформаціях виконується закон Гука, а зіткнення молекул газу уподібнюється пружному удару кульок.

Зазначимо, що сили ван дер Ваальса не мають станів насичення, охоплюючи обмежену кількість частинок подібно до хімічних або ядерних взаємодій. Завдяки взаємодіям частинок речовини енергія хаотичного руху частинок може передаватися від одного тіла до іншого.

## § 86. Статистичний метод

Одним з основних завдань вивчення молекулярної фізики є опанування статистичного методу. До сутності цього методу можна підійти, виходячи з таких міркувань.

Із погляду МКТ різні властивості речовини треба розглядати як сумарні результати рухомих молекул. У зв'язку з цим виникає питання: як можна оцінити результати прояву величезної кількості молекул, що хаотично рухаються?

Раніше в механіці ми розглядали одиничні об'єкти у вигляді матеріальної точки або системи зв'язаних точок. Їх поведінка підлягала динамічній закономірності, сутність якої відображають закони механіки Ньютона. У молекулярній фізиці ці закономірності можна застосувати тільки до окремої молекули, але для опису явищ, обумовлених величезною кількістю хаотично рухомих молекул, метод механіки недостатній.

Наукові дослідження привели до висновку про те, що хоча рух кожної молекули хаотичний, випадковий в той або інший момент часу, поведінка множини таких молекул підлягає певній статистичній закономірності. Зокрема, для сукупності хаотично рухомих молекул можна вказати значення швидкості, енергії, імпульсу, властиві більшості молекул. Такі значення величин називають *найімовірнішими*. Мається на увазі, що частинки у статистичній системі порівняно слабо взаємодіють між собою, внаслідок чого окрема частинка має випадкові значення параметрів, а енергія системи дорівнює сумі енергії частинок.

Характеристиками руху більшості молекул можуть бути деякі середні значення швидкості, довжини вільного пробігу, кількості співзіткнень та ін. Наприклад, досліджуючи броунівський рух, А. Ейнштейн і М. Смолуховський у 1905 р. знайшли, що середнє значення квадрата зміщення частинки за проміжок часу  $\Delta t$  вздовж осі  $Ox$  або будь-якої іншої осі пропорційне цьому проміжку часу:

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{kT}{3\pi\eta r} \Delta t, \quad (1)$$

до того ж ця формула справедлива для середнього, взятого з усіх частинок, які беруть участь у явищі. Середня кінетична енергія поступального руху броунівської частинки дорівнює середній кінетичній енергії молекул рідини або газу.

Спостерігаючи рух броунівської частинки за допомогою мікроскопа, окуляр якого був обладнаний сіткою, що слугувала системою координат, і водночас указуючи на послідовне зміщення частинки через  $\Delta t = 30$  с, Ж. Б. Перрен у 1909 р. експериментально підтвердив правильність формули (1); використовуючи її, він ви-

значив стали Больцмана  $k$ . Цим самим були підтверджені основні уявлення МКТ та статистичні закономірності молекулярного ансамблю.

Динамічні, а також статистичні закономірності відображають якісно різні форми руху матерії, розуміння яких має велике пізнавальне значення. З погляду статистичної закономірності кожне випадкове явище перебуває в межах певної причинності, є проявом діалектики співвідношення випадковості й необхідності в явищах природи.

У молекулярній фізиці широко посилаються також на закономірності, відкриті за допомогою феноменологічного (суто макроскопічного) методу дослідження властивостей речовини, що вивчає явища в цілому, без розгляду їхнього внутрішнього механізму. За цим методом було виявлено закони газів, основні принципи термодинаміки та інші закономірності.

Феноменологічний і статистичний методи взаємно доповнюють один одного. Якщо результати дослідження за обома методами не суперечать один одному, вони є вірогідними. Зіставляючи їх, знаходять співвідношення параметрів стану речовини та характеристик руху її молекул, а з цих співвідношень визначають недоступні для вимірювання характеристики молекул.

## § 87. Основні газові закони. Рівняння Клапейрона–Менделєєва

Зазвичай говорять, що речовина може перебувати у трьох агрегатних станах – твердому, рідкому і газовому. Кожний стан має свої характерні властивості. Найпростішим за внутрішньою будовою є газовий стан речовини.

Властивості речовини визначаються фізичними величинами, які називаються *параметрами стану*. Характерними параметрами газового стану є об'єм  $V$ , тиск  $p$  та температура  $T$ . Вони піддаються безпосередньому вимірюванню і дають можливість стежити за зміною стану газу.

Зауважимо, що параметри газу  $V$ ,  $p$ ,  $T$  як функції стану, у свою чергу, перебувають у взаємних зв'язках, які виражаються окремими газовими законами, а в загальному вигляді – рівнянням стану газу.

Стан газу при нормальному атмосферному тиску  $p_0 = 1,013 \times 10^5$  Па і температурі  $T_0 = 273,15$  К ( $0^\circ\text{C}$  – за шкалою Цельсія) називають станом у *нормальних умовах*.

Перехід речовини з одного стану в інший називають *процесом*. Розглянемо процеси в газах в інтервалі середніх температур та низьких тисків. За таких умов, як буде показано нижче, силами взаєм-

ного притягання між молекулами газу можна знехтувати, а зіткнення молекул розглядати як співудари абсолютно пружних кульок нескінченно малих розмірів. Відповідний газ називають *ідеальним*. Практично навіть при нормальному атмосферному тиску і кімнатній температурі більшість газів можна віднести до ідеальних.

Розглянемо спочатку закони ідеального газу для випадку, коли маса й один із параметрів ідеального газу є незмінними.

**Закон Бойля–Маріотта.** При сталій температурі та незмінній масі добуток тиску газу на об'єм є величиною сталою:

$$pV = \text{const} \quad (m = \text{const}, T = \text{const}). \quad (1)$$

Закон сформульовано в 1662 р. англійським ученим Р. Бойлем (1627–1691) і незалежно в 1676 р. французьким фізиком Е. Маріоттом (1620–1684).

Процес зміни стану газу при сталій температурі називається *ізотермічним*. Рівняння (1) є рівнянням ізотермічного процесу. Графічно на діаграмі  $p, V$  ізотермічний процес зображується рівнобічною гіперболою (рис. 146). Чим вища температура, за якої відбувається процес, тим вище лежить відповідна гіпербола. За фізичною суттю цю криву називають *ізотермою*.

**Закон Гей-Люссака.** При сталому тиску та незмінній масі відношення об'єму газу до абсолютної температури є величиною сталою:

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (m = \text{const}, p = \text{const}). \quad (2)$$

Закон сформульовано в 1802 р. французьким ученим Ж. Л. Гей-Люссаком.

Процес зміни стану газу при сталому тиску називається *ізобаричним*. Рівняння (2) є рівнянням ізобаричного процесу. Воно показує, що в цьому процесі об'єм газу перебуває у лінійній залежності від температури. Графічно на діаграмі  $V, T$  процес зображується прямою (рис. 147), яку за фізичною суттю називають *ізобарою*.

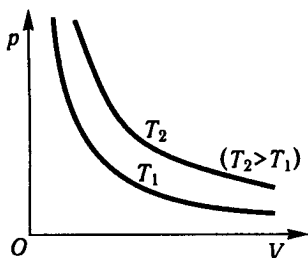


Рис. 146

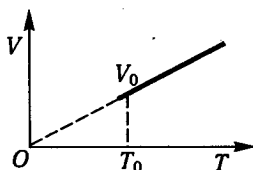


Рис. 147

Інакше кажучи, за законом Гей-Люссака температурні коефіцієнти об'ємного розширення всіх газів однакові та становлять

$$\beta = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T} = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1} = 0,00367 \text{ K}^{-1},$$

тобто з підвищенням температури на один кельвін усі гази збільшують свій об'єм приблизно на  $1/273$  частину того об'єму  $V_0$ , який кожний з газів займав при температурі  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  ( $0^\circ \text{C}$ ).

**Закон Шарля.** При сталому об'ємі та незмінній масі відношення тиску газу до абсолютної температури є величиною сталою:

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad (m = \text{const}, V = \text{const}). \quad (3)$$

Закон сформульовано французьким ученим Ж. О. С. Шарлем (1746–1822).

Процес зміни стану газу при сталому об'ємі називається *ізохоричним*. Рівняння (3) є рівнянням ізохоричного процесу. Воно показує, що в цьому процесі тиск газу перебуває в лінійній залежності від температури. Графічно на діаграмі  $p, T$  процес зображується прямою (рис. 148), яку за фізичною суттю називають *ізохорою*. Для газу різної маси ізохори утворюють в'язку прямих, що сходяться в одній точці ( $p = 0, T = 0$ ).

Температуру, за якої тиск газу дорівнює нулю, називають *абсолютним нулем*. Температуру, яку відлічують від абсолютного нуля у таких самих значеннях градуса, як і в шкалі Цельсія, називають *абсолютною температурою*, або температурою за шкалою Кельвіна (В. Томсона). Перехід до цієї шкали температур визначається виразом

$$T = 273,15 + t^\circ \text{C}.$$

Інакше кажучи, за законом Шарля температурні коефіцієнти тиску всіх газів однакові та становлять

$$\gamma = \frac{\Delta p}{p_0 \Delta T} = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1} = 0,00367 \text{ K}^{-1}, \quad (4)$$

тобто з підвищенням температури на один кельвін усі гази збільшують свій тиск приблизно на  $1/273$  частину того тиску  $p_0$ , який кожний з газів має за температури  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  ( $0^\circ \text{C}$ ).

Залежність між тиском і температурою при сталому об'ємі використовують у практиці для побудови дуже чутливого газового термометра (рис. 149). Він складається з резервуара  $A$ , наповнено-

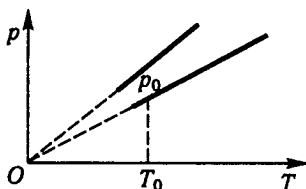


Рис. 148

го воднем, та ртутного манометра з рухомим коліном  $B$ . Сталість об'єму газу досягається доведенням рівня ртуті в лівому коліні манометра до позначки  $S$ . Щоб виміряти температуру тіла, спочатку резервуар з газом  $A$  вміщують у танучий лід і знаходять тиск газу  $p_0$ , а потім резервуар  $A$  приводять у контакт із вимірюваним тілом та визначають тиск газу  $p$ , що відповідає його температурі.

Тиск газу знаходять як суму атмосферного тиску  $H$  і надлишку рівня ртуті  $h$  у правому коліні манометра:  $p = H + h$ . Температуру обчислюють, користуючись рівнянням (4).

Розглянемо тепер закони ідеального газу для випадку, коли всі його параметри можуть змінюватися.

### Рівняння Клапейрона–Менделєєва.

Викладені вище закони ідеального газу виражають залежності лише для будь-яких двох параметрів газу з трьох ( $V$ ,  $p$ ,  $T$ ) за умови, що третій залишається сталим. У практиці частіше зустрічаються такі зміни стану газу, коли одночасно змінюються всі три параметри – об'єм, тиск і температура. У таких випадках залежність між параметрами визначається *рівнянням стану газу*.

Щоб знайти це рівняння, розглянемо процес, унаслідок якого газ перейшов із нормального стану з параметрами  $V_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$  у стан з іншими параметрами  $V$ ,  $p$ ,  $T$ .

Такий перехід від початкового до кінцевого стану газу можна здійснити за допомогою двох відомих нам процесів (наприклад, спочатку ізобаричного, а потім ізотермічного) за схемою:

$$I. V_0, p_0, T_0; V', p_0, T; V' = V_0 \frac{T}{T_0};$$

$$II. V', p_0, T; V, p, T; p_0 V' = p V.$$

Виключивши з двох здобутих рівнянь об'єм  $V'$  для проміжного стану газу, знайдемо

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}, \quad (5)$$

тобто дістанемо рівняння

$$pV = BT. \quad (6)$$

Це рівняння вивів французький вчений Б. П. Е. Клапейрон (1799–1864) у 1834 р. У ньому стала  $B$  залежить від роду газу та його кількості. Цю сталу, розраховану для одиниці маси газу, називають *питомою газовою сталою*  $B_0$ .

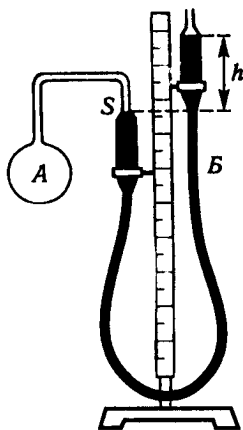


Рис. 149



Як приклад обчислимо питому газову сталу для повітря. Об'єм 1 кг повітря – питомий об'єм повітря у нормальних умовах (тиск  $1,013 \cdot 10^5$  Па і температура 273,15 К)

$$V_0 = \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{1,293} \frac{\text{м}^3}{\text{кг}},$$

нормальний атмосферний тиск

$$p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Звідси

$$B_0 = \frac{p_0 V_0}{273} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,293 \cdot 273} = 287,1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Аналогічно обчислено, що питома газова стала для водню дорівнює 4125; для кисню – 295,7; для азоту – 296,7 Дж/(кг · К) і т. д.

У 1874 р. російський хімік Д. І. Менделєєв (1834–1907), скориставшись законом Авогадро, надав рівнянню (6) більш зручного для користування вигляду. При цьому виявилось доцільним розраховувати сталу для газів, узятих у кількості 1 моль або 1 кіломоль. Зауважимо, що в СІ одиницею кількості речовини є моль (див. § 85).

За законом Авогадро при однакових тисках та однакових температурах 1 моль будь-якого ідеального газу має один і той самий об'єм. За нормальних умов 1 моль будь-якого газу займає об'єм  $V_{0m} = 0,0224 \text{ м}^3$ . Завдяки цьому стала в рівнянні газового стану, розрахована на 1 моль речовини, для всіх газів буде однаковою і становитиме

$$R_m = \frac{p_0 V_{0m}}{T_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 0,0224}{273,15} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Цю сталу називають *універсальною газовою сталою*. Рівняння стану в розрахунку на 1 моль ідеального газу має вигляд, аналогічний рівнянню (2):

$$pV = R_m T.$$

У такому вигляді рівняння стану ідеального газу називають *рівнянням Клапейрона–Менделєєва*. Воно зручніше для користування, ніж рівняння для одиниці маси.

Крім одиниці кількості речовини – моль – дозволяється застосовувати кратні та дольні від неї величини: кіломоль, мілімоль, мікромоль. З означення одиниці (моль) неважко бачити, що *один кіломоль будь-якого газу має масу, яка в кілограмах чисельно дорівнює молекулярній масі  $\mu$  речовини*. Один кіломоль будь-якого ідеального газу за нормальних умов ( $p_0 = 101,3$  кПа і  $t = 0^\circ\text{C}$ ) займає об'єм  $V_0 = 22,4 \text{ м}^3$ . У розрахунку на 1 кіломоль універсаль-

на газова стала

$$R = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,4}{273,15} = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}.$$

У розрахунку на 1 кіломоль ідеального газу рівняння Клапейрона–Менделєєва записують так:

$$pV = RT, \quad (7)$$

а для будь-якої маси  $m$  – так:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (8)$$

де  $\mu$  – маса, яку має кіломоль газу.

Для зручності розрахунків надалі переважно користуватимемося рівнянням (8).

За рівнянням (8) легко знаходимо залежність густини газу від тиску і температури, а саме:

$$\frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}, \quad \rho = \frac{\mu p}{RT}. \quad (9)$$

Такі у загальному вигляді емпіричні закономірності у властивостях ідеального газу.

З'ясуємо фізичну суть сталої  $R$  у рівнянні Клапейрона–Менделєєва. Для цього уявімо 1 кмоль газу під поршнем у циліндрі при тиску  $p$  та температурі  $T$  (рис. 150); площа поршня  $S$ . Підвищимо температуру газу від  $T$  до  $(T + 1 \text{ К})$ . Газ розширюється і виконує роботу, піднімаючи поршень на висоту  $h$ . Ця робота

$$A = pSh,$$

але  $Sh = \Delta V$  – приріст об'єму газу при розширенні; тому

$$A = p\Delta V. \quad (10)$$

Вираз (10) визначає роботу газу в ізобаричному процесі. Застосувавши до початкового та кінцевого станів газу рівняння Клапейрона–Менделєєва, дістанемо

$$pV = RT; \quad pV_1 = R(T + 1\text{К}).$$

Віднявши від другого рівняння перше, знайдемо

$$p(V_1 - V) = R; \quad p\Delta V = R. \quad (11)$$

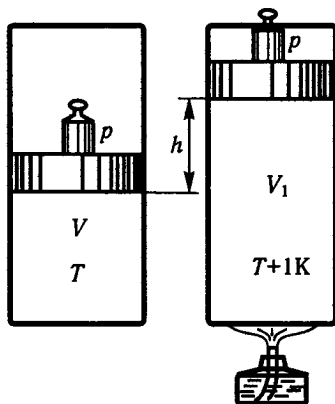


Рис. 150

Зіставимо рівності (10) і (11) та знайдемо, що  $R = A$ , тобто універсальна газова стала чисельно дорівнює роботі розширення одного кіломоля газу при ізобаричному нагріванні на 1 К.

**Приклад 1.** Дві посудини  $A$  і  $B$  з повітрям, об'єми яких  $V_1$  та  $V_2$ , з'єднано вузькою трубкою з краном; температури посудин  $T_1$  і  $T_2$  під час досліду підтримуються незмінними. Спочатку при закритому крані тиски повітря у посудинах відповідно дорівнюють  $p_1$  та  $p_2$ . Потім кран відкрили. Який тиск  $p$  встановиться у системі, якщо  $p_1 = 0,53 \cdot 10^5$  Па;  $p_2 = 0,2 \cdot 10^5$  Па;  $V_1 = 0,25 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>;  $V_2 = 0,4 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>;  $T_1 = 373$  К;  $T_2 = 253$  К?

**Розв'язання.** До відкриття крана у посудині  $A$  становила  $m_1 = \frac{\mu p_1 V_1}{RT_1}$ , у посудині  $B$  –  $m_2 = \frac{\mu p_2 V_2}{RT_2}$ . Після відкриття крана тиски вирівнюються до  $p$ , маси у посудинах дорівнюватимуть відповідно  $m'$  і  $m''$ . Очевидно,  $p = \frac{m'}{\mu V_1} RT_1 = \frac{m''}{\mu V_2} RT_2$ . Врахувавши, що сумарна маса у посудинах залишається незмінною, дістанемо

$$m' + m'' = m_1 + m_2 = \frac{\mu p_1 V_1}{RT_1} + \frac{\mu p_2 V_2}{RT_2}.$$

Виключивши з цих двох рівнянь  $m'$  та  $m''$ , знайдемо

$$p = \frac{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}{V_1 T_2 + V_2 T_1}; \quad p = 0,3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Зауважимо, що в цьому прикладі фіксованою величиною у рівняннях стану була маса повітря.

**Приклад 2.** При кожному качанні компресор забирає  $V_0 = 4 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup> повітря при температурі  $T_0 = 270$  К і нормальному атмосферному тиску  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па та нагнітає його в резервуар  $V_1 = 1,5$  м<sup>3</sup>; у цьому резервуарі підтримується стала температура повітря  $T_1 = 318$  К. Скільки качань має зробити компресор, щоб тиск у резервуарі підвищився на  $\Delta p = 2,02 \cdot 10^5$  Па?

**Розв'язання.** Позначимо масу повітря, яку забирає компресор з атмосфери при кожному качанні, через  $m$ . Її можна визначити з рівняння стану

$$p_0 V_0 = \frac{m}{\mu} RT_0.$$

Потрапивши в резервуар, повітря з такою масою створить у ньому парціальний тиск  $p_n = \frac{m}{\mu V_1} RT_1$ . Виключивши з цих двох рівнянь масу  $m$ , дістанемо вираз парціального тиску  $p_n = \frac{p_0 V_0 T_1}{V_1 T_0}$ . Згідно із законом про суму парціальних тисків  $\Delta p = n p_n$ , де  $n$  – число качань, дістанемо

$$n = \frac{\Delta p V_1 T_0}{p_0 V_0 T_1} = 640.$$

**Приклад 3.** Визначити густину суміші 4 г водню і 32 г кисню при температурі 7 °С і тиску 93 кПа.

**Розв'язання.** З означення густини  $\rho = \frac{m_1 + m_2}{V}$  приклад зводиться до обчислення об'єму суміші при відомих компонентах:

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT; \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT; \quad p V = \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) RT.$$

З останнього виразу знаходимо  $V = \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) \frac{RT}{p}$ ; підставивши вираз об'єму суміші у формулу для визначення густини, дістанемо  $\rho = 0,48 \text{ кг/м}^3$ .

**Приклад 4.** Фабричний димар виносить дим при температурі  $T_1 = 333 \text{ К}$ . Визначити статичний тиск  $p$ , який зумовлює тягу в димарі. Температура зовнішнього повітря  $T_2 = 263 \text{ К}$ ; питома вага повітря  $d_0 = 12,6 \text{ Н/м}^3$ ; висота димаря  $l = 50 \text{ м}$ . Зовнішній атмосферний тиск повітря є нормальним.

*Розв'язання.* Шуканий статичний тиск обумовлюється дією на площу перерізу димаря  $S$  підйомальної сили  $F$ , що виникає внаслідок нагрівання і розширення повітря в об'ємі димаря. Згідно з означенням підйомальної сили  $F = Sl(d_2 - d_1)$ , де  $Sl = V$  – об'єм димаря,  $d_2$  та  $d_1$  – питома вага повітря зовні й усередині димаря. Відповідно до рівняння стану газу

$$d_2 = \frac{273d_0}{T_2}; \quad d_1 = \frac{273d_0}{T_1}.$$

Підставивши ці вирази у формулу для визначення підйомальної сили, знайдемо статичний тиск

$$p = \frac{F}{S} = ld_0 \cdot 273 \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right); \quad p \approx 138 \text{ Па}.$$

## § 88. Основне рівняння кінетичної теорії газів

Виклад учення про МКТ газів у навчальних посібниках до недавнього часу відображав історичний шлях розвитку цієї науки. Спочатку розглядалися емпіричні газові закони й узагальнене на їх основі рівняння стану ідеального газу, потім будувалась його модель і виводилося рівняння МКТ газу. Із зіставлення обох рівнянь установлювався зв'язок між емпірично визначеною температурою та середньою кінетичною енергією поступального руху молекул. Указану схему викладу теми не можна вважати задовільною.

Ведучи мову про її реалізацію, академік І. К. Кікоїн (1908–1984) зазначив низку негативних нашарувань у ній, а саме: у поясненні тиску газу на стінку посудини при виведенні основного рівняння МКТ газу беззастережно допускалось, що зіткнення молекул зі стінкою посудини мають характер ідеально пружних ударів. Це уявлення хибне, і воно зовсім не обов'язкове для виведення цього рівняння.

Зрозуміло, що про характер співудару молекули зі стінкою посудини можна робити висновки лише на рівні дослідних даних молекулярної фізики. Відомо, що уявлення про пружний удар молекул зі стінкою посудини не узгоджується із наявністю теплопровідності ультрарозрідженого газу (рис. 151), у разі пружних ударів

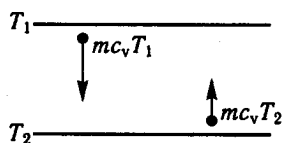


Рис. 151

молекул зі стінками теплообмін між останніми був би відсутнім. З наявності теплопровідності в цьому прикладі випливає, що співударі молекули відбуваються так, ніби вона спочатку прилипає до стінки, одержує середню енергію молекул стінки  $mc_v T_2$ , а потім відщеплюється від неї.

Як бачимо, для оцінювання результату співудару молекули необхідно враховувати температуру стінки.

На цю істотну відмінність молекулярного удару потрібно вказати при виведенні основного рівняння МКТ газу (передбачити термозрівноважені умови); необхідно вказати також на спотворене поняття про температуру як таку, що вимірюється термометром. Під час формування цього поняття слід зауважити, що температура – це один із параметрів стану речовини, який залежить від руху її молекул, а за допомогою термометра лише наближено відображається зміна температури в деякому інтервалі, оскільки в таких вимірах довільно вибирається її нульове значення.

У шкалах Цельсія  $t^\circ\text{C}$ , Реомюра  $t^\circ\text{R}$  і Фаренгейта  $t^\circ\text{F}$  точкам тання льоду та кипіння води при нормальному тиску відповідають різні значення температури. Співвідношення для перерахунку температури з однієї шкали в іншу такі:  $t^\circ\text{C} = 1,25 t^\circ\text{R} = 5/9 (t^\circ\text{F} - 32)$ . Незважаючи на компонування різних матеріалів у термометрі, довільно різниця його показів між двома реперними точками (кипіння та замерзання води) ділиться на рівні частини, тим самим допускається лінійна залежність показів термометра від температури: все це не відповідає дійсності. Задовільним може бути газовий термометр, про що йтиметься окремо.

Накреслимо модель ідеального газу і наведемо один із варіантів виведення основного рівняння МКТ. Під ідеальним газом будемо уявляти газ в інтервалі середніх температур та низьких тисків, завдяки чому можна знехтувати розмірами кожної молекули і їх сумарним об'ємом відносно об'єму посудини, а також знехтувати взаємодією між молекулами, враховуючи при цьому лише їх співударі між собою та зі стінками посудини. Останні зумовлюють тиск газу на стінку. Визначимо його.

Нехай газ міститься у посудині у вигляді куба, ребро якого дорівнює  $l$  м. Якщо з ребрами куба пов'язати прямокутну систему координат  $x, y, z$ , то швидкість будь-якої молекули можна задати через складові по координатних осях  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  (рис. 152), звідки

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2. \quad (1)$$

Будемо підраховувати тиск газу на праву стінку посудини, перпендикулярну до осі  $Ox$ . Під час зіткнення з цією стінкою будуть

зазнавати змін лише складові швидкостей та імпульсів молекул по осі  $Ox$ . За умови температурної рівноваги газу і стінки внаслідок співудару значення імпульсу залишається тим самим, а його напрям зміниться на протилежний (передбачення інших результатів веде до абсурдних наслідків, очевидних із співвідношення енергії та імпульсу молекули  $E = \frac{p^2}{2m}$ ; воно суперечить закону теплопровідності). За зміною імпульсу молекули

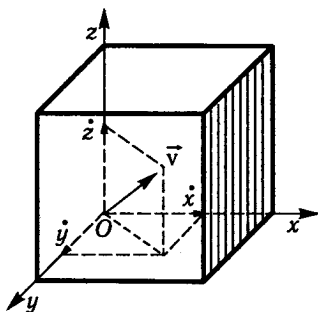


Рис. 152

$$-m_1 \dot{x}_1 - m_1 \dot{x}_1 = -2m_1 \dot{x}_1$$

знайдемо діючий імпульс сили на стінку:

$$f_1' \Delta t' = 2m_1 \dot{x}_1,$$

де  $f_1'$  – середнє значення сили під час удару;  $\Delta t'$  – тривалість удару.

Підсумувавши кількість співударів і зміну імпульсу за 1 с, знайдемо силу дії молекули на стінку  $f_1$ . Можна помітити, що наступний співудар молекули із указаною стінкою станеться через проміжок часу  $\Delta t = 2 / \dot{x}_1$ , за який молекула долетить до протилежної стінки та повернеться назад; отже, за 1с відбудеться

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{\dot{x}_1}{2}$$

зіткнень, а середня сила дії молекули на стінку становитиме

$$f_1 = 2m_1 \dot{x}_1 \frac{\dot{x}_1}{2} = m_1 \dot{x}_1^2. \quad (2)$$

Аналогічно (2) будуть виражатися сили дії решти молекул на стінку, що розглядається, а також на стінки, перпендикулярні до осей  $Oz$  й  $Oy$ . Сумарна дія всіх молекул на стінки, оскільки кожна із них дорівнює одиниці площі, визначатиме відповідні тиски:

$$\begin{aligned} p_x &= m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + \dots + m_n \dot{x}_n^2; \\ p_y &= m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2 + \dots + m_n \dot{y}_n^2; \\ p_z &= m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{z}_2^2 + \dots + m_n \dot{z}_n^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Унаслідок рівноправності всіх напрямів у хаотичному русі молекул тиск на всі стінки має бути однаковим:

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

Після додавання рівнянь (3) дістанемо

$$3p = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots + m_n v_n^2,$$

звідки

$$p = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (4)$$

Отже, тиск газу чисельно дорівнює 2/3 кінетичної енергії поступального руху молекул в одиниці об'єму газу.

З'язок тиску із середньою кінетичною енергією молекул і концентрацією  $n_0$ , тобто рівняння

$$p = \frac{2}{3} n_0 \frac{m_i \overline{v_i^2}}{2}, \quad (5)$$

називають *основним рівнянням МКТ ідеального газу*.

Підставивши у вираз (5)  $n_0 = \frac{N}{V}$ , дістанемо основне рівняння МКТ газів у дещо іншому вигляді:

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m \overline{v^2}}{2}. \quad (6)$$

У ньому пов'язані параметри газу  $p$  та  $V$  з кількістю молекул  $N$ , а також їхніми характеристиками  $m$  і  $v$ .

## § 89. Наслідки основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів

Зіставляючи наслідки основного рівняння МКТ газів з дослідними даними, можна перевірити раніше складені уявлення про внутрішній механізм ідеального газу.

**Закон Дальтона.** Обчислюючи тиск газу, ми враховували лише зіткнення молекул зі стінками посудини. Як показав Дж. К. Максвелл, зіткненнями молекул можна знехтувати. Тому в суміші газів, які хімічно не взаємодіють, кожний газ створює тиск на стінку незалежно від іншого. Ці тиски обчислюють за основним рівнянням МКТ газів. Отже, тиск суміші газів треба знаходити як суму парціальних тисків:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n. \quad (1)$$

Рівняння (1) характеризує закон, сформульований у 1801 р. англійським ученим Дж. Дальтоном: *тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, які утворюють суміш*.

**Абсолютна температура.** Для зручності зіставлення основного рівняння МКТ газів з дослідними даними будемо відносити його до кіломоля газу. Зауважимо, що кіломоль будь-якого газу містить однакову кількість молекул. Ця кількість молекул називається *сталою Авогадро*:

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}.$$

Основне рівняння МКТ газів для кіломоля запишемо так:

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m\bar{v}^2}{2}. \quad (2)$$

У рівнянні (2) відображено взаємозв'язок макроскопічних параметрів газу  $p$  і  $V$  з кількістю молекул та їхніми характеристиками  $m$ ,  $v$ ,  $\frac{mv^2}{2}$ .

Зіставивши це рівняння із рівнянням Клапейрона–Менделєєва для кіломоля ідеального газу

$$pV = RT, \quad (3)$$

дістанемо вираз, що розкриває суть абсолютної температури тіла:

$$T = \frac{2}{3} \frac{N}{R} \frac{m\bar{v}^2}{2}. \quad (4)$$

*Абсолютна температура* тіла є мірою середньої кінетичної енергії молекул тіл. Це стосується температури тіла в будь-якому його стані.

Зазначимо, що тиск і температура тіла, які визначаються через середню кінетичну енергію молекул, належать до статистичних величин. І хоча на відміну від тиску температура (4) не залежить від концентрації молекул, однак відносно однієї або кількох молекул поняття температури не має змісту.

Із рівняння (4) випливає, що температура тіла має виражатися в одиницях енергії. Проте з історичних обставин (а також з урахуванням того, що безпосереднє вимірювання кінетичної енергії молекул незручне) температуру виражають у градусах. У фізиці переважно користуються градусом Цельсія, що становить 1/100 різниці показів термометра, розміщеного у танучому льоду та парах киплячої води при нормальному тиску. Подекуди користуються також градусом Реомюра, що становить 1/80, і градусом Фаренгейта, що становить 1/180 указанного температурного інтервалу.

Із погляду фізики абсолютний нуль означає температуру, за якої мають припинитися *поступальні* рухи молекул, а отже, їх удари у стінку посудини, що визначають тиск газу. Зауважимо, що крім поступальних рухів молекули можуть перебувати в обертальних ру-



хах, а їхні атоми – в коливальних рухах і т. д. Практично абсолютного нуля досягти неможливо, до нього можна тільки наблизитися. Тепер досягнуто температури  $T = 0,0001$  К.

На основі рівняння (6) із § 88 уведемо поняття температури. Про найістотніший термодинамічний зміст температури йтиметься після аналізу циклу Карно. Означення температури сформулюємо, виходячи з основного рівняння МКТ газу.

Температура як об'єктивна величина не залежить від способу її вимірювання. Відомо, що в ізольованій системі різних тіл, які знаходяться у термодинамічній рівновазі, вона є однаковою. Отже, температура є об'єктивною характеристикою стану рівноваги макроскопічної системи. Skorистаємося особливістю цієї величини та спробуємо знайти її числове значення.

Розглянемо теплову рівноважну систему з кількох газів (рис. 153). У ній об'єми газів визначаються за розмірами посудин, їхні тиски – манометрами, кількість молекул газів – за їхніми масами:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A.$$

За цими даними у досліджуваній системі знаходимо

$$\frac{3}{2} \frac{p_1 V_1}{N_1} = \frac{3}{2} \frac{p_2 V_2}{N_2} = \frac{3}{2} \frac{p_3 V_3}{N_3} = \text{const} = \frac{m_i \bar{v}_i^2}{2} = \theta, \quad (5)$$

де  $\theta$  – стала, що характеризує стан речовини і за фізичною сутністю дорівнює середній кінетичній енергії поступального руху молекул газу; її логічно назвати *температурою*. Розглянемо питання її вимірювання. У практичних цілях вимірювання емпіричної температури здійснюється за допомогою ртутних, спиртових та їм

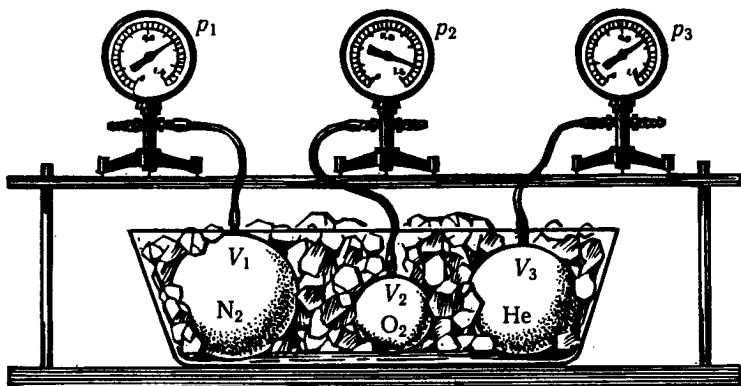


Рис. 153

подібних термометрів. Абсолютну температуру тіла можна виміряти за допомогою газового термометра сталого об'єму.

Із рівняння стану ідеального газу (3) випливає, що при сталому об'ємі

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Для побудови шкали температур вибирають дві реперні точки, наприклад  $T_1$  – температуру танення льоду і  $T_2$  – температуру кипіння води при нормальному атмосферному тиску. Для вибору одиниці температури покладають  $T_1 - T_2 = 100 \text{ K } (^{\circ}\text{C})$ . Однак побудова шкали температур за двома реперними точками недосконала, оскільки ці точки фіксуються не зовсім точно. У зв'язку з цим у СІ для побудови шкали температур вибрано одну реперну точку – температуру потрійної точки води  $T_0 = 273,16 \text{ K}$  (інші її параметри:  $t = 0,01^{\circ}\text{C}$ ;  $p_0 = 609 \text{ Па}$ ). У такому разі за одиницю абсолютної температури приймається кельвін, що дорівнює  $1/273,16$  частині термодинамічної температури потрійної точки води. Зрозуміло, що при такому виборі одиниці температури градус Цельсія і кельвін збігаються.

Якщо за термометричне тіло взяти ідеальний газ, то його температуру можна визначити за формулою

$$T = \frac{273,16}{p_0} p, \quad (6)$$

де  $p$  – тиск газу за температури потрійної точки води,  $p_0$  – тиск газу за вимірюваної температури; отже, вимірювання температури зводиться до вимірювання тисків. У навчальному процесі для цих цілей можна скористатися манометром ПММ (прилад манометричний мембранний) для вимірювання кров'яного тиску людини з такими межами вимірювання:  $(26,7 \dots 400)10^2 \text{ Па}$  з похибкою  $\pm 5,32 \cdot 10^2 \text{ Па}$ .

Для балона газового термометра можна використати скляну хімічну колбу, щільно закриту гумовою пробкою. Через пробку протягується скляний капіляр, на який одягається гумова трубочка для під'єднання манометра.

Знайдемо як вихідну величину абсолютну температуру танення льоду. Поставимо колбу в посудину з льодом та anerоїдом зафіксуємо атмосферний тиск  $p_1$ . Потім колбу під'єднаємо до манометра і перенесемо її в посудину з водою у стані кипіння, зафіксуємо надлишковий тиск  $p_m$  за манометром та тиск усередині колби  $p_2 = p_1 + p_m$ . Підставивши ці дані у формулу (6), тобто записавши

$$\frac{T_1 + 100}{T_1} = \frac{p_1 + p_m}{p_1},$$

знайдемо звідси  $T_1 = 100 \frac{p_1}{p_m}$  з похибкою  $\pm 4,5 \text{ K}$ .

Знаючи абсолютну температуру танення льоду, за формулою (6) можна визначити абсолютну температуру інших тіл за заданих умов.

На завершення слід зазначити, що поняття абсолютної температури нами введено, виходячи із співвідношення для ідеального газу

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Посилаючись на формулу, ми спочатку говоримо, що температура є мірою середньої кінетичної енергії поступального руху молекул. Це означення недостатнє, тому що крім поступальних молекули можуть здійснювати обертальні та коливальні рухи. В умовах хаотичної поведінки молекул і їхніх рухів є підстави зробити припущення про рівномірний розподіл енергії молекули за її ступенями вільності. З виразу кінетичної енергії поступального руху молекули випливає, що на будь-який ступінь її вільності в середньому припадає енергія  $1/2 kT$ . Отже, доцільним буде означення: *температура – міра енергії, що припадає на один будь-який ступінь вільності системи.*

**Швидкість молекул газу.** З виразу (4) можна також визначити середню квадратичну швидкість молекул газу, а саме:

$$v = \sqrt{3 \frac{R}{m_0 N_A} T}.$$

Оскільки  $m_0 N_A = \mu$  – маса кіломоля, маємо

$$\bar{v} = \sqrt{3 \frac{R}{\mu} T}. \quad (7)$$

Із цієї формули випливає, що швидкість молекул газу залежить від температури і молекулярної маси  $\mu$ . Наприклад, за температури  $T = 273$  К середня квадратична швидкість молекул така: водню – 1840, азоту – 940, кисню – 460 м/с.

Крім середньої квадратичної швидкості для молекул заданого газу можна вказати також середню арифметичну та найімовірнішу швидкості. Їх відповідно визначають за такими формулами:

$$\bar{v}_{\text{ар}} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{R}{\mu} T}; \quad (8)$$

$$v_i = \sqrt{2 \frac{R}{\mu} T}. \quad (9)$$

Між названими швидкостями молекул газу згідно з формулами (7) – (9) існують такі співвідношення:

$$\bar{v}_{\text{ар}} = 0,92\bar{v}; \quad v_i = 0,82\bar{v}.$$

Замінивши в основному рівнянні МКТ газів

$$p = \frac{2}{3} n_0 \frac{m\bar{v}^2}{2}$$

середню кінетичну енергію молекули  $E = \frac{3}{2} kT$ , дістанемо вираз тиску газу через концентрацію молекул, тобто через кількість молекул в одиниці об'єму  $n_0$  і температуру  $T$ , а саме:

$$p = n_0 kT. \quad (10)$$

## § 90. Розподіл молекул за швидкостями. Закон Максвелла

Унаслідок хаотичного руху та зіткнень молекул їхня швидкість весь час змінюється і взагалі є дуже різною.

У 1860 р. Дж. К. Максвелл вивів закон розподілу молекул ідеального газу за швидкостями поступального руху. Зрозуміло, що йдеться про статистичні закономірності у хаотичному русі величезної сукупності молекул газу. Все це позначається певною мірою на формулюванні тих задач, які розв'язуються за законом Максвелла.

Цей закон дає змогу знайти число молекул  $dn$  із загальної кількості  $n$  молекул газу за заданої температури, швидкість яких лежить у заданому інтервалі від  $v$  до  $v + dv$ . Ставити питання стосовно кількості молекул, які в заданий момент часу мають швидкість, що точно дорівнює  $v$ , було б некоректно, оскільки у хаотичному русі випадково таких молекул може і не бути.

Відповідно до закону Максвелла

$$dn = 4\pi n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (1)$$

У цій формулі вираз

$$\frac{dn}{ndv} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 = f_M(v)$$

називається *функцією розподілу молекул за швидкостями*. Вона показує відносну кількість молекул, швидкість яких перебуває в одиничному інтервалі  $dv$  біля значення швидкості  $v$ .

Розв'язавши задачу на знаходження максимуму функції розподілу Максвелла, знайдемо швидкість, яка називається *найімовірнішою швидкістю* молекул газу за заданої температури:

$$v_i = \alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{2\frac{R}{\mu}T}, \quad (2)$$

яку ми вже наводили у попередньому параграфі.

Вираз закону Максвелла (1) спрощується, якщо ввести найімовірнішу швидкість  $\alpha$ :

$$dn = \frac{4n}{\sqrt{\pi}\alpha^3} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 dv. \quad (3)$$

Користуючись законом Максвелла, можна визначити також середню арифметичну швидкість молекул

$$\bar{v}_{ар} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^3 dv = \sqrt{\frac{8R}{\pi\mu}} T \quad (4)$$

і середню квадратичну швидкість молекул

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v^2 dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^4 dv = 3 \frac{R}{\mu} T,$$

звідки

$$\bar{v} = \sqrt{3 \frac{R}{\mu} T}. \quad (5)$$

Під час розв'язування останньої задачі та деяких інших треба враховувати умову нормування функції Максвелла

$$\int_0^{\infty} f_M(v) dv = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} dn = 1,$$

інакше

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 dv = 1. \quad (6)$$

Користуючись законом Максвелла, можна визначити у частках або відсотках кількість молекул, швидкість яких перебуває в заданому інтервалі:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} \int_{v_1}^{v_2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 dv.$$

Знайдені дані щодо розподілу молекул за швидкостями для кисню при температурі 273 К наведено нижче.

Інтервал швидкості, м/с	Кількість молекул, %
0...100	1,4
100...200	8,1
200...300	16,7
300...400	21,5
400...500	20,3
500...600	15,1
600...700	9,2
Понад 700	7,7

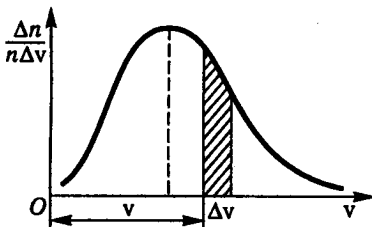


Рис. 154

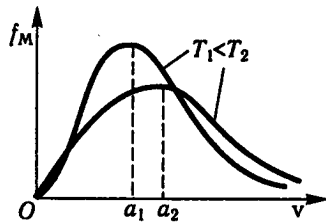


Рис. 155

За формулою (2) найімовірніша швидкість молекул кисню за заданої температури  $\alpha = 376,6$  м/с. Графічно функція Максвелла відображається кривою, показаною на рис. 154. Максимум кривої відповідає найімовірнішій швидкості. Графік показує, що швидкість, яка дуже відхиляється від найімовірнішої у той чи інший бік, буває рідко. Щоб знайти відносну кількість молекул  $\frac{\Delta n}{n}$ , швидкість яких лежить у заданому інтервалі від  $v$  до  $v + \Delta v$ , треба ординату кривої, що відповідає  $v$ , помножити на  $\Delta v$ . На графіку ця кількість дорівнюватиме площі заштрихованого стовпчика.

Зауважимо, що відповідно до формули (2) з підвищенням температури найімовірніша швидкість молекул газу збільшується, а ордината максимуму кривої розподілу зменшується (рис. 155). Це пояснюється тим, що з підвищенням температури швидкість молекул зростає і крива зміщується у бік більшої швидкості, проте фігури, обмежені кривими та віссю швидкості, відповідно до (6) залишаються рівновеликими з площею, яка дорівнює одиниці.

## § 91. Дослідне визначення швидкості молекул

Спостереження Ж. Б. Перрена за поведінкою частинок у броунівському русі, вимірювання О. У. Річардсоном (1879–1959) швидкості електронів, що вилітають із поверхні розжареного тіла, а також дослідження молекулярних пучків підтверджують основні формули кінетичної теорії газів і, зокрема, закон розподілу молекул за швидкостями Максвелла.

Зосередимося на дослідженнях молекулярних пучків. У 1920 р. німецький фізик О. Штерн (1888–1969) безпосередньо виміряв швидкість молекул таким способом. Прилад для вимірів складався із двох жорстко з'єднаних коаксіальних циліндрів (рис. 156), які

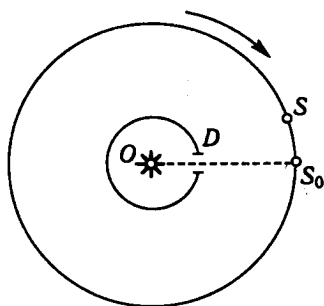


Рис. 156

можна було привести у швидке обертання навколо спільної осі  $O$ . Радіус великого циліндра дорівнював 5...6 см; на бічній поверхні малого циліндра була вирізана вузька щілинка – діафрагма  $D$ , по осі циліндрів натягнута платинова нитка, вкрита сріблом. Усередині циліндрів – розрідження до  $10^{-4}$  Па. Під час дослідів по платиновій нитці пропускали електричний струм. При цьому нитка нагрівалася і срібло випаровувалося. Молекулярний пучок пари срібла, що виділявся

діафрагмою  $D$ , осідав на стінці великого скляного циліндра й утворював чітке зображення діафрагми  $S_0$ . Після цього циліндри приводили у швидке обертання – 2700 об/хв. Після тривалого обертання на стінці зовнішнього циліндра утворювалася зміщена та розмита смужка срібла.

Зміщення смужки срібла пояснюється тим, що за час руху молекул до стінки циліндра останній повертається на  $S_0S$ . Для цього проміжку часу можна записати рівність

$$\frac{R}{v} = \frac{S_0S}{2\pi Rv},$$

з якої визначається швидкість молекул

$$v = \frac{2\pi R^2 v}{S_0S}.$$

Розмитість смужки свідчила, що атоми срібла вилітають із джерела з різною швидкістю. Найгустіша частина смужки, певно, утворилася від осідання атомів, які переміщувалися з найімовірнішою швидкістю.

Дослідні вимірювання швидкостей молекул добре узгоджувалися з обчисленими за формулою кінетичної теорії. Наприклад, в одному з дослідів при  $T = 1473$  К найімовірніша швидкість дорівнювала 675 м/с, а за обчисленнями – 672 м/с.

Докладніше розподіл швидкостей у молекулярному пучку парів ртуті дослідив Ламмерт у 1929 р. за допомогою двох дисків з радіальними щілинами, зміщеними одна відносно одної на деякий кут  $\phi$  (рис. 157). Диски були насаджені на спільну вісь на певній відстані один від одного. При цьому з молекулярного пучка  $M$ , що виділявся першим диском, крізь щілину другого диска могли проходити лише ті молекули, які проходили відстань між дисками точ-

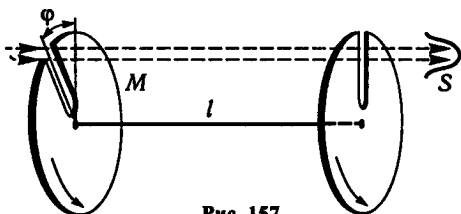


Рис. 157

но за той час, протягом якого диски поверталися на кут  $\varphi$ . Швидкість таких молекул знаходили з рівності

$$\frac{l}{v} = \frac{\varphi}{\omega}.$$

Обертаючи диски з іншою швидкістю  $\omega$ , з пучка виділяли молекули, що мали іншу швидкість. Збираючи ці молекули у кожному випадку за той самий проміжок часу на охолоджених пластинках  $S$ , визначали їхню відносну кількість у пучку; знаходили ті, які відповідали найімовірнішій швидкості.

Досліди Ламмерта підтвердили закон розподілу Максвелла.

## § 92. Газ у полі земного тяжіння. Закон Больцмана

У попередніх параграфах ми припускали, що на молекули газу не діють ніякі зовнішні сили і тому вони рівномірно розподілені по всьому об'єму посудини. Насправді всі гази (в наших умовах) перебувають у полі сил земного тяжіння. Завдяки цим силам навколо Землі утримується атмосфера, існує атмосферний тиск тощо. У посудині з газом сили тяжіння зумовлюють надлишок тиску на дно, зміну концентрації молекул із висотою. Відповідно до концентрації тиск газу з висотою зменшується. Проте якщо у посудині з газом цими змінами можна знехтувати, то в разі значного підняття в атмосфері вони набувають практичного значення.

**Барометрична формула.** З'ясуємо залежність тиску газу від висоти у посудині, або, конкретніше, залежність атмосферного тиску від висоти підняття над рівнем моря. Для цього виділимо стовп повітря (рис. 158) і зауважимо, що тиск  $p$  на будь-якій висоті  $h$  обумовлюється масою повітря, яке знаходиться над цим рівнем. Тому з дальшим піднят-

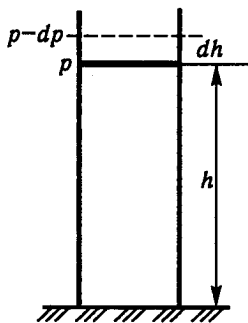


Рис. 158



тям на  $dh$  тиск відповідно зменшиться на  $dp$ . Оскільки в тонкому шарі  $dh$  густину повітря  $\rho$  можна вважати сталою, спад тиску буде

$$dp = -\rho g dh.$$

Виключивши з цього рівняння густину, за формулою

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}$$

дістанемо

$$dp = -\frac{\mu p}{RT} g dh,$$

або

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (1)$$

Припустивши, що температура у стовпі повітря однакова, проінтегруємо диференціальне рівняння (1) за висотою від 0 до  $h$  та відповідно за тиском від  $p_0$  до  $p$ :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} \int_0^h dh$$

і дістанемо

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu g}{RT} h, \quad (2)$$

або

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} h}. \quad (3)$$

Цю залежність тиску газу від висоти називають *барометричною формулою*. Вона свідчить, що з висотою тиск газу експоненціально спадає, причому тим швидше, чим більша молекулярна маса газу або нижча температура. Ця формула дає можливість знайти висоту підняття за спадом тиску (2), який визначають барометром. Відповідно можна проградувати барометр для безпосередніх показів висоти над рівнем моря. Так побудований альтиметр – прилад для вимірювання висоти.

**Закон Больцмана.** Скористаємося барометричною формулою, щоб з'ясувати питання стосовно розподілу молекул газу за висотою у полі тяжіння. Як відомо, тиск газу залежить від концентрації його молекул. Ця залежність виражається формулою  $p = nkT$ . Замінивши відповідно до неї тиск у формулі (3), за умови, що  $T = \text{const}$ , дістанемо залежність концентрації молекул газу від висоти у полі тяжіння:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g}{RT} h}, \quad (4)$$

де  $n_0$  і  $n$  – кількість молекул в одиниці об'єму відповідно на нульовому рівні та висоті  $h$ . Оскільки йдеться про розподіл молекул за

висотою у полі тяжіння, у виразі (4) доцільно замінити  $\frac{\mu}{R} = \frac{m}{k}$ , де  $m$  – маса молекули,  $k$  – стала Больцмана. Після цього матимемо

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (5)$$

Із формули (5) випливає, що при  $T \rightarrow \infty$  на висоті  $h$  концентрація газу  $n \rightarrow n_0$ , тобто за високої температури молекули газу рівномірно розподіляються по всій висоті газового стовпа. І навпаки, при  $T \rightarrow 0$  буде  $n \rightarrow 0$ , тобто за низьких температур усе більше молекул під дією сил тяжіння опускаються на дно посудини.

Отже, певний розподіл молекул за висотою, зокрема існування земної атмосфери, зумовлюється двома чинниками: силами тяжіння і тепловим рухом молекул.

Оскільки  $mgh = \Pi$  – потенціальна енергія молекули у полі тяжіння, формулу (5) можна звести до загального вигляду

$$n = n_0 e^{-\frac{\Pi}{kT}}. \quad (6)$$

Звідси випливає, що концентрація молекул більша там, де менша їхня потенціальна енергія, та навпаки, вона менша в місцях, де потенціальна енергія молекул більша.

Австрійський фізик Л. Больцман (1844–1906) довів, що так само, відповідно до формули (6), розподіляються молекули газу в будь-якому іншому потенціальному полі. Тому залежність (6) називають *законом розподілу Больцмана*. Цей закон визначає розподіл молекул за їхньою потенціальною енергією, тоді як раніше розглянутий закон Максвелла визначав розподіл молекул за їхньою кінетичною енергією.

**Приклад 1.** Визначити: 1) кількість  $N$  молекул води, які за температури  $T = 277$  К займають об'єм  $V = 10^{-9}$  м<sup>3</sup>; 2) масу  $m_1$  молекули води; 3) діаметр  $d$  молекули води, уявляючи молекули у вигляді кульок у дотику одна до одної.

**Розв'язання.** 1. Кількість молекул  $N$  у тілі масою  $m$  дорівнює добутку сталої Авогадро  $N_A$  на кількість речовини  $\nu$ :  $N = \nu N_A$ . Оскільки  $\nu = \frac{m}{M}$ , де  $M$  – молярна маса, маємо  $N = \left(\frac{m}{M}\right) N_A$ . Виражаючи масу  $m = \rho V$ , де  $\rho$  – густина води, дістаємо

$$N = \left(\frac{\rho V}{M}\right) N_A = 3,34 \cdot 10^{19} \text{ молекул.}$$

2. Масу молекули води знайдемо, поділивши молярну масу її на сталу Авогадро:

$$m_1 = \frac{M}{N_A} = 2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

3. Приймаючи молекули у вигляді щільно укладених кульок, констатуємо, що кожна молекула займає об'єм  $V_1 = d^3$ ; отже,  $d = \sqrt[3]{V_1}$ . Об'єм  $V_1$  знайде-

мо, поділивши молярний об'єм на сталу Авогадро:  $V_1 = \frac{V_m}{N_A}$ , де  $V_m = \frac{M}{\rho}$ .  
Отже,

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{(\rho N_A)}} = 311 \text{ нм.}$$

**Приклад 2.** Чому дорівнює за нормальних умов кількість молекул азоту в  $1 \text{ см}^3$ , швидкість яких лежить в інтервалі  $99 \dots 101 \text{ м/с}$ ?

**Розв'язання.** Оскільки інтервал швидкості  $\Delta v$ , в якому знаходиться швидкість шуканої кількості молекул, невеликий порівняно з самою швидкістю  $v$ , під час розрахунків можна користуватися безпосередньо рівнянням Максвелла у фіксованих величинах

$$\Delta n(v) = \frac{4n}{\sqrt{\pi}\alpha^3} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 \Delta v, \quad (7)$$

де  $\Delta n$  – шукана величина;  $n = n_0 = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$  (число Лошмідта);

$\alpha = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$  – найімовірніша швидкість при  $T = 290 \text{ К}$ ;  $\Delta v = 2 \text{ м/с}$ ;

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 100 \text{ м/с.}$$

Підставляючи дані у вираз (7), дістаємо  $\Delta n = 1,7 \cdot 10^{22}$  молекул /  $\text{м}^3$ .

**Приклад 3.** Визначити середню арифметичну швидкість молекул газу, що підлягає розподілу Максвелла.

**Розв'язання.** За означенням середньої арифметичної швидкості

$$\bar{v}_{\text{ар}} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v dn. \quad (8)$$

Ураховуючи вираз  $dn$  за розподілом Максвелла, маємо

$$\bar{v}_{\text{ар}} = \int_0^{\infty} 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$

Провівши інтегрування частинами, у переформованому вигляді запишемо

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\text{ар}} &= 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[ \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left( -\frac{m}{2kT} 2v \right) dv v^2 \left( -\frac{kT}{m} \right) \right] = \\ &= 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left( -\frac{kT}{m} \right) \left\{ v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 2v dv \right\}. \end{aligned}$$

Знайдемо значення виразу у прямих дужках, користуючись правилом Лопітала:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v^2}{e^{\frac{mv^2}{2kT}}} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2v}{e^{\frac{mv^2}{2kT}} \frac{m}{2kT} \cdot 2v} = 0 \quad (\text{таке саме значення буде при } v \rightarrow 0).$$

Отже,

$$\begin{aligned}\bar{v}_{\text{ар}} &= \frac{kT}{m} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left( -\frac{m}{2kT} \right) 2v dv \left( -\frac{2kT}{m} \right) = \\ &= \frac{kT}{m} 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left( -\frac{2kT}{m} \right) e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \Big|_0^{\infty}.\end{aligned}$$

При підстановці граничних значень інтегрування дістанемо

$$\bar{v}_{\text{ар}} = \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} k^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}},$$

інакше

$$\bar{v}_{\text{ар}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (9)$$

Аналогічно визначається середня квадратична швидкість молекул газу

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v^2 dn. \quad (10)$$

**Приклад 4.** Обчислити середню кінетичну енергію  $\bar{E}_k$  молекул ідеально-го газу, що підлягає розподілу Максвелла.

**Розв'язання.** Закон розподілу молекул ідеального газу за швидкостями

$$dn(v) = \frac{4n}{\sqrt{\pi\alpha^3}} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 dv \quad (11)$$

може бути поданий у вигляді функцій інших змінних, які, у свою чергу, залежать від швидкості й тому також характеризують рух молекул, наприклад імпульс  $p = mv$ , кінетичну енергію  $E_k = \frac{mv^2}{2}$ . Для цього досить виразити швидкість через указані величини та ввести заміни у вираз (11). Тут  $v^2 = \frac{2E_k}{m}$ , тому

$$dn(E_k) = \frac{2n}{\sqrt{\pi(kT)^{3/2}}} e^{-\frac{E_k}{kT}} \sqrt{E_k} dE_k, \quad (12)$$

де  $k$  – стала Больцмана.

Вираз (12) є законом розподілу молекул розрідженого газу за кінетичною енергією, причому середня кінетична енергія молекул

$$\bar{E}_k = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} E_k dn(E_k) = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^{3/2}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{E_k}{kT}} E_k^{3/2} dE_k = \frac{3}{2} kT.$$

**Приклад 5.** Порошинки масою  $m = 10^{-18}$  г зависли у повітрі. Визначити товщину шару повітря, в межах якого концентрація порошинок різниться не більш як на 1%. Температура  $T$  повітря по всьому об'ємі однакова і дорівнює 300 К.

**Розв'язання.** При рівноважному розподілі порошинок концентрація їх залежить лише від координати  $z$ , напрямленої вертикально вгору. У цьому випадку до розподілу порошинок можна застосувати формулу Больцмана

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}.$$

Оскільки в однорідному полі тяжіння потенціальна енергія

$$U = mgz,$$

згідно із законом Больцмана

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}; \quad dn = -n_0 \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz,$$

або

$$dn = -\frac{mg}{kT} n dz,$$

звідки визначаємо у фіксованих значеннях

$$\Delta z = \frac{kT}{mg} \frac{\Delta n}{n}. \quad (13)$$

Підставляючи у формулу (13) значення

$$\frac{\Delta n}{n} = 0,01; \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}; \quad T = 300 \text{ К};$$

$$m = 10^{-21} \text{ кг}; \quad g = 9,81 \text{ м/с}^2,$$

знаходимо  $\Delta z = 4,23 \text{ мм}$ .

## МОЛЕКУЛЯРНІ РУХИ І ЯВИЩА ПЕРЕНЕСЕННЯ

### § 93. Кількість зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул

Уже йшлося про те, що молекулярні хаотичні рухи зумовлюють зіткнення молекул газу зі стінками посудини і тиск газу на стінки. З розгляду внутрішнього механізму тиску газу вдалося одержати вирази для визначення деяких важливих характеристик молекул. Проте молекулярні рухи зумовлюють також зіткнення молекул між собою та низку явищ. Зокрема, внаслідок хаотичного руху молекули газу переходять з одних місць на інші, переносючи з собою деякі масу, імпульс, енергію.

У певних умовах перенесення згаданих величин може мати напрямлений характер. Усі ці процеси називають *явищами перенесення*. Розгляд їх поглиблює уявлення про внутрішню будову речовини, а також розкриває можливості для визначення додаткових характеристик молекул газу.

Молекули газу, перебуваючи в тепловому русі, весь час стикаються між собою. Розглядаючи ідеальний газ, вважаємо, що молекули взаємодіють лише в момент зіткнення. Отже, від зіткнення до зіткнення рух молекул рівномірний і прямолінійний. Відстань, яку молекула проходить між двома послідовними зіткненнями, називають *довжиною вільного пробігу молекули*.

У момент зіткнення змінюються значення і напрям швидкості молекул, тому траєкторія руху будь-якої молекули буде складною ламаною лінією. Зрозуміло, що довжина її ділянок за 1 с чисельно дорівнює середній швидкості  $\bar{v}_{\text{сер}}$  молекули, а кількість окремих ділянок – кількості зіткнень  $\bar{z}$  молекули за 1 с. За цими величинами можна знайти середню довжину вільного пробігу молекули

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}_{\text{сер}}}{\bar{z}}. \quad (1)$$

Кількість зіткнень молекули можна визначити, міркуючи так. Припустимо, що всі молекули газу знаходяться на своїх місцях нерухомо і тільки одна молекула в цьому середовищі рухома. Нехай вона перебуває у прямолінійному та рівномірному русі зі швидкістю  $\bar{v}_{\text{сер}}$ , яка дорівнює середній швидкості молекулярного руху

заданого газу. За 1 с ця молекула зіткнеться з усіма тими молекулами, центри яких лежать в об'ємі циліндра завдовжки  $\bar{v}_{\text{сеп}}$  радіусом  $R = 2r$ , де  $r$  – ефективний радіус молекули (рис. 159).

Якщо позначити кількість молекул в одиниці об'єму через  $n_0$  і цю величину помножити на об'єм згаданого циліндра, то знайдемо кількість зіткнень молекули

$$\bar{z} = n_0 \pi (2r)^2 \bar{v}_{\text{сеп}}.$$

Однак оскільки всі інші молекули теж перебувають у русі, необхідно у вираз кількості зіткнень замість абсолютної швидкості молекули  $v$  (швидкості відносно стінок посудини) підставити відносну швидкість  $v_{\text{в}}$  молекули, тобто швидкість відносно рухомих молекул, з якими відбувалися зіткнення.

Відносною швидкістю руху двох молекул є векторна різниця їхніх абсолютних швидкостей. Зважаючи на те, що кут між швидкостями двох молекул у їх хаотичних рухах змінюється у межах від  $0$  до  $180^\circ$ , можна стверджувати, що середнє значення кута між швидкостями двох молекул дорівнює  $90^\circ$ . Звідси (рис. 160) знаходимо

$$\bar{v}_{\text{в}} = \sqrt{2} \bar{v}_{\text{сеп}}.$$

Після підстановки відносної швидкості дістанемо остаточний вираз середньої кількості зіткнень молекул за 1 с:

$$\bar{z} = 4\sqrt{2} \pi r^2 \bar{v}_{\text{сеп}} n_0. \quad (2)$$

Якщо врахувати, що ефективний радіус молекули  $r = 10^{-10}$  м, кількість молекул в  $1 \text{ м}^3$  у нормальних умовах  $n_0 = 2,7 \cdot 10^{25}$ , швидкість молекул  $\bar{v}_{\text{сеп}} = 500$  м/с, то для кількості зіткнень молекули дістанемо таке значення:

$$\bar{z} = 4\sqrt{2} \cdot 3,14 (10^{-10})^2 500 \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}.$$

За нормальних умов молекула газу зазнає в середньому кількох мільярдів зіткнень за 1 с.

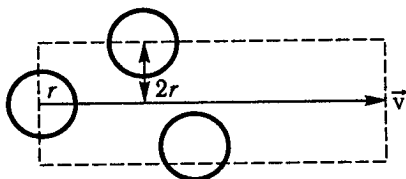


Рис. 159

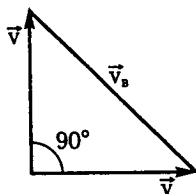


Рис. 160

Підставивши вираз кількості зіткнень (2) у вираз (1), знайдемо середню довжину вільного пробігу молекули

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n_0}. \quad (3)$$

Оскільки  $\sigma = 2r$ , маємо

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_0}, \quad (4)$$

де  $\sigma$  – ефективний діаметр молекули.

Отже, середня довжина вільного пробігу молекули обернено пропорційна кількості  $n_0$  молекул в одиниці об'єму. Проте відповідно до основного рівняння МКТ газів ( $p = kn_0T$ ) за незмінної температури  $n_0$  визначає тиск газу  $p$ . Отже, в разі сталої температури середня довжина вільного пробігу молекули обернено пропорційна тиску газу:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{p_2}{p_1}. \quad (5)$$

Наведемо значення довжини вільного пробігу молекул повітря при різних тисках:

Тиск, Па	Середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda}$ , м
$10^5$	$7 \cdot 10^{-8}$
$10^2$	$5 \cdot 10^{-5}$
1	$5 \cdot 10^{-3}$
$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$10^{-4}$	5 · 10

Як видно, при значному розрідженні газу довжина вільного пробігу молекули може перевищувати розміри посудини. У таких умовах молекула може пролітати через усю посудину і відбиватися від її стінок раніше, ніж станеться зіткнення з іншою молекулою. Таке розрідження газу, при якому середня довжина вільного пробігу молекул стає порівнянною з лінійними розмірами посудини, називають *вакуумом*.

На довжину вільного пробігу молекул дещо впливає також температура газу. З підвищенням температури зростає енергія молекул; тому, стикаючись, вони наближаються одна до одної на меншу відстань, тобто ефективний радіус молекул зменшується. Залежність  $\lambda$  від  $T$  виражається *формулою Сезерленда*

$$\lambda = \lambda_\infty \frac{T}{T + C}, \quad (6)$$

де  $\lambda_\infty$  – довжина вільного пробігу, обчислена за формулою (4);  $C$  – стала Сезерленда, що залежить від речовини. Наприклад, для азоту  $C = 102,7$  К, для кисню  $C = 125$  К і т. д.



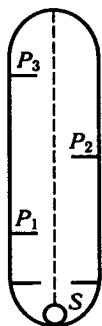


Рис. 161

Довжину вільного пробігу молекул виміряв німецький фізик М. Борн (1882–1970) у 1920 р. Він дослідив молекулярний пучок срібла, що утворювався унаслідок випаровування розжареної кульки  $S$  у скляному балоні (рис. 161). В умовах вакууму молекулярний пучок проходив через усю посудину, а срібло осідало на протилежній стінці. Коли балон наповнювали газом, молекулярний пучок дещо розсіювався, але переважна кількість срібла осідала на бічному екрані  $P_3$ . Зі збільшенням тиску в балоні переважна кількість срібла осідала на екрані  $P_2$ , при ще більшому тиску срібло осідало на екрані  $P_1$ . За цими даними було оцінено довжину вільного пробігу молекул при різних тисках.

Знаючи довжину вільного пробігу, за виразом (4) можна визначити ефективний діаметр молекули.

## § 94. Дифузія

Явище дифузії – це напрямлене перенесення маси, зумовлене молекулярними рухами речовини.

Із макроскопічного погляду явище дифузії визначається *законом Фіка*. За цим законом маса  $\Delta M$ , що переноситься через деяку поверхню  $S$ , перпендикулярну до осі  $x$ , пропорційна градієнту густини  $\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\right)$ , площі поверхні  $S$  і часу  $\Delta t$ :

$$\Delta M = -D \left(\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\right) S \Delta t, \quad (1)$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії. Зміст цього коефіцієнта стає очевидним, якщо кожний співмножник при ньому покласти таким, що дорівнює одиниці. Коефіцієнт дифузії – це маса речовини, яка переноситься через одиницю площі за одиницю часу при градієнті густини, що дорівнює одиниці. Коефіцієнт дифузії виражається у квадратних метрах за секунду ( $\text{м}^2/\text{с}$ ).

Знак «мінус» у правій частині виразу (1) показує, що маса переноситься у напрямі зменшення густини речовини. Явище дифузії зумовлює вирівнювання густини газу.

З'ясуємо це явище з погляду МКТ газів. Розглянемо найпростіший випадок дифузії – самодифузію, що відбувається у хімічно чистому газі внаслідок неоднакової його густини в різних областях об'єму. В такому разі характеристики всіх молекул однакові.

Нехай у середовищі газу існує градієнт густини  $\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\right)$  у напрямі осі  $Ox$ . Це означає, що у напрямі осі  $Ox$  концентрація молекул газу

спадає (або зростає). Знайдемо кількість молекул, які переходять через деяку поверхню  $S$ , перпендикулярну до осі  $Ox$  (рис. 162), за час  $\Delta t$ .

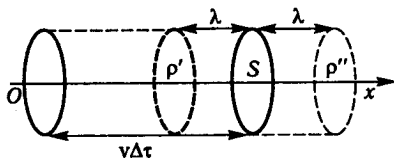


Рис. 162

Оскільки молекули газу рухаються хаотично, вважатимемо, що з  $n_0$  молекул, які містяться в одиниці об'єму, в кожному з напрямів  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  рухається  $1/3$  частина молекул. Зрозуміло, що одна половина молекул ( $1/6 n_0$ ) рухається у додатному напрямі, інша – у протилежному.

Очевидно, за час  $\Delta t$  через поверхню  $S$  зліва направо пройде  $1/6$  усіх молекул, що містяться в об'ємі циліндра з основою  $S$  і висотою  $v\Delta t$ , а саме:

$$\frac{1}{6} n_0 S v \Delta t. \quad (2)$$

Якщо це число помножити на масу молекули, то дістанемо масу, яка переноситься молекулами зліва направо через поверхню  $S$  за час  $\Delta t$ :

$$\frac{1}{6} m n_0 S v \Delta t = \frac{1}{6} \rho' S v \Delta t,$$

де  $m n_0 = \rho'$  – густина газу ліворуч від поверхні  $S$ .

Аналогічно знайдемо масу, яка переноситься через поверхню  $S$  справа наліво за час  $\Delta t$ , але врахуємо, що праворуч від  $S$  концентрація молекул менша і відповідно менша густина газу  $\rho''$ . Ця маса становить

$$\frac{1}{6} \rho'' S v \Delta t.$$

Знайдемо результуючу масу, яка переноситься через поверхню  $S$  за час  $\Delta t$ :

$$\Delta M = \frac{1}{6} (\rho' - \rho'') S v \Delta t. \quad (3)$$

Зауважимо, що через поверхню  $S$  проходять молекули вже після свого останнього зіткнення з іншими молекулами. Інакше кажучи, безпосередньо до поверхні  $S$  спрямовуються молекули з шару, який міститься від  $S$  на відстані середнього пробігу  $\bar{\lambda}$  молекул.

Тому  $\rho'$  та  $\rho''$  у виразі (3) треба відносити до шарів газу ліворуч і праворуч від поверхні  $S$  на відстані  $\bar{\lambda}$  від неї.

Оскільки градієнт густини  $\frac{\Delta \rho}{\Delta x}$  визначає зміну густини, розраховану на одиницю довжини, різницю густин ( $\rho' - \rho''$ ) на відстані  $2\bar{\lambda}$  можна виразити через градієнт густини так:

$$\rho' - \rho'' = \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right) 2\bar{\lambda}.$$

Виконавши за цією рівністю відповідну заміну у виразі (3), дістанемо

$$\Delta M = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right) S \Delta \tau. \quad (4)$$

Зіставивши вираз дифузії (4), здобутий у МКТ, з емпіричним законом дифузії (1), знайдемо коефіцієнт дифузії

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}. \quad (5)$$

Знаючи, що швидкість молекул  $\bar{v}$  збільшується з підвищенням температури, а довжина пробігу молекул  $\bar{\lambda}$  обернено пропорційна тиску газу, за виразом (5) легко визначити залежність коефіцієнта дифузії від названих параметрів  $T, p$  газу. Ці залежності добре узгоджуються з дослідними. Зокрема, виявлено, що з підвищенням температури явище дифузії відбувається швидше; при більших тисках, у густіших середовищах газу дифузія повільніша.

## § 95. Внутрішнє тертя у газах

Із макроскопічного погляду внутрішнє тертя у рідинах і газах розглянуто в частині «Фізичні основи механіки». За законом Ньютона сила внутрішнього тертя пропорційна градієнту швидкості  $\left( \frac{\Delta u}{\Delta z} \right)$  та площі шарів  $S$ , між якими визначається сила тертя:

$$F = \eta \left( \frac{\Delta u}{\Delta z} \right) S, \quad (1)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт внутрішнього тертя, або коефіцієнт в'язкості.

Із погляду МКТ внутрішнє тертя є результатом перенесення імпульсу з одного шару в інший, що здійснюється молекулами газу у процесі їхнього теплового руху. З цими міркуваннями перейдемо до визначення сили внутрішнього тертя і коефіцієнта в'язкості.

Нехай в однорідному середовищі

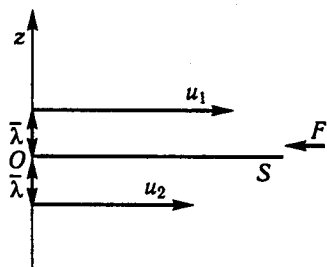


Рис. 163

газу існує градієнт швидкості  $\left( \frac{\Delta u}{\Delta z} \right)$  у напрямі осі  $Oz$ . У середині газу розглянемо деяку поверхню  $S$ , паралельну потокові газу (рис. 163). Нехай вище від цієї поверхні швидкість потоку ( $u_1$ ) більша, а нижче – ( $u_2$ ) менша.

Унаслідок хаотичного руху молекул газу через поверхню  $S$  за час  $\Delta t$  зверху вниз та знизу вгору пройде

однакова кількість молекул (див. § 94, (2)), а саме:

$$\frac{1}{6} n_0 S \bar{v} \Delta \tau,$$

але перенесуть вони різну кількість руху. Зверху вниз через поверхню  $S$  буде перенесено кількість руху

$$\frac{1}{6} n_0 S \bar{v} \Delta \tau m u_1,$$

де  $m u_1$  – кількість зорієнтованого руху молекули у верхньому шарі потоку газу, а знизу вгору – кількість руху

$$\frac{1}{6} n_0 S \bar{v} \Delta \tau m u_2,$$

де  $m u_2$  – кількість зорієнтованого руху молекули в нижньому шарі потоку газу.

Знайдемо результуючий імпульс, що переноситься через поверхню  $S$  за час  $\Delta \tau$ :

$$\Delta K = \frac{1}{6} n_0 m \bar{v} (u_1 - u_2) S \Delta \tau. \quad (2)$$

Із попереднього параграфу відомо, що  $u_1$  і  $u_2$  треба відносити до шарів газу, які містяться із різних боків від поверхні  $S$  на відстані  $\bar{\lambda}$  від неї. Тому  $(u_1 - u_2)$  є різницею швидкостей шарів газу на відстані  $2\bar{\lambda}$ . Через градієнт швидкості її можна записати так:

$$u_1 - u_2 = \left( \frac{\Delta u}{\Delta z} \right) 2\bar{\lambda}.$$

Виконавши відповідно до цієї рівності заміну у виразі (2), дістанемо

$$\Delta K = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \left( \frac{\Delta u}{\Delta z} \right) S \Delta \tau.$$

Зміна імпульсу за одиницю часу  $\frac{\Delta K}{\Delta \tau}$  визначає силу, що діє на поверхню  $S$ , тобто силу внутрішнього тертя

$$F = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} \left( \frac{\Delta u}{\Delta z} \right) S. \quad (3)$$

Із формул (1) та (3) знайдемо коефіцієнт в'язкості

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \rho \bar{\lambda}. \quad (4)$$

Із дослідів відомо, що з підвищенням температури в'язкість газів зростає. Теоретичний вираз коефіцієнта в'язкості (4) узгоджується

із цим дослідним фактом. Із підвищенням температури збільшується середня швидкість молекул  $\bar{v}$ , тому зростає коефіцієнт в'язкості  $\eta$ . З виразу (4) випливає, що коефіцієнт в'язкості не залежить від тиску, оскільки  $\bar{v}$  не залежить від тиску, а з двох інших співмножників ( $\rho\lambda$ ) перший прямо пропорційний тиску, другий – обернено пропорційний йому, тому добуток їх також не залежить від тиску.

## § 96. Теплопровідність

*Теплопровідністю* називають процес передавання теплоти від шару з вищою температурою до шару з нижчою температурою. У газах за таких умов може виникати також явище *конвекції* – передавання теплоти потоками газу. Щоб продемонструвати теплопровідність ідеального газу, досить узяти газ у циліндричній посудині з ізоляційними стінками, але теплопровідними основами і нагрівати газ зверху. При цьому кожний нижній шар газу матиме нижчу температуру, але відповідно більшу густину; тому конвекційні потоки не виникатимуть.

За законом Фур'є кількість теплоти  $\Delta Q$ , яка переноситься через деяку поверхню  $S$ , перпендикулярну до осі  $Oz$ , пропорційна градієнту температури  $\left(\frac{\Delta T}{\Delta z}\right)$ , площі поверхні  $S$  та часу  $\Delta t$ :

$$\Delta Q = -k \left(\frac{\Delta T}{\Delta z}\right) S \Delta t, \quad (1)$$

де  $k$  – коефіцієнт теплопровідності, що залежить від роду і стану газу. Чисельно він дорівнює кількості теплоти, яка переноситься через одиницю площі за одиницю часу, коли градієнт температури дорівнює одиниці. Коефіцієнт теплопровідності виражають у ватах на метр, помножений на кельвін ( $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ ).

Знак «мінус» у виразі (1) указує на те, що теплота переноситься у напрямі зменшення температури. Явище теплопровідності зумовлює вирівнювання температур.

Із погляду МКТ теплопровідність – це процес перенесення внутрішньої енергії газу з одного шару в інший, що здійснюється унаслідок хаотичного руху молекул газу. Виходячи з цього, визначимо кількість перенесеної енергії та коефіцієнт теплопровідності.

Нехай у середовищі газу існує спад градієнта температури в напрямі осі  $Oz$ . Розглянемо всередині газу деяку поверхню  $S$ , перпендикулярну до осі  $Oz$  (рис. 164). Вважає-

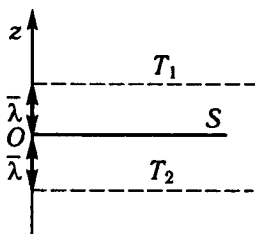


Рис. 164

мо, що вище від цієї поверхні температура газу  $T_1$ , а під поверхнею –  $T_2$ , причому  $T_1 > T_2$ .

Унаслідок хаотичного руху молекул газу через поверхню  $S$  за час  $\Delta t$  зверху вниз і знизу вгору пройде однакова кількість молекул ( $\frac{1}{6} n_0 S \bar{v} \Delta t$ ), але перенесуть вони різну кількість теплоти (енергії): зверху вниз

$$\frac{1}{6} n_0 S \bar{v} \Delta t c_V m T_1,$$

де  $c_V m T_1$  – кількість теплоти, що переноситься однією молекулою верхнього шару ( $c_V$  – питома теплоємність газу при сталому об'ємі,  $m$  – маса молекули), а знизу вгору

$$\frac{1}{6} n_0 S \bar{v} \Delta t c_V m T_2,$$

де  $c_V m T_2$  – кількість теплоти, яка переноситься однією молекулою нижнього шару газу.

Знайдемо результуючу кількість теплоти, що переноситься через поверхню  $S$  за час  $\Delta t$ :

$$\Delta Q = \frac{1}{6} n_0 m \bar{v} c_V (T_1 - T_2) S \Delta t. \quad (2)$$

Із попередніх пояснень (див. § 94) відомо, що  $T_1$  і  $T_2$  слід зараховувати до шарів газу, які містяться із різних боків від поверхні  $S$  на відстані  $\bar{\lambda}$  від неї. Тому  $(T_1 - T_2)$  є різницею температур шарів газу на відстані  $2\bar{\lambda}$ . Через градієнт температури її можна записати так:

$$T_1 - T_2 = \left( \frac{\Delta T}{\Delta z} \right) 2\bar{\lambda}.$$

Виконавши відповідно до цієї рівності заміну у виразі (2), дістанемо

$$\Delta Q = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho c_V \left( \frac{\Delta T}{\Delta z} \right) S \Delta t. \quad (3)$$

Зіставивши вирази (1) та (3), знайдемо *коефіцієнт теплопровідності*

$$k = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho c_V. \quad (4)$$

Коефіцієнт теплопровідності не залежить від тиску, оскільки  $\bar{v}$ ,  $c_V$  і добуток  $\bar{\lambda} \rho$  не залежать від тиску. Коефіцієнт теплопровідності, як і інші коефіцієнти перенесення, зростає з підвищенням температури. Ці результати узгоджуються з дослідними даними.

Зіставивши вирази коефіцієнтів в'язкості та теплопровідності, дістанемо співвідношення

$$k = \eta c_V, \quad (5)$$

яке легко можна перевірити експериментально.

Перевірка засвідчила, що залежність (5) незначно наближається до дослідних даних. Це пояснюється тим, що при виведенні формул робилися спрощення, зокрема розрахунки будувалися на середніх значеннях швидкостей і довжин вільного пробігу молекул, а треба було б враховувати закони розподілу цих величин.

Точніше це співвідношення виражається формулою

$$k = A\eta c_V,$$

де  $A$  – множник, що залежить від природи газу. Для одноатомного газу  $A = 2,5$ , двоатомного –  $1,9$ , трьохатомного –  $1,6$ .

## § 97. Предмет і метод термодинаміки

Термодинаміка виникла з практичних потреб побудови і використання теплових машин. Під термодинамікою розуміли вчення про рушійну силу теплоти, точніше, про умови найефективнішого перетворення теплоти на роботу.

Зміст сучасної термодинаміки значно ширший, вона вивчає найрізноманітніші фізичні й хімічні явища в газах, рідинах та твердих тілах із погляду енергетичних перетворень. Характерно, що в цих процесах інші види енергії можуть повністю перетворюватися на внутрішню, тоді як повне перетворення внутрішньої енергії на іншу неможливе. Пояснюється це тим, що хаотичний рух молекул більш імовірний, ніж напрямлені рухи інших видів енергії, зокрема механічний рух тіла.

Вивчення взаємозв'язку внутрішньої енергії з іншими видами енергії становить основне завдання термодинаміки. Оскільки поняття внутрішньої енергії стосується макроскопічного тіла, звідси випливає, що в термодинаміці розглядається макроскопічне тіло чи система тіл. Мікрооб'єкти у вигляді окремих атомів чи молекул, а також будова речовини і внутрішній механізм явищ у тілах у термодинаміці не розглядаються. Внутрішній механізм явищ, як відомо, розглядають у МКТ. Цим самим термодинаміка та МКТ взаємно доповнюють одна одну.

Об'єкт дослідження у термодинаміці в узагальненому вигляді називають *термодинамічною системою*, під якою розуміють деяку речовину, здебільшого задану параметрами її стану, оскільки вона бере участь у процесах зміни і перетворення енергії.

Розрізняють *гомогенні* та *гетерогенні термодинамічні системи*. Гомогенна система однорідна, її фізичні властивості, а також хімічний склад по всьому об'єму однакові. Нею можуть бути будь-який газ, рідина або аморфне тіло в умовах, коли дією гравітаційного й електромагнітного полів у заданій задачі можна знехтувати. Гетерогенна система неоднорідна, вона складається з гомогенних систем, які називаються її *фазами*. Прикладом такої системи може бути сукупність рідини і її насиченої пари. Далі розглядатимемо



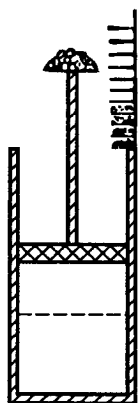


Рис. 165

переважно прості гомогенні системи у стані термодинамічної рівноваги або в рівноважних процесах.

*Рівноважним станом* називають такий стан системи, параметри якої – температура, тиск та об'єм – сталі. Наприклад, у рівноважному стані перебувають: газ у циліндрі під легкорухомим поршнем при незмінних атмосферному тиску і температурі; система вода – пара в закритій посудині при незмінній температурі тощо.

*Рівноважним процесом* називають неперервну послідовність рівноважних станів системи. Такий процес можна здійснити лише в разі нескінченно повільних змін стану системи. Наприклад, якщо з поршня, навантаженого піском (рис. 165), знімати окремі піщинки, то газ у циліндрі під поршнем рівноважно розширюватиметься. Загалом рівноважні процеси є ідеалізованими. Вивчення їх полегшується тим, що вони характеризуються тими самими параметрами, що й рівноважний стан.

Основним у термодинаміці є феноменологічний метод дослідження, тобто метод вивчення явищ із макроскопічного погляду.

У дослідженні окремих процесів або явищ термодинаміка спирається на деякі істини, що є узагальненнями багатовікового наукового та практичного досвіду людства. Вся термодинаміка ґрунтується на логічному і математичному розвитку трьох основних принципів у застосуванні до конкретних процесів та явищ. За допомогою таких досліджень знаходять проміжні закономірності, а також практичні рекомендації. Цим схема досліджень у термодинаміці дуже нагадує схему досліджень окремих процесів і явищ у механіці, де вона ґрунтується на застосуванні трьох законів Ньютона.

## § 98. Основні поняття та означення

Вивчення термодинаміки значно полегшується, якщо правильно засвоїти основні поняття і величини, якими вона оперує. Деякі з них, зокрема поняття теплоти, потребують особливої уваги у зв'язку з тим, що сучасний їхній зміст дещо не відповідає тій термінології, яка залишилася з історичного минулого та яка може призвести до помилкових уявлень про перебіг термодинамічних процесів.

До основних понять і величин у термодинаміці належать внутрішня енергія, робота та кількість теплоти. Розглянемо їх окремо.

**Внутрішня енергія.** Під внутрішньою енергією системи розуміють сумарну енергію всіх видів частинок, з яких складається система. Сюди входять кінетична і потенціальна енергія молекул, енергія коливальних рухів атомів у молекулах, енергія електронних оболонок в атомах та іонах і внутрішньоядерна енергія. До внутрішньої не належить енергія системи як цілого, яку вона може мати внаслідок механічного руху або взаємодії з іншими системами. Інакше кажучи, *внутрішньою енергією* називають сумарну енергію мікрочастинок, з яких складається система. Хоч у термодинаміці поведінку мікрочастинок безпосередньо не розглядають, у прихованій формі їхніми рухами і взаємодіями визначаються розглядувані тут енергетичні явища та процеси. Так, нагрівання тіл зводиться до збільшення енергії хаотичного руху їхніх частинок, явища стиснення і розширення тіл супроводжуються змінами енергії взаємодії частинок тощо.

Внутрішня енергія є функцією стану системи, тобто змінюється зі зміною її стану й *однозначно визначається* тими самими параметрами, що й система. Внутрішня енергія не залежить від способу, яким система переводиться з одного стану в інший. Це впливає із закону збереження і перетворення енергії, бо інакше, якби внутрішня енергія залежала від способу переходу системи з одного стану в інший, це означало б, що можна дістати енергію з нічого.

У термодинаміці практичне значення має не сама енергія, а її зміна з переходом системи з одного стану в інший. У межах термодинамічних процесів внутрішня енергія змінюється тільки завдяки зміні енергії теплового руху частинок речовини та потенціальної енергії взаємодії. Енергія електронних оболонок атомів та іонів і внутрішньоядерна енергія при цьому залишаються незмінними й не становлять будь-якого інтересу. Тому вужче під внутрішньою енергією в термодинаміці розуміють лише сумарну енергію теплового руху частинок речовини та потенціальну енергію взаємодії.

Під тепловою енергією розуміють енергію всіх видів хаотичного руху частинок речовини; тому для реальної системи відокремлювати її від інших частин внутрішньої енергії і недоцільно, і не завжди можливо. Виняток може становити одноатомний ідеальний газ, в якому потенціальна енергія взаємодії атомів дорівнює нулю, через що зміна теплової енергії однозначно визначає зміну внутрішньої енергії. З цих міркувань далі розглядатимемо зміну внутрішньої енергії системи в цілому.

**Робота.** У механіці йшлося про макроскопічну роботу, пов'язану з видимим переміщенням тіл у цілому, та про перетворення механічної енергії на інші види. У термодинаміці поняття роботи набирає ширшого змісту, оскільки стан системи і відповідно її внут-

рішню енергію як функцію стану можна змінювати завдяки виконанню макроскопічної та мікроскопічної роботи. Остання здійснюється без будь-якого видимого переміщення тіл, що взаємодіють. Її інакше називають *теплообміном*.

Наприклад, тиск газу в циліндрі під поршнем і відповідно енергію газу можна збільшити або переміщенням поршня та виконанням макроскопічної роботи над газом, або нагріванням газу при нерухомому поршні, тобто завдяки теплообміну газу з нагрівником через дно або стінки циліндра.

Зауважимо, що хоча кінцевим результатом теплообміну є передавання теплового руху від одного тіла до іншого, все-таки цей процес здійснюється через перетворення одних форм руху на інші й саме тому теплообмін є процесом мікроскопічної роботи. Теплообмін може відбуватися і через дотик тіл, і на відстані за допомогою електромагнітного випромінювання. Останній, наприклад, відбувається між Сонцем та Землею.

**Кількість теплоти.** Макроскопічна робота і теплообмін – способи зміни внутрішньої енергії системи. Кількісною мірою процесу макроскопічної роботи є фізична величина, яка також називається *роботою*, а кількісною мірою процесу теплообміну – величина, що називається *кількістю теплоти*.

Назви цих фізичних величин не можна вважати вдалимими, оскільки вони безпосередньо не вказують на ту величину, зміну якої виражають. Можливо, краще було б просто говорити про зміну внутрішньої енергії у процесах теплообміну та роботи.

Дуже невдалим є термін «кількість теплоти», який залишився з того часу, коли під теплою помилково уявляли деяку гіпотетичну рідину – теплець. Нерідко цей термін уживають неправильно. Особливо треба застерегти від змішування зовсім різних понять – теплової енергії і кількості теплоти. Як відомо, *теплова енергія* – це сумарна енергія теплового руху частинок у тілі, вона є функцією температури. Під *кількістю теплоти* розуміють лише ту частину енергії, яка передається у процесі теплообміну і яка, по суті, не може визначати ні теплової, ні внутрішньої енергії тіла в цілому.

Наприклад, вода та її пара при температурі кипіння мають однакову теплову енергію, хоча для перетворення рідини на пару їй треба надати деякої кількості теплоти. Ця кількість теплоти є мірою збільшення внутрішньої енергії пари, а не теплової енергії системи рідина – пара. До того ж теплова енергія може змінюватися не тільки у процесі теплообміну, а й унаслідок виконання макроскопічної роботи.

Кількість теплоти і робота як величини, що визначають зміну внутрішньої енергії системи, в реальних процесах можуть бути взаємозв'язаними та визначати одна одну.

## § 99. Перший принцип термодинаміки і його методологічне значення

*Перший принцип термодинаміки* виражає закон збереження і перетворення енергії в застосуванні до теплових процесів.

Важливе значення для формулювання цього принципу мали праці російських учених М. В. Ломоносова та Г. І. Гесса. У своїй дисертації «Про причини теплоти і холоду» (1750) М. В. Ломоносов спростував теорію теплецю й розвинув атомно-молекулярне вчення про будову речовини та природу теплоти. Він доводив, що тепловий стан тіла визначається рухом молекул, а механічна енергія тіла може і має переходити у теплову. В 1840 р. російський хімік Г. І. Гесс (1802–1850) виявив, що тепловий ефект реакції залежить від початкового та кінцевого станів речовин, які реагують, а не від проміжних стадій процесу. Закон Гесса, по суті, став окремим виразом першого принципу термодинаміки для випадку хімічних реакцій.

Наступним кроком до формулювання закону збереження енергії були праці німецького вченого Ю. Р. Майєра, в яких він сформулював принцип еквівалентності теплоти і роботи й теоретично визначив механічний еквівалент теплоти (1842).

Принцип еквівалентності теплоти і роботи експериментально підтвердили англійський фізик Дж. П. Джоуль (1818–1889) та російський вчений Е. Х. Ленц (1804–1865) у своїх дослідженнях на початку 40-х років XIX ст. теплової дії електричного струму й у вимірах Дж. П. Джоулем механічного еквівалента теплоти для випадку роботи проти сил тертя. Виявилось, що для всіх випадків механічний еквівалент теплоти дорівнює 4,19 Дж/кал.

У 1847 р. німецький вчений Г. Л. Ф. Гельмгольц опублікував трактат «Про збереження сили», в якому довів, що найрізноманітніші явища у природі підлягають закону збереження енергії і що можна знайти частинні залежності, властиві цим явищам. За такою схемою розвивалася далі термодинаміка.

Зазначимо, що Г. Л. Ф. Гельмгольц розглядав закон збереження енергії лише з кількісного боку. Ширше зміст закону розкрили пізніше філософи-матеріалісти. Оцінюючи закон збереження енергії, вони глибоко висвітлили його якісний бік, а саме той факт, що будь-яка форма руху здатна та змушена перетворюватися на будь-яку іншу форму руху, що єдність усього руху у природі не просто філософське твердження, а природничо-науковий факт.

Для аналітичного виразу першого принципу термодинаміки треба враховувати, що внутрішня енергія системи може змінюватися унаслідок теплообміну або під час виконання роботи. Тому приріст внутрішньої енергії  $\Delta U$  системи дорівнює сумі одержаної кількості теплоти  $Q$  і виконаної над системою роботи  $A$ :

$$\Delta U = Q + A. \quad (1)$$

Ця рівність, складена відповідно до закону збереження енергії, є одним із виразів першого принципу термодинаміки. У цьому виразі всі величини визначаються у СІ в одних і тих самих одиницях – джоулях, тому механічний еквівалент теплоти не використовується.

Із практичних міркувань далі враховуватимемо роботу, виконану системою проти зовнішніх сил. У цьому випадку вираз (1) запишемо так:

$$\Delta U = Q - A, \quad (2)$$

де роботу взято зі знаком «мінус», оскільки після виконання її зменшується енергія системи.

Розв'язавши рівняння (2) відносно  $Q$ , дістанемо вираз, який часто називають виразом першого принципу термодинаміки:

$$Q = \Delta U + A, \quad (3)$$

*тобто кількість теплоти, яку дістає система ззовні, витрачається на збільшення внутрішньої енергії системи і виконання роботи проти зовнішніх сил.*

Із формулювання першого принципу термодинаміки зовсім не випливає, що завжди, коли система дістає певну кількість теплоти, її внутрішня енергія збільшується. Може статися, що система дістає теплоту ззовні, а її внутрішня енергія зменшується. Це буде тоді, коли система виконує роботу, більшу від теплоти, яку вона дістає ( $A > Q$ ), і тому на цю роботу витрачається частково внутрішня енергія. До цього треба також додати, що величини  $Q$  й  $A$  можуть бути і додатними, і від'ємними. Коли  $Q < 0$ , система віддає теплоту; якщо  $A < 0$ , то робота виконується над системою завдяки енергії зовнішніх тіл.

Виконану роботу, або кількість теплоти, яку дістає система в різних процесах, визначають методами диференціального та інтегрального числень. При цьому вказаний процес розбивають на низку елементарних процесів так, щоб до кожного з них можна було застосувати перший принцип термодинаміки в диференціальній формі

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (4)$$

а процес у цілому оцінюють за інтегральною сумою результатів усіх елементарних процесів.

Характерно, що у виразі першого принципу термодинаміки лише внутрішня енергія  $U$  системи є функцією стану, а кількість теплоти  $Q$  і виконана робота  $A$  зокрема не є функціями стану. Ці останні величини взагалі залежать від способу переходу системи з одного стану в інший. Тому у виразі (4)  $dU$  є повним диференціалом, а  $\delta Q$  та  $\delta A$  не є повними диференціалами відповідних величин. Це треба враховувати, інтегруючи окремі складові.

## § 100. Вираз першого принципу термодинаміки для ідеального газу. Застосування принципу до газових процесів

Конкретизуємо вираз першого принципу термодинаміки

$$\delta Q = dU + \delta A$$

стосовно ідеального газу.

Щоб знайти  $dU$ , розглянемо ізохоричний процес ідеального газу. Неважко зрозуміти, що коли газ нагрівається при сталому об'ємі, вся теплота витрачається на збільшення його внутрішньої енергії: газ роботи не виконує (поршень у циліндрі над газом нерухомий). Тому зміна внутрішньої енергії в розрахунку на 1 кмоль газу буде

$$dU = C_V dT, \quad (1)$$

де  $C_V$  – молярна теплоємність газу при сталому об'ємі.

Щоб знайти  $\delta A$ , скористаємося виразом роботи, яка виконується під час розширення газу в ізобаричному процесі:

$$\Delta A = p \Delta V,$$

де  $p$  – зовнішній тиск;  $\Delta V$  – зміна об'єму газу.

Очевидно, у диференціальному вигляді цей вираз роботи можна застосувати до будь-якого газового процесу, оскільки при нескінченно малій зміні об'єму газу тиск можна вважати сталим. Отже, можна прийняти

$$\delta A = p dV. \quad (2)$$

Таким чином, вираз першого принципу термодинаміки для 1 кмоль ідеального газу можна записати так:

$$\delta Q = C_V dT + p dV. \quad (3)$$

Для будь-якої маси  $m$  ідеального газу

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_V dT + p dV, \quad (4)$$

де  $\mu$  – маса 1 кмоль газу, або

$$\delta Q = m c_V dT + p dV, \quad (5)$$

де  $c_V$  – питома теплоємність газу при сталому об'ємі.

У різних газових процесах нас цікавитимуть насамперед робота газу і кількість одержаної ним теплоти. Для їх обчислення скористаємося першим принципом термодинаміки

$$\delta Q = C_V dT + p dV. \quad (6)$$

Зауважимо, що ми розглядатимемо рівноважні процеси в ідеальному газі. Роботу газу та кількість одержаної теплоти обчислимо для 1 кмоль газу. Ці результати легко можна поширити на будь-яку масу газу.

**Ізобаричний процес.** Характеристика процесу:  $p = \text{const}$ ;  $dp = 0$ .

*Робота газу.* Елементарна робота газу

$$dA = p dV.$$

Щоб визначити всю роботу в ізобаричному процесі, проінтегруємо вираз елементарної роботи. При цьому тиск, як сталу величину, винесемо за знак інтеграла:

$$A = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1). \quad (7)$$

Графічно в координатній площині  $p, V$  (рис. 166) робота газу в ізобаричному процесі дорівнює площі прямокутника, обмеженого графіком стану газу (ізобарою), віссю об'ємів й ординатами, що відповідають тиску  $p$  для початкового і кінцевого об'ємів газу.

*Кількість теплоти.* Щоб обчислити кількість теплоти, яку дістає газ в ізобаричному процесі, проінтегруємо вираз (6):

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT + \int_{V_1}^{V_2} p dV = C_V(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1). \quad (8)$$

Якщо відповідно до рівняння Клапейрона–Менделєєва (для 1 кмоль) підставити у (8) вираз

$$p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1),$$

то дістанемо

$$Q = (C_V + R)(T_2 - T_1) = C_p(T_2 - T_1), \quad (9)$$

де  $C_p$  – молярна теплоємність газу при сталому тиску.

Як бачимо, в ізобаричному процесі одержувана кількість теплоти більша від роботи газу; тут частина теплоти витрачається на збільшення внутрішньої енергії газу, температура якого підвищується.

**Ізотермічний процес.** Характеристика процесу:  $T = \text{const}$ ;  $dT = 0$ .

*Робота газу.* Щоб визначити роботу газу інтегруванням виразу елементарної роботи, зведемо спочатку цей вираз до однієї змінної. Визначивши  $p$  з рівняння Клапейрона–Менделєєва для 1 кмоль і під-

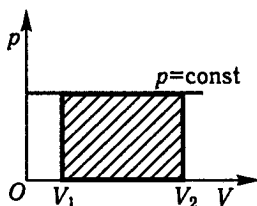


Рис. 166

ставивши його значення у формулу для обчислення роботи, дістанемо

$$\delta A = p dV = RT \frac{dV}{V}.$$

Проінтегрувавши останній вираз, знайдемо

$$A = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (10)$$

Графічно на діаграмі  $p, V$  (рис. 167) робота газу в ізотермічному процесі також дорівнює площі фігури, обмеженої графіком стану газу (ізотермою), віссю об'ємів та ординатами, що відповідають початковому і кінцевому тискам газу.

Замість відношення об'ємів у вираз (10) можна підставити за законом Бойля–Маріотта обернене до нього відношення тисків

$$A = RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

**Кількість теплоти.** Для ізотермічного процесу  $dT = 0$ ; тому  $dU = C_V dT = 0$ , тобто внутрішня енергія ідеального газу в цьому процесі залишається сталою. Застосувавши до цього процесу перший принцип термодинаміки, дістанемо

$$\delta Q = \delta A, \quad Q = A. \quad (11)$$

Отже, в ізотермічному процесі вся теплота, яку дістає газ, витрачається на виконання роботи.

**Ізохоричний процес.** Характеристика процесу:  $V = \text{const}$ ;  $dV = 0$ .

**Робота газу.** Оскільки для ізохоричного процесу  $dV = 0$ , елементарна робота газу дорівнює нулю:

$$\delta A = p dV = 0$$

і робота газу для всього процесу дорівнює нулю:

$$A = 0.$$

**Кількість теплоти.** Застосувавши вираз першого принципу термодинаміки до ізохоричного процесу та врахувавши, що в цьому процесі  $\delta A = 0$ , дістанемо

$$\delta Q = C_V dT.$$

Проінтегрувавши цей вираз з умовою, що зміною теплоємності

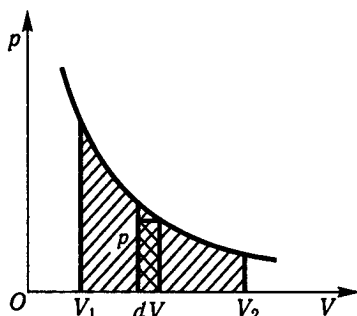


Рис. 167



газу зі зміною температури можна знехтувати, знайдемо

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = C_V (T_2 - T_1). \quad (12)$$

В ізохоричному процесі вся теплота, яку дістає газ, витрачається на збільшення його внутрішньої енергії; при цьому температура газу підвищується.

**Приклад 1.** Турбогенератор потужністю 3000 кВт охолоджується проточним повітрям. Які об'єми повітря мають входити у генератор і виходити з нього протягом 1 с, якщо коефіцієнт корисної дії генератора дорівнює 94 %, температура вихідного повітря з генератора не повинна перевищувати 50 °С, температура в машинному залі 20 °С, а тиск повітря 99,75 кПа?

*Розв'язання.* Шукані об'єми можна визначити за такими залежностями:

$$V_1 = \frac{m}{\rho_1}; \quad V_2 = \frac{m}{\rho_2}, \quad (13)$$

де  $\rho_1$  та  $\rho_2$  – густини відповідно вхідного і вихідного повітря;  $m$  – маса проточного повітря за 1 с.

Густини знаходимо за формулами

$$\rho_1 = \frac{\mu p}{RT_1}; \quad \rho_2 = \frac{\mu p}{RT_2}.$$

Із виразів (13) потрібно визначити  $m$ ; для цього до проточного повітря застосуємо перший принцип термодинаміки. Враховуючи, що кількість теплоти, яку одержує повітря у процесі теплообміну з генератором, – це втрати енергії генератора і що у проточному повітрі відбувається ізобаричний процес, можна записати

$$(1 - \eta) N \tau = C_V \frac{m}{\mu} (T_2 - T_1) + p (V_2 - V_1) = C_p \frac{m}{\mu} (T_2 - T_1),$$

$$\text{звідки } m = \frac{(1 - \eta) N \tau \mu}{C_p (T_2 - T_1)}.$$

Перейшовши до рівностей (13), знайдемо

$$V_1 = \frac{(1 - \eta) N \tau R}{p C_p} \frac{T_1}{T_2 - T_1}; \quad V_2 = \frac{(1 - \eta) N \tau R}{p C_p} \frac{T_2}{T_2 - T_1};$$

$$V_1 \approx 5 \text{ м}^3; \quad V_2 \approx 5,5 \text{ м}^3.$$

**Приклад 2.** Деяка маса азоту при тиску 101 кПа мала об'єм 5 л, а при тиску 303 кПа – об'єм 2 л. Перехід від першого етапу до другого відбувався спочатку по ізохорі, а потім по ізобарі. Визначити зміну внутрішньої енергії, кількість теплоти і виконану роботу.

**Розв'язання.** Зміна внутрішньої енергії газу залежить від його температури:

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1).$$

Виразивши температуру за рівнянням стану газу, дістанемо

$$\Delta U = \frac{C_V}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1); \Delta U = 250 \text{ Дж.}$$

Неважко бачити, що в ізохоричному процесі робота дорівнює нулю; отже, в цілому вона визначається в ізобаричному процесі, тобто

$$A = p_2 (V_2 - V_1); A = -900 \text{ Дж.}$$

Кількість теплоти, витраченої під час переходу до нового стану газу,

$$\Delta Q = \Delta U + A; \Delta Q = -650 \text{ Дж.}$$

**Приклад 3.** У циліндрі під поршнем знаходиться у замкненому об'ємі повітря. Яка робота має бути виконана для того, щоб підняти поршень на висоту  $h_1 = 10$  см, якщо висота стовпа повітря  $h_0 = 15$  см і зовнішній тиск  $p_0 = 101,3$  кПа. Площа поршня  $S = 10$  см<sup>2</sup>. Масою поршня можна знехтувати. Температура залишається незмінною.

**Розв'язання.** Під час підняття поршня виконуватиметься робота проти надлишкового зовнішнього тиску  $p' = p_0 - p$ , тобто

$$dA = (p_0 - p)dV = p_0 dV - p dV,$$

де перша складова – робота в ізобаричному процесі, а друга – робота в ізотермічному процесі газу під поршнем.

Згідно з умовою шукана робота

$$A = p_0 (V_1 - V_0) - p_0 V_0 \ln \frac{V_0 + V_1}{V_0}.$$

Остаточно

$$A = p_0 S \left( h_1 - h_0 \ln \frac{h_0 + h_1}{h_0} \right); A = 2,37 \text{ Дж.}$$

## § 101. Адіабатичний процес. Рівняння Пуассона

Процес, що відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем, називається *адіабатичним*. Характеристика процесу:

$$\delta Q = 0.$$

Застосувавши до адіабатичного процесу перший принцип термодинаміки, дістанемо

$$0 = dU + \delta A,$$

звідки

$$\delta A = -dU,$$

тобто в адіабатичному процесі робота виконується лише завдяки внутрішній енергії системи.

Для ідеального газу (1 кмоль)

$$\delta A = -C_V dT, \quad (1)$$

тобто коли газ виконує роботу проти зовнішніх сил у процесі адіабатичного розширення, то температура газу знижується. Навпаки, у процесі адіабатичного стиснення, коли робота виконується над газом, його температура підвищується.

Очевидно, щоб виключити теплообмін і здійснити адіабатичний процес, треба було б термодинамічну систему оточити нетеплопровідною стінкою. У природі таких стінок не існує, але створюються подібні умови, в яких відбуваються процеси, дуже близькі до адіабатичних.

Адіабатичні процеси відіграють важливу роль у природі та техніці. Те, що в атмосфері верхні шари холодніші від нижчих у супереч дії конвекції, а також утворенню хмар та туманів, можна пояснити, врахувавши процес адіабатичного розширення повітря в атмосфері. Величезні маси повітря, нагріваючись біля поверхні Землі та піднімаючись угору, потрапляють в область усе нижчих тисків і розширюються (рис. 168). Цей процес адіабатичний, оскільки через погану теплопровідність повітря теплообміном можна знехтувати. Виконуючи роботу розширення проти зовнішнього тиску, повітря охолоджується, а водяна пара перетворюється на насичену й конденсується.

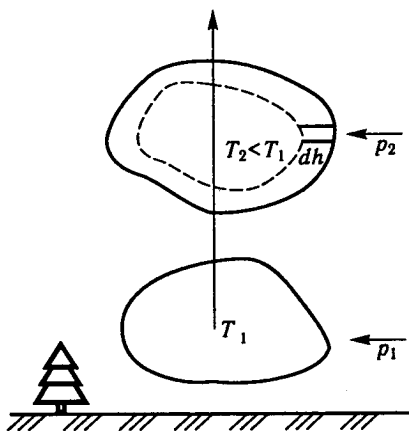


Рис. 168

Згущення і розрідження, що утворюються у звуковій хвилі в газах, – це також, по суті, процеси адіабатичного стиснення і розширення газу. Оскільки звук має велику швидкість (у повітрі – 340 м/с), процеси тут відбуваються так швидко, що за цей короткий час теплообміном можна знехтувати.

Усі процеси, що відбуваються дуже швидко, наближаються до адіабатичних. У таких умовах, зокрема, здійснюються адіабатичні процеси в теплових машинах, які роз-

глядатимемо пізніше. Адіабатичне стиснення повітря та нагрівання його внаслідок цього добре спостерігаються навіть у ручних насосах під час нагнітання велосипедної камери.

В адіабатичному процесі одночасно змінюються усі три параметри газу:  $V$ ,  $p$ ,  $T$ , залежність між якими виражає рівняння Клапейрона–Менделєєва. Додатково для адіабатичного процесу справджується рівняння Пуассона, яке виражає залежність між тиском і об'ємом газу в цьому процесі. Щоб знайти його, застосуємо до адіабатичного процесу ідеального газу перший принцип термодинаміки:

$$0 = C_V dT + pdV.$$

Виключивши з цього виразу  $dT$  за рівнянням Клапейрона–Менделєєва

$$pV = RT,$$

тобто

$$dT = \frac{1}{R}(pdV + Vdp),$$

дістанемо

$$\frac{C_V}{R}(pdV + Vdp) + pdV = 0.$$

Підставивши з рівняння Майєра  $R = C_p - C_V$ , поділимо чисельник та знаменник дроби перед дужками на  $C_V$  і позначимо  $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$ . Після цього матимемо

$$\frac{1}{\gamma - 1}(pdV + Vdp) + pdV = 0,$$

звідки

$$Vdp + \gamma pdV = 0.$$

Якщо почленно поділити цей вираз на добуток  $pV$ , то дістанемо

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

Проінтегрувавши це рівняння, матимемо

$$\ln p + \gamma \ln V = \ln C, \quad (2)$$

де  $C$  – стала інтегрування.

Якщо пропотенціювати останній вираз, то дістанемо рівняння Пуассона

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (3)$$

де  $\gamma$  залежить від роду газу (для повітря  $\gamma = 1,42$ ).

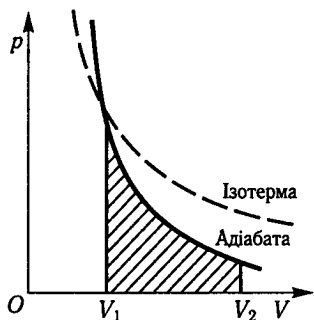


Рис. 169

Графічно на діаграмі  $p, V$  адиабатичний процес зображується кривою, яка називається *адиабатою* (рис. 169). Тому рівняння (3) інакше називають *рівнянням адиабати*. Порівняно з ізотермою адиабата є гіперболою вищого порядку, вона крутіша від ізотерми.

Наведемо ще деякі інші формули для обчислення роботи газу в адиабатичному процесі.

За першим принципом термодинаміки для адиабатичного процесу ідеального газу маємо

$$dA = -C_V dT;$$

$$A = C_V (T_1 - T_2). \quad (4)$$

Якщо за рівнянням Клапейрона–Менделєєва визначити температуру і підставити її значення у вираз (4), то дістанемо

$$A = \frac{C_V}{R} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2). \quad (5)$$

Якщо проінтегрувати вираз елементарної роботи газу, зводячи при цьому його до однієї змінної виключенням тиску за рівнянням Пуассона, то матимемо

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^\gamma dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} \right]. \quad (6)$$

Графічно робота газу в адиабатичному процесі визначається площею так само, як і в інших процесах (див. рис. 169).

## § 102. Внутрішня енергія ідеального газу. Розподіл енергії за ступенями вільності

Під *внутрішньою енергією газу* в термодинаміці розуміють сумарну енергію молекул, з яких складається газ. Сюди входять кінетична енергія хаотичного руху молекул та потенціальна енергія взаємодій молекул. Для ідеального газу, силами взаємодій між молекулами якого можна знехтувати, взаємна потенціальна енергія молекул дорівнює нулю. Отже, внутрішня енергія ідеального газу складається із суми кінетичної енергії молекул.

Ми уже знайшли формулу для обчислення середньої кінетичної енергії поступального руху молекули

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}kT. \quad (1)$$

Однак кінетична енергія молекули – це не тільки енергія її поступального руху, вона може включати ще й енергію обертального руху молекули та енергію коливальних рухів її атомів. Для визначення енергії всіх видів руху молекули використовують поняття ступеня вільності молекули і принцип рівномірного розподілу енергії молекули за ступенями її вільності.

Числом ступенів вільності системи називають найменшу кількість незалежних координат, що визначають положення системи у просторі. Наприклад, положення матеріальної точки у просторі повністю визначається трьома координатами:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  у декартовій системі та  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  – у сферичній (рис. 170). Матеріальна точка має три ступені вільності поступального руху. Система з двох незалежних точок має шість ступенів вільності, а з двох жорстко зв'язаних точок, коли відстань  $l$  між точками незмінна, – п'ять ступенів вільності, бо, як відомо, шосту координату можна визначити із співвідношення

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.$$

Із погляду кінетики ступені вільності двох жорстко зв'язаних точок зводяться до трьох поступальних рухів центра мас  $C$  системи і двох обертальних рухів навколо взаємно перпендикулярних осей  $CO'$  та  $CO''$ , нормальних до  $l$  (рис. 171). Обертання двох матеріальних точок навколо їхньої осі не має сенсу.

Система з трьох і більше жорстко зв'язаних матеріальних точок (з нелінійним розміщенням) має шість ступенів вільності – три

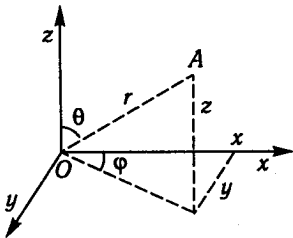


Рис. 170

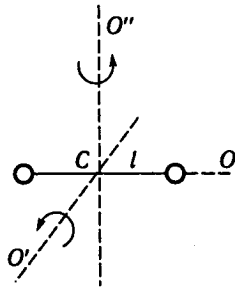


Рис. 171

ступені вільності поступального руху центра мас та три ступені вільності обертального руху (відповідно до можливих трьох взаємно перпендикулярних осей).

Визначаючи ступені вільності молекул газу, враховують таке. Оскільки маса атома зосереджена в ядрі, розміри якого дуже малі навіть порівняно з розмірами атома (розміри ядра  $10^{-15}$  м, а розміри атома з урахуванням електронної оболонки  $10^{-10}$  м), атом слід розглядати як матеріальну точку. Молекули у першому наближенні можна вважати системою жорстко зв'язаних матеріальних точок – атомів. Тому одноатомна молекула газу має три ступені вільності, двоатомна – п'ять, багатоатомна – шість ступенів вільності.

Одним з основних положень МКТ газів є визнання хаотичності поступальних, обертальних, коливальних рухів молекул і того, що жодному з цих рухів не можна надати переваги. Тому при обчисленні енергії всіх видів руху молекули природно вважати, що кінетична енергія молекули рівномірно розподіляється за ступенями вільності всіх її рухів. У цьому суть принципу рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності, введеного Дж. К. Максвеллом у статистичну фізику.

На кожний ступінь вільності молекули у середньому припадає однакова кількість енергії, яку можна визначити з рівняння (1):

$$\bar{\omega}_0 = \frac{1}{2} kT. \quad (2)$$

Енергія молекули, що має  $i$  ступенів вільності,

$$\bar{\omega} = \frac{i}{2} kT. \quad (3)$$

Помноживши середню кінетичну енергію молекули на сталу Авогадро, знайдемо внутрішню енергію 1 кмоль газу

$$U = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT. \quad (4)$$

Як бачимо, внутрішня енергія ідеального газу залежить від числа ступенів вільності його молекул (роду газу) та абсолютної температури газу, точніше внутрішня енергія ідеального газу певної маси не залежить від його об'єму і тиску, а є функцією абсолютної температури газу.

Щоб обчислити внутрішню енергію реального газу, тобто газу за умов, коли істотно виявляються взаємодії молекул, до кінетичної енергії треба додати потенціальну енергію молекул. Внутрішня енергія реального газу залежить від температури й об'єму газу. Додамо, що для реальних газів принцип рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності недостатній. Він не охоплює всіх особливостей внутрішньої будови газу, зокрема молекулярних взаємодій.

### § 103. Молекулярна теорія теплоємностей газів

*Теплоємність* – фізична величина, яка дорівнює тій кількості теплоти, яку треба надати тілу, щоб змінити його температуру на один градус. Теплоємність тіла обчислюють за формулою

$$c = \frac{\delta Q}{dT}, \quad (1)$$

де  $\delta Q$  – кількість теплоти, наданої тілу;  $dT$  – підвищення температури тіла.

В обчисленнях кількості теплоти та для характеристики різних речовин користуються питомою або молярною теплоємністю.

*Питома теплоємність* чисельно дорівнює тій кількості теплоти, яка потрібна для зміни температури 1 кг речовини на один градус; позначається літерою  $c$ .

*Молярна теплоємність* чисельно дорівнює тій кількості теплоти, яка потрібна для зміни температури 1 кмоль речовини на один градус; позначається літерою  $C$ .

Молярна і питома теплоємності перебувають у такому співвідношенні:

$$c = \frac{C}{\mu}, \quad (2)$$

де  $\mu$  – маса 1 кмоль речовини.

В одиницях СІ питома теплоємність виражається у Дж/(кг · К), молярна теплоємність – у Дж/(моль · К).

Теплоємність тіла взагалі залежить від умов, у яких нагрівається тіло. Для газів насамперед треба розрізнити теплоємність при сталому об'ємі  $c_V$  і теплоємність при сталому тиску  $c_p$ . Якщо тіло нагрівається при незмінному об'ємі, то вся теплота, що надається тілу, витрачається на збільшення його внутрішньої енергії:  $(\delta Q)_V = dU$ . Тому теплоємність будь-якого тіла при сталому об'ємі

$$c_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (3)$$

У разі нагрівання газу при сталому тиску теплота, що надається газу, частково йде на збільшення його внутрішньої енергії, а частково – на виконання роботи проти зовнішніх сил під час розширення газу. З цих причин теплоємність газу *при сталому тиску* більша від теплоємності газу *при сталому об'ємі* на значення зовнішньої роботи, яку газ виконує, розширюючись від нагрівання на один градус:

$$c_p = c_V + A. \quad (4)$$



Для 1 кмоль газу робота розширення при ізобаричному нагріванні газу на 1 К чисельно дорівнює універсальній газовій сталій:  $A = R$ . Підставивши це значення у вираз (4), дістанемо співвідношення між молярними теплоємностями газу при сталих тиску й об'ємі:

$$C_p = C_V + R. \quad (5)$$

Це співвідношення називають *рівнянням Майєра* і записують так:

$$C_p - C_V = R. \quad (6)$$

Крім значень теплоємностей газу  $C_p$  та  $C_V$ , важливу роль у газових процесах відіграє їх відношення

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}. \quad (7)$$

Такі загальні означення і залежності, що стосуються теплоємності ідеального газу.

Застосовуючи статистичний метод до вивчення теплових явищ, удалося теоретично обчислити теплоємність газів. Диференціюючи рівняння внутрішньої енергії 1 кмоль ідеального газу

$$U = \frac{i}{2} RT,$$

можна знайти молярну теплоємність газу при сталому об'ємі, а саме:

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad (8)$$

де  $i$  – число ступенів вільності молекули газу.

Знаючи теплоємність при сталому об'ємі, з рівняння Майєра (5) знаходимо молярну теплоємність газу при сталому тиску

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (9)$$

Із виразів (8) та (9) відношення теплоємностей

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (10)$$

Беручи до уваги, що  $R = 8,32 \cdot 10^3$  Дж/(кмоль · К), за формулами (8) – (10) можна обчислити теплоємності газів  $C_V$  і  $C_p$  та їх відношення  $\gamma$ , а саме:

для одноатомних газів ( $i = 3$ )

$$C_V = \frac{3}{2} R, \quad C_p = \frac{5}{2} R, \quad \gamma = \frac{5}{3} = 1,67;$$

для двохатомних газів ( $i = 5$ ).

$$C_V = \frac{5}{2}R, C_p = \frac{7}{2}R, \gamma = \frac{7}{5} = 1,40;$$

для багатоатомних газів ( $i = 6$ )

$$C_V = \frac{6}{2}R, C_p = \frac{8}{2}R, \gamma = \frac{8}{6} = 1,33.$$

Щоб оцінити теорію, порівняємо обчислені значення з вимірними за нормальних умов (табл. 6).

Із табл. 6 випливає, що для одно- і двохатомних газів теоретичні значення теплоємності дуже близькі до дослідних. Для багатоатомних газів спостерігаються значні розходження теоретичних даних із дослідними. Значно більші дослідні значення теплоємностей дають підставу думати, що багатоатомним молекулам властиві ще ступені вільності коливальних рухів, які не враховувалися у теорії.

Наближений характер класичної теорії теплоємності виявляється також у тому, що за теорією значення теплоємностей, наприклад двохатомних газів, мають бути однаковими, кратними  $\frac{1}{2}R$ , а насправді вони трохи інші. Ці відхилення перевищують можливі похибки вимірів, а отже, вони реальні.

Розходження теорії з дослідними даними ще виразніші за високих та низьких температур. За теорією теплоємність газів не по-

Таблиця 6

Газ	$i$	$C_V \cdot 10^3$ Дж/(кмоль · К)		$C_p \cdot 10^3$ Дж/(кмоль · К)		$\gamma$	
		Теоретичні дані	Дослідні дані	Теоретичні дані	Дослідні дані	Теоретичні дані	Дослідні дані
Гелій	3	12,48	12,48	20,80	20,95	1,67	1,67
Неон	3		12,45		20,95		1,67
Водень	5	20,80	20,32	29,12	28,62	1,40	1,41
Кисень	5		20,99		29,12		1,39
Діоксид вуглецю	6	24,96	27,57	33,28	35,86	1,33	1,30
Пара води	6		25,22		33,52		1,33
Пара бензолу							
$C_6H_6$	6		65,41		73,74		1,13
Пара спирту							
$C_2H_5OH$	6		61,78		70,14		1,13

винна залежати від температури, а насправді з підвищенням температури вона зростає, з пониженням – спадає.

Нижче наведено деякі значення теплоємностей водню за різних температур:

$T, K$	$C_V \cdot 10^3,$ Дж/(кмоль · К)
273	20,32
197	18,35
90	13,61
40	12,48

Графічно ця залежність виражається характерною східчастою кривою (рис. 172), на якій чітко виділяються ділянки (паралельні осі температур) сталої теплоємності, незалежної від температури. На ділянці, що відповідає області низьких температур, теплоємність водню  $C_V = \frac{3}{2}R$ , середніх температур –  $C_V = \frac{5}{2}R$ , а високих –  $C_V = \frac{7}{2}R$ . Виходить, що в деякій області низьких температур молекули водню поводять себе як системи, які мають ступені вільності поступального руху; при середніх температурах виникають оберտальні рухи молекул, при вищих – виявляються ще коливальні рухи атомів молекул. Зауважимо, що на коливальний рух по одній осі припадає два ступені вільності – один на кінетичну енергію та один – на потенціальну.

Графік залежності теплоємності газу від температури демонструє, що класична теорія теплоємності справджується лише в окремих інтервалах середніх температур.

Відхилення від класичної теорії теплоємності свідчать про існування складніших закономірностей у поведінці атомів і молекул, таких, які виходять за межі класичних. Вони відображені у квантовій фізиці.

У класичній теорії вважали, що енергія  $\omega_0$ , яка припадає на будь-який ступінь вільності, може змінюватися неперервно. Насправді виявилось, що енергія оберտального та коливального рухів молекул квантована, тобто вона може набувати лише окремих (дискретних) значень, а отже, може змінюватися тільки певними порціями – квантами, стрибкоподібно. Неперервно може змінюватися тільки енергія поступального руху молекул.

Енергію кванта визначають за формулою  $\epsilon = h\nu$ , де  $h$  – стала

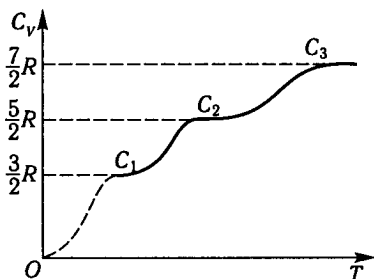


Рис. 172

Планка,  $\nu$  – частота обертового або коливального руху. Кванти енергії можуть бути різними за значенням. Однак істотно, що кванти енергії обертового руху приблизно у 10 разів менші від квантів енергії коливального руху атомів молекули (у стільки разів частота обертання менша від частоти коливання молекули). Це означає, що легше збуджуються обертові рухи молекул, ніж коливальні.

Збудження обертового і коливального рухів залежить від середньої енергії молекул  $\bar{\omega}$ , а отже, від температури. Якщо вона настільки низька, що середня енергія молекул значно менша від енергії кванта збудження обертового руху ( $\bar{\omega} \ll \epsilon_{об}$ ), то практично існують лише поступальні рухи молекул. Теплоємність газу

$$C_V = \frac{3}{2}R \text{ (ділянка } C_1 \text{ на рис. 172).}$$

Відповідно до закону розподілу молекул за енергією з підвищенням температури газу все більша їх кількість приводиться в обертання. У деякому інтервалі температур усі молекули перебуватимуть в обертових і поступальних рухах. Теплоємність двохатомного газу  $C_V = \frac{5}{2}R$  (ділянка  $C_2$  на рис. 172). У разі значно вищих температур усе більше атомів молекул приводиться у коливальні рухи, тому теплоємність газу зростає.

Зауважимо, що кванти енергії коливальних рухів у складних молекул менші, ніж у двохатомних; у багатоатомних газах коливальні рухи істотно виявляються уже при кімнатній температурі.

Тому теплоємності  $C_V$  таких газів значно більші від  $\frac{5}{2}R$ .

## § 104. Оборотні та необоротні процеси

Наслідуючи німецького фізика Р. Ю. Е. Клаузіуса (1822–1888), термодинамічні процеси поділяють на два види.

До процесів першого виду відносять такі, які відбуваються «самі по собі». Такими, наприклад, є перехід теплоти від тіла з вищою температурою до тіла з нижчою температурою, зниження центра мас системи, перетворення механічного руху на тепловий. Ці процеси називають *природними*.

До процесів другого виду належать такі, які «самі по собі» не відбуваються; для їх здійснення треба використати додатково процеси першого виду. Такими є передавання теплоти від менш нагрітого тіла до більш нагрітого, підвищення центра мас системи, перетворення теплового руху на механічний тощо. Ці процеси називають *штучними*.

У природі процеси першого виду ніби переважають над процесами другого виду; інакше кажучи, у природі спостерігається

певна спрямованість у термодинамічних процесах, яка веде до стану рівноваги.

Поділ процесів на природні та штучні у термодинаміці тісно пов'язаний з поняттям оборотних і необоротних процесів.

*Оборотним* називають такий процес, який може відбуватися в обох напрямках. Після завершення такого процесу у прямому і зворотному напрямках система повертається у початковий стан й у навколишньому середовищі не залишається ніяких слідів. Якщо процес не має перелічених вище ознак, то його називають *необоротним*.

Оборотні процеси – ідеалізовані, до них реальні процеси лише наближаються. Так, механічні процеси були б оборотними, якби не було тертя і механічна енергія не перетворювалася на внутрішню. Наприклад, коливання маятника в безповітряному просторі можна було б вважати оборотним процесом, але у повітрі коливання маятника зумовлюють нагрівання середовища, залишають слід; тому це процес необоротний.

Усі реальні процеси, що супроводяться тертям, теплопровідністю або випромінюванням, є необоротними. Докладніше необоротні процеси розглянемо далі.

## § 105. Колові процеси. Принцип дії теплової і холодильної машин

У теорії та на практиці побудови теплових машин важливе значення мають колові процеси (цикли). *Циклом* називають таку послідовність процесів, після завершення якої система знову повертається у свій початковий стан. На повторенні відповідних циклів ґрунтується неперервна дія кожної теплової машини. Тому в колових процесах нас цікавитиме насамперед робота, яку виконує система після завершення циклу. Речовину, над якою здійснюється коловий процес, називають *робочим тілом*.

Графічно на діаграмі  $p, V$  цикл зображується деякою замкненою кривою  $ABCD A$  (рис. 173). У першій частині циклу, коли розширюється речовина, система виконує позитивну роботу; чисельно вона дорівнює площі фігури  $V_1 ABCV_2$ . У другій частині циклу, коли стискається речовина, система виконує негативну роботу. Інакше кажучи, робота виконується над системою, чисельно вона дорівнює площі фігури  $V_2 CDA V_1$ . Механічна робота, виконана системою після завершення циклу, чисельно дорівнює площі фігури  $ABCD A$ .

Застосуємо до циклу перший принцип термодинаміки:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

Звідси знайдемо, що оскільки система приведена у свій початковий стан, її внутрішня енергія стала такою самою, тобто  $\Delta U = 0$ . Тому робота системи за цикл виконується завдяки кількості теплоти, одержаної ззовні.

Машина, що виконує роботу завдяки кількості теплоти, яку дістає ззовні, називається *тепловою*.

Спочатку може здатися, що перетворення теплоти на механічну роботу – простий процес, який може здійснюватися між нагрівником, що постачає теплоту, і робочим тілом, яке повністю перетворює теплоту на механічну роботу. Проте сам процес передавання теплоти від нагрівника до робочого тіла, наприклад процес теплопровідності, не супроводиться виконанням роботи (при цьому тіла не переміщуються). Робота може виконуватися унаслідок взаємодії робочого тіла з іншим тілом. Завдяки цій взаємодії відбувається також стиснення робочого тіла у другій частині циклу. Далі буде з'ясовано, що здійснити такий циклічний процес, при якому теплота, забрана від нагрівника, повністю перетворюється на механічну роботу, взагалі неможливо.

Неважко переконатися, що при здійсненні циклу у зворотному напрямі, тобто у напрямі  $ADCBA$  (див. рис. 173), машина «споживатиме» певну роботу ззовні. Результатом її дії відповідно до першого принципу термодинаміки буде передавання робочим тілом теплоти зовнішнім тілам. За таким принципом працює холодильна машина.

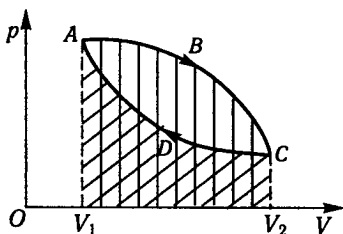


Рис. 173

## § 106. Цикл Карно

Питання щодо створення найефективнішої теплової машини вперше порушив і вирішив французький вчений Н. Л. С. Карно (1796–1832). У праці «Міркування про рушійну силу вогню», опублікованій у 1824 р., він проаналізував роботу ідеальної теплової машини (пізніше її цикл назвали *циклом Карно*) та визначив коефіцієнт її корисної дії. Н. Л. С. Карно довів, що навіть в ідеальних умовах не може бути такої періодично діючої машини, яка, дістаючи теплоту від нагрівника, повністю перетворювала б її на механічну роботу – обов'язково частина цієї теплоти передається холодильнику.

*Холодильником* називають тіло, яке має значно нижчу температуру, ніж нагрівник, і контактує з робочим тілом машини.

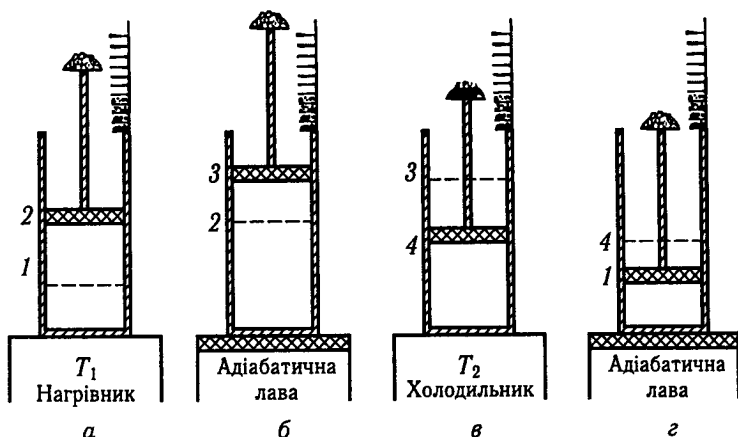


Рис. 174

Розглянемо докладніше цикл Карно. Робочим тілом у машині Карно є ідеальний газ. Цикл здійснюється у циліндрі, стінки та поршень якого нетеплопровідні, дно циліндра теплопровідне. Саме через дно циліндра газ приводиться у тепловий контакт із нагрівником і холодильником (рис. 174). Останні є тілами дуже великої теплоємності, тому під час циклу їхня температура залишається сталою: нагрівника –  $T_1$ , холодильника –  $T_2$ . Дно циліндра можна зробити нетеплопровідним, поставивши циліндр на адіабатичну лаву.

Цикл Карно складається із двох ізотермічних та двох адіабатичних процесів ідеального газу (рис. 175). Звичайно, йдеться про рівноважні процеси, які, наприклад, можна здійснити зніманням піщинок із навантаженого поршня на бічні полиці або перенесенням піщинок із полиць на поршень (схема Б. К. Млодзєєвського).

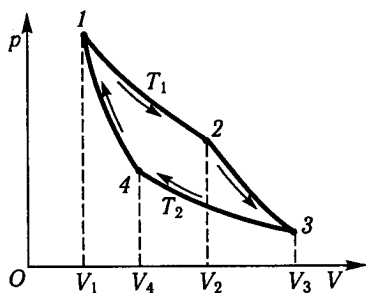


Рис. 175

На ділянці 1–2 відбувається ізотермічне розширення газу. При цьому циліндр перебуває в контакті з нагрівником  $T_1$ , із поршня піщинки переносяться на полиці (рис. 174, а). Газ виконує роботу завдяки теплоті  $Q_1$ , яку він дістає від нагрівника (умови ідеальні); на цій ділянці вся теплота перетворюється на механічну роботу.

На ділянці 2–3 відбувається адіабатичне розширення газу.

Циліндр знаходиться на адіабатичній лаві, піщинки переносяться із поршня на полиці (рис. 174, б). Газ виконує роботу завдяки внутрішній енергії, тому його температура знижується до  $T_2$ .

На ділянці 3–4 здійснюється ізотермічне стиснення газу. Циліндр перебуває в контакті з холодильником  $T_2$ , піщинки переносяться із полиць на поршень (рис. 174, в). Робота виконується над газом, газ передає кількість теплоти  $Q_2$  холодильнику; тому температура газу залишається незмінною –  $T_2$ .

На ділянці 4–1 здійснюється адіабатичне стиснення газу. Циліндр знаходиться на адіабатичній лаві, піщинки переносяться із полиць на поршень (рис. 174, г). Робота виконується над газом, завдяки їй внутрішня енергія газу збільшується, температура газу підвищується від  $T_2$  до  $T_1$ . Газ переходить у початковий стан.

Отже, робота, виконана газом на ділянках 1–2 і 2–3, більша від роботи, витраченої на стиснення газу на ділянках 3–4 та 4–1, на значення площі циклу. Теплоти забрано від нагрівника більше, ніж віддано холодильнику. Різниця  $Q_1 - Q_2$  визначає ту кількість теплоти, яка перетворилася на роботу циклу. Ознакою цієї роботи є пісок, що залишився на полицях над поршнем.

Аналогічно можна здійснити цикл Карно у зворотному напрямі: 1–4–3–2–1. У результаті від холодильника було б забрано теплоту  $Q_2$ , а передано нагрівнику теплоту  $Q_1$  ( $Q_1 > Q_2$ ). Завдяки роботі, виконаній над газом, нагрівник дістав би теплоти на  $Q_1 - Q_2$  більше, ніж забрано від холодильника. Отже, можна передавати теплоту також від холодного до гарячого тіла, але для цього треба витратити певну роботу. На цьому ґрунтується робота холодильної машини.

Після здійснення прямого і зворотного циклів Карно у природі не залишилося б ніяких слідів (весь пісок був би на поршні, а полиці були б чисті). Цикл Карно є оборотним, тобто складається з оборотних процесів.

### § 107. Коефіцієнт корисної дії теплової машини

*Коефіцієнтом корисної дії* теплової машини називають відношення тієї частини теплоти, яка перетворюється на механічну роботу, до всієї кількості теплоти, забраної від нагрівника:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad (1)$$

де  $Q_1$  – кількість теплоти, забраної від нагрівника;  $Q_2$  – кількість теплоти, переданої холодильнику.



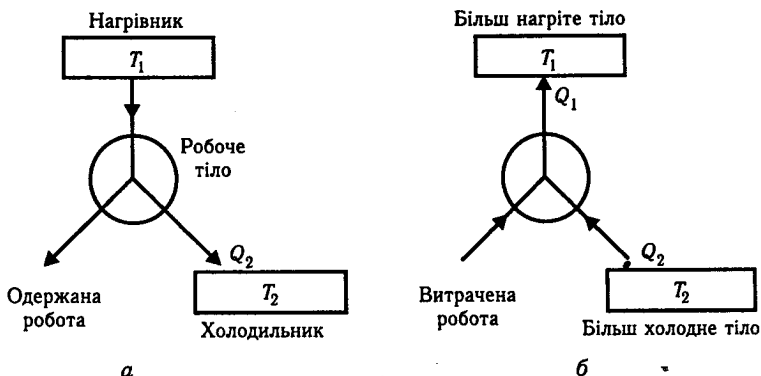


Рис. 176

Оскільки вище розглядався цикл Карно, робочим тілом в якому використовувався ідеальний газ, для вірогідності одержаних результатів необхідно довести справедливості теорем Карно. Для полегшення їх доведення будемо посилаватися на графічні відображення теплової і холодильної машин, що працюють між заданими температурами нагрівника  $T_1$  (рис. 176, а) та холодильника  $T_2$  (рис. 176, б).

**Перша теорема Карно.** Коефіцієнт корисної дії розглянутого циклу не залежить від виду речовини, з якою здійснюється процес.

Доведення теореми ґрунтується на другому принципі термодинаміки і побудоване за методом від супротивного.

Припустимо, що в машині з деяким іншим робочим тілом коефіцієнт корисної дії більший, ніж у машині Карно з ідеальним газом:  $\eta' > \eta$ .

Нехай обидві машини беруть від нагрівника однакову кількість теплоти  $Q'_1 = Q_1$ ; тоді при  $\eta' > \eta$  з урахуванням їхніх виразів

$$\eta' = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1}; \quad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1};$$

$$A' = Q'_1 - Q'_2; \quad A = Q_1 - Q_2,$$

де  $A' > A$ , тобто перша машина більшу кількість теплоти перетворює на роботу (очевидно,  $Q_2 > Q'_2$ ).

Покажемо, що це неможливо. Створимо машини і примусимо першу працювати як теплову машину, а другу (машину Карно) – як холодильну (рис. 177).

Підіб'ємо підсумки роботи обох машин після завершення циклу. Нагрівник віддав й одержав однакову кількість теплоти  $Q'_1 = Q_1$ ;

отже, його стан змінився. Холодильник одержав кількість теплоти  $Q'_2$ , а віддав більшу кількість теплоти  $Q_2$ , тобто втратив кількість теплоти  $Q_2 - Q'_2$ . Завдяки цій теплоті одержується еквівалентна робота  $A' - A$ , причому без будь-яких інших змін. Це суперечить істині, тому наше припущення було неправильним.

**Друга теорема Карно.** Аналогічно можна довести другу теорему Карно, яка стверджує, що за заданих температур нагрівника і холодильника будь-яка оборотна машина з іншим робочим тілом не може мати коефіцієнта корисної дії більшого, ніж машина Карно з робочим ідеальним газом.

Нехай коефіцієнт корисної дії машини Карно дорівнює  $\eta$ , іншої —  $\eta' > \eta$ . Припустимо, що обидві машини забирають від нагрівника однакову кількість теплоти  $Q_1 = Q'_1$ , що можливо за умови  $Q'_2 < Q_2$ . Спаримо машини та примусимо другу машину здійснювати прямий цикл, а першу — зворотний; отже, перша машина буде споживати роботу, яку виконує друга машина.

Підведемо тепловий баланс роботи після завершення циклу. *Друга машина:* забирає у нагрівника теплоту  $Q'_1$ , виконує роботу  $A'_1$ , віддає холодильнику теплоту  $Q'_2$ . *Перша машина (Карно зворотного циклу):* передає нагрівнику теплоту  $Q_1$ , споживає роботу  $A_1$ , забирає в холодильника теплоту  $Q_2$ . У результаті роботи обох машин за один цикл від холодильника забирається деяка кількість теплоти ( $Q_2 - Q'_2$ ); із зіставлення виразів коефіцієнта корисної дії машин знаходимо, що  $A' > A$ .

Таким чином, констатуємо, що спарені машини виконують деяку роботу і забирають від холодильника певну кількість теплоти. Це суперечить другому принципу термодинаміки, оскільки не можна побудувати періодично діючу машину, результатом якої було б забирання теплоти робочого тіла та перетворення її на роботу. Отже, немає більш ефективної машини, ніж машина Карно, за тих самих температур нагрівника і холодильника.

Доведемо, що коефіцієнт корисної дії теплової машини залежить від різниці температур нагрівника  $T_1$  та холодильника  $T_2$ , а саме:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

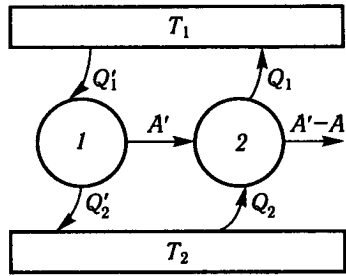


Рис. 177

Для цього у вираз (1) замість  $Q_1$  і  $Q_2$  підставимо еквівалентні значення роботи відповідних ізотермічних процесів:

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (2)$$

Для спрощення виразу (2) запишемо для адіабатичних процесів 2–3 та 1–4 циклу Карно (див. рис. 175) рівняння Пуассона:

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma;$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_4 V_4^\gamma.$$

Поділивши перше рівняння на друге і виділивши при цьому добутки тиску на об'єм у першому степені, дістанемо

$$\frac{(p_2 V_2) V_2^{\gamma-1}}{(p_1 V_1) V_1^{\gamma-1}} = \frac{(p_3 V_3) V_3^{\gamma-1}}{(p_4 V_4) V_4^{\gamma-1}}. \quad (3)$$

Ураховуючи, що  $p_1 V_1 = p_2 V_2$  для ізотерми  $T_1$ , а  $p_3 V_3 = p_4 V_4$  для ізотерми  $T_2$  циклу Карно, виконаємо відповідні скорочення у виразі (3):

$$\left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1},$$

звідки

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (4)$$

Ураховуючи останню рівність, скорочуємо вираз (2) та дістаємо згадану залежність для коефіцієнта корисної дії циклу Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (5)$$

Таким чином, цей коефіцієнт лише у двох окремих випадках, які практично нездійсненні, а саме: при  $T_1 \rightarrow \infty$  і  $T_2 \rightarrow 0$  може дорівнювати одиниці.

Отже, вираз коефіцієнта корисної дії машини Карно визначає той найбільший коефіцієнт корисної дії, якого можна досягти в реальних теплових машинах за заданих температур нагрівника та холодильника (з цього не випливає, що конструкція і якість побудови теплової машини не мають значення).

Вираз коефіцієнта корисної дії циклу Карно також указує на шлях, яким треба йти, щоб створити ефективніші теплові маши-

ни. Це – підвищення температури нагрівника. Саме тому теплові машини переводять на вищі параметри. Зокрема, у парових машинах температура перегрітої пари вже досягає 900...950 К при тиску 10...20 МПа.

## § 108. Другий принцип термодинаміки

Уже зазначалося, що у природі спостерігається певна спрямованість термодинамічних процесів. Зокрема, по-різному механічна енергія перетворюється на внутрішню, а внутрішня – на механічну.

Механічна енергія перетворюється на внутрішню безпосередньо і повністю. Так, у процесах падіння тіла на поверхню землі, зсування тіла по похилій площині, гальмування та зупинки екіпажу тощо механічна енергія тіла повністю перетворюється на внутрішню. Внутрішня енергія на механічну безпосередньо і повністю не перетворюється. Нагріте тіло саме собою не почне рухатися вгору по похилій площині.

Розглянувши цикл Карно, ми довідалися, що навіть в *ідеальних умовах* неможливо побудувати таку теплову машину, вся робота якої зводилась би до забирання теплоти від теплового резервуара та повного перетворення її на механічну роботу.

Зауважимо, що з погляду першого принципу термодинаміки всі згадані вище процеси однаково правомірні. Перший принцип термодинаміки вказує на кількісне збереження енергії в явищах перетворення, але не на напрямленість термодинамічних процесів; тому його не досить для побудови теорії теплових процесів. Цей недолік першого принципу термодинаміки усувається другим принципом.

Другий принцип термодинаміки має кілька формулювань, але всі вони за своєю суттю ідентичні. Ось деякі з них:

1. Теплота не може переходити сама собою від менш нагрітого тіла до більш нагрітого.

2. Неможливо побудувати періодично діючу машину, вся робота якої зводилася б до забирання теплоти від теплового резервуара і повного перетворення її на механічну роботу – частина теплоти неодмінно передаватиметься холодильнику.

3. *Perpetuum mobile* другого роду здійснити неможливо, тобто неможливо побудувати такий двигун, який виконував би роботу лише завдяки охолодженню навколишніх тіл природи.

Таким чином, для такого двигуна не потрібно було б холодильника, а створення його відкрило б необмежені можливості для виконання роботи завдяки охолодженню до нижчих температур величезних теплових резервуарів, якими є моря та океани або земна

кора. Другий принцип термодинаміки застерігає від марних пошуків конструкцій подібних машин.

Яскравою ілюстрацією другого принципу термодинаміки може слугувати дослід Дарлінга. У високу хімічну склянку на дно наливають шар аніліну, а зверху – воду. Склянку ставлять на гарячу піщану баню. Унаслідок більшого теплового розширення анілін стає легшим за воду і спливає на її поверхню у вигляді великої краплини, перетворюючись на шар аніліну над водою. У контакті з повітрям шар аніліну поступово охолоджується, стає важчим від води і знову у вигляді великої краплини осідає на дно склянки. Далі все повторюється.

У цьому досліді відображується тепловий двигун, у якому рух аніліну зумовлюється не тільки нагріванням знизу, а й охолодженням зверху, тобто наявністю нагрівника і холодильника. Те саме можна сказати про конвекційні потоки рідини у посудині під час її нагрівання та про конвекційні потоки в атмосфері.

Щоб дістати кількісний вираз другого принципу термодинаміки, пошлемося на результати аналізу ідеальної теплової машини Карно. Як відомо, для коефіцієнта корисної дії циклу Карно, що складається з оборотних процесів, справджується рівність

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (1)$$

Після перетворення дістанемо

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (2)$$

Якщо під  $Q_1$  і  $Q_2$  розуміти алгебричні величини за умови, що теплота  $Q_1$ , яку дістає робоче тіло, – додатна, а теплота  $Q_2$ , віддана робочим тілом, – від'ємна, то рівність (2) можна записати так:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (3)$$

Відношення кількості теплоти до температури, за якої ця теплота розглядається, називається *зведеною теплотою*. З рівності (3) випливає, що сума зведеної кількості теплоти для циклу Карно дорівнює нулю.

Будь-який інший оборотний цикл можна розглядати як суму нескінченно великої кількості елементарних циклів Карно. Для цього досить розбити заданий оборотний цикл низкою адіабат та ізотерм (рис. 178). Беручи суму зведеної кількості теплоти для всіх цих елементарних циклів, тобто інтегруючи по замкненому контуру, для всьо-

го оборотного циклу дістаємо вираз

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (4)$$

Знак інтеграла з кружечком означає, що сума елементарних значень зведеної теплоти береться по всьому циклу.

Якщо цикл необоротний, то, як відомо, його коефіцієнт корисної дії менший від такого для циклу Карно, що здійснюється за тих самих температур  $T_1$  нагрівника і  $T_2$

холодильника. Тому для необоротного циклу можна записати нерівність

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

з якої випливає, що сума зведеної кількості теплоти для необоротного циклу менша від нуля:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0,$$

або в загальному вигляді

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0. \quad (5)$$

Об'єднавши вирази (4) та (5), дістанемо нерівність Клаузіуса

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0, \quad (6)$$

яка є кількісним виразом другого принципу термодинаміки. У такому вигляді цей принцип може бути критерієм оборотності або необоротності термодинамічних процесів.

## § 109. Ентропія

Повернемося до оцінювання оборотних і необоротних циклів з огляду на ті зміни, яких зазнає в них робоче тіло.

Із нерівності Клаузіуса випливає, що для оборотних циклів сума зведеної кількості теплоти дорівнює нулю:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Із математичного аналізу відомо, що коли криволінійний інтеграл, узятий по замкненому контуру, дорівнює нулю, то існує така функ-

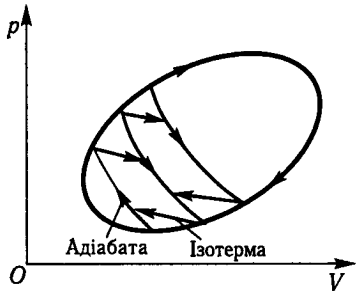


Рис. 178

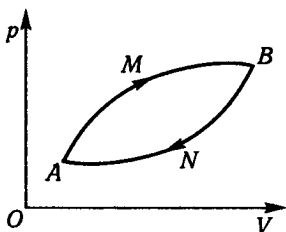


Рис. 179

ція змінних інтегрування, повний диференціал якої дорівнює підінтегральному виразу. Цю функцію називають *ентропією* та позначають літературою  $S$ . Для неї можна записати

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (1)$$

Ентропія є функцією стану речовини, оскільки її значення не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від початкових і кінцевих параметрів стану. Вона має фундаментальне значення у фізиці. Поряд із такими функціями стану, як тиск, об'єм, температура та внутрішня енергія, ентропія є визначальною характеристикою різних процесів і передусім перетворення теплоти на механічну роботу. Пересвідчимося, що практичне значення має не стільки сама ентропія, скільки її зміна. За зміною ентропії визначають можливість перебігу того або іншого процесу та ін. Зміну ентропії для оборотних процесів знайдемо за формулою

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (2)$$

(Щоб визначити абсолютне значення ентропії, треба врахувати теорему Нернста, яку інакше називають третім принципом термодинаміки. Згідно з теоремою *ентропія будь-якої речовини за температури абсолютного нуля дорівнює нулю.*)

Проаналізуємо необоротний цикл. Нехай деякий в цілому необоротний цикл складається із двох процесів: необоротного  $AMB$  й оборотного  $ANB$  (рис. 179).

Якщо цикл необоротний, то відповідно до нерівності Клаузіуса сума зведеної кількості теплоти менша від нуля:

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0.$$

Цей інтеграл по замкненому контуру можна записати як суму

$$\int_{AMB} \frac{dQ}{T} + \int_{BNA} \frac{dQ}{T} < 0.$$

Якщо перенести другий доданок суми у праву частину і поміняти в ньому місцями межі інтегрування, то дістанемо

$$\int_{AMB} \frac{dQ}{T} < \int_{ANB} \frac{dQ}{T}. \quad (3)$$

Оскільки інтеграл у правій частині нерівності належить до оборотного процесу, за формулою (2) запишемо

$$\int_{ANB} \frac{dQ}{T} = S_B - S_A.$$

Підставивши це значення інтеграла в нерівність (3), дістанемо

$$S_B - S_A > \int_{AMB} \frac{dQ}{T}. \quad (4)$$

У необоротному незамкненому процесі зміна ентропії більша за вказаний інтеграл на шляху  $AMB$ ; якби процес був оборотним, то зміна ентропії дорівнювала б інтегралу. Тому в узагальненому вигляді для оборотних та необоротних процесів можна записати таку нерівність:

$$S_B - S_A \geq \int \frac{dQ}{T}, \quad (5)$$

яка, по суті, є іншим виразом нерівності Клаузіуса. У диференціальному вигляді її можна записати так:

$$dS \geq \frac{dQ}{T}, \quad (6)$$

де знак « $>$ » відповідає необоротному процесу, а знак « $=$ » – оборотному.

Нерівності (5) і (6) виражають другий принцип термодинаміки через зміну ентропії. Тут ентропія є мірою необоротності процесів.

Нарешті, спинимося на ізольованій системі тіл, тобто на системі, яка не має теплообміну з навколишнім середовищем. Застосувавши нерівність (6) до ізольованої системи, для якої  $\delta Q = 0$ , дістанемо примітний наслідок:

$$dS \geq 0, \quad (7)$$

який вказує на те, що в ізольованій системі можуть відбуватися лише процеси, які спричиняють зростання ентропії, вирівнювання температур, після чого ентропія залишається незмінною:  $dS = 0$ .

## § 110. Статистичний характер другого принципу термодинаміки

Суть другого принципу термодинаміки впливає з особливостей будови речовини.

Із МКТ відомо, що макроскопічні характеристики речовини, наприклад тиск, температура, є деякими середніми значеннями хао-



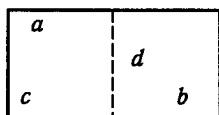


Рис. 180

тичних дій та рухів багаточисельної кількості молекул, з яких складається речовина. Внутрішня енергія є мірою хаотичного руху молекул речовини і потенціальної енергії їх взаємодій.

На відміну від внутрішньої механічна енергія є мірою напрямленого руху тіла в цілому й окремо всіх його молекул.

Необоротність процесу взаємного перетворення внутрішньої енергії на механічну, на яку вказує другий принцип термодинаміки, є необоротністю взаємного перетворення хаотичного руху молекул та їх загального напрямленого руху. Направлений рух молекул перетворюється на хаотичний безпосередньо і повністю, проте безпосереднє та повне перетворення хаотичного руху молекул на напрямлений рух хоч і можливе, але малоімовірне. Можна вважати, що будь-який необоротний процес – це такий процес, зворотний до якого – малоімовірний.

Пояснимо для прикладу процес вирівнювання тиску або густини газу. Для наочності нехай газ складається із чотирьох молекул, позначених  $a, b, c, d$ , які на початку містяться у лівій частині посудини (рис. 180). Унаслідок хаотичного руху молекули по-різному розміщуватимуться по всій посудині і створюватимуть стани газу, які показано в табл. 7. Оскільки кожна молекула з однаковою ймо-

Таблиця 7

Кількість молекул		Способи утворення станів		Кількість однотипних станів
зліва	справа	зліва	справа	
4	0	$a, b, c, d$	—	1
3	1	$a, b, c$ $a, b, d$ $a, c, d$ $b, c, d$	$d$ $c$ $b$ $a$	4
2	2	$a, b$ $a, c$ $a, d$ $b, c$ $b, d$ $c, d$	$c, d$ $b, d$ $b, c$ $a, d$ $a, c$ $a, b$	6
1	3	$a$ $b$ $c$ $d$	$b, c, d$ $a, c, d$ $a, b, d$ $a, b, c$	4
0	4	—	$a, b, c, d$	1

вірністю може бути як у лівій, так і у правій частинах посудини, кожний з перелічених 16 станів виникає однаково часто. Проте вже з цієї спрощеної моделі газу бачимо, що найімовірнішими є стани з однаковою кількістю молекул в обох частинах посудини, тобто стани з однаковою густиною по всьому об'єму. Чим більше молекул, тим яскравіше виявляються статистичні закономірності в їхній поведінці: ймовірність стану з молекулами, зібраними в одній частині посудини, дуже зменшується, а ймовірність стану з рівномірним розподілом молекул по об'єму збільшується. За такими закономірностями відбуваються процеси вирівнювання тиску, температури та ін.

Другий принцип термодинаміки виражає статистичні закономірності, яким підлягає значна сукупність молекул речовини. Ентропія, через яку кількісно виражається цей принцип, перебуває у безпосередньому зв'язку з ймовірністю стану системи. Примітно, що в ізольованій системі тіл різні процеси відбуваються у напрямі зростання ентропії та досягання її максимуму. Водночас такі процеси приводять до найімовірнішого стану системи. Австрійський фізик Л. Больцман у 1872 р. довів, що ентропія й ймовірність стану перебувають у такій залежності:

$$S = k \ln \omega, \quad (1)$$

де  $k$  – стала Больцмана,  $\omega$  – термодинамічна ймовірність стану, тобто кількість способів, якими досягається цей стан.

## § 111. Межі застосовності другого принципу термодинаміки

На відміну від першого принципу термодинаміки, що відображає закон збереження енергії макроскопічної термодинамічної системи, другий принцип термодинаміки є суто статистичною закономірністю. Він може бути застосований лише до системи, що складається зі значної, але скінченної кількості молекул.

У разі малої кількості молекул ймовірність рівноважного стану мало відрізняється від нерівноважного і тому такі стани можуть чергуватися. Прикладом цього може слугувати кількість молекул, що ударяються у броунівську частинку. В елементарних об'ємах рідини або газу хаотичний рух молекул створює випадкові підвищення або зниження густини, тиску, температури. Ці відхилення від найбільш ймовірних станів називаються *флуктуаціями*.

В атмосфері флуктуації густини повітря обумовлюють розсіяння сонячного проміння, і завдяки переважному розсіянню короткохвильової його частини небо набуває блакитного забарвлення.

Другий принцип термодинаміки втрачає зміст при розгляді системи з безмежно великою кількістю молекул. У такому разі відкривається нескінченно велика кількість можливих станів та способів, якими може здійснюватися будь-який із цих станів, як нерівноважних, так і рівноважних. У такій системі всі її стани є рівноправними, тому немає сенсу говорити про найімовірніший. Можна лише констатувати, що ймовірність стану й ентропія безмежної системи залишаються незмінними.

Слід зауважити, що в 1865 р. німецький фізик Р. Ю. Е. Клаузіус помилково вважав всесвіт скінченно ізольованою системою і, застосувавши до нього другий принцип термодинаміки, дійшов ствердження про неодмінний рух всесвіту до «теплової смерті». Суть її зводилась до того, що внаслідок зростання ентропії всі види енергії будуть перетворюватися на теплову, остання призведе до вирівнювання температури і в майбутньому всі процеси у всесвіті припиняться.

Гіпотеза «теплової смерті» була підхоплена деякими філософами як доказ кінця всесвіту, а відповідно і створення його надприродними силами. При цьому вони не враховували, що другий принцип термодинаміки не може бути застосованим до відкритої системи, якою є всесвіт; що згідно із законом збереження незнищуваність руху треба розуміти не тільки у кількісному, а й у якісному плані; що невичерпність форм руху та їх взаємних перетворень є невід'ємною властивістю всесвіту, відносно якого визначення просторових і часових меж алогічне.

**Приклад 1.** Довести, що ентропія збільшується у такому процесі: гаряча вода передає теплоту такій самій масі холодної води і температури їх вирівнюються.

*Розв'язання.* Загальна зміна ентропії в цьому процесі включає дві складові (гарячу та холодну воду):

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2.$$

Урахуємо, що за умовою кінцева температура

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2};$$

тому

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_0} \frac{mcdT}{T} + \int_{T_2}^{T_0} \frac{mcdT}{T},$$

або

$$\Delta S = mc \ln \frac{T_0}{T_1} + mc \ln \frac{T_0}{T_2} = mc \ln \frac{T_0^2}{T_1 T_2}.$$

Підставивши сюди значення  $T_0$ , дістанемо

$$\Delta S = mc \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 0.$$

Справді

$$(T_1 + T_2)^2 > 4T_1T_2; (T_1 - T_2)^2 > 0; \Delta S > 0.$$

**Приклад 2.** Змішуються  $V_1 = 5$  л і  $V_2 = 3$  л двох різнорідних газів, що хімічно не взаємодіють і мають однакову температуру  $T = 300$  К та тиск  $p = 101,3$  кПа. Визначити зміну ентропії.

**Розв'язання.** Будемо визначати зміну ентропії кожного газу окремо. Згідно з виразом зміни ентропії газу

$$dS = \frac{mc_V dT + pdV}{T}; dT = 0.$$

Отже,

$$dS = \frac{pdV}{T}; dS = \frac{RdV}{V};$$

$$\Delta S_1 = R' \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}.$$

Аналогічно  $\Delta S_2 = R' \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$ . Тоді

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{p}{T} \left[ V_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + V_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} \right]; \Delta S = 1,8 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

**Приклад 3.** Знайти зміну ентропії маси  $m$  газу в ізобаричному процесі в разі нагрівання його від температури  $T_1$  до  $T_2$ .

**Розв'язання.** Згідно з виразом зміни ентропії

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Підставимо сюди замість  $dQ$  вираз за першим принципом термодинаміки. Тоді

$$dS = \frac{\frac{m}{\mu} C_V dT + pdV}{T},$$

або

$$dS = \frac{m}{\mu} C_p \frac{dT}{T},$$

звідки

$$\Delta S_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{\mu} C_p \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

**Приклад 4.** Обчислити зміну ентропії маси газу, що ізотермічно розширюється від об'єму  $V_1$  до  $V_2$ , користуючись формулою Больцмана  $S = k\omega + C$ .

**Розв'язання.** Ймовірність  $\omega_1$  перебування однієї молекули в об'ємі  $V$  пропорційна об'єму ( $\omega_1 \approx V$ ), а ймовірність одночасного перебування в цьому об'ємі всіх  $n$  молекул газу дорівнюватиме добутку ймовірностей:

$$W = \Pi \omega_i = \beta V^n,$$

де  $\beta$  – стала величина.

Згідно з формулою Больцмана

$$S_1 = k \ln \omega + C = k \ln V_1^n + C;$$

$$S_2 = k \ln V_2^n + C,$$

звідки

$$\Delta S_{12} = k \ln V_2^n - k \ln V_1^n = k \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^n.$$

## § 112. Абсолютна термодинамічна шкала температур

Практичне вимірювання температур, що ґрунтується на використанні залежності параметрів речовини від температури, є дуже наближеним унаслідок нелінійного характеру такої залежності. Виняток становить ідеальний газ, для якого

$$T = \frac{pV}{R}.$$

Тут при  $V = \text{const}$  тиск і температура знаходяться у строгій пропорційній залежності. Побудований на цій залежності газовий термометр уже був розглянутий. Проте й у цьому випадку будь-який розріджений газ є лише наближенням до ідеального, а при низьких температурах і зовсім вироджується. Все це свідчить про те, що спосіб вимірювання абсолютної температури, який ґрунтується на використанні залежності параметрів речовини від температури, є недосконалим.

Принципово досконалим був би такий спосіб вимірювання температури, який не залежить від природи використовуваної речовини, зокрема такий, що впливає з рівності відношень температур та кількості теплоти в оборотному циклі Карно:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}. \quad (1)$$

У доцільності цього способу легко переконатися, якщо подумки уявити послідовність циклів Карно з одним і тим самим робочим тілом між тепловими резервуарами з температурами  $T_1 > T_2 > T_3 > \dots > T_n$ , що здійснюється за правилом: резервуар із температурою  $T_2$  слугує холодильником для першого циклу та нагрівником для другого, резервуар із температурою  $T_3$  – холодильником для другого і нагрівником для третього циклу і т. д. Графічно ці цикли будуть відображені, якщо ізотерми для вказаних температур перетнути двома відповідними адіабатами –  $ab$  та  $cd$  (рис. 181). Для такої послідовності циклів дістаємо узагальнену

рівність

$$\begin{aligned}
 T_1 : T_2 : T_3 : \dots : T_n &= \\
 = Q_1 : Q_2 : Q_3 : \dots : Q_n, & \quad (2)
 \end{aligned}$$

з якої випливає, що відношення температур теплових резервуарів дорівнює відношенню кількості теплоти, якою вони обмінюються з робочим тілом, причому ця рівність не залежить від природи робочого тіла.

Зауважимо, що співвідношення між кількістю теплоти можна визначати, не вдаючись до вимірювання температур, наприклад за співвідношенням мас розплавленого кристалічного тіла. Таким чином, рівність (2) відкриває можливість вимірювання абсолютного значення температури; залишається лише вибрати одиницю температури.

Відомо, що для визначення одиниці температури (градуса в емпіричних шкалах) необхідно було вибрати дві реперні точки (наприклад, у шкалі Цельсія – точки танення льоду і кипіння води). Для абсолютної шкали температур достатньо однієї реперної точки – температури потрійної точки води  $T_0 = 273,16 \text{ К}$ , іншою слугує абсолютний нуль. Так теоретично виглядають термодинамічна шкала температур та спосіб вимірювання температури.

Зауважимо, що хоча розглянутий спосіб громіздкий і практично непридатний для вимірювання температур, однак він відкриває можливість градуювання реальних термометрів у будь-якому інтервалі. Оскільки співвідношення (2) одержано з використанням залежностей для ідеального газу, його температурна шкала тотожна термодинамічній шкалі температур, але остання має більш загальний зміст. Тут абсолютний нуль визначає стан, при якому теплові характеристики речовини – ентропія, теплоємність, коефіцієнт теплового розширення та інші – перетворюються на нуль. У загальному випадку температура визначається як похідна енергії тіла в цілому по його ентропії:

$$T = \frac{\delta U}{dS}. \quad (3)$$

На завершення слід зауважити, що для вимірювання низьких температур використовується газовий гелієвий термометр; дуже низьких (менше 4 К) – залежність магнітних властивостей тіл від

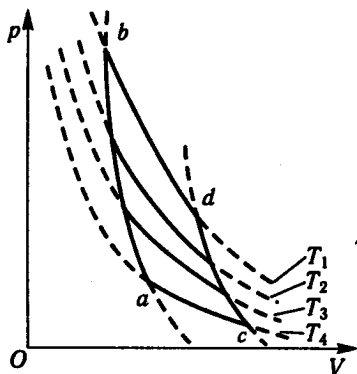


Рис. 181

температури; середніх і високих – газові водневі й електричні термометри; температур понад 1500 К – оптичні пірометри.

Із погляду фізики абсолютний нуль температури має відобразити ніби стан молекулярного спокою. Проте, як уже зазначалось вище, крім поступального молекулам притаманні ще обертальні та коливальні рухи, зокрема в кристалах температура визначається енергією коливального руху вузлів ґратки. Згідно з квантовою механікою при абсолютному нулі атоми і молекули, що знаходяться у вузлах кристалічної ґратки, не перебувають у повному спокої, а здійснюють «нульові» коливання та мають нульову енергію. Досягнення абсолютного нуля неможливе.

У лабораторних умовах способом відкачування парів ізотопу  $^3\text{He}$  досягається температура 0,3 К, методом адіабатичного розмагнічування парамагнітних солей – температура  $10^{-3}$  К; цим самим методом із використанням ядерного парамагнетизму в системі ядер – температура  $10^{-6}$  К.

§ 113. Реальні гази.  
Рівняння ван дер Ваальса

В інтервалі середніх температур та низьких тисків (при малій густині) газів справджуються закони Бойля–Маріотта і Гей–Люссака або в об'єднаному вигляді – рівняння Клапейрона–Менделєєва. У таких умовах гази називають *ідеальними*.

Із погляду внутрішньої будови ідеальний газ можна уявити як сукупність молекул, які рухаються хаотично і розмірами яких окремо та їхнім сумарним об'ємом у цілому можна знехтувати; можна знехтувати також взаємодіями між молекулами. З таких уявлень про ідеальний газ було виведено основне рівняння МКТ газів, яке підтверджується дослідними даними.

Проте ще французький вчений А. В. Реньо (1810–1878) у 1847 р., російський хімік Д. І. Менделєєв у 1875 р. та інші вчені, проводячи точніші й ширші дослідження газів, виявили, що при великих тисках, коли густина газу істотно збільшується, закон Бойля–Маріотта не справджується. У таких умовах гази стали називати *реальними*.

З'ясуємо причини відхилення газів від закону Бойля–Маріотта, їх дві.

1. Для ідеальних газів, оскільки розмірами молекул нехтують, змінним об'ємом, що входить до виразу закону Бойля–Маріотта, вважали весь об'єм, зайнятий газом. Однак у разі стиснення газу сумарний об'єм самих молекул може стати порівняним з усім об'ємом, зайнятим газом.

Ефективний радіус молекули дорівнює приблизно  $10^{-10}$  м, тому її об'єм –  $4,19 \cdot 10^{-30}$  м<sup>3</sup>. У 1 м<sup>3</sup> газу в нормальних умовах міститься  $2,7 \cdot 10^{25}$  молекул, тому об'єм усіх щільно викладених молекул дорівнює  $4,19 \cdot 10^{-30} \cdot 2,7 \cdot 10^{25} = 1,1 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>, тобто становить десятитисячну частину всього об'єму. Проте при тиску 10 МПа об'єм усіх молекул становить соту частину, а при тиску 100 МПа – десяту частину всього об'єму газу, і цим уже не можна знехтувати. Тому, щоб дістати змінну частину об'єму газу, треба від усього об'єму, зайнятого газом, відняти сумарний об'єм самих молекул. Інакше кажучи, для реальних газів до закону Бойля–Маріотта треба внести поправку на об'єм самих молекул.



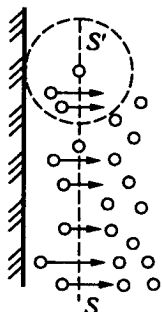


Рис. 182

2. У нормальних умовах середні відстані між молекулами дорівнюють приблизно  $10^{-9}$  м, тобто в 10 разів більші від розмірів молекул. При нижчих тисках відстані між молекулами ще більші, тому взаємодії між молекулами дуже послаблені й ними можна знехтувати.

У разі значного стиснення газу відстані між молекулами зменшуються, тому взаємодія між молекулами істотно посилюється. Рухи молекул стають прискореними, збільшується кількість їх зіткнень за 1 с між собою та зі стінками посудини. Саме через це тиск реального газу більший від обчисленого за законом Бойля–Маріотта.

Відхилення реальних газів від закону Бойля–Маріотта вперше проаналізував голландський фізик Я. Д. ван дер Ваальс у праці «Про неперервність газоподібного та рідкого станів» (1873). Він уніс поправки до рівняння стану ідеальних газів і дістав узагальнене рівняння стану газів (реальних та ідеальних), яке було названо його ім'ям. Це рівняння для 1 кмоль газу має такий вигляд:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad (1)$$

де  $a$  – стала, яка залежить від інтенсивності міжмолекулярних взаємодій;  $b$  – поправка, що зумовлюється розмірами молекул газу, тобто  $a$ ,  $b$  – сталі, які залежать від властивостей газу.

Поправка до тиску, зумовлена силами взаємного притягання молекул, називається *внутрішнім тиском*. Вираз цього додаткового тиску

$$p_i = \frac{a}{V^2} \quad (2)$$

можна знайти з таких міркувань.

Сили взаємного притягання молекул помітно виявляються на відстані  $10^{-9}$  м, яку називають *радіусом сфери міжмолекулярної взаємодії*. Дії сусідніх молекул на деяку молекулу всередині газу взаємно компенсуються. На кожну з молекул поверхневого шару, товщина якого дорівнює радіусу сфери молекулярної взаємодії (рис. 182), діє деяка результуюча сила міжмолекулярних взаємодій, напрямлена всередину газу. Очевидно, ці результуючі сили взаємодій, а отже, еквівалентний цим силам внутрішній тиск пропорційні концентрації взаємодіючих молекул, розташованих і ліворуч, і праворуч від межі  $SS'$  оболонки. Тому  $p_i = kn_0^2$ , де  $n_0$  – кількість молекул в одиниці об'єму. Оскільки  $n_0$  визначає густину  $\rho$  газу, маємо  $p_i = k'\rho^2$ . Якщо підставити сюди вираз

густини

$$\rho = \frac{m}{V},$$

то дістанемо

$$p_i = \frac{a}{V^2}.$$

Зауважимо, що молекули оболонки газу взаємодіють також із молекулами стінки посудини. Проте за температурної рівноваги середня енергія тих молекул, що підходять до стінки, і тих, що відходять від неї, однакова. Тому все відбувається так, наче молекули зазнають тільки пружних зіткнень із стінками, а взаємодії молекул немає.

Сталі  $a$ ,  $b$  визначають експериментально. Щоб знайти  $a$ , в ізохоричному процесі вимірний тиск  $p' = p + \frac{a}{V^2}$  зіставляють з обчисленням за законом Шарля тиском  $p = \frac{p_0}{T_0} T$  і дістають  $p' - p = \frac{a}{V^2}$ ; звідси знаходять  $a$ .

Для визначення  $b$  в ізотермічному процесі спостерігають зміни  $p$  та  $pV$ .

Наведемо деякі значення сталих  $a$ ,  $b$  (табл. 8).

Рівняння ван дер Ваальса точніше відображає властивості газів, ніж закон Бойля–Маріотта. У цьому переконуємося, порівнюючи його результати із даними за законом Бойля–Маріотта у застосуванні до ізотермічного процесу при  $T = 273$  К для 1 кмоль азоту (табл. 9).

Рівняння (1) стосується 1 кмоль газу. Щоб дістати рівняння для будь-якої кількості газу, досить виразити об'єм газу через молярний об'єм  $V_1$ :

$$V = \frac{m}{\mu} V_1,$$

визначити з цього виразу об'єм моля  $V_1$  і підставити його в рівняння (1):

$$\left( p + \frac{m^2 a}{\mu^2 V^2} \right) \left( V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT, \quad (3)$$

де  $m$  – маса газу;  $\mu$  – маса 1 кмоль,  $V$  – об'єм газу.

Таблиця 8

Речовина	$a \cdot 10^{-2}$ , Па · м <sup>6</sup> /кмоль	$b \cdot 10^3$ , м <sup>3</sup> /кмоль
Вода	4,51	30,55
Водень	0,24	26,70
Кисень	1,34	31,18
Азот	0,84	30,50

Таблиця 9

$p$ , 10 <sup>5</sup> Па	$V$ , м <sup>3</sup>	$pV$ , 10 <sup>5</sup> Па · м <sup>3</sup>	$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) \times$ $\times 10^5$ Па · м <sup>3</sup>
1	22,41	22,41	22,41
100	$22,24 \cdot 10^{-2}$	22,24	22,40
500	$62,35 \cdot 10^{-3}$	31,18	22,67
900	$48,25 \cdot 10^{-3}$	43,40	22,40

## § 114. Внутрішня енергія реального газу

Оскільки молекули ідеального газу не взаємодіють між собою, його внутрішня енергія визначається сумою кінетичної енергії окремих молекул, тобто залежить лише від абсолютної температури газу. Для 1 кмоль газу

$$U = C_V T. \quad (1)$$

Щоб визначити внутрішню енергію реального газу, треба до суми кінетичної енергії окремих молекул додати ще їхню взаємну потенціальну енергію.

За своєю природою молекулярні взаємодії зводяться до електричних взаємодій. Молекулу газу можна розглядати як електричний диполь, тобто як систему двох рівнозаряджених частинок із протилежними знаками (рис. 183). Легко переконатися, що із зменшенням об'єму газу і зближенням молекул їхня потенціальна енергія, зумовлена силами відштовхування, збільшується, а потенціальна енергія, зумовлена силами притягання, зменшується. Тому внутрішня енергія реального газу має залежати також як від температури, так і від об'єму газу.

Внутрішню енергію реального газу знайдемо, міркуючи так. Коли газ розширюється, то виконується робота проти внутрішніх сил взаємодії молекул

$$dA = p_i dV.$$

Ця робота є мірою зміни внутрішньої енергії газу, тому

$$dU = p_i dV,$$

де  $p_i$  – тиск поверхневої оболонки газу, зумовлений силами взаємного притягання молекул.

Із рівняння ван дер Ваальса випливає, що  $p_i = \frac{a}{V^2}$ ; тому

$$dU = \frac{a}{V^2} dV.$$

Якщо взяти невизначений інтеграл, то дістанемо

$$U = -\frac{a}{V} + C. \quad (2)$$

Значення сталої інтегрування  $C$  знайдемо з граничних умов.

При  $V \rightarrow \infty$  масо  $\frac{a}{V} \rightarrow 0$ , тобто газ наближається до ідеального; тому за виразом (2)

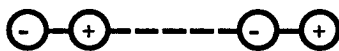


Рис. 183

$$C = U_\infty - C_V T.$$

Остаточно дістанемо такий вираз внутрішньої енергії реального газу (для 1 кмоль):

$$U = C_V T - \frac{a}{V}. \quad (3)$$

Із виразу (3) випливає, що при ізотермічному розширенні реального газу його внутрішня енергія збільшується.

Оскільки внутрішня енергія системи складається із суми кінетичної та потенціальної енергії частинок системи, у виразі (3), очевидно, перший член має зміст сумарної кінетичної енергії, а другий – сумарної потенціальної енергії молекул газу, тобто

$$U = K + П.$$

Залежно від агрегатного стану речовини співвідношення між  $K$  і  $П$  будуть різні. Так, для молекул газу  $K \gg П$ , для рідин  $K \approx П$ , для твердих кристалічних тіл  $K \ll П$ .

## § 115. Ефект Джоуля–Томсона

Міжмолекулярні сили в реальних газах наочно виявляються в ефекті Джоуля–Томсона. До цих сил треба відносити не тільки сили взаємного притягання молекул, а й сили взаємного відштовхування. Останні виявляються при таких зближеннях молекул, коли порушуються межі їхнього власного об'єму. Завдяки силам відштовхування зберігаються певні розміри молекул.

Унаслідок взаємодії молекули реального газу мають деяку потенціальну енергію. Зміну цієї енергії можна спостерігати під час розширення газу, особливо в умовах адіабатичного розширення без виконання зовнішньої роботи (припустимо, що газ із балона витікає в розріджений простір). У процесі розширення газу, якщо домінують сили відштовхування, швидкості молекул збільшуються; іншими словами, потенціальна енергія сил відштовхування зменшується, а кінетична енергія молекул збільшується, тому температура газу зростає; навпаки, коли переважають сили притягання, із розширенням газу потенціальна енергія молекул збільшується, а кінетична енергія зменшується – температура газу спадає. Саме такі теплові ефекти спостерігалися у дослідах Дж. П. Джоуля та В. Томсона, проведених у 1852–1862 рр.

У дослідах (рис. 184) газ по теплоізолюваній бамбуковій

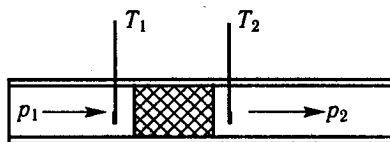


Рис. 184

трубці переходив крізь пористий ватний тампон з області високого тиску  $p_1$  в область низького тиску  $p_2$  і розширювався. У лівій частині приладу тиск  $p_1$  підтримувався нагнітальним насосом, а у правій частині тиск  $p_2$  – розріджувальним насосом. За показами термометрів в обох частинах визначали зміну температури з розширенням газу.

Досліди за кімнатної температури показали, що майже всі гази, розширюючись, охолоджуються – спостерігався позитивний ефект Джоуля–Томсона. Виняток становили водень та гелій, які з розширенням дещо нагрівалися, – давали негативний ефект Джоуля–Томсона.

Було виявлено, що інтенсивність ефекту залежить від складу газу, перепаду тиску і початкової температури газу. Наприклад, зниження температури з розрахунку на 100 кПа перепаду тиску  $\left(\frac{\Delta T}{\Delta p}\right)$  становило 0,25 К для повітря, 1,3 К для діоксиду вуглецю, а для водню підвищення температури дорівнювало 0,3 К.

Точніші дослідження показали, що  $\left(\frac{\Delta T}{\Delta p}\right)$  в ефекті Джоуля–Томсона є функцією  $p$  та  $T$ . При деяких значеннях  $p$  і  $T$  ефект Джоуля–Томсона взагалі не спостерігається. Очевидно, при цьому створюються умови, коли прояви молекулярних сил відштовхування і сил притягання у розширенні газу взаємно компенсуються. При великих тисках більше виявляються сили відштовхування молекул, тому спостерігається негативний ефект, а при незначних тисках – сили притягання, тому спостерігається позитивний ефект Джоуля–Томсона.

Для кожного газу при незмінному початковому тиску можна знайти таку температуру, при переході через яку ефект Джоуля–Томсона змінює свій знак. Її називають *температурою інверсії*. Температура інверсії для повітря дорівнює приблизно 521 К, для водню – 193 К, для гелію – 15 К.

Позитивний ефект Джоуля–Томсона використовують для охолодження газів у зріджувальних машинах.

## § 116. Порівняння ізотерм ван дер Ваальса з експериментальними ізотермами. Критичний стан речовини

Важливим наслідком рівняння ван дер Ваальса є ідея про неперервність переходу речовини від газоподібного до рідкого стану. До цього приходимо, міркуючи так.

Рівняння ван дер Ваальса можна звести до такого вигляду:

$$V^3 - \left( b + \frac{RT}{p} \right) V^2 + \frac{a}{p} V - \frac{ab}{p} = 0, \quad (1)$$

тобто воно є кубічним рівнянням відносно об'єму, тому має три корені. Інакше кажучи, при тих самих значеннях температури і тиску речовина може перебувати у трьох різних станах.

Зрозуміло, що корені кубічного рівняння можуть бути всі три дійсними або один дійсним та два уявними. Уявні корені рівняння (1) не можуть мати фізичного змісту, тому їх не розглядаємо.

Найбільш наочно розв'язки рівняння (1) можна зіставити на графіку функції  $p = f(V)$  за сталої температури, тобто на ізотермі ван дер Ваальса (рис. 185, а). З графіка випливає, що температури  $T_1$  і тиску  $p_1$  відповідають три стани речовини з об'ємами  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ .

З'ясуванню цих станів передували широкі експериментальні дослідження газів при різних температурах та тисках, їх проводили російські хіміки Д. І. Менделєєв і М. П. Авенаріус, англійський хімік Т. Ендрюс та ін. Досліди показали, що найменший об'єм  $V_1$  відповідає рідкому стану, а найбільший об'єм  $V_3$  – газоподібному. Щоб з'ясувати проміжний стан з об'ємом  $V_2$  розглянемо докладніше перебіг дослідів.

Досліди проводили за такою принциповою схемою. Досліджуваний газ, наприклад  $\text{CO}_2$ , був у прозорій товстостінній трубці, сполученій з манометром. Його стискали поршнем (рис. 185, б). Опишемо поведінку діоксиду вуглецю при кімнатній температурі. Спочатку із зменшенням об'єму газу тиск його зростає (ділянка  $ab$  на рис. 185, б). Після значного стиснення газу утворюється стан його насиченої пари об'ємом  $V_{н.п}$ . При дальшому зменшенні об'є-

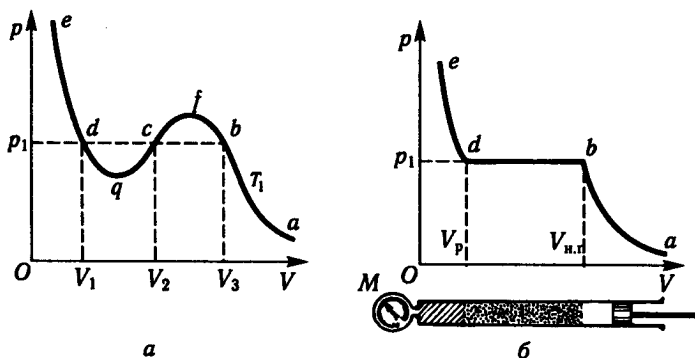


Рис. 185

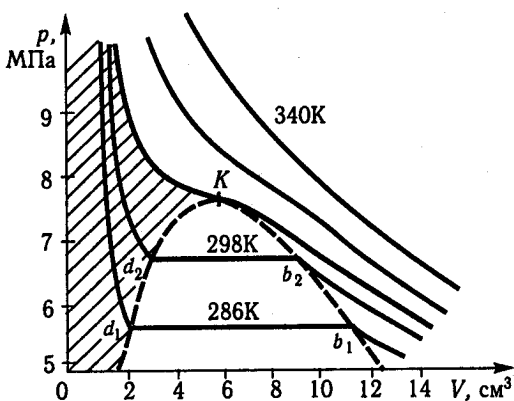


Рис. 186

му все більше пари конденсується у рідину, а тиск залишається незмінним (ділянка  $bd$ ). Нарешті, при об'ємі  $V_p$  весь газ переводиться у рідкий стан. Оскільки стисливість рідин дуже мала, наступні незначні зміни об'єму ведуть до різкого підвищення тиску (ділянка  $de$ ).

Зауважимо, що ділянки  $ab$  та  $de$  ізоТЕРМИ ван дер Ваальса збігаються із відповідними ділянками експериментальної ізоТЕРМИ; тому відображають відповідно газоподібний і рідкий стани речовини.

Чому в досліді не фіксуються проміжні ділянки ізоТЕРМИ ван дер Ваальса? Ділянка  $fcq$  на рис. 185,  $a$  відповідає малоімовірним станам речовини, в яких зменшення об'єму зумовлює не зростання, а спад тиску. Такі стани нестійкі й у досліді не виявляються.

Ділянки ізоТЕРМИ  $bf$  і  $dq$  в особливих випадках можна дістати експериментально: перша відповідає стану перенасиченої пари, що виникає за відсутності центрів конденсації (пилинок твердої речовини, електрично заряджених частинок); друга відповідає стану розтягнутої рідини, подібному до стану перегрітої рідини. Такі стани виникають за відсутності в рідині центрів кипіння – бульбашок повітря. Із цих причин на ділянці  $dq$  статичний тиск зменшується, а кипіння рідини не настає. Ділянки  $bf$  та  $dq$  відображають *метастабільні* стани речовини.

Звертаємо увагу на те, що з підвищенням температури ділянки ізоТЕРМИ  $b_i d_i$ , які характеризують конденсацію пари, скорочуються, і нарешті, за температури 304,1 К та тиску близько 7,5 МПа вони зливаються у точку  $K$  (рис. 186). Ця точка відповідає критичному стану діоксиду вуглецю, в якому зникає різниця між газом і ріди-

ною; тут питома теплота пароутворення та коефіцієнт поверхневого натягу дорівнюють нулю.

Із подальшим підвищенням температури дослідні ізотерми набувають плавнішого вигляду і все більше наближаються до ізотерм ідеального газу, що задаються законом Бойля–Маріотта.

Легко переконатися, що за температури, нижчої від 304,1 К, діоксид вуглецю стисненням можна перетворити на рідину, а за температури, вищої від 304,1 К, при яких завгодно великих тисках зрідження газу неможливе. Така гранична температура, за якої закінчується можливість перетворення газу на рідину, називається *критичною*.

Параметри, що визначають критичний стан речовини, називають *критичними* і позначають  $p_k$ ,  $V_k$ ,  $T_k$ . Це індивідуальні характеристики речовини, які залежать від властивостей її молекул.

Критичні параметри можна визначити, міркуючи так. Оскільки для критичного стану всі три корені рівняння ван дер Ваальса однакові, для критичної ізотерми це рівняння можна записати так:

$$V^3 - \left( b + \frac{RT_k}{p_k} \right) V^2 + \frac{a}{p_k} V - \frac{ab}{p_k} = (V - V_k)^3. \quad (2)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при об'ємах з однаковими показниками степеня у правій та лівій частинах рівності (2), для критичного стану газу дістанемо

$$b + \frac{RT_k}{p_k} = 3V_k; \quad \frac{a}{p_k} = 3V_k^2; \quad \frac{ab}{p_k} = V_k^3,$$

звідки

$$p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad V_k = 3b; \quad T_k = \frac{8a}{27bR}.$$

Так за сталими з рівняння ван дер Ваальса можна визначити параметри критичного стану речовини.

## § 117. Властивості насиченої пари

Із дослідів, описаних у попередньому параграфі, ми дізналися, що після значного стиснення газу за температури, нижчої від критичної, утворюється стан насиченої пари; з дальшим зменшенням об'єму все більше пари конденсується у рідину, а її тиск залишається незмінним. Насичена пара – це газ, що перебуває в рівновазі з рідиною.

Тиск насиченої пари, яка перебуває в рівновазі з рідиною, не залежить від об'єму посудини та кількості рідини в ній. Якщо тем-



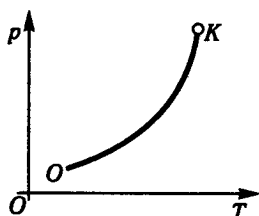


Рис. 187

пература незмінна, то зменшення об'єму зумовлює часткову конденсацію пари, а збільшення об'єму спричинює додаткове випаровування рідини так, що густина пари і її тиск залишаються незмінними.

Тиск насиченої пари сильно залежить від температури. Із збільшенням температури він зростає з двох причин: через збільшення інтенсивності молекулярного руху та зростання густини пари завдяки випаровуванню додаткової кількості рідини. Графічно ця залежність виражається деякою кривою *OK* (рис. 187), яка показує, що з підвищенням температури тиск насиченої пари зростає значно більше, ніж зростає би тиск газу. Як впливає з рис. 187, закон Шарля для насиченої пари застосовувати не можна.

Легко зрозуміти, що кожна точка кривої *OK* зображує стан насиченої пари; координати кожної точки показують, за яких температури і тиску перебуває насичена пара. У точках, що лежать вище від кривої *OK*, тобто при вищих тисках, насичена пара буде повністю сконденсована в рідину; в точках, що лежать нижче від кривої *OK*, існує стан ненасиченої пари. Отже, крива *OK* є межею двох областей: рідини та газу. У критичній точці *K* крива обривається.

Тиск насиченої пари за заданої температури залежить також від роду речовини. Аналітично залежність тиску насиченої пари від температури для багатьох речовин виражається формулою

$$p = (l + nt)^4,$$

де  $l$  і  $n$  – сталі, що залежать від роду речовини.

## § 118. Зрідження газів і здобуття низьких температур

Будь-який газ можна розглядати як ненасичену пару відповідної рідини, оскільки газ можна перетворити на рідину. Для цього треба охолодити газ до температури, нижчої від критичної, та піддати стисненню.

Критична температура для більшості газів низька. Ось деякі її значення в кельвінах:

Діоксид вуглецю	304,1
Кисень	155,3
Азот	126,1
Водень	33,1
Гелій	5,2
Повітря	132,4

Тому способи зрідження газів зводяться насамперед до здобуття низьких температур.

Розглянемо деякі способи зрідження газів.

1. Спосіб зрідження газу з використанням позитивного ефекту Джоуля–Томсона зводиться до того, що коли стиснутий газ розширюється крізь пористу перегородку або щілину, робота розширення газу виконується завдяки його внутрішній енергії; тому газ охолоджується. Цей ефект використано в машині для промислового зрідження повітря, створеній німецьким ученим К. Лінде (1842–1934) у 1895 р.

Схему машини Лінде показано на рис. 188. У ній компресор  $K$  через вентиль  $S$  засмоктує атмосферне повітря і нагнітає його в резервуар  $A$  до тиску 20 МПа. Резервуар охолоджується водою; стиснуте та частково охолоджене повітря через змійовик  $B$  надходить у посудину  $C$ , там розширюється і ще більше охолоджується. Холодне повітря з посудини  $C$  по трубах  $b_1$ ,  $b_2$ , які обхоплюють змійовик, та  $b_3$  надходить до компресора і знову нагнітається у резервуар  $A$ . Так забезпечується циркуляція повітря. Кожне наступне розширення повітря у посудині  $C$  приводить до дальшого зниження його температури. Те повітря, яке виходить із посудини  $C$ , охолоджує зустрічне повітря, що йде по змійовику. Через якийсь час повітря починає конденсуватися.

Машину Лінде не можна використовувати для зрідження таких газів, як водень та гелій, бо температура інверсії для них дуже низька. В умовах роботи машини розширення водню і гелію спричинює їх нагрівання.

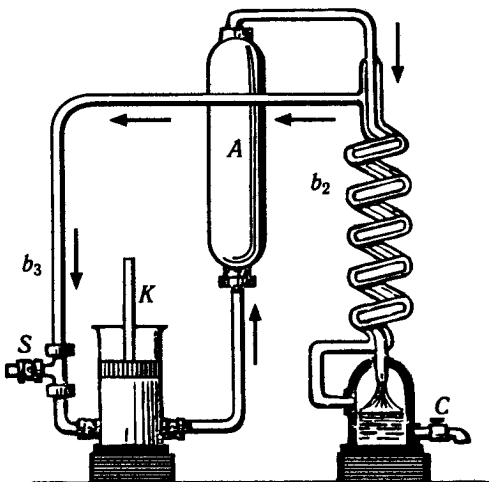


Рис. 188

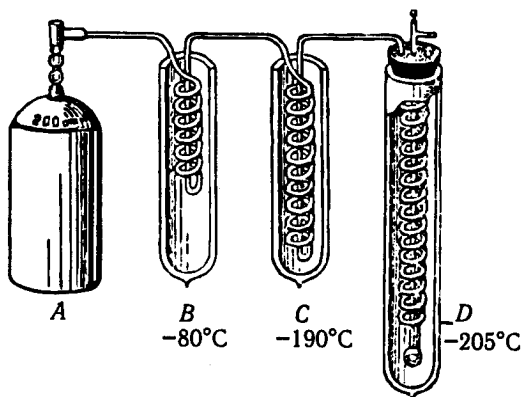


Рис. 189

2. Для зрідження водню та гелію англійський вчений Дж. Дьюар (1842–1923) і голландський фізик Х. Камерлінг-Оннес (1853–1926) використали каскадний спосіб, тобто послідовне охолодження за допомогою зріджених газів, які киплять при значно нижчій температурі. Наприклад, у дослідах Дж. Дьюара водень для зрідження з балона *A* (рис. 189) під тиском 20 МПа проходив через низку зміювиків, занурених у рідкі газу у посудинах *B*, *C*, *D*. У першій посудині кипів діоксид вуглецю при 193 К, у другій – рідке повітря при 83 К, у третій – при зниженому тиску відбувалося інтенсивніше кипіння рідкого повітря, унаслідок чого його температура знижувалася до 68 К. В останніх двох каскадах, крім зовнішнього охолодження, водень додатково охолоджувався завдяки розширенню та позитивному ефекту Джоуля–Томсона; тому під кінець він зріджувався.

У процесі кипіння рідкого водню при зниженому тиску Дж. Дьюар зафіксував температуру 14 К. Пізніше Х. Камерлінг-Оннес використав цю температуру в каскаді для зрідження гелію. У процесі кипіння рідкого гелію при зниженому тиску ( $\sim 2$  Па) Х. Камерлінг-Оннес зафіксував температуру 0,9 К.

У 1926 р. голландський фізик В. Х. Кеэзом (1876–1956) добув твердий гелій. Отже, було доведено, що всі газу можна перевести в рідкий і твердий стани.

3. Газу зріджують також охолодженням їх у процесі адиабатичного розширення та виконання зовнішньої роботи. Машини, дія яких ґрунтується на використанні цього способу, називаються *детандерами*. Перші детандери мали вигляд поршневиx машин і були малоефективними.

У 1939 р. російський фізик П. Л. Капіца (1894–1984) побудував дуже ефективну машину – турбодетандер для зрідження повітря.

У ній повітря під тиском 600 кПа підводиться до турбіни, приводить її в рух, виконує зовнішню роботу та при цьому настільки охолоджується, що частина його зріджується.

Ідея побудови турбодетандера не була новою, але здійснити її нікому не вдавалось. Академік П. Л. Капіца довів, що з повітрям при значній густині й малій швидкості потоку треба поводитися, як із речовиною, проміжною між рідиною і газом. Турбодетандер Капіци має порівняно малі розміри та є чимось середнім між водяною і паровою турбінами. Наприклад, у турбодетандері з пропускною здатністю 500...600 м<sup>3</sup> повітря за 1 год діаметр ротора – 8 см, його маса – 250 г. Ротор робить 40 000 об/хв. Машина дає 30 кг рідкого повітря за 1 год, її коефіцієнт корисної дії досягає 80 %.

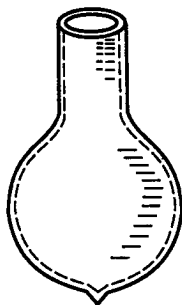


Рис. 190

Рідке повітря прозоре, має блакитнуватий відтінок. За кімнатних умов воно інтенсивно кипить, тому зберігають рідке повітря у відкритих дьюарівських посудинах. Це посудини з вузькими шийками та подвійними стінками (рис. 190), між якими створюють дуже високий вакуум.

Повітря зріджують, щоб поділити його на складові: з нього спочатку випаровують неон і азот, а потім кисень та аргон. Ці гази мають важливе значення. Азот використовують для добування синтетичного аміаку; інертні гази – для наповнення газосвітних ламп тощо. Кисень у суміші з ацетиленом або воднем широко застосовується для автогенного зварювання і різання металів; у металургії кисень використовують для доменного дуття; рідкий кисень у суміші з вугільним порошком або бавовною застосовують як вибухову речовину в гірничій справі.

## § 119. Властивості речовин за низьких температур

Використовуючи температури рідкого повітря, водню та гелію, можна спостерігати якісно нові властивості речовини. Якщо за допомогою рідкого повітря заморозити каучук або м'ясо, то вони стають дуже крихкими і молотком розбиваються на дрібні частинки. Заморожена в рідкому повітрі жива квітка зберігає колір, але розбивається на дрібні частинки при падінні зі столу. Ртуть, спирт та інші рідини замерзають під час охолодження рідким повітрям; із замороженої ртуті можна зробити молоток, її можна кувати. Модель, виготовлена зі свинцю, після охолодження у

рідкому повітрі при ударах дає звук дуже чистого тону. Все це свідчить про істотні внутрішні зміни в будові тіл за низьких температур.

Незвичайно змінюється електропровідність металів поблизу абсолютного нуля. Х. Камерлінг-Оннес у 1911 р. виявив, що електричний опір деяких металів і сплавів за певних температур раптово спадає до нуля. Це явище він назвав *надпровідністю*. Надпровідність виявлено у ртуті за температури, нижчої від 4,2 К, олові – 3,75 К, свинцю – 7,2 К та в інших металах.

У 1938 р. академік П. Л. Капіца поблизу абсолютного нуля відкрив особливі властивості рідкого гелію. Він помітив, що при зниженні температури від 4,1 до 2,19 К гелій кипить і поводить ся, як усякий зріджений газ. Однак при 2,19 К кипіння гелію припиняється, поверхня рідини стає гладенькою, гелій I перетворюється на гелій II. П. Л. Капіца, досліджуючи гелій II, виявив, що він дуже теплопровідний та не має в'язкості. Останню властивість гелію II вчений назвав *надплинністю*. Про ці особливі властивості речовини поблизу абсолютного нуля йтиметься далі.

## § 120. Властивості та структура рідини

За властивостями і структурою рідина займає проміжне місце між газами та твердими тілами.

З одного боку, рідина подібно до газів не має власної форми, а набирає форми посудини, характеризується плинністю і в'язкістю. За критичних температур та тиску різниця між рідиною і газом взагалі зникає. Рівняння ван дер Ваальса для реальних газів у першому наближенні можна застосувати також до рідин.

З іншого боку, за деякими характеристиками рідина близька до твердих тіл. Близькими є значення густини речовини в рідкому та твердому станах; мало відрізняються значення їхніх теплоємностей; однакового порядку коефіцієнти об'ємного стиску; подібно до твердого тіла рідина виявляє міцність на розрив, може перебувати в розтягнутому стані.

До чого ближча рідина за своїми властивостями – до газу чи твердого тіла – залежить від її температури і тиску. В умовах, близьких до кристалізації речовини, рідина більше наближається до твердого тіла, а з підвищенням температури – до газу.

Основною відмінністю рідини від газу є збереження об'єму, від твердого тіла – її плинність.

Яка ж структура рідини? Як відомо, в газах рухи та розміщення молекул хаотичні й безладні. Атоми або молекули твердого тіла на відміну від газів групуються між собою та утворюють комірку кристала, яка за строгою системою повторюється по всій масі твердого тіла. Кажуть, що у твердому тілі існує *дальній порядок* молекул. Очевидно, рідина, як проміжний стан між газом і твердим тілом, у своїй структурі певною мірою відображає і безладність, і порядок у множині молекул. Аналіз дослідних даних дає підстави стверджувати, що в рідинах існує *ближній порядок* молекул, тобто порядок лише у перших координаційних сферах різних угруповань молекул.

Справді, в результаті плавлення кристалічної речовини її об'єм змінюється незначно. Якщо, наприклад, для міді у твердому стані на вільний простір, не зайнятий атомами, припадає 26 % усього об'єму кристала, то після плавлення цей вільний об'єм збільшується

ся лише на 3 %. Водночас не може статися великих змін у взаємодіях атомів та їх розміщенні. До того ж близькі значення теплоємностей речовини у твердому та рідкому станах теж указують на подібний характер рухів їхніх частинок.

Інша картина, коли речовина переходить із рідкого стану у пару (за температури, значно нижчої від критичної). Об'єм речовини при цьому дуже збільшується. Наприклад, питомий об'єм водяної пари у 1650 разів більший від питомого об'єму рідини. До того ж теплота пароутворення у десятки разів перевищує теплоту плавлення. Порівняння цих характеристик процесу переходу рідини у пару – у стан повної безладності молекул – із характеристиками плавлення ще більше переконує в тому, що рідина має зберігати «сліди» кристала.

Існування у рідинах ближнього порядку молекул безпосередньо підтверджується структурним аналізом розсіяного в рідинах рентгенівського проміння.

Отже, в окремих мікрооб'ємах рідини, іншими словами, в межах перших координаційних сфер певна кількість молекул зберігає порядок, а за межами цих сфер відбуваються безладні зміни в розташуванні молекул. Тому центри мас координаційних сфер зазнають хаотичних зміщень. Таким чином, рідинам властиві як порядок, так і безладність у розміщенні молекул.

## § 121. Поверхневі властивості рідин. Поверхневий натяг

Поверхневий шар рідини має специфічні властивості порівняно з внутрішніми шарами. Основною з них є намагання поверхневого шару скоротитися до мінімальної площі. Поверхневі властивості рідин мають важливе значення у природі та практиці, тому заслуговують на детальний розгляд.

Специфічні властивості поверхневого шару рідини зумовлюються особливостями міжмолекулярних взаємодій.

Вище вже йшлося про те, що у взаємодіях між молекулами виявляються сили притягання та відштовхування. Російський фізик Я. І. Френкель (1894–1952) довів, що сили притягання та відштовхування по-різному залежать від відстані між молекулами. Якщо цю залежність зображати графічно, уявляючи, що одна із взаємодіючих молекул міститься на початку координат, а інша до неї наближається по осі  $Ox$ , і відкладати відповідні сили відштовхування вгору, а сили притягання вниз, то дістанемо криві (рис. 191), одна з яких – крива сил відштовхування  $F_B$  – помітно крутіша, ніж крива сил притягання  $F_{пр}$ .

Очевидно, коли рідина займає вільний об'єм, молекули в ній коливаються відносно положень, в яких сили притягання точно зрівноважуються силами відштовхування (точка  $C_0$  на рис. 191). У разі стиснення рідини та зменшення відстані між молекулами виявляються значні сили відштовхування ( $F_v \gg F_{пр}$ ). Цим пояснюється дуже малий коефіцієнт об'ємного стиску рідин ( $10^{-10} \dots 10^{-11} \text{ Па}^{-1}$ ). Зі збільшенням відстані між молекулами починають переважати сили притягання ( $F_v < F_{пр}$ ).

Через те що кінетична енергія молекул рідини недостатня для виконання роботи виходу за межі сил притягання, рідина займає певний об'єм.

Звертаємо увагу на те, що на поверхні й усередині рідини молекули перебувають у різних умовах (рис. 192). Коли молекула всередині рідини, то її з усіх боків симетрично оточують молекули, дії яких взаємно компенсуються. У молекулі, яка міститься на поверхні рідини, оточення несиметричне – переважають дії молекул нижчих шарів. Взаємодії молекули рідини з молекулами пари і повітря над рідиною настільки незначні, що ними можна нехтувати. Точніше, всі молекули, що містяться у поверхневому шарі рідини, товщина якого дорівнює радіусу сфери молекулярної взаємодії  $R$ , перебувають під дією певних результуючих сил молекулярних взаємодій, напрямлених усередину рідини. Чим вище молекула у поверхневому шарі, тим більша результуюча сила діє на неї. Ці сили створюють поверхневий молекулярний тиск на рідину. Вони

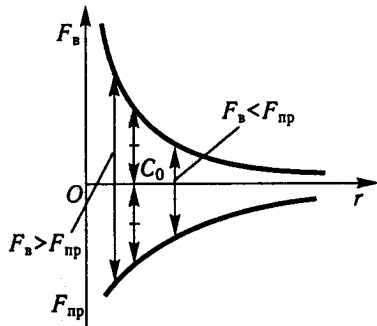


Рис. 191

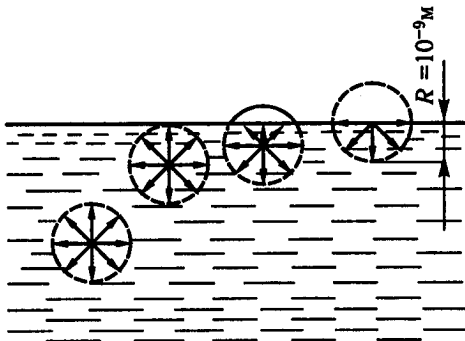


Рис. 192



так само виявляються на поверхні твердих тіл, а в газах створюють додатковий тиск, що входить як поправка до рівняння ван дер Ваальса  $\left( p_i = \frac{a}{V^2} \right)$ .

Безпосередньо виміряти молекулярний тиск неможливо, оскільки рідина завжди оточена своїм поверхневим шаром. Цей тиск можна визначити за поправкою на тиск у рівнянні ван дер Ваальса або за пароутворенням рідини. В останньому випадку можна припустити, що питома теплота пароутворення  $r$  витрачається на роботу виходу молекул за сферу взаємодії з рідиною. Обчислюючи цю роботу на відстані  $R$  проти молекулярного тиску  $p_0$  для  $\frac{N_A}{\mu}$  молекул, що становлять одиницю маси, дістаємо

$$r = p_0 (\pi r_0^2) R \frac{N_A}{\mu},$$

де  $r_0$  – ефективний радіус молекули;  $N_A$  – число Авогадро;  $\mu$  – маса 1 кмоль рідини. З цієї рівності визначаємо молекулярний тиск поверхневого шару  $p_0$ .

Молекулярний тиск поверхневого шару в рідинах і твердих тілах досить значний, наприклад для води він дорівнює  $10^9$  Па. Наявністю такого великого молекулярного тиску можна пояснювати також малий коефіцієнт об'ємного стиску рідин і твердих тіл.

Переходячи з середини рідини у поверхневий шар, молекули виконують роботу проти результуючих сил молекулярних дій

нижчих шарів. Завдяки цьому потенціальна енергія молекули збільшується. Тому молекули поверхневого шару мають більшу потенціальну енергію, ніж молекули решти об'єму рідини. Прямуєючи до мінімуму потенціальної енергії, поверхня рідини намагається скорочуватися. Сили, які зумовлюють таке скорочення поверхневої плівки рідини, називаються *силами поверхневого натягу*.

Дією сил поверхневого натягу пояснюється скорочення мильної плівки, що заповнює дротяний каркас із рухомою основою (рис. 193). Щоб утримати основу

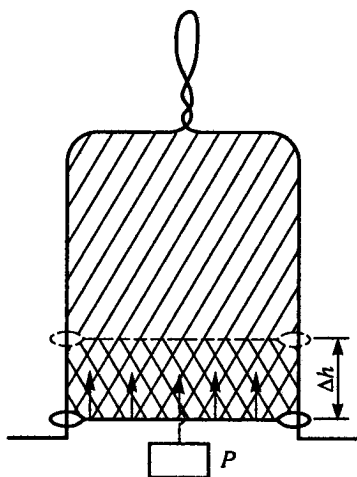


Рис. 193

каркаса від переміщення у бік скорочення площі плівки, треба підвісити до неї будь-який тягарець  $P$ .

Сила поверхневого натягу на будь-якій межі поверхні рідини пропорційна довжині межі:

$$F = \alpha l, \quad (1)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт поверхневого натягу, Н/м (чисельно він дорівнює силі поверхневого натягу, розрахованій на одиницю довжини межі);  $l$  – довжина межі поверхні рідини, м.

Коефіцієнт поверхневого натягу є важливою характеристикою рідини. Його значення залежить від температури та домішок. Наприклад, для деяких рідин при 293 К він має такі значення: вода –  $75 \cdot 10^{-3}$ , спирт –  $22 \cdot 10^{-3}$ , гліцерин –  $63 \cdot 10^{-3}$ , ртуть –  $460 \cdot 10^{-3}$  Н/м.

Із підвищенням температури коефіцієнт поверхневого натягу зменшується і при критичній температурі дорівнює нулю. Різні домішки можуть збільшувати або зменшувати коефіцієнт поверхневого натягу. Наприклад, розчинення цукру у воді збільшує її коефіцієнт поверхневого натягу, а мила – зменшує.

Оскільки під час скорочення поверхні рідини сили поверхневого натягу виконують роботу

$$\Delta A = \alpha l \Delta h,$$

тобто

$$\Delta A = \alpha \Delta S, \quad (2)$$

констатуємо, що поверхневий шар рідини має деяку вільну енергію.

*Вільною енергією* називають ту частину енергії тіла, яка може перетворюватися на роботу, коли процес відбувається за сталої температури. Наприклад, у механічних процесах, де температура не має значення, вільною є потенціальна енергія; для поверхневого шару рідини це надлишок потенціальної енергії порівняно з внутрішніми шарами. Згідно з виразом (2) *коефіцієнт поверхневого натягу чисельно дорівнює вільній енергії одиниці площі поверхневого шару рідини.*

Відповідно до загальних закономірностей природи скорочення поверхні рідини є прямованням до мінімуму вільної енергії системи. Різні форми мильних плівок на складних каркасах, кулеподібні краплі рідини, злиття двох крапель в одну – приклади мінімальних поверхонь рідини.

Ми з'ясували виникнення поверхневого натягу рідини на межі з парою. Аналогічно він створюється на межі з іншою незмішуваною рідиною або з твердим тілом. Зазвичай, коефіцієнти поверхневого натягу в різних випадках мають різне значення.

## § 122. Меніск. Формула Лапласа

Поверхня рідини біля стінки посудини викривляється, утворюючи меніск. Це явище пояснюється різними значеннями коефіцієнта поверхневого натягу на межах рідина – пара, рідина – тверде тіло, пара – тверде тіло. Напрями сил поверхневого натягу на цих межах за умови, що початковий рівень поверхні рідини горизонтальний, показано на рис. 194.

Як бачимо, на частинку рідини  $A$  діють три сили поверхневого натягу. Оскільки  $\alpha_{р.т}$  (сила поверхневого натягу на межі рідина – тверде тіло) взагалі не дорівнює  $\alpha_{п.т}$  (на межі пара – тверде тіло), рідина в області  $A$  підніматиметься або опускатиметься залежно від того, яка з указаних сил більша. При  $\alpha_{п.т} > \alpha_{р.т}$  утвориться угнутий меніск (рис. 195), а при  $\alpha_{р.т} > \alpha_{п.т}$  – опуклий (рис. 196).

На краю меніска сила  $\alpha_{р.п}$  стає дотичною до поверхні рідини й утворює зі стінкою посудини деякий крайовий кут  $\theta$ . Вертикальна складова цієї сили  $\alpha_{р.п} \cos \theta$  зумовлює встановлення рівноваги сил у точці  $A$ . Рівновага настає, коли забезпечуються рівності

$$\alpha_{п.т} = \alpha_{р.т} + \alpha_{р.п} \cos \theta$$

для угнутого меніска і

$$\alpha_{р.т} = \alpha_{п.т} + \alpha_{р.п} \cos(\pi - \theta)$$

для опуклого меніска.

Крайовий кут  $\theta$  вимірюють завжди з боку рідини, тому для угнутого меніска він гострий, а для опуклого – тупий.

Форма меніска рідини поблизу стінок посудини тісно пов'язана з явищем змочування. Його суть пояснюється взаємодіями молекул рідини з молекулами стінок посудини. Якщо сила взаємодії молекул рідини і твердого тіла сильніша такої всередині рідини, то рідина прилипає до твердого тіла, змочуючи його. У протилеж-

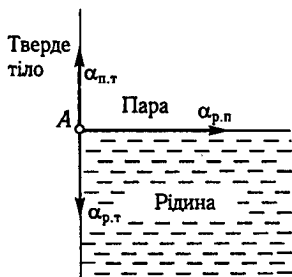


Рис. 194

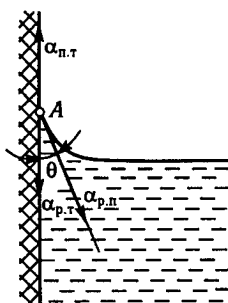


Рис. 195

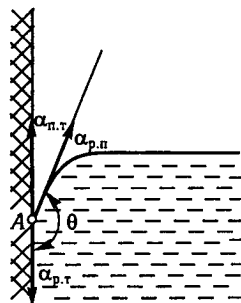


Рис. 196

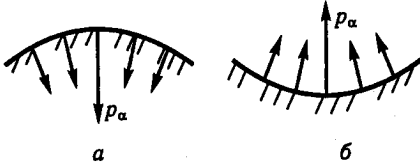


Рис. 197

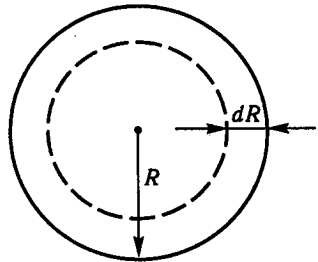


Рис. 198

ному випадку рідина не прилипає до твердого тіла, не змочує його. Рідина, що змочує стінки (наприклад, вода – скло) утворює угнутий меніск, а рідина, яка не змочує (наприклад, ртуть – скло), – опуклий меніск. Ці явища відіграють істотну роль у капілярах.

Всяка поверхнева плівка рідини під дією сил поверхневого натягу намагається скоротитися до мінімальної площі. Зокрема, якщо поверхнева плівка крива, то вона намагається стати плоскою. Проте, намагаючись стати плоскою, опукла плівка збільшує тиск на рідину, а вгнута – зменшує його (рис. 197). Інакше кажучи, крива поверхнева плівка створює на рідину додатковий тиск до тиску на неї плоскої поверхневої плівки.

Знайдемо значення додаткового тиску під кривою поверхнею. Нехай рідину обмежено сферичною поверхнею радіусом  $R$ . Під дією додаткового тиску поверхневої плівки рідина стискається, тому радіус сфери зменшується на  $dR$  (рис. 198). При цьому виконується деяка робота  $dA$ , яку можна обчислити за тиском  $p_\alpha$  поверхневої плівки і зміною об'єму  $dV$  рідини:

$$dA = p_\alpha dV \quad (1)$$

або за коефіцієнтом поверхневого натягу  $\alpha$  та скороченням поверхні  $dS$  рідини:

$$dA = \alpha dS. \quad (2)$$

Прирівнявши праві частини формул (1) і (2), дістанемо

$$p_\alpha dV = \alpha dS. \quad (3)$$

Якщо виразити диференціали об'єму та поверхні рідини через зміну радіуса вказаної сфери:

$$dV = d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2 dR;$$

$$dS = d(4\pi R^2) = 8\pi R dR,$$

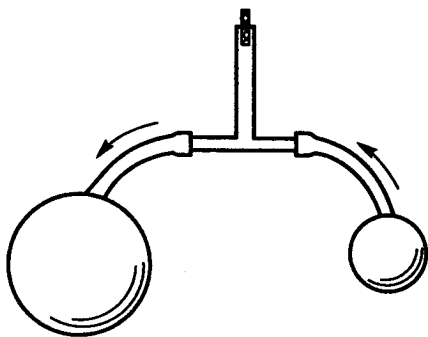


Рис. 199

У загальному вигляді, коли поверхня рідини є поверхнею двоякої кривини, додатковий тиск поверхневої плівки визначають за формулою, виведеною французьким ученим П. С. Лапласом у 1806 р.:

$$p_{\alpha} = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (5)$$

де  $R_1$  і  $R_2$  – радіуси кривини будь-яких двох взаємно перпендикулярних нормальних перерізів поверхні рідини. При  $R_1 = R_2$  у випадку сферичної поверхні з формули Лапласа дістають вираз (4).

Формула Лапласа свідчить, що додатковий тиск кривої поверхневої плівки прямо пропорційний коефіцієнту поверхневого натягу й обернено пропорційний радіусу її кривини. Остання залежність добре спостерігається на такому досліді. Якщо за допомогою скляного трійника, продовженого двома гумовими трубками, видути дві мильні бульбашки різного розміру (рис. 199), а потім отвір трійника закрити, то більша бульбашка почне збільшуватися, а менша – зменшуватися. У меншій бульбашці повітря перебуватиме під більшим лапласівським тиском, тому перейде в більшу бульбашку.

У дуже малих бульбашках повітря або пари у воді лапласівський тиск стає значним. Наприклад, у бульбашці повітря радіусом  $10^{-9}$  м у воді тиск відповідно до виразу (4) буде

$$p_{\alpha} = \frac{2 \cdot 75 \cdot 10^{-3}}{10^{-9}} = 15 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Явище утворення бульбашок у рідині називається *кавітацією*. Вона виникає у швидких потоках рідини у трубах, коли працюють гребні гвинти кораблів, коли струмінь пари потрапляє у воду тощо. Середовище кавітаційних бульбашок із величезним тиском у них є

то рівність (3) матиме вигляд

$$p_{\alpha} \cdot 4\pi R^2 dR = \alpha \cdot 8\pi R dR,$$

звідки

$$p_{\alpha} = \frac{2\alpha}{R}. \quad (4)$$

Такий додатковий тиск на рідину сферичної поверхневої плівки рідини. У разі вгнутої сферичної поверхні рідини цей тиск буде від'ємним.

жорстким середовищем. Воно може спричинювати руйнування гребних гвинтів кораблів, лопатів гідротурбін й інших гідротехнічних пристроїв.

### § 123. Капілярні явища

У широких посудинах, де поверхня рідини горизонтальна та плоска, вгнутий чи опуклий меніск біля стінок посудини істотної ролі не відіграє. Якщо ж посудина дуже вузька – капілярна, то вся поверхня рідини в ній має форму вгнутого або опуклого меніска. З достатньою точністю його можна вважати сферичним. Тут додатковий тиск, що виникає під меніском, істотно впливає на рівень рідини в капілярі, сполученому з широкою посудиною, в якій є рідина.

Розглянемо умову рівноваги рідини в капілярній трубці, опущеній у широку посудину з рідиною (рис. 200). Якщо капіляр змочується рідиною, то в ньому утворюється угнутий меніск, а тиск на рідину стає меншим, ніж у широкій посудині. Тому рідина переходить у капіляр і піднімається у ньому, доки надлишок гідростатичного тиску не компенсує зменшення тиску під угнутим меніском, тобто доки не справджуватиметься рівність

$$\rho gh = \frac{2\alpha}{R}, \quad (1)$$

де  $R$  – радіус кривини меніска.

Із рівності (1) знаходимо висоту піднімання рідини в капілярі

$$h = \frac{2\alpha}{\rho gR}. \quad (2)$$

Якщо капіляр не змочується рідиною, то в ньому утворюється опуклий меніск, а тиск на рідину стає більшим, ніж у широкій посудині. Рівень рідини в капілярі знижується доти, доки надлишок гідростатичного тиску  $\rho gh_1$  у широкій посудині не компенсує додаткового тиску під опуклим меніском у капілярі. Зниження рівня рідини в незмочувальному капілярі також знайдемо за формулою (2).

У формулу (2) замість радіуса кривини меніска вводять радіус  $r$  капіляра. Як впли-

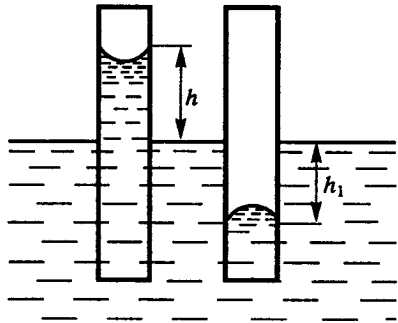


Рис. 200

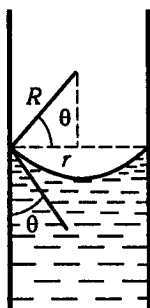


Рис. 201

ває з рис. 201,

$$r = R \cos \theta, \text{ або } R = \frac{r}{\cos \theta}.$$

Підставивши це значення у формулу (2), дістанемо

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r} \cos \theta, \quad (3)$$

де  $r$  – радіус капіляра;  $\theta$  – крайовий кут. Висота  $h$  підняття рівня рідини в капілярі обернено пропорційна радіусу трубки і залежить від роду рідини та крайового кута. Максимальне піднімання або опускання рідини буде в разі повного змочування або незмочування капіляра, коли  $\theta$  дорівнює відповідно  $0$  або  $180^\circ$ , а  $\cos \theta = \pm 1$ . Висота піднімання або опускання рідини зменшується із підвищенням температури, бо при цьому  $\alpha$  зменшується більше, ніж  $\rho$ .

Капілярні явища мають важливе значення у житті. Капілярне переміщення рідини відбувається не тільки у вузьких трубочках правильної форми, а й у вузьких каналах будь-якої форми: у щлинах, порах, тріщинах. Завдяки капілярному підніманню водних розчинів органічних речовин забезпечується живлення рослин із ґрунту. Так само піднімається волога по кам'яному фундаменту до стін будівлі, якщо не передбачити вологоізоляції. Капілярність відіграє істотну роль у розподілі, переміщенні та збереженні вологи в ґрунті. Усе це враховують, обробляючи ґрунт: щоб запобігти випаровуванню вологи, капіляри руйнують боронуванням; для піднімання вологи на поверхню збільшують капілярність ущільненням ґрунту.

## § 124. Квантові рідини

Рідкий гелій ( $^4\text{He}$ ) за температури, нижчої від  $2,19$  К, називають *квантовою рідиною*, оскільки його своєрідні властивості можна пояснити лише закономірностями квантової механіки.

Як відомо, гелій зріджується при найнижчій температурі, його критична температура становить  $-5,26$  К. Низька температура зрідження гелію пояснюється дуже слабкою взаємодією його атомів. Рідкий гелій при атмосферному тиску інтенсивно кипить і має температуру  $4,21$  К. Характерно, що при атмосферному тиску він залишається рідким із зниженням температури до абсолютного нуля (у твердий стан гелій переходить лише при тиску понад  $2,2$  МПа).

Щоб зрозуміти незвичну поведінку гелію, зіставимо уявлення про поведінку молекул речовини поблизу абсолютного нуля у кла-

сичній та квантовій фізиці. З погляду класичної фізики зі зниженням температури кінетична енергія молекул зменшується і при абсолютному нулі має дорівнювати нулю. Такі уявлення не відповідають дійсності. Поведінка молекул речовини поблизу абсолютного нуля підлягає квантовим закономірностям. У квантовій механіці відповідно до принципу невизначеності, за яким чим точніше фіксується положення частинки, тим менш точно визначається її швидкість, тобто

$$\Delta x \Delta v \geq \frac{h}{2\pi m}, \quad (1)$$

де  $\Delta x$ ,  $\Delta v$  – невизначеності при одночасному фіксуванні координати та швидкості частинки, а  $h$  – стала Планка, треба уявити, що навіть при абсолютному нулі мають залишатися деякі, так звані нульові, коливання молекул; їм відповідає деяка «нульова енергія», яку неможливо забрати у речовини. Оскільки сили взаємодій між атомами гелію дуже слабкі, а нульові коливання завдяки легкості його атомів дуже інтенсивні, при нормальному тиску навіть із наближенням до абсолютного нуля кристалічні ґратки не утворюються і гелій не замерзає.

Рідкий гелій за температури 4,21 К нічим не відрізняється від інших зріджених газів: має приблизно такі самі в'язкість ( $2 \cdot 10^{-6}$  Н·с/м<sup>2</sup>) та теплопровідність. Його особливістю є здатність перебувати у двох модифікаціях. Із зниженням температури до 2,19 К настає фазовий перехід гелію – рідкий гелій I переходить без виділення теплоти в рідкий гелій II. Такий фазовий перехід речовини називають *фазовим переходом другого роду*. Температуру, за якою відбувається цей фазовий перехід гелію, називають *λ-точкою*. Її назва походить від виду кривої залежності теплоємності рідкого гелію від температури (рис. 202). На відміну від фазових переходів першого роду в λ-точці теплоємність речовини зазнає стрибкоподібної зміни.

Гелій II за властивостями різко відрізняється від гелію I. Після переходу λ-точки кипіння гелію II припиняється, а його в'язкість миттєво зменшується до  $10^{-12}$  Н·с/м<sup>2</sup>. Гелій стає надтекучим і вільно протікає крізь найтонші капіляри.

Властивість надплинності є квантовим ефектом, пояснення якому дав російський фізик Л. Д. Ландау (1908–1968) в 1941 р. Відповідно до його теорії при абсолютному нулі рідкий гелій, як і всяка інша речовина, переходить у стан, що характеризується тільки «нульовою

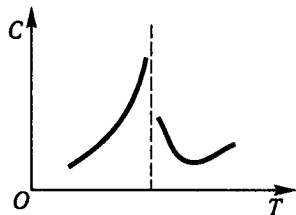


Рис. 202



енергією». Завдяки посиленню взаємодій між атомами в таких умовах вони утворюють зв'язаний колектив – конденсат, окремі частинки якого не можуть зазнавати теплових збуджень. Тому в рухах відносно стінок капіляра така рідина не може збільшувати свою енергію; вона може збудитися тільки при деякій критичній швидкості свого руху. Зрозуміло, що рідина, частинки якої не обмінюються імпульсом, не виявляє в'язкості, є надтекучою.

Із підвищенням температури від абсолютного нуля рідкий гелій збуджується, але так, що збудження займає лише частину рідини, а решта рідини залишається такою, як при абсолютному нулі. Іншими словами, з підвищенням температури до  $\lambda$ -точки гелій є ніби сумішшю двох рідин – збудженої та незбудженої. Перша, яка має в'язкість, – нормальна рідина, друга, що не має в'язкості, – надтекуча. Коли рідкий гелій протікає крізь капіляр, ці його складові поведуть себе по-різному: нормальна зазнає дії сили тертя і протікає в меншій кількості, надтекуча не зазнає його і відповідно протікає в більшому об'ємі. Чим вужчий капіляр, тим менше у потоці нормальної складової та більше надтекучої. Двокомпонентність рідкого гелію обґрунтував академік П. Л. Капіца.

Із підвищенням температури від абсолютного нуля і наближенням до  $\lambda$ -точки нормальна складова рідкого гелію збільшується, а надтекуча – зменшується. Вище від  $\lambda$ -точки весь гелій стає нормальною, в'язкою рідиною. Так у загальних рисах поводить себе рідкий гелій поблизу абсолютного нуля температури.

## Розділ 16

---

### ТВЕРДІ ТІЛА

#### § 125. Кристалічні й аморфні тіла. Основні характеристики кристалів

Із макроскопічного погляду у механіці твердим тілом називають таке тіло, яке зберігає свою форму. За внутрішньою будовою тверді тіла поділяють на *кристалічні* та *аморфні*.

Із мікроскопічного погляду, тобто внутрішньої будови, під твердим тілом розуміють тіло кристалічної будови. Аморфні, некристалічні, тіла – скло, смолу, вар, пластмаси – інакше називають *перехолодженою рідиною*. Чому? Тому, що властивості аморфних тіл загалом такі самі, як і дуже в'язких рідин. Рідини й аморфні тіла – ізотропні, тобто їхні фізичні властивості в усіх напрямках однакові.

Властивості кристалічних тіл різко відмінні від властивостей рідин. Особливістю тіл кристалічної будови є їхня анізотропність, тобто фізичні властивості кристалів не однакові в різних напрямках. Наприклад, таке тіло по деяких площинах можна легко розколоти (ці площини називають *площинами спайності*), тоді як по інших – міцність кристалів на зсув може бути дуже значною; у кристалах є напрями найбільшої та найменшої пружностей, напрями різної теплопровідності тощо. Те, що кристали льоду мають різну теплопровідність у різних напрямках, ілюструють візерунки на замерзлих вікнах.

У деяких кристалічних тілах, наприклад металах, анізотропність не виявляється тому, що вони складаються із багатьох дрібних кристалів (кристалітів, або зерен), розміщених безладно. Такі тіла називають *полікристалами*. У прокатаному металі та відтягнутому дроті спостерігається деяка впорядкованість у розміщенні кристалів, метал виявляє анізотропність, хоч його будова полікристалічна.

Яскраво виражена анізотропність монокристалів є результатом певного впорядкованого розміщення частинок тіла – утворення *кристалічних ґраток*, яке характерне для всього об'єму тіла (дальній порядок). *Монокристал* – тіло, всі частинки якого вкладаються в одні загальні просторові ґратки. Анізотропія в такій структурі має виявлятися хоча б тому, що у просторових ґратках

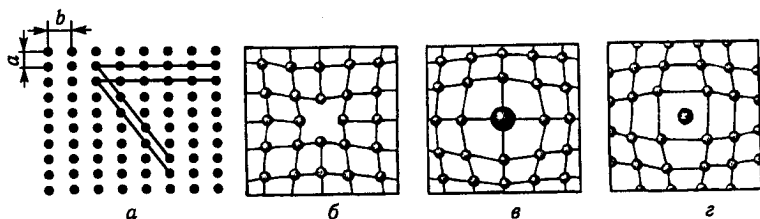


Рис. 203

у різних напрямках на однакові відрізки припадає різна кількість частинок; на рис. 203, а на горизонтальний відрізок – шість частинок, на похилий – чотири.

Частинки кристала, розміщені правильними рядами вздовж трьох косокутних осей координат, здійснюють коливальні рухи навколо своїх положень рівноваги, які називають *вузлами* кристалічної ґратки. Залежно від того, які саме частинки містяться у вузлах кристалічних ґраток, розрізняють такі чотири типи ґраток: іонні, атомні, молекулярні та металічні.

У вузлах *іонної ґратки* чергуються позитивні й негативні іони. Завдяки електричним взаємодіям вони створюють стійку структуру кристала. Переважна більшість кристалів має іонну ґратку. До них належать кристали неорганічних речовин NaCl, CsCl і т. д.

В *атомних ґратках* нейтральні атоми сусідніх вузлів зв'язуються валентними електронами. Орбіти в атомах зміщуються так, що електрони, які є спільними під час обертання навколо ядер сусідніх атомів, зв'язують їх між собою (аналогічно зв'язуються атоми в молекулах). Атомну ґратку мають графіт, алмаз, карборунд та ін.

*Молекулярні ґратки* утворюються полярними молекулами: різнойменно заряджені частинки двох сусідніх молекул притягуються і зв'язують молекули в ґратці. Порівняно з іонними молекулярні ґратки слабкіші, легше деформуються. Такі ґратки, наприклад, мають гума, парафін, целюлоза тощо.

*Металічні ґратки* утворюються позитивними іонами металу, які зв'язуються вільними, точніше, колективізованими електронами, що заповнюють простір поза вузлами ґратки. Такі ґратки властиві металам.

Причиною впорядкованого розміщення частинок твердого тіла є сили взаємодії між ними: притягання та відштовхування. Частинки займають певні положення рівноваги, при яких сили притягання і відштовхування взаємно зрівноважуються. Потенціальна енергія частинок у полі сил взаємодії стає мінімальною.

Прямування всякої вільнорухомої системи до стану мінімуму її потенціальної енергії становить сутність наукового принципу мінімуму потенціальної енергії. За цим принципом відбуваються спрямовані рухи обвалів гір, потоків рік, падіння дерев тощо.

Звичайно існують локальні впливи, що зумовлюють рухи протилежних спрямувань, у тому числі порушення регулярної структури кристала, виникнення дефектів у кристалічних ґратках, так званих *дислокацій*. Серед них поширеними є крайові дислокації, зумовлені незавершеністю окремих блоків ґраток. Порушення дальнього порядку можливе також тоді, коли вузлова точка в ґратці виявиться вакантною (рис. 203, б) або заповненою чужорідним атомом (рис. 203, в), а також якщо чужорідний атом заляже поміж лініями вузлів (рис. 203, г).

Наявність дефектів у кристалі істотно впливає на його властивості. Наприклад, домішки у кристалічних ґратках германію або силіцію в кількості лише 0,1 % практично ніяк не впливають на структуру кристалів, але в тисячі разів змінюють їхній електричний опір.

Як відомо, досліди з використанням радіоактивних нуклідів дають змогу виявляти різницю у дифузії чистих кристалічних тіл і тіл з наявними дислокаціями: у першому випадку дифузія практично відсутня, у другому – вона поліпшується зі збільшенням у кристалах дислокацій. Отже, процес дифузії в кристалі забезпечується переміщенням дефектів у кристалічних ґратках.

Зрозуміло, що в ідеальному кристалі, коли всі вузли ґратки зайняті, пробитися до них чужорідним атомам майже неможливо; у кристалі з наявністю дислокацій перешкоди для переміщення чужорідних атомів стають більш прозорими та менш стійкими. З підвищенням температури тіла явище дифузії в кристалічних тілах проходить швидше.

Основоположником учення про кристали є російський вчений Є. С. Федоров (1853–1919). Він створив математичне вчення про симетрію і дослідив усі можливі просторові розміщення частинок кристала, довів можливість існування 230 різних просторових груп та запропонував за ознаками симетрії поділити їх на 32 класи. У сучасній кристалографії ці класи об'єднуються у сім систем: триклінну, моноклінну, ромбічну, тригональну, гексагональну, тетрагональну і кубічну. Є. С. Федоров розробив досконалий теодолітний гоніометр (кутомір), який відіграв важливу роль у дослідженні кристалів.

У 1913–1914 рр. російський вчений Г. В. Вульф (1863–1925) та англійські вчені В. Г. Брегг (1862–1942) і В. Л. Брегг (1890–1971)

поклали початок дослідженням кристалів за допомогою рентгенівського проміння. Ці дослідження повністю підтвердили вчення Є. С. Федорова.

## § 126. Плавлення і кристалізація. Випаровування твердих тіл. Потрійна точка

Тверді тіла внаслідок неперервного нагрівання розширюються, а потім переходять у рідкий стан, плавляться. Аморфні та кристалічні тіла плавляться по-різному.

Аморфне тіло (віск, скло) з підвищенням температури поступово розм'якшується і переходить у рідину; протягом усього цього процесу його температура зростає (рис. 204, *а*).

Кристалічне тіло під час нагрівання залишається твердим, доки не буде досягнуто певної температури плавлення  $T_{\text{пл}}$  (рис. 204, *б*); з продовженням нагрівання тіло плавиться, а його температура залишається сталою. Тільки коли все тверде тіло розплавиться, температура рідини почне підвищуватись.

Щоб розплавити тверде тіло, йому треба надати певної кількості теплоти. Кількість теплоти, потрібну для плавлення 1 кг заданого твердого тіла за температури його плавлення, називають *питомою теплотою плавлення*.

Розглянемо процес плавлення кристалічного тіла, виходячи з його внутрішньої структури. Вже зазначалося, що впорядковане розміщення частинок у кристалах відповідає мінімуму їхньої потенціальної енергії. Тому перехід до рідкого стану супроводжується збільшенням внутрішньої енергії речовини. Спочатку з нагріванням тіла кінетична енергія його частинок зростає, але залишається недостатньою для подолання зв'язків між ними в кристалічній ґратці. Коли досягається температура плавлення, кінетична енергія частинок тіла стає достатньою для руйнування кристалічної ґратки. Із цього моменту вся теплота, яку дістає тіло, витрачається

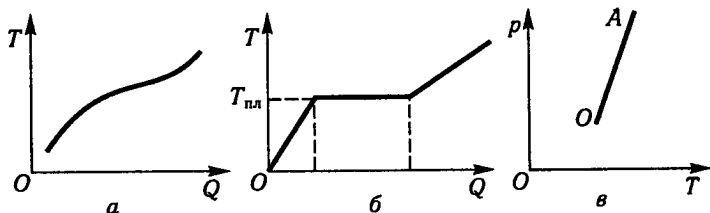


Рис. 204

на руйнування кристалічної ґратки і відповідне збільшення потенціальної енергії частинок тіла. Тому температура тіла залишається сталою, доки воно повністю не розплавиться. Після цього знову теплота, яку дістає тіло, йде на збільшення кінетичної енергії частинок, температура тіла підвищується.

Якщо у процесі плавлення припинити підведення теплоти ззовні, то плавлення припиниться і при тій самій температурі рідина та тверде тіло перебуватимуть у динамічній рівновазі. Зрозуміло, що їхні частинки різняться потенціальною енергією – молекули рідини мають надлишок потенціальної енергії.

У процесі плавлення твердих аморфних тіл теплота, яку дістають тіла, йде на збільшення кінетичної енергії молекул, температура тіла під час плавлення і після нього весь час зростає. Аморфне тіло не має певної температури плавлення. Воно поводить себе як дуже в'язка, переохолоджена рідина.

Температура плавлення кристалічного тіла залежить від зовнішнього тиску, при якому відбувається процес, а питома теплота плавлення, у свою чергу, є функцією температури плавлення. У процесі плавлення об'єм більшості тіл збільшується, а зовнішній тиск протидіє цьому; тому зі збільшенням тиску температура плавлення зростає (рис. 204, в). Легко зрозуміти, що крива  $OA$  в координатній площині  $p, T$  є також межею між твердою та рідкою фазами тіла. Деякі тіла (лід, чавун, стибій, бісмут), плавлячись, зменшуються в об'ємі; тому зі збільшенням тиску температура їх плавлення зменшується. Наприклад, для льоду зменшення температури плавлення дорівнює приблизно  $1\text{ К}$  на  $13 \cdot 10^6\text{ Па}$ . Характерно, що при дуже високих тисках тіла, об'єм яких під час плавлення збільшується, можна утримати у твердому стані при температурі, вищій за критичну. Наприклад, діоксид вуглецю, для якого критична температура дорівнює  $304,1\text{ К}$ , при тиску  $12 \cdot 10^8\text{ Па}$  можна зберігати у твердому стані до  $366\text{ К}$ .

Із підвищенням температури плавлення твердого тіла питома теплота його плавлення зменшується.

Процес переходу рідкої фази у тверду називається *кристалізацією*. Кристалізація тіла в заданих умовах починається за тієї самої температури, при якій тіло плавилось. Правда, для цього зародки кристалізації мають бути у вигляді дрібних зерен твердого тіла. Якщо таких зародків немає, то перехід речовини у твердий стан відбувається із запізненням. Процес кристалізації пов'язаний зі зменшенням внутрішньої енергії тіла; тому для того щоб він відбувся, від тіла слід відводити теплоту.

Тверді тіла можуть також випаровуватися за будь-якої температури. Переведення твердого тіла безпосередньо в газоподібний стан називають *сублімацією*. Легко можна спостерігати випаровування

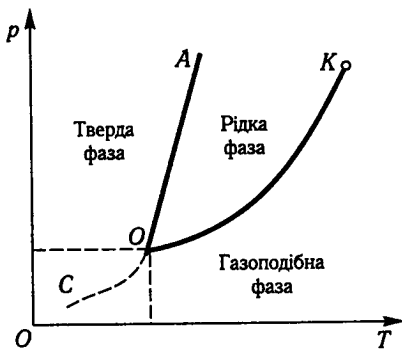


Рис. 205

кристаликів йоду у пробірці, нафталіну, камфори та інших «пахучих» твердих тіл. У процесі висихання білизни на морозі випаровується лід. Процес сублімації супроводиться поглинанням певної кількості теплоти. Враховуючи енергетичні зміни в частинках речовини у процесі сублімації, можна дійти висновку, що питома теплота сублімації  $l$  дорівнює сумі питомих теплот плавлення  $\lambda$  і пароутворення  $r$ :

$$l = \lambda + r.$$

Підсумуємо фазові переходи речовини. У § 117, розглядаючи властивості насиченої пари, ми з'ясували умови переходу рідини в газоподібний стан, а також межу  $OK$  між цими фазами в координатній площині  $p, T$  (див. рис. 187). А у цьому параграфі ми визначили в цій самій площині  $p, T$  межу  $OA$  між твердою та рідкою фазами (рис. 205). Якщо всі ці фазові переходи зобразити в координатній площині  $p, T$ , то точка перетину  $O$  згаданих вище кривих (див. рис. 205) виражатиме умову рівноваги трьох фаз речовини: твердої, рідкої і газоподібної, її називають *потрійною (сталю) точкою*. Нижче від точки крива  $OC$  зображує межу твердої та газоподібної фаз (криву сублімації).

Потрійна точка для води має такі координати:  $T_0 = 273,1$  К,  $p_0 = 6,02 \cdot 10^2$  Па; для діоксиду вуглецю –  $T_0 = 216,5$  К,  $p_0 = 5 \cdot 10^5$  Па і т. д. Звідси випливає, що діоксид вуглецю при нормальному тиску в рідкому стані не може існувати; тому ми спостерігаємо безпосередній перехід його з твердого стану в газ.

## § 127. Теплоємність твердих тіл. Недоліки класичної теорії та квантова теорія теплоємності

Якщо керуватися класичним принципом рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності, то частину внутрішньої енергії речовини, що залежить від температури, можна виразити так:

$$U = \frac{i}{2} kTN, \quad (1)$$

де  $i$  – кількість ступенів вільності частинки;  $k$  – стала Больцмана,  $T$  – температура;  $N$  – кількість частинок у тілі.

У вузлі кристалічної ґратки кожна частинка твердого тіла може коливатися у трьох взаємно перпендикулярних напрямках, тому має шість ступенів вільності: три для кінетичної енергії та три для потенціальної. Тому теплоємність  $C_V$  1 кмоль будь-якої простої речовини у твердому стані має становити

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{6}{2} kN = 3R \approx 25 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К}). \quad (2)$$

За звичайних температур теплоємність  $C_V$  1 кмоль більшості хімічно простих твердих тіл дорівнює  $25 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})$ . Цей факт відомий як закон, відкритий французьким вченим П. Л. Дюлонгом (1785–1838) та А. Т. Пті (1791–1820) у 1819 р.

Для хімічно складних твердих тіл застосовували закон Неймана, відкритий у 1831 р., згідно з яким теплоємність  $C_V$  1 кмоль дорівнює  $25 \cdot 10^3 n \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})$ , де  $n$  – кількість атомів у молекулі.

Точніші виміри теплоємностей твердих тіл засвідчили, що навіть у межах звичайних температур закон Дюлонга і Пті та закон Неймана мають наближений характер. Для ілюстрації цього наведемо справжні значення теплоємностей деяких твердих тіл (табл. 10).

Для низьких температур закон Дюлонга і Пті та закон Неймана не справджуються, вони взагалі не враховують залежність теплоємності від температури. Насправді зі зниженням температури теплоємність усіх твердих тіл зменшується і з наближенням до абсолютного нуля прямує до нуля.

Теорію теплоємності тіл уточнила квантова механіка, згідно з якою енергія окремих частинок може змінюватися лише певними порціями – квантами (отже, стрибкоподібно). Саме це треба враховувати, визначаючи зміну енергії коливальних рухів частинок у вузлах кристалічних ґраток твердого тіла. Порція енергії, на яку стрибкоподібно змінюється енергія частинки, дорівнює  $h\nu$ , де  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  – стала Планка,  $\nu$  – частота коливання час-

Таблиця 10

Речовина	$C_V \cdot 10^3$ , Дж/(кмоль · К)	Речовина	$C_V \cdot 10^3$ , Дж/(кмоль · К)
Залізо	26,65	Оксид міді	47,22
Свинець	27,28	Оксид цинку	46,63
Цинк	25,55	Нітрат натрію	98,88



тинки. В інтервалі температур, у якому середня енергія, що припадає на один ступінь вільності,  $\bar{\omega}_0 = \frac{1}{2}kT$  велика порівняно з  $h\nu$ , можна вважати, що енергія частинки змінюється неперервно з температурою, і тому можна застосовувати класичну теорію. Для низьких температур, коли енергія, яка припадає на один ступінь вільності частинки, стає порівнянною з енергією кванта  $h\nu$ , треба застосовувати квантову теорію. Частота коливання частинок у вузлах кристалічної ґратки дорівнює  $10^{-12} \text{ с}^{-1}$ ; тому з нерівності

$$\frac{1}{2}kT > h\nu$$

впливає, що класична теорія теплоємності може справджуватися при температурі  $T > 100 \text{ К}$ .

## Розділ 17

---

### МІЖФАЗОВІ ЯВИЩА

#### § 128. Випаровування. Рівняння Клапейрона–Клаузіуса

*Випаровуванням* називають один із процесів перетворення речовини з рідкої або твердої фази на газоподібну, який відбувається тільки з вільної поверхні. Відомо, що швидкість випаровування залежить від площі вільної поверхні речовини, температури та поверхневих відтоків.

Зауважимо, що для одержання кількісних характеристик процесу крім молекулярно-кінетичного методу використовується термодинамічний метод циклів, започаткований Н. Л. С. Карно. Проведемо за цим методом дослідження перетворення рідини на пару, пов'язуючи цей процес із циклом Карно (див. § 106).

Припустимо, що в циліндрі під поршнем знаходиться у термодинамічній рівновазі рідина з її насиченою парою. Здійснимо з цієї системою цикл Карно (рис. 206):

- ізотермічне розширення  $AB$  за температури  $T$ . Нехай при цьому система одержить кількість теплоти, що чисельно дорівнює питомій теплоті пароутворення  $r$ , завдяки чому випарується додатково одиниця маси рідини; об'єм системи збільшиться на  $\Delta V = V_2 - V_1$ , де  $V_1$  – питомий об'єм рідини,  $V_2$  – питомий об'єм пари; тиск насиченої пари залишиться незмінним, тому цей процес буде одночасно ізобаричним;

- здійснимо далі квазістатичне адіабатичне розширення  $BC$ , завдяки чому температура знизиться до  $T - dT$ ;

- ізотермічне стиснення при  $T - dT$  – частина пари сконденсується і виділиться кількість теплоти  $Q_2$ , яка буде передана тілу з температурою  $T - dT$ ;

- адіабатичне стиснення  $DA$  на нескінченно малий об'єм  $dV$ .

Цикл завершений, робота циклу дорівнює площі  $ABCD$ :

$$A = dp(V_2 - V_1).$$

За першим принципом термодинаміки  $\oint \delta A = \oint \delta Q$ . Врахувавши, що коефіцієнт корисної дії циклу Карно не залежить від природи

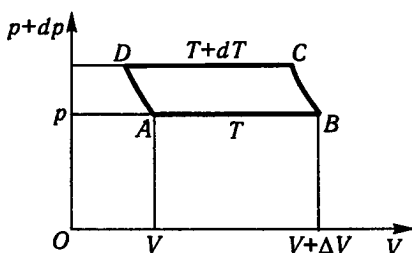


Рис. 206

робочої речовини, дістанемо

$$\eta = \frac{A}{q_{AB}} = \frac{T - (T - dT)}{T} = \frac{dT}{T}.$$

Оскільки в розглянутому циклі оперували питомими величинами, відповідно до їх позначень з останніх рівностей знайдемо

$$V_2 - V_1 = v_n - v_p; \quad q_{AB} = r.$$

Отже,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{r}{v_n - v_p}.$$

Останній вираз називають *рівнянням Клапейрона–Клаузіуса*. Це рівняння у 1834 р. запропонував французький вчений Б. П. Е. Клапейрон, а в 1850 р. його вдосконалив німецький фізик Р. Ю. Е. Клаузіс. Воно справджується для довільних фазових переходів першого роду – випаровування, плавлення, сублімації тощо; відображає зв'язок між змінами рівноважної температури фазового переходу та рівноважного тиску насиченої пари.

**Приклад.** Знайти питому теплоту випаровування  $q$  рідкого азоту за температури  $-196^\circ\text{C}$ , якщо тиск насичених парів азоту за температур  $-195, -196, -197^\circ\text{C}$  відповідно дорівнює 111; 99; 88 кПа. Вважати, що газоподібний азот до температури конденсації описується рівнянням Клапейрона–Менделєєва. Питомим об'ємом  $v_p$  рідкого азоту знехтувати порівняно з питомим об'ємом  $v_n$  газоподібного азоту.

**Розв'язання.** Враховуючи, що  $v_p \ll v_n$ , з рівняння Клапейрона–Клаузіуса знаходимо

$$q = T(v_n - v_p) \frac{dp}{dT} = T v_n \frac{dp}{dT}. \quad (1)$$

За рівнянням Клапейрона–Менделєєва для одиниці маси  $m = 1$  газоподібного азоту маємо

$$p v_p = \frac{m}{\mu} RT = \frac{R}{\mu} T.$$

Отже,

$$q = \frac{RT^2}{\mu p} \frac{dp}{dT}. \quad (2)$$

Перейшовши у виразі (1) від  $\frac{dp}{dT}$  до скінченних різниць  $\frac{\Delta p}{\Delta T}$ , дістанемо

$$q = \frac{RT^2}{\mu p} \frac{\Delta p}{\Delta T}.$$

Після підстановки сюди даних знайдемо  $q = 2,09 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$ .

## § 129. Рідинні розчини. Закони Рауля

*Розчинами* називають однорідні речовини, що складаються із двох або більшої кількості компонентів. За агрегатними станами розрізняють газові, тверді та рідинні розчини. Як приклади можна навести відповідно суміш азоту й аміаку, легування металів, розчин цукру у воді і багато інших.

У цьому параграфі зосередимо увагу на процесі утворення та властивостях бінарних розчинів різних речовин у рідині.

Зазначимо, що за своїми властивостями розчини істотно відрізняються від властивостей їхніх компонентів. Це зумовлюється тим, що в розчинах проявляється ширший комплекс взаємодії частинок і їхніх складових (зокрема, частинок  $A \leftrightarrow A$  розчинника,  $B \leftrightarrow B$  частинки розчиненої речовини та  $A \leftrightarrow B$  взаємодій частинок обох складових розчину, різних за їхньою інтенсивністю та кількісними співвідношеннями мас).

**Розчини газів у рідинах.** Як відомо, два хімічно інертних гази в закритій посудині швидко перемішуються один з одним і їх загальний тиск, згідно з законом Дальтона, дорівнює сумі парціальних тисків компонентів суміші газів. Більший компонент газу можна назвати розчинником, менший – розчиненим газом.

Аналогічну молекулярно-дисперсну суміш можуть утворювати рідини з газами. Якщо рідина межує з газом, то неодмінно частина молекул рідини буде випаровуватись в область газу і, навпаки, буде проникнення молекул газу в середовище молекул рідини, що зумовить розчинення газу в рідині.

**Розчин твердої речовини в рідині.** Якщо тверде тіло внести в рідину, в якій істотно проявляється взаємодія  $A \leftrightarrow B$ , то частинки твердого тіла поступово будуть дифундувати в розчинник і в результаті залежно від співвідношення мас компонентів цього процесу зможемо дістати слабкий або насичений розчин твердого тіла в рідині.

Робота руйнування зв'язків між частинками розчинюваного тіла виконується завдяки внутрішній енергії системи (розчинника та характеру взаємодії  $A \leftrightarrow B$ ).

У цілому теплота розчинення залежить від природи компонентів розчину, співвідношення їхніх мас, впливів тиску і температури. Під час розчинення у воді твердих тіл теплота може виділятися (наприклад, при розчиненні  $\text{KOH}$ ,  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ) та поглинатися (наприклад, при розчиненні  $\text{NaCl}$ ,  $\text{KNO}_2$  та ін.).

Специфічні властивості недисоційованих і слабких розчинів описуються трьома законами, сформульованими французьким ученим Ф. М. Раулем (1830–1901) у 1882–1888 р.

*Перший закон* свідчить, що для концентрованих ідеальних розчинів і будь-яких слабких розчинів зниження тиску насичувальної пари над розчином пропорційне мольній концентрації розчину:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{n + N},$$

де  $p_0$  та  $p$  – тиск відповідно насиченої пари чистого розчинника і розчину;  $n$  та  $N$  – число молів розчиненої речовини і розчинника.

*Другий закон* констатує, що зниження тиску насичувальної пари розчину зумовлює підвищення температури його кипіння:

$$\Delta T_{\text{кип}} = E \frac{m}{\mu} = \frac{RT^2}{\lambda M} \frac{m}{\mu},$$

де  $E = \frac{RT^2}{\lambda \mu}$  – ебуліоскопічна стала;  $\lambda$  – питома теплота пароутворення розчинника за температури кипіння  $T$ ;  $m$  – маса в грамах розчиненої речовини в  $M$  грамах розчинника;  $\mu$  – молекулярна маса розчиненої речовини.

Ебуліоскопічна стала залежить тільки від природи розчинника (зауважимо, що, вимірюючи  $\Delta T_{\text{кип}}$ , можна використати другий закон Рауля для визначення молекулярної маси  $\mu$  розчиненої речовини).

*Третій закон* стверджує зниження температури замерзання розчину:

$$\Delta T = k \frac{m}{\mu} = \frac{RT_0^2}{r M} \frac{m}{\mu},$$

де  $k = \frac{RT_0^2}{r M}$  – кріоскопічна стала;  $T_0$  – температура твердіння розчину;  $r$  – питома теплота твердіння розчину (як і попередній, цей закон дає змогу визначити на досліді молекулярну масу  $\mu$  розчиненої речовини).

Для мотивації законів та їх усвідомлення, як зазначалося вище, потрібно враховувати не тільки масові співвідношення компонентів розчину, а й брати до уваги інтенсивність взаємодій частинок у розчині, тиск і температуру. Наприклад, чому згідно з першим законом Рауля тиск насиченої пари над розчином знижується? Це

зумовлюється зменшенням у поверхневому шарі кількості молекул розчинника, оскільки там частину місць займають молекули розчиненого тіла, які можуть досить інтенсивно стримувати випаровування молекул розчинника. За таких умов закон Рауля буде справджуватися.

Виняток може бути тоді, коли розчинник включатиме більш летку речовину. Тоді тиск насиченої пари над розчином може збільшитися завдяки випаровуванню леткого компонента.

## § 130. Осмотичний тиск. Закон Вант-Гоффа

Вище розглядалося явище дифузії в газах, обумовлене градієнтом густини маси в них. Тут розглянемо напрямлене переміщення молекул як компонентів розчину, зумовлене використанням напівпроникної перетинки, що забезпечує перехід лише певного компонента розчину.

Явище дифузії молекул (здебільшого розчинника) через напівпроникну мембрану, зумовлене односторонньою проникністю лише певних молекул, називають *осмосом*; тиск молекул розчиненої речовини на мембрану – *осмотичним тиском*.

Наочним проявом проникнення чистого розчинника – води через напівпроникну плівку – може слугувати набухання кинуті у воду сушні.

Осмотичний тиск можна виміряти; він дорівнюватиме надлишковому тиску, який потрібно створити на мембрану зовні, щоб припинити осмос.

Для ілюстрації процесу вимірювання осмотичного тиску можна взяти розчин цукру у воді незначної концентрації; мембраною може слугувати коров'ячий міхур, який пропускає воду, але не пропускає цукру; слід підібрати невеликий бутель, відрізати його дно і знизу з'ягнути плівкою міхура; в бутель налити розчин цукру та закрити його пробкою, через яку пропустити довгу скляну трубку.

Бутель опускають у ширшу посудину з водою (рис. 207), і через деякий час можна побачити, що вода з ширшої посудини в бутель проникає швидше, ніж у зворотному напрямі. Нарешті розчин у трубці піднімається до певної стабільної висо-

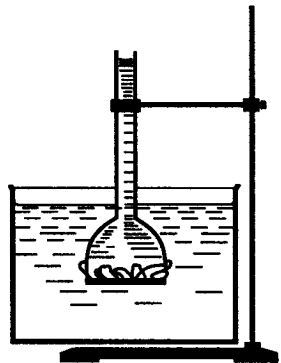


Рис. 207

ти, настає рівновага – кількість води, що протікає через міхур в обох напрямках, стає однаковою. Гідростатичний тиск стовпчика розчину в трубці визначає осмотичний тиск розчиненої речовини (в описаному досліді – цукру).

Дослідження осмотичного тиску залежно від концентрації та температури розчину привели до досить вагомого результату: розчинена речовина при незначній концентрації проявляє себе як ідеальний газ; осмотичний тиск  $\pi$  є не чим іншим, як парціальним тиском розчиненої речовини. Така суть закону, відкритого голландським ученим Я. Х. Вант-Гоффом (1852–1911) у 1886 р.:

$$\pi V = RT, \quad (1)$$

де  $\pi$  – осмотичний тиск;  $V$  – об'єм розчину, в якому міститься 1 моль розчиненої речовини;  $R$  – універсальна газова стала;  $T$  – абсолютна температура розчину.

Зауважимо, що рівняння (1) формально є тотожним рівнянню Клапейрона–Менделєєва.

Перевірка засвідчила, що закон Вант-Гоффа справджується із достатньою точністю для розчинів незначної концентрації і таких, молекули яких не дисоціюють на позитивні та негативні іони.

Явище осмосу спостерігається у проростанні рослин і внутрішніх процесах живих організмів. Оболонки їхніх клітин є напівпроникними мембранами, через які відбувається багато важливих обмінів речовин.

### § 131. Рівняння імпульсу для потоку газу (стисливої речовини)

Газодинамічне вчення розглядає явища в газових потоках і рухи тіл у газових середовищах зі швидкостями, близькими до звукових та надзвукових. За таких умов у газах можуть виникати різкі зміни густини, тиску, температури, і це необхідно враховувати. В основі газодинаміки лежать результати додаткових досліджень названих вище процесів комплексом динамічних та термодинамічних методів. Розглянемо деякі з них.

Виходимо з того, що згідно з другим законом механіки зміна імпульсу за одиницю часу точкового об'єкта дорівнює діючій на нього силі, для маси потоку  $dm$  і руху між двома перерізами  $S_1$  та  $S_2$  маємо

$$F_1 - F_2 = \frac{dmv_2 - dm v_1}{dt}, \quad (1)$$

де  $F_1 = p_1 S_1$  і  $F_2 = p_2 S_2$  – сили тисків у перерізах  $S_1$  та  $S_2$ .

Урахувавши, що  $\frac{dm}{dt} = \rho S v$ , після підстановки в (1) дістанемо

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 = \rho_2 S_2 v_2^2 - \rho_1 S_1 v_1^2,$$

або

$$S_1 (p_1 + \rho_1 v_1^2) = S_2 (p_2 + \rho_2 v_2^2). \quad (2)$$

Рівняння (2) називається *рівнянням імпульсу* для потоку ідеально стислої рідини.

### § 132. Рівняння Бернуллі для газів

Застосуємо рівняння Бернуллі до стисливих середовищ – газів. Урахувавши, що завдяки адіабатичним процесам температура газу у перерізах може бути різною, для одиниці його об'єму матимемо

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p + C_V \rho T = \text{const},$$

де  $C_V \rho T$  – внутрішня енергія газу.



Нехтуючи для газу членом  $\rho gh$ , дістаємо

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + C_V \rho T = \text{const}, \quad (1)$$

або, поділивши на  $\rho$ , матимемо

$$\frac{v^2}{2} + C_V T + \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (2)$$

Беручи до уваги, що  $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}$ , рівняння (2) набирає вигляду

$$\frac{v^2}{2} + C_p T = \text{const}. \quad (3)$$

Якщо з рівняння Клапейрона–Менделєєва визначити температуру і скористатися рівнянням Майєра, то дістанемо

$$T = \frac{\mu p}{\rho R} = \frac{p}{\rho \frac{R}{\mu}} = \frac{p}{\rho(C_p - C_V)}.$$

Підставивши цей вираз у (3), матимемо

$$\frac{v^2}{2} + \frac{C_p}{C_p - C_V} \frac{p}{\rho} = \text{const};$$

інакше

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (4)$$

або

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2}.$$

Таких виразів набирає рівняння Бернуллі для потоку газів.

### § 133. Критерій стисливості газів. Число Маха

Очевидно, що стисливість газів буде проявлятися у місцях значного зростання тиску, зокрема в разі гальмування потоку (при  $v_2 \rightarrow 0$ ). Аналітично цей випадок відобразатиметься рівнянням

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p + \Delta p}{\rho + \Delta \rho} \right),$$

або

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p + \Delta p}{\rho + \Delta \rho} - \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\Delta \rho}{\rho + \Delta \rho} \left( \frac{\Delta p}{\Delta \rho} - \frac{p}{\rho} \right). \quad (1)$$

Оскільки поширення імпульсу в газах підлягає адіабатичному процесу,

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (2)$$

Після диференціювання цього рівняння дістанемо

$$dpV^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1}dV = 0,$$

або

$$dpV + \gamma p dV = 0; \quad \frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}. \quad (3)$$

Згідно з означенням густини та після елементарних математичних перетворень матимемо

$$\rho = \frac{m}{V}; \quad d\rho = -m \frac{dV}{V^2};$$

$$d\rho = -\rho \frac{dV}{V}; \quad -\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (4)$$

Підставляючи (4) у (3), знаходимо

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho},$$

звідки

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} \approx a^2,$$

де  $a$  – швидкість звуку в газах.

Перейшовши до виразу (1), дістанемо

$$\frac{v^2}{2} = \gamma \frac{p}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} \approx a^2 \frac{\Delta\rho}{\rho}.$$

За останньою рівністю, виражаючи швидкість потоку числом Маха  $M = \frac{v}{a}$ , маємо

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{v^2}{2a^2}; \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{M^2}{2}. \quad (5)$$

Згідно з рівнянням (5) число Маха слугує критерієм стисливості газу у потоках.

## § 134. Конус Маха

Джерелом звукових хвиль є будь-яке тверде тіло, яке, переміщуючись у газовому середовищі, створює попереду себе область підвищеного тиску і тим самим стає причиною виникнення пружних збуджень.



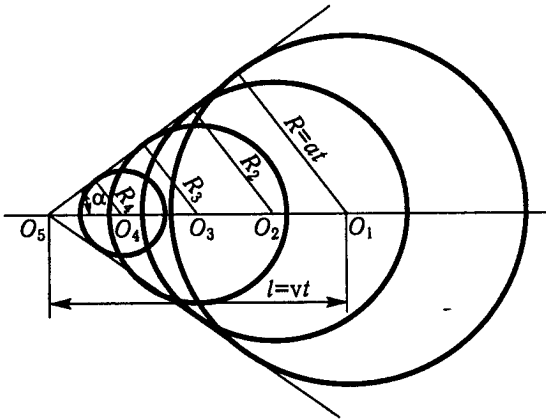


Рис. 209

Важливим наслідком руху тіла реальних розмірів із надзвуковою швидкістю у газовому середовищі є утворення значного лобового ущільнення газу – ударної лобової хвилі.

Для пояснення такого явища будемо виходити з порівняння взаємодії рухомого тіла із зустрічним середовищем, про що йшлося уже під час розгляду внутрішнього тертя (див. § 20). Зазначимо, що рухоме тіло, натикаючись на зустрічний газ, передає йому певний імпульс тиску і змушує його до обтікання.

Імпульс тиску поширюється у різних напрямках зі швидкістю звуку.

Поки тіло має дозвукову швидкість, зустрічний газ підлягає дії імпульсу тиску, а отже, плавно звільняє газове заповнення траси твердого тіла.

При надзвуковій швидкості зустрічний газ піддається раптовій дії тіла, при якій густина, тиск та температура газу раптово зростають. Перед тілом утворюється смуга значного ущільнення, що створює додатковий – хвильовий опір.

Лобове газове ущільнення – надто тонкий шар, порядку довжини вільного пробігу молекул; однак на ньому виникає значне заломлення світла і завдяки цьому воно піддається фотографуванню (рис. 210).

На подолання лобового ущільнення газу витрачаєть-

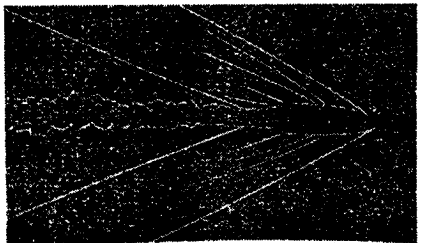


Рис. 210

ся значна потужність сучасних надзвукових літальних апаратів. Найдоцільнішими є їхні конусо- й кулеподібні лобові форми та швидкості 1,2  $M$ .

### § 135. Сопло Лаваля

Труба, в якій завдяки зміні поперечного перерізу у потоці рідини або газу в ній відбувається перетворення внутрішньої енергії потоку на його кінетичну енергію, називається *соплом*.

З'ясуємо суттєве питання: за яких умов потік, що виривається із сопла, має максимальну швидкість?

Для нестисливої рідини це питання вирішується на основі рівняння нерозривності потоку ( $\rho_1 = \rho_2$ )

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

звідки випливає, що максимальна швидкість існуватиме у найвужчому перерізі труби.

Для газового потоку в соплі результат істотно залежить від того, яка його швидкість – дозвукова ( $M < 1$ ) чи надзвукова ( $M > 1$ ). Продемонструємо це.

З урахуванням стисливості газу у потоці рівняння нерозривності потоку набирає вигляду  $\rho Sv = \text{const}$ .

Продиференціювавши це рівняння, дістанемо

$$\rho v dS + Sv d\rho + \rho S dv = 0.$$

Поділивши цей вираз на  $\rho Sv$ , матимемо

$$\frac{dS}{S} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0. \quad (1)$$

Якщо взяти до уваги рівняння Бернуллі

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{const},$$

то після його диференціювання знайдемо

$$v dv + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho dp - p d\rho}{\rho^2} = 0.$$

Урахувавши те, що

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2; \quad dp = a^2 d\rho; \quad p = \frac{\rho a^2}{\gamma},$$

після підстановки цих виразів у попередню рівність і скорочень

матимемо

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v dv}{a^2}.$$

Підставивши останній вираз у рівняння (1), дістанемо

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} - \frac{v dv}{a^2} = 0,$$

або

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0.$$

В остаточному вигляді

$$\frac{dv}{v} (1 - M^2) = -\frac{dS}{S}. \quad (2)$$

З одержаного виразу випливає важливий наслідок: якщо  $M < 1$ , то знак  $dv$  протилежний знаку  $dS$ ; при  $M > 1$  знак  $dv$  збігається зі знаком  $dS$ . Це означає, що швидкість дозвукового потоку при звуженні сопла зростає і зменшується у разі його розширення.

У надзвуковому потоці, навпаки, при розширенні сопла швидкість збільшується, потік прискорюється. Максимальна швидкість у найвужчій частині сопла не перевищує швидкості звуку в заданому місці.

Для того щоб із сопла виривався надзвуковий потік, необхідно, щоб воно було профільоване спеціальним чином. Спочатку газ витікає з резервуара і його потік має малу дозвукову швидкість; у цій частині для збільшення швидкості до звукової сопло містить ділянку звукозміщення перерізу, доки потік досягає місцевої швидкості звуку. Якщо сопло далі буде розширюватися, то швидкість потоку зростатиме.

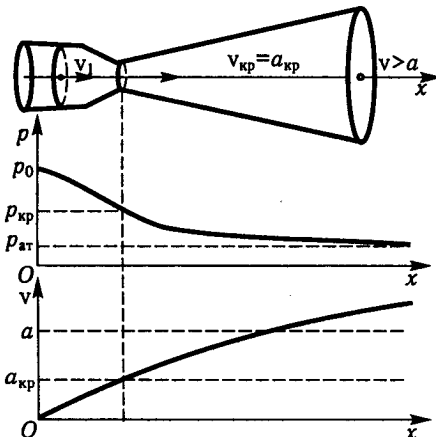


Рис. 211

Сопло, що працює в описаному режимі, називається *соплом Лавалю* (рис. 211) за ім'ям його винахідника шведського інженера К. Г. П. Лавалю (1845–1913).

У випадку протікання газу через сопло Лавалю його тиск, густина і температура неперервно зменшуються, а отже, внутрішня енергія газу теж зменшується. Завдяки цьому неперервно зростає кінетична енергія струменя газу, швидкість потоку може значно перевищити швидкість звуку. Сопла Лавалю використовуються у парових та газових турбінах, реактивних двигунах і ракетах.

### § 136. Реактивні двигуни

Основним елементом будь-якого реактивного двигуна є сопло Лавалю, оскільки для здобуття значної реактивної сили тяги за його допомогою досягаються надзвукові швидкості витікання робочих продуктів згорання із двигуна.

Розглянемо конструктивні особливості найпоширеніших реактивних двигунів – пряموструминного і турбореактивного.

Прямоструминний повітряно-реактивний двигун включає вхідне сопло 1 (рис. 212), через яке надходить повітря з надзвуковою швидкістю (опис процесу ведемо в системі відліку, пов'язаній з двигуном); услід за соплом утворюються один або кілька ущільнених шарів повітря, після подолання яких швидкість потоку газу спадає нижче звукової. Рухаючись уздовж все ширшого каналу, дозвуковий потік зменшує свою швидкість, унаслідок чого густина та температура газу зростають. Після потрапляння у камеру згорання 2 у стиснуте повітря впорскується паливе з резервуара 3; енергія згорання пального йде на підвищення внутрішньої енергії газу. З камери згорання газ проходить у сопло Лавалю 4. У разі правильно розрахованих термодинамічних параметрів газу в камері згорання в області найбільшого звуження сопла швидкість потоку збільшується до місцевої швидкості звуку, а в кінцевій стадії з вихідного сопла буде вириватися надзвуковий потік газу.

Прямоструминний двигун може працювати і розвивати значну реактивну силу тяги лише тоді, коли він переміщується із надзвуко-

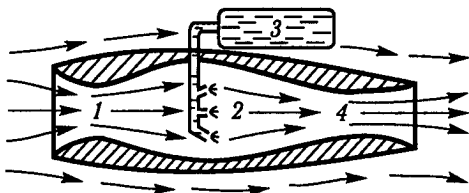


Рис. 212

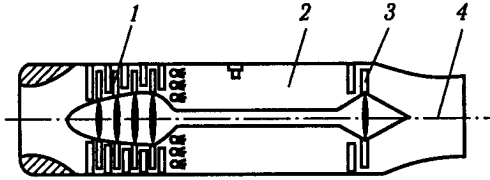


Рис. 213

вою швидкістю. Такий двигун дуже простий за конструкцією та характеризується надійністю в експлуатації. Для розгону його до надзвукової швидкості використовуються додаткові стартові ракети.

Реактивним двигуном, який може працювати на будь-яких швидкостях, є турбокомпресорний повітряно-реактивний двигун. На відміну від прямотруминного двигуна стиснення повітря у ньому досягається за допомогою компресора 1 (рис. 213), а енергія потоку за камерою згоряння 2 частково використовується у газовій турбіні 3, яка обертає компресор, а іноді й пропелер. Залишкова частина енергії спрямовується на створення реактивної тяги в соплі 4, розміщеному за турбіною.

Широке застосування реактивних двигунів розпочалося у 40-х роках ХХ ст. у зв'язку з військовими потребами збільшення швидкості літаків та далькості польоту снарядів. Ці проблеми не можна було вирішити за допомогою гвинтових двигунів. Як уже зазначалося, при наближенні до звукової швидкості опір звукового лобового бар'єра різко зростає і на його подолання витрачається значна потужність, тяга необхідна для переміщення літака стає недостатньою. Якщо врахувати також опір, якого зазнає гвинт у середовищі лобового ущільнення повітря, то дійдемо висновку, що потужність двигуна починає витрачатися не на збільшення швидкості літака, а на подолання зростаючого опору. За цих умов подолати звуковий поріг гвинтомоторний літак практично не міг, оскільки його гранична швидкість не перевищувала 800 км/год.

Далекобійна артилерія не могла досягти відстані, більшої від 150 км, тому що швидкість, якої снаряд набуває у стволі гармати, не може бути більшою від середньої швидкості руху частинок продуктів згоряння гармати; для найбільш якісного пороху ця швидкість не перевищує 3500 м/с (при цьому нарізна частина ствола швидко спрацьовується).

Досягти надзвукової швидкості літальних машин і далекобійності артилерії в сотні кілометрів стало можливим за допомогою реактивних двигунів.

У наш час швидкість ракет далекої дії перевищує 5000 км/год; далькість польоту досягає 300 км, а висота – 100 км.



## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

---

- Акустика 211  
Амплітуда коливання 26
- Вага тіла 39  
Вакуум 271  
Вектор 12  
– аксіальний 23  
– Умова 204  
Випаровування 353  
В'язкість 126  
– газу 128  
– рідини 128
- Газ ідеальний 244, 319  
– реальний 319  
Гелій-I 332, 343  
Гелій-II 332, 343  
Годограф 14
- Двигун пряموструминний 366  
– турбокомпресорний 367  
Двигуни реактивні 366  
Декремент згасання 187  
Дефект маси 166  
Деформація 50  
Дислокації 347  
Дослід Штерна 261
- Енергія 77  
– вільна 337  
– внутрішня 166, 292  
– кінетична 82  
– потенціальна 82  
Ентропія 310  
Ефект п'єзоелектричний 225
- Задача обернена 21  
– пряма 21  
Закон Авогадро 248  
– Бойля–Маріотта 245  
– Больцмана 264  
– Вант-Гоффа 358  
– взаємозв'язку маси та енергії 165  
– всесвітнього тяжіння 62  
– імпульсу 41  
– Гей-Люссака 245  
– Гука 51  
– Дальтона 236, 254  
– збереження енергії 85  
– Ньютона другий 33  
– перший 30  
– третій 35  
– руху центра мас 98  
– Фіка 272  
– Шарля 245  
Закони Кеплера 58  
– Рауля 356  
Зрідження газів 328  
Зсув 53
- Імпульс 34  
Інертність 29  
Інерція 29  
Інтенсивність звуку 212  
Інтерференція хвиль 205  
Інфразвук 211, 222
- Капілярність 341  
Кількість зіткнень молекул 269  
– теплоти 282  
Коефіцієнт внутрішнього тертя 274  
– дифузії 272  
– теплопровідності 277  
Коливання згасаючі 185  
– змушені 188  
– періодичні 25
- Маса атомна 237  
– гравітаційна 31  
– інертна 31

- спокою 161
- Машина холодильна 301
- Маятник математичний 180
  - фізичний 181
- Меніск 338
- Модуль Юнга 52
- Момент імпульсу 103
  - інерції 102
  - сили 100
- Надпровідність 332
- Надплинність 332
- Напруженість 66
- Натяг поверхневий 336
- Невагомість 74
- Нуль абсолютний 246
- Параметри критичні 327
- Перетворення Галілея 44
  - Лоренца 145
- Перехід фазовий другого роду 343
- Період 25
  - коливання 26
- Поле тяжіння 66
- Поріг чутності 214
- Потік ламінарний 128
  - стаціонарний 123
  - турбулентний 128
- Потужність 81
- Принцип відносності Ейнштейна 137
  - Гюйгенса 201
- Принципи термодинаміки 283, 307
- Прискорення 18
  - доцентрове 20
  - коріолісове 73
  - кутове 25
  - тангенціальне 20
- Пробіг молекул вільний 269
- Процес адиабатичний 289
  - ізобаричний 245
  - ізотермічний 245
  - ізохоричний 246
  - необоротний 300
  - оборотний 300
  - рівноважний 280
- Радіус-вектор 12
- Резонанс 190
- Рівняння Бернуллі 121, 362
  - ван дер Ваальса 320
  - динаміки 35
  - імпульсу 359
  - Клайпейрона–Клаузіса 354
- Менделєєва 247, 248
- Лагранта 228
- Майєра 296
- Мещерського 47
- основне ідеального газу 254
- Рідини квантові 342
- Робота 78
- Розчини 355
- Рух броунівський 240
  - коливальний 25
  - криволінійний 19
  - обертальний 99
  - прямолінійний 14
- Сила 29, 37
  - інерції відцентрова 71
  - коріолісова 72
  - лобового опору 129
  - підймальна крила 135
- Сили пружності 51
- Система відліку 11
- Системи інерціальні 30
- Снаряд реактивний 367
- Сопло Лавала 366
- Стала Авогадро 239, 254
  - газова універсальна 248
  - гравітаційна 62
- Ступені вільності 293
- Сублимація 349
- Температура 256, 258
  - абсолютна 246, 254
- Теорема Нернста 310
  - про додавання швидкостей 151
  - Штейнера 108
- Теорами Карно 304, 305
- Теплоємність молярна 295
  - питома 295
  - при сталому об'ємі 295
  - – – тиску 295
- Теплопровідність 276
- Тертя внутрішнє 56
  - спокою 55
- Тіла кристалічні 345
- Тіло абсолютно тверде 95
  - аморфне 345
- Точка матеріальна 10
  - потрійна 350
- Траєкторія руху 12
- Удар куль непружний 86
  - – пружний 87
- Ультразвуки 211, 223

- Фаза коливання 27  
Фігури Ліссажу 196  
Флуктуації 313  
Формула барометрична 116, 263  
– Лапласа 340  
– Стокса 134  
Функція Лангранта 228  
– розподілу молекул за швидкостями 259
- Хвиля 201  
– плоска 202  
– поздовжня 198  
– поперечна 198  
– стояча 207  
– сферична 203  
Холодильник 301
- Центр мас 95
- Цикл 300  
– Карно 301
- Частота коливань 26  
– резонансна 190  
Число Маха 132, 364  
– Рейнольдса 129
- Швидкість 16  
– космічна друга 90  
– – перша 90  
– – третя 90  
– кутова 24  
– лінійна 16  
– фазова 200  
Шлях 12
- Явище Доплера 217  
– перенесення 269

<b>Вступ</b> .....	3
<b>ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ</b> .....	9
<b>Розділ 1</b>	
<b>Кінематика матеріальної точки</b>	
§ 1. Предмет і завдання механіки .....	10
§ 2. Система відліку. Переміщення тіла .....	11
§ 3. Приклад опису прямолінійного руху .....	14
§ 4. Швидкість і прискорення .....	16
§ 5. Криволінійний рух, тангенціальне і нормальне прискорення .....	19
§ 6. Приклади основних задач кінематики .....	21
§ 7. Рух точки по колу, кутова швидкість і кутове прискорення .....	23
§ 8. Зміщення, швидкість і прискорення у гармонічному коливальному русі .....	25
<b>Розділ 2</b>	
<b>Динаміка матеріальної точки</b>	
§ 9. Завдання динаміки .....	29
§ 10. Перший закон Ньютона .....	30
§ 11. Маса тіла .....	31
§ 12. Другий закон Ньютона .....	32
§ 13. Третій закон Ньютона .....	35
§ 14. Сила. Статистичний і динамічний прояви сили .....	37
§ 15. Закон збереження імпульсу .....	41
§ 16. Принцип відносності Галілея. Межі застосування класичної механіки .....	43
§ 17. Рух тіл зі змінною масою. Рівняння Мещерського .....	46
§ 18. Системи одиниць .....	47
<b>Розділ 3</b>	
<b>Особливості деяких сил</b>	
§ 19. Сили пружних деформацій .....	50
§ 20. Сили тертя .....	55

§ 21. Сили тяжіння .....	58
§ 22. Гравітаційне поле .....	66
§ 23. Неінерціальні системи відліку і сили інерції .....	70
§ 24. Еквівалентність сил інерції та сил тяжіння .....	74

## Розділ 4

### Енергія і робота

§ 25. Енергія .....	77
§ 26. Робота і потужність .....	78
§ 27. Кінетична і потенціальна енергія .....	82
§ 28. Закон збереження енергії .....	85
§ 29. Застосування законів збереження до центрального удару куль .....	86
§ 30. Енергетична характеристика поля тяжіння. Потенціал .....	88
§ 31. Космічні швидкості. Супутники .....	89

## Розділ 5

### Механіка твердого тіла

§ 32. Тверде тіло як система матеріальних точок. Центр мас .....	95
§ 33. Закон руху центра мас .....	97
§ 34. Поступальний та обертальний рухи твердого тіла .....	99
§ 35. Умови рівноваги тіла відносно нерухомої осі обертання. Момент сили .....	100
§ 36. Основне рівняння динаміки обертального руху. Момент інерції .....	101
§ 37. Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу .....	103
§ 38. Кінетична енергія обертального руху тіла .....	105
§ 39. Визначення моменту інерції деяких тіл. Теорема Штейнера .....	106
§ 40. Вільні осі обертання .....	109
§ 41. Гіроскопічний ефект і його застосування .....	111

## Розділ 6

### Механіка рідин і газів

§ 42. Гідроаеростатика. Закон Паскаля .....	113
§ 43. Вплив тяжіння на тиск у рідині й газах. Закон Архімеда .....	115
§ 44. Стационарний потік рідин і газів .....	119
§ 45. Рівняння Бернуллі .....	121
§ 46. Наслідки рівняння Бернуллі .....	123
§ 47. В'язкість рідин і газів .....	126
§ 48. Ламінарний і турбулентний потоки .....	128
§ 49. Сила лобового опору .....	129
§ 50. Падіння тіл у в'язкому середовищі .....	133
§ 51. Підймальна сила крила літака .....	135

## Розділ 7

### Елементи теорії відносності

§ 52. Передумови спеціальної теорії відносності. Постулати Ейнштейна .....	137
---	-----

§ 53. Спростування поняття ефіру. Відносність одночасності .....	142
§ 54. Перетворення Лоренца .....	143
§ 55. Відносність довжини і проміжку часу .....	146
§ 56. Теорема про додавання швидкостей .....	151
§ 57. Відносні й абсолютні величини релятивістської кінематики. Інтервал .....	153
§ 58. Релятивістська динаміка. Залежність маси від швидкості .....	158
§ 59. Взаємозв'язок між масою та енергією .....	164
§ 60. Єдиний закон збереження маси, імпульсу й енергії .....	167
§ 61. Загальна теорія відносності. Принцип еквівалентності .....	169
§ 62. Зв'язок геометрії з полем тяжіння .....	171

## Розділ 8

### Механічні коливання і хвилі

§ 63. Динаміка гармонічних коливань .....	178
§ 64. Маятники .....	180
§ 65. Енергія коливального руху .....	184
§ 66. Згасаючі коливання. Автоколивання .....	185
§ 67. Змушені коливання .....	188
§ 68. Додавання коливань однакового напрямку. Биття .....	192
§ 69. Додавання взаємно перпендикулярних коливань .....	194
§ 70. Гармонічний аналіз .....	196
§ 71. Утворення хвиль. Поперечні та поздовжні хвилі. Принцип Гюйгенса .....	197
§ 72. Рівняння хвилі .....	201
§ 73. Енергія пружної хвилі. Потік енергії. Вектор Умова .....	203
§ 74. Інтерференція хвиль .....	205
§ 75. Стоячі хвилі .....	207

## Розділ 9

### Елементи акустики

§ 76. Основні характеристики звуку .....	211
§ 77. Сприймання звуків .....	214
§ 78. Явище Доплера .....	216
§ 79. Джерела і приймачі звуку .....	218
§ 80. Інфра- й ультразвуки, їхні властивості та застосування .....	222

## Розділ 10

### Метод Лагранжа

§ 81. Узагальнені координати. Принцип найменшої дії. Рівняння Лагранжа .....	226
§ 82. Визначення функції Лагранжа .....	228
§ 83. Застосування методу Лагранжа до розв'язування деяких задач механіки .....	231

**МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА ..... 234**
**Розділ 11**
**Молекулярно-кінетична теорія газів**

§ 84. Предмет і завдання молекулярної фізики .....	235
§ 85. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії будови речовини .....	235
§ 86. Статистичний метод .....	243
§ 87. Основні газові закони. Рівняння Клапейрона–Менделєєва .....	244
§ 88. Основне рівняння кінетичної теорії газів .....	251
§ 89. Наслідки основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів .....	254
§ 90. Розподіл молекул за швидкостями. Закон Максвелла .....	259
§ 91. Дослідне визначення швидкості молекул .....	261
§ 92. Газ у полі земного тяжіння. Закон Больцмана .....	263

**Розділ 12**
**Молекулярні рухи і явища перенесення**

§ 93. Кількість зіткнень і середня довжина вільного пробігу молекул .....	269
§ 94. Дифузія .....	272
§ 95. Внутрішнє тертя у газах .....	274
§ 96. Теплопровідність .....	276

**Розділ 13**
**Фізичні основи термодинаміки**

§ 97. Предмет і метод термодинаміки .....	279
§ 98. Основні поняття та означення .....	280
§ 99. Перший принцип термодинаміки і його методологічне значення .....	283
§ 100. Вираз першого принципу термодинаміки для ідеального газу. Застосування принципу до газових процесів .....	285
§ 101. Адіабатичний процес. Рівняння Пуассона .....	289
§ 102. Внутрішня енергія ідеального газу. Розподіл енергії за ступенями вільності .....	292
§ 103. Молекулярна теорія теплоємностей газів .....	295
§ 104. Оборотні та необоротні процеси .....	299
§ 105. Колові процеси. Принцип дії теплової і холодильної машин .....	300
§ 106. Цикл Карно .....	301
§ 107. Коефіцієнт корисної дії теплової машини .....	303
§ 108. Другий принцип термодинаміки .....	307
§ 109. Ентропія .....	309
§ 110. Статистичний характер другого принципу термодинаміки .....	311
§ 111. Межі застосовності другого принципу термодинаміки .....	313
§ 112. Абсолютна термодинамічна шкала температур .....	316

**Розділ 14****Реальні гази і фазовий перехід газ–рідина**

§ 113. Реальні гази. Рівняння ван дер Ваальса .....	319
§ 114. Внутрішня енергія реального газу .....	322
§ 115. Ефект Джоуля–Томсона .....	323
§ 116. Порівняння ізотерм ван дер Ваальса з експериментальними ізотермами. Критичний стан речовини .....	324
§ 117. Властивості насиченої пари .....	327
§ 118. Зрідження газів і здобуття низьких температур .....	328
§ 119. Властивості речовин за низьких температур .....	331

**Розділ 15****Рідини**

§ 120. Властивості та структура рідини .....	333
§ 121. Поверхневі властивості рідин. Поверхневий натяг .....	334
§ 122. Меніск. Формула Лапласа .....	338
§ 123. Капілярні явища .....	341
§ 124. Квантові рідини .....	342

**Розділ 16****Тверді тіла**

§ 125. Кристалічні й аморфні тіла. Основні характеристики кристалів .....	345
§ 126. Плавлення і кристалізація. Випаровування твердих тіл. Потрійна точка .....	348
§ 127. Теплоємність твердих тіл. Недоліки класичної теорії та квантова теорія теплоємності .....	350

**Розділ 17****Міжфазові явища**

§ 128. Випаровування. Рівняння Клапейрона–Клаузіуса .....	353
§ 129. Рідинні розчини. Закони Рауля .....	355
§ 130. Осмотичний тиск. Закон Вант-Гоффа .....	357

**Розділ 18****Основні рівняння газодинаміки**

§ 131. Рівняння імпульсу для потоку газу(стисливої речовини) .....	359
§ 132. Рівняння Бернуллі для газів .....	359
§ 133. Критерій стисливості газів. Число Маха .....	360
§ 134. Конус Маха .....	361
§ 135. Сопло Лавала .....	364
§ 136. Реактивні двигуни .....	366
<i>Предметний покажчик</i> .....	368



Навчальне видання

*Бушок Григорій Федорович*

*Венгер Євген Федорович*

---

# Курс ФІЗИКИ

Книга 1

---

*Фізичні основи механіки*

*Молекулярна фізика*

*і термодинаміка*

Оправа і титул художника *В. О. Гурлева*

Художній редактор *Г. С. Муратова*

Технічний редактор *А. І. Омоховська*

Коректори: *Л. О. Зеленько, Н. І. Шевчук*

Комп'ютерна верстка *А. А. Коркішко*

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 04.12.2000 серія ДК № 268

Підп. до друку 20.11.2002. Формат 84×108/<sub>32</sub>. Папір офс. № 1. Гарнітура Times New Roman Суг. офс. друк. Ум. друк. арк. 19,74. Обл.-вид. арк. 21,66. Тираж 3000 пр. Вид. № 10377. Зам. № 2-304

Видавництво «Вища школа», 01054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7г

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві «Вища школа», у ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика», 09117, Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4