В.Д. Дереч, Н.Ю. Фурдіяк

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет

В.Д.Дереч, Н.Ю.Фурдіяк

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей. Протокол № 2 від 27 вересня 2001 р.

Вінниця ВДТУ 2002

УДК 517.987.1
Д 36

Рецензенти

Ю.А. Бурєнніков, кандидат технічних наук, професор
Б.С. Рогальський, доктор технічних наук, професор
І.О. Рокіцький, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Дереч В.Д., Фурдіяк Н.Ю.
Д 36 **Інтегральне числення. Невизначений інтеграл.** Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 118 с.

В посібнику детально розглядається одне з найважливіших понять вищої математики – поняття невизначеного інтеграла. Методика викладення матеріалу максимально пристосована для самостійної роботи студента. Посібник розроблено у відповідності з планом кафедри ВМ та програми до дисципліни "Вища математика".

УДК 517.987.1

1 Невизначений інтеграл та його властивості

Інтегрування та диференціювання — це за означенням взаємно обернені дії. Розглянемо деяку функцію $\varphi(x)$ таку, що $\varphi'(x) = f(x)$.

Означення 1. Первісною функції $f(x)$ називається функція $\varphi(x)$ така, що $\varphi'(x) = f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ має первісну, то вона має нескінченну множину первісних, причому ці первісні мають таку ***властивість:*** для даної функції $f(x)$ ***будь-які дві її первісні відрізняються на константу***. Доведемо це твердження.

Нехай $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ — первісні для функції $f(x)$. За означенням 1 маємо $\varphi_1'(x) = f(x)$ і $\varphi_2'(x) = f(x)$. Розглянемо функцію $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. Її похідна дорівнює нулю. Дійсно, $[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]' = \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Застосуємо теорему із диференціального числення: якщо похідна функції на деякому проміжку дорівнює нулю, то функція на цьому проміжку дорівнює константі. Із цієї теореми випливає, що $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = const$, тобто $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = C$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) + C$. Властивість доведено.

Із доведеної властивості первісних випливає, що сукупність усіх первісних для даної функції $f(x)$ має вигляд $\varphi(x) + C$, де $\varphi(x)$ — будь-яка первісна, а C — довільна константа.

Означення 2: Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ називається сукупність усіх первісних даної функції.

Невизначений інтеграл позначається $\int f(x)dx$, тобто можна запи -

сати $\int f(x)dx = \varphi(x) + C,\ C \in R$

В останньому записі функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, добуток $f(x)dx$ називається підінтегральним виразом.

Із означень 1 і 2 випливають властивості невизначеного інтеграла.

Властивість 1

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \tag{1}$$

Ця формула випливає безпосередньо із означень 1 і 2. Дійсно, за цими означеннями $\left(\int f(x)dx\right)' = (\varphi(x) + C)' = \varphi'(x) = f(x)$.

Властивість 2

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \tag{2}$$

Ця формула випливає із властивості 1 і із означення диференціала. Мається на увазі, що за означенням диференціала функції диференціал дорівнює добуткові похідної даної функції на приріст аргумента $\Delta x = dx$.

$$dF(x) = F'(x)dx. \tag{2'}$$

Властивість 3

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \tag{3}$$

Формула (3) також випливає із означень 1 і 2. Зміст цих означень можна сформулювати так: інтеграл дорівнює деякій сукупності функцій, якщо похідна від кожної функції із даної сукупності дорівнює функції, що стоїть під знаком інтеграла. Тобто, щоб довести формулу (3) ***треба показати, що похідна від правої частини формули дорівнює підінтегральній функції лівої частини формули.*** Дійсно, $(f(x) + C)' = f'(x)$, що і треба було довести.

Властивість 4

$$\int df(x) = f(x) + C \tag{4}$$

Дійсно, формула (4) випливає із формули (3) із врахуванням (2'), а саме: $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$.

Наслідок

$$\int dx = x + C \tag{4'}$$

Дійсно, нехай у формулі (4) $f(x) = x$, тоді формула (4) приймає вигляд (4').

Властивість 5. Лінійність інтеграла

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx \tag{5}$$

Читач повинний ***зрозуміти і запам'ятати***. Із означень 1 і 2 випливає спосіб доведення формул, пов'язаних з невизначеним інтегралом. А саме, треба показати, що ***похідна від правої частини формули дорівнює підінтегральній функції лівої частини***.

Доведемо таким способом формулу (5).

$$\left[c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx\right]' = c_1\left[\int f_1(x)dx\right]' + c_2\left[\int f_2(x)dx\right]' =$$
$$= \{\textit{за формулою } (1) \textit{ знаходимо похідні}\} = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x),$$ що

і треба було довести.

Властивість 6. Введення під знак диференціала

Нехай $f(x)$ — неперервна функція, а функція $x = z(t)$ має неперервну похідну. Нехай також виконується

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C$$

тоді внаслідок заміни змінної інтегрування x на функцію $z(t)$ формула зберігає свій вигляд, а саме

$$\int f(z(t))dz(t) = \varphi(z(t)) + C \tag{6}$$

Доведення. Покажемо, що похідна від правої частини формули (6) дорівнює підінтегральній функції лівої частини формули. За правилом диференціювання складеної функції

$$[\varphi(z(t))+c]' = \varphi'(z)\cdot z'(t) = f(z)\cdot z'(t) = f[z(t)]\cdot z'(t),$$

тут замінено $\varphi'(z)$ на $f(z)$, тому що за умовою функція φ є первісною функції f, а це означає, що $\varphi'(z) = f(z)$. Тепер покажемо, що підінтегральна функція лівої частини формули (6) також має вигляд $f[z(t)]z'(t)$. Дійсно, ліву частину формули (6) можна перетворити

$$\int f[z(t)]dz(t) = \left\{\begin{matrix} \textit{за означенням} \\ \textit{диференціала} \\ dz(t) = z'(t)dt \end{matrix}\right\} = \int f[z(t)]z'(t)dt.$$

Похідна від правої частини формули (6) і підінтегральна функція лівої частини цієї формули збіглися. Тобто формулу доведено.

2 Таблиця інтегралів

Оскільки дії диференціювання та інтегрування взаємно обернені, то кожна формула таблиці похідних перетворюється на формулу таблиці інтегралів, якщо прочитати її справа наліво.

Запишемо три таблиці. Перша — таблиця похідних. Друга — таблиця інтегралів, дивись таблиці 1 і 2. Формули 1, 3, 4, 5, 7, 9-11, 13, 14, 15 можна отримати безпосередньо із відповідних формул таблиці похідних. А саме інтеграл від функції, яка стоїть в правій частині формули, дорівнює функції, від якої береться похідна у лівій частині формули.

У формулах 2", 6, 8, 16, переходячи від похідної до інтеграла, треба знак мінус перенести в другу частину формули.

У формулах 2' і 4' треба відповідний сталий множник $\left(\frac{1}{2}\ або\ ln\,a\right)$ також перенести із правої частини формули у ліву частину.

У формулі 2 традиційно похідна та інтеграл беруться від функції x^{α}. Формулу 2 таблиці 2 можна довести, взявши похідну від правої частини формули. Ця похідна збігається з підінтегральною функцією лівої частини формули.

Остання формула не діє, коли $\alpha = -1$. Це випадок розглядається окремо у формулі 3.

Формула 3 таблиці 1 діє лише у межах визначення функції ***ln x***, тобто для $x > 0$. А формула 3 таблиці 2 діє для усіх x, що не дорівнюють нулю. Саме з цього приводу логарифм у формулі 3 таблиці 2 має аргументом абсолютну величину x. У такому вигляді формулу (3) буде доведено пізніше.

Формули 9' і 11' є узагальненнями формул 9 і 11, відповідно. Читач може самостійно довести ці формули, взявши похідну від правої частини формули і за допомогою перетворень показавши, що ця похідна збігається з підінтегральною функцією лівої частини формули.

Формули 10, 12, 17, 18 не мають відповідних собі формул у таблиці похідних. Кожну з цих формул буде доведено.

Таблицю 3 одержуємо з таблиці 2 за допомогою властивості 6 інтегралів. Властивість 6 стверджує, що внаслідок заміни змінної інтегрування x на функцію $z(x)$ формули інтегрування не змінюються.

Таблиця 1.	*Таблиця 2.*	*Таблиця 3.*
1. $(c)' = 0$ $c = const$	1. $\int 0dx = C$	1. $\int 0dz = C$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$	2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	2. $\int z^a dz = \frac{z^{a+1}}{a+1} + C$
2'. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	2'. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	2'. $\int \frac{1}{\sqrt{z}} dz = 2\sqrt{z} + C$
2". $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	2". $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	2". $\int \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{z} + C$
3. $(ln\,x)' = \frac{1}{x}$	3. $\int \frac{1}{x} dx = ln\lvert x\rvert + C$	3. $\int \frac{1}{z} dz = ln\lvert z\rvert + C$
4. $(e^x)' = e^x$	4. $\int e^x dx = e^x + C$	4. $\int e^z dz = e^z + C$
4'. $(a^x)' = a^x ln\,a$	4'. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\,a} + C$	4'. $\int a^z dz = \frac{a^z}{ln\,a} + C$
5. $(sin\,x)' = cos\,x$	5. $\int cos\,xdx = sin\,x + C$	5. $\int cos\,zdz = sin\,z + C$
6. $(cos\,x)' = -sin\,x$	6. $\int sin\,xdx = -cos\,x + C$	6. $\int sin\,zdz = -cos\,z + C$
7. $(tg\,x)' = \frac{1}{cos^2 x}$	7. $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tg\,x + C$	7. $\int \frac{1}{cos^2 z} dz = tg\,z + C$
8. $(ctg\,x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$	8. $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -ctg\,x + C$	8. $\int \frac{1}{sin^2 z} dz = -ctg\,z + C$
9. $(arcsin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\,x + C$	9. $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = arcsin\,z + C$
	9'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$	9'. $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = arcsin\frac{z}{a} + C$
	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$	10. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = ln\left\lvert z + \sqrt{z^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
11. $(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + C$	11. $\int \frac{dz}{1+z^2} = arctg\,z + C$

	11'. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$	11'. $\int\frac{dz}{a^2+z^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{z}{a}+C$
	12. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+C$	12. $\int\frac{dz}{a^2-z^2}=\frac{1}{2a}ln\left\|\frac{a+z}{a-z}\right\|+C$
	12'. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\|+C$	12'. $\int\frac{dz}{z^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln\left\|\frac{a-z}{a+z}\right\|+C$
	13. $\int ch\,x dx=sh\,x+C$	13. $\int ch\,z dz=sh\,z+C$
	14. $\int sh\,x dx=ch\,x+C$	14. $\int sh\,z dz=ch\,z+C$
13. $(sh\,x)'=ch\,x$	15. $\int\frac{dx}{ch^2x}=th\,x+C$	15. $\int\frac{dz}{ch^2z}=th\,z+C$
14. $(ch\,x)'=sh\,x$	16. $\int\frac{dx}{sh^2x}=-cth\,x+C$	16. $\int\frac{dz}{sh^2z}=-cth\,z+C$
15. $(th\,x)'=\frac{1}{ch^2x}$	17. $\int\frac{dx}{sin\,x}=ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$	17. $\int\frac{dz}{sin\,z}=ln\left\|tg\frac{z}{2}\right\|+C$
16. $(cth\,x)'=-\frac{1}{sh^2x}$	18. $\int\frac{dx}{cos\,x}=ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$	18. $\int\frac{dz}{cos\,z}=ln\left\|tg\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$

Доведемо формули 3, 10, 12, 17, 18 таблиці 2.

Формула 3

$$\int\frac{1}{x}dx=ln|x|+C.$$

Для $x>0$ маємо $|x|=x$, тоді формула набуває вигляду $\int\frac{1}{x}dx=ln\,x+C$ і випливає безпосередньо із формули $(ln\,x)'=\frac{1}{x}$ таблиці похідних.

Нехай тепер $x<0$, тоді $|x|=-x$. Формула набуває вигляду $\int\frac{1}{x}dx=ln(-x)+C$. Для доведення останньої формули покажемо, що похідна від правої частини дорівнює підінтегральній функції лівої частини формули.

$$\left(ln(-x)+C\right)' = \frac{1}{-x}\cdot(-x)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

Формулу доведено для усіх $x \neq 0$.

Зауваження. Із формули $\int \frac{1}{x}dx = ln|x| + C$ випливає, що похідна $\left(ln|x|\right)' = \left(ln|x| + C\right)' = \frac{1}{x}$ для усіх $x \neq 0$. Замінимо у останній формулі аргумент х на диференційовну функцію $z(x)$. Враховуючи правило диференціювання складеної функції, будемо мати

$$\left[ln|z(x)|\right]' = \frac{1}{z(x)}\cdot z'(x) \qquad (*)$$

Останню формулу використаємо для доведення табличних формул 10, 12, 17, 18.

Формула 10

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Беремо похідну від правої частини формули, враховуючи формулу (*).

$$\left[ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right]' = \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)}\cdot\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\cdot 2x\right) = \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)}\left(\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}+x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Порівняємо отриманий результат з лівою частиною формули. Бачимо, що формулу 10 доведено.

Формула 12

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

$$\left[\frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\right]' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{\frac{a+x}{a-x}} \cdot \left(\frac{a+x}{a-x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{a-x}{a+x} \cdot \frac{1 \cdot (a-x) - (-1) \cdot (a+x)}{(a-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{a-x}{a+x} \cdot \frac{a-x+a+x}{(a-x)^2} = \frac{2a}{2a \cdot (a+x) \cdot (a-x)} = \frac{1}{a^2 - x^2}.$$

Формулу 12 доведено.

Формула 17

$$\int \frac{dx}{sin\, x} = ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\left[ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C\right]' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \left(tg\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{cos\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\,sin\frac{x}{2}\,cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{sin\, x}.$$

Формулу 17 доведено.

Формула 18

$$\int \frac{dx}{cos\, x} = ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Для доведення цієї формули застосуємо властивість 6 інтегралів, введення під знак диференціала. За допомогою формули зведення перейдемо від формули 18 до вже доведеної формули 17.

Дійсно, $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Тоді

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{рівність } dx=d\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \text{ правильна,} \\ \text{тому що } d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' dx=dx\end{matrix}\right\}=$$

$$=\ln\left|tg\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right|+C=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

Тут було застосовано формулу 17 із таблиці 3,

$$\int\frac{dz}{\sin z}=\ln\left|tg\frac{z}{2}\right|+C,$$

де $z=x+\frac{\pi}{2}$.

3 Табличне інтегрування

Обчислення будь-якого нетабличного інтегралу полягає у тому, щоб за допомогою перетворень звести інтеграл до одного або декількох табличних інтегралів. Для цього використовуються властивість 5 (лінійність інтеграла) і різноманітні перетворення, алгебраїчні та тригонометричні. Розглянемо приклади:

Приклад 1

$\int(2\cos x+3\sin x-5)dx=$ {за властивістю 5, лінійність інтеграла, маємо} $=2\int\cos x dx+3\int\sin x dx-5\int dx=$

$=$ {за формулами 5 і 6, табл. 6, та за наслідком властивості 4, $\int dx=x+C$, маємо}

$$=2\sin x+c_1-3\cos x+c_2-5x+c_3=2\sin x-3\cos x-5x+c,$$

де суму констант позначено через c, $c_1+c_2+c_3=c$.

Взагалі, якщо маємо алгебраїчну суму інтегралів, то зручно суму констант позначити як одну константу c. Причому ця константа додасться після того, як обчислено останній інтеграл.

Приклад 2

$$\int\left(x^2-3x^5+\sqrt{x}-\frac{1}{x^3}\right)dx=$$

$$=\int x^2dx-3\int x^5dx+\int\sqrt{x}dx-\int\frac{dx}{x^3}=\begin{Bmatrix}\textit{за формулою 2,}\\ \textit{табл. 2 маємо}\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{x^{2+1}}{2+1}-3\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1}+\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{-3}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^6}{6}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{1}{2x^2}+C=\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{1}{2x^2}+C$$

Приклад 3

$$\int\frac{\sqrt{4+x^2}-3}{4+x^2}dx=\int\frac{\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}dx-3\int\frac{dx}{4+x^2}=$$

$$= \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2} dx - 3\int \frac{dx}{2^2+x^2} =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx - 3 \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2} = ln\left|x + \sqrt{4+x^2}\right| - \frac{3}{2} arctg \frac{x}{2} + C,$$

Тут було використано формули 10 ($a^2 = 4$) і 11' ($a = 2$) таблиці 2.

Приклад 4

$$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{2}{1-x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+1}{1-x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\left(1+x^2\right)dx}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)} + \frac{1}{2} \int \frac{\left(1-x^2\right)dx}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2} arctg\, x + C = \frac{1}{4} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{1}{2} arctg\, x + C$$

Тут використано формули 12 ($a = 1$) і 11 таблиці 2.

Приклад 5

$$\int \frac{1+sin^2 x}{1-cos2x} dx = \left\{ використовуємо\ формулу\ 1 - cos\, 2x = 2\, sin^2\, x \right\} =$$

$$= \int \frac{1+sin^2 x}{2\, sin^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{sin^2 x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{sin^2 x}{sin^2 x} dx =$$

$$-\frac{1}{2} ctg\left(x\right) + \frac{1}{2} \int dx = -\frac{1}{2} ctg\left(x\right) + \frac{1}{2} x + C,$$

використано формулу 8, табл. 2, і наслідок з властивості 4, $\int dx = x + C.$

Приклад 6

$$\int \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 2\sqrt{x}\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}} dx =$$

$$= \int \frac{x + 2x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} dx = \int \left(x^{1-\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{6}-\frac{1}{4}} + x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{4}} + 2x^{\frac{7}{12}} + x^{\frac{5}{12}} \right) dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx + 2\int x^{\frac{7}{12}} dx + \int x^{\frac{5}{12}} dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + 2\frac{x^{\frac{7}{12}+1}}{\frac{7}{12}+1} + \frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1} + C = \frac{x\sqrt[4]{x^3}}{\frac{7}{4}} + 2\frac{x\sqrt[12]{x^7}}{\frac{19}{12}} + \frac{x\sqrt[12]{x^5}}{\frac{17}{12}} + C =$$

$$= x\left(\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^3} + \frac{24}{19}\sqrt[12]{x^7} + \frac{12}{17}\sqrt[12]{x^5} \right) + C =$$

$$= 4x\left(\frac{1}{7}\sqrt[4]{x^3} + \frac{6}{19}\sqrt[12]{x^7} + \frac{3}{17}\sqrt[12]{x^5} \right) + C$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int \left(2x^8 - 3x^4 + 5x - 1\right) dx,$ відповідь: $\frac{2}{9}x^9 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^3 - x + c.$

2. $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx,$ відповідь: $x - \frac{1}{x} - 2\ln|x| + c.$

3. $\int \frac{2+3x^2}{x^2\left(1+x^2\right)} dx,$ відповідь: $-\frac{2}{x} + arctg\left(x\right) + c.$

4. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx,$ відповідь: $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c.$

5. $\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^3 dx,$ відповідь: $x^2\left(\frac{2}{5}\sqrt{x} + \frac{9}{7}\sqrt[3]{x} + \frac{18}{13}\sqrt[6]{x} + \frac{1}{2} \right) + c.$

6. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$, відповідь: $arcsin\,x+ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+.$

7. $\int 2^x e^x dx,$ відповідь: $\frac{2^x e^x}{1+ln2}+c.$

8. $\int\frac{2+\sqrt{3x^2-x^4}}{\sqrt{3-x^2}}dx,$ відповідь: $2\,arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{x^2}{2}+c.$

9. $\int cos^2\frac{x}{2}dx,$ відповідь: $\frac{x}{2}+\frac{sin\,x}{2}+c.$

10. $\int tg^2\,xdx,$ відповідь: $tg\left(x\right)-x+c.$

4 Введення під знак диференціала

4.1 Операція введення під знак диференціала

Перший і найважливіший метод інтегрування — це введення під знак диференціала. Суть методу полягає у тому, щоб за допомогою алгебраїчних перетворень звести даний інтеграл до табличних інтегралів із таблиці 3. Таблиця 3 стосується інтегралів від складених функцій. Суттєвим є те, що під знаком диференціала у формулах таблиці 3 стоїть та ж сама функція z(x), яка грає роль аргумента підінтегральної функції.

Наприклад:

1. $\int e^{2x+1}d\left(2x+1\right)=e^{2x+1}+C\left\{\begin{array}{l}за\ формулою\ 4:\\ \int e^z dz=e^z+c,\ z=2x+1\end{array}\right\}$

2. $\int cos\,x\,d\left(cos\,x\right)=\frac{cos^2\,x}{2}+C\left\{\begin{array}{l}за\ формулою\ 2:\\ \int zdz=\frac{z^2}{2}+c,\ z=cos\,x\end{array}\right\}$

$$3.\ \int\frac{d\left(x^2-1\right)}{x^2-1}=ln\left|x^2-1\right|+C\left\{\begin{array}{l} за\ формулою\ \ 3: \\ \int\frac{dz}{z}=ln\left|z\right|+c,\ z=x^2-1\end{array}\right\}$$

$$4.\ \int sin\left(e^x\right)d\left(e^x\right)=-cos\left(e^x\right)+C\left\{\begin{array}{l} за\ формулою\ 6: \\ \int sin\,z\,dz=-cos\,z+c,\ z=e^x\end{array}\right\}$$

Взагалі, щоб можна було скористатися формулами таблиці 3 інтеграл, що розглядається, повинний мати табличний вигляд відносно деякої функції $z(x)$. ***Підкреслимо, що під знаком диференціала також повинна стояти функція*** $z(x)$, тобто дифеернціал повинний мати вигляд не dx, а $dz(x)$. Відомо, що $dz(x)=z'(x)dx$. Із останньої формули випливає, що для отримання під знаком диференціала функції $z(x)$ треба у вихідному інтегралі знайти множник $z'(x)$. Тоді добуток $z'(x)dx$ замінюється виразом $dz(x)$. ***Саме така заміна називається введенням під знак диференціала функції*** $z(x)$.

Наприклад:

$$1.\ cos\,x\,dx=\left(sin\,x\right)'dx=d\left(sin\,x\right);$$

$$2.\ 2xdx=\left(x^2\right)'dx=d\left(x^2\right);$$

$$3.\ \frac{dx}{x}=\left(ln\,x\right)'dx=d\left(ln\,x\right);$$

$$4.\ \frac{dx}{1+x^2}=\left(arctg\,x\right)'dx=d\left(arctg\,x\right);$$

$$5.\ e^xdx=\left(e^x\right)'dx=d\left(e^x\right);$$

$$6.\ \frac{dx}{cos^2x}=\left(tg\,x\right)'dx=d\left(tg\,x\right).$$

Введення під знак диференціала можливе і тоді, коли за умовою під знаком інтеграла є множник, який відрізняється від $z'(x)$ лише деяким сталим множником. У цьому випадку кажуть, ***що під знаком інтеграла присутня функціональна частина похідної*** $z'(x)$.

Наприклад:

$$xdx = \frac{1}{2}(2x)dx = \frac{1}{2}\left[\left(x^2\right)' dx\right] = \frac{1}{2}d\left(x^2\right).$$

Тут використано дії множення і ділення на одне і те ж число, що є тотожним перетворенням. Розглянемо ще декілька прикладів:

1. $sinxdx = -(-sinx)dx = -\left|(cosx)' dx\right| = -d(cosx),$

2. $x^2dx = \frac{1}{3}\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{3}\left[\left(x^3\right)' dx\right] = \frac{1}{3}d\left(x^3\right),$

3. $2^x dx = \frac{1}{ln2}\left(2^x ln2\right)dx = \frac{1}{ln2}\left[\left(2^x\right)' dx\right] = \frac{1}{ln2}d\left(2^x\right) = log_2 e \cdot d\left(2^x\right)$

4. $\frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x+1}\right)dx = \frac{1}{3}[ln(3x+1)]' dx =$

$= \frac{1}{3}\left\langle [ln(3x+1)]' dx \right\rangle = \frac{1}{3}d[ln(3x+1)],$

Для того, щоб застосувати метод введення під знак диференціала на практиці, роблять так. Аналізують даний інтеграл, чи має він табличний вигляд відносно деякої функції $z(x)$ і чи є в наявності добуток $z'(x)dx$, можливо, з точністю до сталого множника.

Наприклад:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \left\{\begin{matrix} \text{Цей інтеграл можна} \\ \text{записати у вигляді} \end{matrix}\right\} = \int \frac{xdx}{1+\left(x^2\right)^2}.$$

Бачимо, що тут доцільно покласти $z(x) = x^2$. Дійсно,

$dz = d\left(x^2\right) = \left(x^2\right)' dx = 2xdx$, а під знаком інтеграла присутній добуток xdx. Цей добуток з точністю до сталого множника 2 збігається з диференціалом dz. Тобто даний інтеграл можна записати у табличному вигляді і розв'язати так:

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{xdx}{1+\left(x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+\left(x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2\right)' dx}{1+\left(x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2} = \frac{1}{2} arctg\left(x^2\right) + C.$$

Тепер послідовно розглянемо на прикладах застосування формул таблиці 3 для різних функцій $z(x)$.

4.2 Застосування формул (2), (2'), (2'')

$\int z^{\alpha} dz = \dfrac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	(2)
$\int \dfrac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + C, \alpha = -\dfrac{1}{2}$	(2')
$\int \dfrac{dz}{z^2} = -\dfrac{1}{z} + C, \alpha = -2$	(2'')

Приклад 1

$$\int (2x+1)^{10} dx$$

Визначимо функцію $z(x)$. Виходячи з формули (2), це повинна бути функція, яка стоїть під знаком степеня, тобто $z(x) = 2x+1$, тоді $dz = d(2x+1) = (2x+1)' dx = 2dx$. Бачимо, що під знаком інтеграла недостає сталого множника 2. Але на сталий множник завжди можна помножити і поділити.

Маємо:

$$\int(2x+1)^{10}dx=\frac{1}{2}\int(2x+1)^{10}(2dx)=\frac{1}{2}\int(2x+1)^{10}\cdot\left[(2x+1)'dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int(2x+1)^{10}d(2x+1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{11}}{11}+C=$$

$$=\frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C \quad \textit{за формулою } (2),\ \alpha=10$$

Приклад 2

$$\int\frac{xdx}{(1-x^2)^3}=\int(1-x^2)^{-3}(xdx)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} z=1-x^2;\ dz=d(1-x^2)=(1-x^2)'dx=-2xdx \\ \textit{добуток } xdx \textit{ присутній під знаком диференціала,} \\ \textit{тобто, щоб нічого не змінилося, треба} \\ \textit{помножити і поділити на число } (-2) \end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-3}(-2xdx)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{-3+1}}{-3+1}+C=$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{-2}}{-2}+C=\frac{1}{4(1-x^2)^2}+C$$

Приклад 3

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx=$$

$$
=\left\{\begin{array}{l} z=\cos\ x;\ dz=d(\cos\ x)=(\cos\ x)'\,dx=-\sin\ x\ dx; \\ \text{добуток } \sin\ x\ dx \text{ присутній під знаком інтеграла,} \\ \text{треба помножити і поділити на число } (-1) \end{array}\right\}=
$$

$$
=-\int\frac{-\sin\ x\ dx}{\sqrt{\cos\ x}}=-\int\frac{(\cos\ x)'\,dx}{\sqrt{\cos\ x}}=-\int\frac{d(\cos\ x)}{\sqrt{\cos\ x}}=
$$

$$
=\{\text{За формулою } (2')\}=-2\sqrt{\cos\ x}+C
$$

Приклад 4

$$
\int\frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}=
$$

$$
=\left\{\begin{array}{l} z=1+e^x;\ dz=d(1+e^x)=(1+e^x)'\,dx=e^x dx; \\ \text{добуток } e^x dx \text{ присутній під знаком інтеграла} \end{array}\right\}=
$$

$$
=\int\frac{(1+e^x)'\,dx}{(1+e^x)^2}=\int\frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}=\{\text{За формулою } (2'')\}=-\frac{1}{1+e^x}+C
$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int(x^2+1)^3 x dx,$ відповідь: $\dfrac{(x^2+1)^4}{8}+C.$

2. $\int\dfrac{\cos x\, dx}{\sqrt{3+\sin x}}$ відповідь: $2\sqrt{3+\sin x}+C.$

3. $\int\dfrac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}$ відповідь: $\dfrac{1}{\cos x}+C.$

4. $\int x^3\sqrt{2x^4-3}dx$ відповідь: $\frac{1}{12}\left(2x^4-3\right)\sqrt{2x^4-3}+C.$

5. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{7-x^6}}$ відповідь: $-\frac{1}{3}\sqrt{7-x^6}+C.$

6. $\int\sqrt{4-3x}dx$ відповідь: $-\frac{2}{9}(4-3x)\sqrt{4-3x}+C.$

7. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(3x^3-2\right)^2}}$ відповідь: $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3x^3-2}+C.$

8. $\int\frac{\sqrt{ln\,x}}{x}dx$ відповідь: $\frac{2}{3}\sqrt{ln^3 x}+C.$

4.3 Застосування формули (3)

$$\boxed{\int\frac{dz}{z}=ln|z|+C \qquad (3)}$$

У подальших прикладах $z(x)$ — це функція, яка стоїть у знаменнику. Нагадаємо, що для введення функції $z(x)$ під знак диференціала необхідна наявність добутку $z'(x)dx$, можливо, з точністю до сталого множника. Тоді добуток $z'(x)dx$ замінюється на $dz(x)$.

Приклад 1

$$\int\frac{dx}{2-5x}=\left\{\begin{array}{l} z=2-5x;\ dz=d(2-5x)=(2-5x)'\,dx= \\ =-5dx; \\ \textit{Треба помножити і поділити на } -5. \end{array}\right\}=$$

$$= -\frac{1}{5}\int\frac{-5dx}{2-5x} = -\frac{1}{5}\int\frac{(2-5x)'dx}{(2-5x)} = -\frac{1}{5}\int\frac{d(2-5x)}{(2-5x)} =$$

$$= -\frac{1}{5}ln|2-5x| + C$$

Приклад 2

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^3} = \left\{\begin{array}{l} z = 1+x^3;\ dz = d\left(1+x^3\right) = \left(1+x^3\right)'dx = 3x^2dx; \\ \text{добуток } x^2 \text{ присутній під знаком інтеграла;} \\ \text{треба помножити і поділити на число } 3. \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{3x^2\cdot dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int\frac{\left(1+x^3\right)'dx}{\left(1+x^3\right)} = \frac{1}{3}\int\frac{d\left(1+x^3\right)}{\left(1+x^3\right)} = -\frac{1}{3}ln\left|1+x^3\right| + C$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int\frac{dx}{4-7x}$ відповідь: $-\frac{1}{7}ln|4-7x| + C.$

2. $\int\frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+8}$ відповідь: $ln\left|x^2-3x+8\right| + C.$

3. $\int\frac{e^x dx}{1-2e^x}$ відповідь: $-\frac{1}{2}ln\left|1-2e^x\right| + C.$

4. $\int ctg(2x+1)dx$ відповідь: $\frac{1}{2}ln|sin(2x+1)| + C..$

5. $\int\frac{x^4dx}{1+x^5}$ відповідь: $\frac{1}{5}ln\left|1+x^5\right| + C.$

4.4 Застосування формул (4), (4')

$\int e^z dz = e^z + C$	(4)
$\int a^z dz = \dfrac{a^z}{\ln a} + C$	(4')

У наступних прикладах функція *z(x)*— це показник степеня. Перевіряємо наявність функціональної частини $z'(x)$. Для введення під знак диференціала функції $z(x)$ добуток $z'(x)dx$ замінюємо на $dz(x)$.

Приклад 1

$$\int e^{2-3x}dx = \left\{ \begin{matrix} z = 2-3x;\ dz = d(2-3x) = (2-3x)'dx = -3dx \\ \textit{Треба помножити і поділити на } -3 \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int e^{2-3x}(-3dx) = -\frac{1}{3}\int e^{2-3x}(2-3x)'dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int e^{2-3x}d(2-3x) = -\frac{1}{3}e^{2-3x} + C$$

Приклад 2

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left\{ \begin{matrix} z = \sqrt{x};\ dz = d(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})'dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ \textit{недостає множника } \dfrac{1}{2}\textit{; треба помножити} \\ \textit{і поділити на } 2. \end{matrix} \right\}$$

$$= 2\int e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) = 2\int e^{\sqrt{x}}d(\sqrt{x}) = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

Приклад 3

$$\int 2^{x^2} xdx = \left\{ \begin{array}{l} z = x^2;\, dz = d\left(x^2\right) = \left(x^2\right)' dx = 2xdx \\ \textit{Добуток } xdx \textit{ присутній під знаком} \\ \textit{інтеграла; недостає множника 2; поділимо} \\ \textit{і помножимо на 2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int 2^{x^2}(2xdx) = \frac{1}{2}\int 2^{x^2}\left(x^2\right)' dx = \frac{1}{2}\int 2^{x^2} d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^{x^2}}{ln|2|} + C$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int e^{1-3x}dx$ відповідь: $C - \frac{1}{3}e^{1-3x}$.

2. $\int x^2 3^{-x^3} dx$ відповідь: $C - \frac{1}{ln 3}3^{-x^3-1}$.

3. $\int sin\, x\, e^{cos\, x}dx$ відповідь: $C - e^{cos\, x}$.

4. $\int 2^{tg\, x}\frac{dx}{cos^2 x}$ відповідь: $\frac{1}{ln 2}2^{tg\, x} + C$.

5. $\int e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$ відповідь: $C - e^{\frac{1}{x}}$.

4.5 Застосування формул (5), (6)

$\int cos\, zdz = sin\, z + C \quad (5)$
$\int sin\, zdz = -cos\, z + C \quad (6)$

Зрозуміло, що у наступних прикладах функція $z(x)$ — це аргумент ***sin*** або ***cos***. Необхідна наявність функціональної частини похідної $z'(x)$. Добуток $z'(x)dx$ змінюється на $dz(x)$.

Приклад 1

$$\int \cos 2\pi x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} z = 2\pi x;\ dz = d(2\pi x) = (2\pi x)'\, dx = 2\pi dx \\ \textit{Помножимо і поділимо на } 2\pi \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \cos 2\pi x (2\pi dx) = \frac{1}{2\pi} \int \cos 2\pi x (2\pi x)'\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \cos 2\pi x d(2\pi x) = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x + C$$

Приклад 2

$$\int e^x \sin(e^x) dx = \left\{ \begin{array}{l} z = e^x;\ dz = d(e^x) = (e^x)'\, dx = e^x dx \\ \textit{Добуток } e^x dx \textit{ присутній під} \\ \textit{знаком } \int \end{array} \right\} =$$

$$= \int \sin(e^x)(e^x dx) = \int \sin(e^x)\left[(e^x)'\, dx\right] = \int \sin(e^x) d(e^x) =$$

$$= -\cos(e^x) + C$$

Приклад 3

$$\int x \cos(x^2 + 3) dx = \left\{ \begin{array}{l} z = (x^2 + 3);\ dz = d(x^2 + 3) = \\ (x^2 + 3)'\, dx = 2x dx;\ x dx \textit{ присутній під} \\ \textit{знаком інтеграла; помножимо і} \\ \textit{поділимо на } 2 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos(x^2 + 3)(2x dx) = \frac{1}{2} \int \cos(x^2 + 3)(x^2 + 3)'\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos(x^2 + 3) d(x^2 + 3) = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 3) + C$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int cos(3x+2)dx$ відповідь: $\frac{1}{3}sin(3x+2)+C$.

2. $\int x\,sin(x^2)dx$ відповідь: $C-\frac{1}{2}cos(x^2)$

3. $\int cos\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ відповідь: $2\,sin\sqrt{x}+C$.

4. $\int e^{2x}\,sin(e^{2x})dx$ відповідь: $C-\frac{1}{2}cos(e^{2x})$

5. $\int (x+3)cos(x^2+6x-5)dx$ відповідь: $\frac{1}{2}sin(x^2+6x-5)+C$.

4.6 Застосування формул (7), (8)

$\int\frac{dz}{cos^2 z}=tg\,z+C$	(7)
$\int\frac{dz}{sin^2 z}=-ctg\,z+C$	(8)

Розглянемо декілька прикладів. Введення під знак диференціала робимо аналогічно попередньому.

Приклад 1

$$\int\frac{dx}{cos^2\frac{x}{2}}=\left\{\begin{array}{l} z=\frac{x}{2};\ dz=d\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}dx \\ \text{Під знаком інтеграла множимо на } \frac{1}{2}, \text{ а} \\ \text{перед знаком інтеграла множимо на } 2 \end{array}\right\}=$$

$$=2\int\frac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)'dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=2\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}=2tg\frac{x}{2}+C$$

Приклад 2

$$\int\frac{x^2dx}{\sin^2\left(x^3\right)}=\left\{\begin{array}{l} z=x^3;\ dz=d\left(x^3\right)=\left(x^3\right)'dx=3x^2dx \\ x^2dx \text{ присутній під знаком інтеграла,} \\ \text{недостає множника } 3, \text{тобто множимо} \\ \text{ і ділимо на } 3 \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{\sin^2\left(x^3\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^3\right)'dx}{\sin^2\left(x^3\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3\right)}{\sin^2\left(x^3\right)}=-\frac{1}{3}ctg\left(x^3\right)+C$$

Приклад 3

$$\int\frac{dx}{x\sin^2\left(\ln x\right)}=\left\{\begin{array}{l} z=\ln x;\ dz=d\left(\ln x\right)=\left(\ln x\right)'dx=\frac{1}{x}dx \\ \text{Добуток } \frac{1}{x}dx \text{ присутній під знаком} \\ \text{інтеграла} \end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{\frac{1}{x}dx}{\sin^2\left(\ln x\right)}=\int\frac{\left(\ln x\right)'dx}{\sin^2\left(\ln x\right)}=\int\frac{d\left(\ln x\right)}{\sin^2\left(\ln x\right)}=-ctg\left(\ln x\right)+C$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int \frac{dx}{sin^2(1-3x)}$ відповідь: $\frac{1}{3}ctg(1-3x)+C.$

2. $\int \frac{xdx}{cos^2(x^2+1)}$ відповідь: $\frac{1}{2}tg(x^2+1)+C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,sin^2(\sqrt{x})}$ відповідь: $C-2ctg(\sqrt{x})$

4. $\int \frac{e^x dx}{cos^2(1-e^x)}$ відповідь: $C-tg(1-e^x)$

5. $\int \frac{(x-2)dx}{sin^2(x^2-4x+3)}$ відповідь: $C-\frac{1}{2}ctg(x^2-4x+3)$

4.7 Застосування формул (9), (9'), (10)

$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = arcsin\, z + C$	(9)
$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = arcsin\frac{z}{a} + C$	(9')
$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} = ln\left|z+\sqrt{z^2 \pm a^2}\right| + C$	(10)

Розглянемо приклади.

Приклад 1

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}} = \left\{ \begin{array}{l} z = x^2;\ dz = d(x^2) = (x^2)'\,dx = 2xdx; \\ \text{треба помножити і поділити на } 2 \end{array} \right\} =$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{\sqrt{2^2-(x^2)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2)'dx}{\sqrt{2^2-(x^2)^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{\sqrt{2^2-(x^2)^2}}=\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{x^2}{2}\right)+C$$

Приклад 2

$$\int\frac{cos\,x\,dx}{\sqrt{sin^2x-3}}=\left\{\begin{array}{l}z=sin\,x;\text{ дивись формулу}(10);dz=d(sin\,x)\\=(sin\,x)'dx=cos\,x\,dx;\text{ добуток }cos\,x\,dx\\\text{присутній під знаком інтеграла}\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{(sin\,x)'dx}{\sqrt{sin^2x-3}}=\int\frac{d(sin\,x)}{\sqrt{sin^2x-3}}=ln\left|sin\,x+\sqrt{sin^2x-3}\right|+C$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ відповідь: $\frac{1}{3}arcsin\frac{3x}{2}+C.$

2. $\int\frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$ відповідь: $\frac{arcsin\,2^x}{ln\,2}+C.$

3. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-1}}$ відповідь: $\frac{1}{4}ln\left|x^4+\sqrt{x^8-1}\right|+C.$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$ відповідь: $\frac{1}{5}arcsin\,5x+C.$

5. $\int\frac{cos\,x\,dx}{\sqrt{sin^2x+1}}$ відповідь: $ln\left|sin\,x+\sqrt{sin^2x+1}\right|+C.$

4.8 Застосування формул (11)-(12')

$\int \frac{dz}{1+z^2} = arctg\, z + C$	(11)
$\int \frac{dz}{a^2+z^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{z}{a} + C$	(11')
$\int \frac{dz}{a^2-z^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+z}{a-z}\right| + C$	(12)
$\int \frac{dz}{z^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a-z}{a+z}\right| + C$	(12')

Розглянемо приклади.

Приклад 1

$$\int \frac{dx}{9+5x^2} = \int \frac{dx}{3^2+\left(\sqrt{5}x\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} z = \sqrt{5}x;\ \textit{дивись на формулу} \\ (11');\ dz = d\left(\sqrt{5}x\right) = \left(\sqrt{5}x\right)' dx = \\ = \sqrt{5}dx;\ a = 3;\ \textit{треба помно} - \\ \textit{жити і поділити на число } \sqrt{5} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}dx}{3^2+\left(\sqrt{5}x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\left(\sqrt{5}x\right)' dx}{3^2+\left(\sqrt{5}x\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\left(\sqrt{5}x\right)}{3^2+\left(\sqrt{5}x\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{\sqrt{5}x}{3} + C = \frac{1}{3\sqrt{5}} arctg \frac{\sqrt{5}x}{3} + C$$

Приклад 2

$$\int\frac{x^2dx}{x^6-1}=\int\frac{x^2dx}{\left(x^3\right)^2-1}=\left\{\begin{array}{c}z=x^3;\ \textit{дивись формулу (12')};\\ dz=d\left(x^3\right)=\left(x^3\right)'dx=3x^2dx;\\ a=1;\ \textit{добуток } x^2dx \textit{ присутній під}\\ \textit{знаком інтеграла; треба помно}-\\ -\textit{жити і поділити на число } 3\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{\left(x^3\right)^2-1}=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^3\right)'dx}{\left(x^3\right)^2-1}=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{1-x^3}{1+x^3}\right|+C=$$

$$-\frac{1}{6}ln\left|\frac{1-x^3}{1+x^3}\right|+C.$$

Приклад 3

$$\int\frac{dx}{2+5x-x^2}=\left\{\begin{array}{l}\textit{Окремо вилучимо повний квадрат із}\\ \textit{квадратного тричлена}: -\left(x^2-5x-2\right)=\\ =-\left[x^2-2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\right]=\\ =-\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-2\right]=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{33}{4}\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{dx}{\frac{33}{4}-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}=\int\frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}z=x-\frac{5}{2};\ \textit{дивись формулу (12)};\ a=\frac{\sqrt{33}}{2}\\ dz=d\left(x-\frac{5}{2}\right)=\left(x-\frac{5}{2}\right)'dx=dx\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{d\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{33}}{2}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{33}}{2}+\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\frac{\sqrt{33}}{2}-\left(x-\frac{5}{2}\right)}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{33}}\ln\left|\frac{\sqrt{33}+2x-5}{\sqrt{33}-2x+5}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{33}}\ln\left|\frac{\sqrt{33}-5+2x}{\sqrt{33}+5-2x}\right|+C$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int\frac{dx}{1+9x^2}$ відповідь: $\frac{1}{3}arctg\,3x+C.$
2. $\int\frac{x^2dx}{x^6+4}$ відповідь: $\frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2}+C.$
3. $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+4}$ відповідь: $\frac{1}{2}arctg\frac{e^x}{2}+C.$
4. $\int\frac{xdx}{1-x^4}$ відповідь: $\frac{1}{4}ln\left|\frac{1+x^2}{1-x^2}\right|+C.$
5. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2x-4}$ відповідь: $C-\frac{1}{4}ln\left|\frac{2-\cos x}{2+\cos x}\right|$

4.9 Застосування формул (13)-(16)

$\int ch\,z\,dz=sh\,z+C$	(13)
$\int sh\,z\,dz=ch\,z+C$	(14)
$\int\frac{dz}{ch^2z}=th\,z+C$	(15)

$$\boxed{\int \frac{dz}{sh^2 z} = -cth\, z + C \qquad (16)}$$

Розглянемо приклади.

Приклад 1

$$\int ch\frac{2}{3}x\,dx = \left\{\begin{array}{l} z = \frac{2}{3}x;\ dz = d\left(\frac{2}{3}x\right) = \left(\frac{2}{3}x\right)' dx = \frac{2}{3}dx; \\ \textit{треба помножити і поділити на } \frac{2}{3} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}} \int ch\frac{2}{3}x\left(\frac{2}{3}dx\right) = \frac{3}{2}\int ch\frac{2}{3}x\left[\left(\frac{2}{3}x\right)' dx\right] = \frac{3}{2}\int ch\frac{2}{3}x\,d\left(\frac{2}{3}x\right) =$$

$$= \frac{3}{2}sh\frac{2}{3}x + C.$$

Приклад 2

$$\int x\,sh\left(x^2+1\right)dx = \left\{\begin{array}{l} z = x^2+1;\ dz = d\left(x^2+1\right) = \left(x^2+1\right)' dx = \\ = 2xdx;\ \textit{добуток } xdx \textit{ присутній під знаком} \\ \textit{інтеграла; треба помножити і поділити на } 2 \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int sh\left(x^2+1\right)(2xdx) = \frac{1}{2}\int sh\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int sh\left(x^2+1\right)d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2}ch\left(x^2+1\right) + C, \textit{ за формулою } (13)$$

Приклад 3

$$\int \frac{e^x dx}{ch^2\left(e^x\right)} = \left\{\begin{array}{l} z = e^x;\ dz = d\left(e^x\right) = \left(e^x\right)' dx = e^x dx; \\ \textit{добуток } e^x dx \textit{ присутній під знаком інтеграла} \end{array}\right\} =$$

$$= \int \frac{\left(e^x\right)' dx}{ch^2\left(e^x\right)} = \int \frac{d\left(e^x\right)}{ch^2\left(e^x\right)} = th\left(e^x\right) + C, \textit{ за формуою } (15)$$

Приклад 4

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}sh^2\left(\sqrt{x}\right)}=\left\{\begin{array}{l} z=\sqrt{x};\ dz=d\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)'dx=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx; \\ \text{добуток } \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx \text{ присутній під знаком} \\ \text{інтеграла; треба помножити і поділити} \\ \text{на 2; за формулою (16)} \end{array}\right\}=$$

$$=2\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}{sh^2\left(\sqrt{x}\right)}=2\int\frac{\left(\sqrt{x}\right)'dx}{sh^2\left(\sqrt{x}\right)}=2\int\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{sh^2\left(\sqrt{x}\right)}=-2cth\left(\sqrt{x}\right)+C$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int sh2\pi x\,dx$ відповідь: $\dfrac{1}{2\pi}ch\,2\pi x+C$

2. $\int xch\left(1-x^2\right)dx$ відповідь: $C-\dfrac{1}{2}sh\left(1-x^2\right)$

3. $\int\dfrac{dx}{x^2sh^2\dfrac{1}{x}}$ відповідь: $cth\dfrac{1}{x}+C$

4. $\int\dfrac{e^xdx}{ch^2\left(e^2\right)}$ відповідь: $th\,e^x+C$

5. $\int\dfrac{sh\left(ln\,x\right)}{x}dx$ відповідь: $ch\left(ln\,x\right)+C$

4.10 Застосування формул (17), (18)

$\int \frac{dz}{\sin z} = \ln\left\|tg\frac{z}{2}\right\| + C$	(17)
$\int \frac{dz}{\cos z} = \ln\left\|tg\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$	(18)

Розглянемо приклади.

Приклад 1

$$\int \frac{dx}{\sin(2x+1)} = \left\{\begin{matrix} z = 2x+1;\ dz = d(2x+1) = (2x+1)'dx = 2dx; \\ \text{треба помножити і поділити на } 2 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sin(2x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)'dx}{\sin(2x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\sin(2x+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{2x+1}{2}\right| + C, \text{ за формулою } (17)$$

Приклад 2

$$\int \frac{e^{3x}dx}{\cos\left(e^{3x}\right)} = \left\{\begin{matrix} z = e^{3x};\ dz = d\left(e^{3x}\right) = \left(e^{3x}\right)'dx = 3e^{3x}dx; \\ \text{добуток } e^{3x}dx \text{ присутній під знаком інтеграла,} \\ \text{треба помножити і поділити на } 3 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}dx}{\cos\left(e^{3x}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{\left(e^{3x}\right)'dx}{\cos\left(e^{3x}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(e^{3x}\right)}{\cos\left(e^{3x}\right)} = \frac{1}{3}\ln\left|tg\left(\frac{e^{3x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$$

за формулою (18).

Завдання для самостійної роботи

1. $\int \frac{dx}{sin(x+4)}$ відповідь: $ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+2\right)\right|+C$

2. $\int \frac{dx}{cos\,4\pi x}$ відповідь: $\frac{1}{4\pi}ln\left|tg\left(2\pi x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$

3. $\int \frac{x^2dx}{sin(x^3+1)}$ відповідь: $\frac{1}{3}ln\left|tg\left(\frac{x^3+1}{2}\right)\right|+C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}cos\sqrt{x}}$ відповідь: $2\,ln\left|tg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$

5. $\int \frac{dx}{x\,sin(ln\,x)}$ відповідь: $ln\left|tg\left(\frac{ln\,x}{2}\right)\right|+C$

5 Інтегрування частинами

5.1 Формула інтегрування частинами

Розглянемо такий метод інтегрування, який має назву — інтегрування частинами. Досить широке коло інтегралів обчислюється цим методом. А саме, $\int x^n\,sin\,axdx;$ $\int x^n\,cos\,axdx;$ $\int x^n\,e^{ax}dx;$

$\int x^n\,arcsin\,axdx;$ $\int x^n\,arccos\,axdx;$ $\int x^n\,arctg\,axdx;$

$\int x^n\,\mathrm{arcctg}\,axdx;$ $\int x^n\,\ln axdx;$ $\int e^{ax}\cos bxdx;$ $\int e^{ax}\,sin\,bxdx;$

$\int cos(ln\,x)dx;$ $\int sin(ln\,x)dx;$

і багато інших.

У наступній теоремі доведемо формулу, за якою здійснюється інтегрування частинами.

Теорема. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні. Тоді

$$\boxed{\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x).} \qquad (5.1.1)$$

Доведення. Розглянемо добуток даних функцій $u(x)v(x)$ і знайдемо диференціал від цього добутку за відомим правилом

$$d[u(x)v(x)]=u(x)dv(x)+v(x)du(x). \qquad (5.1.2)$$

Тоді $u(x)dv(x)=d[u(x)v(x)]-v(x)du(x).$

Проінтегруємо обидві частини останньої рівності.

$$\int u(x)dv(x)=\int d[u(x)v(x)]-v(x)du(x). \qquad (5.1.3)$$

Тут застосуємо властивість 4, $\int df(x)=f(x)+c.$. Тоді $\int d[u(x)v(x)]=u(x)v(x)+c$, але константу c можна віднести до другого доданку, який виражається через інтеграл. Тобто формула (5.1.3.) приймає вигляд $\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$, що і треба було довести.

Читач повинний знати три основні випадки застосування формули інтегрування частинами і відрізняти їх один від одного.

5.2 Перший випадок застосування формули інтегрування частинами

Розглянемо інтеграли $\int x^n \sin axdx;\ \int x^n \cos axdx;\ \int x^n e^{ax}dx$.

Застосуємо до даних інтегралів формулу

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu.} \qquad (5.1.1)$$

Щоб обчислити будь-який інтеграл, треба звести його до табличних інтегралів. Оскільки права частина формули (5.1.1) містить у собі інтеграл, то формулу є сенс використовувати за умови, що інтеграл у правій частині, $\int vdu$, буде табличним, або принаймні простішим, ніж інтеграл у лівій частині, $\int udv$.

Застосування формули (5.1.1) починається з того, що даний інтеграл треба подати у вигляді $\int u dv$. Тобто в умові треба зробити відповідні позначення.

Покладемо в інтегралах, що розглядаються, $u = x^n$; через dv позначимо добуток, який залишився під знаком інтеграла. Тоді, переходячи до $\int v du$, треба знайти $du = d(x^n) = (x^n)' dx = nx^{n-1}dx.$ Бачимо, що степінь х знизилася на одиницю.

Формулу (5.1.1) можна застосувати декілька разів, кожного разу знижуючи степінь x на одиницю. Поступово прийдемо до $x^0 = 1$, тобто степенева функція зникне під знаком інтеграла. Залишається один із інтегралів $\int \sin ax dx;$ $\int \cos ax dx;$ $\int e^{ax} dx;$ кожний з яких перетворюється до табличного вигляду за допомогою введення під знак диференціала. Відповідно до викладеного, формулюється правило 1.

Правило 1. Для інтегралів $\int x^n \sin ax dx;$ $\int x^n \cos ax dx;$ $\int x^n e^{ax} dx.$

Позначаємо	$u = x^n$; $dv =$усе, що залишилося під знаком інтеграла
Знаходимо	$du = d(x^n) = (x^n)' dx = nx^{n-1}dx;$ $v = \int dv = \ldots$

Приклад 1

$\int xe^{2x} dx$. Позначимо $u = x,$ $dv = e^{2x}dx$. Для правої частини формули (5.1.1) необхідно знайти $du(x)$ і функцію $v(x)$. Якщо $u(x) = x,$

то $du = dx$. Функцію $v(x)$ знаходимо за допомогою властивості 4 (див. п. 1), $v = \int dv = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}(2dx) = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}$; $c = 0$. Підставимо знайдені величини у праву частину формули (5.1.1).

$$\int xe^{2x}dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

Приклад 2

$$\int x^2 cos\frac{x}{3}dx.$$

Позначимо $u = x^2$; $dv = cos\frac{x}{3}dx$. Знайдемо $du = d(x^2) =$ $(x^2)'dx = = 2xdx$; $v = \int dv = \int cos\frac{x}{3}dx = 3\int cos\frac{x}{3}d\frac{x}{3} = 3\,sin\frac{x}{3}$.

Підставимо в (5.1.1):

$$\int x^2 cos\frac{x}{3}dx = x^2 \cdot 3\,sin\frac{x}{3} - \int 3\,sin\frac{x}{3}\cdot 2xdx = \\ = 3x^2\,sin\frac{x}{3} - 6\int x\,sin\frac{x}{3}dx. \tag{5.2.1}$$

Ми прийшли до $\int x\,sin\frac{x}{3}dx$, тут степінь x на одиницю нижчий, ніж в умові. Щоб позбутися множника x, ще раз застосуємо формулу (5.1.1) до інтеграла $\int x\,sin\frac{x}{3}dx$.

Позначимо $u = x$; $dv = sin\frac{x}{3}dx$. Знайдемо $du = dx$ і

$$v=\int dv=\int sin\frac{x}{3}dx=3\int sin\frac{x}{3}d\left(\frac{x}{3}\right)=-3cos\frac{x}{3},(C=0).$$

Підставимо в (5.1.1):

$$\int x\,sin\frac{x}{3}dx=x\left(-3cos\frac{x}{3}\right)-\int\left(-3cos\frac{x}{3}\right)dx=$$

$$=-3x\,cos\frac{x}{3}+3\int 3cos\frac{x}{3}dx=-3x\,cos\frac{x}{3}+3\cdot 3\int cos\frac{x}{3}d\left(\frac{x}{3}\right)=$$

$$=-3x\,cos\frac{x}{3}+9\,sin\frac{x}{3}+C.$$

Знайдений вираз для $\int x\,sin\frac{x}{3}dx$ підставимо в (5.2.1):

$$\int x^2cos\frac{x}{3}dx=3x^2\,sin\frac{x}{3}-6\left(-3x\,cos\frac{x}{3}+9\,sin\frac{x}{3}+C\right)=$$

$$=3x^2\,sin\frac{x}{3}+18x\,cos\frac{x}{3}-54\,sin\frac{x}{3}-$$

$$-6C=\{-6c=C_1\}=3x^2\,sin\frac{x}{3}+18x\,cos\frac{x}{3}-54\,sin\frac{x}{3}+C_1.$$

Зауваження. Правило 1 застосовується не лише до вказаних стандартних інтегралів. Якщо перехід від $\int udv$ до $\int vdu$ знижує показник степеня степеневої функції x^n і наближає нас до табличного інтегралу, то доцільно використовувати правило 1.

Приклад 3

$$\int\frac{x}{cos^2x}dx=\left\{\begin{array}{l}u=x;\ dv=\dfrac{dx}{cos^2x};\\ du=dx;\ v=\int dv=\int\dfrac{dx}{cos^2x}=tg\,x.\end{array}\right\}=$$

$$= x\,tg\,x - \int tg\,x\,dx = x\,tg\,x - \int \frac{sin\,x\,dx}{cos\,x} = x\,tg\,x - \int \frac{-(cos\,x)'\,dx}{cos\,x} =$$

$$= x\,tg\,x + \int \frac{d(cos\,x)}{cos\,x} = x\,tg\,x + ln|cos\,x| + C.$$

5.3 Другий випадок застосування формули інтегрування частинами

Розглянемо інтеграли $\int x^n\,arcsin\,axdx;\ \int x^n\,arccrc\,axdx;$ $\int x^n\,arctg\,axdx;\ \int x^n\,arcctg\,axdx;\ \int x^n\,ln\,axdx$.

До даних інтегралів застосуємо формулу

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.} \qquad (5.1.1)$$

Оберемо функцію $u(x)$ і диференціал $dv(x)$ так, щоб внаслідок застосування формули (5.1.1) інтеграл у правій частині формули був простіший, ніж вихідний інтеграл. У даному випадку треба позначити $dv = x^n dx,$ а за $u(x)$ взяти функцію, яка залишилася під знаком інтеграла. Тоді, переходячи до $\int vdu,$ ми знаходимо $du = d(ln\,ax) = (ln\,ax)'\,dx = \frac{1}{ax}adx = \frac{1}{x}dx$ або du = d ($arcsin\ ax$)= $= (\arcsin ax)'\,dx = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}dx$ і так далі. Бачимо, що трансцендентні функції $ln\,ax, arcsin ax, arccos ax, arctg\,ax,\ \ arcctg\,ax,$ зникають під час знаходження $du(x)$. Диференціал $du(x)$ в усіх розглянутих випадках є алгебраїчною функцією. Тому інтеграл у правій частині формули (5.1.1) буде простіший, ніж вихідний інтеграл.

Сформулюємо правило 2.

Правило 2. Для інтегралів $\int x^n \arcsin ax dx;$ $\int x^n \arccos ax dx;$ $\int x^n \mathrm{arctg}\, ax dx;$ $\int x^n \mathrm{arcctg}\, ax dx;$ $\int x^n \ln ax dx$.

позначимо	$dv = x^n dx;\ u =$ функція, яка залишилася під знаком інтеграла
знаходимо	$v = \int dv = \ldots;\ \ du = u'(x)dx = \ldots$

Приклад 1

$$\int x \,\mathrm{arctg}\, 2x dx = \left\{\begin{aligned} & dv = xdx;\ u = \mathrm{arctg}\, 2x; \\ & v = \int x dx = \frac{x^2}{2};\ du = d(\mathrm{arctg}\, 2x) = \\ & = (\mathrm{arctg}\, 2x)' dx = \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2dx = \frac{2dx}{1+4x^2} \end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \mathrm{arctg}\, 2x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2dx}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2} \mathrm{arctg}\, 2x - \int \frac{x^2 dx}{1+4x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \mathrm{arctg}\, 2x - \frac{1}{4} \int \frac{4x^2}{1+4x^2} dx = \frac{x^2}{2} \mathrm{arctg}\, 2x - \frac{1}{4} \int \frac{(4x^2+1)-1}{1+4x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \mathrm{arctg} 2x - \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{x^2}{2} \mathrm{arctg} 2x - \frac{1}{4} x +$$

$$+ \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot \frac{d(2x)}{(2x)'} = \frac{x^2}{2} \mathrm{arctg} 2x - \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \int \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \mathrm{arctg}\, 2x - \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \mathrm{arctg}\, 2x + C.$$

Приклад 2

$$\int\left(3x^2+2x\right)\ln x\,dx=\left\{\begin{array}{l} dv=\left(3x^2+2x\right)dx;\ u=\ln x;\\ v=\int dv=\int\left(3x^2+2x\right)dx=3\cdot\dfrac{x^3}{3}+2\cdot\dfrac{x^2}{2}=\\ =x^3+x^2;\ du=d(\ln x)=(\ln x)'\,dx=\dfrac{1}{x}dx \end{array}\right\}=$$

$$=\left(x^3+x^2\right)\ln x-\int\left(x^3+x^2\right)\frac{1}{x}dx=\left(x^3+x^2\right)\ln x-\int\left(x^2+x\right)dx=$$

$$=\left(x^3+x^2\right)\ln x-\int x^2dx-\int xdx=\left(x^3+x^2\right)\ln x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C.$$

Зауваження. Правило 2 застосовується не лише до вказаних стандартних інтегралів. Якщо перехід від $\int udv$ до $\int vdu$ дає змогу позбутися таких трансцендентних функцій, як $\ln ax, \arcsin ax, \arccos ax, \mathrm{arctg}\, ax, \mathrm{arcctg}\, ax$, і приводить до табличного інтеграла, то доцільно використовувати правило 2.

Розглянемо відповідний приклад.

Приклад 3

$$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx=\left\{\begin{array}{l} u=\arcsin x;\ dv=\dfrac{dx}{\sqrt{1+x}};\\ du=d(\arcsin x)=(\arcsin x)'\,dx=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\\ v=\int dv=\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+x}}=\int\dfrac{d(1+x)}{\sqrt{1+x}}=2\sqrt{1+x} \end{array}\right\}=$$

$$=2\sqrt{1+x}\arcsin x-\int 2\sqrt{1+x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{1+x}\ \ \arcsin x-2\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}}dx=$$

$$= 2\sqrt{1+x}\ \arcsin\ x - 2\int\sqrt{\frac{1+x}{(1+x)(1-x)}}dx = 2\sqrt{1+x}\ \arcsin\ x -$$

$$-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2\sqrt{1+x}\,arcsin\,x - 2\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{d(1-x)}{(-1)} =$$

$$= 2\sqrt{1+x}\,arcsin\,x + 2\int\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{1+x}\,arcsin\,x +$$

$$+ 2\cdot 2\sqrt{1-x} + C = 2\sqrt{1+x}\,arcsin\,x + 4\sqrt{1-x} + C.$$

5.4 Третій випадок застосування формули інтегрування частинами. Повернення до вихідного інтегралу

Розглянемо третій випадок на прикладах інтегралів $\int e^{ax}\cos bxdx;$ $\int e^{ax}\sin bxdx;$ $\int cos(ln\,x)dx;$ $\int sin(ln\,x)dx$.

Для обчислення цих інтегралів формулу (5.1.1) застосуємо два рази. Внаслідок цього отримаємо рівняння відносно вихідного інтеграла. Сформулюємо правило 3.

Правило 3 Для кожного з інтегралів $\int e^{ax}\cos bxdx;$ $\int e^{ax}\sin bxdx;$ $\int cos(ln\,x)dx;$ $\int sin(ln\,x)dx$ формулу інтегрування частинами застосувати два рази. Обидва рази за $u(x)$ треба брати тригонометричну функцію, або для перших двох інтегралів показникову функцію. За $dv(x)$ береться усе, що залишилося під знаком інтеграла. Внаслідок двократного застосування формули (5.1.1) отримаємо рівність, яку треба розглядати як рівняння відносно вихідного інтеграла. Знаходимо шуканий інтеграл із цього рівняння.

Приклад 1

$$\int e^x \cos x\,dx = \begin{Bmatrix} u = e^x;\ du = \cos x\,dx; \\ du = d\left(e^x\right) = \left(e^x\right)' dx = e^x dx; \\ v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x \end{Bmatrix} = \qquad (5.4.1)$$

$$= e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx.$$

До інтеграла $\int e^x \sin x\,dx$ знову застосуємо формулу (5.1.1), причому обов'язково через $u(x)$ позначаємо ту саму функцію e^x.

$$\int e^x \sin x\,dx = \begin{Bmatrix} u = e^x;\ du = d\left(e^x\right) = e^x dx; \\ dv = \sin x\,dx;\ v = \int dv = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{Bmatrix} =$$

$$= e^x(-\cos x) - \int(-\cos x)\cdot e^x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

Підставимо вираз для $\int e^x \sin x\,dx$ в (5.4.1).

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx).$$

$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$, в правій частині рівності ми отримали вихідний інтеграл, але з протилежним знаком. Ця рівність є рівнянням відносно вихідного інтеграла.

Позначимо $\int e^x \cos x\,dx = I$. Тоді:

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I + 2c.$$

$$2I = e^x(\sin x + \cos x) + 2c.$$

$$I = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + c.$$

Приклад 2

$$\int sin(ln\,x)dx = \left\{\begin{array}{l} u = sin(ln\,x);\ dv = dx; \\ du = d[sin(ln\,x)] = [sin(ln\,x)]'\,dx = \\ = cos(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}dx;\ v = \int dv = \int dx = x \end{array}\right\} = = x\,sin(ln\,x) -$$

$$-\int x\cdot\frac{1}{x}cos(ln\,x)dx = x\,sin(ln\,x) - \int cos(ln\,x)dx. \qquad (5.4.2.)$$

Отриманий інтеграл $\int cos(ln\,x)dx$ ще раз проінтегруємо частинами.

$$\int cos(ln\,x)dx = \left\{\begin{array}{l} u = cos(ln\,x);\ dv = dx; \\ du = d[cos(ln\,x)] = [cos(ln\,x)]'\,dx = \\ = -sin(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}dx;\ v = \int dv = \int dx = x \end{array}\right\} =$$

$$= x\,cos(ln\,x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\cdot(-sin(ln\,x))dx = x\,cos(ln\,x) +$$

$$+\int sin(ln\,x)dx.$$

Вираз для $\int cos(ln\,x)dx$ підставимо в (5.4.2)

$$\int sin(ln\,x)dx = x\,sin(ln\,x) - x\,cos(ln\,x) - \int sin(ln\,x)dx.$$

Позначимо $\int sin(ln\,x)dx = I$.

$$I = x\,sin(ln\,x) - x\,cos(ln\,x) - I + 2C.$$

$$2I = x[sin(ln\,x) - cos(ln\,x)] + 2C.$$

$$I = \frac{x}{2}[sin(ln\,x) - cos(ln\,x)] + C.$$

Зауваження. У правилі 3 суттєвим є те, що обидва рази у формулі (5.1.1) за $u(x)$ береться однотипна функція, чи тригонометрична, чи показникова. Якщо порушити цю умову, то після двох застосувань формули (5.1.1) прийдемо до тотожності 0 = 0, із якої нічого неможливо знайти.

6.5Деякі інші застосування формули інтегрування частинами

Було розглянуто три стандартні випадки застосування формули інтегрування частинами. Їх студент повинен пам'ятати. Але формула інтегрування частинами має значно ширше застосування.

Розглянемо поняття ***рекурентної формули. Рекурентною формулою називається співвідношення $a_{n+1} = F(n,a_n)$, яке дозволяє обчислити будь-який член послідовності $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots$ за умови, що попередні члени цієї послідовності відомі.*** Наприклад, $a_{n+1} = a_n q \ (q \neq 0)$ і $a_{n+1} = a_n + d$. Ці формули (перша стосується геометричної, а друга — арифметичної прогресії), є рекурентними формулами.

Рекурентні формули існують також в інтегральному численні. Розглянемо інтеграли

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + A\right)^n} \text{ і } I_{n+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2 + A\right)^{n+1}}; \ n = 1; 2; 3; \ldots$$

Виразимо інтеграл I_{n+1} через інтеграл I_n.

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + A\right)^n} = \left\{ \begin{aligned} & u = \frac{dx}{\left(x^2 + A\right)^n}; dv = dx; du = d\left(\frac{dx}{\left(x^2 + A\right)^n} \right) = \\ & = \left(\frac{dx}{\left(x^2 + A\right)^n} \right)' dx = \left(\left(x^2 + A\right)^{-n}\right)' dx = \\ & = -n\left(x^2 + A\right)^{-n-1} \cdot 2x dx = \frac{-2nx dx}{\left(x^2 + A\right)^{n+1}}; \\ & v = \int dv = \int dx = x \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2 + A\right)^n} - \int x \cdot \frac{-2nx dx}{\left(x^2 + A\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2 + A\right)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + A\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2 + A\right)^n} + 2n\int \frac{\left(x^2 + A\right) - A}{\left(x^2 + A\right)^{n+1}} dx = \frac{x}{\left(x^2 + A\right)^n} +$$

$$+ 2n\int \frac{x^2 + A}{\left(x^2 + A\right)^{n+1}} dx - 2n \cdot A\int \frac{dx}{\left(x^2 + A\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2 + A\right)^n} +$$

$$+ 2n\int \frac{dx}{\left(x^2 + A\right)^n} - 2n \cdot A\int \frac{dx}{\left(x^2 + A\right)^{n+1}};$$

Маємо рівність

$$I_n = \frac{x}{\left(x^2 + A\right)^n} + 2nI_n - 2nAI_{n+1}.$$

Із цієї рівності виразимо I_{n+1} через I_n.

$$2nAI_{n+1} = \frac{x}{\left(x^2 + A\right)^n} + 2nI_n - I_n.$$

$$2nAI_{n+1} = \frac{x}{\left(x^2 + A\right)^n} + (2n - 1)I_n.$$

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2nA} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + A\right)^n} + \frac{2n-1}{2nA} I_n.} \qquad (5.5.1)$$

Формула (5.5.1) є рекурентною формулою. Дійсно, для послідовності інтегралів $I_1, I_2, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots$ будь-який елемент цієї послідовності, I_{n+1}, виражається через елемент I_n. В свою чергу, інтеграл I_n виражається через I_{n-1} і так далі до I_1. Інтеграл I_1 є табличним, причому можливі два випадки:

$$A = a^2; \text{ тоді } I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$$

$A=-a^2$; тоді $I_1=\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right|+C.$

Формулу (5.5.1) перепишемо, підставивши відповідні інтеграли.

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+A\right)^{n+1}}=\frac{1}{2nA}\cdot\frac{x}{\left(x^2+A\right)^n}+\frac{2n-1}{2nA}\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+A\right)^n} \qquad (5.5.2)$$

Розглянемо приклад застосування останньої формули

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}=\left\{\begin{matrix} n+1=3;\ n=2; \\ A=4 \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\cdot2\cdot4}\cdot\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}+$$
$$=\frac{2\cdot2-1}{2\cdot2\cdot4}\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{1}{16}\cdot\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{3}{16}\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2} \qquad (5.5.3)$$

До $\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$ знов застосуємо формулу (5.5.2).

Тепер $n+1=2,\ n=1,\ A=4.$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{1}{2\cdot1\cdot4}\cdot\frac{x}{\left(x^2+4\right)}+\frac{2\cdot2-1}{2\cdot1\cdot4}\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)}=$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+c.$$

Знайдений вираз для $\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$ підставимо в (5.5.3)

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{x}{16\left(x^2+4\right)^2}+\frac{3}{16}\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{\left(x^2+4\right)}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+c\right)=$$
$$=\frac{x}{16\left(x^2+4\right)^2}+\frac{3}{128}\frac{x}{\left(x^2+4\right)}+\frac{3}{256}arctg\frac{x}{2}+\frac{3}{16}C=\left\{\frac{3}{16}C=C_1\right\}=$$

$$=\frac{x}{16\left(x^2+4\right)^2}+\frac{3}{128}\frac{x}{\left(x^2+4\right)}+\frac{3}{256}arctg\frac{x}{2}+C_1$$

Зауваження 1. Формула (5.5.2) може бути використана для інтегрування так званих простіших дробів четвертого типу (див. п. 10.4). Також у п. 10.4 викладено інший спосіб обчислення інтеграла I_n за допомогою тригонометричної підстановки.

Зауваження 2. Можна користуватися формулою інтегрування частинами без спеціальних позначень u і dv. Покажемо це на прикладах.

Приклад 1

$$\int arcsin\,x\,dx=\begin{Bmatrix}\textit{інтеграл вже має вигляд } \int udv\\ \textit{застосуємо формулу } (6.1.1)\end{Bmatrix}=$$

$$=x\,arcsin\,x-\int xd\left(arcsin\,x\right)=x\,arcsin\,x-\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=x\,arcsin\,x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=x\,arcsin\,x+\frac{1}{2}\int\frac{(-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\,arcsin\,x+\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-x^2\right)'dx}{\sqrt{1-x^2}}=x\,arcsin\,x+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=x\,arcsin\,x+\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{1-x^2}+C=x\,arcsin\,x+\sqrt{1-x^2}+C$$

Приклад 2

$$\int x^2e^xdx=\begin{Bmatrix}\textit{надамо інтегралові вигляду } \int udv\\ \textit{потім застосуємо формулу } (6.1.1)\end{Bmatrix}=$$

$$=\int x^2d\left(e^x\right)=x^2e^x-\int e^xd\left(x^2\right)=x^2e^x-\int e^x2xdx=$$

$$=x^2e^x-2\int xe^xdx=\begin{Bmatrix}\textit{ще раз інтегруємо частинами}\\ \textit{аналогічно попередньому}\end{Bmatrix}=$$

$$= x^2e^x - 2\int xd\left(e^x\right) = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) =$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Приклад 3

$$\int x\sin\pi x dx = -\frac{1}{\pi}\int x(\cos\pi x)' dx = -\frac{1}{\pi}\int xd(\cos\pi x) =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left(x\cos\pi x - \int\cos\pi x dx\right) = -\frac{1}{\pi}\left(x\cos\pi x - \frac{1}{\pi}\sin\pi x\right) + C.$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int x\sin 2x\, dx$ відповідь: $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + C.$
2. $\int x3^x dx$ відповідь: $3^x \log_3^2 e(x\ln 3 - 1) + C.$
3. $\int \arccos x\, dx$ відповідь: $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$
4. $\int arctg\sqrt{x}dx$ відповідь: $x\, arctg\sqrt{x} - \sqrt{x} + arctg\sqrt{x} + C.$
5. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$ відповідь: $x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + arctgx + C.$
6. $\int \frac{\lg x}{x^3}dx$ відповідь: $C - \frac{1}{2x^2}\lg\left(x\sqrt{e}\right)$
7. $\int x^3e^x dx$ відповідь: $e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + C.$
8. $\int \ln^2 x\, dx$ відповідь: $x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C.$
9. $\int x^2\cos^2 x\, dx$

відповідь: $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C.$

10. $\int e^{2x}\cos 3x\, dx$ відповідь: $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C.$

6 Заміна змінної у невизначеному інтегралі

6.1 Основна теорема

Наступний метод інтегрування називається заміною змінної. Обчислюючи будь-який інтеграл, ми намагаємося звести його до табличних інтегралів. Саме з цією метою у багатьох інтегралах необхідно перейти до нової змінної інтегрування. Для цього деяку функцію позначають через нову змінну. У наступній теоремі доведемо формулу, за якою здійснюється заміна змінної у невизначеному інтегралі.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна, а функція $x = z(t)$ монотонна і має неперервну похідну. Причому множина значень функції $x = z(t)$ належить області визначення функції $f(x)$. Тоді

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f[z(t)]dz(t),\ \partial e\ \ t = h(x)} \qquad (6.1.1)$$

У формулі (6.1.1) функція $t = h(x)$ є оберненою для функції $x = z(t)$.

Доведенення. Доведемо формулу (6.1.1.) за означеннями невизначеного інтеграла і первісної. Це означає, що треба знайти похідну від правої частини формули і показати, що вона збігається з підінтегральною функцією лівої частини формули. Але ліву і праву частини формули можна поміняти місцями,. Для доведення це зручніше.

$$\int f[z(t)]dz(t) = \int f(x)dx,\ \text{де}\ x = z(t) \qquad (6.1.2)$$

Візьмемо похідну від правої частини (6.1.2.), враховуючи, що змінна x залежить від аргумента t, ***тобто беремо похідну від складеної функції***

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(x)dx\right)'_x x'(t) = f(x)\cdot x'(t) = \{x = z(t)\} =$$
$$= f[z(t)]z'(t).$$

У лівій частині формули (6.1.2) зробимо перетворення

$$\int f[z(t)]dz(t) = \int f[z(t)]z'(t)dt.$$

Бачимо, що похідна від правої частини (6.1.2) збігається з підінтегральною функцією лівої частини.

Формулу (6.1.1) доведено.

Перш ніж розглянути приклади зауважимо, що досить часто в інтегралах роблять заміну змінної з метою позбутися кореня.

Приклад 1

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{зробимо заміну змінної :} \\ \sqrt{x-1} = t\ \textit{, звідси знайдемо } x \textit{ і } dx \\ x-1 = t^2;\ x = t^2+1;\ dx = d\left(t^2+1\right) = \\ = \left(t^2+1\right)' dt = 2t\,dt \\ \textit{знайдені вирази підставимо в інтеграл.} \end{array}\right\} =$$

$$= \int\left(t^2+1\right)t\cdot 2t\,dt = 2\int\left(t^4+t^2\right)dt = 2\left(\int t^4dt + \int t^2dt\right) =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right) + C = \left\{t = \sqrt{x-1}\right\} = 2\left(\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{15}\left(3(x-1)^2\sqrt{x-1} + 5(x-1)\sqrt{x-1}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{15}(x-1)\sqrt{x-1}\left(3(x-1)+5\right) + C = \frac{2}{15}(x-1)\sqrt{x-1}(3x+2) + C$$

Приклад 2

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1+e^x} = t;\ 1+e^x = t^2;\ e^x = t^2-1;\ x = ln\left(t^2-1\right); \\ dx = d\left[ln\left(t^2-1\right)\right] = \left[ln\left(t^2-1\right)\right]' dt = \\ = \dfrac{1}{t^2-1}\cdot 2t\,dt = \dfrac{2t\,dt}{t^2-1} \end{array}\right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{2t\,dt}{t^2-1}}{t} = 2\int \frac{tdt}{t(t^2-1)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2} ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C =$$

$$= \left\{ t = \sqrt{1+e^x} \right\} = ln\left|\frac{1-\sqrt{1+e^x}}{1+\sqrt{1+e^x}}\right| + C$$

6.2 Тригонометричні підстановки

Нехай підінтегральна функція виражається через $\sqrt{a^2 - x^2}$, або $\sqrt{a^2 + x^2}$, чи через $\sqrt{x^2 - a^2}$. Під знаком інтеграла можна позбутися кожного з цих коренів за допомогою так званих тригонометричних підстановок.

Розглянемо перший випадок, нехай під інтегралом треба позбутися кореня $\sqrt{a^2 - x^2}$. Зробимо заміну змінної $x = a\,sin\,t$. Покажемо, що тоді корінь добувається

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \{x = a\,sin\,t\} = \sqrt{a^2 - a^2\,sin^2\,t} =$$
$$= \sqrt{a^2(1 - sin^2\,t)} = a\sqrt{cos^2\,t} = a\,cos\,t.$$

Розглянемо другий випадок, треба позбутися кореня $\sqrt{x^2 + a^2}$, зробимо заміну $x = a\,tg\,t$. Тоді $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 tg^2\,t} =$ $\sqrt{a^2(1 + tg^2\,t)} = a\sqrt{\frac{1}{cos^2\,t}} = \frac{a}{cos\,t}$, тут застосовано формулу

$$1 + tg^2\,t = \frac{1}{cos^2\,t}.$$

У третьому випадку треба позбутися кореня $\sqrt{x^2 - a^2}$. Зробимо заміну $x = \dfrac{a}{cos\, t}$. Тоді

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{cos^2 t} - a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{1}{cos^2\ \ t} - 1\right)} = a\sqrt{tg^2 t} = a\, tg\, t,$$

тут застосовано попередню тригонометричну формулу.

Розглянемо приклади.

Приклад 1

$$\int\sqrt{4-x^2}dx = \left\{\begin{matrix} Маємо\ 1-ий\ випадок;\ a = 2;\ x = 2sint; \\ dx = d(2sint) = (2sint)'\,dt = 2cos\,t\,dt \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int\sqrt{4 - 4sin^2 t}\cdot 2cos\,t\,dt = \int\sqrt{4\left(1 - sin^2 t\right)}\cdot 2cos\,t\,dt =$$

$$= 2\cdot 2\int\sqrt{cos^2 t}\, cos\,t\,dt = \int cos\,t \cdot cos\,t\,dt = 4\int cos^2 t\,dt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} Застосуємо\ формулу \\ cos^2\alpha = \dfrac{1+cos\,2\alpha}{2} \end{matrix}\right\} = 4\int\frac{1+cos\,2t}{2}dt =$$

$$= 2\left(\int dt + \int cos\,2t\,dt\right) = 2\left(t + \frac{1}{2}\cdot\int cos\,2t\,d(2t)\right) =$$

$$= 2\left(t + \frac{sin\,2t}{2}\right) + C = 2t + sin\,2t + C =$$

$$= \left\{\begin{matrix} sin\,t = \dfrac{x}{2};\ t = arcsin\dfrac{x}{2};\ sin\,2t = 2\,sin\,t\,cos\,t; \\ cos\,t = \sqrt{1 - sin^2 t} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{4-x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= 2\,arcsin\frac{x}{2} + 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C = 2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C$$

Приклад 2

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\left\{\begin{array}{l}Маємо\ 2-ий\ випадок;\ a=1;\ x=tg\,t;\\ dx=d(tg\,t)=(tg\,t)'\,dt=\dfrac{1}{cos^2 t}dt\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{\dfrac{1}{cos^2 t}dt}{\sqrt{\left(1+tg^2 t\right)^3}}=\int\frac{dt}{cos^2 t\sqrt{\left(\dfrac{1}{cos^2 t}\right)^3}}=\int\frac{dt}{cos^2 t\cdot\sqrt{\dfrac{1}{cos^6 t}}}=$$

$$=\int\frac{dt}{cos^2 t\cdot\dfrac{1}{cos^3 t}}=\int\frac{dt}{\dfrac{1}{cos\,t}}=\int cos\,t\,dt=sin\,t+C=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}tg\,t=x;\ cos\,t=\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}};\\ sin\,t=tg\,t\cdot cos\,t;\ sin\,t=x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{array}\right\}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

Приклад 3

$$\int\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}маємо\ третій\ випадок\\ a=2;\ x=\dfrac{2}{cos\,t};\ \sqrt{x^2-4}=\sqrt{\dfrac{4}{cos^2 t}-4}=\\ \sqrt{4\left(\dfrac{1}{cos^2 t}-1\right)}=2\sqrt{tg^2 t}=2tg\,t\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{2tg\,t}{\dfrac{2}{cos\,t}}d\left(\frac{2}{cos\,t}\right)=\int cos\,t\,tg\,t\cdot\left(\frac{2}{cos\,t}\right)'dt=2\int cos\,t\cdot\frac{sin\,t}{cos\,t}\cdot$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{cos^2 t}\cdot(-sin\,t)\right)dt=2\int\frac{sin^2 t}{cos^2 t}dt=2\int\frac{1-cos^2 t}{cos^2 t}dt=$$

$$= 2\left(\int \frac{1}{cos^2 t} dt - \int dt \right) = 2(tg\,t - t) + C =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} cos\,t = \frac{2}{x};\, t = arc\,cos\frac{2}{x}; \\ tg\,t = \sqrt{\frac{1}{cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} - arc\,cos\frac{2}{x} \right) + C = \sqrt{x^2 - 4} - 2arc\,cos\frac{2}{x} + C$$

Сформулюємо висновки

Якщо під знаком інтеграла треба позбутися:

1) $\sqrt{a^2 - x^2}$, то доцільно зробити підстановку $x = a\,sint$

2) $\sqrt{a^2 + x^2}$, то доцільно зробити підстановку $x = a\,tg\,t$

3) $\sqrt{x^2 - a^2}$, то доцільно зробити підстановку $x = \frac{a}{cos\,t}$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x - 1}}$ відповідь: $\frac{2\sqrt{x - 1}}{35}\left(5x^3 + 6x^2 + 8x + 16\right) + C.$

2. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x + 1}}$ відповідь: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x + 1)^2} - 3\sqrt[3]{x + 1} + 3\ln\left|1 + \sqrt[3]{x + 1}\right| + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ відповідь: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(1 + \sqrt[4]{x}) + C$

4. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$ відповідь: $\frac{4}{21}(3e^x-4)\cdot\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C.$

5. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$ відповідь: $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}+C.$

6. $\int \frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{x^2-9}}$ відповідь: $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$

7. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$ відповідь: $C-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}.$

8. $\int e^{\sqrt{x}}dx$ відповідь: $2e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)+C.$

7 Раціональні дроби

7.1 Визначення раціонального дробу

Функція виду $\frac{P_n(x)}{R_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0}$, де n та m – натуральні числа, $a_n, a_{n-1}, ..., a_0, b_m, b_{m-1}, ..., b_0$ - дійсні числа, а x – дійсна змінна, називається **раціональним дробом**. Іншими словами, раціональний дріб – це дріб чисельник і знаменник якого є многочленами. Наприклад, функції $\frac{2}{x^3+4}$, $\frac{6x^4-2x^3+x-4}{x^2+x-5}$, $\frac{x-4}{x^4}$ є раціональними дробами. Проте, функції $\frac{\sqrt{x}+3}{x^2+6x-1}$, $\frac{|x+4|}{\sqrt{x^2+x-6}}$ не належать до раціональних дробів, тому що кожна з функцій $\sqrt{x}+2$, $|x+4|$, $\sqrt{x^2+x-6}$ не є многочленом.

7.2 Означення правильного і неправильного раціонального дробу

Раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається ***правильним***, якщо степінь чисельника менший ніж степінь знаменника т. б. $n < m$.

В протилежному випадку (т.б. коли $n \geq m$) раціональний дріб називається ***неправильним***.

Наприклад, раціональні дроби $\dfrac{x-3}{2x^4-5x^2+x-5}$, $\dfrac{6x^2-7x}{x^6-5x^2+9}$ належать до правильних, а раціональні дроби $\dfrac{5x^4-6x^3+9}{2x-5}$, $\dfrac{x^3-4x+2}{6x^3+3x^2-7}$ – до неправильних.

Зазначимо, що на відміну від арифметики, сума правильних раціональних дробів є знов правильним раціональним дробом. Справді, помножуючи чисельник і знаменник кожного з правильних дробів, що додаються, на один і той самий доповнюючий множник, дістаємо знов правильний дріб. Коли ж додаємо правильні раціональні дроби вже з однаковими знаменниками, то в сумі одержуємо дріб, в якому степінь чисельника нижчий за степінь знаменника.

Наприклад,

$$\frac{2x-1}{x^2+6}+\frac{4}{x+3}=\frac{(2x-1)\cdot(x+3)}{(x^2+6)\cdot(x+3)}+\frac{4\cdot(x^2+6)}{(x^2+6)\cdot(x+3)}=$$

$$=\frac{(2x-1)\cdot(x+3)+4\cdot(x^2+6)}{(x^2+6)\cdot(x+3)}=$$

$$=\frac{6x^2+5x+21}{x^3+3x^2+6x+18}.$$

7.3 Елементарні раціональні дроби

Серед правильних раціональних дробів особливу роль відіграють ***елементарні***. До них належать дроби таких чотирьох типів:

1 тип. Дріб виду $\dfrac{A}{x-a}$;

2 тип. Дріб виду $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ (де $k \geq 2$, k - натуральне число);

3 тип. Дріб виду $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (де дискримінант знаменника від'ємний, т. б. $p^2-4q<0$);

4 тип. Дріб виду $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \geq 2$ і $p^2-4q<0$).

В курсі вищої алгебри доводять, що кожний правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми деякого числа елементарних дробів.

Таким чином, для того, щоб навчитися інтегрувати правильний раціональний дріб, нам треба вміти:

1) розкладати правильний раціональний дріб на суму елементарних дробів;

2) інтегрувати елементарні дроби.

Почнемо з першої проблеми.

8 Розкладання правильного раціонального дробу на суму елементарних

Оскільки формулювання в загальному вигляді теореми про розкладання правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів є занадто громіздким, то в наступних пунктах (8.1 - 8.4), розбивши загальну теорему на декілька теорем, розглянемо окремі випадки.

8.1 Перший випадок розкладання правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів

Отже, нехай $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ – правильний раціональний дріб, причому *знаменник можна записати в формі:*

$$f(x) = (x-a)\cdot(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-d),$$

де a, b, ..., d – попарно різні, дійсні числа.

Тоді дріб $\dfrac{F(x)}{f(x)}$, згідно з загальною теоремою, можна розкласти на суму елементарних дробів типу 1. А саме:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d}.$$

Як бачимо, задача звелася до знаходження **невизначених коефіцієнтів** $A, B, \ldots, D$. Існують принаймні два методи їх знаходження. Перший метод є універсальним. Він спрацьовує в усіх випадках, які ми розглянемо. Суть його полягає в тому, що невизначені коефіцієнти знаходяться з деякої системи лінійних рівнянь. Для зручності цей метод назвемо “методом прирівнювання коефіцієнтів”. Деталі цього методу надалі з'ясовуватимуться при розгляді конкретних випадків.

Другий метод спрацьовує лише у першому випадку, т.б. коли корені знаменника дійсні і попарно різні. Цей метод ми умовно назвемо “методом підстановки конкретних значень”. Суть його також з'ясується при розгляді конкретних прикладів.

Приклад 1. Правильний раціональний дріб $\dfrac{1}{x^2-4}$ розкласти на суму елементарних дробів.

Розв'язання. Спочатку дріб запишемо в формі $\dfrac{1}{(x-2)\cdot(x+2)}$. Як бачимо, корені знаменника дійсні і різні, тому дріб можна подати у вигляді суми двох елементарних дробів $\dfrac{A}{x-2}$ і $\dfrac{B}{x+2}$ т. б.

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}.$$

Тепер наша задача – знайти коефіцієнти A та B .

Спочатку продемонструємо універсальний метод т.б. "метод прирівнювання коефіцієнтів".

Для цього виконаємо такі дії:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A\cdot(x+2)+B\cdot(x-2)}{x^2-4}=\frac{(A+B)\cdot x+2A-2B}{x^2-4}.$$

Таким чином:

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{(A+B)\cdot x+2A-2B}{x^2-4}.$$

Дроби, що стоять по різні сторони останньої рівності , тотожно рівні між собою. Крім того, у них однакові знаменники, а, отже, рівні між собою і чисельники, т. б.

$$(A+B)\cdot x+2A-2B=1.$$

Відомо (і це легко довести), що два многочлени тотожно рівні між собою тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x збігаються.

Якщо 1 подати в формі $0\cdot x+1$, то остання рівність перепишеться так:

$$(A+B)\cdot x+2A-2B=0\cdot x+1.$$

Коефіцієнт при x зліва дорівнює $A+B$. а справа – нулю. Вільний член (т.б. коефіцієнт при нульовому степені x) зліва дорівнює $2A-2B$, а справа – одиниці. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x

(згідно з вище наведеною теоремою), одержуємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

А саме:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 2A - 2B = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, матимемо: $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$.

Таким чином:

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

Тепер продемонструємо "метод підстановки конкретних значень".

Оскільки рівність

$$A \cdot (x+2) + B \cdot (x-2) = 1 \qquad (*)$$

виконується для будь-якого дійсного числа x, то вона , зокрема, виконується і для коренів знаменника $x_1 = 2$ і $x_2 = -2$. Підставивши $x_1 = 2$ в рівність (*) одержимо:

$$A \cdot (2+2) + B \cdot (2-2) = 1 \text{ або } 4A = 1, \text{ звідки } A = \frac{1}{4}.$$

Аналогічно, підставивши $x_2 = -2$ в рівність (*) одержуємо:

$$A \cdot (-2+2) + B(-2-2) = 1 \text{ або } -4B = 1, \text{ звідки } B = -\frac{1}{4}.$$

Як бачимо, другий метод виявився більш економним – адже ми уникнули процесу розв'язання системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Цілком зрозуміло, що перевага методу "підстановки конкретних значень" зростає при зростанні кількості невизначених коефіцієнтів.

Приклад 2. Правильний раціональний дріб $\frac{x+1}{x^3 + x^2 - 2x}$ розкласти на суму елементарних дробів.

Розв'язання. Спочатку виконаємо деякі необхідні тотожні перетворення, а саме – розкладемо знаменник на незвідні множники:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}=\frac{x+1}{x\cdot(x^2+x-2)}=\frac{x+1}{x\cdot(x-1)\cdot(x+2)}.$$

Оскільки знаменник має дійсні, попарно різні корені, то ми, очевидно, підпадаємо під 1-ий випадок. Тобто даний дріб можна подати у вигляді суми 3-х елементарних дробів 1-го типу. А саме:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Для знаходження коефіцієнтів A, B , C спочатку застосуємо "метод прирівнювання коефіцієнтів".

Маємо:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{(A+B+C)\cdot x^2+(A+2B-C)\cdot x-2A}{x^3+x^2-2x}.$$

Дроби тотожно рівні між собою, крім того , у них однакові знаменники, а, отже, рівні і чисельники т.б.

$$(A+B+C)\cdot x^2+(A+2B-C)\cdot x-2A=x+1.$$

Якщо $x+1$ подати у формі $0\cdot x^2+1\cdot x+1$, то остання рівність перепишеться так:

$$(A+B+C)\cdot x^2+(A+2B-C)\cdot x-2A=0\cdot x^2+1\cdot x+1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A+2B-C=1, \\ -2A=1. \end{cases}$$

Звідки $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{2}{3}$, $C=-\frac{1}{6}$.

Таким чином:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+2}.$$

Знайдемо тепер коефіцієнти A, B, C "методом підстановки конкретних значень". Для цього наш дріб запишемо так:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=$$

$$=\frac{A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x-1)}{x^3+x^2-2x}.$$

Дроби рівні між собою, крім того, їх знаменники збігаються, отже, тотожно рівні між собою і чисельники т.б.

$$A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x-1)=x+1 \qquad (**)$$

Оскільки остання рівність виконується для будь-якого дійсного числа x, то вона, зокрема, виконується і при $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-2$. (Зазначимо, що числа 0, 1, -2 – це корені знаменника даного дробу).

Підставивши $x_1=0$ в рівність (**) одержимо:

$$A\cdot(0-1)\cdot(0+2)+B\cdot 0\cdot(0+2)+C\cdot 0\cdot(0-1)=0+1=1.$$

Або $-2A=1$, звідки $A=-\frac{1}{2}$. Підставимо $x_2=1$ в рівність (**). Одержимо:

$$A\cdot(1-1)\cdot(1+2)+B\cdot 1\cdot(1+2)+C\cdot 1\cdot(1-1)=1+1=2.$$

Звідки $B=\dfrac{2}{3}$. Аналогічно, підставивши $x_3=-2$ в рівність (**) отримаємо:

$$A\cdot(-2-1)\cdot(-2+2)+B\cdot(-2)\cdot(-2+2)+C\cdot(-2)\cdot(-2-1)=-2+1=-1.$$

Звідки $C=-\dfrac{1}{6}$.

8.2 Другий випадок розкладання правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів

Як і в попередньому пункті $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ правильний раціональний дріб, причому *знаменник можна записати в формі:*

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\cdot\ldots\cdot(x-d)^{\delta},$$

де $\alpha,\beta,\ldots,\delta$ - цілі додатні числа, причому хоча б одне з них більше за одиницю. (Принагідно зазначимо, що числа α, $\beta,\ldots,\delta$ - це, за означенням, ***кратність, відповідно, коренів $a,b,\ldots,d$ многочлена $f(x)$).***

В цьому випадку дріб $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ можна розкласти на суму елементарних дробів 1-го і 2-го типів, причому в цьому розкладанні співмножнику $(x-a)^{\alpha}$ відповідає сума

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}.$$

Аналогічно, співмножнику $(x-b)^{\beta}$ відповідає сума

$$\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}}$$

і. т. д.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Правильний раціональний дріб $\dfrac{2x-1}{x^3-2x^2+x}$ розкласти на суму елементарних дробів.

Розв'язання. Спочатку даний дріб запишемо в формі

$$\frac{2x-1}{x^3-2x^2+x}=\frac{2x-1}{x\cdot(x^2-2x+1)}=\frac{2x-1}{x\cdot(x-1)^2}.$$

Згідно з загальною теоремою, дріб $\dfrac{2x-1}{x\cdot(x-1)^2}$ можна подати у вигляді суми 3-х елементарних дробів 1-го і 2-го типів. А саме:

$$\frac{2x-1}{x\cdot(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}.$$

Тепер будемо шукати коефіцієнти A, B_1, B_2. Для цього спочатку виконаємо деякі алгебраїчні перетворення:

$$\frac{2x-1}{x\cdot(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A\cdot(x-1)^2+B_1\cdot x\cdot(x-1)+B_2\cdot x}{x\cdot(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(A+B_1)\cdot x^2+(B_2-B_1-2A)\cdot x+A}{x\cdot(x-1)^2}.$$

Оскільки останній дріб дорівнює даному, причому знаменники у них рівні, то, відповідно, рівні між собою і чисельники т. б.

$$(A+B_1)\cdot x^2+(B_2-B_1-2A)\cdot x+A=2x-1=0x^2+2x-1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A + B_1 = 0, \\ B_2 - B_1 - 2A = 2, \\ A = -1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо: $A = -1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 1.$

Таким чином,

$$\frac{2x-1}{x \cdot (x-1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Приклад 2. Правильний раціональний дріб $\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 + 2x^3}$ розкласти на суму елементарних дробів.

Розв'язання. Розклавши знаменник на множники, даний дріб запишемо в формі:

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 + 2x^3} = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^3 \cdot (x+2)}.$$

Згідно з загальною теоремою, дріб $\frac{x^3 + 3x - 1}{x^3 \cdot (x+2)}$ можна подати у вигляді суми 4-х елементарних дробів. А саме:

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 + 2x^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B}{x+2}.$$

Для знаходження коефіцієнтів A_1, A_2, A_3, B насамперед виконаємо деякі алгебраїчні перетворення:

$$\frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 + 2x^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B}{x+2} =$$

$$= \frac{(A_1 + B) \cdot x^3 + (2A_1 + A_2) \cdot x^2 + (2A_2 + A_3) \cdot x + 2A_3}{x^3 \cdot (x+2)}.$$

З останньої рівності випливає:

$$(A_1+B)\cdot x^3+(2A_1+A_2)\cdot x^2+(2A_2+A_3)\cdot x+2A_3=x^3+0x^2+3x-1.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної x, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1+B=1, \\ 2A_1+A_2=0, \\ 2A_2+A_3=3, \\ 2A_3=-1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержуємо:

$$A_1=-\frac{7}{8},\quad A_2=\frac{7}{4},\quad A_3=-\frac{1}{2},\quad B=\frac{15}{8}.$$

Таким чином,

$$\frac{x^3+3x-1}{x^4+2x^3}=-\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{x}+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{x+2}.$$

8.3 Третій випадок розкладання правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів

Як і в попередньому пункті $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Знаменник $f(x)$ дробу $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ можна подати у формі:

$$f(x)=(x^2+px+q)\cdot(x^2+lx+s)\cdot\ldots\cdot(x-a)^\alpha\cdot\ldots\cdot(x-d)^\delta,$$

причому степінь будь-якого квадратичного співмножника дорівнює 1, а його дискримінант менший нуля.

Тоді правильний раціональний дріб $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ можна розкласти на суму елементарних дробів типу 1, 2, 3 (див. п. 7.3), причому, як і в попередньому випадку, в цьому розкладанні співмножнику $(x-a)^\alpha$ відповідає сума

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha},$$

а кожному квадратному співмножнику (x^2+lx+s) ставиться у відповідність елементарний дріб 3-го типу $\frac{Ax+B}{x^2+lx+s}$.

Приклад 1. Правильний раціональний дріб $\frac{2x+4}{x^3+1}$ розкласти на суму елементарних.

Розв'язання. Спочатку даний дріб запишемо у формі $\frac{2x+4}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}$. Згідно з загальною теоремою, дріб $\frac{2x+4}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}$ можна подати у вигляді суми двох елементарних дробів. А саме:

$$\frac{2x+4}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Тепер будемо шукати коефіцієнти A, B, C. Попередньо праву частину останньої рівності зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{2x+4}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{A\cdot(x^2-x+1)+(Bx+C)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}.$$

З останньої рівності випливає:

$$(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C=2x+4=0x^2+2x+4.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях змінної x, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=2, \\ A+C=4. \end{cases}$$

Звідки $A=\frac{2}{3}$, $B=-\frac{2}{3}$, $C=\frac{10}{3}$.

Таким чином,

$$\frac{2x+4}{x^3+1}=\frac{2}{3(x+1)}-\frac{2x-10}{3(x^2-x+1)}.$$

8.4 Четвертий випадок розкладання правильного раціонального дробу на суму елементарних дробів

Знаменник $f(x)$ правильного раціонального дробу $\frac{F(x)}{f(x)}$ має форму

$$f(x)=(x^2+px+q)^r\cdot(x^2+lx+s)^m\cdot\ldots\cdot(x-a)^\alpha\cdot\ldots\cdot(x-d)^\delta,$$

причому степінь хоча б одного квадратного тричлена більша за 1, а дискримінант кожного квадратного тричлена менший нуля.

Тоді правильний раціональний дріб $\frac{F(x)}{f(x)}$ можна розкласти на суму елементарних дробів типу 1, 2, 3, 4, причому в цьому розкладанні співмножнику $(x-a)^\alpha$ відповідає сума

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_3}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$$

а співмножнику $(x^2+lx+s)^m$ ставиться у відповідність сума

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+lx+s}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+lx+s)^2}+\ldots+\frac{B_mx+C_m}{(x^2+lx+s)^m}.$$

Приклад 1. Правильний раціональний дріб $\dfrac{x^3+1}{(x^2+1)^2}$ розкласти на суму елементарних дробів.

Розв'язання. Згідно з загальною теоремою, дріб $\dfrac{x^3+1}{(x^2+1)^2}$ можна подати в такій формі:

$$\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}=\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}.$$

Тепер будемо шукати коефіцієнти A_1, A_2, B_1, B_2. Для цього спочатку праву частину останньої рівності зведемо до спільного знаменника:

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}=\frac{(A_1x+B_1)(x^2+1)+(A_2x+B_2)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{A_1x^3+B_1x^2+(A_1+A_2)x+B_1+B_2}{(x^2+1)^2}.$$

З останньої рівності випливає:

$$A_1x^3+B_1x^2+(A_1+A_2)x+B_1+B_2=x^3+1$$

Прирівнявши коефіцієнти при рівних степенях змінної x, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A_1=1, \\ B_1=0, \\ A_1+A_2=0, \\ B_1+B_2=1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержуємо:

$$A_1=1, \quad B_1=0, \quad A_2=-1, \quad B_2=1.$$

Таким чином:

$$\frac{x^3+1}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{x-1}{(x^2+1)^2}.$$

Завдання для самостійної роботи

Правильні раціональні дроби розкласти на суму елементарних:

1. $\dfrac{2x+1}{x^2+2x-8}$ Відповідь: $\dfrac{5}{6(x-2)}+\dfrac{7}{6(x+4)}$.

2. $\dfrac{x^2+2x-5}{(x-1)^2(x+3)}$ Відповідь: $\dfrac{9}{8(x-1)}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}-\dfrac{1}{8(x+3)}$.

3. $\dfrac{4x+5}{x^3-2x^2-x+2}$ Відповідь: $\dfrac{1}{6(x+1)}-\dfrac{9}{2(x-1)}+\dfrac{13}{3(x-2)}$.

4. $\dfrac{3x^2+x+7}{(x-5)(x+3)(x+2)}$ Відповідь: $\dfrac{31}{8(x+3)}+\dfrac{87}{56(x-5)}-\dfrac{17}{7(x+2)}$.

5. $\dfrac{x^2+8}{x^3-4x^2+x-4}$ Відповідь: $\dfrac{24}{17(x-4)}-\dfrac{7(x+4)}{17(x^2+1)}$.

6. $\dfrac{5x-1}{(x+2)^2(x+5)(x-1)}$ Відповідь: $\dfrac{2}{27(x-1)}+\dfrac{13}{27(x+5)}-\dfrac{5}{9(x+2)}+$

$$+\frac{11}{9(x+2)^2}.$$

7. $\dfrac{2x-4}{x^3+8}$ Відповідь: $\dfrac{2(x-1)}{3(x^2-2x+4)}-\dfrac{2}{3(x+2)}$.

8. $\dfrac{3x^2}{(x^2+1)^2(x+2)}$ Відповідь: $\dfrac{12}{25(x+2)}+\dfrac{3(x-2)}{5(x^2+1)^2}-\dfrac{12(x-2)}{25(x^2+1)}$.

9. Ділення многочленів

9.1 Теорема про ділення многочленів

В пунктах 8.1 – 8.4 ми показали як правильний раціональний дріб розкладається на суму елементарних дробів. Щодо неправильних раціональних дробів, то тут має місце така

Теорема. **Якщо** $\dfrac{Q(x)}{f(x)}$ **– неправильний раціональний дріб, то його єдиним способом можна подати в формі:**

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{f(x)},$$

де $M(x)$ **– многочлен, а** $\dfrac{R(x)}{f(x)}$ **– правильний раціональний дріб.**

Процес знаходження многочленів $M(x)$ та $R(x)$ називається діленням многочлена $Q(x)$ на многочлен $f(x)$. (Зазначимо, що $M(x)$ називають **цілою частиною**, а $R(x)$ **- остачею**).

9.2 Алгоритм ділення многочленів

Ми подамо алгоритм ділення многочленів в загальній формі і паралельно, на конкретному прикладі, продемонструємо його.

Отже, нехай потрібно поділити многочлен $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ на многочлен $f(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ $(n \geq m)$. Для конкретності нехай $Q(x) = x^3 - 1$ і $f(x) = x + 4$.

1-ий крок. Ділимо старший член $a_n x^n$ **многочлена** $Q(x)$ **на старший член** $b_m x^m$ **многочлена** $f(x)$. Одержуємо $\dfrac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}$. Для нашого прикладу $a_n x^n = x^3$, а $b_m x^m = x$. Отже, $\dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m} = x^{3-1} = x^2$.

2-ий крок. Множимо $\dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ **на многочлен** $f(x)$ **.** Одержуємо:

$$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0).$$

Для даного прикладу маємо:

$$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}(b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0) = x^2(x+4) = x^3 + 4x^2.$$

3-ій крок. Від многочлена $Q(x)$ віднімаємо многочлен, який ми одержали на 2-му кроці. А саме:

$$(a_n x^n + \ldots + a_0) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}(b_m x^m + \ldots + b_0) = a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a'_0,$$

де $a'_{n-1} = a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m}b_{m-1}$, $a'_{n-2} = a_{n-2} - \frac{a_n}{b_m}b_{m-2}$ і т. д.

Звідки, $\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{R_1(x)}{f(x)}$, де $R_1(x) = a'_{n-1}x^{n-1} + a'_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a'_0$

Зазначимо, що многочлен $R_1(x)$ називається першою остачею від ділення $Q(x)$ на $f(x)$.

Для даного прикладу третій крок виконується так:

$$(a_n x^n + \ldots + a_0) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}(b_m x^m + \ldots + b_0) = (x^3 - 1) - x^2(x+4) =$$

$$= x^3 - 1 - x^3 - 4x^2 = -4x^2 - 1.$$

Отже, перша остача $R_1(x)$ дорівнює $-4x^2 - 1$.

Таким чином,

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \frac{R_1(x)}{f(x)}.$$

Для даного прикладу:

$$\frac{x^3 - 1}{x+4} = x^2 + \frac{-4x^2 - 1}{x+4} = x^2 - \frac{4x^2 + 1}{x+4}.$$

Подальші наші дії, по суті, повторюють перші 3 кроки.

Нехай n_1 – степінь першої остачі і a'_{n_1} – її старший коефіцієнт (якщо $a'_{n-1} \neq 0$, то $n_1 = n-1$).

Якщо $n_1 \geq m$, то, виконавши з многочленами $R_1(x)$ та $f(x)$ такі самі дії (тобто кроки 1-3), як і з многочленами $Q(x)$ та $f(x)$, одержуємо:

$$\frac{R_1(x)}{f(x)} = \frac{a'_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} + \frac{R_2(x)}{f(x)},$$

тому

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} x^{n_1-m} + \frac{R_2(x)}{f(x)}.$$

Многочлен $R_2(x)$ називається другою остачею при діленні многочлена $Q(x)$ на многочлен $f(x)$. Якщо степінь другої остачі більший або дорівнює степеню многочлена $f(x)$, то з другою остачею та многочленом $f(x)$ ми виконуємо дії аналогічні тим, які ми проробили з $R_1(x)$та $f(x)$. І так далі. Описаний процес припиняється, коли ми одержимо остачу $R(x)$, степінь якої нижчий за степінь многочлена $f(x)$. Таким чином, реалізуючи щойно описаний алгоритм, ми одержуємо рівність:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{f(x)},$$

де $M(x)$ – многочлен, а $\dfrac{R(x)}{f(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Оскільки в даному прикладі степінь першої остачі (дорівнює 2) більший за степінь многочлена $x+4$, то для многочленів $R_1(x) = -4x^2 - 1$ та $f(x) = x+4$ ми виконуємо кроки 1-3 нашого алгоритму:

<u>1-й крок</u>. Ділимо старший член $-4x^2$ многочлена $R_1(x)$ на старший

член x многочлена $x+4$. Одержуємо: $\dfrac{-4x^2}{x}=-4x$.

2-й крок. Множимо $-4x$ на многочлен $f(x)=x+4$. Маємо:

$-4x\cdot(x+4)=-4x^2-16x$.

3-й крок. Від многочлена $R_1(x)=-4x^2-1$ віднімаємо многочлен, який ми одержали на 2-му кроці. Отримуємо: $-4x^2-1-(-4x^2-16x)=16x-1$

Многочлен $R_2(x)=16x-1$ є другою остачею при діленні x^3-1 на $x+4$. Оскільки степінь другої остачі дорівнює степеню многочлена $f(x)=x+4$, то з многочленами $R_2(x)=16x-1$ та $f(x)=x+4$ ми знов виконаємо кроки 1-3 нашого алгоритму.

1-й крок. Ділимо старший член многочлена $R_2(x)$ (він дорівнює $16x$) на старший член многочлена $x+4$ (він дорівнює x). Отримуємо 16.

2-й крок. Множимо 16 на многочлен $f(x)$. Одержуємо $16x+64$.

3-й крок. Від многочлена $R_2(x)=16x-1$ віднімаємо многочлен, який ми одержали на другому кроці. Отримуємо: $16x-1-(16x+64)=-65$.

Отже, третя остача $R_3(x)$ дорівнює -65. Оскільки її степінь (дорівнює 0) строго менший ніж степінь многочлена $f(x)=x+4$, то на цьому процес припиняється і ми записуємо відповідь:

$$\frac{x^3-1}{x+4}=x^2-4x+16-\frac{65}{x+4}.$$

Щойно наведений алгоритм на практиці компактно реалізується за відомою схемою – “ділення кутом”. Проілюструємо її на тому ж самому прикладі. Для цього, насамперед, многочлен x^3-1 подамо в формі x^3+0x^2+0x-1. Тоді:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+0x^2+0x-1 & x+4 \\ \hline
\underline{x^3+4x^2} & x^2-4x+16 \\
\quad -4x^2+0x-1 & \\
\quad \underline{-4x^2-16x} & \\
\qquad\qquad 16x-1 & \\
\qquad\qquad \underline{16x+64} & \\
\qquad\qquad\quad -65 &
\end{array}
$$

Тут $-4x^2-1=R_1(x)$ – перша остача, $16x-1=R_2(x)$ - друга остача, - 65 - остача. Таким чином,

$$\frac{x^3-1}{x+4}=x^2-4x+16-\frac{65}{x+4}.$$

Наведемо ще один приклад ділення кутом двох многочленів (деталі реалізації алгоритму пропускаємо).

Приклад. Поділити многочлен $3x^4+2x-1$ на многочлен x^2+4 .

Розв'язання. Насамперед многочлен $3x^4+2x-1$ подамо в формі $3x^4+0x^3+0x^2+2x-1$, а многочлен x^2+4 в формі x^2+0x+4 . Тоді

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4+0x^3+0x^2+2x-1 & x^2+0x+4 \\ \hline
\underline{3x^4+0x^3+12x^2} & 3x^2-12 \\
\qquad -12x^2+2x-1 & \\
\qquad \underline{-12x^2+0x-48} & \\
\qquad\qquad\quad 2x+47 &
\end{array}
$$

Отже,

$$\frac{3x^4+2x-1}{x^2+4}=3x^2-12+\frac{2x+47}{x^2+4}.$$

Тут $R_1(x)=-12x^2+2x-1$ - перша остача, а $R(x)=2x+7$ - остача.

Многочлен $F(x)$ поділити на многочлен $f(x)$.

1. $F(x)=x^2+x+1,$ $f(x)=2x-7.$ Відповідь: $\dfrac{9}{4}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{67}{4(2x-7)}.$

2. $F(x)=2x^2-x+9,$ $f(x)=2x+1.$ Відповідь: $x-1+\dfrac{10}{2x+1}.$

3. $F(x)=3x^3-4x+2,$ $f(x)=x+1.$ Відповідь: $3x^2-3x-1+\dfrac{3}{x+1}.$

4. $F(x)=x^3+6x^2+4,$ $f(x)=x+3.$ Відповідь: $x^2+3x-9+\dfrac{31}{x+3}.$

5. $F(x)=x^4+2x^3+x+1,$ $f(x)=x^4+2.$ Відповідь: $1+\dfrac{2x^3+x-1}{x^4+2}.$

6. $F(x)=2x^4+3x+4,$ $f(x)=x+5.$ Відповідь: $2x^3-10x^2+50x-247+\dfrac{1239}{x+5}.$

7. $F(x)=x^5+2x^3+x+2,$ $f(x)=x^4+1.$ Відповідь: $x+\dfrac{2(x^3+1)}{x^4+1}.$

8. $F(x)=2x^6-1,$ $f(x)=x^2+4.$ Відповідь: $2x^4-8x^2+32-\dfrac{129}{x^2+4}.$

10 Інтегрування елементарних дробів

10.1 Інтегрування елементарних дробів 1-го типу

Нагадаємо (див. п. 7.3), що елементарний дріб виду $\frac{A}{x-a}$ належить до 1-го типу. Його інтегрують так:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=\left[\begin{array}{ll}x-a=t, & \text{то}\\ dx=dt & \end{array}\right]=\int\frac{A}{t}dt=A\int\frac{1}{t}dt=A\ln|t|+C=$$
$$=A\ln|x-a|+C.$$

10.2 Інтегрування елементарних дробів 2-го типу

Нагадаємо (див. п. 7.3), що елементарний дріб виду $\frac{A}{(x-a)^k}$, де $k\geq 2$, належить до 2-го типу. Його інтегрують так:

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\left[\begin{array}{ll}x-a=t, & \text{то}\\ dx=dt & \end{array}\right]=\int\frac{A}{t^k}dt=A\int\frac{1}{t^k}dt=A\int t^{-k}dt=A\frac{t^{-k+1}}{-k+1}=$$
$$=A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C.$$

Приклад. Знайти $\int\frac{2}{(x-4)^3}dx.$

Розв'язання.

$$\int\frac{2}{(x-4)^3}=\left[\begin{array}{ll}x-4=t, & \text{то}\\ dx=dt & \end{array}\right]=\int\frac{2}{t^3}dt=2\int t^{-3}dt=2\frac{t^{-3+1}}{-3+1}+C=$$
$$=2\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{t^2}+C=-\frac{1}{(x-4)^2}+C.$$

10.3 Інтегрування елементарних дробів 3-го типу

Нагадаємо (див. п. 7.3), що елементарний дріб виду $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (де $D=p^2-4q<0$) належить до 3-го типу. Його інтегрують так:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\left(\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{A\cdot p}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\int\left(\frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{B-\frac{A\cdot p}{2}}{x^2+px+q}\right)dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\int\frac{1}{x^2+px+q}dx=\begin{bmatrix}\textit{зазначимо, що}\\ d(x^2+px+q)=\\ =(2x+p)dx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\int\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=$$

$$=\begin{bmatrix}\textit{нехай}\quad x+\frac{p}{2}=t,\quad \textit{то}\quad dx=dt.\\ \textit{Крім}\quad \textit{того,}\quad \textit{оскільки}\quad q-\frac{p^2}{4}>0,\\ \textit{то}\quad q-\frac{p^2}{4}=a^2,\quad \textit{для}\quad \textit{деякого}\quad a\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{A\cdot p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{\left(B-\dfrac{A\cdot p}{2}\right)}{a}arctg\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-A\cdot p}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Приклад. Знайти $\int\frac{(2x+3)}{x^2+2x+4}dx.$

Розв'язання.

$$\int\frac{(2x+3)}{x^2+2x+4}dx=\int\frac{(2x+2+1)}{x^2+2x+4}dx=\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+4}+\frac{1}{x^2+2x+4}\right)dx=$$

$$=\int\frac{(2x+2)}{x^2+2x+4}dx+\int\frac{1}{x^2+2x+4}dx=\begin{bmatrix}\text{зазначимо, що}\\ d(x^2+2x+4)=(2x+2)dx\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{d(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}+\int\frac{dx}{(x+1)^2+3}=\begin{bmatrix}\text{нехай}\quad x+1=t,\\ \text{то}\quad dx=dt\end{bmatrix}=$$

$$=\ln\left|x^2+2x+4\right|+\int\frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\ln\left|x^2+2x+4\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\ln\left|x^2+2x+4\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

10.4 Інтегрування елементарних дробів 4-го типу

Нагадаємо (див. п. 7.3.), що елементарний дріб виду $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (де $D=p^2-4q<0$ і $k\geq 2$) належить до 4-го типу. Спочатку під знаком інтеграла виконаємо деякі необхідні перетворення:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{\left(\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{AP}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}dx =$$

$$= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx + \int \frac{\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k}dx. \qquad (1)$$

Перший інтеграл $\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx$ знаходимо, скориставшись підстановкою $x^2+px+q=t$. Тоді $dt=(2x+p)dx$. Тому

$$\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{dt}{t^k} = \frac{A}{2}\int t^{-k}dt =$$

$$= \frac{A}{2}\cdot\frac{t^{1-k}}{1-k}+C = \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{(1-k)\cdot(x^2+px+q)^{k-1}}+C.$$

Другий інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$ перетворимо так:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \textit{Нехай} \quad x+\frac{p}{2}=z, \quad \textit{тоді} \quad dz=dx. \\ \textit{Крім того, оскільки} \quad q-\frac{p^2}{4}>0, \\ \textit{то} \quad q-\frac{p^2}{4}=m^2 \quad \textit{для деякого} \quad m. \end{array}\right] == \int \frac{dz}{(z^2+m^2)^k}.$$

До останнього інтеграла застосуємо підстановку $m\cdot tgu=z$, тоді

$dz = m \cdot \dfrac{du}{\cos^2 u}$. Крім того, $(z^2+m^2)^k = (m^2 \cdot tg^2 u + m^2)^k =$

$= m^{2k} \cdot \left(\dfrac{\sin^2 u}{\cos^2 u} + 1\right)^k = m^{2k} \cdot \left(\dfrac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\cos^2 u}\right)^k = \dfrac{m^{2k}}{\cos^{2k} u}$. Підставляючи значення dz та $(z^2+m^2)^k$ в інтеграл $\int \dfrac{dz}{(z^2+m^2)^k}$ одержуємо формулу:

$$\boxed{\int \frac{dz}{(z^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^{2k-1}} \cdot \int \cos^{2(k-1)} u du} \qquad (*)$$

Таким чином, враховуючи рівність (1), ми навчились інтегрувати елементарні дроби 4-го типу. (Див. також п. 5.5)

Приклад. Знайти $\int \dfrac{(2x+1)dx}{(x^2+4)^2}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+4)^2} = \int \left(\frac{2x}{(x^2+4)^2} + \frac{1}{(x^2+4)^2}\right)dx = \int \frac{2xdx}{(x^2+4)^2} +$$

$$+ \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{d(x^2+4)}{(x^2+4)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = -\frac{1}{x^2+4} + \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \qquad (2)$$

Інтеграл $\int \dfrac{dx}{(x^2+4)^2}$ будемо знаходити за формулою (*). А саме:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \int \frac{dx}{(x^2+2^2)^2} = \frac{1}{2^3} \cdot \int \cos^2 udu = \frac{1}{8} \cdot \int \cos^2 udu, \text{де } 2tgu = x .$$

Далі, $\dfrac{1}{8} \int \cos^2 udu = \left[\cos^2 u = \dfrac{1+\cos 2u}{2}\right] = \dfrac{1}{8} \int \dfrac{1+\cos 2u}{2} du =$

$$= \frac{1}{16} \int (1+\cos 2u)du = \frac{1}{16} \int du + \frac{1}{16} \int \cos 2udu = \frac{1}{16} u + \frac{1}{32} \sin 2u =$$

$$=\frac{1}{16}u+\frac{1}{32}\cdot 2\sin u\cdot\cos u=\left[\begin{array}{l} u=arctg\frac{x}{2}, \text{тоді} \\ \sin u=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\ \cos u=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot arctg\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{16}\cdot arctg\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{x^2+4}.$$

Підставляючи значення інтеграла $\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}$ в рівність (2), остаточно одержуємо:

$$\int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+4)^2}=-\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{16}\cdot arctg\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x}{x^2+4}+C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{4dx}{3x-1}$. Відповідь: $\frac{4}{3}\ln|3x-1|$.

2. $\int\frac{5dx}{(x+1)^3}$. Відповідь: $-\frac{5}{2(x+1)^2}$.

3. $\int\frac{dx}{x^2+3x+10}$. Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{31}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{31}}$.

4. $\int\frac{dx}{2x^2+x+3}$. Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{23}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{23}}$.

5. $\int\frac{(3x-1)dx}{x^2+3x+9}$. Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2+3x+9)-\frac{11}{3\sqrt{3}}arctg\frac{2x+3}{3\sqrt{3}}$.

6. $\int\frac{(4x-1)dx}{2x^2+x+1}$. Відповідь: $\ln(2x^2+x+1)-\frac{4}{\sqrt{7}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{7}}$.

7. $\int\frac{(x+7)dx}{(x^2+1)^2}$. Відповідь: $\frac{7x-1}{2(x^2+1)}+\frac{7}{2}arctgx.$

8. $\int\frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$. Відповідь: $\frac{x+1}{4(x^2+2x+3)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$

11 Інтегрування довільного раціонального дробу

11.1 Алгоритм інтегрування довільного раціонального дробу

Тепер в нашому розпорядженні повний математичний апарат для інтегрування будь-якого раціонального дробу.

Наведемо алгоритм інтегрування.

1-й випадок. Підінтегральний дріб – правильний

а) за алгоритмом, що наведений в пп. 8.1-8.4, розкладаємо правильний раціональний дріб на суму елементарних дробів;

в) інтегруємо (див. пп. 10.1-10.4) кожний елементарний доданок.

2-й випадок. Підінтегральний дріб $\frac{Q(x)}{f(x)}$ – неправильний

а) за алгоритмом, що наведений в 9-му параграфі, виконуємо операцію ділення многочлена $Q(x)$ на многочлен $f(x)$. Тобто знаходимо многочлени $M(x)$ і $R(x)$ такі, що $\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{R(x)}{f(x)}$, де $\frac{R(x)}{f(x)}$ – правильний раціональний дріб;

б) за алгоритмом, що наведений в 8-му параграфі, правильний раціональний дріб $\frac{R(x)}{f(x)}$ розкладаємо на суму елементарних дробів;

в) інтегруємо кожний елементарний дріб (див. пп. 10.1-10.4).

Наведемо приклади.

Приклад 1. Знайти $\int \frac{2x-1}{x^3+2x-x^2-2}dx.$

Розв'язання. Підінтегральний дріб - правильний. Спочатку виконаємо деякі необхідні перетворення . А саме:

$$\frac{2x-1}{x^3+2x-x^2-2}=\frac{2x-1}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{2x-1}{x^2(x-1)+2(x-1)}=\frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x^2+2)}.$$

Розкладемо правильний раціональний дріб $\frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x^2+2)}$ на суму елементарних дробів. Будемо діяти за алгоритмом, що наведений в 8-му параграфі. Отже, існують числа A, B, C такі, що виконується рівність

$\frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$. Тепер знайдемо A, B, C

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}=\frac{A(x^2+2)+(Bx+C)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2+2)}=$$
$$=\frac{(A+B)x^2+(C-B)x+2A-C}{(x-1)\cdot(x^2+2)}.$$

Отже, $\frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x^2+2)}=\frac{(A+B)x^2+(C-B)x+2A-C}{(x-1)\cdot(x^2+2)}.$

Останні дроби тотожно рівні, крім того, у них однакові знаменники, а, отже, тотожно рівні і чисельники. Таким чином:

$$2x-1=0x^2+2x-1=(A+B)x^2+(C-B)x+2A-C.$$

Відомо, що два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x рівні між собою. Звідси одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-B=2, \\ 2A-C=-1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержуємо:

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\quad C=\frac{5}{3}.$$

Таким чином:

$$\frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x^2+2)}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-5}{3(x^2+2)} \qquad (1)$$

Приступимо тепер до інтегрування елементарних дробів $\frac{1}{3(x-1)}$ і $\frac{x-5}{3(x^2+2)}$.

$$\int\frac{1}{3(x-1)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}=\frac{1}{3}\ln|x-1|+C \qquad (2)$$

$$\int\frac{(x-5)dx}{3(x^2+2)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{2x}{2(x^2+2)}-\frac{5}{x^2+2}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{2xdx}{2(x^2+2)}-\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+2)}{x^2+2}-\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{6}\ln(x^2+2)-\frac{5}{3\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}} \qquad (3)$$

Враховуючи рівності (1), (2), (3), одержуємо остаточний результат:

$$\int\frac{(2x-1)dx}{x^3+2x-x^2-2}=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{5}{3\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Приклад 2. Знайти $\int\frac{2x^5+3x-1}{x^3+1}dx.$

Розв'язання. Оскільки підінтегральний дріб неправильний, то спочатку виконаємо операцію ділення чисельника на знаменник. Будемо діяти за схемою – "ділення кутом".

$$\begin{array}{l|l} 2x^5+0x^4+0x^3+0x^2+3x-1 & \underline{x^3+1} \\ \underline{2x^5 \qquad\qquad\qquad +2x^2} & 2x^2 \\ \qquad\qquad\qquad -2x^2+3x-1 & \end{array}$$

Отже,

$$\frac{2x^5+3x-1}{x^3+1}=2x^2+\frac{-2x^2+3x-1}{x^3+1}=2x^2-\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} \qquad (1)$$

Як бачимо дріб $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+1}$ – правильний, тому спочатку розкладемо його на суму елементарних дробів.

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}=\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=\frac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}.$$

Отже, $\dfrac{2x^2-3x+1}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=\dfrac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}$.

З останньої рівності випливає:

$$(A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C=2x^2-3x+1.$$

Нагадаємо, що многочлени рівні між собою тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x – рівні. Звідси одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ B+C-A=-3, \\ A+C=1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримуємо: $A=2, \quad B=0, \quad C=-1$.

Таким чином:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}=\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x^2-x+1}.$$

Тепер приступаємо до інтегрування:

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x^2-x+1}\right)dx=\int\frac{2}{x+1}dx-\int\frac{1}{x^2-x+1}dx=$$

$$=2\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=2\ln|x+1|-\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\ln|x+1|-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Враховуючи рівності (1) і (2), завершимо інтегрування:

$$\int\frac{2x^5+3x-1}{x^3+1}dx=\int\left(2x^2-\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}\right)dx=\int 2x^2dx-\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx=$$

$$=\frac{2}{3}x^3-2\ln|x+1|+\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{dx}{x\cdot(x+1)}$. Відповідь: $\ln|x|-\ln|x+1|$.

2. $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$. Відповідь: $\frac{1}{3}\ln|x-5|-\frac{1}{3}\ln|x-2|$.

3. $\int\frac{2xdx}{(x-1)^2(x+3)}$. Відповідь: $\frac{1}{2(1-x)}+\frac{3\ln|x-1|}{8}-\frac{3\ln|x+3|}{8}$.

4. $\int\frac{(x+3)dx}{3-x}$. Відповідь: $-x-6\ln|x-3|$.

5. $\int\frac{x^4dx}{1-x}$. Відповідь: $-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ln|x-1|$.

6. $\int\frac{dx}{x^4-x^2}$. Відповідь: $\frac{1}{x}+\frac{\ln|x-1|}{2}-\frac{\ln|x+1|}{2}$.

7. $\int \frac{dx}{x\cdot(x^2+1)}$. Відповідь: $\ln|x| - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$.

8. $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$. Відповідь: $x+\frac{x^2}{2} - arctgx + \ln|x-1| - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$.

9. $\int \frac{(x^3+x-1)dx}{(x^2+2)^2}$. Відповідь: $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{\ln(x^2+2)}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} arctg\frac{x}{\sqrt{2}}$.

12 Інтегрування деяких тригонометричних функцій

12.1 Поняття про раціональні функції

Функція виду $A\cdot U_1^{k_1}\cdot U_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot U_n^{k_n}$, де A – константа, а $k_1, k_2,\ldots,k_n$ – невід'ємні цілі числа, називається **одночленом** від змінних $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

Скінчена сума одночленів від n змінних називається **многочленом від n змінних.** Наприклад, $x^2-3xy+xy^3+y-1$ - це многочлен від двох змінних x і y, а $x^3-5xyz^2+xy-zx^3+z$ – це многочлен від 3-х змінних x, y, z.

Дріб, чисельник і знаменник якого є многочленами від n змінних $U_1, U_2, \ldots, U_n$ називається **раціональним дробом** (або – **раціональною функцією**) від n змінних $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

Наприклад, $\frac{xy+x-y+4xy^6+7}{x^2-y+xy^3}$ є раціональною функцією від 2-х змінних x і y.

Раціональна функція від n змінних $U_1, U_2, \ldots, U_n$ позначається через $R(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

Якщо в раціональну функцію $R(U_1, U_2, ..., U_n)$ від змінних $U_1, U_2, ..., U_n$ замість $U_1, U_2, ..., U_n$ відповідно підставити функції $f_1(x), f_2(x), ... , f_n(x)$ однієї змінної x, то ми одержимо **раціональну функцію від** $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$. Її позначають через $R(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$. Наприклад, функція $\frac{\sin^2 x + \cos x - 2}{\cos^3 x \cdot \sin x + 4\sin x}$ є раціональною функцією від $\sin x$, $\cos x$, а функція $\frac{\sin x + \ln x \cdot \cos x - 4\cos^3 x}{\ln^2 x - \sin x \cdot \cos x + 1}$ є раціональною функцією від $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$.

12.2 Універсальна тригонометрична підстановка

Якщо підінтегральна функція є раціональною від тригонометричних функцій, то такий інтеграл завжди можна звести до інтеграла виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, бо, як відомо з шкільного курсу тригонометрії, всі інші тригонометричні функції можна раціонально виразити через функції $\sin x$ і $\cos x$. Крім того відомо, що всі тригонометричні функції раціонально виражаються через $tg\frac{x}{2} = t$. Оскільки ж при цьому і dx раціонально виражається через t і dt, то принципово можливо інтегрувати функцію виду $R(\sin x, \cos x)$. (Зазначимо, що підстановка $tg\frac{x}{2} = t$ називається **універсальною тригонометричною підстановкою**). Справді,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{array}{l} \textit{чисельникі і знаменник} \\ \textit{ділимо на } \cos^2\frac{x}{2} \end{array}\right] = \frac{2tg\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \left[\begin{matrix}\textit{чисельник і знаменник}\\ \textit{ділимо на } \cos^2\frac{x}{2}\end{matrix}\right] = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далі, оскільки $tg\frac{x}{2}=t$, то $\frac{x}{2}=arctgt$ і $x=2arctgt$, тому

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклад. Знайти $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x} = \left[\begin{matrix} tg\frac{x}{2}=t, \quad \textit{то} \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}, \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right] =$$

$$= \int\frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\left(3+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}\right)} = \int\frac{2dt}{3(1+t^2)+5(1-t^2)} = \int\frac{2dt}{8-2t^2} =$$

$$= -\int\frac{dt}{t^2-4} = \left[\begin{matrix}\textit{див. таблицю}\\ \textit{інтегралів}\end{matrix}\right] = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{tg\frac{x}{2}+2}\right| + C.$$

12.3 Частинні підстановки

Універсальна тригонометрична підстановка може привести до громіздких викладок. В деяких випадках можна спробувати скористатися однією з нижченаведених підстановок. А саме:

1) якщо раціональна функція $R(\sin x, \cos x)$ непарна відносно синуса, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то застосовують підста -

новку $\cos x = t$;

2) якщо раціональна функція $R(\sin x, \ \cos x)$ непарна відносно косинуса, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рекомендується підстановка $\sin x = t$;

3) якщо раціональна функція $R(\sin x, \cos x)$ парна відносно синуса і косинуса, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то використовують підстановку $tgx = t$.

Зауваження. Застосування вищенаведених підстановок носить не обов'язковий, а, так би мовити, рекомендаційний характер. Наприклад, функція $\frac{1}{\sin^3 x}$ є непарною відносно синуса, проте, як легко переконатися, підстановка $\cos x = t$ призводить до більш громіздких викладок ніж універсальна тригонометрична підстановка.

Наведемо приклади.

Приклад 1. Знайти $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $\cos^4 x \cdot \sin^3 x$ – непарна відносно синуса, то скористаємось підстановкою $\cos x = t$, тоді $dt = -\sin x dx$.

Далі,

$$\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int \cos^4 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx =$$

$$= -\int t^4 \cdot (1 - t^2) dt = -\int (t^4 - t^6) dt = \int (t^6 - t^4) dt = \int t^6 dt - \int t^4 dt =$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{\cos^3 x dx}{4 \sin^2 x - 1}$.

Розв'язання. Легко перевірити, що підінтегральна функція – непарна відносно косинуса, тому скористаємось підстановкою $\sin x = t$, тоді $dt = \cos x dx$.

Далі,

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{4\sin^2 x - 1} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{4\sin^2 x - 1} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cdot \cos x dx}{4\sin^2 x - 1} = \int \frac{(1-t^2)dt}{4t^2 - 1}.$$

Для того, щоб проінтегрувати неправильний дріб $\frac{1-t^2}{4t^2-1}$ виконаємо спочатку операцію ділення многочлена на многочлен.

$$\begin{array}{r|l} -t^2 + 0t \quad +1 & \underline{4t^2 - 1} \\ \underline{-t^2 \qquad\quad +\frac{1}{4}} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \end{array}$$

Отже, $\frac{1-t^2}{4t^2-1} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4(4t^2-1)}$.

Повертаємося до інтегрування:

$$\int \frac{(1-t^2)dt}{4t^2-1} = \int \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4(4t^2-1)} \right) dt = -\frac{1}{4}t - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{1-4t^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}t - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{4\left(\frac{1}{4} - t^2\right)} = -\frac{1}{4}t - \frac{3}{16}\int \frac{dt}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - t^2} = -\frac{1}{4}t - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t}{\frac{1}{2}-t}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}t - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right| + C = -\frac{1}{4}\sin x - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+2\sin x}{1-2\sin x}\right| + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція парна відносно синуса і косинуса, тому застосуємо підстановку $tgx = t$, тоді $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Далі,

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \left(3 + \frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \left[\frac{dx}{\cos^2 x} = dt, \quad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = t^2\right] =$$

$$= \int \frac{dt}{3+4t^2} = \int \frac{dt}{4\left(\frac{3}{4}+t^2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 + t^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{2tgx}{\sqrt{3}} + C.$$

12.4 Інтегрування добутку синусів і косинусів

В цьому пункті мова йтиме про інтегрування таких функцій: $\sin ax \cdot \cos bx$, $\sin ax \cdot \sin bx$, $\cos ax \cdot \cos bx$, де a та b – довільні числа.

Для інтегрування цих функцій скористаємось відомими зі школи тригонометричними формулами. А саме:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta),$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta),$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha + \beta).$$

Приклад. Знайти $\int \sin 3x \cdot \cos 10x dx$.

Розв'язання. Скористаємось відповідною формулою. Маємо:

$$\int \sin 3x \cdot \cos 10x dx = \int\left(\frac{1}{2}\sin(3x-10x)+\frac{1}{2}\sin(3x+10x)\right)dx =$$

$$= \int\left(\frac{1}{2}\sin(-7x)+\frac{1}{2}\sin 13x\right)dx = -\frac{1}{2}\int \sin 7x dx + \frac{1}{2}\int \sin 13x dx =$$

$$= \frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{26}\cos 13x + C.$$

12.5 Обчислення інтеграла $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ (де m або n – непарне додатне ціле число)

Нехай для конкретності $n = 2p+1$, тоді $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx =$

$$= \int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x \cdot (1-\sin^2 x)^p \cdot \cos x dx = \begin{bmatrix} \text{нехай } \sin x = t, \\ \text{то } dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int t^m \cdot (1-t^2)^p dt$$

Отже, даний інтеграл ми звели до інтегрування многочлена. Аналогічним чином ми діємо, якщо m – непарне число.

Приклад. Знайти $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}}$.

Розв'язання. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin x}} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sqrt{\sin x}} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cdot \cos x dx}{\sqrt{\sin x}} =$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = t, \quad \text{то} \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int \frac{(1-t^2)dt}{\sqrt{t}} = \int\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{t^2}{\sqrt{t}}\right)dt = \int\left(t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)dt =$$

$$= 2t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C = 2\sqrt{\sin x} - \frac{2}{5}\sqrt{\sin^5 x} + C.$$

12.6 Обчислення інтеграла $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ (де $m+n$ - парне від'ємне ціле число)

В цьому випадку спрацьовує підстановка $tgx = t$.

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$.

Розв'язання. Підінтегральну функцію можна записати як $\cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x$. Як бачимо, сума показників синуса і косинуса дорівнює - 4, тому скористаємось підстановкою $tgx = t$, тоді $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Далі, $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin x \cdot \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot tgx \cdot \sin^2 x} =$

$$= \left[\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x} \right] = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{tgx \cdot \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}} = \int \frac{dt}{t \cdot \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{t^2}{t^3} \right) dt =$$

$$= \int t^{-3} dt + \int t^{-1} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2tg^2 x} + \ln|tgx| + C.$$

12.7 Обчислення інтеграла $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ (де m і n – парні невід'ємні цілі числа)

Тут ми застосовуємо відомі тригонометричні формули:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{і} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Приклад. Знайти $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язання. $\int \cos^4 x dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx =$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{(1+\cos 4x)dx}{2}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$. Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$.

2. $\int\frac{dx}{5+4\sin x}$. Відповідь: $\frac{2}{3}arctg\frac{5tg\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

3. $\int\frac{(2-\sin x)dx}{2+\cos x}$. Відповідь: $\ln|2+\cos x|+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{x}{2}\right)+C$.

4. $\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$. Відповідь: $\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+C$.

5. $\int\sin^3 x\cdot\cos^2 xdx$. Відповідь: $\frac{1}{15}\cos^3 x\cdot(3\cos^2 x-5)+C$.

6. $\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos^4 x}$. Відповідь: $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$.

7. $\int\cos^6 xdx$. Відповідь: $\frac{5}{16}x+\frac{1}{12}\sin 2x\cdot\cos^4 x+$

$$+\frac{5}{48}\sin 2x\cdot\cos^2 x+\frac{15}{96}\sin 2x+C.$$

8. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$. Відповідь: $\frac{(tg^2 x - 1)\cdot(tg^4 x + 10 tg^2 x + 1)}{3 tg^3 x} + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C.$

10. $\int \sin 3x \cdot \cos x dx.$ Відповідь: $C - \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{4}.$

13 Інтегрування деяких ірраціональних функцій

13.1 Інтеграл виду $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$, де

$m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ – **цілі числа**

За допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \ldots$, такий інтеграл зводиться до інтеграла від раціонального дробу.

Наведемо приклади.

Приклад 1. Знайти $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}$.

Розв'язання. Запишемо інтеграл у вигляді $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}dx}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}$. Найменшим кратним знаменників дробів $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ є число 6. Під знаком інтеграла знаходиться раціональна функція від $x^{\frac{1}{6}}$. Застосуємо підстановку $x = t^6$, тоді $dx = 6t^5 dt$, $x^{\frac{1}{3}} = t^2$, $x^{\frac{2}{3}} = t^4$, $x^{\frac{1}{2}} = t^3$.

Далі, $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}dx}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{t^2 \cdot 6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^7 dt}{t^3 \cdot (t-1)} = 6\int \frac{t^4 dt}{t-1}.$

Як бачимо, ми прийшли до інтегрування неправильного раціонального дробу. Виконавши операцію ділення, одержимо:

$$\frac{t^4}{t-1} = t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1.}$$

Продовжимо інтегрування:

$$6\int \frac{t^4 dt}{t-1} = 6\int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6\frac{t^4}{4} + 6\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^2}{2} + 6t + 6\ln|t-1| =$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{\sqrt{1+x}dx}{x}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $1 + x = t^2$, тоді $x = t^2 - 1, \quad dx = 2tdt.$

Переходимо під знаком інтеграла до змінної t:

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx = \int \frac{t \cdot 2tdt}{t^2 - 1} = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = 2\int \frac{(t^2 - 1 + 1)dt}{t^2 - 1} = 2\int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right)dt =$$

$$= 2\int dt + 2\int \frac{dt}{t^2 - 1} = 2t + 2 \cdot \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| = 2\sqrt{1+x} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right| + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $\frac{1-x}{1+x} = t^2$, тоді $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ і

$dx = -\dfrac{4tdt}{(1+t^2)^2}$. Під знаком інтеграла перейдемо до змінної t:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = -4\int\frac{t^2dt}{1-t^4} = -4\int\frac{t^2dt}{(1-t)\cdot(1+t)\cdot(1+t^2)}.$$

Підінтегральний дріб $\dfrac{t^2}{(1-t)\cdot(1+t)\cdot(1+t^2)}$ – правильний. Спочатку розкладемо його на суму елементарних дробів (див. п. 8.3). Отже, існують числа A, B, C, D такі, що виконується рівність:

$$\frac{t^2}{(1-t)\cdot(1+t)\cdot(1+t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2} =$$

$$= \frac{A(1+t^2)\cdot(1+t) + B(1-t)\cdot(1+t^2) + (Ct+D)\cdot(1-t^2)}{(1-t)\cdot(1+t)\cdot(1+t^2)} =$$

$$= \frac{(A-B-C)t^3 + (A+B-D)t^2 + (A-B+C)t + A+B+D}{(1-t)\cdot(1+t)\cdot(1+t^2)}.$$

З останньої рівності випливає тотожність:

$$(A-B-C)t^3 + (A+B-D)t^2 + (A-B+C)t + A+B+D = t^2.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях t одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A-B-C=0, \\ A+B-D=1, \\ A-B+C=0, \\ A+B+D=0. \end{cases}$$

Звідки $A = B = \dfrac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\dfrac{1}{2}$. Таким чином,

$$\frac{t^2}{(1-t)\cdot(1+t)\cdot(1+t^2)} = \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{2(1+t^2)}.$$

Тепер повертаємося до інтегрування:

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}=-4\int\frac{t^2dt}{(1-t)\cdot(1+t)\cdot(1+t^2)}=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}+2\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\ln|t-1|-\ln|t+1|+2arctgt+C=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2arctgt+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

13.2 Інтеграл виду $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx.$

Виділимо повний квадрат із тричлена, що знаходиться під радикалом:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Зробимо заміну змінної, поклавши $x+\dfrac{b}{2a}=t$. Тоді $dx=dt$ і

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Розглянемо всі можливі випадки.

1. Нехай $a>0$ і $c-\dfrac{b^2}{4a}>0$.

Введемо позначення $a=m^2$ і $c-\dfrac{b^2}{4a}=n^2$. Тоді $\sqrt{ax^2+bx+c}=$ $=\sqrt{m^2t^2+n^2}$.

2. Нехай $a>0$, $c-\dfrac{b^2}{4a}<0$. Тоді $a=m^2$ і $c-\dfrac{b^2}{4a}=-n^2$ для деяких чисел m і n. Тому $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}$.

3. Нехай $a<0$ і $c-\dfrac{b^2}{4a}>0$. Тоді знайдуться числа m і n такі, що

$a=-m^2$ і $c-\dfrac{b^2}{4a}=n^2$. Отже, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}$.

4. Нехай $a<0$ і $c-\dfrac{b^2}{4a}<0$. В цьому випадку $\sqrt{ax^2+bx+c}$ є комплексне число для будь-якого x.

Таким чином, інтеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ зводиться до одного з таких типів:

1. $\int R(t,\sqrt{m^2t^2+n^2})dt$;
2. $\int R(t,\sqrt{m^2t^2-n^2})dt$;
3. $\int R(t,\sqrt{n^2-m^2t^2})dt$.

Кожний з цих інтегралів за допомогою відповідної підстановки зводиться до інтеграла виду $\int \overline{R}(\sin z,\ \cos z)dz$, де $\overline{R}(\sin z,\ \cos z)$- раціональна функція від $\sin z$ і $\cos z$. А саме, треба застосувати тригонометричні підстановки (див. п. 7.2):

1. Для інтеграла першого типу рекомендується підстановка $t=\dfrac{n}{m}tgz$.

2. Для інтеграла другого типу – підстановка $t=\dfrac{n}{m}\sec z=\dfrac{n}{m\cos z}$.

3. Для інтеграла третього типу - підстановка $t=\dfrac{n}{m}\sin z$.

Наведемо приклади.

Приклад 1. Знайти $\int\dfrac{dx}{(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9}}$.

Розв'язання. Цей інтеграл належить до інтегралів виду

$\int R(t, \sqrt{m^2t^2+n^2})dt$. Застосуємо підстановку $x = 3tgz$, тоді $dx = \frac{3dz}{\cos^2 z}$, $x^2+9 = 9tg^2z+9 = 9(tg^2z+1) = \frac{9}{\cos^2 z}$.

Переходимо до інтегрування:

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3dz}{\cos^2 z \cdot \frac{9}{\cos^2 z} \cdot \frac{3}{\cos z}} = \frac{1}{9}\int \cos z dz = \frac{1}{9}\sin z + C.$$

Тепер повертаємося до змінної x. Оскільки $x = 3tgz$, то $tgz = \frac{x}{3}$. Далі, $\sin z = tgz \cdot \cos z = \frac{x}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

Отже, остаточно:

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{9}\sin z + C = \frac{x}{9\sqrt{x^2+9}} + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{dx}{(x^2+16)\cdot\sqrt{9-x^2}}$.

Розв'язання. Скористаємось підстановкою $x = 3\sin z$. Тоді $dx = 3\cos z dz$, $\sqrt{9-x^2} = 3\cos z$. Переходимо до інтегрування:

$$\int \frac{dx}{(x^2+16)\cdot\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos z dz}{(9\sin^2 z+16)\cdot 3\cos z} = \int \frac{dz}{9\sin^2 z+16} =$$

$$= \int \frac{dz}{9\sin^2 z + 16(\cos^2 z+\sin^2 z)} = \int \frac{dz}{25\sin^2 z+16\cos^2 z} =$$

$$= \int \frac{dz}{\cos^2 z\cdot(25tg^2z+16)} = \frac{1}{25}\int \frac{d(tgz)}{tg^2z+\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{1}{20}arctg\left(\frac{5}{4}tgz\right) + C.$$

Залишається вернутися до змінної x. Оскільки $tgz = \frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}} =$

$$= \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}, \text{ то } \int \frac{dx}{(x^2+16)\cdot\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{20} arctg \frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}} + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання. Робимо підстановку $x = \frac{1}{\cos t}$, то $dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$. Тоді

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\cos t dt}{1+2\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{3-2\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{3-2\sin^2 t} =$$

$$= \begin{bmatrix} нехай \\ \sin t = u \end{bmatrix} = \int \frac{du}{3-2u^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - u^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + u}{\sqrt{\frac{3}{2}} - u} \right| + C =$$

$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}\sin t}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\sin t} \right| + C$. Тепер повертаємось до змінної x. Оскільки

$$\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \cos t \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, \text{ то}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}} \right| + C.$$

13.3 Деякі частинні підстановки

Тригонометричні підстановки, які ми розглядали в попередньому пункті, можуть часом призвести до громіздких викладок. Тому в окремих випадках, при інтегруванні ірраціональностей типу $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ вигідніше застосовувати інші підстановки.

А) Інтеграл виду $\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Для інтегрування виразу такого типу слід попередньо виділити в чисельнику похідну квадратного тричлена, що стоїть під знаком радикалу в знаменнику.

Приклад. Знайти $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{\left(\frac{1}{2}(2x+4)-2\right)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 2\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+1}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{нехай } u = x^2+4x+5,\ t = x+2 \\ \text{тоді } du = (2x+4)dx,\ dx = dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$= \sqrt{u} - 2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| = \sqrt{x^2+4x+5} - 2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C.$$

В) Інтеграл виду $\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(r = 1,\ 2)$.

Такий інтеграл за допомогою підстановки $x = \frac{1}{t}$ зводиться до одного з типів інтегралів, що розглядалися вище.

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $x = \frac{1}{t}$, тоді $dx = -\frac{dt}{t^2}$.

Підставивши ці значення в підінтегральну функцію, одержимо:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+5}}=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+5t^2}{t^2}}}=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+5t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+5t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{\sqrt5 dt}{\sqrt{1+\left(\sqrt5\cdot t\right)^2}}=\begin{bmatrix}\text{див.}\quad\text{табл.}\\ \text{інтеграл.}\end{bmatrix}=-\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|\sqrt5\cdot t+\sqrt{1+5t^2}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|\sqrt5\cdot\frac{1}{x}+\sqrt{1+5\cdot\frac{1}{x^2}}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt5}\ln\left|\frac{\sqrt5+\sqrt{x^2+5}}{x}\right|+C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\cdot\sqrt[4]{x}}.$ Відповідь: $2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}-8\cdot\sqrt[4]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}+$

$+48\cdot\sqrt[12]{x}+3\ln(1+\sqrt[12]{x})+\frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\frac{171}{\sqrt7}arctg\frac{2\cdot\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt7}+C.$

2. $\int\frac{xdx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}.$ Відповідь:

$$6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]+C.$$

3. $\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}.$ Відповідь: $\ln\frac{\left|u^2-1\right|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt3 arctg\frac{1+2u^2}{\sqrt3}+C,$

де $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}.$

4. $\int\frac{dx}{(x^2-5)\cdot\sqrt{x^2-5}}$. Відповідь: $-\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+C.$

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$. Відповідь: $\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+C.$

6. $\int\frac{dx}{(x^2+4)\cdot\sqrt{1-x^2}}$. Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{1-x^2}}+C.$

7. $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{2x^2-1}}$. Відповідь: $\arccos\frac{1}{x\sqrt{2}}+C.$

8. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{15+3x^2}}$. Відповідь: $-\frac{1}{15}\cdot\frac{\sqrt{15+3x^2}}{x}+C.$

14 Інтеграли від біноміальних диференціалів

14.1 Означення елементарної функції

До основних **елементарних функцій** належать такі:

1. Степенева функція: $y=x^{\alpha}$, де α – дійсне число.
2. Показникова функція: $y=a^x$, де $a>0,\quad a\neq 1.$
3. Логарифмічна функція: $y=\log_a x$, де $a>0,\quad a\neq 1.$
4. Тригонометричні функції: $y=\sin x, y=\cos x, y=tgx, y=ctgx.$
5. Обернені тригонометричні функції: $y=\arcsin x,\quad y=\arccos x,$ $y=arctgx,\quad y=arcctgx.$

Як добре відомо зі школи, над функціями можна виконувати алгебраїчні операції додавання, віднімання, множення і ділення. Окремо зупинимося на ще одній операції над функціями. Отже, нехай дано дві функції $y=F(u)$ і $u=\varphi(x)$. За допомогою цих функцій можна утворити ще одну функцію від змінної x. А саме: $y = F(\varphi(x))$. Таку функцію називають **складеною функцією** або **функцією від функції**. Нехай, наприклад, $y = u^3$ а $u = \cos x$, тоді $y = \cos^3 x$ є складеною функцією.

Означення. Функція називається ***елементарною***, якщо вона задана єдиним аналітичним виразом, який складено з основних елементарних функцій і сталих величин за допомогою скінченого числа операцій додавання, віднімання, множення, ділення та утворення складеної функції.

Наприклад, функція $y = \dfrac{\ln x + \sin x^2}{x+6}$ є елементарною.

Зауваження. В курсі вищої математики, як до речі і в прикладних дисциплінах, широко застосовуються неелементарні функції, які задаються у вигляді функціонального ряду або визначеного інтеграла з параметрами. Детально про такі функції мова йтиме у відповідних розділах вищої математики.

14.2 Три випадки інтегрування біноміальних диференціалів

Як відомо операція диференціювання не виводить нас за межі класу елементарних функцій. Іншими словами похідна будь-якої елементарної функції знов є елементарною функцією. Значно складніша ситуація має місце для операції інтегрування. Наприклад, такі елементарні функції, як e^{-x^2}, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\cos x^2$, $\dfrac{\ln x}{x}$ і інші не інтегруються в класі елементарних функцій. Для конкретності розглянемо функцію $\cos x^2$. Як розуміти слова " функція $\cos x^2$ не інтегрується в класі елементарних функцій"? Їх треба розуміти так: не існує елементарної функції, похідна якої дорівнює $\cos x^2$. Іншими словами функція $\int \cos x^2 dx$ (а точніше клас функцій, які відрізняються між собою на сталу величину) не є елементарною.

Тепер зупинимося більш детально на інтегралах від **біноміальних диференціалів** т. б. на інтегралах виду $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, де m, n, p – будь-які раціональні числа, а сталі a і b відмінні від нуля (зрозуміло, що мається на увазі той випадок, коли хоча б одне з чисел m, n і p – не є цілим, бо в противному випадку вираз $x^m(a+bx^n)^p$ буде або многочленом або раціональним дробом).

Видатний російський математик П.Л.Чебишев строго обґрунтував, що **тільки в трьох** випадках біноміальний диференціал інтегрується в класі елементарних функцій. А саме:

1. p – ціле число. В цьому випадку застосовується підстановка $x=y^s$, де s – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n.
2. $\frac{m+1}{n}$ – ціле число. Тут треба застосовувати підстановку $a+bx^n=y^s$, де s – знаменник дробу p.
3. $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число. В цьому випадку застосовують підстановку $ax^{-n}+b=y^s$, де s – знаменник дробу p.

Тепер розглянемо приклади.

Приклад 1. Знайти $\int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx$.

Розв'язання. Тут $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=4$. Оскільки p – ціле число, то ми маємо перший випадок. Застосовуємо підстановку $x=y^6$, тоді $dx=6y^5dy, \sqrt{x}=y^3$, $\sqrt[3]{x}=y^2$.

Приступаємо до інтегрування:

$$\int\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4dx=\int y^3(1+y^2)^4 6y^5dy=6\int y^8(1+y^2)^4dy=$$

$$=6\int(y^8+4y^{10}+6y^{12}+4y^{14}+y^{16})dy=$$

$$=\frac{6}{9}y^9+\frac{24}{11}y^{11}+\frac{36}{13}y^{13}+\frac{24}{15}y^{15}+\frac{6}{17}y^{17}+C=\begin{bmatrix}\text{повертаємось}\\ \text{до змінної } x\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{24}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{36}{13}x^{\frac{13}{6}}+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{6}{17}x^{\frac{17}{6}}+C.$$

Приклад 2. Знайти $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

Розв'язання. Спочатку інтеграл запишемо у вигляді $\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx.$

Тут $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}$. Оскільки $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$ - ціле число, то

ми маємо 2-ий випадок і тому застосовуємо підстановку $1+x^{\frac{1}{4}}=y^3$.

Звідки

$$x^{\frac{1}{4}}=y^3-1,\quad x=(y^3-1)^4,\quad x^{-\frac{1}{2}}=(y^3-1)^{-2},\quad dx=12y^2(y^3-1)^3dy.$$

Переходимо до інтегрування.

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx=\int(y^3-1)^{-2}\cdot y\cdot 12y^2(y^3-1)^3dy=\int 12y^3(y^3-1)dy=$$

$$=\int(12y^6-12y^3)dy=\frac{12}{7}y^7-\frac{12}{4}y^4=\begin{bmatrix}y^7=(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{7}{3}},\\ y^4=(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{12}{7}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7}-3\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4}+C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Розв'язання. Спочатку інтеграл запишемо в формі $\int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$. Тут $m=0$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$. Підрахуємо числа $\frac{m+1}{n}$ і $\frac{m+1}{n}+p$. $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{2}$ - дробове число, $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$ - ціле число. Отже, ми підпадаємо під 3-ій випадок, тому спрацьовує підстановка $1+\frac{1}{x^2}=y^2$. Звідки, диференціюючи обидві частини останньої рівності, одержуємо: $-2x^{-3}dx=2ydy$ і $x^{-3}dx=-ydy$. Перетворимо підінтегральний вираз так, щоб він містив $1+x^{-2}$ (взагалі в третьому випадку рекомендується перетворити підінтегральний вираз так, щоб він містив $ax^{-n}+b$). Виносимо в підінтегральному виразі x^2 за дужки, одержуємо:

$$(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\left(x^2(\frac{1}{x^2}+1)\right)^{-\frac{3}{2}}dx=x^{-3}(x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}dx=-y^{-2}dy.$$

Тому $\int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=-\int y^{-2}dy=\frac{1}{y}+C=\frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

1. $\int x^{-1}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}dx.$ Відповідь: $3\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right]+C.$

2. $\int x^4(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}dx.$ Відповідь: $\frac{x(3-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. Відповідь: $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C,$

$$\text{де } u=\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}.$$

4. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4}+C.$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$ Відповідь: $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C.$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx.$ Відповідь: $6u+2\ln\frac{u-1}{\sqrt{u^2+u+1}}-2\sqrt{3}arctg\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C,$

$$\text{де } u=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}.$$

7. $\int x^3\cdot\sqrt[3]{5+x^2}dx.$ Відповідь: $\frac{3}{56}(5+x^2)\cdot(4x^2-15)\cdot\sqrt[3]{5+x^2}+C.$

8. $\int \sqrt{x(3+4x^3)}dx.$ Відповідь: $\frac{y}{y^2-4}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|+C,$

$$\text{де } y=\sqrt{\frac{3+4x^3}{x^3}}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М., 1981.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., 1980.
3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі / За ред. Г.Л.Кулініча. – К., 1992.
4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М., 1983.

5. Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа. / Под ред. Ефимова А.В. и Демидовича Б.П. – М., 1986.
6. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике: Часть 3. – Харьков, 1974.
7. Сборник задач по курсу высшей математики. / Под ред. Кручковича Г.И. – М., 1973.
8. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. – М., 1983.
9. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика – К., 1987.
10. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К., 1996.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. – М., 1978.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Володимир Дмитрович Дереч,
Наталя Юхимівна Фурдіяк

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.
НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор В.О. Дружиніна
Коректор Ю.І.Франко

Навчально-методичний відділ ВДТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ

Підписано до друку 14.10.2002р
Формат 29,7x42 1/4
Друк різографічний
Наклад 100 прим.
Зам. № 2002-200

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 4,91

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,