

53/075)  
А 18

**Т. О. Данилюк, С. І. Резнік, С. Г. Авдєєв**

**ПОСІБНИК З ФІЗИКИ**  
**для слухачів Інституту довузівської підготовки**  
**(електромагнетизм, коливання й хвилі,**  
**оптика та ядро)**

3332-31

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький державний технічний університет

Т. О. Данилюк, С. І. Резнік, С. Г. Авдєєв

**ПОСІБНИК З ФІЗИКИ**  
**для слухачів Інституту довузівської підготовки**  
**(електромагнетизм, коливання й хвилі,**  
**оптика та ядро)**

Затверджено Ученою радою Вінницького державного  
технічного університету як навчальний посібник для слухачів  
Інституту довузівської підготовки. Протокол №13 від 4.07.2002 р.

2

Вінниця ВДТУ 2002

Рецензенти:

*П.М.Зузяк*, доктор фізико-математичних наук, професор  
*В.І.Клочко*, доктор педагогічних наук, професор  
*О.А.Панков*, доктор фізико-математичних наук, професор

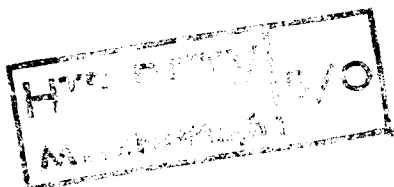
Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**Данилюк Т.О., Резнік С.І., Авдєєв С.Г.**

**Д 18 Посібник з фізики для слухачів Інституту довузівської підготовки (електромагнетизм, коливання й хвилі, оптика та ядро). Навчальний посібник. – Вінниця, 2002. – 146 с.**

Посібник призначений для самостійної роботи слухачів підготовчих відділень, учнів фізико-математичних шкіл та технічних ліцеїв, слухачів підготовчих вечірніх та заочних курсів, які функціонують при факультетах та інститутах довузівської підготовки. Він містить задачі з усіх питань програми вступних іспитів, переважно ті, які пропонувалися протягом ряду років на вступних іспитах з фізики в багатьох вузах України.

До всіх розділів посібника подано короткі вказівки щодо загальної методики розв'язування задач та перелік основних формул, які використовуються під час розв'язування.



УДК 53 (075)

© Т. О. Данилюк, С.І. Резнік, С.Г. Авдєєв, 2002

## ЗМІСТ

Передмова.....	5
Розділ 8. Електростатика.....	6
Основні поняття.....	6
Приклади розв'язування задач.....	9
Задачі для самостійного розв'язування.....	20
Розділ 9. Постійний струм.....	36
Основні поняття.....	36
Приклади розв'язування задач.....	38
Задачі для самостійного розв'язування.....	46
Розділ 10. Магнітне поле.....	61
Основні поняття.....	61
Приклади розв'язування задач.....	63
Задачі для самостійного розв'язування.....	71
Розділ 11. Механічні коливання і хвилі.....	77
Основні поняття.....	77
Приклади розв'язування задач.....	78
Задачі для самостійного розв'язування.....	88
Розділ 12. Електромагнітні коливання і хвилі.....	92
Основні поняття.....	92
Приклади розв'язування задач.....	94
Задачі для самостійного розв'язування.....	98
Розділ 13. Геометрична оптика.....	103
Основні поняття.....	103
Приклади розв'язування задач.....	104
Задачі для самостійного розв'язування.....	110
Розділ 14. Хвильова оптика.....	119
Основні поняття.....	119
Приклади розв'язування задач.....	119
Задачі для самостійного розв'язування.....	125

Розділ 15.	Квантова оптика.....	128
	Основні поняття.....	128
	Приклади розв'язування задач.....	128
	Задачі для самостійного розв'язування.....	132
Розділ 16.	Елементи теорії відносності.....	134
	Основні поняття.....	134
	Приклади розв'язування задач.....	134
	Задачі для самостійного розв'язування.....	137
Розділ 17.	Будова атома і атомного ядра.....	139
	Основні поняття.....	139
	Приклади розв'язування задач.....	139
	Задачі для самостійного розв'язування.....	143
Література	.....	145

## Передмова

Посібник з фізики призначається для самостійної роботи слухачів Інституту довузівської підготовки.

В посібнику вміщено задачі різної складності. До всіх розділів посібника подані короткі вказівки щодо методики розв'язування задач та перелік основних формул, які використовуються під час розв'язування.

При розв'язуванні задач слід виконувати такі дії:

1. Прочитати умову задачі та вникнути в фізичну суть явищ або процесів, що розглядаються. Вияснити мету розв'язування та виділити відомі та невідомі величини.

2. Коротко записати умову задачі та перевести значення всіх фізичних величин в СІ. Зробити рисунок або схему, де вказати всі векторні величини (швидкості, прискорення, сили, імпульсу, напруженості електричного поля, індукцію магнітного поля тощо).

3. З'ясувати, за допомогою яких фізичних законів можна описати ситуацію, що розглянута в задачі. Якщо в закон входять векторні величини, то записати цей закон у векторному вигляді. Вибрати систему координат і записати векторні співвідношення в проекціях на координатні осі у вигляді скалярних рівнянь, які зв'язують відомі та невідомі величини.

4. Розв'язати одержане рівняння (або систему рівнянь) в загальному вигляді.

5. Перевірити правильність розв'язування задачі, знайшовши розмірність одержаних величин.

6. Підставити в загальний розв'язок числові значення фізичних величин та провести необхідні обчислення.

7. Проаналізувати одержаний результат та оцінити його реальність. Записати відповідь в одиницях СІ або в тих одиницях, які вказані в умові задачі.

8. Вияснити, чи є інші способи розв'язування задачі. Подумати, чи зміниться результат, якщо внести зміни в умову задачі. Проаналізувати граничні або окремі випадки загального розв'язку.

Недоліки, які часто зустрічаються на письмових іспитах з фізики:

1. Неуважність при написанні даних умови задачі, неправильне переведення фізичних величин з одних одиниць в інші.

2. Не врахування того, що векторні величини додаються геометрично за правилом паралелограма, а не алгебраїчно.

3. Досить часто одна і та ж величина позначається різними буквами, або різні величини – однаковими буквами. Результат – помилки в алгебраїчних перетвореннях і, отже, неправильна відповідь.

4. Підводить також і техніка обчислень, а також невміння вибирати з одержаного математичного розв'язку відповідь, що відповідає умові задачі.

## Розділ 8. Електростатика

При розв'язуванні задач на тему "Електростатика" рекомендується:

- зробити рисунок, показати на ньому заряди, провідники, ємності;
- зобразити напрям силових ліній електричних полів, а також всі сили, які діють на заряджені тіла;
- визначити силу взаємодії між зарядами за законом Кулона тільки в тому випадку, якщо заряди можна вважати точковими;
- для визначення числових значень зарядів, після того, як заряджені тіла торкаються один одного, застосовувати закон збереження електричних зарядів;
- при дії на заряджене тіло декількох сил або полів застосовувати принцип суперпозиції;
- у випадку рівноваги системи заряджених тіл використовувати для кожного з них загальні умови рівноваги ( $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ,  $\sum_i \vec{M}_i = 0$ );
- при розрахунку переміщень, швидкостей, прискорень і мас електричних зарядів використовувати формули кінематики, другий закон Ньютона і закон збереження енергії.

### **Основні поняття**

#### Закон Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

де  $F$  - модуль сили взаємодії двох точкових зарядів  $q_1$  і  $q_2$ ; ( $q_1$  і  $q_2$  - модулі зарядів: однойменні заряди відштовхуються, різнойменні - притягуються);  $r$  - відстань між зарядами.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\Phi}$$

$\epsilon_0$  - електрична стала;  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ;  $\epsilon$  - діелектрична проникність середовища.

#### Закон збереження електричного заряду

$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const} \text{ (для електрично ізольованої системи).}$$

## Напруженість електростатичного поля в даній точці

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

де  $\vec{F}$  - сила, з якою електростатичне поле діє на розміщений в даній точці поля позитивний точковий (пробний) заряд  $q_0$ .

### Принцип суперпозиції полів

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i,$$

де  $\vec{E}_i$  - напруженість поля, що створює окремий заряд  $q_i$ ,  $\vec{E}$  - результуюча напруженість поля, що створена в даній точці поля всіма зарядами.

### Модуль напруженості електростатичного поля

а) точкового заряду  $q$  на відстані  $r$  від нього:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2};$$

б) нескінченної рівномірно зарядженої площини:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon},$$

де  $\sigma = \frac{q}{S}$  - поверхнева густина електричного заряду.

в) між двома рівномірно зарядженими нескінченними площинами з поверхневою густиною заряду  $\sigma$ :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon};$$

г) зарядженої провідної сфери (кулі) радіусом  $R$  на відстані  $r$  ( $r \geq R$ ) від центру сфери

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2},$$

де  $q$  - заряд сфери; при  $r < R$  (всередині сфери)  $E = 0$ .

### Потенціал електростатичного поля

а) точкового заряду  $q$  на відстані  $r$  від нього  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q}{r}$ ;

б) зарядженої провідної сфери (кулі) радіусом  $R$  на відстані  $r$  ( $r \geq R$ ) від центра сфери:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q}{r},$$



де  $q$  - заряд сфери; при  $r < R$  (всередині сфери)  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q}{R}$ .

Робота сил електростатичного поля по переміщенню заряду  $Q$

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де  $\varphi_1 - \varphi_2$  - різниця потенціалів між точками поля. Якщо  $q$  і  $Q$  -

точкові заряди, то  $A = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ .

Зв'язок між модулем напруженості однорідного електричного поля і різницею потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l},$$

де  $l$  - відстань між точками поля з потенціалами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ .

Електроємність провідника

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

де  $q$  - заряд, а  $\varphi$  - потенціал провідника. Електроємність плоского

конденсатора  $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$ , де  $S$  - площа кожної з пластин конденсатора,

$d$  - відстань між пластинами. Електроємність провідної сфери (кулі)

радіусом  $R$ :  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R$ .

Електроємність  $n$  конденсаторів, з'єднаних паралельно

$C = \sum_{i=1}^n C_i$ , і послідовно  $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ , де  $C_i$  - ємність окремого

конденсатора.

Енергія електричного поля конденсатора

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де  $q$  - заряд, а  $U$  - напруга між пластинами конденсатора з електроємністю  $C$ . Об'ємна густина енергії електричного поля

$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2$ , де  $V$  - об'єм, що займає електричне поле з

напруженістю  $E$ .

## Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** Дві однакові невеликі кульки масою  $0.1 \text{ г}$  кожна, підвішені на нитках довжиною  $25 \text{ см}$ . Після того, як кулькам було передано однакові заряди, вони розійшлись на відстань  $5 \text{ см}$ .

Визначити заряди кульок.

$$m_1 = m_2 = m = 0.1 \text{ г} = 10^{-4} \text{ кг}$$

$$l_1 = l_2 = l = 25 \text{ см} = 25 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$r = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$q - ?$$

### Розв'язування

На кожную з відхилених кульок діють:  $m\vec{g}$  - сила тяжіння,  $\vec{T}$  - сила натягу нитки,  $\vec{F}$  - електрична сила взаємодії кульок (рис. 1).

Запишемо умову рівноваги кульок в векторній формі під дією прикладених сил:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0.$$

Запишемо це рівняння в проекціях на вибрані напрями осей  $X$  і  $Y$ :

$$-T \sin \alpha + F = 0, \quad (1)$$

$$T \cos \alpha - mg = 0.$$

Враховуючи, що  $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$ ,

запишемо рівняння (1) у вигляді:

$$T \sin \alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad T \cos \alpha = mg.$$

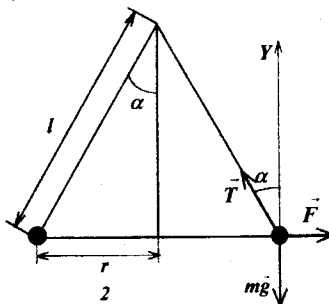


Рисунок 1

Розділивши почленно перше рівняння на друге, одержимо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2 mg}.$$

Оскільки кут  $\alpha$  малий, то  $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha = \frac{r}{2l}$ , тоді

$$\frac{r}{2l} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2 mg},$$

звідси

$$q = r \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon rmg}{l}}, \quad q = 5.2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Відповідь:  $q = 5.2 \cdot 10^9$  Кл.

**Задача 2.** Дві однакові металеві кульки з одноіменними зарядами відштовхувались з певною силою. Однією кулькою доторкнулись до поверхні другої і повернули їй початковий стан, від чого сила відштовхування збільшилась вдвічі. Знайти початкове відношення зарядів.

$r_1 = r_2 = r$	<u>Розв'язування</u>
$F_2 = 2F_1$	Позначимо через $q_1$ і $q_2$
$q_2 = ?$	заряди на обох кульках.
$q_1$	Після дотику на них будуть однакові заряди $0.5(q_1 + q_2)$ .

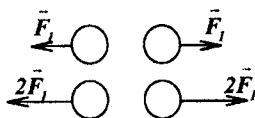


Рисунок 2

Враховуючи умову задачі для співвідношення сил, можна записати

$$F_1 = \frac{F_2}{2} \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(q_1 + q_2)^2}{4r^2} \rightarrow q_1^2 - 2q_1 q_2 + q_2^2 = 0$$

Вводячи співвідношення  $x = \frac{q_2}{q_1}$ , приходимо до квадратного рівняння, розв'язок якого  $x_{1,2} = 1$ .

Відповідь:  $\frac{q_2}{q_1} = 1$ .

**Задача 3.** У вершинах квадрата знаходяться однакові позитивні заряди  $q$ . Який заряд необхідно розмістити в центрі квадрата зі стороною  $a$ , щоб система була в рівновазі?

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$	<u>Розв'язування</u>
$a$	На рисунку вкажемо розташування зарядів і покажемо сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ , з якими три заряди діють на четвертий (рис. 3).
$q_x = ?$	

Для зрівноважування результуючої  $\vec{F}_4$ , усіх цих сил необхідно ввести в центр квадрату від'ємний заряд  $(-q_x)$ , притягання до якого має бути рівним і протилежним до  $\vec{F}_4$ . Обчислюємо модуль результуючої сили  $F$ , враховуючи, що  $F_1 = F_2$ , а довжина діагоналі квадрата в 2 рази більша від довжини сторони:

$$F_4 = \sqrt{2}F_1 + F_3 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\sqrt{2}}{a^2} - \frac{1}{2a^2} \right),$$

де  $a$  - сторона квадрата.

Прирівнюючи  $F_4$  і силу притягання до шуканого заряду, приходимо до рівняння, з якого визначаємо модуль заряду:

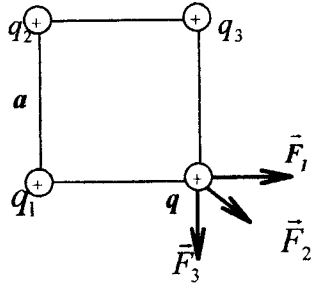


Рисунок 3

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_x}{a^2} \cdot 2 \Rightarrow q_x = q \frac{2}{4} \frac{2+1}{1}.$$

Відповідь:  $q_x = q \frac{2}{4} \frac{2+1}{1}.$

**Задача 4.** Електричне поле створене нескінченними паралельними тонкими провідними пластинами, які мають електричний заряд одного знака з густинами  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ . Визначити напруженість електричного поля  $E$  між пластинами і поза ними і побудувати графік розподілу напруженості уздовж перпендикуляра до пластин.

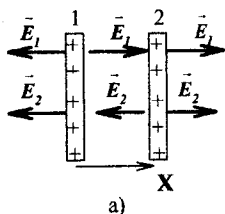
$\sigma_1$   
 $\sigma_2$   
 $E(x) - ?$

Розв'язування

Використаємо дві формули: для напруженості поля пластини і принцип суперпозиції полів. На рис. 4 а) вкажемо напрям і величину векторів

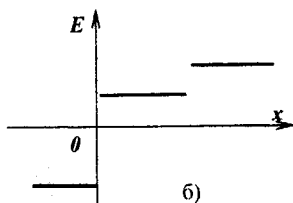
$\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  напруженостей полів обох пластин (вважатимемо, що  $\sigma_1 > \sigma_2$  і  $E_1 > E_2$ ). Між пластинами вектори  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  протилежні, тому напруженість поля між ними

$$E_A = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon\epsilon_0},$$



де  $\epsilon$  - діелектрична проникність середовища. Поза пластинами вектори  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  мають однаковий напрям, тому з обох сторін пластин напруженість результуючого поля має однаковий модуль:

$$E_B = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon\epsilon_0}.$$



Розподіл напруженості уздовж перпендикуляра до площини наведений на рис. 8 (б), де враховано, що позитивним вважається напрям уздовж осі  $x$ .

Рисунок 4

Відповідь:  $E_A = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon\epsilon_0}$ ,  $E_B = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon\epsilon_0}$ .

**Задача 5.** Порошинка масою  $10^{-8}$  г висить між пластинами плоского повітряного конденсатора, до якого прикладена напруга 5000 В. Відстань між пластинами дорівнює 5 см. Яка величина заряду порошинки ?

$$\begin{array}{l} m = 10^{-8} \text{ г} = 10^{-11} \text{ кг} \\ U = 5 \cdot 10^3 \text{ В} \\ d = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м} \\ \hline q - ? \end{array}$$

#### Розв'язування

На порошинку в електричному полі діють:  $m\vec{g}$  - сила тяжіння,  $\vec{F}$  - електрична сила з боку поля (рис.5).

Запишемо умову рівноваги порошини в скалярній формі відносно осі  $Y$ :

$$F - mg = 0,$$

звідси

$$F = mg.$$

Враховуючи, що  $F = qE$  і  $E = \frac{U}{d}$ ,

одержимо:

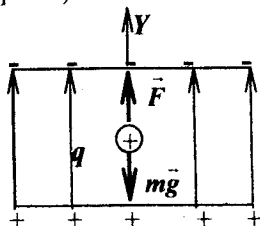


Рисунок 5

$$\frac{qU}{d} = mg,$$

звідси

$$q = \frac{mgd}{U} = 9.8 \cdot 10^{-16} \text{ Кл.}$$

Відповідь:  $q = 9.8 \cdot 10^{-16} \text{ Кл.}$

**Задача 6.** Яку швидкість має електрон, що пролетів прискорюючи різницю потенціалів 200 В (рис.6).

$$\frac{U = 200 \text{ В}}{V = ?}$$

Розв'язування

На електрон в електричному полі діє електрична сила  $F = |e| \cdot E$ , під дією якої він летить

рівноприскорено проти напрямку поля.

При цьому електрична сила буде здійснювати роботу по переміщенню електрона проти поля, що дорівнює зміні кінетичної енергії електрона:

$$A = \Delta W_k = W_k - W_{k0}.$$

Враховуючи, що

$$A = |e|U, W_k = \frac{mV^2}{2}, W_{k0} = 0,$$

одержимо

$$eU = \frac{mV^2}{2},$$

звідси:

$$V = \frac{2eU}{m} = 8.4 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Відповідь:  $V = 8.4 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$

**Задача 7.** Електрон, що має швидкість  $6 \cdot 10^9 \text{ см/с}$ , влітає в плоский повітряний конденсатор паралельно його пластинам, відстань між якими 1 см, різниця потенціалів 600 В. Знайти відхилення електрона, що викликане полем конденсатора, якщо довжина його пластин 5 см.

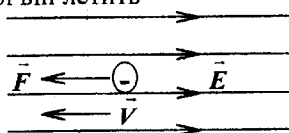


Рисунок 6

$$V = 6 \cdot 10^9 \text{ см/с} = 6 \cdot 10^7 \text{ м/с}$$

$$d = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$l = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$U = 600 \text{ В}$$


---


$$h - ?$$

### Розв'язування

На електрон, який влетів в електричне поле, з боку поля буде діяти сила  $F = |e| \cdot E$ ,

$$\text{де } E = \frac{U}{d}.$$

Оскільки електричне поле спрямоване вгору (рис.7), то сила, що діє на електрон, спрямована вниз. Рух електрона можна розглядати як

суперпозицію двох паралельних рухів, що відбуваються в горизонтальному та вертикальному напрямках. В

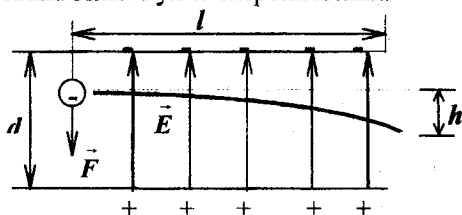


Рисунок 7

горизонтальному

напрямку електрон буде продовжувати рухатися рівномірно, тому що в цьому напрямі на нього не діють ніякі сили. Одночасно з цим під дією електричної сили  $\vec{F}$  він буде рівноприскорено рухатися вниз. Траєкторією руху буде парабола. Цей рух електрона в конденсаторі нагадує рух тіла, яке кинуте горизонтально.

За час руху в конденсаторі електрон пролетить по горизонталі:

$$l = V \cdot t,$$

а по вертикалі зміститься вниз на відстань

$$h = \frac{at^2}{2},$$

де  $a$  - прискорення руху.

Розв'язуючи спільно ці два рівняння, знаходимо

$$h = \frac{al^2}{2V^2}. \quad (1)$$

Щоб знайти прискорення  $a$ , застосуємо рівняння другого закону Ньютона. Оскільки на електрон в вертикальному напрямку діє тільки одна сила  $F$  (силою тяжіння, що діє на електрон, нехтуємо), то

$$F = ma, \text{ звідси } a = \frac{F}{m}, \text{ або:}$$

$$a = \frac{e \cdot U}{d \cdot m} \quad (2)$$

Підставляючи вираз (2) в рівняння (1), одержимо

$$h = \frac{I^2 \cdot e \cdot U}{2V^2 dm} = 3.66 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Відповідь:  $h = 3.66 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

**Задача 8.** Куля масою  $40 \text{ мг}$ , що має заряд  $10^9 \text{ Кл}$ , рухається з нескінченності зі швидкістю  $10 \text{ см/с}$ . На яку відстань може наблизитися куля до точкового заряду, який дорівнює  $1.33 \cdot 10^9 \text{ Кл}$ .

$m = 40 \text{ мг} = 4.0 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$ $V = 10 \text{ см/с} = 0.1 \text{ м/с}$ $q_1 = 10^9 \text{ Кл}$ $q_2 = 1.33 \cdot 10^9 \text{ Кл}$ $r - ?$
---

#### Розв'язування

На заряджену кульку при її русі в електричному полі зі сторони поля діє електрична сила, робота якої дорівнює зміні кінетичної енергії кульки:

$$\Delta W_k = A.$$

Оскільки

$$\Delta W_k = W_k - W_{k_0} = 0 - \frac{mV^2}{2} = -\frac{mV^2}{2},$$

$$A = q_1(\varphi_\infty - \varphi_1) = q_1 \left( 0 - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \right) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r},$$

то

$$-\frac{mV^2}{2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r},$$

звідси

$$r = \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0\epsilon mV^2} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Відповідь:  $r = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$

**Задача 9.** Точкові заряди  $1 \text{ мкКл}$  розташовані в вершинах квадрата зі стороною  $a = 0.5 \text{ м}$ . Знайти потенціальну енергію цієї системи.



$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q = 1 \text{ мкКл} = 10^{-6} \text{ Кл}$$

$$a = 0.5$$


---


$$W - ?$$

### Розв'язування

Потенціал, створений в першій вершині зарядом, що розташований в другій

вершині,  $\varphi_{12} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 a}$ . Отже потенціальні енергії взаємодії зарядів  $q_1$  і  $q_2$ , а також  $q_1$  і  $q_3$ ,  $q_1$  і  $q_4$ ,  $q_2$  і  $q_3$ ,  $q_2$  і  $q_4$ ,  $q_3$  і  $q_4$  будуть:

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a}; \quad W_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2};$$

$$W_{14} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_4}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a}; \quad W_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a};$$

$$W_{24} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_4}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2}; \quad W_{34} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_3 q_4}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a};$$

Повна енергія системи дорівнює сумі енергій, одержаних вище:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q^2}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q^2}{a^2} = \frac{(4 + 2)q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = 0.1 \text{ Дж.}$$

Відповідь:  $W = 0.1 \text{ Дж}$

**Задача 10.** Три заряджені водяні краплі радіусом 1 мм кожна зливаються в одну велику краплю. Знайти потенціал великої краплі, якщо заряд малої  $10^{-10} \text{ Кл}$ .

$$n = 3$$

$$r = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$$

$$q = 10^{-10} \text{ Кл}$$


---


$$\varphi - ?$$

### Розв'язування

Потенціал великої краплі

$$\varphi = \frac{Q}{C}, \quad (1)$$

де  $Q = nq$ ;  $C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon R$

Радіус великої краплі  $R$  знаходимо з умови

$$M = nm, \quad (2)$$

де  $m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$  - маса маленької краплі,  $M = \rho V_1 = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$  - маса великої краплі.

З врахуванням написаних виразів для  $m$  і  $M$  рівність (2) можна привести до вигляду

$$\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = n \rho \frac{4}{3} \pi r^3,$$

звідси  $R = r^3 n$ . Підставляючи вираз для  $Q$ ,  $C$  і  $R$  в рівняння (1), отримаємо

$$\varphi = \frac{nq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3 n} = 1.87 \cdot 10^3 \text{ В.}$$

Відповідь:  $\varphi = 1.87 \cdot 10^3 \text{ В.}$

**Задача 11.** Металева куля радіусом 5 см заряджена до потенціалу 150 В. Знайти потенціал і напруженість поля в точці, яка віддалена від поверхні кулі на відстань 10 см.

$$R = 5 \text{ см} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$d = 10 \text{ см} = 0.1 \text{ м}$$

$$\varphi_K = 150 \text{ В}$$

$$\varphi - ? \quad E - ?$$

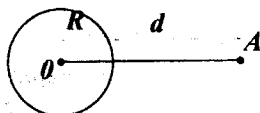


Рисунок 8

### Розв'язування

За означенням, потенціал поля, що створене зарядженою кулею в точці A (рис.8), дорівнює

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} \quad (1)$$

де  $q$  - заряд кулі,  $r = R + d$  - відстань від центра кулі  $O$  до точки A.

Ємність кулі

$$C_K = 4\pi\epsilon_0\epsilon R \quad (2)$$

З іншої сторони  $C_K = \frac{q}{\varphi_K}$ , звідси  $q = C_K \cdot \varphi_K$ , або з врахуванням

формули (2)

$$q = 4\pi\epsilon_0\epsilon R\varphi_K \quad (3)$$

Підставляючи одержане рівняння (3) в рівняння (1), знайдемо

$$\varphi = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R\varphi_K}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} = \frac{R}{r} \varphi_K = \frac{R}{R+d} \varphi_K = 50 \text{ В.}$$

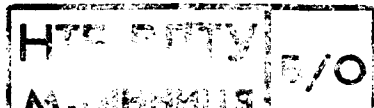
Напруженість поля, створеного зарядженою кулею в точці A

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2},$$

або з врахуванням одержаного виразу (3)

$$E = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R\varphi_K}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{R}{r^2} \varphi_K = \frac{R}{(R+d)^2} \varphi_K = 3.3 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$$

Відповідь:  $\varphi = 50 \text{ В; } E = 3.3 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$



**Задача 12.** Площа пластинки плоского повітряного конденсатора  $60 \text{ см}^2$ , заряд конденсатора  $10^9 \text{ В}$ . Визначити відстань між пластинами конденсатора.

$$\begin{array}{l} S = 60 \text{ см}^2 = 6.0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \\ U = 90 \text{ В} \\ q = 10^9 \text{ Кл} \\ \hline d - ? \end{array}$$

Розв'язування

За формулою ємності плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot S}{d}$$

З іншої сторони, ємність конденсатора  $C = \frac{q}{U}$ . Прирівнюючи праві частини цих виразів, одержимо:

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} = \frac{q}{U}$$

звідси

$$d = \frac{US\epsilon_0\epsilon}{q} = 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Відповідь:  $d = 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

**Задача 13.** Два конденсатори ємністю  $2 \text{ мкФ}$  і  $60 \text{ мкФ}$  зарядили до напруг  $100 \text{ В}$  і  $10 \text{ В}$ . Обчислити їх енергію. Яка напруга встановиться між ними, якщо сполучити дротом їх одноіменно заряджені пластини? Якою буде енергія сполучених таким чином обох конденсаторів?

$$\begin{array}{l} C_1 = 2 \text{ мкФ} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \\ C_2 = 60 \text{ мкФ} = 60 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \\ U_1 = 100 \text{ В} \\ U_2 = 10 \text{ В} \\ \hline W_1 - ? W_2 - ? W_3 - ? \\ U - ? W - ? \end{array}$$

Розв'язування

Обчислимо енергію кожного з конденсаторів

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = 0.01 \text{ Дж};$$

$$W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = 0.003 \text{ Дж.}$$

Їх загальна енергія дорівнює

$$W_0 = W_1 + W_2 = 0.013 \text{ Дж.}$$

При вказаному сполученні заряд перерозподіляється між пластинами до встановлення результуючої напруги  $U$  між ними, але в цілому він зберігається, тому  $q = q_1 + q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2$ . Оскільки

конденсатори сполучені паралельно і напруга на обох однакова, то загальна ємність  $C = C_1 + C_2$ , що дозволяє обчислити напругу між пластинами сполучених конденсаторів:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} \approx 13 \text{ В.}$$

Енергія після сполучення

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 0.005 \text{ Дж.}$$

Отже, в момент вмикання проскочить іскра і буде втрачено  $0.008 \text{ Дж}$  початкової енергії системи.

Відповідь: початкова енергія конденсаторів  $W_1 = 0.01 \text{ Дж}$  і  $W_2 = 0.003 \text{ Дж}$ ; після сполучення встановилась напруга  $13 \text{ В}$  і енергія обох стала рівною  $0.005 \text{ Дж}$ .

**Задача 14.** На систему показаних на рис. 13 конденсаторів подають напругу  $2 \text{ кВ}$ . Чотири з них мають ємність  $500 \text{ нкФ}$ , середній - ємність  $1 \text{ мкФ}$ . Обчислити заряд кожного з конденсаторів і енергію усієї системи.

$$\begin{aligned} U &= 2 \text{ кВ} = 2 \cdot 10^3 \text{ В} \\ C &= 500 \text{ нкФ} = 500 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \\ C_1 &= 1 \text{ мкФ} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} \\ \hline q_1 - ? \quad q_2 - ? \quad W_C - ? \end{aligned}$$

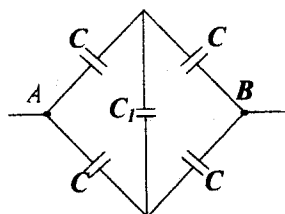


Рисунок 9

#### Розв'язування

Якщо на точку А подати "+", а на точку В "-", то заряди на обох пластинах конденсатора  $C_1$  матимуть однаковий знак. Це означає, що він не заряджений, і при обчисленні ємності системи його враховувати не треба.

При такому сполученні утворюються дві паралельні гілки, кожна з яких являє собою два

сполучених послідовно однакових конденсаторів і має ємність  $\frac{C}{2}$ .

Отже загальна електроємність усього сполучення дорівнює  $\frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C$ . Енергія системи конденсаторів дорівнюватиме

$$W_C = \frac{CU^2}{2} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

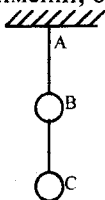
Заряд кожного з них

$$q_1 = q_2 = q = \frac{CU}{2} = 50 \text{ нКл.}$$

**Відповідь:** система еквівалентна одному конденсатору з електроємністю 500 пкФ, центральний конденсатор не заряджений; енергія батареї 0.001 Дж; заряди конденсаторів - по 50 нКл кожний.

### Задачі для самостійного розв'язування

**Задача 1.** Дві однакові кульки масою по 0.2 г кожна підвішені на нитці (див. рисунок). Відстань між кульками  $|BC| = 3$  см. Знайти силу натягу нитки на ділянках  $|AB|$  і  $|BC|$ , якщо кулькам надали однакові заряди по 10 нКл. Розглянути випадки: а) заряди однойменні; б) заряди різнойменні.



**Відповідь:** а) 4 мН, 3 мН; б) 4 мН, 1 мН.

**Задача 2.** Заряд однієї з двох однакових металевих кульок у 5 разів більший, ніж іншої. Однією кулькою доторкнулись до другої, а потім знову відвели на попередню відстань. У скільки разів змінилася сила їх взаємодії, якщо заряди кульок однойменні? різнойменні?

**Відповідь:** збільшилась у 1.8 раза; зменшилась у 1.25 раза.

**Задача 3.** У вершинах правильного шестикутника зі стороною  $a$  розміщено один за одним заряди  $+q, +q, +q, -q, -q, -q$ . Знайти силу, що діє на заряд  $+q$ , розміщений у центрі шестикутника.

**Відповідь:**  $F = \frac{q^2}{\epsilon_0 \pi a^2}$ .

**Задача 4.** Два точкових заряди, розміщені у повітрі на відстані  $r_1 = 5$  см, взаємодіють із силою  $F_1 = 120$  мкН. Ці самі заряди, розміщені у рідкому діелектрику на відстані  $r_2 = 10$  см, взаємодіють із силою  $F_2 = 15$  мкН. Яка діелектрична проникність діелектрика?

Відповідь:  $\varepsilon = \frac{F_1 r_1^2}{F_2 r_2^2} = 2.$

**Задача 5.** Відстань між двома негативними точковими зарядами  $q_1 = -9$  нКл та  $q_2 = -36$  нКл дорівнює  $r = 3$  м. Після того, як у деякій точці помістили заряд  $q_0$ , виявилось, що всі три заряди перебувають у стані рівноваги. Знайти заряд  $q_0$  і відстань  $x$  між зарядами  $q_1$  і  $q_0$ .

Відповідь:  $q_0 = -\frac{q_2}{1 + \sqrt{q_2/q_1}} = 4$  нКл,  $x = \frac{r}{1 + \sqrt{q_2/q_1}} = 1$  м.

**Задача 6.** Дві однаково заряджені кульки, які підвішені на нитках однакової довжини в одній точці, розійшлися у повітрі на кут  $\alpha$ . Яка густина матеріалу кульок, якщо при їх зануренні в гас кут між нитками не змінився? Густина гасу  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>, діелектрична проникність  $\varepsilon = 2$ .

Відповідь:  $\rho = \frac{\varepsilon \rho_2}{\varepsilon - 1} = 1600$  кг/м.

**Задача 7.** Дві однакові кульки масою  $m = 15$  г, одна з яких закріплена, а інша підвішена на нитці завдовжки  $l = 20$  см, дотикаються одна до одної. Після того, як кульки отримали однакові заряди, рухома кулька відхилила нитку на кут  $2\alpha = 60^\circ$ . Знайти заряд кульок.

Відповідь:  $q = 2 \cdot l \cdot \sqrt{\frac{mg}{k} (1 - \cos 2\alpha) \sin \alpha} = 0.8$  мкКл.

**Задача 8.** В середині гладенької діелектричної сфери є маленька заряджена кулька. Який заряд треба помістити в нижній точці сфери, щоб кулька утримувалась у верхній точці? Діаметр сфери  $d$ , заряд кульки  $q$ , її маса  $m$ .

Відповідь:  $Q > \frac{8\pi \varepsilon_0 m g d^2}{q}$

**Задача 9.** Іноді кажуть, що силові лінії електричного поля - це траєкторії, по яких рухався б у полі вільний позитивний точковий заряд. Чи справедливе це твердження?

**Задача 10.** У центрі сфери з провідника помістили точковий заряд  $q = 10$  нКл. Внутрішній і зовнішній радіуси сфери такі:

$r_1 = 10$  см,  $r_2 = 20$  см. Знайти напруженість електричного поля біля внутрішньої і зовнішньої поверхонь сфери.

**Відповідь:**  $E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 9 \text{ кВ / м}; E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 2.25 \text{ кВ / м}.$

**Задача 11.** Знайти поверхневу густину заряду на зовнішній поверхні провідника у формі сфери радіусом  $R = 20$  см, якщо в її центрі на паличці ізолятора міститься кулька з зарядом  $q = 50$  нКл. Чи змінюватиметься поверхнева густина заряду при зміні положення кульки всередині сфери?

**Відповідь:**  $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = 0.1 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}.$

**Задача 12.** Поверхнева густина заряду зарядженої металеві кулі дорівнює  $\sigma$ . Знайти напруженість поля в точці, що віддалена від поверхні кулі на відстань, яка дорівнює її діаметру.

**Відповідь:**  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$

**Задача 13.** Заряджена металева кулька підвішена на нитці в однорідному електричному полі, силові лінії якого спрямовані горизонтально. Нитка утворює з вертикаллю кут  $45^\circ$ . Наскільки зменшиться кут відхилення нитки внаслідок стикання з кульки десятиї частини її заряду?

**Відповідь:** на  $3^\circ$ .

**Задача 14.** Кулька масою  $m$ , що несе заряд  $q$ , вільно падає в однорідному електричному полі з напруженістю  $E$ , спрямованою горизонтально. Який рух кульки? (Написати рівняння траєкторії, коли вісь ординат спрямована уздовж  $E$ , абсцис - вертикально вниз.) Початкова швидкість кульки дорівнює нулю.

**Відповідь:**  $y = \frac{mg}{qE} x.$

**Задача 15.** Електрон рухається в напрямку однорідного електричного поля з напруженістю  $E = 120$  В/м. Яку відстань пролетить електрон до повної втрати швидкості, якщо його початкова швидкість  $v = 1000$  км/с? За який час буде пройдено цю відстань?

Питомий заряд електрона  $\gamma = \frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг.

**Відповідь:**  $S = \frac{v^2}{2\gamma E} = 2.37 \text{ см}; t = \frac{v}{\gamma E} = 47 \text{ нс}.$

**Задача 16.** У однорідному електричному полі з напруженістю  $E$  на нитці висить заряджена кулька масою  $m$ . Заряд кульки дорівнює  $q$ ,

кут між напрямком вектора напруженості і вертикаллю  $\alpha$ . Знайти силу натягу  $T$  нитки.

**Відповідь:**  $T = m^2 g^2 + q^2 E^2 - 2mgqE \cos \alpha$ .

**Задача 17.** Вісім точкових зарядів  $|q_1| = \dots = |q_8| = q$  містяться у вершинах куба зі стороною  $a$ . У вершинах нижньої основи розміщені позитивні заряди, верхньої - негативні. Знайти напруженість електричного поля у центрі куба.

**Відповідь:**  $E = \frac{8}{9\pi\epsilon_0} \frac{3q}{a^2}$ .

**Задача 18.** У скільки разів і як треба змінити відстань між зарядами при збільшенні одного з них у 4 рази, щоб сила взаємодії лишилась тією самою?

**Відповідь:** збільшити вдвічі.

**Задача 19.** Знайти кожний з двох однакових зарядів, якщо в маслі на відстані 6 см один від одного вони взаємодіють із силою 0.4 мН. Діелектрична проникність масла 2.5.

**Відповідь:** 20 нКл.

**Задача 20.** Відстань між однаковими металевими кульками, які мають заряди  $q$  та  $4q$ , дорівнює  $r$ . Якою має бути відстань  $x$  між ними після того, як однією з них доторкнулись до іншої, щоб сила взаємодії не змінилась?

**Відповідь:**  $x = 1.25r$ .

**Задача 21.** Три однакові точкові заряди  $q = 20$  нКл розміщені у вершинах рівностороннього трикутника. На кожний заряд діє сила  $F = 10$  мН. Знайти довжину  $a$  сторони трикутника.

**Відповідь:**  $a = q \sqrt{\frac{\cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 F}} = 2.5$  см.

**Задача 22.** Порівняти сили електричної та гравітаційної взаємодій двох електронів. Заряд електрона  $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$  Кл, його маса  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$  кг, гравітаційна стала  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>/кг·с<sup>2</sup>.

**Відповідь:**  $\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_e^2} = 4.2 \cdot 10^{42}$ .

**Задача 23.** Навколо точкового заряду  $q_0 = -5$  нКл рівномірно рухається по колу маленька заряджена кулька. Знайти відношення заряду кульки до її маси, якщо кутова швидкість обертання кульки  $\omega = 5$  рад/с, а радіус кола  $R = 3$  см?

**Відповідь:**  $\frac{q}{m} = -\frac{\omega^2 R^3}{kq_0} = 15$  мкКл/кг.



**Задача 24.** Відстань між двома вільними зарядами  $4q$  і  $q$  дорівнює  $a$ . Який заряд і де треба помістити, щоб вся система перебувала у рівновазі?

**Відповідь:**  $Q = -\frac{4}{9}q$  на відстані  $\frac{1}{3}a$  від  $q$ .

**Задача 25.** Чотири однакових заряди  $q$  розміщені у вершинах квадрата. Який заряд треба помістити в центр квадрата, щоб система була в рівновазі?

**Відповідь:**  $Q = -0.957q$ .

**Задача 26.** Зарядженою маленькою металевою кулькою дотикаються до такої самої незарядженої і відводять на відстань  $r = 9.0$  см. На цій відстані кульки відштовхуються з силою  $F = 0.25$  мН. Який початковий заряд кульки?

**Відповідь:**  $q = 4r \pi \epsilon_0 F = 30$  нКл.

**Задача 27.** Відстань між двома зарядами  $q_1 = 0.27$  мкКл і  $q_2 = 0.17$  мкКл дорівнює  $l = 20$  см. Визначити, в якій точці на прямій між зарядами напруженість поля дорівнює нулю.

**Відповідь:** на відстані  $r_1 = \frac{l}{\sqrt{\frac{q_2}{q_1} + 1}} = 11.2$  см від заряду  $q_1$ .

**Задача 28.** Позитивно заряджена кулька масою  $0.18$  г з густиною речовини  $1800$  кг/м<sup>3</sup> перебуває в підвішеному стані в рідкому діелектрику з густиною  $900$  кг/м<sup>3</sup>. У діелектрику діє електричне поле з напруженістю  $45$  кВ/м, спрямованою вгору. Знайти заряд кульки.

**Відповідь:**  $20$  нКл.

**Задача 29.** Дві однаково заряджені кульки підвішені на нитках однакової довжини в одній точці й занурені в рідину. Густина матеріалу кульки дорівнює  $\rho$ , рідини  $\rho_0$ . При якій діелектричній проникності рідини кут між нитками в рідині і повітрі буде однаковим?

**Відповідь:**  $\epsilon = \frac{\rho}{\rho - \rho_0}$ .

**Задача 30.** Металева кулька з зарядом  $q = 50$  нКл доторкнулася до внутрішньої поверхні незарядженої сфери радіусом  $R = 20$  см, виготовленої з провідника. Знайти поверхневу густину заряду на зовнішній поверхні сфери.

**Відповідь:**  $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = 0.1$  мкКл / м<sup>2</sup>.

**Задача 31.** Дві кульки з однаковими зарядами і масами 0.1 г з'єднані двома нитками, одна з яких завдовжки 10 см вдвічі коротша від іншої. Коли систему потягнули вертикально вгору за середину довгої нитки із прискоренням  $0.3 \text{ м/с}^2$ , натяг короткої нитки зник. Знайти заряди кульок.

**Відповідь:**  $\pm 4.4 \text{ нКл}$ .

**Задача 32.** Пучок катодних променів, спрямований паралельно обкладкам плоского конденсатора, на шляху  $l = 4 \text{ см}$  відхиляється на відстань  $h = 2 \text{ мм}$  від попереднього напрямку. Яку швидкість  $V$  і кінетичну енергію  $K$  мають електрони катодного пучка в промені, коли влітають у конденсатор? Напруженість електричного поля всередині конденсатора  $E = 22.5 \text{ кВ/м}$ .

**Відповідь:**

$$V = l \sqrt{\frac{eE}{2mh}} = 3.98 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad K = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{eEl^2}{4h} = 7.2 \cdot 10^{-16} \text{ Дж.}$$

**Задача 33.** У точці, віддаленій від обох зарядів диполя на  $d = 2 \text{ см}$ , напруженість електричного поля дорівнює  $E = 1.8 \text{ В/м}$ . Відстань між зарядами  $l = 1.0 \text{ мкм}$ . Знайти заряди диполя.

**Відповідь:**  $q = \frac{4\pi\epsilon_0 d^3 E}{l} = 1.6 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ .

**Задача 34.** Як, маючи заряджену паличку, зарядити дві металеві кулі, закріплені на ізолювальних підставках, однаковими за величиною і протилежними за знаком зарядами?

**Задача 35.** Заряджений металевий лист згорнули в циліндр. Як зміниться поверхнева густина заряду?

**Задача 36.** У однорідному електричному полі з напруженістю  $1 \text{ кВ/м}$  перемістили заряд  $-25 \text{ Кл}$  у напрямку силової лінії на  $2 \text{ см}$ . Знайти виконану роботу, зміну потенціальної енергії взаємодії заряду та поля і напругу між початковою і кінцевою точками переміщення.

**Відповідь:**  $-0.5 \text{ мкДж}, 0.5 \text{ мкДж}, 20\text{В}$ .

**Задача 37.** Між двома пластинами, розміщеними горизонтально у вакуумі на відстані  $4.8 \text{ мм}$  одна від одної, перебуває у рівновазі заряджена крапля масла масою  $10 \text{ нг}$ . Скільки "надлишкових" електронів має крапля, якщо до пластин прикладено напругу  $1 \text{ кВ}$ ? Після опромінення краплі світлом вона почала рухатись униз з прискоренням  $6 \text{ м/с}^2$ . Скільки електронів втратила крапля?

**Відповідь:**  $2940, 1800$ .

**Задача 38.** У двох точках напруженість поля точкового заряду відрізняється в 4 рази. У скільки разів відрізняються потенціали у цих точках?

**Відповідь:**  $\text{в } 2 \text{ рази}$ .

**Задача 39.** Металева куля діаметра 4 см занурена в гас (діелектрична проникність 2.1). Знайти напруженість і потенціал електричного поля в точках, віддалених від центра кулі на відстані 1 і 3 см. Заряд кулі 100 нКл.

**Відповідь:** 0, 21.4 кВ; 476 кВ/м, 14.3 кВ.

**Задача 40.** Побудувати графіки напруженості і потенціалу поля вздовж лінії, яка проходить через два точкових заряди, відстань між якими  $2d$ . Заряди мають такі значення: а)  $+q$  і  $-q$ ; б)  $+q$  і  $+q$ ; в)  $+q$  і  $-3q$ .

**Задача 41.** Потік електронів, які набули швидкості під дією напруги  $U_1 = 5000$  В, влітає між обкладками плоского конденсатора паралельно їм. Яку найменшу напругу  $U_2$  треба прикласти до конденсатора, щоб електрони не вилітали з нього, якщо довжина конденсатора  $l = 5$  см, а відстань між обкладками  $d = 1$  см?

**Відповідь:**  $U_2 = \frac{2d^2 U_1}{l^2} = 400$  В.

**Задача 42.** Металеве кільце радіусом  $R$  має заряд  $q$ . Знайти напруженість поля і потенціал на відстані  $x$  від центра кільця вздовж осі, яка проходить через останній перпендикулярно до площини кільця.

**Відповідь:**  $E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$ ;  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$ .

**Задача 43.** Куля В з провідника перебуває в електричному полі кулі А. Чи можна вважати поверхню кулі В еквіпотенціальною?

**Задача 44.** Заряд  $Q$  кулі рівномірно розподілений в об'ємі кулі радіусом  $R$  з непровідного матеріалу. Знайти напруженість поля на відстані  $r$  від центра кулі. Побудувати графік залежності  $E$  від  $r$ . Діелектрична проникність кулі  $\epsilon = 1$ .

**Відповідь:**  $E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$  при  $r < R$ ;  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  при  $r > R$ .

**Задача 45.** Металеву кулю радіусом  $R_1 = 2$  см, що має заряд  $q_1 = 1.33 \cdot 10^{-8}$  Кл, поміщено у концентричну металеву оболонку радіусом  $R_2 = 5$  см, що має заряд  $q_2 = -2 \cdot 10^{-8}$  Кл. Визначити напруженість і потенціал поля на відстанях  $l_1 = 1$  см,  $l_2 = 4$  см,  $l_3 = 6$  см від центра кулі.

**Відповідь:**  $E_1 = 0$ ;  $E_2 = 7.5 \cdot 10^4$  В/м;  $E_3 = -1.67 \cdot 10^4$  В/м;  
 $\varphi_1 = 2400$  В;  $\varphi_2 = -600$  В;  $\varphi_3 = -1000$  В.

**Задача 46.** Металеву кулю радіусом  $R_1$ , заряджену до потенціалу  $\varphi$ , оточують сферичною провідною оболонкою радіусом  $R_2$ . Як зміниться потенціал кулі після того, як на деякий час її з'єднають провідником з оболонкою?

**Відповідь:** на  $\Delta\varphi = \varphi \left( \frac{R_1}{R_2} - 1 \right)$ .

**Задача 47.** На відстані  $r$  від центра ізольованої металевої незарядженої кулі міститься точковий заряд  $q$ . Визначити потенціал кулі.

**Відповідь:**  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

**Задача 48.** Деяку кількість  $N$  однакових круглих крапель ртуті заряджено до одного і того самого потенціалу  $\varphi$ . Знайти потенціал великої краплі, що утвориться після злиття цих крапель.

**Відповідь:**  $\Phi = \varphi^3 N^2$ .

**Задача 49.** Показати, що після з'єднання двох заряджених металевих куль тонким металевим дротом поверхневі густини зарядів на них будуть обернено пропорційні їх радіусам.

**Задача 50.** Точковий заряд  $Q$  міститься на відстані  $h$  від нескінченної незарядженої металевої площини. Яка сила діє на заряд?

**Відповідь:**  $F = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 h^2}$ .

**Задача 51.** Електрон, рухаючись під дією електричного поля, збільшує швидкість від 10 до 30 Мм/с. Знайти різницю потенціалів між початковою і кінцевою точками переміщення.

**Відповідь:**  $-2.3 \text{ кВ}$ .

**Задача 52.** Відстань між зарядами 10 нКл і  $-1$  нКл дорівнює 1.1 м. Знайти напруженість поля в точці на прямій, що з'єднує заряди, в якій потенціал дорівнює нулю.

**Відповідь:**  $990 \text{ В/м}$ .

**Задача 53.** Вісім точкових зарядів  $|q_1| = \dots = |q_8| = q$  містяться у вершинах куба зі стороною  $a$ . Знайти потенціал електричного поля у центрі куба.

**Відповідь:**  $\varphi = 0$ .

**Задача 54.** Дві провідні концентричні тонкостінні сфери радіусів  $r$  і  $2r$  мають потенціали 0 (сфера заземлена) і  $\varphi$ . Знайти заряди сфер. Розглянути випадки: а) заземлена внутрішня сфера; б) заземлена зовнішня сфера.

**Відповідь:** а)  $q_1 = -8\pi\epsilon_0\varphi r$ ;  $q_2 = 16\pi\epsilon_0\varphi r$ ; б)  $q_1 = 8\pi\epsilon_0\varphi r$ ;  $q_2 = -8\pi\epsilon_0\varphi r$

**Задача 55.** Яку роботу виконує поле при переміщенні заряду 20 нКл із точки з потенціалом 700 В у точку з потенціалом 200 В та із точки з потенціалом -100 В у точку з потенціалом 400 В?

**Відповідь:** 10 мкДж, -10 мкДж.

**Задача 56.** Електрон перемістився в електричному полі із точки з потенціалом 200 В у точку з потенціалом 300 В. Знайти кінетичну енергію електрона, зміну потенціальної енергії взаємодії його з полем і набуту електронном швидкість. Початкова швидкість електрона дорівнює нулю.

**Відповідь:**  $W_k = 1.6 \cdot 10^{-17}$  Дж;  $\Delta W_n = -1.6 \cdot 10^{-17}$  Дж;

$v = 5.9$  Мм/с.

**Задача 57.** Заряди по 0.1 мкКл кожний розміщено на відстані 6 см один від одного. Знайти напруженість і потенціал у точці, яка лежить на відстані 5 см від кожного із зарядів. Розв'язати задачу для випадків: а) обидва заряди позитивні; б) заряди різнойменні.

**Відповідь:** а) 576 кВ/м; 36 кВ; б) 432 кВ/м; 0.

**Задача 58.** Заряджена пилинка зависла в плоскому конденсаторі. Її маса  $m = 10^{-10}$  г, відстань між обкладками конденсатора  $d = 0.5$  см. Пилінку опромінюють світлом, і вона, втрачаючи заряд, виходить з рівноваги. Який заряд втратила пилінка, якщо спочатку на конденсатор подали напругу  $U = 154$  В, а потім, щоб знову повернути пилінку до стану рівноваги, збільшили напругу на 8 В?

**Відповідь:**  $\Delta q = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**Задача 59.** Наскільки зміниться потенціальна енергія взаємодії зарядів 25 нКл і -4 нКл, якщо відстань між ними була 10 см, а потім стала 20 см?

**Відповідь:** збільшиться на 4.5 мкДж.

**Задача 60.** Між обкладками плоского конденсатора, розміщеного у вакуумі, зависла заряджена краплина ртуті. Відстань між обкладками  $d = 1$  см, різниця потенціалів  $U_1 = 1000$  В. Раптово різниця потенціалів впала до  $U_2 = 995$  В. Через який час краплина досягне нижньої пластини, якщо спочатку вона була посередині конденсатора?

**Відповідь:**  $t = \sqrt{\frac{dU_1}{g(U_1 - U_2)}} = 0.45$  с.

**Задача 61.** Два електрони, нескінченно віддалені один від одного, починають рухатись назустріч один одному, причому швидкості їх  $V_0$  у цей момент однакові за величиною і протилежні за

напрямок. Визначити найменшу відстань між електронами, якщо  $V_0 = 10^6$  м/с, заряд електрона  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл, його маса  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  кг.

$$\text{Відповідь: } r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m V_0^2} = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

**Задача 62.** Відстань між двома електронами нескінченно велика, причому один електрон перебуває в стані спокою, а другий рухається зі швидкістю  $V$  до першого. Визначити найменшу відстань, на яку вони зближаться.

$$\text{Відповідь: } r = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m V^2}.$$

**Задача 63.** З якою швидкістю пролетить електрон через центр позитивно зарядженого кільця? Електрон рухається з нескінченності вздовж лінії, що проходить через центр кільця перпендикулярно до його площини. Лінійна густина заряду на кільці  $\gamma$ .

$$\text{Відповідь: } V_0 = \frac{\gamma e}{\epsilon_0 m}.$$

**Задача 64.** Всередині порожнистої тонкостінної сфери радіусом  $R$  міститься сфера радіусом  $r$ . Центри сфер збігаються. Сфері радіусом  $R$  надають заряд  $Q$ , а сфері радіусом  $r$  – заряд  $q$ . Сфери виготовлені з провідника. Визначити потенціали поверхонь сфер.

$$\text{Відповідь: } \varphi_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q+q}{R}; \quad \varphi_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R} + \frac{q}{r} \right).$$

**Задача 65.** Всередині тонкостінної металеві сфери радіусом  $R = 20$  см концентрично розміщена металева куля радіусом  $r = 10$  см. Крізь отвір у сфері цю кулю з'єднують із землею тонким і довгим провідником. Зовнішній сфері надають заряд  $Q = 10^{-8}$  Кл. Визначити потенціал цієї сфери.

$$\text{Відповідь: } \varphi = \frac{Q(R-r)}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 225 \text{ В.}$$

**Задача 66.** На кульку радіусом 10 см падає пучок електронів. Який заряд можна нагромадити на кульці таким способом, якщо напруженість поля, при якій починається іонізація повітря, дорівнює  $3 \cdot 10^6$  В/м?

$$\text{Відповідь: } 3.3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

**Задача 67.** Точковий заряд  $q$  створює в точках А і В поле з напруженістю відповідно  $E_A$  і  $E_B$ . Знайти роботу електричних сил з переміщення точкового заряду  $q_0$  із точки А у точку В.

**Відповідь:**  $A = \frac{qE_A - qE_B}{2 \pi \epsilon_0}$

**Задача 68.** Три заряджені металеві кулі радіусів 1, 2 і 3 см з'єднані тонким провідником. Як розподілиться загальний заряд між кулями?

**Відповідь:**  $\frac{1}{6} q; \frac{1}{3} q; \frac{1}{2} q$ .

**Задача 69.** Дві металеві кулі радіусами  $R_1 = 8$  см і  $R_2 = 20$  см, відстань між якими значна, мають заряди  $q_1 = 40$  нКл і  $q_2 = -20$  нКл. Як перерозподіляться заряди, якщо кулі з'єднати тонким провідником?

**Відповідь:**  $q'_1 = \frac{R_1(q_1 - q_2)}{R_1 + R_2} = 1.9$  нКл;  $q'_2 = \frac{R_2(q_1 - q_2)}{R_1 + R_2} = 4.8$  нКл.

**Задача 70.** По один бік незарядженого плоского провідника на відстані  $h$ , від нього містяться два однакових заряди  $Q$ . Знайти силу, яка діє на кожний з цих зарядів, якщо відстань між ними  $2h$ .

**Відповідь:**  $F = \frac{3Q^2}{32\pi\epsilon_0 h^2}$ .

### Електроємність. Конденсатор

**Задача 71.** Яка ємність провідника, потенціал якого змінюється на 10 кВ, якщо йому надати заряд 5 нКл?

**Відповідь:**  $0.5$  пФ.

**Задача 72.** Площа кожної обкладки плоского конденсатора дорівнює  $520$  см<sup>2</sup>. Якою має бути відстань між ними у повітрі, щоб ємність конденсатора дорівнювала  $46$  пФ?

**Відповідь:**  $1$  см.

**Задача 73.** Знайти силу  $F$ , з якою притягуються одна до одної обкладки плоского конденсатора, ємність якого  $C$ , різниця потенціалів  $U$ . Відстань між обкладками  $d$ .

**Відповідь:**  $F = \frac{CU^2}{2d}$ .

**Задача 74.** Дві плоскі однакові пластини розміщено на малій порівняно з їх розмірами відстані. По одній з пластин рівномірно

розподілений заряд  $+q$ , по іншій - заряд  $+4q$ . Знайти різницю потенціалів між пластинами. Площа кожної пластини  $S$ , відстань між ними  $d$ .

Відповідь:  $U = \frac{3qd}{2\epsilon_0 S}$ .

**Задача 75.** Конденсатор ємністю  $C_1$  зарядили до напруги  $U_1 = 500$  В. При паралельному приєднанні цього конденсатора до незарядженого ємністю  $C_2 = 4$  мкФ вольтметр показав напругу  $U_2 = 100$  В. Знайти ємність  $C_1$ .

Відповідь:  $C_1 = \frac{C_2 U_2}{U_1 - U_2}$ .

**Задача 76.** Два однакових повітряних конденсатори ємністю  $C = 100$  пФ з'єднали послідовно і підключили до джерела струму з напругою  $U = 10$  В. Як зміниться заряд на конденсаторах, якщо один із них занурити в діелектрик з діелектричною проникністю  $\epsilon = 2$ ?

Відповідь:  $q - q_0 = \frac{C(\epsilon - 1)U}{2(1 + \epsilon)} = 167$  нКл.

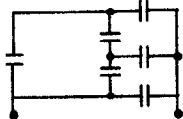
**Задача 77.** Знайти ємність сферичного повітряного конденсатора. Радіус внутрішньої сфери  $r$ , зовнішньої  $R$ .

Відповідь:  $C = \frac{4\pi\epsilon_0 rR}{R - r}$ .

**Задача 78.** У плоский повітряний конденсатор з площею обкладок  $S$  і відстанню між ними  $d$  помістили паралельно обкладкам пластинку з провідника, розміри якої дорівнюють розмірам обкладок, а товщина набагато менша від  $d$ . Знайти ємність конденсатора з пластинкою, якщо вона розміщена на відстані  $l$  від однієї з його обкладок.

Відповідь:  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ .

**Задача 79.** Знайти загальну ємність конденсаторів, з'єднаних, як показано на рисунку. Ємність кожного конденсатора  $C_0$ .



Відповідь:  $2C_0$ .

**Задача 80.** На одну з обкладок плоского повітряного конденсатора з площею обкладок  $S$  і відстанню між ними  $d$  поклали діелектричну пластинку завтовшки  $\frac{l}{2}$   $d$ , площею  $\frac{l}{2}$   $S$  і з



діелектричною проникністю  $\epsilon = 2$ . У скільки разів змінилась при цьому ємність конденсатора?

**Відповідь:** 
$$\frac{C}{C_0} = \frac{1+3\epsilon}{2(1+\epsilon)} = \frac{7}{6}$$

**Задача 81.** Якої ємності конденсатор треба приєднати до конденсатора ємністю 400 пФ, щоб ємність батареї конденсаторів дорівнювала 80 пФ? Як його треба приєднати (поєднано чи паралельно)?

**Відповідь:** 100 пФ.

**Задача 82.** Два послідовно з'єднаних конденсатори ємностями  $C_1 = 1$  мкф і  $C_2 = 3$  мкф приєднали до джерела струму з напругою  $U = 220$  В. Знайти напругу на кожному конденсаторі.

**Відповідь:** 
$$U_1 = \frac{C_2 U}{C_1 + C_2} = 165 \text{ В}, \quad U_2 = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2} = 55 \text{ В}.$$

**Задача 83.** Провідник ємністю 10 пФ має заряд +600 нКл, а провідник ємністю 30 пФ має заряд -200 нКл. Знайти заряди і потенціал провідників після того, як їх з'єднали тонким провідником.

**Відповідь:** 100 нКл, 300 нКл, 10 кВ

**Задача 84.** Плоский повітряний конденсатор, заряджений до різниці потенціалів  $U_0 = 800$ В, з'єднали паралельно з таким самим за розмірами конденсатором, заповненим діелектриком. Яка діелектрична проникність діелектрика, якщо після з'єднання конденсаторів різниця потенціалів між їх обкладками стала  $U = 100$  В?

**Відповідь:**  $\epsilon = (U_0 - U)/U = 7$ .

**Задача 85.** Три послідовно з'єднаних конденсатори ємностями  $C_1 = 100$  пф,  $C_2 = 200$  пф,  $C_3 = 500$  пф під'єднані до джерела струму, яке надало їм заряд  $q = 3$  нКл. Знайти напругу на конденсаторах  $U_1$ ,  $U_2$  і  $U_3$ , напругу джерела струму  $U$ , ємність всіх конденсаторів  $C$ .

**Відповідь:** 
$$U_1 = \frac{q}{C_1} = 30 \text{ В}; \quad U_2 = \frac{q}{C_2} = 15 \text{ В}; \quad U_3 = \frac{q}{C_3} = 6 \text{ В};$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = 51 \text{ В}; \quad C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} = 59 \text{ пф}.$$

**Задача 86.** У зарядженому плоскому конденсаторі, від'єданому від джерела струму, напруженість поля дорівнює  $E_0$ . Половину простору між обкладками заповнили діелектриком з діелектричною проникністю  $\epsilon$ , (товщина діелектрика дорівнює відстані між

обкладками). Знайти напруженість електричного поля  $E$  між обкладками у просторі, вільному від діелектрика.

Відповідь:  $E = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}$ .

**Задача 87.** Два плоских повітряних конденсатори, ємності яких однакові, з'єднані послідовно і приєднані до джерела струму. Простір між обкладками одного з них заповнили діелектриком з діелектричною проникністю  $\varepsilon = 9$ . У скільки разів зменшилась напруженість електричного поля в цьому конденсаторі?

Відповідь:  $\frac{E_2}{E_1} = \frac{2}{\varepsilon + 1} = 0.2$ .

**Задача 88.** У плоский повітряний конденсатор з площею обкладок  $S$  і відстанню між ними  $d$  помістили паралельно обкладкам пластинку з провідника, розміри якої дорівнюють розмірам обкладок, а товщина  $d_n = \frac{1}{3}d$ . Знайти ємність конденсатора з пластинкою.

Відповідь:  $C = \frac{3\varepsilon_0 S}{2d}$ .

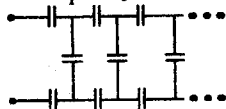
**Задача 89.** Простір між обкладками плоского конденсатора заповнено трьома діелектричними пластинками однакової товщини  $d = 2$  мм із скла ( $\varepsilon_1 = 7$ ), слюди ( $\varepsilon_2 = 6$ ) і парафіну ( $\varepsilon_3 = 2$ ). Площі обкладок і пластинок однакові і дорівнюють  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Знайти ємність  $C$  конденсатора.

Відповідь:  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 S}{d(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3)} = 90$  нФ.

**Задача 90.** Конденсатор, заряджений до напруги 100 В, з'єднують з іншим конденсатором такої самої ємності, але зарядженим до 200 В: один раз однойменно зарядженими, другий - різнойменно зарядженими обкладками. Яка напруга встановиться між обкладками в обох випадках?

Відповідь: 150 В, 50 В.

**Задача 91.** Знайти ємність нескінченної послідовності конденсаторів, з'єднаних, як показано на рисунку. Ємність одного конденсатора  $C_0$ .



Відповідь:  $C = \frac{3 - 1}{2} C_0$ .

**Задача 92.** Конденсатор ємністю  $C$  виготовлено у вигляді двох концентричних сфер. Внутрішня сфера випускає електрони (п електронів щосекунди) з початковою швидкістю  $V$ . Через який час  $t$  після початку емісії припиниться зростання заряду на конденсаторі? Заряд електрона  $e$ , маса  $m$ . Повітря між сферами відсутнє.

**Відповідь:**  $t = \frac{mV^2 C}{2ne^2}$ .

### Енергія електричного поля

**Задача 93.** Імпульсна лампа живиться від конденсатора ємністю 800 мкф, зарядженого до напруги 300 В. Знайти енергію спалаху і його середню потужність, якщо тривалість розряду конденсатора 2.4 мс.

**Відповідь:** 36 Дж, 15 кВ.

**Задача 94.** Який заряд  $q$  надали кулі, якщо її зарядили до потенціалу  $\phi = 100$  В і при цьому енергія електричного поля кулі  $W = 2.02$  Дж?

**Відповідь:**  $q = \frac{2W}{\phi} = 0.4$  мКл.

**Задача 95.** Пластинка з діелектрика повністю заповнює простір між обкладками плоского конденсатора. Діелектрична проникність пластинки  $\epsilon$ , ємність конденсатора з пластинкою  $C$ , його заряд  $q$ . Яку роботу  $A$  треба виконати, щоб витягнути пластинку з конденсатора? Вважати, що пластинка ковзає по обкладках без тертя.

**Відповідь:**  $A = \frac{q^2(\epsilon - 1)}{2C}$ .

**Задача 96.** У скільки разів зміниться енергія зарядженого конденсатора, якщо простір між пластинами заповнити маслом (діелектрична проникність  $\epsilon = 2.5$ ). Розглянути випадки: а) конденсатор відключений від джерела струму; б) конденсатор приєднаний до джерела струму.

**Відповідь:** а) зменшиться в 2.5 рази; б) збільшиться в 2.5 рази.

**Задача 97.** Знайти кількість теплоти  $Q$ , що виділяється при з'єднанні однойменно заряджених обкладок конденсаторів з

ємностями  $C_1 = 2 \text{ мкФ}$  і  $C_2 = 0.5 \text{ мкФ}$ . Різниці потенціалів між обкладками конденсаторів до з'єднання  $U_1 = 100 \text{ В}$  і  $U_2 = 50 \text{ В}$ .

Відповідь:  $Q = \frac{C_1 C_2 (U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 0.5 \text{ мДж}$ .

**Задача 98.** Відстань між пластинами плоского конденсатора з діелектриком, який має діелектричну проникність 2.1, дорівнює 2 мм, а напруга між пластинами 200 В. Знайти густину енергії поля.

Відповідь:  $93 \text{ мДж/м}^3$ .

**Задача 99.** Знайти потенціальну енергію системи з трьох однакових зарядів по 3.3 мкКл, що розміщені у вершинах правильного трикутника зі стороною 1 м.

Відповідь:  $0.3 \text{ Дж}$ .

**Задача 100.** Під час розрядження батареї, що складається з  $n = 20$  паралельно під'єднаних конденсаторів однакової ємності  $C = 4 \text{ мкФ}$ , виділилась кількість теплоти  $Q = 10 \text{ Дж}$ . До якої різниці потенціалів були заряджені конденсатори?

Відповідь:  $U = \frac{2Q}{nC} = 500 \text{ В}$ .

**Задача 101.** Конденсатор ємністю 500 мкФ зарядили до різниці потенціалів 200 В. Знайти заряд обкладок і енергію електричного поля конденсатора.

Відповідь:  $0.1 \text{ Кл}$ ,  $10 \text{ Дж}$ .

**Задача 102.** Відстань між обкладками зарядженого плоского конденсатора зменшили вдвічі. У скільки разів зміниться заряд, напруга між обкладками, напруженість і енергія електричного поля в конденсаторі? Розглянути два випадки: а) конденсатор від'єднаний від джерела струму; б) конденсатор лишається приєднаним до джерела струму з постійною напругою.

Відповідь: а) заряд і напруженість електричного поля не зміняться; напруга і енергія електричного поля зменшаться вдвічі; б) заряд, напруженість і енергія електричного поля зростуть удвічі; напруга не зміниться.

## Розділ 9. Постійний струм

При розв'язуванні задач на тему "Постійний струм" рекомендується:

- зобразити електричну схему, вказати на ній всі елементи електричного кола і напрями струмів;
- визначити, якщо це необхідно, точки з однаковими потенціалами, враховуючи при цьому, що струм між такими точками електричного кола не проходить;
- у складному електричному колі виділити ділянки послідовного і паралельного з'єднання провідників, спростити схему, замінивши окремі ділянки еквівалентними їм відносно опору;
- з'ясувати суть описаних у задачі явищ, визначити, що в даній ситуації слід розуміти як корисну потужність чи роботу і чи можна знехтувати втратами потужності у підвідних провідниках;
- використати основні співвідношення між величинами, виконати алгебраїчні перетворення і визначити шукану величину.

### ***Основні поняття***

#### Сила електричного струму

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt},$$

де  $\Delta q$  - заряд, що проходить через поперечний переріз провідника  $S$  за проміжок часу  $\Delta t$ .

#### Густина електричного струму

$$\vec{j} = en \vec{V},$$

де  $e - 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл - елементарний електричний заряд (заряд носіїв);  
 $n$  - концентрація носіїв;  $\vec{V}$  - середня швидкість впорядкованого руху

носіїв заряду;  $j = \frac{I}{S}$ .

#### Закон Ома для ділянки кола

$$I = \frac{U}{R},$$

де  $I$  - сила струму;  $U$  - напруга на кінцях ділянки кола;  $R = \rho \frac{l}{S}$  - опір провідника довжиною  $l$  і площею  $S$ ;  $\rho$  - питомий опір матеріалу провідника.

Опір  $n$  резисторів, з'єднаних:

1) послідовно  $R = \sum_{i=1}^n R_i$ ;

2) паралельно  $\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$ ,

де  $R_i$  - опір окремого резистора.

Залежність питомого опору провідника від температури

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

де  $\rho_0$  - питомий опір провідника при температурі  $0^\circ \text{C}$ ,  $\alpha$  - температурний коефіцієнт опору.

Закон Ома для замкнутого кола

$$I = \frac{E}{R + r},$$

де  $E = \frac{A_c}{q}$  - електрорушійна сила джерела струму;  $A_c$  - робота сторонніх сил (сил неелектричного походження) по переміщенню електричного заряду  $q$  по замкнутому колу;  $R$  - зовнішній опір (опір навантаження);  $r$  - внутрішній опір (опір джерела струму).

Сила струму в замкнутому колі

а) при послідовному з'єднанні  $n$  однакових джерел струму

$$I = \frac{nE}{R + n \cdot r},$$

де  $E$  - ЕРС одного джерела;  $r$  - його внутрішній опір;  $R$  - опір навантаження.

б) при паралельному з'єднанні  $n$  однакових джерел струму

$$I = \frac{E}{R + \frac{r}{n}}.$$

Робота  $A$  і потужність  $P$  електричного струму

$$A = qU = IUt = I^2 R t = \frac{U^2 t}{R};$$

$$P = \frac{A}{t} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R},$$

де  $I$  - сила струму;  $U$  - напруга;  $R$  - опір;  $t$  - час.

Закон Джоуля-Ленца

$$Q = I^2 R t,$$

де  $Q$  - кількість теплоти, що виділяється в провіднику з опором  $R$  протягом часу  $t$ ;  $I$  - сила струму в провіднику.

Повна потужність, що розвивається джерелом струму

$$P = IE = \frac{E^2}{R + r};$$
 корисна потужність, тобто потужність, що

виділяється на навантаженні  $R$ ,  $P_0 = IU = \frac{E^2 R}{(R + r)}$ ,  $P_0 = P_{0 \max}$  при

$$R = r, \text{ К К Д джерела струму } \eta = \frac{P_0}{P} 100\% = \frac{R}{R + r} 100\%.$$

Закон Фарадея для електролізу

$$m = kq = kIt,$$

де  $q$  - заряд, що проходить через електроліт за час  $t$ ;  $I$  - сила струму;

$k = \frac{\mu}{Fn}$  - електрохімічний еквівалент;  $\mu$  - молярна маса і  $n$  - валентність речовини;  $F = eN_A$  - число Фарадея;  $e$  - елементарний електричний заряд;  $N_A$  - стала Авогадро.

### Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** По залізному провіднику, діаметр якого  $d = 0,6 \text{ мм}$ , тече струм силою  $I = 16 \text{ А}$ . Визначити середню швидкість  $\langle V \rangle$  направленого руху електронів, вважаючи, що концентрація  $n$  вільних електронів дорівнює концентрації  $n'$  атомів провідника.

$$d = 0,6 \text{ мм}$$

$$I = 16 \text{ А}$$

$$\langle V \rangle - ?$$

Розв'язування

Середню швидкість  $\langle V \rangle$  направленого упорядкованого руху електронів визначають за формулою

$$\langle V \rangle = \frac{l}{t}, \quad (1)$$

де  $l$  - довжина провідника;  $t$  - час, протягом якого всі вільні електрони, що знаходяться у відрізку провідника між двома перерізами, перенесуть заряд  $q = eN$  і створять струм силою

$$I = \frac{q}{t} = \frac{eN}{t}, \quad (2)$$

де  $e$  - елементарний заряд,  $N$  - число електронів у відрізку провідника об'ємом  $V$ .

$$N = nV = nlS, \quad (3)$$

де  $S$  - площа перерізу.

За умовою задачі  $n = n'$ . Густина тіла  $\rho = n \cdot m_0$ , де  $m_0$  - маса однієї молекули.

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A},$$

де  $\mu$  - молярна маса,  $N_A$  - стала Авогадро.

Тому

$$n = \frac{\rho}{m_0} = \frac{\rho N_A}{\mu},$$

$$N = \frac{\rho N_A l S}{\mu},$$

$$I = \frac{\rho N_A l S e}{\mu t} \Rightarrow l = \frac{I \mu t}{N_A \rho S e}.$$

Підставивши вираз  $l$  в формулу (1) одержимо

$$\langle V \rangle = \frac{I \mu t}{N_A \rho S l t} = \frac{I \mu}{N_A \rho S l} = 4.20 \text{ мм/с}.$$

Відповідь:  $\langle V \rangle = 4.20 \text{ мм/с}$ .

**Задача 2.** З прямолінійного дроту довжиною  $10 \text{ м}$ , площею перерізу  $1 \text{ мм}^2$  і питомим опором  $10^{-7} \text{ Ом}\cdot\text{м}$  виготовили кільце. Яким буде його загальний опір, якщо до джерела напруги приєднати дві точки цього кільця, які лежать на протилежних кінцях діаметра? Як треба зсунути точку приєднання одного з дротів до кільця, щоб його опір зменшився в п'ять разів?



$$l = 10 \text{ м}$$

$$S = 1 \text{ мм}^2 = 10^{-6} \text{ м}^2$$

$$\rho = 10^{-7} \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

$$R = ? \text{ х} - ?$$

### Розв'язування

Опір прямолінійного провідника  $R_0 = \rho l / S$ . При приєднанні дротів до відповідних точок кільця утворюються дві паралельні гілки, кожна з опором

$R_0/2$ , тому їх спільний опір дорівнюватиме

$$R = \frac{R_0}{4} = \frac{\rho \cdot l}{4S} = 0.25 \text{ Ом.}$$

Позначимо через  $x$  відстань від попередньої точки приєднання до діаметра кільця до нової точки приєднання, коли загальний опір зменшився в  $n = 5$  разів. Нове сполучення утворює дві паралельні гілки з опорами

$$R_1 = \frac{\rho x}{S}, \quad R_2 = \frac{\rho(l-x)}{S}.$$

Оскільки загальний опір двох паралельно сполучених гілок в  $n$  раз менший опору приєданого кільця, то виконуватиметься таке співвідношення

$$\frac{R}{n} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Підставляючи в цю рівність значення опорів через  $x$  і параметри дроту, дістанемо квадратне рівняння

$$x^2 - lx + l^2(4n)^{-1} = 0.$$

Його загальний розв'язок для довільного  $n$  має вигляд

$$x_{1,2} = 0.5l \left( 1 \pm \sqrt{1 - n^{-1}} \right).$$

Для  $n = 5$  матимемо

$$x = 5 \left( 1 - \frac{4}{5} \right) = 0.53 \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $R = 0.52 \text{ Ом}$ ,  $x = 0.53 \text{ м}$ .

**Задача 3.** Амперметр, розрахований на струм не більше  $0.1 \text{ А}$ , вирішили використати для вимірювання струмів до  $5 \text{ А}$ . Обчислити опір шунта, якщо внутрішній опір амперметра  $R_A = 40 \text{ Ом}$ . Яким повинен бути поперечний переріз шунта з міді, якщо його довжина  $l = 10 \text{ см}$  (питомий опір міді  $1.72 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ )?

$$I_a = 0,1 \text{ A}$$

$$I = 5 \text{ A}$$

$$R_A = 4 \text{ Ом}$$

$$l = 10 \text{ см} = 0,10 \text{ м}$$

$$\rho = 1,72 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

$$R_{ш} - ? \quad S_{ш} - ?$$

### Розв'язування

Зробимо таке розгалуження кола, щоб через амперметр ішов струм, який не перевищує максимально допустимий для нього  $I_a$ .

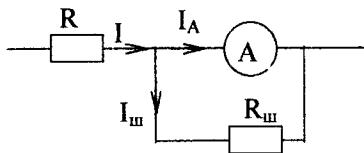


Рисунок 10

На ділянці з шунтом струм  $I$  розгалужується на  $I_A$  та  $I_{ш}$ , причому виконуються очевидні співвідношення:  $I = I_A + I_{ш}$ ;

$U_{ш} = U_A$ . Згідно з законом Ома для ділянки кола постійного струму останню рівність запишемо:

$$\begin{cases} I_{ш} R_{ш} = I_A \cdot R_A \\ I = I_A + I_{ш} \end{cases},$$
$$I = I_A \left( 1 + \frac{R_A}{R_{ш}} \right).$$

Звідси

$$R_{ш} = \frac{R_A}{\left( \frac{I}{I_A} - 1 \right)} = 0,081 \text{ Ом}.$$

З формули

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

визначимо переріз шунта

$$S_{ш} = \frac{\rho l}{R_{ш}} = 0,21 \text{ мм}^2.$$

Відповідь:  $R_{ш} = 0,081 \text{ Ом}$ ;  $S_{ш} = 0,21 \text{ мм}^2$ .

**Задача 4.** Вольтметр з внутрішнім опором  $R_B = 10 \text{ кОм}$  розрахований на вимірювання напруг до  $5 \text{ В}$ . Виникла необхідність вимірювати за його допомогою напруги до  $30 \text{ кВ}$ . Обчислити додатковий опір для таких вимірювань.

$$R_B = 10 \text{ кОм}$$

$$U_B = 5 \text{ В}$$

$$U = 30 \cdot 10^3 \text{ В}$$

$$R_0 = ?$$

Розв'язування

Вольтметр під'єднують паралельно до ділянки з вимірюваним значенням напруги.

Для того, щоб на його клеммах напруга не перевищувала 5 В, послідовно з ним необхідно під'єднати додатковий опір так, як показано на рис. 11.

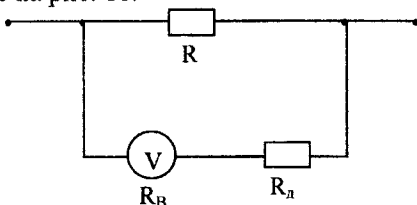


Рисунок 11

Для сполучених послідовно вольтметра з  $R_B$  і додаткового опору  $R_0$  можна записати систему рівнянь

$$\begin{cases} U = U_B + U_0 \\ \frac{U_0}{R_0} = \frac{U_B}{R_B} \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знайдемо формулу обчислення напруги  $U$  через  $U_B$  і під'єднаний опір.

$$U = U_B \left( 1 + \frac{R_0}{R_B} \right)$$

Звідси

$$R_0 = R_B (U \cdot U_B^{-1} - 1) = 59.99 \cdot 10^6 \text{ Ом} = 59.99 \text{ МОм}$$

Відповідь :  $R_0 = 59.99 \text{ МОм}$ .

**Задача 5.** При зовнішньому опорі  $R_1$  по колу іде струм  $I_1$ . При зовнішньому опорі  $R_2$  по колу іде струм  $I_2$ . Знайти ЕРС і внутрішній опір джерела струму.

$$I_1 = I_1$$

$$R_1 = R_1$$

$$R_2 = R_2$$

$$I_2 = I_2$$

$$E = ? \quad r = ?$$

Розв'язування:

Запишемо закон Ома для першого і другого випадку:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + r}, \quad I_2 = \frac{E}{R_2 + r}$$

Поділимо перше рівняння на друге:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + r} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r} \cdot I_2$$

Перетворюємо:

$$I_1 R_1 + I_1 r = I_2 R_2 + I_2 r$$

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2}$$

Підставляючи величину  $r$ , наприклад, в перше рівняння, знайдемо ЕРС джерела струму:

$$E = I_1 (R_1 + r) = I_1 \left( R_1 + \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2} \right) =$$

$$\frac{I_1 (I_1 R_1 - I_2 R_1 + I_2 R_2 - I_1 R_1)}{I_1 - I_2} = \frac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_1 - I_2}$$

Відповідь:  $E = \frac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_1 - I_2}$ ;  $r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2}$ .

**Задача 6.** В електричному колі при зовнішніх опорах  $12 \text{ Ом}$  і  $3 \text{ Ом}$  виділяється однакова потужність. Знайти внутрішній опір джерела.

$$N_1 = N_2 = N$$

$$R_1 = 12 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 3 \text{ Ом}$$

$$r = ?$$

### Розв'язування

За законом Ома для замкнутого кола, для двох значень зовнішнього опору маємо:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + r}, \quad I_2 = \frac{E}{R_2 + r}$$

або

$$E = I_1 (R_1 + r), \quad E = I_2 (R_2 + r).$$

Сила струму зв'язана з потужністю співвідношенням  $N = I^2 R$ , звідси

$$I = \sqrt{\frac{N}{R}}$$

Підставивши  $I_1 = \sqrt{\frac{N}{R_1}}$  і  $I_2 = \sqrt{\frac{N}{R_2}}$  в вираз (1), одержуємо:

$$E = \frac{N}{R_1} (R_1 + r); \quad E = \frac{N}{R_2} (R_2 + r)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (2) і перетворюючи одержану рівність, знаходимо:

$$r = \frac{\sqrt{R_1 R_2} - \sqrt{R_2} R_1}{\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1}} = \frac{\sqrt{R_1 R_2} (\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1})}{\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1}} = \sqrt{R_1 R_2} = 6 \text{ Ом.}$$

Відповідь:  $r = 6 \text{ Ом.}$

**Задача 7.** Яким має бути опір споживача  $R$ , щоб на ньому виділялась максимальна потужність, якщо струм створюється джерелом з ЕРС  $12 \text{ В}$  і внутрішнім опором  $2 \text{ Ом}$ ? Який при цьому ККД джерела струму?

$$E = 12 \text{ В}$$

$$r = 2 \text{ Ом}$$

$$R - ? \quad \eta - ?$$

Розв'язування

Наведемо схему (рис. 12).

За формулою

$$N_R = I^2 R$$

обчислимо ту потужність, яку виділяє струм  $I$  на споживачі (корисна потужність)

$$N_R = I^2 R.$$

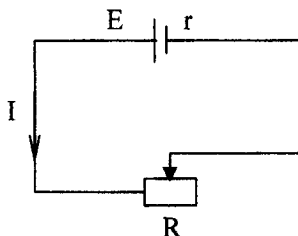


Рисунок 12

Враховуючи закон Ома для повного кола  $I = \frac{E}{R + r}$ , маємо

$$N_R = \frac{E^2 R}{(R + r)^2} = \frac{E^2}{R + 2r + r^2 \cdot R^{-1}}.$$

Очевидно максимальне значення потужності відповідає мінімальному значенню функції у знаменнику. Для обчислення екстремального значення  $x + 2r + \frac{r^2}{x}$ , знайдемо похідну цієї функції, де  $x = R$  змінна величина, і прирівнюємо її до нуля:

$$1 - \frac{r^2}{x_0^2} = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно  $x_0$ , дістанемо

$$x_0 = r \rightarrow R = r.$$

Отже екстремальне значення  $N_R$  досягається при рівності опору споживача і внутрішнього опору джерела струму:

$$N_R^{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r} = 18 \text{ Вт.}$$

Відношення корисної потужності джерела  $N_R = I^2 R$  до її повної потужності називається ККД джерела. У нашому випадку

$$\eta = \frac{N_R}{N} = \frac{I^2 R}{I^2 (R+r)} = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Отже виділяючи максимальну потужність у споживачі, таку саму потужність джерело всередині себе перетворює у теплоту.

Відповідь:  $R = r = 2 \text{ Ом}; \eta = 50 \%$ .

**Задача 8.** Електродвигун з опором обмотки  $R = 4 \text{ Ом}$  споживає постійний струм  $I = 10 \text{ А}$  при напрузі  $U = 220 \text{ В}$ . Обчислити повну потужність, механічну потужність і ККД двигуна.

$$\begin{array}{l} R = 4 \text{ Ом} \\ I = 10 \text{ А} \\ U = 220 \text{ В} \\ \hline N = ? N_{\text{мех}} - ? \eta - ? \end{array}$$

#### Розв'язування

Повна потужність двигуна - добуток струму в ньому на підведену напругу:

$$N = I \cdot U = 2.2 \text{ кВт.}$$

Механічна потужність менша від повної на потужність теплових втрат, тому

$$N_{\text{мех}} = I \cdot U - I^2 \cdot R = I(U - IR) = 1.8 \text{ кВт.}$$

Коефіцієнт корисної дії дорівнює

$$\eta = \frac{N_{\text{мех}}}{N} = 81.8\%.$$

Відповідь:  $N = 2.2 \text{ кВт}; N_{\text{мех}} = 1.8 \text{ кВт}; \eta = 81.8\%$ .

**Задача 9.** Обчислити енергію, яку необхідно витратити на рафінування  $1 \text{ кг}$  міді, якщо ККД установки  $\eta = 0.8$ , а процес рафінування відбувається при напрузі  $U = 8 \text{ В}$ .

$$\begin{array}{l}
 m = 1 \text{ кг} \\
 \eta = 0.8 \\
 U = 0.8 \text{ В} \\
 \mu = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} \\
 n = 2 \\
 \hline
 W - ?
 \end{array}$$

### Розв'язування

Визначимо витрату енергії на рафінування

$$W = \frac{qU}{\eta},$$

де  $q$  - заряд іонів міді.

Заряд визначимо з формули електролізу

$$m = kq \frac{\mu}{Fn} q,$$

де  $\mu$  молярна маса,  $n$  - валентність,  $F = eN_A$  - число Фарадея,  $e$  - елементарний електричний заряд,  $N_A$  - стала Авогадро.

$$q = \frac{mF \cdot n}{\mu}$$

$$W = \frac{mF \cdot n}{\mu \eta} = \frac{meN_A \cdot n}{\mu \eta} = 3.76 \cdot 10^7 \text{ Дж.}$$

Відповідь:  $W = 3.8 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$

### Задачі для самостійного розв'язування

#### Сила струму. Опір. Закон Ома для ділянки кола

**Задача 1.** Конденсатор ємністю 100 мкФ зарядили до напруги 500 В за 0.5 с. Яке було середнє значення сили струму під час його заряджання?

**Відповідь:** 0.1 А.

**Задача 2.** Знайти швидкість упорядкованого руху електронів у мідному проводі з площею перерізу 25 мм<sup>2</sup> при силі струму 50 А, вважаючи, що на кожний атом міді припадає один електрон провідності. Густина міді 8900 кг/м<sup>3</sup>, маса 1 моля 0.064 кг.

**Відповідь:** 0.0015 м/с.

**Задача 3.** Скільки електронів проходить через поперечний переріз провідника за 1 нс при силі струму 32 мкА.

**Відповідь:**  $2 \cdot 10^5$  електронів.

**Задача 4.** Знайти швидкість упорядкованого руху електронів у проводі з площею поперечного перерізу 5 мм<sup>2</sup> при силі струму 10А, якщо концентрація електронів провідності  $5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ .

**Відповідь:** 0.25 мм/с.

**Задача 5.** Плоский конденсатор заповнений речовиною з діелектричною проникністю  $\epsilon$  і питомим опором  $\rho$ . Чому дорівнює опір конденсатора, якщо його ємність дорівнює  $C$ .

**Відповідь:**  $R = \frac{\rho \epsilon_0 \epsilon}{C}$ .

**Задача 6.** Послідовно з'єднали  $n$  однакових резисторів. У скільки разів зміниться опір кола, якщо їх з'єднати паралельно?

**Відповідь:** зменшиться в  $n^2$  разів.

**Задача 7.** Опір двох послідовно з'єднаних провідників  $R = 5$  Ом, а тих самих провідників, з'єднаних паралельно,  $R_0 = 1.2$  Ом. Знайти опір кожного провідника.

**Відповідь:**  $R_1 = 2$  Ом;  $R_2 = 3$  Ом.

**Задача 8.** На скільки однакових частин треба розрізати провідник, що має опір  $R = 36$  Ом, щоб їх опір становив  $R_0 = 1$  Ом, коли ці частини з'єднати паралельно?

**Відповідь:**  $n = \sqrt{\frac{R}{R_0}} = 6$  частин.

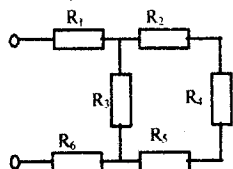
**Задача 9.** Які опори можна отримати, маючи три резистори по 6 кОм кожний?

**Відповідь:** у кілоомах: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18.

**Задача 10.** До кільця з дроту в двох точках приєднано два проводи. Знайти відношення довжин дуг, на які ділять кільце точки приєднання проводів, якщо загальний опір електричного кола, що утворилось, у  $n = 4.5$  рази менший від опору дроту, з якого виготовлено кільце.

**Відповідь:** 1:2.

**Задача 11.** Знайти загальний опір провідників, з'єднаних за схемою, показаною на малюнку, якщо опори  $R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = 1$  Ом,  $R_3 = 10$  Ом,  $R_4 = 8$  Ом.



**Відповідь:**  $R = 7$  Ом.

**Задача 12.** Ділянка кола складається з опорів  $R_2$  і  $R_3$ , з'єднаних між собою паралельно, і приєднаних до  $R_1$  послідовно. Відомі опори  $R_1$ ,  $R_2$  і  $R_3$  і сила струму  $I_3$ , що проходить через опір  $R_3$ . Визначити



сили струмів  $I_1$  і  $I_2$  через опори  $R_1$  і  $R_2$ , а також напругу на ділянці кола.

**Відповідь:**

$$U = \frac{I_3(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)}{R_2}; I_1 = \frac{I_3(R_2 + R_3)}{R_2}; I_2 = \frac{I_3R_3}{R_2}$$

**Задача 13.** З однорідного дроту виготовлено каркас у формі куба. Ребро куба має опір  $r$ . Знайти опір цього каркаса при під'єднанні його в різних вершинах. Дати всі можливі відповіді.

**Відповідь:**  $\frac{5}{6}r$ ;  $\frac{7}{12}r$ ;  $\frac{3}{4}r$ .

**Задача 14.** Визначити опір мідного проводу з площею перерізу  $S = 0.1 \text{ мм}^2$  і масою  $m = 0.3 \text{ кг}$ . Питомий опір міді  $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ , її густина  $\gamma = 8.9 \text{ г/см}^3$ .

**Відповідь:**  $R = \frac{\rho m}{\gamma S^2} = 57.3 \text{ Ом}$ .

**Задача 15.** Яка напруженість електричного поля в алюмінієвому проводі з площею перерізу  $1.4 \text{ мм}^2$  при силі струму  $1 \text{ А}$ ? Питомий опір алюмінію  $2.8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

**Відповідь:**  $20 \text{ мВ/м}$ .

**Задача 16.** Електролампу опором  $240 \text{ Ом}$ , розраховану на напругу  $120 \text{ В}$ , треба ввімкнути в електромережу з напругою  $220 \text{ В}$ . Якої довжини ніхромовий провід з площею перерізу  $0.55 \text{ мм}^2$  треба ввімкнути послідовно з лампою? Питомий опір ніхрому  $1.1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

**Відповідь:**  $100 \text{ м}$ .

**Задача 17.** Опір одного з двох послідовно з'єднаних провідників у  $n$  разів більший, ніж опір другого. У скільки разів зміниться сила струму на ділянці кола (напруга стала), якщо провідники з'єднати паралельно?

**Відповідь:** збільшиться в  $\frac{(n+1)^2}{n}$  разів.

**Задача 18.** Знайти температуру  $t_2$  вольфрамової нитки лампочки, якщо при ввімкненні її в електромережу з напругою  $U = 220 \text{ В}$  сила струму в мережі дорівнює  $I = 0.68 \text{ А}$ . При температурі  $t_1 = 20^\circ \text{ С}$  опір нитки  $R = 36 \text{ Ом}$ . Температурний коефіцієнт опору вольфраму  $\alpha = 4.6 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$ .

**Відповідь:**  $t_2 = \frac{U(1 + \alpha t_1) - IR}{I\alpha R} = 1910^\circ \text{ С}$ .

**Задача 19.** Вугільний і залізний стержні однакової товщини з'єднали послідовно. При якому співвідношенні їх довжин опір такої

комбінації не залежатиме від температури? Температурні коефіцієнти опору вугілля і заліза дорівнюють відповідно  $\alpha_1 = -0.8 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  і  $\alpha_2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ; їх питомі опори  $\rho_1 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}\cdot\text{м}$  і  $\rho_2 = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

**Відповідь:**  $\frac{l_1}{l_2} = -\frac{\alpha_2 \rho_2}{\alpha_1 \rho_1} = 2.25 \cdot 10^{-2}$ .

**Задача 20.** Електричну лампочку з вольфрамовою ниткою ввімкнули в коло низької напруги при температурі  $t_1 = 25^\circ \text{ C}$ . Вольтметр показав напругу  $U_1 = 10 \text{ мВ}$ , амперметр - силу струму  $I_1 = 4 \text{ мА}$ . У робочому стані напруга на затискачах лампочки  $U_2 = 120 \text{ В}$ , сила струму, що йде через неї,  $I_2 = 4 \text{ А}$ . Визначити температуру вольфрамової нитки в робочому стані. Температурний коефіцієнт опору вольфраму  $\alpha = 0.0046 \text{ K}^{-1}$ .

**Відповідь:**  $t_2 = t_1 + \frac{U_2 I_2 - U_1 I_1}{I_2 U_1 \alpha} = 2420^\circ \text{ C}$ .

**Задача 21.** Стрілка міліамперметра відхиляється до кінця шкали, якщо сила струму, який іде через нього, дорівнює  $I = 0.01 \text{ А}$ . Опір приладу  $R = 5 \text{ Ом}$ . Який додатковий опір треба приєднати до приладу, щоб його можна було використовувати як вольтметр для вимірювання напруги до  $U = 300 \text{ В}$ ?

**Відповідь:**  $R_0 = \frac{U - RI}{I} = 30 \text{ кОм}$ .

**Задача 22.** Міліамперметром з межею вимірювання  $I_0 = 25 \text{ мА}$  необхідно вимірювати силу струму до  $I = 5 \text{ А}$ . Яким має бути опір шунта  $R_{ш}$ ? Опір приладу  $R = 10 \text{ Ом}$ .

**Відповідь:**  $R_{ш} = \frac{I_0 R}{I - I_0} = 0.05 \text{ Ом}$ .

**Задача 23.** Якщо до амперметра, розрахованого на максимальну силу струму  $I = 2 \text{ А}$ , приєднати шунт опором  $r = 0.5 \text{ Ом}$ , то ціна поділки шкали амперметра збільшиться в 10 разів. Визначити, який додатковий опір треба приєднати до цього амперметра, щоб його можна було використовувати як вольтметр для вимірювання напруги до  $U = 220 \text{ В}$ .

**Відповідь:**  $105.5 \text{ Ом}$ .

**Задача 24.** Ціна поділки гальванометра  $2 \cdot 10^{-4}$  А. Шкала рівномірна і має 100 поділок. Опір гальванометра 50 Ом. Розрахувати додаткові опори, які слід підключити до гальванометра, щоб перетворити його на вольтметр з двома межами вимірювань: 3 В і 15 В.

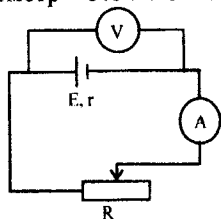
**Відповідь:** 100 Ом, 700 Ом.

### Закон Ома для повного кола

**Задача 25.** Яка ЕРС гальванічного елемента, якщо вольтметр з внутрішнім опором  $R_1 = 20$  Ом показує на його затискачах напругу  $U_1 = 1.37$  В, а коли елемент замкнути на резистор з опором  $R_2 = 10$  Ом, то сила струму, який йде через нього, дорівнює  $I_2 = 0.132$  А?

**Відповідь:**  $\varepsilon = 1.42$  В.

**Задача 26.** Для визначення ЕРС і внутрішнього опору джерела струму склали електричне коло, показане на рисунку. При певному положенні контакту реостата амперметр показав 0.5 А, а вольтметр - 4 В. Коли контакт трохи зсунули вліво, амперметр показав 0.9 А, а вольтметр - 3.6 В. Обчислити ЕРС і внутрішній опір джерела струму.



**Відповідь:** 4.5 В, 1 Ом.

**Задача 27.** Сила струму, що йде у провіднику з опором 2 Ом, який підключили до гальванічного елемента з ЕРС 1.1 В, дорівнює 0.5 А. Яка буде сила струму при короткому замиканні елемента?

**Відповідь:** 5.5 А.

**Задача 28.** Чи правильне твердження, що покази вольтметра, присланого до джерела струму, відповідають значенню ЕРС?

**Задача 29.** Електричне коло складається з трьох послідовно з'єднаних провідників, підключених до джерела струму з напругою 24 В. Опір першого провідника 4 Ом, другого - 6 Ом, а напруга на кінцях третього провідника 4 В. Знайти силу струму в колі, опір третього провідника і напругу на кінцях першого і другого провідників.

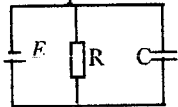
**Відповідь:** 2 А; 2 Ом; 8 В; 12 В.

**Задача 30.** Кожна з  $n$  точок з'єднана з усіма іншими відрізками проводу. Опір кожного відрізка  $R$ . До двох точок приєднують батарею гальванічних елементів з ЕРС  $E$  і внутрішнім опором  $r$ . Знайти силу струму, що проходить через батарею.

**Відповідь:**  $I = \frac{nE}{rn + 2R}$

**Задача 31.** Джерело струму з ЕРС  $E$  і внутрішнім опором  $r$  замкнене на опір  $R$ . Як змінюється сила струму у колі і напруга на затискачах джерела залежно від  $R$ ? Побудувати графіки цих залежностей.

**Задача 32.** Якою має бути ЕРС  $\varepsilon$  джерела струму в схемі, зображеній на рисунку, щоб напруженість електричного поля в плоскому конденсаторі була  $E = 2.25$  кВ/м? Внутрішній опір джерела  $r = 0.5$  Ом, опір резистора  $R = 4.5$  Ом, відстань між обкладками конденсатора  $d = 0.2$  см.



**Відповідь:**  $E = \frac{(R+r)\varepsilon d}{R} = 5\text{ В}$

**Задача 33.** Плоский конденсатор з квадратними обкладками зі стороною  $a = 21$  см, відстань між якими  $d = 2$  мм, приєднали до полюсів джерела струму з ЕРС  $E = 750$  В. У простір між обкладками зі сталою швидкістю  $V = 8$  см/с вставляють скляну пластинку завтовшки  $d$ . Яка сила струму буде при цьому у колі? Діелектрична проникність скла  $\varepsilon = 7$ .

**Відповідь:**  $I = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)aEV}{d} = 3.3 \cdot 10^{-7} \text{ А}$

**Задача 34.** Наприкінці заряджання батареї акумуляторів приєднаний до неї вольтметр показував напругу  $U_1 = 4.25$  В, амперметр - силу струму  $I_1 = 3$  А. На початку розряджання цієї батареї вольтметр показував напругу  $U_2 = 3.9$  В, амперметр - силу струму  $I_2 = 4$  А. Визначити ЕРС і внутрішній опір батареї. Струм, що проходить через вольтметр, і опір амперметра не враховувати.

**Відповідь:**  $r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2} = 0.05 \text{ Ом}; \quad U = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1}{I_1 + I_2} = 4.1 \text{ В}$

**Задача 35.**  $n$  однакових акумуляторів з'єднані послідовно, причому  $k$  з них увімкнені назустріч іншим. Яка сила струму

встановиться в колі, якщо батарею замкнути на резистор з опором  $R$ ? ЕРС кожного акумулятора дорівнює  $E$ , внутрішній опір  $r$ .

$$\text{Відповідь: } I = \frac{(N - 2k)E}{R + Nr}$$

**Задача 36.** Два елементи з ЕРС  $E_1 = 1.5 \text{ В}$  і  $E_2 = 2 \text{ В}$  з'єднані однойменними полюсами. Вольтметр, під'єднаний до клем батареї, показав напругу  $U = 1.7 \text{ В}$ . Знайти співвідношення внутрішніх опорів елементів.

$$\text{Відповідь: } \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$$

**Задача 37.** З плоского конденсатора, обкладки якого розміщені вертикально, рівномірно витікає газ, яким був заповнений конденсатор. При цьому сила струму в колі, що з'єднує конденсатор з батареєю акумуляторів з  $E = 100 \text{ В}$ , дорівнює  $I = 2 \cdot 10^{-11} \text{ А}$ . З якою швидкістю знижується рівень газу? Обкладки конденсатора квадратні, площею  $S = 100 \text{ см}^2$ , відстань між ними  $d = 1 \text{ мм}$ . Діелектрична проникність газу  $\epsilon = 2$ .

$$\text{Відповідь: } V = \frac{dI}{E\sqrt{S}(\epsilon - 1)\epsilon_0} = 0.023 \text{ см/с.}$$

**Задача 38.** Тонкий металевий диск рухається зі сталим прискоренням  $a$ , спрямованим перпендикулярно до його поверхні. Знайти напруженість електричного поля всередині диска. Маса електрона  $m$ , його заряд  $e$ .

$$\text{Відповідь: } E = \frac{m}{e} a$$

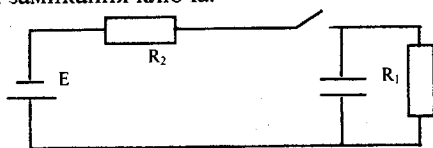
**Задача 39.** Тонка металева стрічка, згорнута в кільце радіусом  $R$ , обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  відносно осі кільця. Визначити напруженість електричного поля всередині металу. Відношення заряду електрона до його маси дорівнює  $\gamma$ .

$$\text{Відповідь: } E = \frac{\omega^2 R}{\gamma}$$

**Задача 40.** Сила струму, який проходить через двоелектродну лампу з плоскими електродами, дорівнює  $I$  при напрузі на лампі  $U$ . З якою силою  $F$  електрони тиснуть на анод? Відношення заряду електрона до його маси дорівнює  $\gamma$ .

$$\text{Відповідь: } F = I \frac{2U}{\gamma}$$

**Задача 41.** Знайти сили струмів  $I_1$ ,  $I_2$ , що йдуть через резистори  $R_1$ ,  $R_2$  в схемі, параметри якої вказані на рисунку, в перший момент після замикання ключа.



**Відповідь:**  $I_1 = \frac{E}{R_1}$ ;  $I_2 = 0$ .

**Задача 42.** Амперметр з опором  $R_1 = 2$  Ом, підключений до джерела струму, показує силу струму  $I_1 = 5$  А. Якщо до цього джерела підключити вольтметр з опором  $R_2 = 150$  Ом, він покаже напругу  $U = 12$  В. Знайти силу струму короткого замикання джерела.

**Відповідь:**  $I_{к..} = \frac{I_1 U (R_2 - R_1)}{R_2 (U - I_1 R_1)} = 29.6$  А.

**Задача 43.** Є дві батареї гальванічних елементів. Одна складена з кількох однакових елементів, з'єднаних послідовно, друга - з такого самого числа таких же елементів, з'єднаних паралельно. На які однакові опори  $R$  треба замкнути кожен з батарей, щоб були однаковими сили струмів, які через них проходять? Внутрішній опір кожного гальванічного елемента  $r$ .

**Відповідь:**  $R = r$ .

**Задача 44.** З 400 однакових елементів складено батарею так, що утворилось  $n$  послідовно з'єднаних груп; у кожній групі -  $m$  елементів, з'єднаних паралельно. Внутрішній опір одного елемента  $r = 1$  Ом. При яких значеннях  $n$  і  $m$  батарея, замкнена на опір  $R = 100$  Ом, дасть максимальну силу струму?

**Відповідь:**  $n = 200$ ,  $m = 2$ .

**Задача 45.** Акумулятор з ЕРС  $E = 25$  В і внутрішнім опором  $r = 1$  Ом заряджається від електричної мережі з напругою  $U = 40$  В через опір  $R = 5$  Ом. Знайти напругу  $U_a$  на затискачах акумулятора.

**Відповідь:**  $U_a = \frac{Ur + E \cdot R}{R + r} = 27.5$  В.

**Задача 46.** Ємність акумулятора  $Q_0 = 80$  А·год. Знайти ємність батареї з  $n = 3$  таких акумуляторів, з'єднаних: 1) послідовно; 2) паралельно.

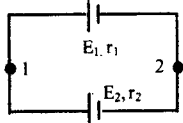
**Відповідь:** 1)  $Q_1 = Q_0 = 80$  А·год, 2)  $Q_2 = nQ_0 = 240$  А·год.

**Задача 47.** Є два послідовно з'єднаних елементи з однаковою ЕРС, але з різними внутрішніми опорами  $r_1$  і  $r_2$ . При якому

зовнішньому опорі різниця потенціалів на затискачах одного з елементів дорівнюватиме нулю та якого саме?

**Відповідь:**  $R = |r_1 - r_2|$  на елементі з більшим внутрішнім опором.

**Задача 48.** Два гальванічних елементи з ЕРС  $E_1 = 2$  В і  $E_2 = 1.5$  В та внутрішніми опорами  $r_1 = 0.6$  Ом і  $r_2 = 0.4$  Ом з'єднані паралельно (див. рисунок). Визначити різницю потенціалів між точками 1 і 2.



**Відповідь:**  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2} = 1.7$  В.

**Задача 49.** До батареї гальванічних елементів послідовно зі змінним опором  $R$  підключено вольтметр. Якщо опір  $R$  зменшити втричі, то показання вольтметра зростуть удвічі. У скільки разів зміняться показання вольтметра, якщо опір  $R$  зменшити до нуля? Внутрішнім опором батареї знехтувати.

**Відповідь:** у 4 рази.

**Задача 50.** Джерело постійного струму з ЕРС  $E = 130$  В живить освітлювальну мережу, що складається з паралельно з'єднаних 10 лампочок опором по  $R_1 = 200$  Ом, 5 лампочок по  $R_2 = 100$  Ом і 10 лампочок по  $R_3 = 150$  Ом. Знайти силу струму навантаження і напругу на затискачах джерела, якщо його внутрішній опір  $r = 0.5$  Ом.

**Відповідь:** 20 А, 120 В.

**Задача 51.** При під'єднанні до батареї гальванічних елементів опору в 16 Ом сила струму в колі була 1 А, а при підключенні опору 8 Ом вона зросла до 1.8 А. Знайти ЕРС та внутрішній опір батареї.

**Відповідь:** 18 В, 2 Ом.

**Задача 52.** Вольтметр, під'єднаний до затискачів джерела струму, показав 6 В. Коли до того самого джерела під'єднали лампочку, вольтметр показав 3 В. Що покаже вольтметр, якщо замість однієї під'єднати дві такі самі лампочки з'єднані послідовно? паралельно? Опір вольтметра вважати великим.

**Відповідь:** 4 В, 2 В.

**Задача 53.** При замиканні гальванічного елемента на резистор опором  $R_1 = 4$  Ом сила струму у колі  $I_1 = 0.2$  А, а на резистор опором

$R_2 = 7 \text{ Ом}$  - сила струму  $I_2 = 0.14 \text{ А}$ . Знайти струм короткого замикання гальванічного елемента.

Відповідь: 
$$I_{кз.} = \frac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_2 R_2 - I_1 R_1} = 0.47 \text{ А}.$$

**Задача 54.** Батарея гальванічних елементів під'єднана до двох паралельно з'єднаних опорів по  $R = 4 \text{ Ом}$  кожний. Напруга на затискачах батареї при цьому  $U_1 = 6 \text{ В}$ . Якщо один з опорів від'єднати, напруга зростає до  $U_2 = 8 \text{ В}$ . Знайти ЕРС  $E$  і внутрішній опір  $r$  батареї.

Відповідь: 
$$E = \frac{U_1 U_2}{2U_1 - U_2} = 12 \text{ В}; \quad r = \frac{U_2 - U_1}{2U_1 - U_2} R = 2 \text{ Ом}.$$

**Задача 55.** Вольтметр, приєднаний до джерела струму з ЕРС  $E = 120 \text{ В}$  і внутрішнім опором  $r = 50 \text{ Ом}$ , показує напругу  $U = 118 \text{ В}$ . Знайти опір вольтметра  $R$ .

Відповідь: 
$$R = \frac{Ur}{E - U} = 2.95 \text{ кОм}.$$

**Задача 56.** Визначити ЕРС батареї, якщо відомо, що при збільшенні опору резистора, на якого вона замкнута, у  $n$  разів напруга на ньому зростає від  $U_1$  до  $U_2$ .

Відповідь: 
$$E = \frac{U_1 U_2 (n - 1)}{U_1 \cdot n - U_2}.$$

**Задача 57.** При замиканні джерела струму на резистор з опором  $R_1 = 14 \text{ Ом}$  напруга на затискачах джерела  $U_1 = 28 \text{ В}$ , а при замиканні на резистор з опором  $R_2 = 29 \text{ Ом}$  напруга на затискачах  $U_2 = 29 \text{ В}$ . Знайти внутрішній опір джерела струму.

Відповідь: 
$$r = \frac{R_1 R_2 (U_2 - U_1)}{U_1 R_2 - U_2 R_1} = 1 \text{ Ом}.$$

**Задача 58.** Два елементи з однаковими ЕРС  $E$  увімкнені в коло послідовно. Зовнішній опір  $R = 5 \text{ Ом}$ . Відношення напруги на затискачах першого елемента до напруги на затискачах другого дорівнює  $2 : 3$ . Знайти внутрішні опори елементів  $r_1$  і  $r_2$ , якщо  $r_1 = 2r_2$ .

Відповідь: 
$$r_1 = \frac{2R}{5} = 2 \text{ Ом}; \quad r_2 = \frac{R}{5} = 1 \text{ Ом}.$$

**Задача 59.** Батарея гальванічних елементів складається з  $n = 8$  елементів, з'єднаних послідовно. ЕРС кожного елемента  $E_0 = 1.5 \text{ В}$ , внутрішній опір  $r_0 = 0.25 \text{ Ом}$ . Зовнішнє коло - два провідники з опорами  $R_1 = 10 \text{ Ом}$  та  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ , з'єднані паралельно. Знайти напругу на затискачах батареї.

Відповідь: 
$$U = 9.7 \text{ В}.$$



## Робота і потужність електричного струму

**Задача 60.** На одній лампі написано 40 Вт, 220 В, на іншій - 100 Вт, 220 В. Порівняти потужності ламп при послідовному ввімкненні. Зміну опору з температурою не враховувати.

**Відповідь:** *потужність першої лампи в 2.5 рази більша.*

**Задача 61.** Тролейбус масою 11 т рухається рівномірно зі швидкістю 36 км/год. Знайти силу струму, що йде через двигун, якщо напруга на ньому 550 В і ККД 80%. Коефіцієнт опору рухові 0.02.

**Відповідь:** 50 А.

**Задача 62.** Лампу, розраховану на 220 В, увімкнули в електричну мережу з напругою 110 В. а) У скільки разів змінилася б потужність лампи порівняно з номінальною, якби опір нитки розжарювання лампи не залежав від температури? б) як вплине на відповідь врахування зміни опору з температурою? Вказівка: з підвищенням температури опір металів зростає.

**Відповідь:** а) зменшиться в 4 рази, б) зменшиться менше ніж у 4 рази.

**Задача 63.** Вираз потужності струму  $P = I^2 R$  показує, що кількість джоулевої теплоти пропорційна опору. Вираз  $P = \frac{U^2}{R}$ , показує протилежне. Чи не суперечать ці формули одна одній?

**Задача 64.** Під'єднана до електромережі спіраль розжарилась. Як зміниться розжарення спіралі, якщо на її частину потрапить вода?

**Вказівка:** з підвищенням температури опір металів зростає.

**Задача 65.** Нагрівальний елемент апарата для випаровування води має при температурі  $t = 100^\circ \text{C}$  опір 10 Ом. Знайти силу струму, який треба через нього пропускати, щоб апарат випаровував  $m = 100 \text{ г}$  води за  $\tau = 1 \text{ хв}$ . Питома теплота пароутворення води  $r = 2.3 \text{ МДж/кг}$ .

**Відповідь:**  $I = \sqrt{\frac{rm}{\tau R}} = 19.4 \text{ А}$ .

**Задача 66.** Електричний чайник має два нагрівальних елементи. Коли ввімкнути один з них, вода в чайнику закипить через  $\tau_1 = 15 \text{ хв}$ , а коли ввімкнути інший - через  $\tau_2 = 30 \text{ хв}$ . Через який час закипить вода, якщо ввімкнути обидва елементи: 1) послідовно; 2) паралельно?

**Відповідь:** 1)  $\tau_{\text{посл}} = \tau_1 + \tau_2 = 45 \text{ хв}$ .;  $\tau_{\text{парал}} = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 10 \text{ хв}$ .

**Задача 67.** ЕРС джерела струму  $E = 2$  В, його внутрішній опір  $r = 1$  Ом. Визначити силу струму, якщо зовнішнє коло споживає потужність  $P = 0.75$  Вт.

**Відповідь:**  $1.5$  А;  $0.5$  А.

**Задача 68.** Два чайники потужністю  $P = 400$  Вт, розраховані на напругу  $220$  В, закипають при послідовному і паралельному вмиканнях протягом одного і того самого часу. Який опір підвідних проводів, за допомогою яких вони приєднані до джерела струму з напругою  $220$  В? Внутрішнім опором джерела знехтувати.

**Відповідь:**  $r = \frac{U^2}{P} = 121$  Ом.

**Задача 69.** Ділянка електричного кола, що складається з двох паралельно з'єднаних опорів  $R_1 = 6$  Ом і  $R_2 = 12$  Ом, увімкнених послідовно з опором  $R_3 = 15$  Ом, приєднана до затискачів генератора, ЕРС якого  $E = 200$  В, а внутрішній опір  $r = 1$  Ом. Обчислити потужність  $P_1$ , що виділяється на опорі  $R_1$ .

**Відповідь:**  $P_1 = 267$  Вт.

**Задача 70.** Електродвигун живиться від мережі з напругою  $U = 24$  В. Яка потужність на валу двигуна (механічна потужність) при силі струму в його обмотці  $I = 8$  А, коли відомо, що при повному гальмуванні якоря сила струму у колі  $I_0 = 16$  А?

**Відповідь:**  $P_{\text{мех}} = UI \left( 1 - \frac{I}{I_0} \right) = 96$  Вт.

**Задача 71.** В електричній плитці, розрахованій на напругу  $220$  В, є дві спіралі опором  $120$  Ом кожна. За допомогою перемикача можна ввімкнути в мережу одну спіраль, дві спіралі послідовно чи дві спіралі паралельно. Знайти потужність плитки в кожному випадку.

**Відповідь:**  $400$  Вт,  $200$  Вт;  $800$  Вт.

**Задача 72.** Джерело струму з ЕРС  $E$  і внутрішнім опором  $r$  замкнено на реостат. Побудувати графіки зміни струму  $I$  і напруги  $U$  на реостаті, потужності в зовнішньому колі  $P$ , повної потужності  $P_0$  і ККД  $\eta$  залежно від опору реостата  $R$ . При якому співвідношенні внутрішнього опору джерела і струму та опору реостата потужність у зовнішньому колі (на реостаті) буде максимальною? Який при цьому ККД?

**Відповідь:** максимум потужності при  $R = r$ , при цьому  $\eta = 0.5$ .

**Задача 73.** Знайти опір  $R_1$  зовнішнього кола, при якому потужність, що в ньому виділяється, така сама, як і при опорі  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ . Внутрішній опір джерела струму  $r = 2.5 \text{ Ом}$ .

**Відповідь:**  $R_1 = 0.625 \text{ Ом}$ .

**Задача 74.** При короткому замиканні джерела струму з ЕРС  $E = 4 \text{ В}$  сила струму, який через нього протікає,  $I_0 = 2 \text{ А}$ . Яку максимальну корисну потужність можна отримати від цього джерела струму?

**Відповідь:**  $P_{\text{max}} = \frac{EI_0}{4} = 2 \text{ Вт}$ .

**Задача 75.** Під якою напругою треба передавати електроенергію на відстань  $l = 10 \text{ км}$ , щоб при густині струму  $j = 0.5 \text{ А/мм}^2$  у сталюму проводі двопровідної лінії електропередачі втрати енергії склали 1%? Питомий опір сталі  $\rho = 0.12 \text{ мкОм м}$ .

**Відповідь:**  $U = 120 \text{ кВ}$ .

**Задача 76.** Від джерела струму а напругою  $U = 750 \text{ В}$  треба передати потужність  $N = 5 \text{ кВт}$  на деяку відстань. Який найбільший опір може мати лінія передачі, щоб втрати в ній не перевищували 10 % переданої потужності?

**Відповідь:**  $R = \frac{U^2}{12.1N} = 9.3 \text{ Ом}$ .

**Задача 77.** При вмиканні електродвигуна в мережу з напругою  $U = 120 \text{ В}$  сила струму, який через нього йде  $I = 15 \text{ А}$ . Знайти потужність, що споживається двигуном, і його ККД, якщо опір обмотки двигуна  $R = 1 \text{ Ом}$ .

**Відповідь:**  $N = IU = 1.8 \text{ кВт}; \eta = \frac{U - IR}{U} = 0.875$ .

**Задача 78.** Яку максимальну потужність може розвинути електродвигун, увімкнений у мережу постійного струму з напругою  $120 \text{ В}$ , якщо його опір  $20 \text{ Ом}$ ? Яка при цьому сила струму буде в колі?

**Відповідь:**  $180 \text{ Вт}, 3 \text{ А}$ .

**Задача 79.** Електродвигун підйомного крана працює під напругою  $380 \text{ В}$  при силі струму  $20 \text{ А}$ . Який його ККД, якщо вантаж масою  $1 \text{ т}$  кран рівномірно піднімає на висоту  $19 \text{ м}$  за  $50 \text{ с}$ ?

**Відповідь:**  $50 \%$ .

**Задача 80.** Електрокип'ятильник зі спіраллю опором  $160 \text{ Ом}$  опустили в посудину, в якій є  $0.5 \text{ л}$  води при  $20^\circ \text{ С}$ , і ввімкнули в електромережу з напругою  $220 \text{ В}$ . Через  $20 \text{ хв}$ . кип'ятильник вимкнули. Скільки води википіло, якщо ККД складав  $80 \%$ ? Питома

теплоємність води 4.2 кДж/(кг·К), питома теплота пароутворення 2.3 МДж/кг.

**Відповідь:** 53 г.

**Задача 81.** Електрична праска, розрахована на напругу  $U_0 = 120$  В, має потужність  $P = 300$  Вт. Коли праску вмикають в електромережу, напруга на розетці падає з  $U_1 = 127$  В до  $U_2 = 115$  В. Знайти опір підвідних проводів.

**Відповідь:**  $r = \frac{U_1 - U_2}{U_2} \cdot \frac{U_0^2}{P} = 50 \text{ Ом.}$

**Задача 82.** Джерело струму з ЕРС  $E$  і внутрішнім опором  $r$  замкнено на реостат. Виразити потужність струму  $P$  у зовнішньому колі як функцію сили струму  $I$ . Побудувати графік цієї функції. При якій силі струму потужність буде найбільшою? Побудувати також графік залежності ККД  $\eta$  від сили струму в колі.

**Відповідь:**  $P = EI - I^2 r$ , потужність максимальна при  $I = \frac{E}{2r}, \eta = \frac{Ir}{E}$ .

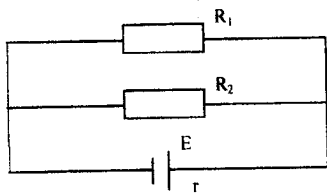
**Задача 83.** Гальванічний елемент замикають один раз на опір  $R_1 = 4$  Ом, а другий - на опір  $R_2 = 9$  Ом. В обох випадках кількість теплоти, що виділяється у зовнішньому колі за один і той самий час, виявилась однаковою. Який внутрішній опір елемента?

**Відповідь:**  $r = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = 6 \text{ Ом.}$

**Задача 84.** Знайти внутрішній опір і ЕРС джерела струму, якщо при силі струму 30 А потужність у зовнішньому колі дорівнює 180 Вт, а при силі струму 10 А ця потужність 100 Вт.

**Відповідь:** 0.2 Ом, 12 В.

**Задача 85.** Знайти ККД схеми, зображеної на рисунку. Опори резисторів  $R_1 = 2$  Ом і  $R_2 = 0.5$  Ом, внутрішній опір джерела струму  $r = 0.5$  Ом.



**Відповідь:**  $\eta = \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + r(R_1 + R_2)} = 0.74.$

**Задача 86.** Знайти потужність, що виділяється у зовнішньому колі, яке складається з двох однакових резисторів, якщо на них виділяється одна і та сама потужність як при послідовному, так і при паралельному їх з'єднанні. ЕРС джерела струму  $E = 12$  В, його внутрішній опір  $r = 2$  Ом.

Відповідь: 
$$N = \frac{2E^2}{9r} = 16 \text{ Вт.}$$

**Задача 87.** Потрібно передати електроенергію від генератора потужністю  $P = 100$  кВт на відстань  $l = 7.5$  км. При цьому втрати на нагрівання проводів мають не перевищувати 3%. Яка маса проводів у випадках, коли струм передається: а) під напругою  $U = 2000$  В? б) під напругою  $U = 6000$  В? Питомий опір  $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м, густина металу проводів  $\gamma = 8800$  кг/м<sup>3</sup>.

Відповідь: 
$$m = \frac{4\gamma\rho l^2 P}{0.03U^2}; \text{ а) } 28\text{т}; \text{ б) } 3.11\text{т.}$$

**Задача 88.** Електричне коло складається з двох паралельно ввімкнутих ламп потужністю  $N = 30$  Вт кожна. Втрата потужності в підвідних проводах складає 10% корисної потужності. Знайти напругу на затискачах джерела струму, якщо сила струму в колі  $I = 2$  А.

Відповідь: 
$$U = 2.2 \frac{N}{I} = 33 \text{ В.}$$

**Задача 89.** Електродвигун живиться від джерела струму з ЕРС 24 В. При силі струму в колі 8 А механічна потужність двигуна складає 96 Вт. Якою буде сила струму в колі, якщо загальмувати якір?

Відповідь: 16 А.

**Задача 90.** На горизонтальний вал електродвигуна радіусом  $r$  рівномірно намотується нитка з вантажем масою  $m$  на кінці. Двигун живиться від джерела постійного струму з ЕРС  $E$ . Повний опір кола дорівнює  $R$ , сила струму в колі  $I$ . Яка частота обертання вала?

Відповідь: 
$$v = \frac{I(E - IR)}{2\pi mg}.$$

## Розділ 10. Магнітне поле

При розв'язуванні задач на тему "Магнітне поле" рекомендується:

- зробити рисунок, показати на ньому заряди і провідники зі струмом, напрями магнітних полів, а також напрями магнітного поля Землі, якщо цього вимагає умова задачі. При цьому слід пам'ятати, що за напрям струму приймається напрям руху додатних зарядів;

- показати на рисунку напрями всіх сил, які діють на заряди та провідники зі струмом, при наявності декількох полів і сил різної природи використовувати принцип суперпозиції;

- у випадку рівноваги системи зарядів або провідників зі струмом використати для кожного з них загальні умови рівноваги

$$\sum \vec{F}_i = 0; \quad \sum \vec{M}_i = 0;$$

- при розрахунку ЕРС індукції і самоіндукції використовувати закон електромагнітної індукції (закон Фарадея) і правило Ленца. При цьому слід пам'ятати, що зміна магнітного потоку через поверхню, що обмежена провідним контуром, буде визначатися як зміною індукції магнітного поля (зміна сили струму в контурі) або форми контура, так і рухом контура (провідника) в магнітному полі;

- при розрахунку переміщень, швидкостей, прискорень і мас електричних зарядів (провідників зі струмом) використовувати формули кінематики, другий закон Ньютона і закон збереження енергії.

### Основні поняття

#### Магнітна індукція

$$B = \frac{M_{max}}{P_m},$$

де  $M_{max}$  - максимальний момент сили, що діє на контур (виток) зі струмом в магнітному полі,  $P_m = IS$  - магнітний момент контура; напрям вектора  $\vec{P}_m$  визначається за допомогою правого гвинта

("свердлика") по відношенню до напрямку струму в контурі,  $I$  - сила струму в контурі.

Магнітна індукція на відстані  $r$  від прямолінійного провідника зі струмом  $I$

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r},$$

де  $\mu_0$  - магнітна стала;  $\mu_0 = 12.56 \cdot 10^{-7}$  Гн/м,  $\mu$  - магнітна проникність середовища.

Модуль сили, що діє на провідник зі струмом  $I$  в магнітному полі (сила Ампера)

$$F_A = IB l \sin \alpha,$$

де  $B$  - магнітна індукція,  $l$  - довжина провідника,  $\alpha$  - кут між вектором магнітної індукції  $\vec{B}$  і вектором густини струму  $\vec{j}$  в провіднику.

Модуль сили взаємодії між двома прямолінійними провідниками

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d},$$

де  $I_1$  і  $I_2$  - сили струмів в провідниках,  $l$  - довжина провідника,  $d$  - відстань між ними (якщо струми мають однаковий напрям, то провідники притягуються, якщо різний - відштовхуються).

Модуль сили, який діє на частинку з зарядом  $q$ , що рухається зі швидкістю  $\vec{v}$  в магнітному полі (сила Лоренца)

$$F = qV \cdot B \sin \alpha,$$

де  $B$  - магнітна індукція,  $\alpha$  - кут між вектором магнітної індукції  $\vec{B}$  і вектором швидкості  $\vec{v}$ .

Магнітний потік

$$\Phi = B \cdot S \cos \alpha,$$

де  $B$  - магнітна індукція,  $S$  - площа контура,  $\alpha$  - кут між вектором індукції  $\vec{B}$  і вектором нормалі до площини контура.

Закон електромагнітної індукції (закон Фарадея)

$$E_i = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

де  $E_i$  - ЕРС індукції,  $\Delta\Phi$  - зміна магнітного потоку, який пронизує контур за час  $\Delta t$ . Знак "-" відповідає правилу Ленца, відповідно до якого магнітний потік індукційного струму, що виникає, протидіє зміні магнітного потоку зовнішнього поля.

ЕРС індукції в провіднику, що рухається в однорідному магнітному полі

$$E_i = B l V \sin \alpha,$$

де  $l$  - довжина,  $V$  - швидкість провідника,  $B$  - індукція магнітного поля,  $\alpha$  - кут між вектором магнітної індукції  $\vec{B}$  і вектором швидкості провідника  $\vec{V}$ .

ЕРС самоіндукції

$$E_{si} = -L \frac{dI}{dt},$$

де  $L = \frac{\Phi}{I}$  - індуктивність контура,  $\Phi$  - магнітний потік, який пронизує контур при проходженні в ньому електричного струму силою  $I$ ,  $\frac{dI}{dt}$  - швидкість зміни сили струму.

Енергія магнітного поля

$$W = \frac{LI^2}{2},$$

де  $L$  - індуктивність контура,  $I$  - сила струму в контурі. Об'ємна густина енергії магнітного поля  $\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}$ , де  $B$  - магнітна індукція,  $V$  - об'єм, який займає магнітне поле.

### Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** Виток дроту діаметром 20 см знаходиться в однорідному магнітному полі, індукція якого  $10^{-3}$  Тл. При пропусканні по витку струму в 2 А виток повернувся на 90°. Який момент сил діяв на виток?



$$d = 2 \cdot 10^{-1} \text{ м}$$

$$B = 10^{-3} \text{ Тл}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$I = 2 \text{ А}$$


---


$$M = ?$$

### Розв'язування

Модуль моменту сил, який діє на виток зі струмом в магнітному полі

$$M = p_m B \sin \alpha,$$

де  $p_m = I \cdot S$  - магнітний момент витка,  $S$  - площа витка,  $\alpha$  - кут між векторами  $\vec{p}_m$  і  $\vec{B}$ . Оскільки  $\alpha = 90^\circ$ , то

$$M = \frac{I \pi d^2}{4} B = 6.3 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Відповідь:  $M = 6.3 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}.$

**Задача 2.** Ротор електродвигуна постійного струму несе на собі рамку з  $N = 200$  витками дроту у формі прямокутника зі сторонами  $10 \text{ см}$  і  $30 \text{ см}$ . Статор створює магнітне поле з індукцією  $0.1 \text{ Тл}$ . Струм у рамці  $5 \text{ А}$ , кут між площиною рамки і напрямом вектора  $B$  дорівнює  $60^\circ$ . Обчислити обертальний момент, який діє на рамку.

$$N = 200$$

$$B = 0.1 \text{ Тл}$$

$$I = 5 \text{ А}$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$a = 10^{-1} \text{ м}$$

$$d = 3 \cdot 10^{-1} \text{ м}$$


---


$$M = ?$$

### Розв'язування

Переріз ротора наведено на рис. 13, де вказано напрям сили, яка діє з боку поля на струм у провідниках витка впоперек магнітного поля. Силу дії поля можна знайти з

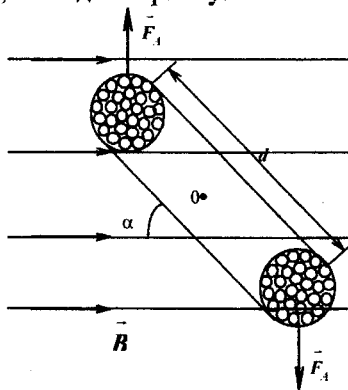


Рисунок 13

формули закону Ампера:

$$F_A = I l B,$$

де  $l = 30 \text{ см}$ . З рисунка випливає, що плече цієї сили дорівнює  $d = a \cos 60^\circ$ , де  $a$  - ширина рамки на роторі. Отже повний обертальний момент виражається формулою

$$M = N F_A \cdot d = N I B a l \cos \beta = 1.5 \text{ Нм}.$$

Відповідь:  $M = 1.5 \text{ Нм}.$

**Задача 3.** Дріт з міді розташований уперек магнітного поля з індукцією  $1 \cdot 10^3$  Тл. Якою має бути густина струму в провіднику для того, щоб він міг без опори висіти в повітрі? Густина міді  $8930 \text{ кг/м}^3$ .

$$\begin{array}{l} B = 1 \cdot 10^3 \text{ Тл} \\ \rho = 8930 \text{ кг/м}^3 \\ j = ? \end{array}$$

Розв'язування

Очевидно, що урівноважування сили тяжіння  $mg$  для дроту пов'язане з дією на нього сили Ампера  $F_A = I l B \sin \alpha$  з боку магнітного поля, а не з силою Архімеда з боку повітря. Тому необхідну густину струму для зависання провідника у повітрі визначасмо з рівності вказаних сил (враховуючи, що  $I = j \cdot S$ )

$$mg = F_A \rightarrow \rho l S g = j S l B \rightarrow j = \frac{\rho g}{B} = 88 \text{ А/мм}^2.$$

Відповідь:  $j = 88 \text{ А/мм}^2$ .

**Задача 4.** У деякому об'ємі існують схрещені однорідні електричне поле з напруженістю  $E = 17 \text{ кВ/м}$  і магнітне поле з індукцією  $B = 0.01 \text{ Тл}$ . Певний іон прискорили напругою  $U_0 = 15 \text{ кВ}$  і під час цього руху в схрещених полях виявилось, що його траєкторія строго прямолінійна. Що це за іон?

$$\begin{array}{l} E = 17 \text{ кВ/м} \\ B = 0.01 \text{ Тл} \\ U_0 = 15 \text{ кВ} \\ \frac{q}{m} = ? \end{array}$$

Розв'язування

З умови задачі випливає, що для іона в схрещених полях зрівноважуються дві сили:  $F = qE$  з боку електричного поля, яке не залежить від швидкості іона, і  $F_{\tau} = q \cdot V \cdot B$  з боку магнітного поля, яка залежить від швидкості іона  $V$ . Останню знайдемо з рівності

$$\frac{mV^2}{2} = qU_0 \rightarrow V = \frac{2qU_0}{m}. \text{ Прирівнюючи сили і врахувавши}$$

значення швидкості, обчислюємо  $\frac{q}{m}$  для іона:

$$qE = q \cdot V \cdot B \rightarrow E = B \frac{2qU_0}{m} \rightarrow \frac{q}{m} = \frac{E^2}{2B^2U_0} = 1 \cdot 10^8 \text{ Кл/кг.}$$

За допомогою таблиць визначаємо, що значення  $\frac{q}{m}$  відповідає іону водню - протону.

Відповідь:  $\frac{q}{m} = 1 \cdot 10^8$  кл/кг, що відповідає протону.

**Задача 5.** Прискорений напругою 15 кВ протон влітає в однорідне магнітне поле з індукцією 0.01 Тл перпендикулярно до силових ліній поля. Обчислити час перебування протона в магнітному полі.

$$\begin{array}{l} U = 15 \text{ кВ} = 15 \cdot 10^3 \text{ В} \\ B = 0.01 \text{ Тл} \\ \hline t - ? \end{array}$$

Розв'язування

Протон опише в полі півколо і вилетить назовні. Він перебуває у полі половину періоду обертання. Для знаходження останнього використаємо закон Ньютона для руху протона під дією сили Лоренца:

$$ma_{\text{доц}} = F_{\text{л}} \rightarrow mR \frac{4\pi^2}{T^2} = eVB \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 mR}{eVB}$$

Радіус повороту також можна знайти з цього ж рівняння:

$$ma_{\text{доц}} = F_{\text{л}} \rightarrow m \frac{V^2}{R} = eVB \rightarrow R = \frac{mV}{eB}$$

Враховуючи, що  $t = \frac{T}{2}$ , одержимо

$$t = \frac{\pi m}{eB} = 3.14 \text{ мкс.}$$

Відповідь: протон перебуватиме в магнітному полі протягом 3.14 мкс незалежно від того, якою напругою він був прискорений.

**Задача 6.** Електрон, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів  $U = 400 \text{ В}$ , влетів в однорідне магнітне поле з індукцією  $B = 1.5 \text{ мТл}$ . Визначити: 1) радіус  $R$  кривизни траєкторії; 2) частоту  $n$  обертання електрона в магнітному полі. Вектор швидкості електрона перпендикулярний лініям індукції.

$$\begin{array}{l} U = 400 \text{ В} \\ B = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл} \\ \hline R - ? \quad n - ? \end{array}$$

Розв'язування

1. На електрон, що рухається в магнітному

полі, діє сила Лоренца  $F_L$  (дією сили тяжіння можна знехтувати). Вектор сили Лоренца перпендикулярний вектору швидкості, а отже, за другим законом Ньютона надає електрону доцентрове прискорення  $a_{доц}$ :  $F = ma_{доц}$ . Підставивши вирази для  $F$  і  $a_{доц}$ , одержимо:

$$eVB\sin\alpha = \frac{mV^2}{R}, \quad (1)$$

де  $e$ ,  $V$ ,  $m$  - заряд, швидкість, маса електрона;  $B$  - індукція магнітного поля;  $R$  - радіус кривизни траєкторії,  $\alpha$  - кут між напрямом вектора швидкості  $\vec{V}$  і індукції  $\vec{B}$  (у нашому випадку  $\vec{V} \perp \vec{B}$  і  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\sin \alpha = 1$ ).

З формули (1) знайдемо:

$$R = \frac{mV}{e \cdot B}. \quad (2)$$

Імпульс  $mV$ , який входить в формулу (2), виразимо через кінетичну енергію електрона:

$$\frac{mV^2}{2} = W_k \Rightarrow V = \frac{2W_k}{m}, \quad (3)$$

$$mV = 2mW_k.$$

Кінетична енергія електрона, який пройшов прискорювальну різницю потенціалів  $U$ :  $W_k = e \cdot U$ . Підставивши цей вираз  $W_k$  в формулу (3), одержимо  $mV = 2meU$ . Тоді

$$R = \frac{1}{B} \frac{2mU}{e} = 45 \text{ мм}. \quad (4)$$

2. Визначимо частоту обертання електрона з формули

$$V = 2\pi R \cdot n \rightarrow n = \frac{V}{2\pi R} = \frac{m}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e}{m} \cdot B = 4.20 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Відповідь:  $R = 45 \text{ мм}$ ;  $n = 4.20 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ .

**Задача 7.** В магнітному полі з індукцією  $0.1 \text{ Тл}$  знаходиться стержень довжиною  $1 \text{ м}$ , який обертається перпендикулярно до напрямку ліній магнітної індукції. Вісь обертання проходить через один із кінців стержня. Визначити потік магнітної індукції через поверхню, яку утворює стержень при кожному оберті.

$L = 1\text{ м}$	<u>Розв'язування</u>
$B = 0.1\text{ Тл}$	Потік магнітної індукції, що пронизує площину
$\alpha = 0$	$S$ ,
$\Phi = ?$	$\Phi = B S \cos\alpha$ , де $\alpha$ - кут, між вектором індукції і нормаллю до площини, що утворює стержень, який обертається.

Отже,

$$\Phi = B \pi l^2 = 0.3\text{ Вб.}$$

Відповідь:  $\Phi = 0.3\text{ Вб.}$

**Задача 8.** Магнітний потік через кільце з опором  $0.03\text{ Ом}$  змінився на  $0.012\text{ Вб}$  за інтервал часу  $2\text{ с}$ . Обчислити силу струму в кільці, якщо потік змінювався рівномірно.

$R = 0.03\text{ Ом}$	<u>Розв'язування</u>
$\Delta\Phi = 0.012\text{ Вб}$	Використаємо формули закону Фарадея для явища електромагнітної індукції $E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ і закон Ома
$\Delta t = 2\text{ с}$	для кільця у вигляді
$I = ?$	

$$I = \frac{E}{r},$$

де  $r$  - опір кільця. Сила струму у кільці в процесі зміни магнітного потоку:

$$I = \frac{E}{r} = \frac{1}{r} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0.2\text{ А.}$$

Відповідь:  $I = 0.2\text{ А.}$

**Задача 9.** Котушка, радіус якої  $10\text{ см}$ , має  $100$  витків дроту з міді радіусом  $1\text{ мм}$ . Вона розташована так, що однорідне магнітне поле з індукцією  $0.1\text{ Тл}$  перпендикулярне до площі перерізу котушки. Який заряд пройде по ній при повороті котушки на  $90^\circ$  навколо осі, яка: а) перпендикулярна до площі перерізу котушки і проходить через її центр; б) збігається з діаметром витків?

$$r_1 = 10 \text{ см}$$

$$N = 100$$

$$r_2 = 1 \text{ мм}$$

$$B = 0,1 \text{ Тл}$$

$$q_1 - ? \quad q_2 - ?$$

### Розв'язування

У випадку а) магнітний потік через витки не змінюється, ЕРС не індукується і заряд не рухається. У випадку б) потік від значення  $\Phi_0 = NBS$  зменшується до нуля, оскільки його зміна при повороті за час  $t$  на кут  $90^\circ$  дорівнює значенню початкового потоку.

Оскільки струм  $I = \frac{E}{R}$  може бути обчисленим через заряд  $q$ , який проходить через дріт за час  $t$ , то

$$I = \frac{q}{t} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\Phi_0}{Rt},$$

$$q = \frac{\Phi_0}{R} = \frac{NBS}{R},$$

тут  $R$  - опір котушки, що дорівнює  $S = \frac{\rho l}{\pi r_2^2} = \frac{\rho N 2\pi r_1}{\pi r_2^2}$ ,

$$R = \frac{2\rho N r_1}{r_2^2},$$

де  $r_2$  - радіус дроту,  $r_1$  - радіус витка. Оскільки площа витка  $\pi r_1^2$ , то

$$q = \frac{\pi B r_1 r_2^2}{2\rho} = 0,76 \text{ Кл.}$$

Відповідь: а)  $q = 0$ , б)  $q = 0,76 \text{ Кл}$ .

**Задача 10.** Перпендикулярно однорідному горизонтальному направленому магнітному полю з індукцією  $10^{-2} \text{ Тл}$  розміщена вертикальна жорстка рамка з металевих стержнів в формі букви П шириною  $50 \text{ см}$  (рис. 14). По рамці ковзає без тертя і без порушення контакту перемичка  $ab$  з дроту масою  $1 \text{ г}$  зі сталюю швидкістю  $1 \text{ м/с}$ . Визначити опір  $R$  перемички, якщо опором рамки можна знехтувати.

$$B = 10^{-2} \text{ Тл}$$

$$l = 0,5 \text{ м}$$

$$m = 10^{-3} \text{ кг}$$

$$V = 1 \text{ м/с.}$$

$$R - ?$$

### Розв'язування

Відповідно до закону збереження і перетворення енергії, потенціальна енергія піднятої перемички переходить в роботу сили тяжіння  $mg$  на шляху  $\Delta x$  за час  $\Delta t$

$$A = F\Delta x = mg \cdot V \cdot t.$$

Робота сили тяжіння перетворюється в енергію індукovanого струму, яка в свою чергу, переходить у тепло, нагріваючи перемичку. Таким чином:

$$mgV\Delta t = \frac{E_i^2 \Delta t}{R},$$

або

$$mgV = \frac{\left(-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)^2}{R} = \frac{B^2 I^2 V^2}{R},$$

звідси:

$$R = \frac{B^2 I^2 V}{mg} = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ Ом.}$$

Відповідь:  $R = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ Ом.}$

**Задача 11.** Знайти енергію магнітного поля соленоїда, в якому при силі струму  $10 \text{ А}$  виникає магнітний потік  $0.5 \text{ Вб}$ .

$$I = 10 \text{ А}$$

$$\Phi = 0.5 \text{ Вб}$$

$$W_m - ?$$

Розв'язування

Енергія магнітного поля соленоїда:

$$W_m = \frac{LI^2}{2}.$$

Магнітний потік  $\Phi = LI$ , тому

$$W_m = \frac{\Phi I}{2} = 2.5 \text{ Дж.}$$

Відповідь:  $W_m = 2.5 \text{ Дж.}$

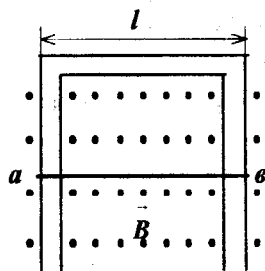


Рисунок 14

## Задачі для самостійного розв'язування

### Магнітне поле. Електромагнітна індукція

**Задача 1.** Як дізнатися, який із двох однакових сталених стержнів намагнічений, не користуючись нічим, крім цих стержнів?

**Задача 2.** До двох довільних точок дротяного кільця підведено радіальні проводи, з'єднані з віддаленим джерелом струму. Показати, що індукція магнітного поля в центрі кільця дорівнює нулю.

**Задача 3.** Чому два паралельних провідники, по яких проходять струми в одному напрямку, притягуються, а два паралельних електронних пучки відштовхуються?

**Задача 4.** Яка індукція магнітного поля, в якому на провідник зі струмом силою 25 А діє сила 50 мН? Індукція магнітного поля перпендикулярна до напрямку протікання струму. Довжина активної частини провідника 5 см.

**Відповідь:**  $B = 40 \text{ мТл}$ .

**Задача 5.** Плоска прямокутна котушка з 200 витків дроту зі сторонами 10 і 5 см міститься в однорідному магнітному полі з індукцією 0.05 Тл. Який максимальний обертальний момент може діяти на котушку в цьому полі, якщо сила струму в ній дорівнює 2 А?

**Відповідь:**  $M_{\max} = 0.1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

**Задача 6.** Між полюсами магніту на двох тонких вертикальних дротинах підвішено горизонтальний лінійний провідник масою  $m = 10 \text{ г}$  завдовжки  $l = 20 \text{ см}$ . Індукція однорідного магнітного поля спрямована вертикально і дорівнює  $B = 0.25 \text{ Тл}$ . На який кут  $\alpha$  від вертикалі відхиляються дротини, що підтримують провідник, якщо по ньому проходить струм силою  $I = 2 \text{ А}$ ? Масою дротин знехтувати.

**Відповідь:**  $\alpha = \arctg\left(\frac{BIl}{mg}\right) = 45^\circ$ .

**Задача 7.** Горизонтальні рейки прокладені на відстані  $l = 0.3 \text{ м}$  одна від одної. На них, перпендикулярно до рейок, лежить стержень. Якою має бути індукція магнітного поля, щоб стержень почав рухатись, коли по ньому пропускати струм силою  $I = 50 \text{ А}$ ? Коефіцієнт тертя стержня і рейок  $\mu = 0.2$ . Маса стержня  $m = 0.5 \text{ кг}$ .

**Відповідь:**  $B = \frac{\mu mg}{Il} = 6.5 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$

**Задача 8.** З якою силою діє магнітне поле з індукцією 10 мТл на прямолінійний провідник, через який йде струм, якщо довжина його



активної частини (на яку діє магнітне поле) провідника 0.1 м? Сила струму дорівнює 50 А. Напрями індукції магнітного поля і струму взаємно перпендикулярні.

**Відповідь:**  $F = 50 \text{ мН}$ .

**Задача 9.** У провіднику з довжиною активної частини 8 см сила струму дорівнює 50 А. Він міститься в однорідному магнітному полі з індукцією 20 мТл. Знайти роботу, виконану при переміщенні провідника на 10 см перпендикулярно до ліній індукції

**Відповідь:** 8 мДж.

**Задача 10.** В однорідне магнітне поле з індукцією  $B = 10 \text{ мТл}$  перпендикулярно до ліній індукції влітає електрон з кінетичною енергією  $W = 30 \text{ кеВ}$ . Який радіус кривизни траєкторії руху електрона? Заряд електрона  $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , його маса  $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ .

**Відповідь:**  $r = \frac{2mW}{eB} = 5.8 \text{ см}$ .

**Задача 11.** Електрон, рухаючись із швидкістю  $V$ , потрапляє в однорідне магнітне поле, індукція якого  $B$  утворює кут  $\alpha$  з  $V$ . Чому дорівнює робота сили, яка діє на електрон? Знайти крок  $h$  спіралі, по якій рухається електрон.

**Відповідь:**  $A = 0$ ;  $h = V \cos \alpha \frac{2\pi m}{eB}$ .

**Задача 12.** Два іони, які мають однаковий заряд і однакову кінетичну енергію, влітають у однорідне магнітне поле. Перший іон рухається по колу радіусом  $r_1 = 4 \text{ см}$ , другий  $r_2 = 2 \text{ см}$ . Знайти відношення мас іонів.

**Відповідь:**  $\frac{m_1}{m_2} = \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 4$ .

**Задача 13.** Електрон рухається у магнітному полі по колу з кутовою швидкістю  $\omega = 10^{10} \text{ рад/с}$ . Індукцію магнітного поля збільшили у  $n = 5$  разів. З якою кутовою швидкістю після цього став рухатися електрон?

**Відповідь:**  $\omega' = n\omega = 5 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$ .

**Задача 14.** Протон і  $\alpha$ -частинка влітають в однорідне магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Порівняти радіуси кіл, які вони описують, якщо у них однакові; в) швидкості; б) енергії.

**Відповідь:** а) для  $\alpha$ -частинки вдвічі більший; б) однакові.

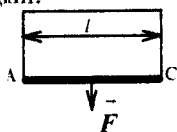
**Задача 15.** Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 4$  мТл. Знайти період  $T$  обертання електрона. Питомий заряд електрона  $e/m = 1.76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг.

**Відповідь:**  $8.9$  нс.

**Задача 16.** Електрон, прискорений електричним полем рухається перпендикулярно до лінії індукції магнітного поля по колу радіусом  $R$ . Інерція поля  $B$ . Знайти різницю потенціалів, яка прискорила електрон. Початкова швидкість електрона дорівнює нулю.

**Відповідь:** 
$$U = \frac{eB^2 R^2}{2m}$$

**Задача 17.** Довжина рухомого провідника АВ дорівнює  $l$ . Його опір  $R$  (див. рисунок). Опір нерухомого провідника, по якому ковзає провідник АВ, мізерно малий. Перпендикулярно до площини провідників прикладено магнітне поле з індукцією  $B$ . Яку силу треба прикласти до провідника АВ для того, щоб він рухався зі сталою швидкістю  $V$ ? Система провідників розміщена в горизонтальній площині.



**Відповідь:** 
$$F = \frac{B^2 l^2 V}{R}$$

**Задача 18.** Реактивний літак, що має розмах крил  $l = 50$  м, летить горизонтально зі швидкістю  $V = 800$  км/год. Визначити різницю потенціалів, що виникає між кінцями крил, якщо вертикальна складова індукції магнітного поля Землі дорівнює  $B_V = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл.

**Відповідь:**  $U = B_V l V = 0.55$  В.

**Задача 19.** Одношарова котушка діаметра  $D = 5$  см розміщена в однорідному магнітному полі, паралельному її осі. Індукція поля рівномірно змінюється зі швидкістю  $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 10^{-2}$  Тл/с. Котушка має  $n = 1000$  витків мідного дроту (питомий опір міді  $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м) з поперечним перерізом  $S = 0.2$  мм<sup>2</sup> : 1). До кінців котушки приєднано конденсатор ємністю  $10$  мкф. Визначити заряд на ньому. 2). Кінці

котушки замкнуті. Визначити теплову потужність, яка виділяється в котушці.

**Відповідь:** 1)  $q = C \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot n = 1.95 \cdot 10^{-7} \text{ Кл};$

2)  $P = \left( \frac{\Delta B}{\Delta t} \right)^2 \frac{\pi D^3 n S}{16 \rho} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}.$

**Задача 20.** У однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 0.1$  Тл розміщено плоский виток з дроту так, що його площина перпендикулярна до силових ліній. Виток замкнено на гальванометр. Повний заряд, що проходить через гальванометр під час повертання витка,  $q = 7.5 \cdot 10^{-3}$  Кл. Площа витка  $S = 10^3 \text{ см}^2$ , опір дроту  $R = 2$  Ом. На який кут повернули виток?

**Відповідь:** на  $120^\circ$ .

**Задача 21.** Чому електродвигун може згоріти, якщо зупинити його ротор?

**Задача 22.** Знайти індуктивність провідника, в якому рівномірна зміна сили струму на 2 А протягом 0.25 с збуджує ЕРС самоіндукції 20 мВ.

**Відповідь:** 2.5 мГн.

**Задача 23.** Через соленоїд, індуктивність якого 0.4 мГн, а площа поперечного перерізу  $10 \text{ см}^2$ , йде струм. Яка індукція магнітного поля всередині соленоїда, якщо в ньому 100 витків? Сила струму дорівнює 0.5 А. Поле вважати однорідним.

**Відповідь:** 2 мТл.

**Задача 24.** Знайти швидкість зміни магнітного потоку в соленоїді з 2000 витків при збудженні в ньому ЕРС індукції 120 В.

**Відповідь:** 60 мВб/с.

**Задача 25.** В однорідному магнітному полі розміщено виток, площа якого  $S = 50 \text{ см}^2$ . Перпендикуляр до площі витка утворює з напрямком індукції магнітного поля кут  $\alpha = 60^\circ$ . Чому дорівнює ЕРС індукції  $E$ , що виникає у витку під час вимикання поля, якщо початкова індукція магнітного поля  $B = 0.2$  Тл, і воно спадає до нуля за лінійним законом протягом  $\Delta t = 0.02$  с?

**Відповідь:**  $E = \frac{B \cdot S \cos \alpha}{\Delta t} = 23 \text{ мВ}.$

**Задача 26.** За 5 мс у соленоїді з 500 витків з дроту магнітний потік рівномірно зменшується від 7 до 3 мВб. Знайти ЕРС індукції в соленоїді.

**Відповідь:** 400 В.

**Задача 27.** Знайти ЕРС індукції у прямолінійному відрізку проводу, 0.25 м якого міститься в однорідному полі з індукцією 8 м/с. Провід рухається із швидкістю 5 м/с. Кут між напрямком швидкості і напрямком вектора магнітної індукції  $30^\circ$ , кути між напрямком швидкості і напрямком струму у проводі та між напрямком вектора магнітної індукції і напрямком струму у проводі дорівнюють по  $90^\circ$ .

**Відповідь:** 5 мВ.

**Задача 28.** Однорідне магнітне поле з індукцією  $B$  перпендикулярне до площини мідного кільця (питомий опір міді  $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м), діаметр якого  $D = 20$  см, а товщина  $d = 2$  мм. З якою швидкістю має змінюватись з часом магнітна індукція  $B$ , щоб сила індукційного струму у кільці дорівнювала 10 А?

**Відповідь:** 
$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{16\rho I}{\pi D d^2} = 1.12 \frac{\text{Тл}}{\text{с}}$$

**Задача 29.** До рейок залізничної колії приєднано вольтметр. Над ним зі сталою швидкістю проходить поїзд. Якими будуть покази вольтметра під час наближення поїзда? Вертикальна складова індукції магнітного поля Землі  $B = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл, ширина колії  $l = 1.2$  м. Швидкість поїзда  $V = 60$  км/год

**Відповідь:**  $U = B_B l V = 10^{-3} \text{ В}$ .

**Задача 30.** Прямолінійний відрізок проводу завдовжки  $l = 1$  м рухається із швидкістю  $V = 5$  м/с перпендикулярно до напрямку вектора індукції однорідного магнітного поля. Кути між напрямком швидкості і напрямком струму у проводі та між напрямком вектора магнітної індукції і напрямком струму у проводі дорівнюють по  $90^\circ$ . Визначити індукцію магнітного поля, якщо на кінцях проводу виникає різниця потенціалів 0.02 В.

**Відповідь:**  $4 \cdot 10^{-3}$  Тл.

**Задача 31.** Два металевих стержні розміщені вертикально і замкнені зверху провідником. По цих стержнях без тертя і порушення контакту ковзає перемичка завдовжки  $l = 0.5$  см і масою  $m = 1$  г. Вся система міститься в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 10^{-2}$  Тл, перпендикулярною до площини рамки. Через деякий час установлюється стала швидкість руху рамки  $V = 1$  м/с. Знайти опір перемички. Опором стержнів і провідника знехтувати.

**Відповідь:**  $R = \frac{B^2 l^2 V}{mg} = 2.5 \cdot 10^{-7}$  Ом.

**Задача 32.** Плоский виток проводу розміщений перпендикулярно до однорідного магнітного поля. Виток замкнено на гальванометр. Коли виток повернули на  $180^\circ$ , через гальванометр пройшов заряд  $7.2$  мКл. На який кут треба повернути виток, щоб через гальванометр пройшов заряд  $1.8$  мКл?

**Відповідь:** на  $60^\circ$

**Задача 33.** Рамка з  $n = 1000$  витків, що мають площу  $S = 5$  см<sup>2</sup> кожний, замкнута на гальванометр опором  $R = 10$  кОм і розміщена в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 10$  мТл, причому лінії індукції поля перпендикулярні до її площини. Який заряд пройде через гальванометр, якщо напрямком індукції магнітного поля плавно змінити на протилежний?

**Відповідь:**  $q = \frac{2BSn}{R} = 1$  мКл.

**Задача 34.** З якою кутовою швидкістю треба обертати прямолінійний провідник довжиною  $l = 20$  см навколо одного з його кінців у площині, перпендикулярній до ліній індукції однорідного магнітного поля, щоб у провіднику індукувалась ЕРС  $E = 0.3$  В? Індукція поля  $B = 0.2$  Тл.

**Відповідь:**  $\omega = \frac{2E}{Bl^2} = 75$  рад / с.

**Задача 35.** Знайти індуктивність провідника, в якому при рівномірній зміні сили струму на  $2$  А протягом  $0.25$  с збуджується ЕРС самоіндукції  $20$  мВ.

**Відповідь:**  $2.5$  мГн.

**Задача 36.** Якою має бути сила струму в обмотці дроселя з індуктивністю  $0.5$  Гн, щоб енергія магнітного поля дорівнювала  $1$  Дж?

**Відповідь:**  $2$  А.

**Задача 37.** У котушці з індуктивністю  $0.6$  Гн сила струму дорівнює  $20$  А. Яка енергія магнітного поля котушки? Як зміниться енергія поля, якщо силу струму зменшити вдвічі?

**Відповідь:**  $120$  Дж; зменшиться в  $4$  рази.

## Розділ 11. Механічні коливання і хвилі

При розв'язуванні задач на тему "Механічні коливання і хвилі" рекомендується:

- записати задане в задачі рівняння і рівняння гармонічних коливань в загальному вигляді, співставити ці рівняння і визначити основні характеристики (зміщення, амплітуду, період, частоту, фазу) у відповідності з умовою задачі;

- швидкість і прискорення матеріальної точки при гармонічних коливаннях, а також максимальне значення цих величин визначити з рівняння гармонічних коливань, параметри якого відповідають даним задачі;

- період гармонічних коливань в різних ситуаціях визначати за

формулою  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{m}{k}$ , де  $\omega$  - циклічна частота коливань,

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ . При цьому слід враховувати, що модуль прискорення точки,

що коливається,  $a = \frac{k}{m} x$ , де  $x$  - зміщення точки з положення рівноваги. Визначити прискорення з другого закону Ньютона, знайти

коефіцієнт жорсткості  $k$ , а потім і період коливань;

- використовувати закон збереження енергії в задачах про математичний та пружинний маятники.

### Основні поняття

#### Рівняння гармонічних коливань

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ або } x = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

де  $A = |x_{\max}|$  - амплітуда коливань,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$  - циклічна (кругова)

частота коливань,  $\nu$  - частота і  $T$  - період коливань,  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  - фаза коливань,  $\varphi_0$  - початкова фаза,  $t$  - час,  $x$  - зміщення величини, яка коливається, від положення рівноваги в даний момент часу.

Проекція швидкості частинки, що здійснює гармонічне коливання

$$V_x = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Проекція прискорення частинки, що здійснює гармонічне коливання

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Період коливань

а) пружинного маятника  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ,

де  $m$  - маса тягарця,  $k$  - коефіцієнт жорсткості пружини;

б) математичного маятника  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ,

де  $l$  - довжина математичного маятника,  $g$  - прискорення вільного падіння.

Енергія механічних коливань

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2,$$

де  $m$  - маса частинки, що коливається,  $\omega$  - циклічна частота,  $A$  - амплітуда коливань.

Довжина хвилі

$$\lambda = VT = \frac{V}{\nu},$$

де  $V$  - фазова швидкість хвилі,  $\nu$  - частота,  $T$  - період коливань. Різниця фаз двох точок, що коливаються, які знаходяться на відстанях

$r_1$  і  $r_2$  від джерела коливань, дорівнює  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$

### Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** Написати рівняння гармонічного коливання, амплітуда якого  $10 \text{ см}$ , період  $10 \text{ с}$ , початкова фаза дорівнює нулю. Знайти зміщення, швидкість і прискорення тіла, яке коливається, через  $12 \text{ с}$  після початку коливань.

$$A = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$T = 10 \text{ с}$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$t_1 = 12 \text{ с}$$

$$x(t) - ? \quad V_1 - ? \quad a_1 - ?$$

### Розв'язування

Запишемо рівняння гармонічного коливання:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right).$$

Підставимо в це рівняння дані задачі :

$$x(t) = 0,1 \sin\left(\frac{2 \cdot 3,14}{10} t\right) = 0,1 \sin 0,628t.$$

Для моменту  $t_1$  :  $x_1 \approx 0,095 \text{ м}$ .

Швидкість тіла, що коливається,

$$V = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0),$$

або з урахуванням даних задачі

$$V = 0,1 \cdot 0,628 \cos 0,628t = 0,0628 \cos 0,628t.$$

Для моменту  $t_1$  швидкість  $V_1 = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ .

Прискорення тіла, що коливається:

$$a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

або з урахуванням даних задачі

$$a = -0,1 \cdot 0,628t = -0,0393 \sin 0,628t.$$

Для моменту  $t_1$ , прискорення  $a_1 = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ .

Відповідь:  $x = 0,1 \sin 0,628t$ ;  $V_1 = 1,9 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ ;

$$a_1 = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

**Задача 2.** Матеріальна точка масою  $10 \text{ г}$  коливається за законом  $x = 0,05 \sin(0,6t + 0,8)$ . Знайти максимальну силу, що діє на точку і повну енергію точки, що коливається.

$$m = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг}$$

$$x = 0,05 \sin(0,6t + 0,8)$$

$$F_{\max} - ? \quad E - ?$$

### Розв'язування

Зіставляючи загальне рівняння гармонічного коливання

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

з рівнянням, приведеним в задачі

$$x = 0,05 \sin(0,6t + 0,8) \text{ м},$$



знаходимо, що  $A = 5 \cdot 10^2 \text{ м}$ ,  $\omega = 0.6 \text{ рад/с}$ ,  $\varphi_0 = 0.8 \text{ рад}$ .

З виразу для сили, яка викликає гармонічні коливання

$$F = mA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

одержуємо

$$F_{\max} = mA\omega^2 = 180 \text{ мкН}.$$

Повна енергія точки, яка коливається

$$E = \frac{1}{2} mA\omega^2 = 4.5 \text{ мкДж}.$$

Відповідь:  $F_{\max} = 180 \text{ мкН}$ ,  $E = 4.5 \text{ мкДж}$ .

**Задача 3.** За яку частину періоду частинка, яка здійснює гармонічні коливання, проходить першу половину шляху від середнього положення до крайнього? Другу половину цього шляху?

$A$
$x_1 = 2$
$x_2 = A$
$t_1 - ? \quad t_2 - ?$

Розв'язування

Вибираючи початок відліку часу в момент проходження тілом середнього положення, можна записати закон зміни його координати в вигляді

$$x = A \sin \omega t = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

На середині шляху від середнього положення до крайнього  $x_1 = \frac{A}{2}$  тіло знаходиться в моменті часу, що визначається з рівняння

$$\frac{A}{2} = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

Найменше додатне значення  $t_1$ , що відповідає цій умові, можна знайти з рівняння

$$\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \frac{1}{2},$$

звідси

$$2\pi \frac{t_1}{T} = \frac{\pi}{6}, \quad t_1 = \frac{T}{12}.$$

В крайньому положенні ( $x_2 = A$ ) тіло знаходиться в момент часу  $t_2$ , який відповідає умові  $\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = 1$ , звідси

$$2\pi \frac{t_2}{T} = \frac{\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{T}{4}.$$

Отже, другу половину шляху тіло проходить за проміжок часу

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}.$$

Відповідь:  $t_1 = \frac{T}{12}$ ,  $\Delta t = \frac{T}{6}$ .

**Задача 4.** Середина струни, яка здійснює гармонічні коливання, має максимальне прискорення  $a_{max} = 2.02 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2$ . Визначити частоту коливань, якщо амплітуда коливань  $2.00 \text{ мм}$ .

$$a_{max} = 2.02 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2$$

$$A = 2.00 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$v - ?$$

Розв'язування

Максимальне прискорення відповідає максимальному зміщенню точки від положення рівноваги

$$a_{max} = \omega^2 A = 4\pi^2 \nu^2 A,$$

звідки

$$\nu = \frac{a_{max}}{4\pi^2 A} = \frac{1}{2\pi} \frac{a_{max}}{A} \approx 160 \text{ с}^{-1}.$$

Відповідь:  $\nu = 160 \text{ с}^{-1}$ .

**Задача 5.** Пружинний маятник здійснює гармонічні коливання з амплітудою  $A = 0.04 \text{ м}$ . При зміщенні  $x = 0.03 \text{ м}$  сила пружності дорівнює  $F = 9 \cdot 10^5 \text{ Н}$ . Визначити потенціальну і кінетичну енергії, що відповідають заданому зміщенню, і повну енергію маятника.

$$x = 0,03 \text{ м}$$

$$A = 0,04 \text{ м}$$

$$F = 9 \cdot 10^5 \text{ Н}$$

$$E_p - ? E_k - ?$$

$$E - ?$$

Розв'язування

Повна енергія маятника дорівнює:

$$E = E_k + E_p,$$

де  $E_k$  - кінетична енергія,  $E_p$  - потенціальна енергія.

Повна енергія дорівнює

$$E = \frac{kA^2}{2},$$

де  $k$  - коефіцієнт квазіпружної сили:

$$k = \frac{F}{x}.$$

Тоді повну енергію коливань маятника можна знайти за формулою:

$$E = \frac{FA^2}{2x} = 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Потенціальна енергія маятника дорівнює

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{Fx}{2} = 1.35 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Отже, кінетична енергія дорівнює

$$E_k = E - E_p = 2.4 \cdot 10^{-6} - 1.35 \cdot 10^{-6} = 1.05 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Відповідь:  $E_p = 1.35 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$ ,  $E_k = 1.05 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$ ,

$$E = 2.4 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

**Задача 6.** Маятник довжиною  $l = 1 \text{ м}$  коливається так, що кут найбільшого відхилення його дорівнює  $\alpha = 30^\circ$ . У момент, коли маятник проходить положення рівноваги, його нитка чіпляється за цвях на середині своєї довжини. Визначити найбільший кут відхилення укороченого маятника і висоту, на яку підніметься його кулька.

$$l = 1 \text{ м}$$

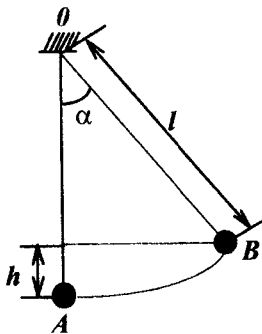
$$\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha_1 - ? \quad h_1 - ?$$

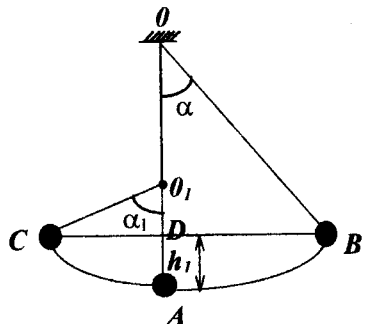
### Розв'язування

При відхиленні маятника на кут  $\alpha = 30^\circ$  його кулька піднялась на висоту  $h$ . Максимальний запас енергії дорівнює

$$E = mgh$$



a)



б)

Рисунок 15

Нехай після того, як нитка маятника зачепилась за цвях (рис. 15, б), його кулька піднялась на  $h_1$ . Тоді енергія кульки буде рівною

$$E_1 = mgh_1.$$

Але за законом збереження енергії  $E_1 = E_2$ , звідки випливає, що  $h_1 = h$ . Отже, кулька маятника підніметься на таку саму висоту, на якій вона була при відхиленні маятника на кут  $\alpha = 30^\circ$ .

$$h_1 = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha) = 0.134 \text{ м}$$

Кут  $\alpha_1$  можна визначити, наприклад, з співвідношення:

$$\cos \alpha_1 = \frac{O_1D}{O_1C}.$$

Тут  $O_1C = \frac{l}{2}$ . За умовою задачі:  $O_1D = OD - OO_1$  (рис. 15, б).

Отже

$$OO_1 = \frac{l}{2}; \quad OD = l \cos \alpha; \quad O_1D = l \cos \alpha - \frac{l}{2}.$$

Таким чином одержимо:

$$\cos \alpha_1 = \frac{l \cos \alpha - \frac{l}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{2l \cos \alpha - l}{l} = 2 \cos \alpha - 1 = 0.782.$$

$$\alpha_1 = 52^\circ 54'$$

Відповідь:  $\alpha_1 = 52^\circ 54'$ ,  $h_1 = 0.134 \text{ м}$ .

**Задача 7.** Яким має бути вертикальне прискорення ракети при підйомі, щоб маятниковий годинник ішов удвічі швидше, ніж перед стартом?

$T$	
$T_1 = 2$	<u>Розв'язування</u>
$a - ?$	Використаємо рівняння коливань маятника і формулу періоду $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Для зменшення періоду

необхідно, щоб прискорення вільного падіння збільшилось. Це можливо, коли ракета рухається прискорено вгору і вага маятника збільшується, а ефективне прискорення набуває значення  $g^* = g + a$ .

За умовою задачі виконується рівність

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

Підставляючи в неї

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

знаходимо значення прискорення ракети по вертикалі вгору:

$$a = 3g = 30 \text{ м/с}^2$$

Відповідь:  $a = 3g = 30 \text{ м/с}^2$ .

**Задача 8.** Визначити період коливань стовпчика ртуті в трубці в формі букви U при виведенні його з положення рівноваги (рис.16). Площа перерізу трубки  $0.3 \text{ см}^2$ , маса ртуті  $120 \text{ г}$ .

$$S = 0.3 \text{ см}^2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$$

$$m = 120 \text{ г} = 0.12 \text{ кг}$$

$T = ?$

Розв'язування

Якщо ртуть, яка налита в трубку, вивести з положення рівноваги, то вся її маса буде здійснювати гармонічні коливання,

які відбуваються відносно її попереднього рівня  $00$  в колінах трубки. Надлишковий тиск  $p$  дає стовпчик ртуті висотою  $2x$ , сила тиску в даному випадку (квазіпружна сила)

$$F = -2x S \rho g = -kx,$$

де  $\rho$  - густина ртуті. Звідси

$$k = 2S \rho g.$$

Оскільки  $v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ , то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2S \rho g}} = 0.076 \text{ с}.$$

Відповідь:  $T = 0.76 \text{ с}$ .

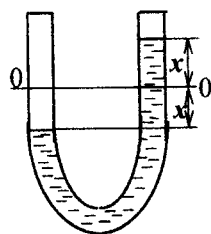


Рисунок 16

**Задача 9.** Два маятники, довжини яких відрізняються на  $22 \text{ см}$ , здійснюють в одному і тому ж місці за деякий час один -  $30$  коливань, другий -  $36$  коливань. Знайти довжини маятників.

$$\Delta l = 22 \text{ см}$$

$$N_1 = 30$$

$$N_2 = 36$$

$$l_1 - ? \quad l_2 - ?$$

### Розв'язування

Очевидно, що маятник більшої довжини здійснює меншу кількість коливань. Періоди коливань першого і другого маятників:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

Їх співвідношення:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \quad (1)$$

З іншої сторони

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{N_1}{N_2}} \quad (2)$$

Прирівнюємо праві частини виразів

$$\sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}, \text{ або } \frac{l_1}{l_2} = 1.44, \text{ тобто}$$

$$l_1 = 1.44 l_2 \quad (3)$$

За умовою задачі

$$\Delta l = l_1 - l_2 \quad (4)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (3) і (4), знаходимо  $l_1 = 72 \text{ см}$ ,  
 $l_2 = 50 \text{ см}$ .

Відповідь:  $l_1 = 72 \text{ см}$ ,  $l_2 = 50 \text{ см}$ .

**Задача 10.** Маятник довжиною  $1.2 \text{ м}$  підвішений до стелі вагона, який рухається горизонтально по прямій з прискоренням  $2.2 \text{ м/с}^2$ . Знайти положення рівноваги і період коливання маятника.

$$l = 1.2 \text{ м}$$

$$a = 2.2 \text{ м/с}^2$$

$$T - ? \quad \alpha - ?$$

### Розв'язування

Розглянемо спочатку положення рівноваги маятника в системі відліку, зв'язаній з точкою його підвісу. В цьому положенні сила тяжіння  $mg$  і сила натягу підвісу  $\vec{F}_n$  повинні забезпечувати маятникові прискорення, що дорівнює прискоренню вагона  $\vec{a}$ :  $mg + \vec{F}_n = m\vec{a}$ .

З рисунка 17 видно, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}; \operatorname{tg} \alpha = 0.2205.$$

При малих кутах  $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = 0.2205 \text{ рад} = 13^\circ$ .

Маятник буде коливатися відносно положення рівноваги під кутом  $\alpha = 13^\circ$  до вертикалі.

Період коливань маятника такий же, як і для маятника такої ж довжини, що коливається під дією сили натягу, яка в положенні рівноваги дорівнює:

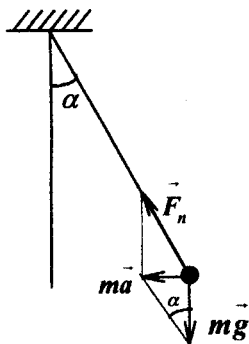


Рисунок 17

$$F_n = (mg)^2 + (ma)^2 = m g^2 + a^2.$$

Тому період коливань маятника

$$T = 2\pi \frac{l}{g},$$

де  $g' = \frac{F_n}{m} = g^2 + a^2$ . Таким чином одержуємо

$$T = 2\pi \frac{l}{g'} = 2\pi \frac{l}{g^2 + a^2} = 2.2 \text{ с.}$$

Відповідь:  $\alpha = 13^\circ$ ,  $T = 2.2 \text{ с.}$

**Задача 11.** Вантаж масою 5 кг коливається по вертикалі під дією системи пружинок сполучених так, як показано на рис. 18. Обчислити період коливань вантажу, якщо  $k_1 = 4 \text{ Н/м}$ ,  $k_2 = 6 \text{ Н/м}$ ,  $k_3 = 10 \text{ Н/м}$ .

$m = 5 \text{ кг}$
$k_1 = 4 \text{ Н/м}$ ,
$k_2 = 6 \text{ Н/м}$ ,
$k_3 = 10 \text{ Н/м}$
$T = ?$

Розв'язування

Дві паралельно сполучені пружини еквівалентні одній з жорсткістю  $k'$ , яка дорівнює сумі жорсткостей обох паралельних пружинок:

$$k' = k_1 + k_2$$

Третя пружина сполучена з еквівалентною послідовно, тому для обчислення жорсткості  $k$  використаємо формулу

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k'} + \frac{1}{k_3} \rightarrow k = \frac{k_3 k'}{k' + k_3} = \frac{k_3 (k_1 + k_2)}{k_1 + k_2 + k_3}$$

Період коливань вантажу на системі пружин:

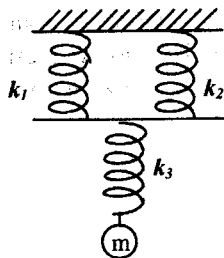


Рисунок 18

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2 + k_3)}{k_3(k_1 + k_2)}} = 6.28 \text{ с.}$$

Відповідь:  $T = 6.28 \text{ с.}$

**Задача 12.** Хвиля з частотою  $5 \text{ Гц}$  розповсюджується в просторі зі швидкістю  $3 \text{ м/с}$ . Знайти в градусах різницю фаз хвиль в двох точках простору, що знаходяться одна від одної на відстані  $20 \text{ см}$  і розташовані на прямій, яка збігається з напрямом розповсюдження хвилі.

$v = 5 \text{ Гц}$
$V = 3 \text{ м/с}$
$l = 20 \text{ см}$
$\Delta\varphi = ?$

Розв'язування

Довжина хвилі  $\lambda = \frac{V}{v} = 0.60 \text{ м}$ . Оскільки на відстані довжини хвилі  $\lambda$  різниця фаз дорівнює  $2\pi$ , то на відстані  $l$  різниця фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}; \quad \Delta\varphi = 120^\circ$$

Відповідь:  $\Delta\varphi = 120^\circ$

### Задачі для самостійного розв'язування

**Задача 1.** Амплітуда коливань точки струни  $1 \text{ мм}$ , частота  $1 \text{ кГц}$ . Який шлях пройде ця точка за  $0.2 \text{ с}$ ?

Відповідь:  $80 \text{ см}$ .

**Задача 2.** За яку частину періоду  $T$  тіло, що гармонічно коливається, проходить шлях від середнього положення до крайнього; першу половину шляху; другу половину шляху?

Відповідь:  $\frac{1}{4}T; \frac{1}{12}T; \frac{1}{6}T$ .



**Задача 3.** Вантаж на пружині коливається вздовж прямої з амплітудою  $A=2$  см. Період коливань  $T=2$  с. У початковий момент часу вантаж проходив положення рівноваги. Знайти швидкість і прискорення вантажу через час  $t=0.25$  с.

**Відповідь:**

$$V = A \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t = 4.4 \frac{\text{см}}{\text{с}}; a = -A \frac{4\pi^2}{T^2} \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t = -14 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

**Задача 4.** При фазі  $\frac{1}{3}\pi$  зміщення дорівнює 1 см. Знайти амплітуду коливань і зміщення при фазі  $\frac{3}{4}\pi$ .

**Відповідь:** 2 см, -1.4 см.

**Задача 5.** Чи зміниться період коливань маятника через те, що ми його помістимо у воду? Тертям знехтувати, розглянути математичний та пружинний маятники.

**Задача 6.** Визначити, наскільки будуть відрізняться покази електронного годинника і годинника з математичним маятником через добу після того, як їх піднімуть на висоту  $h=5$  км над поверхнею Землі. На поверхні Землі обидва годинники показують однаковий час. Радіус Землі  $R=6400$  км.

**Відповідь:**  $\Delta t = \frac{t_0 h}{R} = 68$  с; де  $t_0 = 24$  год.

**Задача 7.** Знайти період коливань математичного маятника завдовжки  $l$ , що висить у вагоні, який рухається з прискоренням  $a$ .

**Відповідь:**  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g^2 + a^2}}$

**Задача 8.** За один і той самий час один математичний маятник робить 50, а інший – 30 коливань. Знайти їх довжини, якщо один з них на 32 см коротший від іншого.

**Відповідь:** 18 см, 50 см.

**Задача 9.** Кулька масою  $m=0.1$  г закріплена на нитці, довжина якої  $l$  велика порівняно з її радіусом. Кульці надають заряд  $q=10$  нКл і поміщають в однорідне електричне поле з напруженістю  $E$ , спрямованою вгору. З яким періодом коливатиметься кулька, якщо сила, що діє на неї з боку електричного поля, більша від сили

тяжіння? Якою має бути напруженість поля  $E$ , щоб кулька коливалась з періодом  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ?

**Відповідь:**  $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{qE - mg}}$ ;  $E = \frac{2mg}{q} = 196 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$ .

**Задача 10.** У скільки разів зміниться частота коливань автомобіля на ресорах після того, як у нього поклали вантаж, маса якого дорівнює масі порожнього автомобіля?

**Відповідь:** зменшиться в  $\sqrt{2}$  разів.

**Задача 11.** Обчислити період коливань ареометра, що плаває у воді, які виникли після того, як його штовхнули у вертикальному напрямку. Маса ареометра  $m=50$  г, радіус його трубки  $r=5$  мм. Опором води знехтувати. Густина води  $\rho=10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

**Відповідь:**  $T = \sqrt{\frac{4\pi m}{\rho g r^2}} = 3.6$  с.

**Задача 12.** Знайти період коливань рідини в U-подібній посудині однакового перерізу. Загальна довжина частини посудини, заповненої рідиною, дорівнює  $l$ .

**Відповідь:**  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ .

**Задача 13.** Дві пружини з жорсткостями  $k_1$  і  $k_2$  з'єднані один раз послідовно, а другий – паралельно. У скільки разів будуть відрізнятися періоди вертикальних коливань вантажу, підвішеного на пружинах, у цих двох випадках?

**Відповідь:**  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k_1 k_2}}$ .

**Задача 14.** До динамометра, закріпленого у штативі, підвісили вантаж. Зразу після цього вантаж почав коливатись з частотою  $\nu=3$  Гц. Наскільки буде розтягнута пружина динамометра після того, як коливання повністю припиняться? Напрямок швидкості значення не має; напрямок прискорення донизу.

**Відповідь:**  $x = \frac{g}{4\pi^2 \nu^2} = 2.8$  см.

**Задача 15.** Діаметр ведучих коліс паровоза 1.5 м, швидкість його руху 72 км/год. Визначити період і частоту коливань поршня парової машини паровоза.

**Відповідь:** 0.24 с, 4.2 Гц.

**Задача 16.** Яку частину періоду  $T$  тягарець маятника перебуває не далі 1 см від положення рівноваги, якщо амплітуда коливань дорівнює 2 см?

**Відповідь:**  $\frac{1}{3}T$ .

**Задача 17.** Частинка гармонічно коливається вздовж осі  $x$  навколо положення рівноваги  $x=0$ . Частота коливань  $\omega=4$  рад/с. Визначити, в який момент часу після проходження положення рівноваги частинка буде мати координату  $x=25$  см і швидкість  $V_x=100$  см/с.

**Відповідь:**  $t = \frac{1}{\omega} \arctg \frac{x\omega}{V_x} = 0.2$  с.

**Задача 18.** У нерухомому ліфті висить маятник, період коливань якого  $T_1=1$  с. З яким прискоренням рухається ліфт, якщо період коливань маятника став  $T_2=1.1$  с?

**Відповідь:**  $a = g \left( 1 - \frac{T_1^2}{T_2^2} \right) = 1.7$  м/с<sup>2</sup>.

**Задача 19.** Як співвідносяться довжини математичних маятників, якщо за один і той самий час один з них робить 10, а інший 30 коливань?

**Відповідь:** 9:1.

**Задача 20.** Вантаж, підвішений на довгому гумовому джгуті, коливається з періодом  $T$ . у скільки разів зміниться період його коливань, якщо відрізати  $\frac{3}{4}$  джгута і на частині, що залишилась, підвісити цей самий вантаж?

**Відповідь:** зменшиться в 2 рази.

**Задача 21.** Пружинний маятник вивели з стану рівноваги і відпустили. Через який час (в частинах періоду) кінетична енергія тіла дорівнюватиме потенціальній енергії пружини?

**Відповідь:**  $\frac{1}{8}T$ ;  $\frac{3}{8}T$ ;  $\frac{5}{8}T$ ;  $\frac{7}{8}T$ .

**Задача 22.** Вантаж масою 400 г коливається на пружині з жорсткістю 250 Н/м. Амплітуда коливань 15 см. Знайти повну механічну енергію коливань і найбільшу швидкість руху вантажу.

**Відповідь:** 2.8 Дж, 3.8 м/с.

**Задача 23.** Яка довжина хвилі в повітрі відповідає частоті звуку 16 Гц? Швидкість звуку в повітрі 340 м/с.

**Задача 24.** Які хвилі, поздовжні чи поперечні, поширюються: 1) в газі; 2) в рідині; 3) в твердому тілі?

**Задача 25.** Хвиля біжить зі швидкістю  $V=360$  м/с при частоті  $\nu=450$  Гц. Яка різниця фаз у двох точках хвилі, відстань між якими  $\Delta x=20$  см?

**Відповідь:**  $\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu\Delta x}{V} = \frac{\pi}{2}$ .

**Задача 26.** Який камертон звучить довше: закріплений у лещатах чи той, що стоїть на резонаторному ящику?

**Задача 27.** При якій швидкості поїзда маятник завдовжки  $l=11$  см, підвішений у вагоні, особливо сильно розгойдується? Довжина рейок  $L=12.5$  м.

**Відповідь:**  $V = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 68$  км/год.

**Задача 28.** Звук пострілу і куля одночасно досягають висоти  $h=680$  м. Стріляли вертикально вгору. Яка початкова швидкість кулі? Швидкість звуку у повітрі  $V=340$  м/с.

**Відповідь:**  $V_0 = V + \frac{gh}{2V} = 349.8$  м/с.

**Задача 29.** У скільки разів зміниться довжина звукової хвилі при переході звуку з повітря у воду? Швидкість звуку у воді  $V_1=1450$  м/с, у повітрі  $V_2=340$  м/с.

**Відповідь:**  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{V_1}{V_2} = 4.26$ .

**Задача 30.** Швидкість звуку у воді  $V=1450$  м/с. На якій відстані лежать найближчі точки, які коливаються в протилежних фазах, якщо частота коливань  $\nu=725$  Гц?

**Відповідь:**  $\Delta x = \frac{V}{2\nu} = 1$  м.

**Задача 31.** Хвиля біжить зі швидкістю  $V=360$  м/с при частоті  $\nu=450$  Гц. Чому дорівнює різниця фаз двох точок хвилі, відстань між якими  $\Delta x=20$  см?

**Відповідь:**  $\Delta\varphi = \frac{2\pi\nu\Delta x}{V} = \frac{1}{2}\pi$ .

## Розділ 12. Електромагнітні коливання і хвилі

При розв'язуванні задач на тему "Електромагнітні коливання і хвилі" рекомендується:

- при розгляданні процесів, які відбуваються в коливальному контурі, використовувати закон збереження і перетворення енергії, а також загальний підхід, що застосовується при розв'язуванні задач на гармонічні коливання;
- врахувати, що змінний струм - це вимушені електричні коливання, при розгляді яких використовують ті ж характеристики, що і для механічних коливань;
- пам'ятати, що електромагнітні хвилі розповсюджуються в вакуумі з швидкістю світла  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, а в середовищі - з швидкістю  $V = c/n$ , де  $n$  - показник заломлення середовища.

### Основні поняття

#### Напруга в колі змінного електричного струму

$$U = U_0 \cos \omega t,$$

де  $U_0$  - амплітудне (максимальне) значення напруги;

$$\omega = \frac{2\pi}{T} - \text{циклічна частота, } T - \text{період змінного струму; } t - \text{час.}$$

#### Миттєве значення сили змінного струму в колі

а) з омичним опором (резистором)  $R$ :  $I = I_0 \cos \omega t$ ,

де  $I_0 = \frac{U_0}{R}$  - амплітудне значення сили змінного струму;

б) з електроємністю  $C$ :  $I = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ ,

де  $I_0 = U\omega C$ ;  $x_C = 1/\omega C$  - ємнісний опір;

в) з індуктивністю  $L$ :  $I = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ ,

де  $I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$ ,  $x_L = \omega L$  - індуктивний опір.

Закон Ома для кола змінного струму, що складається з послідовно включених резистора з омичним (активним) опором  $R$ , конденсатора з електроємністю  $C$  і котушки з індуктивністю  $L$ :

$$I_0 = \frac{U_0}{Z},$$

де  $U_0$  і  $I_0$  - амплітудні значення сили струму і напруги,  
 $Z = R^2 + (x_L - x_C)^2$  - повний опір кола, при наявності в ній активного ( $R$ ), індуктивного ( $x_L = \omega L$ ), та ємнісного ( $x_C = \frac{1}{\omega C}$ ) опорів.

Період електромагнітних коливань в коливальному (електромагнітному) контурі

$$T = 2\pi LC.$$

Діючі ефективні значення напруги і сили змінного струму

$$U = \frac{U_0}{2}, \quad I = \frac{I_0}{2},$$

де  $I_0$  і  $U_0$  - амплітудні значення сили струму і напруги.

Потужність змінного струму

$$P = IU \cos \varphi,$$

де  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$  - коефіцієнт потужності.

Електрорушійна сила у вторинній обмотці трансформатора

$$E_2 = \frac{E_1 n_2}{n_1},$$

де  $E_1$  - ЕРС в первинній обмотці трансформатора,  $n_1$  і  $n_2$  - число витків в первинній і вторинній обмотці трансформатора,  $k = \frac{n_1}{n_2}$  - коефіцієнт трансформації.

ККД трансформатора

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\%,$$

де  $P_1$  - потужність, яка підводиться до первинної обмотки трансформатора,  $P_2$  - потужність, яку віддає вторинна обмотка.

## Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** Напруга на кінцях ділянки кола, по якому іде змінний струм, змінюється з часом за законом  $U = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ . В момент часу  $t = \frac{T}{12}$  миттєве значення напруги дорівнює  $10 \text{ В}$ . Знайти амплітуду напруги.

$t = \frac{T}{12} \text{ с}$ $U = 10 \text{ В}$ $U_0 = ?$	<u>Розв'язування</u> В рівняння $U = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ , підставляємо значення $U$ і $t$ , враховуючи, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , одержимо
---	--

$$10 = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} + \frac{\pi}{6}\right)$$

або  $10 = U_0 \cos \frac{\pi}{3}$ , звідси

$$U_0 = \frac{10}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20 \text{ В.}$$

Відповідь:  $U_0 = 20 \text{ В}$ .

**Задача 2.** Коливальний контур повинен працювати у передавачі, який випромінює хвилі довжиною  $300 \text{ м}$ . Яким має бути період його коливань? Як забезпечити цей період, якщо індуктивність котушки конденсатора дорівнює  $1 \text{ мкГн}$ ?

$\lambda = 300 \text{ м}$ $L = 1 \text{ мкГн} = 10^{-6} \text{ Гн}$ $T = ?$	<u>Розв'язування</u> Швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі можна виразити через їх довжину і період:
---	--

$$c = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T}$$

Отже, період коливань контура

$$T = \frac{\lambda}{c} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 1 \text{ мкс.}$$

Використовуючи формулу періоду коливань контура  $T = 2\pi LC$ , знаходимо необхідну для цього ємність

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = \frac{\lambda^2}{4\pi c^2 L} = 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ Ф} = 0.025 \text{ мкФ.}$$

Відповідь:  $T = 1 \text{ мкс}$ ,  $C = 0.025 \text{ мкФ}$ .

**Задача 3.** Коливальний контур, який складається з повітряного конденсатора з двома пластинами площею  $S = 100 \text{ см}^2$  кожна, і котушки з індуктивністю  $L = 1 \text{ мкГн}$ , резонує на хвилю довжиною  $\lambda = 10 \text{ м}$ . Визначити відстань  $d$  між пластинами конденсатора.

$$\begin{array}{l} S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2 \\ L = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \\ \lambda = 10 \text{ м} \\ \hline d - ? \end{array}$$

Розв'язування

Ємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d},$$

де  $\epsilon$  - діелектрична проникність середовища, яке заповнює конденсатор.

Звідси

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{C}.$$

З формули періоду коливань в електричному контурі

$$T = 2\pi LC, \text{ знаходимо ємність } C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}.$$

Із співвідношення  $\lambda = cT$  маємо  $T = \frac{\lambda}{c}$ ;

тому

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon S 4\pi^2 L}{T^2} = \frac{c^2 4\pi^2 \epsilon_0 S L}{\lambda^2} = 3.14 \text{ мм.}$$

Відповідь:  $d = 3.14 \text{ мм}$ .

**Задача 4.** Неонова лампочка ввімкнена в коло змінного струму з діючою напругою  $220 \text{ В}$ . Вона горить тільки тоді, коли миттєве значення напруги дорівнює чи перевищує діюче значення напруги. Яку частинку всього часу світить лампочка?



$$U_0 = 220 \text{ В}$$

$$\frac{T}{t_1} = ?$$

### Розв'язування

Амплітуда змінного струму  $I_m$  і амплітуда напруги  $U_m$  зв'язані з діючими значеннями формулами

$$I_m = 2I_0; \quad U_m = 2U_0.$$

Нехай напруга змінюється за законом

$$U = U_m \sin \omega t = 2U_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

Визначимо, яку частину першої чверті періоду напруга зростатиме від нуля до діючого значення (момент спалаху лампочки):

$$U_0 = 2U_0 \sin \frac{2\pi}{T} t_1 \rightarrow \frac{1}{2} = \sin \frac{2\pi}{T} t_1 \rightarrow \frac{2\pi t_1}{T} = \frac{\pi}{4} \rightarrow t_1 = \frac{T}{8}.$$

Отже, лампочка світить половину першої чверті періоду. Оскільки це виконується для будь якої чверті періоду, то вона горить протягом 50% усього часу проходження змінного струму через неї.

**Відповідь:** лампочка світить половину всього часу.

**Задача 5.** Різниця потенціалів на обкладках конденсатора в коливальному контурі змінюється за законом  $U = 50 \cos(10^4 \pi t)$ . Ємність конденсатора  $9 \cdot 10^7 \Phi$ . Знайти індуктивність контура, закон зміни з часом сили струму в колі, а також довжину хвилі, що відповідає цьому контуру.

$$C = 9 \cdot 10^7 \Phi$$

$$L = ? \quad i(t) = ? \quad \lambda = ?$$

### Розв'язування

З формули Томсона  $T = 2\pi \sqrt{LC}$ , знайдемо що

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}, \text{ або враховуючи, що } T = \frac{2\pi}{\omega}, L = \frac{1}{C\omega^2}.$$

З рівняння  $U = 50 \cos 10^4 \pi t$  видно, що  $\omega = 10^4 \pi \text{ рад/с}$ .

Отже,  $L = 1.12 \cdot 10^3 \text{ Гн}$ .

Довжина хвилі  $\lambda = cT$ , де  $c$  - швидкість світла в вакуумі, або з врахуванням виразу для  $T$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}; \quad \lambda = 6 \cdot 10^4 \text{ м}.$$

За означенням, сила струму

$$I = -I_0 \sin \omega t.$$

Оскільки  $I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$ , то  $I = -\frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t$ .

Значення  $U_0$  і  $\omega$  знаходимо з рівняння  $U = 50 \cos 10^4 \pi t$ :

$$U_0 = 50 \text{ В}; \quad \omega = 10^4 \pi \text{ рад/с.}$$

Отже  $I = -1.42 \sin 10^4 \pi t$ .

Відповідь:  $L = 1.12 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}; \quad \lambda = 6 \cdot 10^4 \text{ м}; \quad I(t) = -1.42 \sin 10^4 \pi t$ .

**Задача 6.** Коливальний контур складається з конденсатора з електроємністю  $400 \text{ нФ}$  і котушки індуктивності з індуктивністю  $10 \text{ мГн}$ . Визначити амплітуду сили струму, якщо максимальний заряд конденсатора контура дорівнює  $200 \text{ нКл}$ .

$$C = 400 \text{ нФ} = 400 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}$$

$$L = 10 \text{ мГн} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$q_m = 200 \text{ нКл} = 200 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$I_m - ?$$

Розв'язування

З формули зв'язку конденсатора  $q$  і напруги на ньому  $U$  маємо:

$$q = CU \rightarrow U = \frac{q}{C}.$$

Використаємо закон збереження енергії для коливального контура:

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \rightarrow I_m = U_m \frac{C}{L} = \frac{q_m}{C} \frac{C}{L} = \frac{q_m}{LC} = 0.1 \text{ А.}$$

Відповідь:  $I_m = 0.1 \text{ А}$ .

**Задача 7.** Електропіч, опір якої  $22 \text{ Ом}$ , живиться від генератора змінного струму. Визначити кількість теплоти, яку виділяє піч за  $1 \text{ год}$ , якщо амплітуда струму  $10 \text{ А}$ .

$$t = 1 \text{ год} = 3.6 \cdot 10^3 \text{ с}$$

$$I_0 = 10 \text{ А}$$

$$R = 22 \text{ Ом}$$

$$Q - ?$$

Розв'язування

За законом Джоуля-Ленца для кола змінного струму:

$$Q = I^2 R t = \left( \frac{I_0}{\sqrt{2}} \right)^2 R t = 3.96 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Відповідь:  $Q = 3.96 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ .

**Задача 8.** Первинна обмотка замкнутого трансформатора з коефіцієнтом трансформації  $k = 10$  ввімкнена в коло з напругою

220 В. Опір вторинної обмотки  $r_2 = 2 \text{ Ом}$ , струм в ній  $I_2 = 5 \text{ А}$ . Який опір навантаження і яка напруга на контактах вторинної обмотки?

$$k = 10$$

$$U = 220 \text{ В}$$

$$r_2 = 2 \text{ Ом}$$

$$I_2 = 5 \text{ А}$$

$$R - ?$$

$$U - ?$$

### Розв'язування

ЕРС, яка індукується у вторинній обмотці:

$$E = \frac{U_1}{k} = 22 \text{ В}.$$

Нехтуючи індуктивним опором вторинної обмотки,

використаємо для неї закон Ома для повного кола постійного струму  $I_2 = E_2(R + r_2)^{-1}$ , що дозволить визначити опір навантаження вторинної обмотки:

$$R = \frac{E_2 - I_2 r_2}{I_2} = \frac{U_1}{k} - I_2 r_2 = 2.4 \text{ Ом}.$$

Напруга на вторинній обмотці, прикладена до резистора  $R$ , дорівнює

$$U_2 = E - I_2 r_2 = 12 \text{ В}.$$

Відповідь:  $R = 2.4 \text{ Ом}$ ,  $U_2 = 12 \text{ В}$ .

### **Задачі для самостійного розв'язування**

**Задача 1.** Конденсатор коливального контура приймача має ємність  $C$ . Який період власних коливань контура, якщо відношення максимального значення напруги на конденсаторі до сили струму на котушці дорівнює  $k$ ?

**Відповідь:**  $T = 2\pi Ck$ .

**Задача 2.** Максимальна напруга в коливальному контурі, який складається з котушки індуктивністю  $L = 5 \text{ мкГн}$  і конденсатора ємністю  $C = 13300 \text{ пФ}$ , дорівнює  $U_0 = 1.2 \text{ В}$ . Активний опір дуже малий. Визначити діюче значення сили струму в контурі і максимальне значення магнітного потоку, якщо кількість витків котушки  $n = 28$ .

**Відповідь:**

$$I_{\Delta} = U_0 \sqrt{\frac{C}{2L}} = 44 \text{ мА}; \quad \Phi_{\max} = \frac{U_0}{n} \sqrt{LC} = 1.1 \cdot 10^{-8} \text{ Вб}.$$

**Задача 3.** Рамка площею  $S = 400 \text{ см}^2$  має  $n = 100$  витків і обертається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 10^{-2} \text{ Тл}$ ,

причому період обертання  $T=0.1$  с. Визначити максимальне значення ЕРС в рамці, коли вісь обертання перпендикулярна до силових ліній.

**Відповідь:** 2.5 В.

**Задача 4.** Яке значення напруги через 10, 15 і 30 мс, якщо амплітуда напруги 200 В, а період 60 мс?

**Відповідь:** 100 В; 0; -200 В.

**Задача 5.** Неонова лампа починає світити, коли напруга на її електродах досягає деякого певного значення. Яку частину періоду світитиме лампа, якщо її ввімкнути в електромережу, діюче значення якої дорівнює напрузі, при якій лампа починає світити?

**Відповідь:** половину періоду.

**Задача 6.** Який опір конденсатора ємністю 4 мкФ у мережах з частотами змінного струму 50 Гц і 400 Гц?

**Відповідь:** 0.8 кОм; 0.1 кОм.

**Задача 7.** Який індуктивний опір котушки індуктивністю 0.2 Гн при частоті струму 50 Гц? 400 Гц?

**Відповідь:** 63 Ом; 0.5 кОм.

**Задача 8.** Як зміниться яскравість лампи, ввімкненої в мережу змінного струму послідовно з соленоїдом, якщо в соленоїд помістити залізне осердя?

**Задача 9.** У мережу змінного струму з напругою 36 В і частотою 1кГц послідовно ввімкнено резистор опором 4 Ом, котушку індуктивністю 2 мГн і конденсатор ємністю 8 мкФ. Знайти силу струму в колі і напругу на затискачах резистора, а також різницю фаз між струмом і напругою.

**Відповідь:** 4.3 А; 17 В; 54 В; 86 В; напруга відстає від струму на  $62^\circ$ .

**Задача 10.** У коло змінного струму з частотою 400 Гц увімкнена котушка індуктивністю 0.1 Гн. Якої ємності конденсатор треба ввімкнути в це коло, щоб мав місце резонанс?

**Відповідь:** 1.6 мкФ.

**Задача 11.** Трансформатор, що знижує напругу з коефіцієнтом трансформації 10, увімкнений у мережу з напругою 220 В. Яка напруга на виході трансформатора, якщо опір вторинної обмотки 0.2 Ом, а опір корисного навантаження 2 Ом?

**Відповідь:** 20 В.

**Задача 12.** Пояснити, чому зі збільшенням навантаження (зменшенням опору) у вторинному колі зростає потужність, яку споживає трансформатор з електромережі.

**Задача 13.** Амплітуда струму в коливальному контурі 1 мА, а амплітуда коливань заряду конденсатора 10 мкКл. Знайти період вільних коливань.

**Відповідь:** 63 мс.

**Задача 14.** Сила струму в первинній обмотці трансформатора  $I_1=0.5$  А, напруга на її кінцях  $U_1=220$  В. Сила струму у вторинній обмотці трансформатора  $I_2=11$  А, напруга на її кінцях  $U_2=9.5$  В. Знайти ККД трансформатора.

**Відповідь:** 95%.

**Задача 15.** Коливальний контур складається з котушки і двох однакових конденсаторів, увімкнених паралельно. У скільки разів зміниться частота коливань, якщо конденсатори ввімкнуті послідовно?

**Відповідь:** збільшиться вдвічі.

**Задача 16.** Контур складається з котушки індуктивністю  $L=28$  мкГн, резистора опором  $R=1$  Ом і конденсатора ємністю  $C=2222$  пФ. Яку потужність має забирати контур, щоб у ньому підтримувались коливання, які не згасають і при яких максимальна напруга на конденсаторі  $U_0=5$  В?

**Відповідь:**  $P = \frac{U_0^2 RC}{2L} = 10^{-3}$  Вт.

**Задача 17.** Рамка площею  $S=300$  см<sup>2</sup>, має  $n=100$  витків обертається в однорідному магнітному полі з індукцією  $B=10^{-2}$  Тл. Визначити період обертання, якщо максимальна ЕРС індукції  $E_0=14.4$  В.

**Відповідь:**  $T=0.04$  с.

**Задача 18.** Через  $1/6$  періоду миттєве значення ЕРС дорівнює 50 В. Яке значення ЕРС при фазі  $\frac{1}{4}\pi$  рад?

**Відповідь:** 71 В.

**Задача 19.** Конденсатор увімкнений у мережу змінного струму стандартної частоти з напругою 220 В. Сила струму при цьому дорівнює 2.5 А. Яка ємність конденсатора?

**Відповідь:** 36 мкФ.

**Задача 20.** У коло змінного струму ввімкнені послідовно активний опір 15 Ом, індуктивний опір 30 Ом і ємнісний опір 22 Ом. Який повний опір кола?

**Відповідь:** 17 Ом.

**Задача 21.** У коло ввімкнені конденсатор ємністю 2 мкФ і котушка індуктивністю 0.05 Гн. При якій частоті струму в цьому колі матиме місце резонанс?

**Відповідь:** 500 Гц.

**Задача 22.** Ротор генератора має 50 пар полюсів і обертається з частотою 2400 об/хв. Яка частота ЕРС, що збуджується при цьому в генераторі?

**Відповідь:** 2 кГц.

**Задача 23.** Трансформатор підвищує напругу з 220 В до 600 В і має в первинній обмотці 840 витків. Який коефіцієнт трансформації? Скільки витків у вторинній обмотці? В якій обмотці провід більшого перерізу?

**Відповідь:** 1/3; 2520; у первинній.

**Задача 24.** Первинна обмотка знижувального трансформатора з коефіцієнтом трансформації  $k=10$  увімкнена в мережу змінного струму з напругою  $U_1=120$  В. Опір вторинної обмотки  $r=1.2$  Ом, сила струму в ній  $I=5$  А. Знайти опір  $R$  навантаження трансформатора і напругу  $U_2$  на затискачах вторинної обмотки.

**Відповідь:**  $R = \frac{U_2}{I} = 1.2$  Ом;  $U_2 = \frac{U_1}{k} - Ir = 6$  В.

### Електромагнітні хвилі

**Задача 25.** Розмістивши перед генератором електромагнітних хвиль металевий лист, отримали стоячу хвилю. Відстань між вузлами хвилі дорівнює 15 см. Знайти частоту генератора.

**Відповідь:** 1000 МГц.

**Задача 26.** Яка може бути максимальна кількість імпульсів, що випромінює радіолокатор за 1 с при розвідуванні цілі, розміщеної за 30 км від нього?

**Відповідь:** 5000.

**Задача 27.** Коливальний контур радіоприймача настроєний на частоту 9 МГц. Як треба змінити його ємність, щоб він був настроєний на довжину хвилі 50 м?

**Відповідь:** збільшити в 2.25 рази.

**Задача 28.** Скільки коливань відбувається в електромагнітній хвилі з довжиною хвилі 30 м протягом одного періоду звукових коливань з частотою 200 Гц?

**Відповідь:**  $5 \cdot 10^4$ .

**Задача 29.** Радіолокатор працює на довжині хвилі 15 см і випромінює 4000 імпульсів за 1 с. Тривалість кожного імпульсу 2 мкс. Скільки коливань міститься в кожному імпульсі та яка найбільша глибина пошуку радіолокатора?

**Відповідь:** 40000; 37.5 км.

**Задача 30.** Електромагнітні хвилі поширюються в однорідному середовищі зі швидкістю  $V_{\text{сеп}} = 2 \cdot 10^8$  м/с. Яка довжина хвилі електромагнітних коливань у цьому середовищі, якщо їх частота у вакуумі  $f_0 = 1$  МГц?

**Відповідь:**  $\lambda = \frac{V_{\text{сеп}}}{f_0} = 200$  м.

**Задача 31.** Знайти довжину хвилі, яку випромінює контур з ємністю 141 пФ, якщо при зміні сили струму в його котушці на 1 А за 0.6 с у ній виникає ЕРС 0.2 мВ.

**Відповідь:** 320 м.

## Розділ 13. Геометрична оптика

При розв'язуванні задач на тему "Геометрична оптика" рекомендується:

- нарисувати хід променів в оптичній системі, показати при цьому різними лініями промені, які створюють дійсні зображення, і продовження променів, які створюють уявні зображення;
- записати формули, що виражають закони геометричної оптики, а також співвідношення, які випливають з геометричних побудов;
- провести алгебраїчні перетворення, розв'язати одержану систему рівнянь і знайти шукану величину.

### Основні поняття

#### Закон заломлення світла

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

де  $\alpha$  - кут падіння,  $\beta$  - кут заломлення,  $V_1 = \frac{c}{n_1}$  і  $V_2 = \frac{c}{n_2}$  - фазова швидкість світла в першому і другому середовищах,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с - швидкість світла в вакуумі,  $n_{21}$  - відносний показник заломлення другого середовища відносно першого.

Граничний кут  $\alpha_0$  повного відбиття визначається із співвідношення

$$\sin \alpha_0 = \frac{n_2}{n_1},$$

де  $n_1$  і  $n_2$  - абсолютні показники заломлення першого і другого середовища.

#### Формула тонкої лінзи

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d},$$



де  $F$  - фокусна відстань,  $f$  - відстань від лінзи до зображення,  $d$  - відстань від лінзи до предмета. Для збиральної лінзи  $F > 0$ ,  $d > 0$ , для дійсного зображення  $f > 0$ , для уявного зображення  $f < 0$ .

#### Оптична сила лінзи

$$D = \frac{1}{F} = (n-1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

де  $F$  - фокусна відстань,  $n$  - відносний показник заломлення речовини лінзи відносно зовнішнього середовища,  $R_1$  і  $R_2$  - радіуси кривизни заломлювальних поверхонь лінзи, для опуклої поверхні  $R > 0$ , для плоскої поверхні  $R = \infty$ , для увігнутої поверхні  $R < 0$ .

#### Лінійне збільшення лінзи

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d},$$

де  $f$  і  $d$  - відстань від лінзи до зображення і від лінзи до предмета,  $H$  - висота зображення,  $h$  - висота предмета.

### Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** Частота потужних імпульсів випромінювання радіолокатора аеропорту  $\nu = 500$  Гц. Який радіус його дії? Як довго ціль, що рухається зі швидкістю  $V = 900$  км/год, летітиме від краю зони спостереження до точки розташування радіолокатора?

$\nu = 500 \text{ с}^{-1}$	Між двома імпульсами проходить час	<u>Розв'язування</u>
$V = 900 \text{ км/год}$		
$R = ? \text{ т} - ?$		$T = \frac{1}{\nu} = 0.002 \text{ с}$ . За цей час імпульс може дійти до

цілі, відбитися і повернутися до приймача локатора. Отже радіус дії

$$R = \frac{cT}{2} = 300 \text{ км}, \text{ де } c - \text{швидкість світла у вакуумі.}$$

Таку відстань ціль пройде за час  $t = \frac{R}{V} = 20 \text{ хв}$ .

Відповідь:  $R = 300 \text{ км}$ ,  $t = 20 \text{ хв}$ .

**Задача 2.** На скляну пластинку, показник заломлення якої  $1.5$ , падає промінь світла. Знайти кут падіння променя, якщо кут між відбитим і заломленим променями  $90^\circ$ .

$$n = 1.5$$

$$\gamma = 1.57 \text{ рад}$$

$$i = ?$$

Розв'язування

З рисунка видно, що  $i + \gamma + r = \pi$ , звідси  $r = \pi - \gamma - i$ .

Тоді, враховуючи значення  $\gamma$ ,

$$r = \frac{\pi}{2} - i. \quad (1)$$

З іншого боку, за законом заломлення світла,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin r} = n. \quad (2)$$

Враховуючи вираз (1), одержимо

$$\sin r = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \cos i.$$

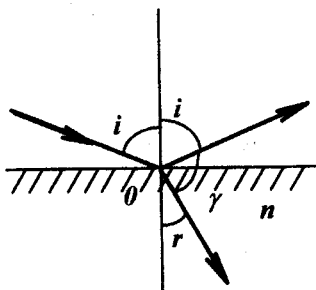


Рисунок 19

Тоді рівняння (2) можна привести до вигляду

$$\frac{\sin i}{\cos i} = \operatorname{tg} i = n,$$

звідси  $i = \operatorname{arctg} n = 0.98 \text{ рад}$ , або  $57^\circ$ .

Відповідь:  $i = 57^\circ$ .

**Задача 3.** Абсолютні показники заломлення алмазу і скла відповідно рівні  $2.42$  і  $1.5$ . Яким повинне бути відношення товщин цих речовин, щоб час розповсюдження світла в них був однаковим?

$$n_1 = 2.42$$

$$n_2 = 1.5$$

$$l_2 = ?$$

$$l_1$$

Розв'язування

Абсолютні показники заломлення алмазу  $n_1$  і скла  $n_2$  зв'язані з швидкістю розповсюдження світла в середовищах  $V_1$  і  $V_2$  співвідношенням:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{V_2}{V_1}. \quad (1)$$

Оскільки світло розповсюджується в однорідному середовищі зі сталою швидкістю, то

$$V_1 = \frac{l_1}{t}, \quad V_2 = \frac{l_2}{t},$$

де  $t$  - час проходження світла через речовину,  $l_1$  - товщина алмазу,  $l_2$  - товщина скла.

Поділивши почленно два останніх вирази, одержимо

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{l_2}{l_1} \quad (2)$$

Прирівнюючи рівняння (1) і (2), знайдемо

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{n_1}{n_2} = 1.61.$$

Відповідь:  $\frac{l_2}{l_1} = 1.61.$

**Задача 4.** Знайти граничний кут падіння променя на межу розділу скла і води.

$$n_1 = 1.5$$

$$n_2 = 1.33$$

$$i_0 - ?$$

Розв'язування

Граничний кут падіння, при якому спостерігається явище повного відбиття, знаходимо з умови

$$\sin i_0 = \frac{n_2}{n_1},$$

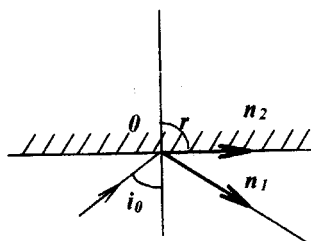


Рисунок 20

звідси  $i_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = 1.08 \text{ рад.}$

Відповідь:  $i_0 = 1.08 \text{ рад.}$

**Задача 5.** Пучок паралельних променів світла шириною 5 см падає під кутом  $\alpha = 60^\circ$  на поверхню скла (показник заломлення  $n = \frac{5}{3}$ ) товщиною 10 см. Знайти зміщення пучка від початкового напрямку і його ширину в склі.

$$a = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$n = 5/3$$

$$d = 0.10 \text{ м}$$

$$h - ?, a_1 - ?$$

Розв'язування

Хід пучка променів на рис. 25, де  $a_1$  - ширина пучка в склі,  $h$  - його зміщення після виходу із скляної пластинки. Закон заломлення світла

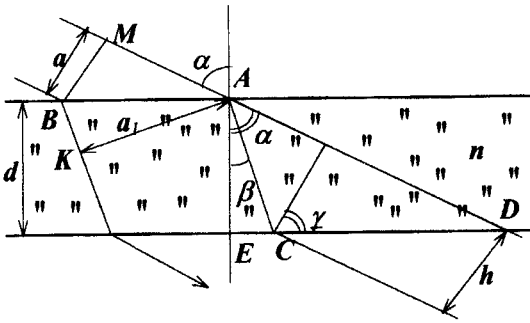


Рисунок 21

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

$\gamma = \alpha$ , тому  $h = CD \cos \gamma = CD \cos \alpha$ ,  $AE = d$ ,  $CD = d \operatorname{tg} \alpha - d \operatorname{tg} \beta$ .

Підставимо  $CD$  у формулу  $h = CD \cos \alpha$  і виконаємо алгебраїчні перетворення:

$$h = d \sin \alpha \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{n^2 - \sin^2 \alpha} \right) = 6.74 \text{ см.}$$

Для знаходження  $a_1$  розглянемо трикутники  $ABM$  і  $AKB$  зі спільною гіпотенузою і гострими кутами  $\alpha$  і  $\beta$ .

Тоді

$$AB = \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{a_1}{\cos \beta}.$$

$$\text{Звідси: } a_1 = \frac{a \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{a \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n \cos \alpha} = 8.5 \text{ см.}$$

Відповідь:  $h = 6.74 \text{ см}$ ,  $a_1 = 8.5 \text{ см}$ .

**Задача 6.** Свічка стоїть на відстані  $L = 3.75 \text{ м}$  від стіни. Рухаючи між ними лінзу, двічі одержали чітке зображення полум'я на стіні. Відстань між двома положеннями лінзи, у яких вона дає чітке зображення,  $l = 75 \text{ см}$ . Обчислити фокусну відстань лінзи.

$$L = 3.75 \text{ м}$$

$$l = 75 \text{ см}$$

$$F = ?$$

#### Розв'язування

Неважко зрозуміти, що обидва зображення були перевернуті і дійсні, одне – збільшене, друге – зменшене.

Запишемо для цих положень рівняння лінзи:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

Одночасно виконується пара таких рівностей:  $d_1 + f_1 = L$ ;  $d_2 + f_2 = L$ , а за умовою задачі  $|d_1 - d_2| = |f_1 - f_2| = l$ .

Якщо знайти  $f_1 = L - d_1$ , і підставити це значення в перше рівняння з (1), то приходимо до квадратного рівняння для  $d_1$ , корені якого дають нам  $d_1$  і  $d_2$ , а саме

$$d^2 - Ld + Fl = 0 \rightarrow d_{1,2} = 0.5L \pm \sqrt{0.25L^2 - FL}.$$

$$\text{Звідси: } l^2 = (d_2 - d_1)^2 = 0.25L^2 - FL \rightarrow F = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 0.9 \text{ м}$$

Відповідь:  $F = 0.9 \text{ м}$ .

**Задача 7.** Знайти фокусну відстань двояковипуклої скляної лінзи, що знаходиться у воді, якщо відомо, що її фокусна відстань в повітрі  $20 \text{ см}$ .

$$\begin{array}{|l} F_1 = 0,2 \text{ м} \\ F_2 = ? \end{array}$$

Розв'язування

Фокусна відстань двояковипуклої лінзи зв'язана з

абсолютними показниками заломлення речовини лінзи  $n_1$  і навколишнього середовища  $n_2$  таким співвідношенням:

$$\frac{1}{F} = \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

де  $R_1$  і  $R_2$  - радіуси кривизни сферичних поверхонь.

Для лінзи, яка знаходиться в повітрі,

$$\frac{1}{F_1} = (n_1 - 1) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

аналогічно, для лінзи, яка знаходиться у воді,

$$\frac{1}{F_2} = \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{n_1 - n_2}{n_2} \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2)$$

Поділивши почленно співвідношення (1) і (2), одержимо

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(n_1 - 1)n_2}{n_1 - n_2}, \quad \text{звідси } F_2 = \frac{F_1 \cdot n_2 (n_1 - 1)}{n_1 - n_2} = 0.78 \text{ м}.$$

Відповідь:  $F_2 = 0.78 \text{ м}$ .

**Задача 8.** У деякої людини відстань найкращого бачення дорівнює  $d = 10$  см замість нормальних  $d_0 = 25$  см. Які окуляри необхідні цій людині для корекції короткозорості?

$d = 10$ см	<u>Розв'язування</u>
$d_0 = 25$ см	Позначимо через $D$ - оптичну силу ока людини, $f$ -
$D - ?$	відстань від сітківки до кришталика, тоді для $d_0 = 25$ см

ока можна застосувати формулу лінзи у запису

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = D.$$

Якщо людина одягне окуляри з оптичною силою  $D_x$ , то внаслідок розташування лінзи окулярів близько до ока можна додати їх оптичні сили

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = D + D_x.$$

Віднімаючи від другого рівняння перше, знаходимо необхідну силу окулярів для читання з нормальної відстані:

$$D_x = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = \frac{d - d_0}{d \cdot d_0} = 6 \text{ дптр.}$$

Відповідь:  $D_x = 6$  дптр.

**Задача 9.** Зображення предмета на матовому склі фотоапарата з відстані, що дорівнює  $15$  м, має висоту  $30$  мм, а з відстані  $9$  м - висоту  $51$  мм. Знайти фокусну відстань об'єктива.

$d_1 = 15$ м	<u>Розв'язування</u>
$h_1 = 3 \cdot 10^{-2}$ м	Застосовуючи формулу збиральної лінзи
$d_2 = 9$ м	для відстаней $d_1$ і $d_2$ , одержимо
$h_2 = 5.1 \cdot 10^{-2}$ м	$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}. \quad (1)$

Використовуючи формулу збільшення лінзи для тих же відстаней, знайдемо

$$\frac{h}{h_1} = \frac{d_1}{f_1}; \quad \frac{h}{h_2} = \frac{d_2}{f_2},$$

звідси

$$f_1 = \frac{h_1 d_1}{h}; \quad f_2 = \frac{h_2 d_2}{h},$$

де  $h$  - висота предмета.

Підставляючи вирази для  $f_1$  і  $f_2$  в рівняння (1), одержимо

$$\frac{1}{d_1} + \frac{h}{h_1 d_1} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{d_2} + \frac{h}{h_2 d_2} = \frac{1}{F}. \quad (2)$$

Спільно розв'язуючи рівняння (2), одержимо

$$F = \frac{d_2 h_2 - d_1 h_1}{h_2 - h_1} = 0.43 \text{ м.}$$

Відповідь:  $F = 0.43 \text{ м.}$

### Задачі для самостійного розв'язування

**Задача 1.** Між двома плоскими дзеркалами, які розташовані під кутом одне до одного, міститься точкове джерело світла. Зображення джерела в першому дзеркалі перебуває на відстані  $a_1=6$  см, а в другому - на відстані  $a_2=8$  см від джерела. Відстань між зображеннями  $l=10$  см. Знайти кут між дзеркалами.

**Відповідь:**  $\varphi = \arccos\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - l^2}{2a_1 a_2}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

**Задача 2.** При падінні на плоску межу двох середовищ з показниками заломлення  $n_1$  і  $n_2$  промінь світла частково відбивається, а частково заломлюється. При якому куті падіння відбитий промінь перпендикулярний до заломленого?

**Відповідь:**  $\alpha = \arctg \frac{n_2}{n_1}$ .

**Задача 3.** На поверхні озера завглибшки  $H=2$  м плаває круглий пліт радіусом  $R=8$  м. Знайти радіус повної тіні від плоту на дні озера при освітленні води розсіяним світлом. Показник заломлення води  $n=1.33$ .

**Відповідь:**  $r = R - \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = 5.73 \text{ м.}$

**Задача 4.** Промінь світла падає на скляну плоскопаралельну пластинку з показником заломлення  $n$  під кутом  $\alpha$ . Промінь, що

виходить з пластинки, зміщений відносно падаючого на  $b$ . Знайти товщину  $h$  пластинки.

$$\text{Відповідь: } h = \frac{b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha (\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha})}$$

**Задача 5.** Знайти відношення товщин дна склянки і шару води в ній, якщо час проходження променя світла в склянці і воді однаковий. Показник заломлення скла 1.5, води – 1.33.

**Відповідь:** 0.9.

**Задача 6.** Яка справжня глибина басейну, якщо при визначенні його глибини “на око” у вертикальному напрямку здається, що глибина дорівнює 2.0 м? Показник заломлення води 1.33.

**Відповідь:**  $h=2.7$  м.

**Задача 7.** Висота Сонця над горизонтом  $38^\circ$ . Під яким кутом до горизонту треба поставити дзеркало, щоб сонячні промені попали на дно колодязя?

**Відповідь:**  $64^\circ$

**Задача 8.** На дні водойми завглибшки  $H=3$  м міститься точкове джерело світла. Яким має бути мінімальний радіус  $R$  круглого непрозорого диска, що плаває над джерелом, щоб з вертольота не можна було помітити джерело світла? Показник заломлення води  $n=1.33$ .

$$\text{Відповідь: } R = \frac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = 5.6 \text{ м.}$$

**Задача 9.** Пучок паралельних променів завширшки 20 см падає під кутом  $60^\circ$  на плоскопаралельну скляну пластину (показник заломлення 1.5) завтовшки 5 см. Знайти ширину пучка всередині скла.

**Відповідь:** 32.5 см.

**Задача 10.** Якої мінімальної висоти дзеркало треба взяти людині висотою  $h$ , щоб вона могла побачити себе на повний зріст?

$$\text{Відповідь: } H = \frac{h}{2}$$

**Задача 11.** Плоске дзеркало рухається зі швидкістю  $V=1.5$  см/с. З якою швидкістю і в якому напрямку має рухатись точкове джерело світла, щоб його зображення в дзеркалі було нерухомим?

**Відповідь:**  $V_1=3$  см/с, від дзеркала.

**Задача 12.** У дно водойми глибиною 2.0 м забита паля, що на 0.75 м виступає з води. Знайти довжину тіні від палі на поверхні і дні водойми, якщо висота Сонця над горизонтом  $45^\circ$ .

**Відповідь:**  $x_1=0.75$  м,  $x_2=2$  м.



**Задача 13.** Два взаємноперпендикулярні промені падають з повітря на рідину. Який показник заломлення рідини, якщо один промінь заломлюється під кутом  $36^\circ$ , а другий під кутом  $20^\circ$ ?

**Відповідь:** 1.5.

**Задача 14.** Знайти показник заломлення скипидару і швидкість поширення світла в ньому, якщо при куті падіння  $\alpha = 45^\circ$  кут заломлення  $\beta = 30^\circ$ . Швидкість світла у вакуумі  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**Відповідь:**  $n = 1.4$ ,  $V = c/n = 2.14 \cdot 10^8$  м/с.

**Задача 15.** Кут між заломленим і відбитим променями дорівнює  $90^\circ$ . Знайти відносний показник заломлення, якщо промінь падає на плоску межу двох середовищ під кутом  $\alpha$ , для якого  $\sin \alpha = 0.8$ .

**Відповідь:**  $n = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = 1.33$ .

**Задача 16.** Під яким кутом має впасти промінь на поверхню скла ( $n = 1.6$ ), щоб кут заломлення був удвічі менший від кута падіння?

**Відповідь:**  $74^\circ$ .

**Задача 17.** Граничний кут повного внутрішнього відбивання дорівнює  $30^\circ$ . Знайти показник заломлення.

**Відповідь:** 2.

**Задача 18.** На поверхні води плаває круглий поплавок радіусом 20 см. При якому мінімальному рівні води поплавок не даватиме повної тіні на дні посудини? Показник заломлення води  $n = 1.33$ .

**Відповідь:** 22.4 см.

### Лінза. Оптична сила лінзи

**Задача 19.** Перевіряючи окуляри людина отримала на підлозі дійсне зображення лампи, що висить на висоті  $H = 3$  м, тримаючи окуляри на відстані  $h = 1$  м від підлоги. Знайти оптичну силу лінз окулярів.

**Відповідь:**  $D = \frac{1}{h} + \frac{1}{H - h} = 1.5$  дптр.

**Задача 20.** Свічка міститься на відстані 12.5 см від збиральної лінзи. Знайти відстань від лінзи до зображення. Яке воно? Оптична сила лінзи 10 дптр.

**Відповідь:** 50 см; збільшує у 4 рази.

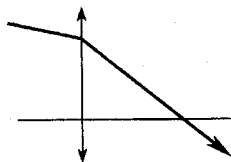
**Задача 21.** Уявне зображення предмета міститься на відстані  $f=1$  м від збиральної лінзи з фокусною відстанню  $F=0.25$  м. Яка відстань  $d$  від лінзи до предмета?

**Відповідь:**  $d = \frac{f \cdot F}{f + F} = 0.2 \text{ м.}$

**Задача 22.** Яка мінімально можлива відстань  $a_{\min}$  між предметом і його дійсним зображенням, що отримане за допомогою збиральної лінзи з фокусною відстанню  $F$ ?

**Відповідь:**  $a_{\min} = 4F.$

**Задача 23.** Знаючи хід заломленого променя (див. рисунок), знайти побудовою положення фокусів лінзи.



**Задача 24.** Знайти оптичну силу розсіювальної лінзи, якщо відомо, що предмет, розташований перед нею на відстані 40 см, дає зображення, менше у 4 рази.

**Відповідь:**  $-7.5 \text{ дптр.}$

**Задача 25.** Збиральна лінза дає зображення предмета зі збільшенням  $k=2$ . Відстань від предмета до лінзи більша за її фокусну відстань на  $a = 6$  см. Знайти відстань  $f$  від лінзи до екрана.

**Відповідь:**  $f = k(k + 1)a = 36 \text{ см.}$

**Задача 26.** На якій відстані  $f$  від об'єктива проєкційного апарата з фокусною відстанню  $F=0.1$  м треба розмістити екран, щоб зображення на екрані було в  $k=50$  разів більшим за предмет на діапозитиві?

**Відповідь:**  $f = (k + 1)F = 5.1 \text{ м.}$

**Задача 27.** Кульку по черзі поміщають у точки А і В на головній оптичній осі збиральної лінзи по один бік від неї. Відстань АВ дорівнює  $l$ . Лінза дає зображення кульки відповідно зі збільшенням  $k_A$  і  $k_B$ . Знайти відстань  $L$  між зображеннями кульки.

**Відповідь:**  $L = k_A \cdot k_B \cdot l.$

**Задача 28.** Збиральна лінза дає зображення предмета, який розташований на відстані  $d=9.9$  см від неї, зі збільшенням  $k=10$ . Знайти фокусну відстань  $F$  лінзи у випадках дійсного та уявного зображень.

**Відповідь:**  $F = \frac{kd}{k + 1} = 9 \text{ см, } F = \frac{kd}{k - 1} = 11 \text{ см.}$

**Задача 29.** Світловий промінь, що падає на розсіювальну лінзу з фокусною відстанню  $F=13.5$  см, після заломлення в ній перетинає головну оптичну вісь у точці, що міститься на відстані  $f=9$  см від лінзи. На якій відстані від лінзи промінь перетне вісь, якщо лінзу забрати?

**Відповідь:**  $d = \frac{fF}{f + F} = 5.4$  см.

**Задача 30.** Свічка міститься на відстані  $a=3.75$  м від екрана. Між свічкою та екраном поставили збиральну лінзу, яка дає на екрані чітке зображення свічки при двох положеннях лінзи. Знайти фокусну відстань лінзи, якщо відстань між положеннями лінзи  $b=0.75$  м.

**Відповідь:**  $F = \frac{a^2 - b^2}{4a} = 0.9$  м.

**Задача 31.** Знайти показник заломлення скла, з якого виготовлено збиральну лінзу з радіусами кривизни поверхонь 20 см, якщо дійсне зображення предмета, який міститься на відстані 25 см від лінзи, перебуває на відстані 1 м від неї.

**Відповідь:** 1.5.

**Задача 32.** Дві збиральні лінзи однакової форми виготовлено з різних сортів скла з показниками заломлення  $n_1=1.5$  та  $n_2=1.7$ . Знайти відношення фокусних відстаней лінз у повітрі та у воді ( $n_v=1.33$ ).

**Відповідь:**  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} = 1.4$ ;  $\frac{F'_1}{F'_2} = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1} = 1.2$ .

**Задача 33.** Дві лінзи з фокусними відстанями  $F_1$  і  $F_2$  поставлені поруч, дають зображення джерела; їх замінили однією. Якою має бути оптична сила цієї лінзи, щоб положення зображення не змінилося?

**Відповідь:**  $D = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}$ .

**Задача 34.** Тонка збиральна лінза з фокусною відстанню  $F=60$  см впритул прилягає до плоского дзеркала. На оптичній осі лінзи на відстані  $d=50$  см від неї міститься невеликий предмет. Де розміститься його зображення?

**Відповідь:** на відстані  $f = \frac{Fd}{2d - F} = 75$  см від лінзи.

**Задача 35.** Фокусна відстань об'єктива мікроскопа  $F_1=0.5$  см, відстань між об'єктивом і окуляром  $l=16$  см. Збільшення мікроскопа

$k=200$ . Знайти збільшення окуляра  $k_2$ , якщо відстань найкращого зору  $d_0=25$  см.

**Відповідь:**  $k_2 = \frac{d_0 + kF_l}{l - F_l} = 8$ .

**Задача 36.** Яке збільшення може дати лупа з оптичною силою  $D=8$  дптр? Відстань найкращого зору  $d_0=25$  см.

**Відповідь:**  $Dd_0 \leq kDd_0 + 1; 2 \leq k \leq 3$

**Задача 37.** Учень звик читати книгу, тримаючи її на відстані  $d=20$  см від очей. Якою має бути оптична сила окулярів  $D$ , щоб учень у них міг читати книгу, тримаючи її на відстані  $d_0=25$  см?

**Відповідь:**  $D = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = -1$  дптр.

**Задача 38.** Короткозора людина може бачити предмет, якщо він розміщений на відстані до  $d=20$  см від очей. Якою має бути оптична сила окулярів, щоб в них людина могла бачити віддалені предмети?

**Відповідь:**  $D = -1/d = -5$  дптр

**Задача 39.** Два паралельні промені, пройшовши через дві тонкі паралельні збиральні лінзи, головні оптичні осі яких збігаються, лишилися паралельними. Відстань між лінзами  $l=20$  см. Знайти фокусну відстань першої лінзи, якщо фокусна відстань другої лінзи  $F_2=12$  см.

**Відповідь:**  $F_1 = l - F_2 = 8$  см.

**Задача 40.** На головній оптичній осі збиральної лінзи розміщені два точкових джерела світла на відстанях  $d_1=20$  см та  $d_2=80$  см від лінзи. Зображення цих джерел збігаються. Знайти фокусну відстань  $F$  лінзи.

**Відповідь:**  $F = \frac{2d_1d_2}{d_1 + d_2} = 32$  см.

**Задача 41.** Зображення міліметрової поділки шкали, що міститься перед лінзою на відстані  $f=12.5$  см, має на екрані довжину  $L=8$  см. Яка відстань  $l$  від лінзи до екрана?

**Відповідь:**  $f = Ld/l = 10$  м.

**Задача 42.** Предмет міститься на фокальній площині тонкої лінзи. Знайти висоту предмета  $h$ , якщо висота зображення  $H=0.5$  см.

**Відповідь:**  $h = 2H = 1$  см.

**Задача 43.** Відстань від предмета до екрана дорівнює 90 см. де треба розмістити між ними лінзу з фокусною відстанню 20 см, щоб отримати на екрані чітке зображення предмета?

**Відповідь:** на відстанях 30 см і 60 см від екрана.

**Задача 44.** Уявне зображення предмета, відстань від якого до збиральної лінзи дорівнює  $d=0.4$  м, міститься на відстані  $f=1.2$  м від лінзи. Яка фокусна відстань  $F$  лінзи?

**Відповідь:**  $F = \frac{f \cdot d}{f - d} = 0.6$  м.

**Задача 45.** На якій відстані перед розсіювальною лінзою з оптичною силою  $-2$  дптр треба поставити предмет, щоб його уявне зображення лежало посередині між лінзою та її фокусом?

**Відповідь:** 50 см.

**Задача 46.** На якій відстані від лінзи з фокусною відстанню 12 см треба поставити предмет, щоб його дійсне зображення було втричі більше за сам предмет?

**Відповідь:** 16 см.

**Задача 47.** Предмет міститься на відстані  $4F$  від лінзи. У скільки разів зображення на екрані менше від самого предмета?

**Відповідь:** в 3 рази.

**Задача 48.** Предмет сфотографований з відстані  $d_1$ , на плівці має висоту  $h_1$ , а сфотографований з відстані  $d_2$  – висоту  $h_2$ . Знайти оптичну силу об'єктива.

**Відповідь:**  $D = \frac{h_2 - h_1}{d_2 h_2 - d_1 h_1}$ .

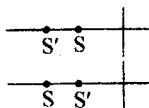
**Задача 49.** Предмет завдовжки  $l=8$  см проектується на екран. Якою має бути фокусна відстань  $F$  об'єктива, що міститься на відстані  $f=4$  м від екрана, щоб зображення предмета на екрані мало довжину  $L=2$  м?

**Відповідь:**  $F = \frac{f \cdot l}{L + l} = 15.4$  см.

**Задача 50.** Відстань від предмета до збиральної лінзи в  $n=5$  разів більша від фокусної відстані лінзи. Знайти збільшення  $k$  лінзи.

**Відповідь:**  $k=1/4$ .

**Задача 51.** На рисунку показано джерела  $S$   $S'$ , а також площини лінз. Знайти фокус і визначити тип кожної лінзи.



**Задача 52.** Збиральна лінза дає розбіжний пучок світла, причому кут між крайніми променями пучка  $2\alpha = 60^\circ$ . Знайти фокусну відстань

F лінзи, якщо її радіус  $r=5$  см, а відстань від неї до точкового джерела світла  $d=4$  см.

$$\text{Відповідь: } F = \frac{rd}{r-d \operatorname{tg} \alpha} = 7.4 \text{ см.}$$

**Задача 53.** Фокусна відстань збиральної лінзи  $F=18$  см. На якій відстані від лінзи та її головної оптичної осі розміщена точка, якщо відстань до її зображення від лінзи  $f=12$  см і від головної оптичної осі  $L=5$  см?

$$\text{Відповідь: } d = \frac{fF}{f+F} = 7.2 \text{ см; } l = \frac{LF}{f+F} = 3 \text{ см.}$$

**Задача 54.** Збиральна лінза з оптичною силою 8 дптр дає зображення предмета. Розмір зображення дорівнює розміру предмета. Як треба змінити відстань між лінзою і предметом, щоб його зображення зменшилось втричі?

**Відповідь:** збільшити на 25 см.

**Задача 55.** Лінза з оптичною силою  $D=4$  дптр дає збільшене в  $k=5$  разів зображення предмета, розміщеного перед лінзою. Яка відстань між предметом і лінзою?

$$\text{Відповідь: } d_1 = \frac{k+1}{kD} = 0.3 \text{ м; } d_2 = \frac{k-1}{kD} = 0.2 \text{ м.}$$

**Задача 56.** Фокусна відстань збиральної лінзи  $F=10$  см, відстань від предмета до фокуса  $b=5$  см, висота предмета  $h=2$  см. Знайти висоту дійсного та уявного зображень.

**Відповідь:**  $H=Fh/b=4$  см в обох випадках.

**Задача 57.** Свічка стоїть на відстані  $a$  від екрана. Між екраном і свічкою помістили збиральну лінзу, яка дає на екрані чітке зображення свічки при двох положеннях лінзи. Знайти відстань  $b$  між цими положеннями лінзи, якщо фокусна відстань дорівнює  $F$ .

$$\text{Відповідь: } b = \sqrt{a^2 - 4aF}.$$

**Задача 58.** На шляху збіжного пучка променів поставили збиральну лінзу з фокусною відстанню  $F=7$  см. Заломлені промені зійшлись у точці А на відстані  $f=5$  см від лінзи. На якій відстані від точки А зйдуться промені, якщо лінзу забрати?

$$\text{Відповідь: } b = \frac{f^2}{F-f} = 12.5 \text{ см.}$$

**Задача 59.** Циліндричний пучок світла радіусом  $r_1=4$  см спрямували на збиральну лінзу паралельно її головній оптичній осі. Пройшовши крізь лінзу, пучок дає на екрані круг радіусом  $r_2=5$  см.

Який буде радіус  $r_3$  круга на екрані, якщо збиральну лінзу замінити розсіювальною з тією самою фокусною відстанню?

**Відповідь:**  $r_3 = 2r_1 - r_2 = 6$  см, якщо відстань від лінзи до екрана менша від фокусної;  $r_3 = 2r_1 + r_2 = 10$  см, якщо відстань від лінзи до екрана більша за фокусну.

**Задача 60.** Предмет заввишки  $h = 0.03$  м розміщено на відстані  $d = 0.15$  м від розсіювальної лінзи з фокусною відстанню  $F = 0.3$  м. Яка відстань  $f$  від лінзи до зображення? Яка висота  $H$  зображення?

**Відповідь:**  $f = \frac{F \cdot d}{F + d} = 0.1$  м;  $H = \frac{hF}{F + d} = 0.02$  м.

**Задача 61.** Збиральна лінза з фокусною відстанню 6 см дає розбіжний пучок світла, причому кут між крайніми променями дорівнює  $90^\circ$ . Знайти відстань від точкового джерела до лінзи, якщо її радіус дорівнює 3 см.

**Відповідь:** 2 см.

**Задача 62.** Відстань між джерелами світла 24 см. Де треба поставити збиральну лінзу з фокусною відстанню 9 см, щоб їхні зображення сумістилися?

**Відповідь:** між джерелами, на відстані 6 см від будь-якого з них.

**Задача 63.** На якій відстані  $b$  треба розмістити дві збиральні лінзи з фокусними відстанями  $F_1 = 5$  см і  $F_2 = 3$  см щоб паралельний пучок променів, пройшовши крізь них, лишився паралельним?

**Відповідь:**  $b = F_1 + F_2 = 8$  см.

**Задача 64.** Яка довжина  $l$  зорової труби, об'єktiv та окуляр якої мають фокусні відстані  $F_1 = 25$  см і  $F_2 = 8$  см, якщо предмет віддалений (у нескінченність), а зображення міститься від окуляра на відстані найкращого зору  $d_0 = 25$  см?

**Відповідь:**  $l = \frac{d_0 F_2}{d_0 + F_2} + F_1 = 3$  см.

**Задача 65.** Знайти оптичну силу окулярів людини, якщо без них вона читає книгу на відстані 67 см.

**Відповідь:** 2.5 дптр.

**Задача 66.** Далекозора людина може читати книгу, тримаючи її на відстані  $d = 0.8$  м від очей. Якою має бути оптична сила окулярів, щоб людина могла читати книгу, тримаючи її на відстані найкращого зору  $d_0 = 25$  см?

**Відповідь:**  $D = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = 2.75$  дптр.

## Розділ 14. Хвильова оптика

При розв'язуванні задач на тему "Хвильова оптика" рекомендується:

- визначити оптичну різницю ходу між променями, що інтерферують, записати умови максимумів і мінімумів інтенсивності в інтерференційній картині, визначити шукані величини з цих співвідношень;
- записати умови головних максимумів для дифракції на дифракційній ґратці, доповнивши їх необхідними геометричними співвідношеннями і визначити шукані величини. При цьому слід врахувати, що дифракційна картина симетрична відносно центрального максимуму.

### Основні поняття

#### Умови інтерференційних максимумів (посилення світла)

$$\Delta = \frac{2k\lambda}{2},$$

де  $\Delta$  - оптична різниця ходу хвилі;  $\lambda$  - довжина хвилі;  $k = 1; 2; 3 \dots$

#### Умови інтерференційних мінімумів (ослаблення світла)

$$\Delta = (2k + 1) \lambda,$$

де  $\Delta$  - оптична різниця ходу хвилі;  $\lambda$  - довжина хвилі;  $k = 1; 2; 3 \dots$

#### Умови головних максимумів в спектрі дифракційної ґратки

$$d \cdot \sin \varphi = \pm k\lambda,$$

де  $d$  - період дифракційної ґратки,  $\varphi$  - кут дифракції;  $k = 1; 2; 3 \dots$  - порядок максимуму  $\lambda$  - довжина плоскої монохроматичної хвилі, що падає нормально на поверхню ґратки.

### Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** Довжина хвиль червоних променів світла у повітрі 700 нм. Яка довжина хвилі цих променів у воді?

$$\frac{\lambda_1 = 700 \text{ нм} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{\lambda_2 = ?}$$

#### Розв'язування

Довжина світлової хвилі у повітрі  $\lambda_1$ , і у воді  $\lambda_2$  зв'язані і з швидкостями розповсюдження цих хвиль у повітрі  $V_1$ , і у воді  $V_2$  таким співвідношенням:



$$\lambda_1 = \frac{V_1}{\nu} \quad \text{і} \quad \lambda_2 = \frac{V_2}{\nu},$$

де  $\nu$  - частота світлових коливань, яка не змінюється при переході світла з одного середовища до іншого.

Поділивши почленно ці рівняння, одержимо

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Швидкості розповсюдження світла у повітрі і у воді зв'язані з абсолютними показниками заломлення цих середовищ співвідношенням

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Звідси  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_1 n_1}{n_2} = 5.26 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$

Відповідь:  $\lambda_2 = 5.26 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$

**Задача 2.** У вакуумі світло має довжину хвилі  $\lambda_0 = 600 \text{ нм}$ . Яка різниця ходу  $\Delta$  двох таких хвиль відповідає їх різниці фаз  $\Delta\varphi = 0.4 \pi$ ? Якій різниці фаз відповідає ця різниця відстаней у склі з показником заломлення  $n = 1.5$ ?

$\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$
$\Delta\varphi = 0.4 \pi$
$n = 1.5$
$\Delta\varphi_1 - ?$

Розв'язування

Відстані  $l = \lambda_0$  відповідає у вакуумі різниця фаз  $2\pi$ , тому з очевидного відношення  $\frac{x}{\lambda_0} = \frac{0.4\pi}{2\pi}$

знаходимо шукану різницю ходу  $\Delta = x = 0.2\lambda_0 = \frac{\lambda_0}{5}$ .

У склі довжина хвилі зменшується в  $n = 1.5$  рази, тому вказана відстань відповідає в  $1.5$  рази більшій різниці фаз, тобто  $6\pi$ .

Відповідь:  $\Delta\varphi_1 = 6\pi$ .

**Задача 3.** Відстань між двома когерентними джерелами  $S_1$  і  $S_2$   $2 \text{ мм}$ . Вони випромінюють хвилі довжиною  $500 \text{ нм}$ . Знайти різницю ходу до точки, що лежить напроти джерела на екрані, віддаленому від площини джерел хвиль на відстань  $2 \text{ м}$ . Що спостерігається у цій точці?

$$d = 2 \text{ мм}$$

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-9} \text{ м}$$

$$L = 2 \text{ м}$$

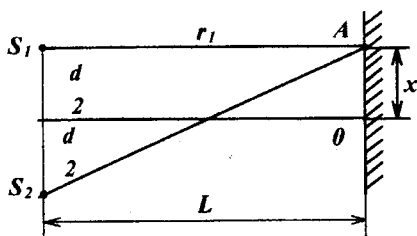


Рисунок 22

### Розв'язування

На рис. 22 показано взаємне розташування джерел  $S_1$  і  $S_2$ , екрана, точки центрального максимуму  $O$ , точки  $A$  “навпроти  $S_1$ ”. Позначимо відстань  $OA$  через  $x$ . Різниця ходу хвиль від джерел у точку  $A$  обчислимо таким чином:

$$r_2^2 - r_1^2 =$$

$$= [L^2 + (x + 0,5d)^2] - [L^2 + (x - 0,5d)^2] \rightarrow (r_2 + r_1) \cdot (r_2 - r_1) \approx 2xd \rightarrow$$

$$\rightarrow 2L(r_2 - r_1) \approx 2xd \rightarrow \Delta = r_2 - r_1 = \frac{2xd}{2L} = \frac{xd}{L}$$

Тут враховано, що  $L \gg d$ ,  $L \gg x$ ;  $x = 1 \text{ мм}$ , тому  $\Delta_A = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1000 \text{ нм}$ . Вона дорівнює двом довжинам хвилі. Очевидно хвилі, що приходять у цю точку від  $S_1$  і  $S_2$ , додаються, і в точці  $A$  має бути максимум.

Відповідь: В точці навпроти джерела створюється максимум.

**Задача 4.** Пучок паралельних променів з довжиною хвилі  $700 \text{ нм}$  падає на мильну плівку під кутом  $45^\circ$ . При якій найменшій товщині плівки у відбитому склі спостерігається максимум (мінімум)?

$$\lambda = 700 \text{ н}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$n = 1.33$$

$$h - ?$$

### Розв'язування

Хід променів зображено на рис. 23. Око людини зводить на сітківку промені  $1$  і  $2$ , де вони посилюють або гасять один одного, що залежить від різниці їх ходу  $\Delta$ .

$$\Delta = AB + BC - AD.$$

Умови відбивання променів 1 і 2 різні, в результаті чого додатково виникає різниця фаз  $\pi$  і різниця ходу  $\frac{\lambda}{2}$ , а також зменшення довжини хвилі у плівці, де  $n = 1.33$ .

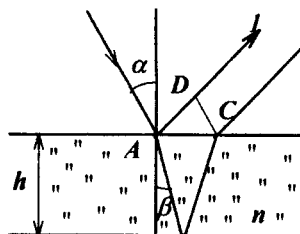


Рисунок 23

$$\Delta = 2AB \cdot n + \frac{\lambda}{2} - AD;$$

$$AB = \frac{h}{\cos \beta}; \quad AD = AC \cdot \sin \alpha = 2h \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha.$$

Закон заломлення  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ ,  $\rightarrow \sin \alpha = n \cdot \sin \beta$ .

Тому

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2hn}{\cos \beta} + \frac{\lambda}{2} - 2htg\beta \cdot n \sin \beta = 2hn(1 - \sin^2 \beta) \cos^{-1} \beta + \frac{\lambda}{2} = \\ &= \frac{\lambda}{2} + 2h \sqrt{n^2 - \sin^2 \beta} \end{aligned}$$

Максимум спостерігається тоді, коли  $\Delta = \lambda$ , а мінімум, коли  $\Delta = \frac{\lambda}{2}$ . В нашому випадку

$$\lambda = \frac{\lambda}{2} + 2h_{\max} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \rightarrow h = \lambda \left( 4 \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \right)^{-1} = 0.3 \text{ мкм}.$$

Мінімум спостерігається при вдвічі тоншій плівці – 0.15 мкм.

**Відповідь:**  $h_{\max} = 0.3 \text{ мкм}$ ;  $h_{\min} = 0.15 \text{ мкм}$ .

**Задача 5.** Визначити найбільший порядок спектра, який може утворити дифракційна ґратка, що має 500 штрихів на 1мм, якщо довжина хвилі, що падає на неї 590 нм. Яку найбільшу довжину хвилі можна спостерігати в спектрі цієї ґратки?

$$N_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$$

$$\lambda = 5.9 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$k_m - ? \quad \lambda_m - ?$$

Розв'язування

З формули дифракційної ґратки  $d \sin \varphi = k\lambda$  знайдемо:

$$k = d \cdot \sin \varphi \cdot \lambda \quad (1)$$

Враховуючи, що  $d = \frac{l}{N_0}$ , перетворимо формулу (1)

$$k = \frac{\sin \varphi}{\lambda N_0} \quad (2)$$

З виразу (2) маємо, що при заданій  $\lambda$  і  $N_0$  найбільший порядок спектра можна спостерігати при найбільшому значенні  $\sin \varphi_m = 1$ , тобто

$$k_m = \frac{\sin \varphi_m}{\lambda N_0} = \frac{1}{\lambda N_0} \approx 3.$$

Найбільша довжина хвилі, яку можна спостерігати за допомогою цієї ґратки, дорівнює

$$\lambda_m = \frac{d \sin \varphi_m}{k_m} = \frac{l}{k_m N_0} = 6.67 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Відповідь:  $k_m \approx 3$ ;  $\lambda_m = 6.67 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$

**Задача 6.** На дифракційну ґратку, нормально до її поверхні, падає паралельний пучок світла з довжиною хвилі  $0.5 \text{ мкм}$ . Розміщена поблизу ґратки лінза проектує дифракційну картину на плоский екран, віддалений на відстань  $L = 1 \text{ м}$ . Відстань між двома максимумами інтенсивності першого порядку, що спостерігається на екрані, дорівнює  $20.2 \text{ см}$ . Знайти: 1) постійну  $d$  дифракційної ґратки; 2) число  $n$  штрихів на  $1 \text{ см}$ ; 3) число максимумів які дає при цьому дифракційна ґратка; 4) максимальний кут відхилення променів, що відповідають останньому дифракційному максимуму.

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$L = 1 \text{ м}$$

$$l = 20.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Розв'язування

1. З формули дифракційної ґратки  $d \sin \varphi = k \lambda$ ,

$$\text{знайдемо } d = \frac{k \lambda}{\sin \varphi}.$$

В даному випадку  $k = 1$ ,  
 $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi$  ( тому що  
 $\frac{l}{2} \ll L$  ),

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{L} \quad (\text{рис.24}).$$

З урахуванням цього

$$d = \frac{2\lambda L}{l} = 4.59 \text{ мкм.}$$

2. Число штрихів на 1 см  
 знайдемо з формули

$$n = \frac{1}{d} = 2.02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}.$$

3. Для визначення числа максимумів, обчислимо спочатку  
 максимальне значення  $k_{\max}$ , виходячи з того, що максимальний кут  
 відхилення променів ґраткою не може перевищувати  $90^\circ$ , тому

$$k_{\max} = \frac{d \sin 90^\circ}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = 9.9.$$

Число  $k$  повинно бути цілим, тому  $k_{\max} = 9$ . Загальне число  
 максимумів, враховуючи центральний нульовий максимум

$$N = 2k_{\max} + 1 = 9.$$

Оскільки зліва і справа від центрального першого буде  
 спостерігатися по однаковому числу максимумів, тобто всього  $2k_{\max}$ .

4. Визначимо максимальний кут відхилення променів, що  
 відповідають останньому дифракційному максимуму

$$\sin \varphi_{\max} = k_{\max} \cdot \frac{\lambda}{d}.$$

$$\text{Звідси } \varphi_{\max} = \arcsin \left( k_{\max} \cdot \frac{\lambda}{d} \right) = 65.4^\circ.$$

Відповідь :  $d = 4.95 \text{ мкм}$  ,  $n = 2.02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$  ,  $k_{\max} = 9$  ,  
 $\varphi_{\max} = 65.4^\circ$ .

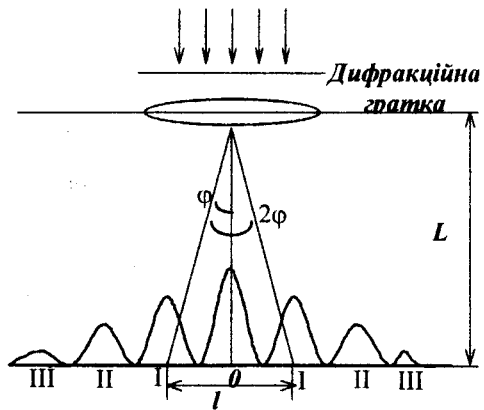


Рисунок 24

## Задачі для самостійного розв'язування

**Задача 1.** Чи може червоне світло викликати люмінесценцію?

**Задача 2.** Знайти силу дифракційної решітки, якщо на решітці розміром 2.5 см нанесено 12500 штрихів.

**Відповідь:**  $d = 2 \text{ мкм}$ .

**Задача 3.** Дифракційна решітка має 120 штрихів на 1 мм. Знайти довжину хвилі монохроматичного світла, що падає на решітку, якщо кут між спектрами першого порядку дорівнює  $8^\circ$ .

**Відповідь:**  $580 \text{ нм}$ .

**Задача 4.** Яка ширина спектра першого порядку (довжина хвиль від 400 до 760 нм), отриманого на екрані, відстань від якого до дифракційної решітки з періодом 0.01 мм дорівнює 3 м?

**Відповідь:**  $11 \text{ см}$ .

**Задача 5.** Чим відрізняється дифракційний спектр від дисперсійного (одержаного за допомогою призми)?

**Задача 6.** На плоску дифракційну решітку нормально падає пучок світла. Під кутом  $20^\circ$  видно червону (669 нм) лінію спектра. Знайти період решітки, якщо під цим самим кутом видно і синю (446 нм) лінію в спектрі більш високого порядку. Найбільший порядок спектра, під яким видно червону лінію, дорівнює 5.

**Відповідь:**  $3.9 \text{ мкм}$ .

**Задача 7.** Біле світло, що падає нормально на мильну плівку ( $n=1.33$ ) і відбивається від неї, дає інтерференційний максимум для світла з довжиною хвилі  $\lambda_1=600 \text{ нм}$  і найближчий до нього мінімум для світла з довжиною хвилі  $\lambda_2=450 \text{ нм}$ . Яка товщина плівки  $d$ , якщо її вважати сталою?

Вказівка: Інтерференційні максимуми для відбитого світла спостерігаються при різниці ходу відбитих від поверхонь плівки променів  $(2m+1)\lambda/2$ , мінімуми –  $m\lambda$ , де  $m$  – ціле число.

**Відповідь:**  $d = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4n(\lambda_1 - \lambda_2)} = 338 \text{ нм}$ .

**Задача 8.** Різниця ходу когерентних хвиль від двох джерел світла дорівнює  $0.4\lambda$ . Знайти різницю фаз цих хвиль.

**Відповідь:**  $0.8\pi$ .

**Задача 9.** Визначити період решітки, яка може аналізувати інфрачервоне випромінювання з довжиною хвиль до  $\lambda=0.02 \text{ см}$ . Випромінювання падає нормально.

**Відповідь:**  $d \geq \lambda$ ,  $d \geq 0.02$  см.

**Задача 10.** Відстань між когерентними джерелами світла ( $\lambda=640$  нм) 0.9 мм. Відстань від джерел до екрана 3.5 м. Знайти кількість світлих смуг на 1 см довжини.

**Відповідь:** 4.

**Задача 11.** Для визначення довжини хвилі застосували дифракційну решітку з періодом  $d=0.01$  мм. Перше дифракційне зображення джерела світла на екрані дістали на відстані  $h=11.8$  см від центрального зображення і на відстані  $l=2$  м від решітки. Знайти довжину світлової хвилі.

**Відповідь:**  $\lambda = \frac{nd}{l} = 0.59$  мкм.

**Задача 12.** На дифракційну решітку, що має період  $d=4$  мкм, нормально падає монохроматична хвиля. Оцініть довжину хвилі  $\lambda$ , якщо кут між спектрами другого і третього порядків  $\alpha=2^\circ 30'$ . Кути відхилення вважати малими.

**Відповідь:**  $\lambda = d\alpha = 0.17$  мкм.

**Задача 13.** Визначити кут відхилення променів зеленого світла  $\lambda=0.55$  мкм у спектрі першого порядку, отриманого за допомогою дифракційної решітки, період якої 0.02 мм.

**Відповідь:**  $1.5^\circ$ .

**Задача 14.** Для визначення періоду решітки на неї спрямували світло з довжиною хвилі 0.76 мкм. Який період решітки, якщо на екрані, що міститься на відстані 1 м від неї, відстань між спектрами першого порядку дорівнює 15.2 см?

**Відповідь:** 10 мкм.

**Задача 15.** На дифракційну решітку, що має  $N=500$  штрихів на  $l=1$  мм, падає плоска монохроматична хвиля ( $\lambda=480$  нм). Визначити найбільший порядок спектра  $k$ , який можна спостерігати при нормальному падінні променів на решітку.

**Відповідь:**  $k = \left[ \frac{l}{N\lambda} \right] = 4$ .

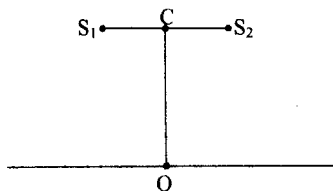
**Задача 16.** Дифракційна решітка має 2000 штрихів на 1 см. На її поверхню нормально падає пучок світла ( $\lambda=694$  нм). Знайти: 1) напрямок максимуму в спектрі першого порядку; 2) максимальний порядок дифракційної картини.

**Відповідь:**  $8^\circ$ , 7.

**Задача 17.** Світло нормально падає на дифракційну решітку. Найменший кут відхилення, при якому суміщаються лінії довжин хвиль 656 нм та 410 нм, дорівнює  $41^\circ$ . Знайти період дифракційної решітки.

**Відповідь:** 5 мкм.

**Задача 18.** Відстань на екрані (див. рисунок) між двома сусідніми максимумами освітленості дорівнює 1.2 мм. Знайти довжину хвилі світла, яке випромінюється двома когерентними джерелами  $S_1$  і  $S_2$ , якщо  $|OC|=2$  м,  $S_1S_2=1$  мм.



**Відповідь:** 600 нм.

**Задача 19.** Різниця ходу інтерферуючих променів білого світла дорівнює 8 мкм. Знайти всі довжини хвиль видимого випромінювання ( $\lambda=400-760$  нм), які будуть: 1) максимально підсилені; 2) максимально послаблені.

**Відповідь:** 1) 667 нм, 500 нм, 400 нм; 2) 571 нм, 444 нм.



## Розділ 15. Квантова оптика

При розв'язуванні задач на тему "Квантова оптика" рекомендується:

- врахувати зв'язок між хвильовими та квантовими характеристиками частинок;
- застосувати закони збереження енергії та імпульсу при розгляданні взаємодії фотонів з іншими частинками (наприклад з електронами);
- враховувати, що на основі положень квантової фізики, радіус орбіти електрона, енергія атома, а також енергія кванта, що поглинається або випромінюється, має тільки дискретні значення;

### Основні поняття

#### Енергія фотона

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

де  $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка,  $\nu$  – частота,  $\lambda$  – довжина хвилі світла,  $c$  – швидкість світла в вакуумі.

#### Імпульс фотона.

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

#### Рівняння Ейнштейна для фотоелектру.

$$h\nu = A + \frac{mV^2}{2},$$

де  $A$  – робота виходу електрона з металу,  $m$  – маса і  $V$  – швидкість електрона.

#### Червона границя фотоелектру

$$\nu_{\min} = \frac{A}{h}, \quad \lambda_{\max} = \frac{hc}{A}.$$

### Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** Обчислити енергію фотона, якщо відомо, що в середовищі з показником заломлення  $n = \frac{4}{3}$  його довжина хвилі  $5.89 \cdot 10^7$  м.

$$n = \frac{4}{3}$$

$$\lambda = 5,89 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$E = ?$$

### Розв'язування

Енергія фотона обчислюється за формулою

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0},$$

де  $\nu$  - частота світла,  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$  - довжина хвилі у вакуумі, дорівнює

$\lambda_0 = n\lambda$ ,  $\lambda$  - довжина хвилі в середовищі, тому

$$E = \frac{hc}{n\lambda} = 2,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Відповідь:  $E = 2,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$

**Задача 2.** Яку довжину хвилі повинен мати  $\gamma$  - квант, щоб його енергія досягла одного джоуля? У скільки разів його маса перевищуватиме масу спокою протона?

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$E_\gamma = 1 \text{ Дж}$$

$$\lambda = ? \quad \frac{m_\gamma}{m_p} = ?$$

### Розв'язування

З формули Планка знаходимо довжину хвилі такого кванта:

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = 1,98 \cdot 10^{-25} \text{ м.}$$

Спираючись на формулу Ейнштейна  $E = mc^2$ , обчислимо масу такого фотона і знайдемо відношення до маси такого протона

$$\frac{m_\gamma}{m_p} = \frac{E_\gamma}{c^2} \cdot \frac{1}{m_p} = 6,7 \cdot 10^9.$$

Відповідь:  $\lambda = 1,98 \cdot 10^{-25} \text{ м,}$   $\frac{m_\gamma}{m_p} = 6,7 \cdot 10^9.$

**Задача 3.** ККД 100-ватної лампочки розжарення у видимій області близький до 3%. Зробіть оцінку кількості фотонів видимого світла з середньою довжиною хвилі 500 нм, які вона випромінює протягом секунди.

$$\eta = 3\%$$

$$P = 100 \text{ Вт}$$

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$t = 1 \text{ с}$$

$$N = ?$$

Розв'язування.

Енергія одного фотона  $E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ . Кількість фотонів з урахуванням ККД становить

$$N = \frac{\eta Pt}{E_f} = \frac{\lambda \eta P}{hc} = 7.5 \cdot 10^{18} \text{ фотонів / с.}$$

Відповідь:  $N = 7.5 \cdot 10^{18} \text{ фотонів/с.}$

**Задача 4.** Найбільша довжина світлової хвилі, при якій може мати місце фотоелектрний ефект для вольфраму, дорівнює  $2.75 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Знайти роботу виходу електронів з вольфраму; найбільшу швидкість електронів, що вириваються з вольфраму світлом з довжиною хвилі  $1.8 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , найбільшу енергію цих електронів.

$$\lambda_{\max} = 2.75 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$\lambda = 1.8 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$A = ? \quad V_m = ? \quad W_m = ?$$

Розв'язування

Найбільша довжина хвилі  $\lambda_{\max}$ , при якому може мати місце фотоелектрний ефект для даного

металу, зв'язана з червоною границею фотоелектрного ефекту  $\nu_{\min}$  для цього металу співвідношенням

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_{\max}}$$

Робота виходу електронів з металу  $A = h\nu_{\min}$ , або

$$A = \frac{hc}{\lambda_{\max}} = 7.2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

За формулою Ейнштейна для фотоелектрного ефекту

$$\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mV_{\max}^2}{2};$$

враховуючи, що  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , одержимо

$$\frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mV_{\max}^2}{2};$$

$$\text{звідси } V_{\max} = \frac{2}{m} \left( \frac{hc}{\lambda} - A \right) = 9.1 \cdot 10^5 \text{ м / с.}$$

Знаючи найбільшу швидкість електронів, що вилетіли, знайдемо найбільшу кінетичну енергію, що їм відповідає

$$W_m = \frac{mV^2}{2} = 3.8 \cdot 10^{19} \text{ Дж.}$$

Відповідь:  $A = 7.2 \cdot 10^{19} \text{ Дж}; U_{\max} = 9.1 \cdot 10^5 \text{ м/с};$

$$W_{\max} = 3.8 \cdot 10^{19} \text{ Дж.}$$

**Задача 5.** Кульку з цинку радіусом  $R = 5 \text{ см}$  опромінюють хвилями з  $\lambda = 4 \text{ нм}$ . До якого максимального потенціалу зарядиться кулька, якщо робота виходу з цинку  $A_0 = 4 \text{ еВ}$ ? Обчислити напруженість поля біля її поверхні і кількість електронів, які покинули її.

$$R = 5 \text{ см}$$

$$\lambda = 4 \text{ нм}$$

$$A_0 = 4 \text{ еВ}$$

$$q - ? \quad E - ? \quad n - ?$$

### Розв'язування

Потенціал поверхні кульки знаходимо з умови гальмування тих електронів, що мають максимальну кінетичну енергію після поглинання фотонів:

$$eU = E_k \rightarrow eU = hc\lambda^{-1} - A_0 \rightarrow U = e^{-1}(hc\lambda^{-1} - A_0) = 308 \text{ В.}$$

З формул потенціалу  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$  і напруженості

$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2}$ , обчислюємо заряд і напруженість:

$$q = 4\pi\epsilon_0 R U = 1.7 \cdot 10^9 \text{ Кл}; E = \frac{U}{R} = 6.16 \text{ кВ / м},$$

звідси число електронів дорівнює

$$n = \frac{q}{e} = 1.06 \cdot 10^{10}.$$

Відповідь:  $q = 1.7 \cdot 10^9 \text{ кВ/м}; n = 1.06 \cdot 10^{10}.$

## Задачі для самостійного розв'язування

**Задача 1.** Яка енергія фотонів, що відповідають найдовшим ( $\lambda=0.76$  мкм) і найкоротшим ( $\lambda=0.4$  мкм) хвилям видимої частини спектра? Стала Планка  $h=6.62\cdot 10^{-34}$  Джс.

**Відповідь:**  $2.6\cdot 10^{-19}$  Дж,  $5\cdot 10^{-19}$  Дж.

**Задача 2.** До якого виду випромінювання належать промені, енергія фотонів яких дорівнює  $2\cdot 10^{-17}$ ,  $4\cdot 10^{-19}$ ,  $3\cdot 10^{-23}$  Дж?

**Відповідь:** рентгенівські промені, видиме світло, радіохвилі.

**Задача 3.** Знайти масу та імпульс фотонів для інфрачервоних ( $\nu=10^{12}$  Гц) і рентгенівських ( $\nu=10^{18}$  Гц) променів.

**Відповідь:**  $7.3\cdot 10^{-39}$  кг;  $2.2\cdot 10^{-30}$  кг·м/с;  $7.3\cdot 10^{-33}$  кг;  
 $2.2\cdot 10^{-24}$  кг·м/с.

**Задача 4.** Око людини, яка довгий час перебуває в темряві, сприймає світло з довжиною хвилі 0.5 мкм при потужності  $2.1\cdot 10^{-17}$  Вт. Скільки фотонів падає при цьому на сітківку ока за 1 с?

**Відповідь:** 53.

**Задача 5.** Знайти червону межу фотоелектру для калію. Робота виходу дорівнює 2 еВ.

**Відповідь:** 0.62 мкм.

**Задача 6.** Побудувати графік залежності кінетичної енергії фотоелектронів від частоти світла. Як за допомогою цього графіка знайти сталу Планка?

**Задача 7.** Яку максимальну швидкість можуть набути вирвані з калію електрони при опроміненні його фіолетовим світлом з довжиною хвилі 0.42 мкм? Маса електрона  $m_e=9.11\cdot 10^{-31}$  кг. Робота виходу дорівнює 2 еВ.

**Відповідь:** 580 км/с.

**Задача 8.** Під час спостереження фотоелектру з поверхні металу (робота виходу 4.3 еВ) затримуючий потенціал дорівнює 1.2 В. Знайти частоту падаючого світла.

**Відповідь:**  $1.33\cdot 10^{15}$  Гц.

**Задача 9.** Яку максимальну кількість електронів може втратити металева дробинка радіусом 1 мм при опроміненні її у вакуумі світлом з довжиною хвилі 200 нм? Червона межа фотоелектру для дробинки 280 нм.

**Відповідь:**  $1.2\cdot 10^6$ .

**Задача 10.** Знайти довжину хвилі електромагнітного випромінення, кванти якого мають таку саму енергію, як і електрон, який пройшов різницю потенціалів 4.1 В.

**Відповідь:** 0.3 мкм.

**Задача 11.** Чи спостерігатиметься фотоефект з поверхні цинку під дією випромінювання з довжиною хвилі 0.45 мкм? Робота виходу для цинку дорівнює  $5.6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

**Відповідь:** не спостерігатиметься.

**Задача 12.** Який імпульс фотона, енергія якого дорівнює  $6 \cdot 10^{-19}$  Дж?

**Відповідь:**  $2 \cdot 10^{-27}$  кгм/с.

**Задача 13.** Рентгенівська трубка, що працює під напругою 50 кВ, випромінює  $5 \cdot 10^{13}$  фотонів за 1 с. Сила струму, що йде через трубку, дорівнює 2 мА. Вважаючи, що середня довжина хвилі рентгенівського випромінювання дорівнює 0.1 нм, знайти ККД трубки, тобто визначити, скільки відсотків склалає потужність рентгенівського випромінювання від потужності струму.

**Відповідь:** 0.1%.

## Розділ 16. Елементи теорії відносності

При розв'язуванні задач на тему "Елементи теорії відносності" не можна бездумно замінювати швидкість світла наближеним значенням  $300000 \text{ км/с}$ , адже кожен кілометр на секунду в наближенні до межі швидкості світла має важливе значення. Слід використовувати точне значення швидкості світла з довідника, або обчислювати шукану швидкість світла як частку  $c$ , що зробити легше.

### Основні поняття

#### Імпульс релятивістської частинки

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

де  $m_0$  – маса спокою частинки,  $\vec{V}$  – швидкість частинки,  $\beta = \frac{V}{c}$ ,

$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – швидкість світла в вакуумі.

#### Релятивістська маса частинки

$$m = \frac{m_0}{1 - \beta^2}$$

#### Енергія релятивістської частинки (повна енергія)

$$E = \frac{E_0}{1 - \beta^2},$$

де  $E_0 = m_0 c^2$  – енергія спокою,  $T = E - E_0$  – кінетична енергія частинки.

### Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** Визначити релятивістський імпульс  $p$  і кінетичну енергію  $T$  електрона, що рухається зі швидкістю  $V = 0.9c$  (де  $c$  – швидкість світла у вакуумі).

$$V = 0.9c$$

$$p = ? \quad T = ?$$

#### Розв'язування.

Релятивістський імпульс  $p = \frac{m_0 V}{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$ , враховуючи,

що  $\frac{V}{c} = \beta$ ,

$$p = m_0 c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{0.9 m_0 c}{\sqrt{1-0.9^2}} = 5.6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

Кінетична енергія частинки  $T = E - E_0$ , де  $E$  – повна енергія,  $E_0$  – енергія спокою частинки.

$$E = mc^2, E_0 = m_0 c^2 \text{ і } m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ тому } T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2, \text{ або}$$

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

Враховуючи, що  $m_0 c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ , одержимо  $T = 0.66 \text{ MeV} = 1.06 \cdot 10^{13} \text{ Дж}$ .

Відповідь:  $p = 5.6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$ ;  $T = 1.06 \cdot 10^{13} \text{ Дж}$ .

**Задача 2.** Якою має бути швидкість частинки, щоб її кінетична енергія зрівнялась з енергією спокою цієї частинки? Яку різницю потенціалів повинен подолати електрон, щоб для нього була виконана ця умова?

$$E_0 = E_k$$

$$V = ? \quad U = ?$$

Розв'язування.

Енергія частинки виражається за формулою

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

а її енергія спокою дорівнює  $E_0 = m_0 c^2$ , різниця обох енергій являє собою кінетичну енергію  $E_k = E - E_0$ . З умови задачі  $E_0 = E_k$ , тому

$$E = 2E_0 = 2m_0 c^2 \rightarrow \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = 2m_0 c^2 \rightarrow V = \frac{3c}{2} = 0.866 c$$



При прискоренні електрона виконується закон збереження енергії, тому  $E_k = m_0 c^2 = eU \rightarrow U = \frac{m_0 c^2}{e} = 0.511 \text{ МВ}$ .

Відповідь:  $V = 0.866 \text{ м/с}$ ;  $U = 0.511 \text{ МВ}$ .

**Задача 3.** Яку роботу необхідно виконати для збільшення швидкості електрона від  $0.6 \text{ с}$  до  $0.8 \text{ с}$ ? Визначити відношення цієї роботи до значення роботи відповідного прискорення, обчисленого за класичною формулою  $\frac{mV^2}{2}$ .

$V_1 = 0,6c$		$A - ?$	$A$	$- ?$
$V_2 = 0,8c$		$A_{\text{кл}}$		

Розв'язування

На швидкості  $V_1 = 0.6c$  енергія частинки визначається за формулою

$$E_1 = m_0 c^2 \left( 1 - \frac{V_1^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Аналогічною буде і формула для обчислення енергії при більшій швидкості. Необхідна робота визначається зміною енергії, отже

$$A = E_2 - E_1 \rightarrow A = m_0 c^2 \left[ \left( 1 - \frac{V_1^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left( 1 - \frac{V_2^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right];$$

$E_0 = m_0 c^2 = 0.511 \text{ МеВ}$ , тому  $A = 213 \text{ кеВ}$ .

Обчислення за класичною формулою дають

$$\begin{aligned} A_{\text{кл}} &= \frac{m_0 V_2^2}{2} - \frac{m_0 V_1^2}{2} = \frac{m_0}{2} \left[ (0.8c)^2 - (0.6c)^2 \right] = \\ &= 0.5 m_0 c^2 (0.64 - 0.36) = 71.54 \text{ кеВ}. \end{aligned}$$

Відношення обох робіт  $\frac{A}{A_{\text{кл}}} = 2.98$ .

Відповідь:  $A = 213 \text{ кеВ}$ ;  $A/A_{\text{кл}} = 2.98$ .

## Задачі для самостійного розв'язування

**Задача 1.** При якій швидкості руху релятивістське скорочення тіла, що рухається, складає 25%?

**Відповідь:** 200 Мм/с.

**Задача 2.** Скільки часу для жителів Землі і космонавтів забере подорож до зорі і назад на ракеті, що летить зі швидкістю 0.99 с? Відстань до зорі 40 світлових років.

**Відповідь:** 80.8 років, 11.4 років.

**Задача 3.** Дві нейтральні частинки, відстань між якими  $l=10$  м, летять назустріч одна одній зі швидкістю  $V=0.6$  с. Через який час вони зіткнуться?

**Відповідь:**  $t = \frac{l}{2V} = 28$  нс.

**Задача 4.** Яка маса (в атомних одиницях маси) протона, що летить зі швидкістю  $2.4 \cdot 10^8$  м/с? Маса спокою протона вважати рівною 1 а.о.м.

**Відповідь:** 1.7 а.о.м.

**Задача 5.** Знайти імпульс електрона, який рухається зі швидкістю  $V=0.8$  с. Маса електрона  $m_0=9.11 \cdot 10^{-31}$  кг.

**Відповідь:**  $p = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{4}{3} m_0 c = 3.6 \cdot 10^{-22}$  кг · м/с.

**Задача 6.** На скільки зросте маса 1 кг льоду при плавленні? Питома теплота плавлення льоду 330 кДж/кг.

**Відповідь:**  $3.7 \cdot 10^{-12}$  кг.

**Задача 7.** У скільки разів маса протона, що має кінетичну енергію  $10^{10}$  МеВ, більша за масу спокою протона? Енергія, що відповідає масі спокою протона, дорівнює 938.3 МеВ.

**Відповідь:** у  $10^7$  разів.

**Задача 8.** Яка прискорююча різниця потенціалів, якщо електрон набув швидкості 0.9 с? Енергія, що відповідає масі спокою електрона, дорівнює 0.511 МеВ.

**Відповідь:** 660кВ.

**Задача 9.** Яка швидкість електрона, якщо його маса перевищує масу спокою в 40000 разів? Швидкість світла у вакуумі  $c=299792458$  м/с.

**Відповідь:** на 10 см/с менша, ніж швидкість світла.

**Задача 10.** Електрон пройшов прискорюючу різницю потенціалів 500 кВ. Знайти його імпульс. Маса електрона  $9.11 \cdot 10^{-31}$  кг, його заряд  $1.60 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**Відповідь:**  $4.7 \cdot 10^{-22}$  кг·м/с.

**Задача 11.** Знайти кінетичну енергію електрона (в електрон-вольтах), що рухається зі швидкістю 0.6 с. Енергія, що відповідає масі спокою електрона, дорівнює 0.511 MeV.

**Відповідь:** 0.13 MeV.

**Задача 12.** У скільки разів збільшується тривалість життя нестабільної частинки в лабораторній системі відліку, якщо вона рухається зі швидкістю 0.99 с?

**Відповідь:** у 7.1 рази.

**Задача 13.** Частинки рухаються назустріч одна одній із швидкістю 0.9 с. Знайти їх відносну швидкість.

**Відповідь:** 0.994 с.

**Задача 14.** Маса поїзда, що стоїть, 2000 т. Наскільки зросте його маса при русі зі швидкістю 15 м/с?

**Відповідь:**  $2.5 \cdot 10^{-9}$  кг.

**Задача 15.** Під час руху тіла з деякою швидкістю його розмір у напрямку руху зменшився в 2 рази. У скільки разів і як змінилась його маса?

**Відповідь:** збільшилась у 2 рази.

**Задача 16.** У скільки разів зросла маса електрона внаслідок проходження ним різниці потенціалів 1МВ? Маса електрона  $9.11 \cdot 10^{-31}$  кг, його заряд  $1.60 \cdot 10^{-19}$  Кл.

**Відповідь:** у 3 рази.

**Задача 17.** Швидкість електрона 0.9 с. Знайти його імпульс і кінетичну енергію.

**Відповідь:**  $5.6 \cdot 10^{11}$  кг·м/с; 0.66 MeV.

## Розділ 17. Будова атома і атомного ядра

При розв'язуванні задач на тему "Будова атома і атомного ядра" слід виробити певні навички при обчисленнях і оперуванні великими і дуже малими параметрами.

Задачі з ядерної фізики поділяються на дві групи: перша використовує формулу обчислення енергії реакцій через дефект мас, друга оперує переважно законами збереження маси, енергії, заряду, імпульсу. Необхідним є знання понять атомної одиниці маси, її енергетичного еквівалента, вміння використати таблиць мас ядер тощо.

### Основні поняття

Енергія зв'язку атомного ядра.

$$E_{\text{зв}} = \Delta m c^2,$$

де  $\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - M_{\text{я}} = ZM_{\text{H}}^1 + (A-Z)m_n - M_{\text{А}}$  - дефект маси,  $c$  - швидкість світла в вакуумі,  $A$  - масове число (число протонів і нейтронів в ядрі),  $Z$  - зарядове число (число протонів в ядрі),  $M_{\text{я}}$  - маса ядра,  $M_{\text{H}}$  - маса атома водню,  $m_p$  - маса протона,  $m_n$  - маса нейтрона,  $M_{\text{А}}$  - маса атома.

Закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = N_0 e^{-\lambda t},$$

де  $N_0$  - число радіоактивних ядер в початковий момент часу ( $t = 0$ )  
 $N$  - число радіоактивних ядер в момент часу  $t$ ,  $T$  - період напіврозпаду,  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$  - стала радіоактивного розпаду.

### Приклади розв'язування задач

**Задача 1.** При розпаді електронів в атомах водню з четвертої стаціонарної орбіти на другу випромінюються фотони з енергією  $0.04 \cdot 10^{19}$  Дж. Визначити довжину цієї хвилі в спектрі.

$$E = 0.04 \cdot 10^{19} \text{ Дж}$$

$\lambda - ?$

### Розв'язування

Енергія фотона  $h\nu = E_4 - E_2 = E$ ;  $E = h\nu$ , при

$$\nu = \frac{c}{\lambda},$$

одержимо  $E = \frac{hc}{\lambda}$ , звідси  $\lambda = \frac{hc}{E} = 0.5 \text{ мкм}$ .

Відповідь:  $\lambda = 0.5 \text{ мкм}$ .

**Задача 2.** Знайти в мегаелектронвольтах енергію зв'язку ядра ізотопу літію  ${}^7_3\text{Li}$ .

${}^7_3\text{Li}$

$$m_{\text{Li}} = 11.6475 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$m_p = 11.6724 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

$$m_n = 11.6748 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

### Розв'язування

Енергія зв'язку ядра

$$\Delta E = \Delta m c^2. \quad (1)$$

Оскільки  $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}}$ ,

рівність (1) можна привести до вигляду

$$\Delta E = (Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}})c^2.$$

Підставивши  $A = 7$  і  $Z = 3$  в вираз (1), одержимо:

$$\Delta E = (3m_p + 4m_n - M_{\text{я}})c^2 = 6.2 \cdot 10^{12} \text{ Дж} = 39 \text{ МеВ}$$

Тут враховується, що  $1 \text{ МеВ} = 1.6 \cdot 10^{13} \text{ Дж}$ .

Відповідь:  $\Delta E = 39 \text{ МеВ}$ .

**Задача 3.** Яка кількість урану-235 витрачається за добу на АЕС потужністю  $5 \text{ Мвт}$  з ККД  $17\%$ ? При кожному поділі ядра виділяється енергія  $200 \text{ МеВ}$ .

$$\mu = 235 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$P = 5 \text{ МВт} = 5 \cdot 10^6 \text{ Вт}$$

$$\eta = 17\%$$

$m - ?$

### Розв'язування

Визначимо кількість ядер в одиниці маси урану:

$$N = \frac{m N_A}{\mu}$$

Для роботи станції протягом часу  $t$  необхідна енергія  $E = \frac{Pt}{\eta}$ , де

$P$  – її потужність,  $\eta$  – ККД.

Прирівнюючи виділену ураном енергію  $E = N \cdot \Delta E = \Delta E \cdot \frac{m}{\mu} N_A$

до необхідної  $E$ , обчислюємо масу урану

$$\Delta E \cdot m \cdot \frac{N_A}{\mu} = \frac{Pt}{\eta} \rightarrow m = \frac{Pt \cdot \mu}{\eta N_A \Delta E} = 31 \text{ г.}$$

Відповідь :  $m = 31 \text{ г.}$

**Задача 4.** Скільки енергії виділяється при об'єднанні протона і нейтрона? Яка довжина хвилі утворення фотона, якщо вся виділена енергія дістається йому?

$$m_p = 1.00728 \text{ а.о.м}$$

$$m_n = 1.00866 \text{ а.о.м}$$

$$m_H = 2.01410 \text{ а.о.м}$$

$$\Delta E - ? \lambda - ?$$

Розв'язування

Дефект мас для утворення ядра з двох частинок :

$$\Delta m = m_p + m_n - M_H = 0.00184 \text{ а.о.м.}$$

Враховуючи, що атомна одиниця маси відповідає енергії  $931.1 \text{ MeV}$ , обчислимо виділену енергію (енергію фотона)

$$\Delta E = E_\nu = \Delta m c^2 = 1.71 \text{ MeV.}$$

За формулою  $\lambda = \frac{hc}{E_\nu}$  знаходимо довжину хвилі фотона

$$\lambda = 7.2 \cdot 10^{-13} \text{ м} = 0.00072 \text{ нм}$$

Відповідь:  $\Delta E = 1.71 \text{ MeV}$ ;  $\lambda = 0.00072 \text{ нм.}$

**Задача 5.** Ядро  $^{226}_{88} \text{ Ra}$  викидає  $\alpha$ -частинку з енергією  $4.78 \text{ MeV}$  і  $\gamma$ -квант малої енергії. Нехтуючи імпульсом останнього, обчислити швидкість ядра, якщо спочатку ядро було нерухоме.

$$E_\alpha = 4.78 \text{ MeV}$$

$$m_\alpha$$

$$M$$

$$V_\alpha - ?$$

Розв'язування

Оскільки енергія  $\alpha$ -частинки мала у порівнянні з її енергією спокою  $E_0 = m_\alpha c^2$ , то для обчислення її імпульсу  $p_\alpha$  можна використати формули класичної механіки:

$$E_\alpha = \frac{m_\alpha V_\alpha^2}{2} = \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} \rightarrow p_\alpha = \sqrt{2m_\alpha E_\alpha}.$$

Закон збереження імпульсу дозволяє обчислити швидкість ядра

$$(M - m_\alpha) V_\alpha = p_\alpha \rightarrow V_\alpha = \frac{\sqrt{2m_\alpha E_\alpha}}{M - m_\alpha} = 267 \text{ км / с.}$$

Відповідь:  $V_\alpha = 267 \text{ км/с.}$

**Задача 6.** Активність радіоактивного елемента зменшилась в 4 рази за 8 діб. Знайти період напіврозпаду.

$$N_0 = 4N$$

$$t = 8 \text{ діб}$$

$$T = ?$$

Розв'язування.

За законом радіоактивного розпаду число атомів, які не розпалися дорівнює:

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

При заданому значенні  $N_0 = 4N$  одержуємо:  $N = 4N \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ , звідси знаходимо  $T$ :

$$\frac{1}{4} = 2^{-\frac{t}{T}}; 2^{-2} = 2^{-\frac{t}{T}}; -2 = -\frac{t}{T}; T = \frac{t}{2} = 4 \text{ доби.}$$

Відповідь:  $T = 4 \text{ доби.}$

**Задача 7.** Радіоактивний натрій  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  розпадається з періодом напіврозпаду 14.8 год. Обчислити кількість атомів, що розпалися в 1 мг даного радіоактивного препарату за 10 год.

$$\mu = 24 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$T = 14.8 \text{ год}$$

$$t = 10 \text{ год}$$

$$m = 1 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$$

$$\Delta N = ?$$

Розв'язування.

Число атомів які розпалися за час  $t$

$$\Delta N = N_0 - N_1 \quad (1)$$

де  $N_0$  – число атомів, які не розпалися в початковий момент часу в 1 мг  ${}_{11}^{24}\text{Na}$ ,  $N_1$  –

число атомів, які не розпалися через час  $t$ .

Оскільки  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ , формулу (1) можна привести до вигляду

$$\Delta N = N - N_1 = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \quad (2)$$

Враховуючи, що  $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ , перетворимо вираз (2):

$$\Delta N = N_0 \left( 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right) = N_0 \left[ 1 - \left( e^{\ln 2} \right)^{-\frac{t}{T}} \right] = N_0 \left( 1 - 2^{-\frac{t}{T}} \right). \quad (3)$$

Оскільки в молі  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  знаходиться число атомів, що дорівнює сталій Авогадро  $N_A$ , то в даній масі  $m$  знаходиться число  $N_0$  атомів:

$$N_0 = \frac{m}{\mu} \cdot N_A. \quad (4)$$

Підставивши формулу (4) в (3) одержимо

$$\Delta N = \frac{m}{\mu} N_A \left( 1 - 2^{-\frac{t}{T}} \right) = 9.3 \cdot 10^{18}.$$

Відповідь:  $\Delta N = 9.3 \cdot 10^{18}$ .

### Задачі для самостійного розв'язування

**Задача 1.** Скільки відсотків радіоактивних ядер кобальту розпадеться за 30 днів? Період напіврозпаду дорівнює 71 день.

**Відповідь:** 25%.

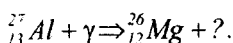
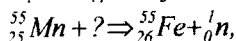
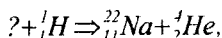
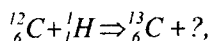
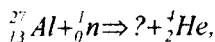
**Задача 2.** У реакції взаємодії  ${}^{27}_{13}\text{Al}$  з  ${}^{12}_6\text{C}$  утворюється  $\alpha$ -частинка і ядро деякого ізотопу. Знайти кількість нейтронів у цьому ізотопі.

**Відповідь:** 17.

**Задача 3.** Написати ядерну реакцію, що йде при бомбардуванні бору ( ${}^{11}_5\text{B}$ )  $\alpha$ -частинками і при якій вибивається нейтрон.

**Відповідь:**  ${}^4_2\text{He} + {}^{11}_5\text{B} \Rightarrow {}^{14}_7\text{N} + {}^1_0\text{n}$ .

**Задача 4.** Написати пропущені позначення в таких ядерних реакціях:



**Відповідь:**  ${}^{24}_{11}\text{Na}$ ,  ${}^0_{+1}\text{e}$ ,  ${}^{25}_{12}\text{Mg}$ ,  ${}^1_1\text{H}$ ,  ${}^1_1\text{H}$ .

**Задача 5.** У результаті серії  $\alpha$ - і  $\beta$ -розпадів ядро урану  ${}^{235}_{92}\text{U}$  перетворюється на ядро свинцю  ${}^{207}_{82}\text{Pb}$ . Скільки  $\alpha$ - і  $\beta$ -розпадів було у цьому ланцюжку перетворень?

**Відповідь:** 7  $\alpha$ -розпадів, 4  $\beta$ -розпадів.

**Задача 6.** Термоядерна реакція  ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \Rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$  йде з виділенням енергії. Яка частина цієї енергії припадає на нейтрон і яка на ядро гелію? Кінетичними енергіями ядер дейтерію і тритію знехтувати.

**Відповідь:** 4/5, 1/5.



**Задача 7.** В результаті ядерної реакції  ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \Rightarrow {}^4_2\text{He} + \gamma$  утворюється квант електромагнітного випромінювання енергією  $E=19.7 \text{ MeV}$  і  $\alpha$ -частинка (ядро атома гелію), швидкість якої мала порівняно зі швидкістю світла. Нехтуючи кінетичною енергією ядер дейтерію, знайти швидкість  $\alpha$ -частинки, що утворилась. Енергія спокою  $\alpha$ -частинки дорівнює  $E_0=373 \text{ MeV}$ .

**Відповідь:**  $V = E \cdot c / E_0 = 1.6 \cdot 10^3 \text{ км/с}$ .

**Задача 8.** Знайти енергію зв'язку алюмінію  ${}^{27}_{13}\text{Al}$ . Маса нейтрального атома  ${}^{27}_{13}\text{Al}$  дорівнює  $26.98146 \text{ а.о.м.}$ , маса протона –  $1.00708 \text{ а.о.м.}$ , електрона –  $0.00055 \text{ а.о.м.}$ , нейтрона –  $1.00866 \text{ а.о.м.}$   $1 \text{ а.о.м.}$  відповідає енергії  $931.5 \text{ MeV}$ .

**Відповідь:**  $220 \text{ MeV}$ .

**Задача 9.** В ядро літію  ${}^7_3\text{Li}$  влучає протон і воно розпадається на дві  $\alpha$ -частинки. Знайти суму кінетичних енергій  $\alpha$ -частинок. Кінетичною енергією протона знехтувати. Маса нейтрального атома  ${}^7_3\text{Li}$  дорівнює  $7.01601 \text{ а.о.м.}$ , нейтрального атома  ${}^4_2\text{He}$   $4.00260 \text{ а.о.м.}$   $1 \text{ а.о.м.}$  відповідає енергії  $931.5 \text{ MeV}$ .

**Відповідь:**  $17 \text{ MeV}$ .

**Задача 10.** Знайти енергію зв'язку на  $1$  нуклон для ядра атома  ${}^{23}_{11}\text{Na}$ . Маса нейтрального атома  ${}^{23}_{11}\text{Na}$  дорівнює  $22.98977 \text{ а.о.м.}$ , маса нейтрального атома водню  ${}^1_1\text{H}$  –  $1.00783 \text{ а.о.м.}$ , маса нейтрона –  $1.00866 \text{ а.о.м.}$   $1 \text{ а.о.м.}$  відповідає енергії  $931.5 \text{ MeV}$ .

**Відповідь:**  $8.1 \text{ MeV/нуклон}$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Мясников С. П., Осанова Т. Н.. Пособие по физике для подготовительных отделений – 5-е издание переработ., – М. 1981. – 391 с.
2. Корсак К. В.. Фізика. Письмовий екзамен. – К., 1993. – 224 с.
3. Балаш В. А.. Задачи по физике и методы их решения. Пособие для учителя. – М., 1983. – 432 с.
4. Гончаренко С. У. Конкурсні задачі з фізики. -- К., 1980 . – 432 с.
5. Болсун А. И., Галякевич Б. К.. Физика в экзаменационных вопросах и ответах. – М., 1997. – 318 с.
6. Романенко В. І.. Збірник задач з фізики. Самостійні та контрольні роботи для 9-11 класів. – К.: 1998. – 224 с.
7. Гельфгат І. М., Генденштейн Л. Е., Кирик Л. А.. 1001 задача з фізики з відповідями, вказівками, розв'язками, Х.: 1998. 352 с.
8. Римкевич А. П.. Збірник задач з фізики для 9 – 11 класів середньої школи. – Х .: Олант, 1989. – 224 с.

Навчальне видання

Данилюк Т. О., Резнік С. І., Авдєєв С. Г.

**ПОСІБНИК З ФІЗИКИ**  
**для слухачів Інституту довузівської підготовки**  
**(електромагнетизм, коливання й хвилі,**  
**оптика та ядро)**

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор С. А. Малішевська

Підписано до друку *28.08.02р.*  
Формат 29,7x42  $\frac{1}{4}$  Гарнітура Times New Roman  
Друк різнографічний Ум. друк. арк. *6.17*  
Тираж 75 прим.  
Зам. № *2002 - 182*

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького державного технічного університету  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх  
Тел. (0432) 44-01-59