М.Є. Деревяга, В.Г.Дзісь, В.Д.Мартинюк Н.П.Тимофієва

Практичні заняття з фізики

Частина III

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

М.Є. Деревяга, В.Г. Дзісь, В.Д. Мартинюк, Н.П.Тимофієва

Практичні заняття з фізики

Частина III.

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей. Протокол № 11 від 1 липня 2001р.

Вінниця ВДТУ 2002

УДК 530,1 (075.8)
Д 36

Р е ц е н з е н т и:
П.М. Зузяк, доктор фізико-математичних наук, професор
П.С. Берник, доктор технічних наук, професор
В.А. Стасенко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Деревяга М.Є., Дзісь В.Г., Мартинюк В.Д., Тимофієва Н.П.
Д36 **Практичні заняття з фізики. Частина III**. Навчальний посібник- Вінниця: ВДТУ, 2002.-110 с

В навчальному посібнику викладено основні теоретичні відомості, наведено приклади розв'язання типових задач та задачі для самостійного розв'язання. Додатки містять фізичні константи, які необхідні для розв'язання задач.

Зміст

Передмова

Матеріал посібника викладено у 14 розділах. У кожному розділі вміщено основні теоретичні відомості, наведено без доведення формули та основні закони, обгрунтування яких можна знайти в інших посібниках . В кінці методичного посібника приведено таблиці основних фізичних величин та констант, які необхідні при розв'язуванні задач.

Наведено чимало розв'язаних прикладів і задач різного цільового призначення. Більшість з них - супроводжується графіками, діаграмами, рисунками та відповідями (відповіді приведено в дужках практично після кожної задачі). Підбір прикладів і задач підпорядковано переважно професійній підготовці студентів, які навчаються за технічними спеціальностями. При розв'язанні задач широко застосовуються методи інтегрального та диференціального числення, що сприяє не тільки успішному оволодінню загальним курсом фізики, а й виробленню у студентів навичок логічно мислити та застосувати сучасні математичні методи і прийоми на практиці.

Обчислення в зразках розв'язаних задач, умови переважної більшості задач та основні формули та теоретичні співвідношення приведено у Міжнародній системі одиниць СІ , а відповіді для задач приведено у одиницях цієї системи, або кратним чи дольним до них.

У посібнику вміщено також задачі та приклади для самостійної роботи , деякі з них вимагають нестандартних прийомів розв'язування, що дозволяє виробляти у студентів навички дослідницького характеру.

Фізика завжди виконувала дві основні функції: задовольнити природну потребу людини у пізнанні навколишнього світу і отже формуванні її світогляду і створити фундамент для суміжних природничих та технічних наук, а з останніми - і виробництва.

Значна кількість задач методичного посібника мають прикладний характер.

Матеріал посібника допоможе студенту розкрити політехнічне і прикладне значення загальних фізичних методів. На зразках розв'язаних задач і на задачах для самостійного опрацювання реалізуються методи, що виховують волю, наполегливість і цілеспрямованість, працьовитість і відповідальність тобто такі якості, які вкрай необхідні майбутньому інженеру в його практичній діяльності.

Тема 1

Найпростіші задачі квантової механіки

1. Хвильові властивості мікрочастинок.
2. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга.
3. Частинка в нескінченно глибокій потенціальній ямі.
4. Проходження частинки через потенціальний бар'єр. Тунельний ефект.

Основні формули.

Формула де Бройля:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mV} = \frac{h}{mV},$$

де λ- довжина хвилі, що відповідає частинці з імпульсом p;

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}06 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c;$$

де h - стала Планка.

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга:

а) для координати та імпульсу частинки

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar,$$

де Δp_x - невизначеність проекції імпульсу частинки на вісь x;
Δx - не визначеність її координати ;

б) для енергії та часу

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

де ΔE- невизначеність енергії даного квантового стану; Δt- час існування системи у цьому стані.

Рівняння Шредінгера для стаціонарного стану:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U) \cdot \Psi = 0,$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, Ψ- хвильова функція,
E - повна енергія частинки, U- її потенціальна енергія.

Імовірність знаходження частинки в об'ємі dV:

$$dP = |\Psi|^2 dV,$$

де $|\Psi|^2$- густина імовірності.

В одновимірному випадку імовірність знаходження частинки в інтервалі від x до x + dx:

$$dP = |\Psi(x)|^2 dx$$

Імовірність P знаходження частинки в інтервалі від x_1 до x_2:

$$P = \int_{X_1}^{X_2} |\Psi(x)|^2 dx.$$

Власне значення енергії E_n частинки, яка знаходиться на енергетичному рівні під номером n в нескінченно глибокій потенціальній ямі:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2} n^2 \qquad (n = 1,2,3,\dots),$$

де ℓ -ширина потенціальної ями.

Власна хвильова функція, яка відповідає енергії E_n, має вигляд:

$$\Psi n(X) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\frac{\pi n x}{\ell}.$$

Коефіцієнт відбиття ρ і пропускання τ хвиль де-Бройля через низький потенціальний бар'єр (U<E) нескінченної ширини:

$$\rho = \left|\frac{K_1 - K_2}{K_1 - K_2}\right|^2; \qquad \tau = \frac{4K_1K_2}{(K_1 + K_2)^2},$$

де K = $\frac{2\pi}{\lambda}$ - хвильове число; K_1 і K_2 - відповідні значення хвильових чисел.

Коефіцієнт прозорості D прямокутного потенціального бар'єра кінцевої ширини:

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)} \cdot d\right],$$

де U - висота потенціального бар'єра, E - енергія частинки, d - ширина бар'єра.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти довжину хвилі де-Бройля для електрона, який має кінетичну енергію 1) T = 100 еВ; 2) T = 3,0 МеВ.

Розв'язання.

Використаємо формулу де-Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{P}.$$

Потрібно виразити імпульс частинки P через її кінетичну енергію T. Розв'язок задачі залежить від того, класичною чи релятивістською частинкою потрібно вважати електрон.

1.Оскільки T$<<m_0c^2$, де $m_0c^2 = 0.51 MeB$ енергія спокою електрона, то в даному випадку електрон є класичною частинкою. Тому його імпульс і кінетична енергія зв'язані співвідношенням: $T = \frac{m_0V^2}{2} = \frac{m_0^2V^2}{2m_0} = \frac{P^2}{2m_0}$;

$P = \sqrt{2m_0T}$.

Тоді: $$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0T}} = 1{,}23\cdot 10^{-10}\,м = 1{,}23A^\circ$$

2.При $T > m_0c^2$ електрон потрібно розглядати як релятивістську частинку.

Релятивістський імпульс частинки

$$P = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}V = m_0c\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1)$$

де $\beta = \frac{V}{c}$, V і m_0 – швидкість і маса спокою електрона, c - швидкість світла.

Кінетична енергія T релятивістської частинки знаходиться як різниця повної енергії $E=mc^2$ та її енергії спокою $E_0=m_0c^2$

$$T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right) \qquad (2)$$

Із формул (1) і (2) позбувшись величини β маємо:

$$P = \sqrt{2m_0T\left(\frac{T}{2m_0c^2}+1\right)} \qquad (3)$$

$$\lambda_2 = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0T\left(1+\frac{T}{2m_0c^2}\right)}}\,. \qquad (4)$$

В рівняння (4) підставимо значення фізичних величин у системі СІ та проведемо обчислення:

$$\lambda_2 = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}}{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 4{,}8\cdot 10^{-13}\left(1+\frac{4{,}8\cdot 10^{-13}}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot(3\cdot 10^{8})^2}\right)}} = 3{,}6\cdot 10^{-13}(м)\,.$$

Приклад 2. Середня кінетична енергія електрона в незбудженому атомі водню дорівнює 13,6 еВ. Виходячи із співвідношення невизначеностей, знайти найменшу неточність, з якою можна визначити координату електрона в атомі.

Розв'язання.

Із співвідношення невизначеностей Гейзенберга, неточність координати частинки:

$$\Delta X \geq \frac{2\pi\hbar}{\Delta P_X} \qquad (1)$$

Величина ΔP_X невідома, але імпульс P можна знайти через кінетичну енергію T. Розглядаючи електрон, як нерелятивістську частинку ($T<m_0C^2$), співвідношення між величинами P і T має вигляд:

$$P = \sqrt{2m_0T} \qquad (2)$$

Оскільки напрямок вектора $\vec{P}$ невідомий, то його проекція P_x на будь-яку фіксовану вісь X є невизначеною. Величина цієї проекції лежить в інтервалі (-P, P). Це означає, що невизначеність проекції імпульсу на вісь X дорівнює: $P_x = 2P$ або $P_x \sim P$,

тобто величини P_x і P одного порядку. Тому замінивши P_x в формулі (1) величиною P і враховуючи співвідношення (2), отримаємо вираз:

$$\Delta x \geq \frac{2\pi\hbar}{P} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0T}} = 3{,}32 \cdot 10^{-10} (м) \quad . \qquad (3)$$

Таким чином, неточність координати складає 10^{-10}(м)

Якщо врахувати те, що $\Delta x = 2r$, де r - радіус першої борівської орбіти, то можна зробити висновок, що борівську орбіту не можна уявляти як траєкторію, по якій рухається електрон, оскільки він може знаходитись в будь-якому місці атома, а не тільки на відстані r від ядра. Ця відстань є найбільш імовірна, де може знаходитись електрон .

Приклад 3. Частинка знаходиться в основному стані (n=1) в одновимірному потенціальному ящику шириною ℓ. Знайти імовірність знаходження частинки в областях: $0 < x < \frac{1}{3}\ell$ і $\frac{1}{3}\ell < x < \frac{2}{3}\ell$.

Розв'язання.

Імовірність dP знаходження частинки в інтервалі dx виразимо через густину імовірності $|\Psi(x)|^2$:

$$dP = |\Psi(x)|^2 dx .$$

Звідси імовірність знайти частинку в області $0 < x < \frac{1}{3}\ell$ виразиться інтегралом

$$P = \int_0^{\ell/3} |\Psi(x)|^2 dx . \qquad (1).$$

Власна хвильова функція частинки, яка знаходиться в одновимірному потенціальному ящику має вигляд:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right).$$

При n=1

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right). \qquad (2)$$

Із співвідношень (1) і (2) маємо:

$$P_1 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\frac{\ell}{3}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx .$$

Підставляючи значення

$$Sin^2\alpha = \frac{(1-\cos 2\alpha)}{2},$$

дістанемо:

$$P_1 = \frac{1}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{3}} dx - \int_0^{\frac{l}{3}} \cos\frac{2\pi x}{l}dx\right] = \frac{1}{l}\left[\frac{l}{3} - \frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\right] = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}195.$$

Імовірність P_2 знаходження частинки в інтервалі $\frac{l}{3} < x < \frac{2l}{3}$ може бути підрахована аналогічно P_1. Але зробимо простіше. Якщо скласти імовірності P_1, P_2, P_3 знаходження частинки, відповідно в першій, другій і третій частинах ящика, то отримаємо імовірність знаходження частинки у всьому ящику, яка дорівнює одиниці. Якщо врахувати, що в силу симетрії $P_1=P_3$, то $P_2=1-2P_1=0{,}61$.

Приклад 4. Пучок електронів з енергією E=25 еВ зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр висотою U=9 еВ (рис.1.1). Визначити коефіцієнт відбиття і коефіцієнт пропускання хвиль де Бройля для цього бар'єра

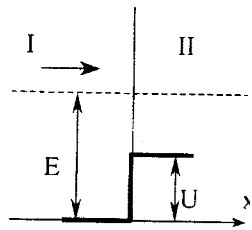


Рис. 1.1.

Розв'язання.

В зв'язку з тим, що U<E, то цей потенціальний бар'єр є низьким. Тому

$$\rho = \frac{(K_1+K_2)^2}{(K_1+K_2)^2} \qquad (1)$$

Щоб знайти хвильові числа K_1 і K_2 виразимо довжини хвиль де Бройля λ_1 і λ_2 (для кожної області) через імпульси p_1 і p_2 , а останні через їх кінетичні енергії. При цьому врахуємо , що в області I кінетична енергія дорівнює повній енергії E (тому, що U=0), а в області II вона , згідно з законом збереження енергії , дорівнює E-U.

Отримаємо:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{p_1} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} \qquad (2)$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{p_2} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E-U)}} \qquad (3)$$

$$K_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \qquad K_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar};$$

Підставимо значення K_1 і K_2 в формулу (1)

$$\rho = \left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-U}}{\sqrt{E}-\sqrt{E-U}}\right)^2 = \left(\frac{5-4}{5+4}\right)^2 = \frac{1}{81}$$

Щоб знайти коефіцієнт пропускання τ, вияснимо зміст коефіцієнтів ρ і τ з корпускулярної точки зору .

Нехай за деякий проміжок часу над бар'єром пролетіло n електронів. Із них n' відбилося від бар'єра, а n'' пройшло через бар'єр. Тоді:

$$\rho = \frac{n'}{n}\ ; \quad \tau = \frac{n''}{n}$$

Оскільки $n' + n'' = n$, то $\rho + \tau = 1$ звідки $\tau = 1 - \rho = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$

Приклад 5 _ Пучок електронів з енергією E=25 еВ зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр висотою U=26 еВ (рис.1.2). Визначити відносну густину імовірності знаходження електронів в області II на відстані x=1.0 $\overset{\circ}{A}$ від границі областей I і II (тобто, відношення густини імовірності знаходження електрона в точці x=1.0 $\overset{\circ}{A}$ до густини імовірності його знаходження на границі областей, коли x=0).

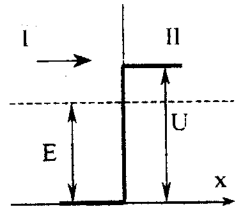


Рис. 1.2

Розв'язання.

У цьому випадку висота бар'єра високий U>E а сам бар'єр нескінченно широкий. Незважаючи на те, що при цьому коефіцієнт відбиття 1, тобто всі електрони, які падають на бар'єр відбиваються, але існує імовірність знайти електрон в області II за бар'єром. Щоб знайти цю імовірність, потрібно розв'язати рівняння Шредінгера для одновимірного випадку. Враховуючи, що U>E маємо:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(U - E)\Psi = 0$$

Розв'язок цього рівняння виражається формулою:

$$\Psi(x) = Ce^{kx} + De^{-kx}$$

Якщо $x \to \infty$, то $\Psi \to \infty$. Але хвильова функція повинна бути скінченою при всіх значеннях x. Тому, C=0, а функція $\Psi(x)$ має вигляд:

$$\Psi(x) = De^{-kx} = De^{-\sqrt{2m(U-E)}\frac{x}{\hbar}}$$

Густина імовірності знаходження частинки на відстані x складає:

$$|\Psi(x)|^2 = D^2 e^{-2\sqrt{2m(U-E)}\frac{x}{\hbar}}$$

Звідси відносна густина імовірності:

$$\eta = \frac{|\Psi(x)|^2}{|\Psi(0)|^2} = e^{-2\sqrt{2m(U-E)}\frac{x}{\hbar}}$$

$$\eta = \exp\left[-2\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}\ \frac{10^{-10}}{1{,}06\cdot 10^{-34}}\right] = 0{,}3$$

Приклад 6. Електрон з енергією E=4.9 eB рухається в додатному напрямку вздовж осі x (рис.1.3). Висота потенціального бар'єра дорівнює 5 eB. При якій ширині d бар'єра імовірність проходження електрона через нього буде дорівнювати 0.2?

Розв'язання

Імовірність P проходження частинки крізь потенціальний бар'єр та коефіцієнт прозорості D мають однаковий фізичний зміст (P=D). Тоді імовірність того, що електрон пройде крізь прямокутний потенціальний бар'єр виразиться співвідношенням:

$$P \approx exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,d\right]$$

$$\ln P = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,d$$

$$d = \frac{\hbar \ln\left(\frac{1}{P}\right)}{2\sqrt{2m(U-E)}}$$

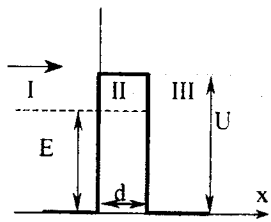


Рис.1.3

Підставивши числові значення отримаємо : d=0,5нм.

Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Знайти довжину хвилі де Бройля для електронів які пройшли різницю потенціалів U_1=1B і U_2=10B. (λ_1=1,23 нм; λ_2=0,123 нм).

1.2. Знайти довжину хвилі де Бройля для; а) електрона, який має швидкістьU=10^6 м/с; б) атома водню, який має середню квадратичну швидкість при температурі 300 К; в) кульки масою 1 г, яка рухається зі швидкістю V=1 см/с.(а) λ=730 пм; б) λ=144 пм; в) λ=6,6 ·10^{-29}м.)

1.3. Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, який має кінетичну енергію а)W=10 КеВ; б) W=1 МеВ. (а) λ=12,2 пм; б) λ=0,87 пм.).

1.4. α-частинка рухається по колу радіусом r = 8,3 мм в однорідному магнітному полі, напруженість якого H=18,9 КА/м. Знайти довжину хвилі де Бройля. (λ=10 пм).

1.5. Визначити неточність Δx при знаходженні координати електрона, який рухається в атомі водню зі швидкістю V=1,5·10^6 м/с, якщо неточність при визначенні швидкості складає 10% від її величини. Порівняти отриману неточність з діаметром атома водню, розрахованого за теорією Бора для основного стану і проаналізувати чи можна використовувати поняття траєкторії в даному випадку.

(d=0,77 нм; Δx =10.6 нм; Δx>d).

1.6. Електрон з кінетичною енергією T=4еВ локалізований в області розміром l=1мкм. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості. $\left(\Delta V/V = 10^{-4}\right)$

1.7. Використовуючи співвідношення невизначеностей для координат та імпульсів оцінити енергію основного стану атома водню. (E_0= -13,65 еВ)

1.8. Показати, що коли невизначеність координати дорівнює довжині хвилі де Бройля, невизначеність швидкості дорівнює самій швидкості.

1.9. Використовуючи співвідношення невизначеностей $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$, оцінити ширину енергетичного рівня в атомі водню, який знаходиться: 1) в основному стані ;2) в збудженому стані (час життя атома в збудженому стані дорівнює 10^{-8} с) (1) Г=0; $\Gamma = 10^{-4}$ еВ)

1.10. Електрон з кінетичною енергією T=15 еВ знаходиться в металевій частинці діаметром d=1мкм. Оцінити відносну неточність, ΔV з якою може бути визначена швидкість електрона. $\left(\frac{\Delta V}{V} = 10^{-4}\right)$

1.11. Середній час життя атома в збудженому стані складає $\Delta t \approx 10^{-8}$ с. При переході атома в нормальний стан випромінюється фотон, середня довжина хвилі λ_{cp} якого дорівнює 600 нм. Оцінити ширину Δλ спектральної лінії.

1.12. Електрон знаходиться в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі шириною l . В яких точках в інтервалі $0 < x < l$ густина імовірності знаходження електрона на другому і третьому енергетичних рівнях однакові? Розв'язок пояснити графіком. ($x = 0$; $x = l$;)

1.13. Частинка в потенціальному ящику знаходиться в основному стані. Яка імовірність знаходження частинки: 1) в середній частині ящика; 2) в крайній частині ящика? (1) 0,609; 2) 0,195)

1.14. В одновимірному потенціальному ящику шириною l знаходиться електрон. Визначити імовірність знаходження електрона на першому енергетичному рівні в інтервалі 1/4, рівновіддаленому від стінок ящика. (0.091)

1.15. Знайти відношення імовірностей P_1/P_2 знаходження електрона на першому і другому енергетичних рівнях в інтервалі 1/4 , рівновіддаленому від стінок одновимірної потенціальної ями шириною l . (5,22)

1.16. Електрон з енергією E= 100 еВ падає на потенціальний бар'єр висотою U=64 еВ. Визначити імовірність P того, що електрон відіб'ється від бар'єра. (0,0625)

1.17 Визначити показник заломлення хвиль де Бройля при проходженні частинкою потенціального бар'єра з коефіцієнтом відбиття ρ= 0,5. (0,97)

1.18 Кінетична енергія T електрона в два рази перевищує висоту U потенціального бар'єра. Визначити коефіцієнт відбиття ρ і коефіцієнт проходження τ електронів на границі бар'єра. (0,0295; 0,97)

1.19. Ширина l прямокутного потенціального бар'єра дорівнює 0,5 нм. Різниця енергій U-E=0,8 еВ. Як зміниться імовірність проходження електрона крізь цей бар'єр, якщо різниця збільшиться у дев'ять разів? (зменшиться у $1{,}4\cdot10^5$ рази)

1.20. При якій ширині прямокутного потенціального бар'єра коефіцієнт прозорості D для електронів дорівнює 0,01? Різниця енергій U-E=10 еВ. (0,143 нм)

1.21. Ядро випромінює α- частинку з енергією E=5 МеВ. Можна вважати, що ця частинка проходить через прямокутний потенціальний бар'єр заввишки U=10 МеВ та завширшки l=2 фм. Знайти коефіцієнт прозорості D для цього бар'єра.

Тема 2
Квантовомеханічна теорія атома

1. Теорія атома водню. Квантові числа.
2. Принцип Паулі.
3. Розподіл електронів атома за квантовими станами.

Основні формули

В атомів водню (воднеподібному іоні) потенціальна енергія електрона має вигляд

$$U(r) = -\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

де z – заряд ядра, e – заряд електрона, ε_0 - електрична стала, r – радіус орбіти.

Власне значення енергії E_n електрона в атомі водню

$$E_n = -\frac{z^2 e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2},$$

де $\hbar$ - стала Планка, n – головне квантове число (n=1,2,3…).

Квантові числа, що характеризують стан електрона у центрально - симетричному полі: n – головне, ℓ -орбітальне, m -магнітне, m_S - магнітне спінове.

Принцип Паулі: дві тотожні частинки з півцілим спіном (ферміони) в одній системі не можуть мати електронів з однаковими наборами квантових чисел.

Нормовані власні Ψ -функції, які відповідають 1s-стану (основному) і 2s-стану ($\ell = 0, m = 0$) для атома водню

$$\Psi_{n.0.0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \cdot e^{-\frac{r}{a}} \text{ і } \Psi_{200}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}}\left(2 - \frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}$$

де a -борівський радіус.

Імовірність dp знаходження електрона в атомі водню в $1s$ -стані, в інтервалі $(r, r+dr)$ однакова в усіх напрямках і визначається формулою

$$dp = \left|\Psi_{n.0.0}(r)\right|^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

Позначення станів окремих електронів (спектроскопічний символ.)

ℓ	0	1	2	3	4	5
	s	p	d	f	g	h

Електронна конфігурація описується таким чином: число, яке стоїть перед спектроскопічним символом, це головне квантове число n, а сам символ відповідає значенню орбітального квантового числа ℓ (наприклад:

позначенню $2p$ відповідає електрон з $n=2$ і $\ell=1$; $2p^2$ означає, що таких електронів в атомі 2)

Орбітальний момент імпульсу (механічний момент) і магнітний момент електрона:

$$M_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}; \quad \mu_l = \mu_B\sqrt{l(l+1)},$$

де $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0{,}927\cdot 10^{-23}$ Дж/Тл – магнетон Бора $\ell = 1,2,...,n-1$.

Проекція цих моментів на заданий напрямок z зовнішнього магнітного поля:

$$M_{lz} = m_l\hbar;$$

$$\mu_{lz} = \mu_B m_l \ell$$

Спіновий момент імпульсу M_s і магнітний момент електрона:

$$M_s = \hbar\sqrt{S(S+1)}; \quad \mu_s = 2\mu_B\sqrt{S(S+1)}$$

Проекції цих моментів на заданий напрямок z зовнішнього магнітного поля:

$$M_{sz} = \hbar m_s; \ \mu_{sz} = 2\mu_B m_s$$

Гіромагнітне відношення для орбітального магнітного і механічного моментів:

$$\frac{\mu_e}{M_e} = \frac{\mu_{lZ}}{M_{lZ}} = \frac{\mu_B}{\hbar} = \frac{1}{2}\frac{e}{m}$$

Гіромагнітне відношення для спінових магнітного і механічного моментів:

$$\frac{\mu_s}{M_s} = \frac{\mu_{SZ}}{M_{SZ}} = 2\frac{\mu_B}{\hbar} = \frac{e}{m}$$

Загальний орбітальний M_L і спіновий M_S моменти імпульсу багатоелектронного атома: $M_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}$; $M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}$,

де L - квантове число результуючого орбітального моменту , S- квантове число результуючого спінового моменту .

Повний момент імпульсу $\vec{M}_J$ атома:

$$\overline{M}_J = \overline{M}_l + \overline{M}_S; \qquad M_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

де J - квантове число повного моменту імпульсу $(J = L+S, \quad L+S-1, \ldots \ |L-S|)$

Для знаходження M_L, M_S атома , в якому багато електронів, потрібно знайти значення L, S . Для заповнених оболонок атома $M_L, M_S = 0$

Так для двох електронів з квантовими числами ℓ_1, ℓ_2 маємо $L = \ell_1+\ell_2; \ell_1+\ell_2-1; \ldots |\ell_1-\ell_2|$.

Квантове число S буде цілим чи півцілим в залежності від того, парним чи не парним є число електронів в атомі $S = \left|\sum_{i=1}^{n} m_{s,i}\right|$

Наприклад: для двох електронів $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ або $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$,

для трьох електронів $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ або $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Атом водню знаходиться в 1s-стані. Визначити найбільш імовірну відстань електрона від ядра.

Розв'язання

Власна Ψ - функція електрона в 1s стані має вигляд: $\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}$

Тоді імовірність dp знайти електрон в об'ємі dV , який знаходиться на відстані r від ядра $dp = |\Psi(r)|^2 dV$.

Оскільки функції $\Psi(r)$ властива сферична симетрія ,то елементарним об'ємом dV, буде прошарок кулі товщиною dr віддалений від її центра на відстань r .

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$dp = \left|\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}\right|^2 4\pi r^2 dr \ , \quad dp = \frac{4}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr$$

Величина $\omega(r) = \frac{dp}{dr}$, імовірність знаходження частинки в одиничному сферичному прошарку, має зміст лінійної густини імовірності $\varpi(r) = \frac{4}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr$. Функція $\omega(r)$ має максимум на деякій відстані $r = r_B$, яка є найбільш імовірною. Щоб знайти r_R , застосуємо звичайний метод дослідження Ψ - функції на екстремум .

Виконавши диференціювання , отримаємо

$$2re^{-\frac{2r}{a}} - \frac{2r^2}{a} e^{-\frac{2r}{a}} = 0$$

$$2re^{-\frac{2r}{a}}\left(1 - \frac{r}{a}\right) = 0; \quad 2re^{-\frac{2r}{a}} \neq 0; \qquad 1 - \frac{r}{a} = 0; r = a .$$

Таким чином найбільш імовірна відстань електрона від ядра дорівнює борівському радіусу.

Приклад 2. Атом водню знаходиться в 1s-стані. Визначити імовірність P знаходження електрона в середині кулі радіусом $r = 0{,}1a$ (де a - радіус першої борівської орбіти).

Розв'язання

В 1s-стані хвильова функція (Ψ) сферично симетрична, тобто залежить тільки від r.

Тому $dP = |\Psi(r)|^2 dr$, де $\Psi(r)$ - власна нормована функція, яка відповідає основному стану: $\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}$; $dV = 4\pi r^2 dr$

$$\Psi(r) = \left| \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}} \right|^2 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a^3} e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr$$

Цей вираз можна привести до більш простого, якщо перейти до атомних одиниць, прийнявши за одиницю довжини радіус першої борівської орбіти a. Введемо безрозмірну величину

$p = \frac{r}{a}$, тоді $r^2 = p^2 a^2$;

Проінтегрувавши dp в межах від $r_1 = 0$ до $r_2 = 0{,}1a$ (або $p_1 = 0; p_2 = 0{,}1$) знайдемо шукану імовірність

$$p = \int_0^{0,1} p^2 e^{-2p} dp$$

Цей інтеграл можна точно розв'язати інтегруванням за частинами, але при малих $p; (p_{max} = 0{,}1)$ вираз e^{-2p} можна розкласти в ряд Маклорена

$$e^{-2p} = 1 - 2p + \frac{1}{2!}(2p^3) - \dots$$

і провести наближене обчислення.

Запишемо інтеграл, нехтуючи всіма членами ряду, степінь яких більше першого $p = 4\int_0^{0,1}(1-2p)p^2 dp = 4\int_0^{0,1} p^2 dp - 8\int_0^{0,1} p^3 dp$

$$4\left[\frac{p^3}{3}\right]_0^{0,1} = \frac{4}{3}10^{-3} \text{ і } 8\left[\frac{p^4}{4}\right]_0^{0,1} = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$$

$$p = (\frac{4}{3} - \frac{1}{5})10^{-3} = 1{,}13 \cdot 10^{-3}$$

Приклад 3. Електрон у збудженому стані атома водню знаходиться в 3р - стані. Визначити зміни магнітного моменту, обумовленого орбітальним рухом електрона, при переході атома в основний стан.

Розв'язання

Зміну $\Delta\mu_\ell$ магнітного моменту знайдемо як різницю магнітних моментів в кінцевому і початковому станах, тобто $\Delta\mu_\ell = \mu_{\ell 2} - \mu_{\ell 1}$.

Магнітний момент орбітального руху електрона залежить від орбітального квантового числа ℓ.

$$\Delta\mu_\ell = \mu_B\sqrt{\ell(\ell+1)},$$

де μ_B - магнетон Бора.

Звідси маємо: в основному стані $\ell = 0$ і $\mu_{\ell 2} = 0$ в збудженому стані (3р) $\ell = 1$ і $\mu_{\ell 1} = \mu_B\sqrt{2}$ таким чином зміна магнітного моменту $\Delta\mu_\ell = \mu_B\sqrt{2}$.

$$\mu_B = 0{,}927\cdot 10^{-23}\ Дж/Тл,\ \Delta\mu_\ell = -1{,}31\cdot 10^{-23}\ Дж/Тл.$$

Знак мінус показує, що в даному випадку магнітний момент зменшився.

Приклад 4. Визначити можливі значення орбітального моменту імпульсу M_ℓ, електрона в збудженому атомі водню, якщо енергія збудження $\varepsilon = 12{,}09 eB$.

Розв'язання

Орбітальний момент імпульсу M_ℓ електрона визначається через квантове число ℓ за формулою

$$M_\ell = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$$

Можливі значення M_ℓ обмежені величиною n-1

$$E_n = -\frac{z^2 e^4 m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}$$

При n=1

$$E_1 = -13{,}6 eB$$

$$E_n = -\frac{13{,}5}{n^2}eB$$

Енергія збудження ε є квант енергії, поглинутий атомом, при переході з основного стану в збуджений.

Отже, $E_n - E_1 = \varepsilon$ підставимо числові значення в електронвольтах

$$-\frac{13{,}5}{n^2} + 13{,}6 = 12{,}09$$

Звідки n=3, а ℓ =0,1,2.

Знайдемо можливі значення M_ℓ

$$l = 0,\quad M_\ell = 0$$

$$l = 1,\quad M_\ell = \hbar\sqrt{2} = 1{,}49\cdot 10^{-34}\ Дж\cdot с$$

$$l = 2,\quad M_\ell = \hbar\sqrt{6} = 2{,}6\cdot 10^{-34}\ Дж\cdot с$$

Приклад 5. Використовуючи векторну модель атома визначити найменший кут α, який може утворювати вектор $\overline{M}_\ell$, орбітального моменту імпульсу електрона в атомі з напрямком зовнішнього магнітного поля. Електрон в атомі знаходиться в d-стані.

Розв'язання

Проекція вектора $\vec{M}_\ell$ на напрямок зовнішнього магнітного поля дорівнює:

$$M_{\ell x} = m_\ell \hbar$$

Враховуючи співвідношення:

$$M_\ell = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)},$$

можна знайти кут α

$$\cos\alpha = \frac{M_{\ell x}}{M_\ell} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}.$$

В d-стані електрона $\ell = 2$, а $m_\ell = 0;\pm1;\pm2$.

Найменшому значенню α відповідає найбільше значення квантового числа $m_\ell = 2$. Тоді $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{2\cdot3}} = 0{,}82$; $\alpha = 35^0 10^1$.

Приклад 6. Атом , окрім заповнених оболонок має три електрони (s,p,d) і знаходиться в стані з максимально можливим для цієї конфігурації повним моментом імпульсу. Визначити , використовуючи векторну модель атома , кут між спіновим $\vec{M}_S$ і повним $\vec{M}_J$ моментами імпульсу атома.

Розв'язання

Побудуємо трикутник моментів імпульсів M_L, M_S, M_J (рис. 2.1).

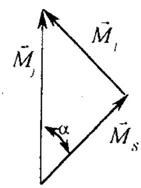


Рис. 2.1

За теоремою косинусів маємо: $\cos\alpha = \dfrac{M_J^2 + M_L^2 - M_S^2}{2M_S M_J}$

Таким чином , для знаходження α необхідно знайти M_L, M_S, M_J.

$$M_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

Із цієї формули видно , що M_J буде найбільшим, коли $J = J_{max}$. Останнє дорівнює сумі найбільших значень L і S

$$J_{max} = L_{max} + S_{max}$$

Оскільки повний момент імпульсу заповненої електронної оболонки дорівнює нулю , то будемо розглядати тільки три електрони . Квантові числа ℓ, що їм відповідають дорівнюють : $\ell_1 = 0$; $\ell_2 = 1$; $\ell_3 = 2$.

Отже , $L_{max} = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 3$.Щоб знайти максимальне значення S , складемо спінові квантові числа трьох електронів : $S_{max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$J_{max} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$, $M_J = \frac{\sqrt{99}}{2}\hbar$, $M_L = \hbar\sqrt{L(L+1)} = \frac{\sqrt{48}}{2}\hbar$, $M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)} = \frac{\sqrt{48}}{2}\hbar$.

Знайдемо $\cos\alpha = 0{,}857$; $\alpha = 31^0$

Задачі для самостійного розв'язування

2.1. Атом водню знаходиться в основному стані. Власна хвильова функція, яка описує стан електрона в атомі, має вигляд $\Psi(r)=ce^{-\frac{r}{a}}$ (де c - стала величина). Із умови нормування знайти c. $\left(c=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\right)$

2.2. Електрон в атомі водню описується хвильовою функцією $\Psi(r)=ce^{-\frac{r}{a}}$ визначити відношення імовірностей P_1/P_2 знаходження електрона в сферичних прошарках товщиною $\Delta r=0{,}01$ і радіусом $r_1=0{,}5a, r_2=1{,}5a$. (0,825).

2.3. Знайти числові значення кінетичної, потенціальної і повної енергії електрона на першій борівській орбіті.
($E_k=13{,}6eB;\quad E_p=-2E_k=-27{,}2eB;\quad E=-23{,}6eB$)

2.4. Знайти найменшу та найбільшу довжини ліній атома водню в видимій області спектра випромінювання. ($\lambda=3650^0A$; $\lambda=6560^0A$.)

2.5. Визначити потенціал іонізації атома водню. ($\varphi=13{,}6B$)

2.6. Визначити перший потенціал збудження атома водню. ($10{,}2B$)

2.7. Знайти момент імпульсу M_l, орбітального руху електрона, який знаходиться : 1) в 1s-стані 2) в р-стані. (1)0; 2)$1{,}5\cdot10^{-34}$ $Дж\cdot c$)

2.8. Використовуючи векторну модель атома, визначити найменший кут α, який може утворювати вектор $\bar{M}_l$ моменту імпульсу орбітального руху електрона в атомі з напрямком зовнішнього магнітного поля. Електрон знаходиться в d-стані. ($\alpha=35^0 21^1$)

2.9. Валентний електрон атома натрію перебуває у стані з головним квантовим числом $n=3$, маючи при цьому максимальний механічний момент. Який його магнітний момент μ_l, у цьому стані ?
($\ell=2;\quad S=\frac{1}{2};\quad \mu_l=3\sqrt{\frac{7}{S\mu_B}}$)

2.10. Обчислити повну енергію E, орбітальний момент імпульсу M і магнітний момент μ_l електрона, який знаходиться в 2р- стані атома водню. ($-3{,}4eB;\quad 1{,}5\cdot10^{-34};\quad 1{,}31\cdot10^{-23}$ $Дж/Тл$)

2.11. Знайти спіновий момент імпульсу M_s електрона і проекцію M_{sz} цього моменту на напрямок зовнішнього магнітного поля.
($0{,}912\cdot10^{-34}$ $Дж\cdot c$; $9{,}27\cdot10^{-34}$ $Дж\cdot c$)

2.12. Знайти спіновий магнітний момент μ_s, електрона і проекцію цього моменту μ_{sz} на напрямок зовнішнього магнітного поля.
($1{,}6\cdot10^{-23}$ $Ам^2$; $9{,}27\cdot10^{-24}$ $Ам^2$)

2.13. Навести електронні конфігурації атомів $Li; N; Ne; Na; Ca$.
($Li: 1s^2 2s^1; N: 1s^2 2s^2 2p^3; Ne: 1s^2 2s^2 2p^6; Na: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1; Ca: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$)

2.14. У збудженому атомі водню електрон має квантові числа $n = 3, \ell = 1$. Вказати можливі стани цього атома у позначеннях спектральних термів. ($^2P_{\frac{1}{2}}; ^2P_{\frac{3}{2}}$)

2.15. Яке найбільше число s, p, d електронів може розміщатися у електронних K, L та M шарах атома? (2;8;18)

2.16. Визначити кут φ між орбітальними моментами імпульсів двох електронів, один з яких знаходиться в d-стані, а другий в f- стані. при умовах: 1) повне орбітальне квантове число L=3;2) кут φ максимальний; 3) кут φ мінімальний. [1) $110^0 45^1$; 2)45^0; 3) $160^0 35^1$]

2.17. Які можливі значення повного моменту імпульсу M_l, електрона, який знаходиться в d-стані ? Чому дорівнюють кути φ між спіновим моментом імпульсу і орбітальним ?

($\frac{\sqrt{35}}{2}\hbar$; $\frac{\sqrt{15}\hbar}{2}$; $61^0 51^1$; 135^0)

2.18. Визначити магнітний момент μ_j атома в стані ^1D. Відповідь виразити в магнетонах Бора. ($6\mu_B$)

Тема 3
Будова атомного ядра

1. Нуклони. Ядерні сили.
2. Радіоактивність. Закони радіоактивного розпаду.
3. Дозиметрія іонізуючого випромінювання .

Основні формули.

Ядро позначають таким же символом , як нейтральний атом , $^A_Z X$ де X- символ хімічного елемента ; Z- атомний номер (число протонів в ядрі); А – масове число (число нуклонів у ядрі).

Закон радіоактивного розпаду

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

де N – число ядер, що залишилося; N_0 – початкове число ядер в момент часу t = 0; λ - стала радіоактивного розпаду.

Період піврозпаду Т- проміжок часу, за який число початкових ядер зменшиться в два рази

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}$$

Середній час життя радіоактивного ядра – проміжок часу, за який число ядер зменшиться в e раз.

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Число атомів ізотопа масою m дорівнює:

$$N = \frac{m}{\mu} N_A,$$

де μ - молекулярна маса, N_A - число Авогадро.

Активність ізотопа A величина, яка дорівнює відношенню числа dN ядер, які розпались в ізотопі до проміжку часу dt, за який відбувся цей розпад

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N, \text{ або } A = \lambda N_0 e^{-\lambda t},$$

при t = 0 $A_0 = \lambda N_0$; $A = A_0 e^{-\lambda t}$.

Масова активність

$$a = \frac{A}{m}.$$

Для суміші радіоактивних ізотопів, які утворюються один з другого і якщо стала розпаду λ першого члена ряду набагато менша сталих всіх членів іншого ряду, то в суміші виникає стан радіоактивної рівноваги, при якому активність всіх членів ряду однакова

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 .... = \lambda_n N_n.$$

Послаблення густини потоку іонізуючих частинок або фотонів :

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

де I_0 - густина потоку частинок , які падають на поверхню речовини ; I - густина потоку частинок після проходження шару речовини товщиною x; μ- лінійний коефіцієнт послаблення.

Доза випромінювання (поглинута доза випромінювання)

$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m},$$

де - ΔW енергія іонізуючого випромінювання, яку поглинула речовина масою Δm. Доза випромінювання вимірюється в Греях (1Гр=1Дж/кг).

Потужність дози випромінювання (потужність дози поглинання)

$$D^1 = \frac{\Delta D}{\Delta t},$$

де Δt - час, протягом якого була поглинута об'єктом опромінення доза випромінювання ΔD. Потужність дози випромінювання (Гр/с).

Експозиційна доза фотонного випромінювання (гама та рентгенівського випромінювання), це величина, яка дорівнює відношенню суми електричних зарядів ΔQ іонів одного знака, утворених електронами, які звільнились в опроміненому об'єкті, при умові повного використання іонізуючої здатності електронів, до маси Δm цього об'єкта :

$$x = \frac{\Delta Q}{\Delta m}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Скільки атомів полонію розпадеться за добу із 10^6 атомів?

Розв'язання

Скористаємось законом радіоактивного розпаду

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

В момент часу $t = 0$, $N = N_0$, а в момент часу t, $N = N_0 e^{-\lambda t}$. Тоді

$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t})$ підставивши числові значення, отримаємо:

$\Delta N = 10^6(1 - 0{,}833) = 167000 доб^{-1}$.

Приклад 2. Визначити початкову активність A_0 радіоактивного магнію (Mg^{27}) масою $m = 0{,}2 мкг$, а також активність А через одну годину.

Розв'язання

Початкова активність ізотопу $A_0 = \lambda N_0$.

Якщо врахувати, що $\lambda = \frac{ln 2}{T_{1/2}}$, $N_0 = \frac{m}{\mu} N_A$;

$$A_0 = \frac{m N_A}{\mu T} ln 2 = 5{,}15 \cdot 10^{12} \ Бк$$

Активність ізотопу змінюється з часом за законом $A = A_0 e^{-\lambda t}$

$$A = A_0 e^{-\frac{ln 2}{T}t} = A_0 (e^{ln 2})^{-\frac{t}{T}}; e^{ln 2} = 2; A = \frac{A_0}{2^{\frac{t}{T}}} = 8{,}05 \cdot 10^{10} \ Бк$$

Приклад 3. Знайти сталу напіврозпаду λ ядра. Визначити імовірність того, що ядро розпадається за проміжок часу від 0 до t.

Розв'язання

Процес радіоактивного розпаду носить статистичний характер. Якщо ми маємо достатньо велике число ядер N_0, то за проміжок часу від 0 до t, при повторі дослідів з радіоактивним препаратом, розпадається кожен раз одна і та ж доля ядер $\Delta N / N_0$. Цю величину, яка характеризує відносну частоту розпаду ядра, приймають за імовірність P розпаду ядра за цей проміжок часу.

$$P = \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0};$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t};$$

$$P = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Приклад 4. Радіоізотоп B_1, який має сталу розпаду λ_1 перетворюється в радіоізотоп B_2 з сталою розпаду λ_2. Вважаючи, що в початковий час препарат складається лише з ізотопу B_1, знайти через який час активність радіоізотопу B_2 досягне максимуму?

Розв'язання

Активність препарату визначається співвідношенням

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Тому активність A_2 ізотопу B_2 досягне максимуму тоді, коли максимальним буде число ядер N_2 цього ізотопу. Закон зміни з часом числа ядер N_2 виразиться залежністю:

$$N_2(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}).$$

Для знаходження проміжку часу t, якому відповідає максимум функції $N_2(t)$, продиференціюємо цю функцію за часом і прирівняємо похідну до нуля

$$N_2(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{\lambda_2 t}) = 0.$$

Звідки $\lambda_1 e^{\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$ або $t = \dfrac{\ln(\lambda_1/\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Приклад 5. Знайти активність радону, який утворився з 1г радію ${}_{88}Ra^{226}$ за одну добу. Знайти також максимальну активність радону. Періоди напіврозпаду радію і радону відповідно дорівнюють $T_1 = 1{,}6\cdot 10^3\,років; T_2 = 3{,}8\,доби$.

Розв'язання

Активність ізотопу дорівнює

$$A_2 = \lambda\, N_2(t) = \lambda_2 N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$$

Враховуючи, що $N_1(0) = \dfrac{N_A}{\mu} m_0;\quad \lambda_1 = \dfrac{ln 2}{T_1};\quad \lambda_2 = \dfrac{ln 2}{T_2}$

Отримаємо

$$A_2 = \frac{m_0}{\mu} N_A \frac{\ln 2}{T_1 - T_2}\left(e^{(-\ln 2)\frac{t}{T_1}} - e^{(-\ln 2)\frac{t}{T_2}}\right), \qquad (1)$$

де N_A - число Авогадро, μ - молярна маса.

$$T_1 >> T_2 \text{ і } T_2 >> t.$$

$$T_1 - T_2 \approx T_1 \text{ і } e^{(-\ln 2)\frac{t}{T_1}} = 1 \qquad (2)$$

Підставивши в (1)значення отримаємо: $A_2 = 3{,}7\cdot 10^{10}(1 - 0{,}83)\,розп/с$ або

$$A_2 = \frac{3{,}7\cdot 10^{10}(1 - 0{,}83)}{3{,}7\cdot 10^{10}} = 0{,}17 Ki$$

Щоб визначити A_{max} радону, можна, використати результат попереднього прикладу–знайти проміжок часу t_{max}, протягом якого активність радону досягне максимуму, а потім підставляючи це значення в формулу (1) знаходимо A_{max}. Але можна зробити інакше. Аналізуючи формулу (2), бачимо, що з часом t, величина, яка знаходиться в дужках, наближається по експоненті до одиниці. Тому

$$A_{2\,max} = \frac{m_0}{\mu} N_A \frac{ln2}{T_1} = 3{,}7\cdot10^{10}\,росп/c = 1{,}0Ki\,.$$

Приклад 6. Знайти товщину шару води, який ослаблює інтенсивність пучка випромінювання в два рази. Для води лінійний коефіцієнт послаблення $\mu = 0{,}047см^{-1}$.

Розв'язання

При проходженні гамма випромінювання через шар речовини відбувається його поглинання за рахунок трьох факторів: фотоефекту, ефекту Комптона і утворення пар (електрон-позитрон). В результаті цих факторів інтенсивність гамма випромінювання зменшується: $I = I_0 e^{-\mu x}$

$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu x}$, згідно з умовою $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} = e^{-\mu x}$ або $x = \frac{ln2}{\mu} = 0{,}147м$. Таким чином шар води товщиною 14,7см знижує інтенсивність гамма-випромінювання в 2 рази.

Приклад 7. Радіоактивне точкове джерело Co^{60} знаходиться в центрі свинцевого сферичного контейнера з товщиною стінок $x = 1см$ і зовнішнім радіусом $R = 20см$. Визначити максимальну активність джерела A_{max}, яке можна зберігати в контейнері, якщо допустима густина потоку $I_{доп}$ γ-фотонів при виході із контейнера, дорівнює $8\cdot10^6 см^{-1}м^{-2}$. Прийняти, що у кожному акті розпаду ядра Co^{60} випромінюється $N = 2\gamma$-фотона, середня енергія яких $E = 1{,}25MeB$. (Лінійний коефіцієнт послаблення μ для гамма фотонів з енергією Е = 1,25МеВ; $\mu = 0{,}64см^{-1}$).

Розв'язання

Активність радіоактивного джерела зв'язана з потоком випромінювання гамма-фотонів співвідношенням

$$\Phi = An\,,$$

де n - число гамма-фотонів, які випромінюються при розпаді одного ядра.

$$A = \frac{\Phi}{n}.$$

Густина потоку гамма-випромінювання

$$I_1 = \frac{\Phi}{4\pi R^2}\,,\; I_2 = I_1 e^{-\mu x}.$$

Із попередніх формул маємо:

$$I_2 e^{\mu x} = \frac{\Phi}{4\pi R^2}.$$

Якщо $I_2 = I_{max}$, то $A = A_{max}$, отримаємо:

$$A = \frac{4\pi R^2}{n} I_2 e^{\mu x} = 3.8\;МБк\;.$$

Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Знайти масу радону, активність якого дорівнює 1Кюрі.($m = 6{,}5 \cdot 10^{-9} кг$)

3.2. Знайти сталу розпаду λ радону, якщо відомо, що число атомів радону зменшується за добу на 18,2%.($\lambda = 2{,}1 \cdot 10^{-6} c^{-1}$)

3.3. Деякий радіоактивний препарат має сталу розпаду $\lambda = 1{,}44 \cdot 10^{-3} c^{-1}$. Через який час розпадеться 75% початкової кількості атомів?(40 діб)

3.4. Нерухоме ядро радону (${}_{86}Rn^{220}$) викинуло α частинку зі швидкістю v=16Мм\с. В яке ядро перетворилось ядро радону? Яку швидкість воно отримало?(${}_{84}Po^{216}$;$290 км/с$)

3.5. При розпаді радіоактивного ${}_{84}Po^{210}$ протягом однієї години утворився He^4, об'єм якого при нормальних умовах $V = 89{,}5 см^3$. Визначити період піврозпаду T полонію. (138 діб)

3.6. Період піврозпаду T радіоактивного нукліда дорівнює 1 год. Визначити середню тривалість життя цього нукліда .

3.7. В ампулу помістили радон, активність якого 400мКі. Через який час після заповнення ампули його активність буде дорівнювати $2{,}22 \cdot 10^9$ Бк? (10,4 доби)

3.8. Кінцевим продуктом розпаду уранового ряду є свинець . Визначити вік уранової руди, якщо відомо, що на один кілограм ${}_{92}U^{238}$ в цій руді приходиться 320 г свинцю ${}_{82}Pb^{206}$.($3 \cdot 10^9$ *років*)

3.9. Із якої найменшої кількості руди , яка має 42% чистого урану , можна отримати 1г радію. ($7 \cdot 10^3 кг$)

3.10. Лічильник Гейгера , розміщений поблизу препарату радіоактивного срібла реєструє потік бета-частинок при першому вимірюванні потік $\Phi_1 = 87c^{-1}$, а через одну добу потік $\Phi_2 = 22c^{-1}$. Визначити період піврозпаду ізотопа . (0,5 доби)

3.11. Знайти масу m_1 ${}^{238}U$,який має таку саму активність , як стронцій ${}^{90}Sr$ масою 1 мг. (425кг)

3.12. На яку глибину потрібно занурити джерело гамма-випромінювання (Е =1,6 МеВ) у воду, щоб інтенсивність I пучка, який виходить із води, зменшилась в к=1000 раз? Коефіцієнт лінійного поглинання $\mu = 0{,}06 см^{-1}$. (1,15м)

3.13. Вузький пучок гамма-випромінювання (Е =2,4 МеВ) проходить через бетонну плиту товщиною 1 м. Яка товщина плити із чавуну дасть таке саме послаблення гамма-випромінювання? Коефіцієнт лінійного поглинання бетону $\mu_1 = 0{,}1 см^{-1}$, чавуну $\mu_2 = 0{,}28 см^{-1}$ (28,6см)

3.14. Яка доля ω всіх молекул повітря при нормальних умовах іонізується рентгенівським випромінюванням при експозиційній дозі $x = 258 мкКл/кг$? ($7{,}73 \cdot 10^{-11}$)

3.15. Який ізотоп утворюється із ${}_{90}Th^{232}$ після 4-х α - розпадів і двох β - розпадів? (${}_{84}Po^{216}$)

3.16. Який ізотоп утворився із радіоактивного ізотопа $_3Li^8$ після одного β - розпаду і одного α -розпаду? ($_2He^4$)

Тема 4
Ядерні реакції

1. Дефект маси і енергія зв'язку атомних ядер.
2. Види ядерних реакцій. Ядерні реакції та закони збереження.
3. Реакції поділу і синтезу. Енергетичні закономірності ядерних реакцій.

Основні формули.

Енергія зв'язку прямо пропорційна дефекту маси системи частинок:

$$E = \Delta m C^2$$

де C - коефіцієнт пропорційності

($C^2 = 9 \cdot 10^{16}$ Дж/кг $= 9 \cdot 10^{16}$ м^2/с^2).

Якщо енергію виразити в Мев, а масу в а.о.м., то C^2 =931,4 Мев/а.о.м.

Дефект маси Δm ядра це різниця між сумою мас вільних протонів і нейтронів і масою ядра, яке з них утворилося

$$\Delta m = (Zm_p + Nm_n) - m_я ,$$

де Z – зарядове число (число протонів); m_p; m_n-маси протона і нейтрона відповідно;

$$T = A - Z ,$$

де A- число нуклонів в ядрі; N- число нейтронів.

Питома енергія зв'язку (енергія зв'язку, що припадає на один нуклон)

$$E_{пт} = \frac{E_{зв}}{A}, \quad E_0 = \frac{E}{A}.$$

Зміна енергії при ядерній реакції визначається співвідношенням:

$$\Delta E = (m_1 - m_2)C^2,$$

де m_1- сума мас частинок до реакції, m_2- сума мас частинок після реакції. Якщо $m_1 > m_2$, то реакція буде екзотермічною, а якщо $m_1 < m_2$, то реакція ендотермічна.

Символічно ядерна реакція може бути записана двома способами, наприклад:

$$_4Be^9 + _1H^1 \rightarrow {_2He^4} + {_3Li^6},$$

або $Be^9(p,\alpha)Li^6$ в дужках на першому місті стоїть позначення бомбардуючої частинки, а на другому – частинки яка вилетіла із ядра.

При ядерних реакціях виконуються такі закони збереження:

а) числа нуклонів $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$;

б) заряду $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$;

в) релятивістської повної енергії $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$;

г) імпульсу $P_1 + P_2 = P_3 + P_4$

Енергія ядерної реакції може бути записана також у вигляді:

$$Q=(T_1+T_2)-(T_3+T_4),$$

де T_1 і T_2 – кінетичні енергії відповідно ядра і частинки, що бомбардує ядро; T_3 і T_4 – кінетичні енергії частинки що вилітає із ядра і ядра - продуктів реакції.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Визначити питому енергію зв'язку ядра атома $_8O^{17}$.

Розв'язання.

Питома енергія зв'язку ядра, дорівнює відношенню енергії зв'язку до масового числа

$$\frac{E_{зв}}{A}=\frac{C^2\left[Zm_p+(A-Z)m_n-m_я\right]}{A}$$

Підставимо значення:

$$\frac{E_{зв}}{A}=\frac{931[8\cdot 1{,}00783+(17-8)1{,}00867-16{,}99913]}{17}=7{,}76MeB$$

Приклад 2. Знайти енергію зв'язку $E_{зв}$ нейтрона в ядрі $_8O^{17}$.

Розв'язання.

Енергією зв'язку частинки в ядрі називають ту енергію, яку потрібно затратити, щоб відділити частинку від ядра без надання їй кінетичної енергії. Якщо відділити нейтрон $_0n^1$ від ядра $_8O^{17}$, то у відповідності з законом збереження заряду і числа нуклонів залишиться ядро $_8O^{16}$. Затрачену енергію для відриву нейтрона $E_{зв}$ можна знайти за формулою:

$$E=\Delta mC^2,$$

де Δm- зміна маси системи в результаті відриву нейтрона.

$$E_{зв}=C^2[(m_{O16}+m_n)-m_{O17}],$$

де m_{O16};m_{O17};m_n- відповідно маси спокою ядер кисню O^{16}, O^{17} і нейтрона. Запишемо маси ядер ізотопів O^{16} , O^{17} масами їх атомів, значення яких приведені в таблицях

$$E_{зв}=931[(15{,}99491+1{,}00867)-16{,}99913]=4{,}14\ МеВ.$$

Приклад 3. Енергія зв'язку $E_{зв}$ електрона з ядром незбудженого атома водню $_1H^1$ (енергія іонізації) дорівнює 13,6 еВ. Визначити, на скільки маса атома водню менша суми мас протона і електрона.

Розв'язання

Величина, яку ми шукаємо, є дефект маси. За законом пропорційності маси і енергії, $\Delta m=\frac{E_{зв}}{C^2}=1{,}49\cdot 10^{-8}\ а.о.м.$

Визначити дефект маси атома водню за формулою

$$\Delta m=m_p+m_e-m_H$$

в даний час неможливо, тому що його величина значно менша помилок вимірювань мас частинок.

Приклад 4. Знайти енергію реакції $_4Be^9+_1H^1\rightarrow{}_2He^4+_3Li^6$, якщо відомо, що кінетична енергія протона T_H=5,45 МеВ, ядра гелію T_{He}=4МеВ і що ядро гелію вилетіло під кутом 90^0 до напрямку руху протона. Ядро- мішень ${}_4Be^9$ нерухоме.

Розв'язання.

Енергія реакції Q є різниця між сумою кінетичної енергії ядер-продуктів реакції і кінетичною енергією ядра, що налітає:

$$Q=T_{Li}+T_{He}-T_H \quad (1)$$

В цьому виразі невідома кінетична енергія T_{Li} літія. Для її визначення використаємо закон збереження імпульсу.

$$P_H=P_{He}+P_{Li} \quad (2)$$

За умовою задачі, вектори P_H і P_{He} взаємно перпендикулярні і, відповідно, утворюють з вектором P_{Li} прямокутний трикутник. Тому:

$$P_{Li}^2=P_{He}^2+P_H^2 \quad (3)$$

Виразимо імпульси ядер через їх кінетичні енергії. Оскільки кінетична енергія ядер, за умовою задачі, набагато менша енергії спокою цих ядер, можна використати класичну формулу:

$$P^2=2mT \quad (4)$$

Підставимо значення із (4) в (3).

$$m_{Li}T_{Li}=m_{He}T_{He}+m_HT_H$$

Звідки: $$T_{Li}=\frac{m_{He}T_{He}+m_HT_H}{m_{Li}}=3{,}58MeB$$

Підставивши числові значення в формулу (1), знайдем

$$Q=T_{He}+T_{Li}-T_H=2{,}13\ \text{MeB}$$

Цю задачу можна розв'язати також через дефект маси, при цьому напрямок руху частинок , а також їх кінетична енергія можуть бути невідомі.

Приклад 5. Радіоактивне ядро магнію Mg^{23} викинуло позитрон і нейтрино. Визначити енергію Q β^+ - розпаду ядра.

Розв'язання.

Реакцію β^+- розпаду ядра магнію можна записати так:

$${}_{12}Mg^{23}\rightarrow\ {}_{11}Na^{23}+{}_1e^0+{}_0\nu^0$$

Припускаємо, що ядро магнію буде нерухомим, і враховуємо, що маса спокою нейтрино дорівнює нулю. Запишемо рівняння енергетичного балансу. На основі закону збереження релятивістської повної енергії маємо:

$$C^2m_{Mg}=C^2m_{Na}+T_{Na}+C^2m_e+T_e+T_\nu.$$

Енергія розпаду

$$Q=T_{Na}+T_e+T_\nu=C^2\,(m_{Mg}-m_{Na}-m_e\,).$$

Виразимо маси ядер магнію і натрію через маси відповідних нейтральних атомів:

$$Q=c^2\,[(\,m_{Mg}-12m_e)-(m_{Na}-11m_e)-m_e\,].$$

Оскільки маси спокою електрона і позитрона однакові, то після спрощення маємо:

$$Q=C^2\,(\,m_{Mg}-m_{Na}-2m_e).$$

Підставивши значення, знайдемо:

$$Q = 3{,}05\ \text{МеВ}.$$

Приклад 6. Визначити енергію реакції B^{10} (n, α) Li^7, яка протікає в результаті взаємодії повільних нейтронів з нерухомими ядрами бора. Знайти також кінетичну енергію продуктів реакції.

Розв'язання.

Фізична суть реакції B^{10} (n, α) Li^7 така: ядро бора $_5B^{10}$, поглинувши повільний нейтрон $_0n^1$, перетворюється в проміжне ядро $_5B^{11}$. Останнє є збудженим, випускає α – частинку (ядро гелію $_2He^4$), перетворюється в ядро літію $_3Li^7$.

$$_5B^{10} + {_0n^1} \rightarrow {_5B^{11}} \rightarrow {_3Li^7} + {_2He^4} \qquad (1)$$

Енергію реакції Q знайдемо за формулою:

$$Q = C^2\,[\,(m_{B10} + m_n) - (m_{Li7} + m_{He4})\,] \qquad (2)$$

Замінивши маси спокою ядер атомів масами спокою самих атомів, отримаємо:

$$Q = 931(\ 10{,}01294 + 1{,}00867 - 4{,}00260\ ) = 2{,}8\ \text{МеВ}$$

Щоб знайти кінетичні енергії продуктів реакції – ядра Li^7 і α – частинки, використаємо закон збереження релятивістської енергії:

$$\Sigma\, m_0C^2 + \Sigma T = \Sigma m_0{}^1C^2 + \Sigma T^1, \qquad (3)$$

де Σm_0C^2 – сума енергій спокою частинок до реакції, ΣT – сума їх кінетичних енергій. Справа величини, які відносяться до частинок після реакції.

$$C^2\,(\ \Sigma\, m_0 - \Sigma\, m_0{}^1\ ) + \Sigma T = \Sigma T^1$$

$$Q + \Sigma T = \Sigma T^1 \qquad (4)$$

По умові задачі ΣT – можна знехтувати. Тоді, для суми кінетичних енергій частинок Li^7 і He^4:

$$T_{Li} + T_{He} = Q \qquad (5)$$

Щоб скласти друге рівняння, яке зв'язує невідомі T_{Li}, T_{He}, застосуємо закон збереження імпульсу. До реакції сума імпульсів дорівнює нулю.

$$P_{Li} + P_{He} = 0 \qquad (6)$$

Звідси для модулів імпульсів, маємо:

$$P_{Li} = P_{He}$$

Перейдемо від імпульсів частинок до їх кінетичних енергій (P^2=2mT)

$$m_{Li}T_{Li} = m_{He}T_{He} \qquad (7)$$

Розв'язавши систему рівнянь (5) і (7), знайдемо:

$$T_{Li} = \frac{4Q}{11} = 1{,}02\,MeB; \qquad T_{He} = \frac{7Q}{11} = 1{,}78\,MeB.$$

Приклад 7. Знайти поріг ядерної реакції $C^{12}(d,n)N^{13}$,

Розв'язання.

В реакції ядро вуглецю C^{12} поглинає дейтрон d $_6C^{12} + {_1H^2} \rightarrow {_7N^{14}} \rightarrow {_7N^{13}} + {_0n^1}$, де $_7N^{14}$- проміжне ядро, яке після утворення випромінює нейтрон, перетворюючись в ядро $_7N^{13}$.

Порогом ядерної реакції називають T_y найменшу кінетичну енергію частинки, яка може збудити ядерну реакцію. Поняття порогу відноситься тільки до ендотермічних реакцій.

Для знаходження порогу використаємо рівняння із попередньої задачі

$$\Sigma T + Q = \Sigma T^1,$$

або в зв'язку з нерухомістю ядра- мішені C^{12}

$$\frac{m_d U^2}{2} + Q = \Sigma T,$$

де $\frac{m_d U^2}{2}$ - кінетична енергія дейтрона, мінімальне значення якої потрібно знайти.

Цьому мінімальному значенню відповідає мінімальне значення ΣT^1, яке, в свою чергу, дорівнює нулю при нульовій відносній швидкості частинок N^{13} і n. Це означає, що розпад проміжного ядра N^{14} відбувається без зміни кінетичної енергії системи. Таким чином, мінімум величини ΣT^1 дорівнює кінетичній енергії проміжного ядра, яку воно отримало в процесі утворення із дейтона і C^{12}. Тоді :

$$\frac{m_d U^2}{2} + Q = \frac{(m_c + m_d)V^2}{2},$$

де m_c – маса ядра C^{12}, m_d - маса дейтона, $(m_{C12} + m_d)$ – приблизне значення маси проміжного ядра, V – його швидкість.

Друге рівняння, яке пов'язує U і V, запишемо, використавши закон збереження імпульсу для непружного удару дейтона і ядра C^{12}:

$$m_d U = (m_c + m_d) V$$

Із двох останніх рівнянь вилучимо величину V:

$$\frac{m_d U^2}{2} = -Q\frac{(m_c + m_d)}{m_c}$$

Виразивши Q через дефект мас, отримаємо:

$$\frac{m_d U^2}{2} = C^2[(m_N + m_n) - (m_c + m_d)]\frac{m_c + m_d}{m_c}$$

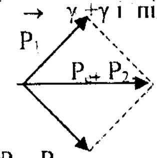
Замінивши маси ядер, які знаходяться в квадратних дужках, масами атомів і округливши до цілих чисел значення мас у дробі $\frac{m_c + m_d}{m_c}$, виконаємо підрахунки:

$$\frac{m_d U^2}{2} = 931[(13{,}00574 + 1{,}00867) - (12{,}000 + 2{,}0141)]\frac{14}{12} = 0{,}34 MeB$$

Приклад 8. Позитрон з кінетичною енергією T=0,75 MeB налітає на вільний електрон, який знаходиться у спокої. В результаті анігіляції виникає два γ-фотона з однаковими енергіями. Визначити кут θ між напрямками їх руху.

Розв'язання.

Процес анігіляції електрона e^- і позитрона e^+ протікає за схемою: $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ і підлягає законам збереження енергії і імпульсу.



Згідно з законом збереження імпульсу, імпульс Позитрона Pe+ дорівнює векторній сумі імпульсів фотонів P_1 і P_2 при цьому $P_1=P_2=\frac{E}{C}$,

$P_{e+} = P_1 + P_2$

де E – енергія кожного γ-фотона. Таким чином, для кута θ маємо:

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{P_{E+}}{2P_1} = \frac{P_{E+}}{2E} \quad (1)$$

Щоб із формули (1) знайти кут θ, потрібно визначити імпульс позитрона P_{e+} і енергію E кожного фотона.

Імпульс позитрона знайдемо через його кінетичну енергію T. Оскільки величина T перевищує енергію спокою позитрона m_0C^2=0,511 MeB, то позитрон потрібно розглядати як релятивістську частинку.

Енергію γ фотона знайдемо за допомогою закона збереження релятивістської енергії. Зазначимо, що маса спокою фотонів дорівнює нулю $\Sigma m_0'=0$, а повна енергія фотонів є їх кінетична енергія, тобто $\Sigma T'=2E$. Враховуючи, крім цього, що електрон і позитрон мають однакову масу спокою m_0, отримаємо:

$$2m_0C^2+T=2E \quad (2)$$

Підставимо значення 2E і значення релятивістського імпульсу в (1), знайдемо

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{C\sqrt{2mT(1+T/2m_0C^2)}}{T+2m_0C^2}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+2m_0C^2/T}}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = 0{,}651, \quad \theta=99^0.$$

Задачі для самостійного розв'язування.

4.1. Знайти енергію зв'язку ядра атома гелію $_2He^4$. (28,3 MeB)

4.2. Знайти питому енергію зв'язку ядра атома кисню $_8O^{16}$. (7,97 MeB)

Знайти енергію зв'язку ядра атома дейтерію $_1H^2$. (2,2 MeB)

Енергія зв'язку $E_{зв}$ ядра, яке складається із двох протонів і одного нейтрона дорівнює 7,72 MeB. Визначити масу m_0 нейтрального атома, який має це ядро. (3,01604 а.о.м)

4.3. Атомне ядро, яке поглинуло γ-фотон (λ=0,47 пм), перейшло в збуджений стан і розпалось на окремі нуклони. Сумарна кінетична енергія нуклонів T=0,4MeB. Визначити енергію зв'язку $E_{зв}$ ядра.

(2,2 MeB)

4.4. Знайти мінімальну енергію зв'язку $E_{зв}$, необхідну для виділення одного протону із ядра азоту $_7N^{14}$. (7,75 МеВ)

4.5. Визначити порядковий номер Z і масове число A частинки, позначеної літерою X, в символічному запису ядерної реакції:

$_6C^{14}+_2He^4\rightarrow_8O^7+X$

4.6. Знайти енергію Q ядерних реакцій 1) $H^3(p,\gamma)He^4$; 2) $H^2(d,\gamma)He^4$; 3) $H^2(n,\gamma)H^3$.

(1) 19,8 МеВ; 2) 23,8 МеВ 3) 6,26 МеВ)

4.7. Визначити кінетичну енергію T і швидкість U теплового нейтрона при температурі навколишнього середовища 27^0C.

($6{,}22\cdot10^{-21}$ Дж; 2,7км/с)

4.8. При розпаді ядра U^{235} виділяється енергія Q=200 МеВ. Яку долю енергії ядра U^{235} складає енергія, яка виділилась? (0,00091)

4.9. Визначити енергію E, яка виділиться при розпаді всіх ядер, які знаходяться в U^{235} масою m=1г. (82 ГДж)

4.10. Знайти електричну потужність P атомної електростанції, яка за добу витрачає 0,1 кг U^{235}, якщо ККД η станції дорівнює 16%. (15 МВт)

4.11. Визначити енергію Q α-розпаду ядра полонія $_{84}Po^{210}$. (5,41 МеВ)

4.12. Визначити енергію Q розпаду ядра вуглецю $_6C^{10}$, яке втратило позитрон і нейтрино. (2.6 МеВ)

Тема 5.
Основні поняття термодинаміки

1. Термодинамічні параметри. Рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона).
2. Основне рівняння молекулярно - кінетичної теорії газів.
3. Процеси з ідеальним газом. Закон Дальтона.

Основні формули

Рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона).

$$PV=\frac{m}{\mu}RT,\quad PV=\nu RT\ ,$$

де m- маса газу; μ - його молярна маса; R- універсальна газова стала; $\nu=\frac{m}{\mu}$ - кількість молів газу, T- термодинамічна температура.

Молярна маса суміші газів

$$\mu=\frac{m_1+m_2+...+m_n}{\nu_1+\nu_2+...+\nu_n},$$

де m_i -маса і-ї компоненти суміші; ν_i - кількість речовини і-ї компоненти; n - число компонент суміші.

Закон Дальтона:

$$P = P_1 + P_2 + ...P_i... + P_n,$$

де P-тиск суміші газів; P_i - парціальний тиск і-ї компоненти суміші.

Закон Бойля-Маріота (ізотермічний процес T=const, m=const):

$$PV = const, \quad P_1V_1 = P_2V_2$$

Закон Гей-Люсака (ізобарний процес: P=const, m=const):

$$\frac{V}{T} = const, \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Закон Шарля (ізохорний процес: V=const, m=const):

$$\frac{P}{T} = const, \quad \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

Концентрація n-частинок (молекул, атомів) $n = \frac{N}{V} = \frac{N_A\rho}{\mu}$;

де N - число молекул в об'ємі V; N_A - число Авогадро; ρ - густина речовини.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів

$$P = \frac{2}{3}n\frac{mV^2}{2} = \frac{2}{3}n\mathrm{E},$$

де n- концентрація молекул, m – маса молекули, V - середня квадратична швидкість молекули, Е- середня кінетична енергія поступального руху молекули.

Середня кінетична енергія, яка приходиться на один ступінь вільності молекули

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}kT,$$

Середня кінетична енергія молекули з i ступенями вільності

$$\mathrm{E} = \frac{i}{2}kT,$$

де k -стала Больцмана, Т- абсолютна температура.

Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури

$$P = nkT$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1 . Визначити молярну масу μ суміші кисню масою m=25г і азоту масою m=75г.

Розв'язання

Молярна маса суміші μ і відношення маси суміші m до кількості речовини суміші ν:

$$\nu = \frac{m}{\mu} \tag{1}$$

Маса суміші $m = m_1 + m_2$, а кількість речовини суміші

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}$$

Підставивши m, ν в формулу (1), отримаємо

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = 28{,}9 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$$

Приклад 2. В балоні об'ємом V=10 л знаходиться гелій під тиском P_1=1МПа, який має температуру T_1=300К. Після того, як з балону використали m = 10 г гелію, температура в балоні знизилась до T_2=290К. Визначити тиск P_2 гелію, який залишився в балоні.

Розв'язання

Із рівняння Менделєєва-Клапейрона для двох станів газу маємо:

$$P_1V = \frac{m_1}{\mu}RT_1\ , \qquad (1)$$

$$P_2V = \frac{m_2}{\mu}RT_2\ , \qquad (2)$$

де m_1, m_2 - відповідно маси гелію в початковому і кінцевому станах .

$$m_1 = \frac{\mu \cdot P_1V}{RT_1}, \qquad (3)$$

$$m_2 = \frac{\mu \cdot P_2V}{RT_2}. \qquad (4)$$

Із рівнянь (3) і (4) випливає:

$$m = m_1 - m_2 = \frac{\mu \cdot P_1V}{RT_1} - \frac{\mu P_2V}{RT_2}$$

Звідки $P_2 = \frac{RT_2}{\mu \cdot V}\left(\frac{\mu \cdot P_1V}{RT_1} - m\right) = 3{,}64 \cdot 10^5\ Па = 364 кПа$

Приклад 3.Знайти при температурі Т=286 К середню кінетичну енергію обертового руху : 1) однієї молекули кисню, 2) молекул кисню сумарною масою 4г.

Розв'язання

На ступінь вільності молекул газу припадає однакова середня енергія $E_1 = \frac{1}{2}kT$. Молекула кисню є двоатомна. Середня енергія обертового руху такої молекули $E_0 = 2\frac{1}{2}kT = kT = 3{,}94 \cdot 10^{-21}\ Дж$.

Середня кінетична енергія всіх молекул

$$W_0 = NE_0 = \nu \cdot N_A E_0 = \frac{m}{\mu} N_A E_0 = 296 Дж.$$

Задачі для самостійного розв'язання

5.1. В балоні знаходиться газ при температурі t_1=100С. До якої температури t_2 потрібно підігріти газ, щоб його тиск збільшився в два рази? (473°С)

5.2. Яку температуру мають два грами азоту, який займає об'єм 820 $см^3$ при тиску 2 атм? (280 К)

5.3. Балон ємністю 12 л заповнений азотом при тиску $8{,}1 \cdot 10^6\ Н/м^2$ і температурі 17 °С. Яка маса азоту знаходиться в балоні? (m=1,13 кг)

5.4. Знайти мінімальний об'єм балону, який може містити 6,4 кг кисню при температурі 20°С, якщо він розрахований на максимальний тиск 160 атм? ($3{,}1 \cdot 10^{-2} м^3$)

5.5. При нагріванні ідеального газу на $\Delta T = 1K, (P = const)$ його об'єм збільшився на 1/350 від початкового об'єму. Знайти початкову температуру Т газу. (350К)

5.6. Яка кількість кіломолів газу знаходиться в балоні об'ємом 10м³ під тиском 720 мм. рт. ст. і температурі 17С? (0,4 кмоль)

5.7. Знайти густину водню при температурі 15 С і тиску 730 мм. рт. ст.. ($0{,}081\ кг/м^3$)

5.8. Котел об'ємом $V = 2 м^3$ містить перегріту водяну пару масою 10кг при температурі 500 К. Визначити тиск пари в котлі.(1 МПа)

5.9. Газ при температурі 309 К і тиску Р=0,7 МПа має густину $\rho = 12\ кг/м^3$. Визначити відносну молекулярну масу газу. (44)

5.10. В балоні об'ємом 25 л знаходиться водень при температурі Т=290К. Після того, як частину водню випустили, тиск в балоні знизився на $\Delta P = 0{,}4$ МПа. Яку масу газу випустили з балону? (8,3г)

5.11. Чому дорівнює густина повітря в балоні, якщо його відкачати до розрідження Р=10^{-11} мм. рт. ст. ? Температура повітря 15 °С. ($1{,}6 \cdot 10^{-14}\ кг/м^3$)

5.12. В посудині знаходиться 14 г азоту і 9 г водню при температурі 10С і тиску $10^6\ Н/м^2$. Знайти: 1) масу одного кіломоля суміші; 2) об'єм посудини. (4,6 кг/кмоль; $1{,}7 \cdot 10^{-3} м^3$)

5.13. Який об'єм V займає суміш газів азоту масою m_1 = 1кг і гелію масою m_2 = 1кг при нормальних умовах? (6,4м³)

5.14. Газова суміш, яка складається з кисню і азоту, знаходиться в балоні під тиском P=1МПа. Визначити парціальні тиски кисню і азоту, якщо масова доля кисню дорівнює 0,2 . (0,18 МПа; 0,82 МПа)

5.15. Балон об'ємом 30л вміщує суміш водню і гелію при температурі 300К і тиску P=828 кПа. Маса суміші дорівнює 24г. Визначити масу водню та масу гелію. (16г; 8г)

5.16. Балон об'ємом 5л вміщує суміш гелію і водню під тиском 600кПа, маса суміші 4г, масова доля гелію 0,6. Визначити температуру суміші. (258К)

5.17. В запаяній посудині знаходиться вода, яка займає половину об'єму посудини. Знайти тиск і густину водяної пари при температурі 400°С. ($1{,}55\cdot10^8\ Н/м^2$; $500\ кг/м^3$)

5.18. Скільки молекул газу знаходиться в балоні ємністю V=30л при температурі T=300К і тиску P=5МПа. ($3{,}62\cdot10^{23}$)

5.19. Чому дорівнює енергія теплового руху 20 г кисню при температурі 10С? Яка енергії припадає на долю обертального руху? ($3{,}7\cdot10^3$ Дж; $1{,}5\cdot10^3$ Дж)

5.20. Один кілограм двоатомного газу знаходиться під тиском $P=8\cdot10^4\ Н/м^2$ і має густину $\rho=4\ кг/м^3$. Знайти енергію теплового руху молекул газу . ($5\cdot10^4$ Дж)

5.21. Середня квадратична швидкість молекул деякого газу при нормальних умовах дорівнює 461м/с. Яка кількість молекул знаходиться в одному грамі цього газу? ($1{,}88\cdot10^{22}$)

5.22. Середня квадратична швидкість молекул деякого газу дорівнює 450м/с.Тиск газу $P=5\cdot10^4$ Н/м^2. Знайти густину газу. (0,74кг/м^3)

5.23. Суміш гелію і аргону знаходиться при температурі T=1200 К. Визначити середню квадратичну швидкість і середню кінетичну енергію атомів гелію і аргону. ($2{,}73\cdot10^3$ м/с, $2.48\cdot10^{-20}$ Дж), (864м/с, $2{,}48\cdot10^{-20}$ Дж).

Тема 6

Перший закон термодинаміки

1. Кількість теплоти. Теплоємність.
2. Перший закон термодинаміки.
3. Застосування першого закону термодинаміки до процесів, які відбуваються з ідеальним газом.
4. Адіабатичний процес. Рівняння Пуасона.

Основні формули

Зв'язок між молярною C_m і питомою c теплоємностями газу:

$$C_m = c\mu$$

де μ - молярна маса газу.

Молярні теплоємності при сталому об'ємі C_V і сталому тиску C_P дорівнюють:

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_P = \frac{i+2}{2}R;$$

де i- число ступенів вільності , R- універсальна газова стала.

Питомі теплоємності при сталому тиску c_p і сталому об'ємі c_v.

$$c_v = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu}; c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$$

Рівняння Майєра $\quad c_p - c_v = R$

Показник адіабати $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}$

Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = N\varepsilon;$$

$$U = \nu \cdot c_V T = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT,$$

де ε – середня кінетична енергія молекули; N-число молекул газу ; ν - кількість молів; m - маса газу.

Рівняння Пуассона $\quad pV^{\gamma} = const$

Зв'язок між початковим і кінцевим значенням параметрів стану газу при адіабатичному процесі:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}; \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}; \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Робота при зміні об'єму газу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV,$$

де V_1 - початковий об'єм газу; V_2 - кінцевий об'єм, p - тиск газу.

Робота при ізобарному процесі (P = const)

$$A = p(V_2 - V_1).$$

Робота при ізотермічному процесі (T=const)

$$A = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu}RT\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Робота при адіабатному процесі

$$A = \frac{m}{\mu}c_V(T_1 - T_2) = \frac{RT_1}{\gamma-1}\frac{m}{\mu}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

де T_1 - початкова температура газу, T_2 - його кінцева температура.

Перший закон термодинаміки.

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A$$

де ΔQ - кількість теплоти, яку отримав газ; ΔU - зміна внутрішньої енергії газу; ΔA - робота, виконана газом проти зовнішніх сил.

При ізобаричному процесі (P=const)

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{m}{\mu} c_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{m}{\mu} c_p \Delta T .$$

При ізохорному процесі ($\Delta A = p\Delta V = 0$)

$$\Delta Q = \Delta U = \frac{m}{\mu} c_V \Delta T .$$

При ізотермічному процесі ($\Delta U = 0$)

$$\Delta Q = \Delta A = \frac{m}{\mu} RT\, ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

При адіабатичному процесі ($\Delta Q = 0$)

$$\Delta A = -\Delta U = -\frac{m}{\mu} c_V \Delta T .$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти питомі теплоємності $c_V; c_p$ в суміші неону і водню. Масові долі газів відповідно дорівнюють $\omega_1 = 0{,}8$ і $\omega_2 = 0{,}2$.
Для неону c_{v1}=624 Дж/(кг К); c_{v1}=1,04 Дж/(кг К).
Для водню c_{v2}=10,4 кДж/(кг К); c_{v2}=14,6 Дж/(кг К).

Розв'язання

Знайдемо теплоту, необхідну для нагріву суміші на ΔT

$$Q = c_V (m_1 - m_2)\Delta T, \tag{1}$$

де m_1 - маса неону m_2 - маса водню

$$Q = (c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2)\Delta T, \tag{2}$$

Прирівняємо праві частини (1) і (2) і поділимо на ΔT, знайдемо питому теплоємність суміші

$$c_V (m_1 - m_{2,1}) = c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2$$

Звідки

$$c_V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} c_{V1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} c_{V2}$$

$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}; \quad \omega_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$$c_V = \omega_1 c_{V1} + \omega_2 c_{V2} = 2{,}58 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг К)}$$

Таким же чином можна знайти вираз для знаходження питомої теплоємності c_p суміші.

$$c_p = \omega_1 c_{p1} + \omega_2 c_{p2}, \text{ або } c_p = 3{,}73 \text{ кДж/(кг К)}$$

Приклад 2. Яку роботу потрібно виконати при стисканні газу за допомогою поршня в металевому циліндрі, щоб збільшити його тиск в два рази? Початковий тиск газу $p_1 = 760$ мм.рт.ст., початковий об'єм $V_1 = 5$ л. Під час стиснення температура навколишнього середовища залишається сталою.

Розв'язання

В зв'язку з тим, що стиснення газу відбувається повільно, процес можна вважати ізотермічним. Робота газу при ізотермічному процесі

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Із закону Бойля-Маріота маємо:

$$A = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = -351 \text{ Дж.}$$

Тобто, робота виконується над термодинамічною системою зовнішніми силами, тому робота системи від'ємна, а зовнішніх сил–додатна.

Приклад 3. Кисень займає об'єм $V_1 = 1м^3$ і знаходиться під тиском $p_1 = 200$ кПа. Газ нагріли спочатку при сталому тиску до об'єму $V_2 = 3м^3$, а потім при сталому об'ємі до тиску $p_2 = 500$ кПа. Побудувати PV-діаграму процесу та знайти: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу; 2) виконану роботу A; 3) кількість теплоти ΔQ, яку отримав газ.

Розв'язування

Побудуємо PV-діаграму процесу (точками 1, 2, 3 позначені стани газу, які характеризуються параметрами (p_1,V_1,T_1), (p_1,V_2,T_2) і (p_2,V_2,T_3)).

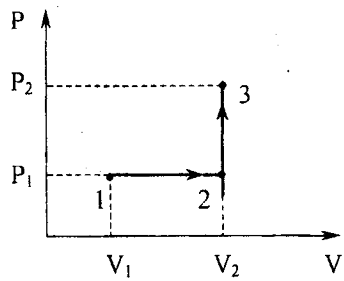


Рис 6 1

1) зміна внутрішньої енергії системи при переході із стану 1 в стан 3 виражається формулою

$$\Delta U = C_V m \Delta T;\ \Delta T = T_3 - T_1$$

$$C_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu};$$

де μ - молярна маса газу.

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R(T_3 - T_1) \qquad (1)$$

Температури T_1 і T_3 виразимо із рівняння Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT;\ T_1 = \frac{\mu \cdot p_1 V_1}{mR}; T_3 = \frac{\mu \cdot p_2 V_2}{mR}.$$

Тоді $\Delta U = \frac{i}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$

Підставимо сюди значення, враховуючи, що для кисню i=5, отримаємо

$\Delta U = 3{,}25 МДж$

2) Повна робота, яку виконав газ, дорівнює $A = A_1 + A_2$, де A_1-робота на ділянці 1-2, A_2- робота на ділянці 2-3.

На ділянці 1-2 (P=const) $A_1 = p_1 \Delta V = p_1(V_2 - V_1)$, а на ділянці 2-3 ($\Delta V = 0$), тому $A_2 = 0$. Таким чином $A = A_1 = p_1(V_2 - V_1)$.

Підставивши значення, отримаємо: A=0,4МДж

3) Згідно з першим законом термодинаміки $\Delta Q = \overline{A} + \Delta U$, або $\Delta Q = 3{,}65 МДж$

Задачі для самостійного розв'язування.

6.1. Для деякого двоатомного газу питома теплоємність при сталому тиску дорівнює 3,5 кал/г К. Чому дорівнює маса одного кіломоля цього газу? (2кг/кмоль)

6.2. Чому дорівнюють питомі теплоємності c_p, c_V деякого двохатомного газу, якщо густина цього газу при нормальних умовах дорівнює $1{,}43 \, кг/м^3$

($c_V = 693 \frac{Дж}{кг.град}$, $c_p = 970 \frac{Дж}{кг.град}$)

6.3. Знайти питому теплоємність при сталому тиску c_p газової суміші, яка складається із 3 кмолів аргону і 2 кмолів азоту. (685Дж/кг.град)

6.4. Питома теплоємність c_V при сталому об'ємі газової суміші, яка складається із одного кіломоля кисню і декількох кіломолів аргону, дорівнює 430Дж/кг К. Яка кількість аргону знаходиться в газовій суміші? (m = 60кг)

6.5. Знайти показник адіабати для суміші газів, яка складається із гелію масою $m_1 = 10$ г і водню $m_2 = 4$ г. (1,51)

6.6. Знайти показник адіабати суміші водню і неону, якщо масові долі обох газів в суміші однакові і дорівнюють $\omega = 0{,}5$. (1,42)

6.7. Дві літри азоту знаходиться під тиском $10^5 \, Н/м^2$. Яку кількість тепла потрібно надати азоту, щоб 1) при $p = const$ об'єм збільшився в два рази. 2) при $V = const$ тиск збільшився в два рази ? (1) 700Дж, 2) 500Дж)

6.8. Яку кількість тепла потрібно надати 12г кисню, щоб нагріти його на 50 К при сталому тиску? (545Дж)

6.9. В закритій посудині об'ємом 10 л знаходиться повітря під тиском $10^5 \, Н/м^2$. Яку кількість тепла потрібно надати, щоб збільшити тиск повітря в посудині в 5раз? (10^4Дж)

6.10. Азот нагрівали при сталому тиску. При цьому надали йому кількість теплоти Q =21кДж. Знайти роботу А, яку виконав при цьому газ, і зміну ΔU внутрішньої енергії. (6кДж; 15кДж)

6.11. Для нагрівання кисню масою $m = 160$ г на $\Delta T = 12K$ було затрачено кількість теплоти $Q = 1{,}76$ кДж. Як протікав процес: при сталому об'ємі, чи при сталому тиску? (P=const)

6.12. Азот об'ємом $V_1 = 10$ л під тиском $p_1 = 0{,}2$ МПа, ізотермічно розширився до об'єму $V_2 = 28$ л. Визначити роботу A розширення газу. (2,06кДж)

6.13. Яка кількість теплоти Q виділиться, якщо азот масою $m = 1$ г при температурі Е=280 К і тиску $p_1 = 0{,}1$ МПа, ізотермічно стиснули до тиску $p_2 = 1$ МПа? (191Дж)

6.14. Повітря знаходиться при температурі 0^0 C. До якої температури воно охолоне, якщо об'єм зміниться адіабатично від V_1 до $V_2 = 2V_1$? (-66^0 C)

6.15. Кисень об'ємом 7,5л адіабатично стискають до об'єму 1л. В кінці тиск складає $1{,}6 \cdot 10^6 н/м^2$. Який був початковий тиск газу? ($9{,}5 \cdot 10^4 н/м^2$)

6.16. Газ розширюється адіабатично і об'єм зменшується в два рази, а температура (абсолютна) зменшується в 1,32 рази. Яку кількість ступенів вільності мають молекули цього газу? ($i = 5$)

6.17. Газ розширюється адіабатично. При цьому його тиск зменшується від 2 атм до 1 атм. Потім його нагрівають при сталому об'ємі до початкової температури, при цьому тиск збільшується до 1,22 атм 1) Визначити відношення C_p/C_V. 2) Побудувати графік процесу. (1,44).

6.18. Азот об'ємом 1 кмоль, який знаходиться при нормальних умовах, розширюється адіабатично від об'єму V_1 до $V_2 = 5V_1$. Знайти: 1) зміну внутрішньої енергії газу; 2) роботу, яка виконується при розширенні. (1) $-2{,}69 \cdot 10^6$ Дж; 2) $2{,}69 \cdot 10^6$ Дж)

Тема 7

Другий закон термодинаміки

1. Оборотні та необоротні процеси. Другий закон термодинаміки. Цикл Карно. Теорема Карно.
2. Приведена теплота. Ентропія. Зміна ентропії замкненої системи.

Основні закони і формули

Коефіцієнт корисної дії (ККД)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

ККД теплової машини , яка працює за ідеальним циклом Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

де Q_1, Q_2- відповідно кількість підведеної і відведеної теплоти до робочого тіла за один цикл, T_1, T_2 — температура нагрівника і холодильника.

Нерівність Клаузіуса

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \le 0$$

та її формулювання : сума приведених теплот в оборотному циклі Карно дорівнює нулю, а в необоротному - менша за нуль.

Різниця ентропій, двох станів термодинамічної системи.

$$\Delta S_{12}=\int_{T_1}^{T_2}\frac{dQ}{T}$$

де dQ - елементарна зміна теплоти термодинамічної системи,

T - абсолютна температура.

Зміна ентропії термодинамічної системи в термодинамічних процесах:

а) адіабатний процес (dQ =0)

$$\Delta S_{12}=0$$

б) ізотермічний процес ($T=const$)

$$\Delta S_{12}=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{P_1}{P_2}$$

в) ізохорний процес ($V=const$)

$$\Delta S_{12}=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1}=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\ln\frac{P_2}{P_1}$$

г) ізобарний процес ($P=const$)

$$\Delta S_{12}=\frac{m}{\mu}\frac{i+2}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1}=\frac{m}{\mu}\frac{i+2}{2}R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

д) адіабатичний процес($Q=const, dQ=o$)

$$\Delta S_{12}=0$$

де m - маса газу, μ - його молекулярна маса, i - число ступенів вільності молекул, P,V,T- параметри стану газу, $\gamma=\frac{C_P}{C_V}$ -показник адіабати.

Формула Больцмана

$$S=k\ln w$$

де S- ентропія системи, k-стала Больцмана, w - ймовірність стану системи.

Ентальпія (H) термодинамічної системи та її зміна (dH)

$$H=U+PV$$

$$dH=d(U+PV)=TdS+VdP$$

Приклади розв'язання задач:

Приклад 1. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно, ККД циклу 25%. Як потрібно змінити температуру нагрівника, при постійній температурі холодильника, щоб її ККД збільшився в 1,6 рази?

Розв'язання:

КҚД ідеального циклу Карно

$\eta = 0.24$

$\frac{\eta'}{\eta} = 1{,}5$

$\frac{T_1'}{T_1} - ?$

Температура гарячого джерела машини

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (1)$$

$$T_1 = \frac{T_2}{1-\eta} \qquad (2)$$

аналогічно $T_1' = \frac{T_2}{1-\eta'}$ (3)

Із (2), (3) маємо

$$\frac{T_1'}{T_1} = \frac{1-\eta}{1-\eta'} = 1{,}25$$

Приклад 2. Виразити та розрахуватиККД ідеального циклу Трінклера (рис.7.1) для двигуна внутрішнього згорання, через характерні параметри циклу $\varepsilon, \lambda, \rho$, визначити температури у вузлових точках циклу, знайти зміну ентропії у кожному процесі, побудувати TS -діаграму циклу, якщо P_1=0,1Мпа, t_1=27°C, ступінь стиску $\varepsilon = V_1/V_2$=4, ступінь підвищення тиску $\lambda = P_3/P_2$=2, ступінь попереднього розширення тіло 1 моль ідеального двоатомного газу

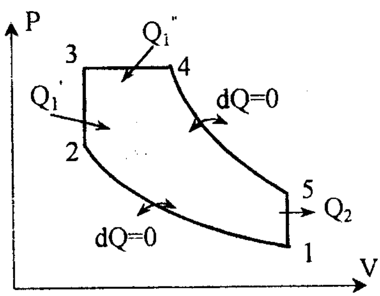


Рис. 7.1

$P_1 = 1\cdot10^5$ *Па*

$T_1 = 300K$

$\varepsilon = {}^{v_1}\!/_{v_2} = 4$

$\lambda = {}^{P_3}\!/_{P_2} = 2$

$\rho = {}^{v_4}\!/_{v_3} = 1.5$

$\nu = 1$*моль*

$i = 5$

$\eta - ?, T_2, T_3, T_4, T_5 - ?$

$\Delta S_{23}, \Delta S_{34} - ?$

Розв'язання:

Термічний ККД теплового двигуна $\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$

Для циклу Трінклера: $Q_1 = Q_1^I + Q_1^{II} = Q_{23} + Q_{34}$, $Q_2 = Q_{51}$

Оскільки процеси 2-3 і 5-1 ізохорні, а 3-4 ізобарний, то

$$Q_1 = \nu\frac{i}{2}R(T_3 - T_2) + \nu\frac{i+2}{2}R(T_4 - T_3)$$

$$Q_2 = \nu\frac{i}{2}R(T_1 - T_5)$$

Виразимо температуру газу в вузлових точках циклу 2,3,4,5 через його початкову температуру T_1:

Для адіабатного процесу стиску 1-2:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\lambda-1}T_1 = 522{,}3\ \text{K}$$

де $\gamma = \frac{i+2}{i}$ - показник адіабати, при $i = 5$, $\gamma = 1{,}4$.

Для ізохорного процесу 2-3:

$$T_3 = \frac{P_3}{P_2}T_2 = \lambda T_2 = \lambda\varepsilon^{\gamma-1}T_1 = 1044{,}6\ K$$

Для ізобарного процесу 3-4:

$$T_4 = \frac{V_4}{V_3}T_4 = \lambda\rho\varepsilon^{\gamma-1}T_1 = 1566{,}9\ K$$

Для адіабатного процесу розширення 4-5, враховуючи, що $V_1 = V_5$ і $V_2 = V_3$ маємо:

$$T_5 = \left(\frac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma-1}T_4 = \left(\frac{V_4}{V_2}\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}T_4 = \left(\frac{V_4}{V_3}\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}T_4 = \rho^{\gamma-1}\varepsilon^{\frac{1}{\gamma-1}}T_4 = \lambda\rho^{\gamma}T_1 = 1058\ K$$

Із рівнянь 1...7, після нескладних перетворень маємо:

$$\eta = 1 - \frac{i(\lambda\rho^{\gamma}-1)}{i(\lambda\varepsilon^{\gamma-1}-\varepsilon^{\lambda-1}) + (i+2)(\lambda\rho\varepsilon^{\lambda-1}-\lambda\varepsilon^{\gamma-1})} = 1 - \frac{\lambda\rho^{\gamma}-1}{(\lambda-1)+\gamma\lambda(\rho-1)}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 0{,}395$$

Знайдемо зміну ентропії в складових процесах циклу Трінклера:

$$\Delta S_{12} = 0,\quad \Delta S_{23} = \nu\frac{i}{2}R\ln\frac{T_3}{T_2} = 14{,}4\ Дж/К,\quad \Delta S_{34} = \nu\frac{i+2}{2}R\ln\frac{T_4}{T_3} = 11{,}8\ Дж/К$$

$$\Delta S_{45} = 0,\ \Delta S_{51} = \nu\frac{i+2}{2}R\ln\frac{T_1}{T_5} = -26{,}2\ Дж/К$$

Побудуємо в масштабі TS- діаграму циклу Трінклера (Рис.7.2.)

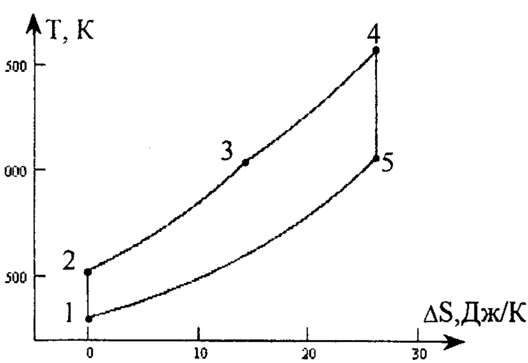


Рис.7.2. TS-діаграма циклу Трінклера

Приклад 3. Знайти термічний ККД карбюраторного двигуна для ідеального циклу Отто (в таких двигунах теплота підводиться і відводиться в ізохорних процесах, цикл складається з двох ізохор і двох адіабат , рис.7.3), якщо ступінь стиску $\varepsilon = V_1/V_2 = 5$, ступінь підвищення тиску $\lambda = P_3/P_2 = 1.4$. Робочим тілом служить сухе повітря.

$\varepsilon = V_1/V_2 = 5$

$\lambda = P_3/P_2 = 1.4$

$\gamma = 1.33$

$\eta - ?$

Розв'язання

Цикл Отто є частинним випадком циклу Трінклера (див. розв'язання попередньої задачі), при $\rho = 1$ маємо:

$$\eta = 1 - \frac{\lambda\rho^{\gamma} - 1}{(\lambda - 1) + \gamma\lambda(\rho - 1)} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{\lambda - 1}{(\lambda - 1)} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 0{,}41$$

Приклад 4. Дві однакові за масами, але з різними температурами порції води змішують між собою при нормальному тиску. Покажіть, що ентропія в кінцевому стані, після вирівнювання температури суміші,буде більшою ніж сумарна ентропія цих порцій води у початковому стані.

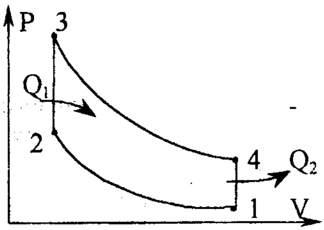


Рис.7.3. PV-діаграма циклу Отто

Розв'язання

Знайдемо зміну ентропії системи

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_c} \frac{dQ}{T} + \int_{T_2}^{T_c} \frac{dQ}{T} \qquad (1)$$

де $T_c = \frac{T_1 + T_2}{2}$ - кінцева температура суміші, елементарна зміна теплоти $dQ = cmdT$. Проінтегрувавши (1) маємо:

$$\Delta S = cm(ln\frac{T_c}{T_1} + ln\frac{T_c}{T_2}) = cm\,ln\frac{T_c^2}{T_1T_2} = cm\,ln\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} \qquad (2)$$

оскільки $\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} > 1$, то $\Delta S = (S_2 - S_1) > 0$ - ентропія суміші зростає.

Задачі для самостійного розв'язування

7.1. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Знайти ККД циклу, якщо за один цикл виконана корисна робота A=4900 Дж, а холодильнику передано 5,4 ккал теплоти. (η=0,18).

7.2. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно, виконуючи за один цикл роботу 8 ·10 ^{3}Дж. Температура термостатів відповідно рівна 100 і 0°С. Знайти : а) кількість теплоти, яку отримує робоче тіло за один цикл від нагрівника; б) кількість теплоти, яка передається за один цикл холодильнику; г) ККД циклу. (Q_1=300 кДж, Q_2=220 кДж).

7.3. Вуглекислий газ масою 5 кг розширюється при постійному тиску, виконуючи роботу 100кДж, після охолоджується до початкової температури і ізотермічно стискується до початкового об'єму. Побудуйте PV діаграму циклу і знайдіть :

а) температуру в кінці ізобарного розширення; б) кількість теплоти, яку отримала система при ізобарному процесі; в) ККД циклу. Початкова температура T_1=373 К. (T_1=440К; Q=325 кДж).

7.4. Теплова машина працює за циклом Карно. Температура гарячого джерела в 1,16 раз більша за температуру холодильника. За один цикл робоче тіло отримує 4,2 кДж тепла. Яка робота виконується за цикл? Який ККД циклу? (А=590Дж, η=0,14).

7.5. Знайти найменший об'єм газу V_1 в циклі Карно, якщо об'єм в кінці ізотермічного розширення V_2=50 л, в кінці адіабатичного розширення V_3=100л, а в кінці ізотермічного стиску 25 л. (V_1=0,0125 $м^3$).

7.6. Знайти найбільший тиск газу P_1 в циклі Карно, якщо тиск в кінці ізотермічного розширення P_2=2 атм, в кінці адіабатного розширення P_3=1,5 атм, в кінці ізотермічного стиску P_4= 3 атм. ($1{,}013\cdot 10^6$ Па).

7.7. 1 кмоль кисню виконує цикл Карно в інтервалі температур 27 ...327°С. Відомо, що відношення P_{max}/P_{min}=20. Знайти : а) ККД циклу; б) кількість теплоти Q_1, яку отримало робоче тіло від нагрівника за цикл; г) кількість теплоти Q_2, яку віддало робоче тіло холодильнику за цикл.(η=0,5, Q_1=2,8 мДж; Q_2=2,2 мДж).

7.8. Ідеальна холодильна машина працює за зворотним циклом Карно в інтервалі температур -11°С ... 15°С. Робота машини за цикл А= -200 кДж. Визначити: холодильний коефіцієнт ε; кількість відведеної теплоти Q_2; кількість теплоти Q_1 відведеної до теплоприймача за цикл.

(ε =10; Q_2=20 мДж ; Q_1=2,2 мДж).

7.9. Знайти підведену та відведену кількість теплоти, корисну роботу за один цикл, ККД циклу та порівняти його з ККД циклу Карно (вважати, що цикл Карно протікає при максимальній різниці температур циклу, який розглядається), побудувати PV, та TS- діаграми. Цикл протікає в напрямку руху стрілки годинника, початкові параметри P_1=1 атм, V_1=50 л, проміжний P_2=4 атм, максимальний об'єм робочого тіла V_4=75 л, якщо робоче тіло 1 моль двоатомного ідеального газу, цикл складається з: 1) двох ізохор і двох ізобар; 2) двох ізохор і двох ізотерм; 3) двох ізобар і двох ізотерм 4) двох ізобар і двох адіабат; 5) двох ізохор і двох адіабат; 6) двох ізотерм і двох адіабат.

7.10. Знайти ККД циклу Отто (див. рис.7.3, приклад 3), корисну роботу за один цикл. якщо ступінь стиску $\varepsilon = V_1/V_2 = 8$, ступінь підвищення тиску $\lambda = P_3/P_2 = 4$, початкова температура робочого тіла $T_1 = 300$ K, тиск $P_1 = 1\,атм$, робоче тіло 58 г сухого повітря.

7.11. Знайти ККД циклу Отто (див. рис. 7.3, приклад 3), та параметри в вузлових точках циклу, якщо ступінь підвищення тиску $\lambda = P_3/P_2 = 3$, ступінь стиску $\varepsilon = V_1/V_2 = 6$. Робоче тіло 1 моль сухого повітря, початкова температура T_1=350 К, P_1=1,5 атм. Побудувати PV діаграму циклу.

7.12. Виразити та обчислити ККД циклу Дизеля (цикл складається з двох адіабат, ізобари та ізохори, рис.7.4, тепло підводиться при постійному об'ємі) через характерні параметри циклу - ступінь стиску $\varepsilon = V_1/V_2$ та ступінь попереднього ізобарного розширення $\rho = V_3/V_2$ якщо є=15, р=2, робоче тіло - одноатомний ідеальний газ. Побудувати в масштабі TS – діаграму циклу.($\eta = 0{,}79$).

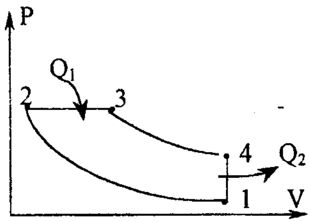


Рис.7.4. PV-діаграма циклу Дизеля

7.13. Три молі ідеального двоатомного газу виконує цикл Дизеля (див. умову попередньої задачі та мал 7.4). Початкова температура газу T_1=350К, ступінь стиску $\varepsilon = V_1/V_2 = 12$, ступінь попереднього ізобарного розширення $\rho = V_3/V_2 = 2$. Знайти ККД циклу, термічні параметри у вузлових точках циклу, кількість підведеної теплоти за один цикл до робочого тіла. (η=0,6, Q=41,3 кДж).

7.14. Знайти ККД циклу Стірлінга (цикл складається з двох ізотерм та двох ізохор, рис.7.5 він характерний для теплових двигунів зовнішнього згорання), виконану газом роботу, побудувати TS -діаграму циклу, якщо T_1=300 К T_3=500 К, V_1=100 л, V_2=50 л, робоче тіло 1 моль сухого повітря. Вважати, що в реальних двигунах Стірлінга відбувається практично повна регенерація теплоти в ізохорних процесах 2-3 і 4-1 $Q_1' + Q_2' \approx 0$). (η=0,4 А= 1,15 кДж).

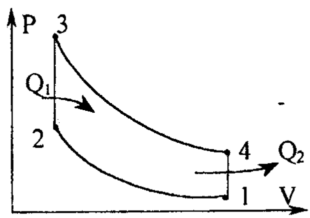


Рис.7.5. PV-діаграма циклу Стірлінга.

7.15. Знайти ККД Стірілінга для попередньої задачі, не враховуючи регенерації тепла в ізохорних процесах. (η=0,12)

7.16. Знайдіть ККД циклу Ленуара, який складається з ізохори, адіабати і ізобари, рис.7.7 . Параметр циклу : ступінь підвищення тиску $\delta = P_2/P_1$. Яку корисну роботу виконає газ за один цикл, якщо P_1=2 атм ,V_1=30 л, $\delta = 3$, робоче тіло - азот масою 56 г. (η =0,6)

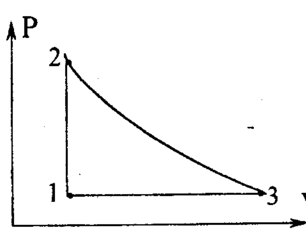


Рис.7.6. PV-діаграма циклу Ленуара.

7.17. Повітряно - реактивний двигун Стечкіна працює за циклом Брайтона, який складається з двох ізобар і двох адіабат рис.7.7 (тут 1-2 стиск повітря в дифузорі двигуна, 2-3 підведення теплоти в камеру згорання, 3-4 - адіабатне витікання газу із сопла двигуна, 4-1 - охолодження продуктів згорання в навколишньому середовищі). Робота стиску в дифузорі чисельно рівна площі фігури 1-2-b-a ; робота витікання – 3-4-a-b, корисна робота 1-2-3-4. Основний параметр циклу - $\sigma = P_2 / P_1$ - ступінь підвищення тиску. Знайти термічний ККД. ($\eta = 1 - \sigma^{\gamma}$)

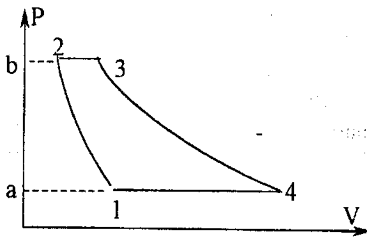


Рис.7.7 PV-діаграма циклу Брайтона

7.18. Визначити зміну ентропії в термодинамічних процесах 2-3 і 4-1 циклу Отто (див. розв'язання задачі 3 та рис.7.5), ККД циклу, температуру в вузлових точках циклу, побудувати TS - діаграму циклу, якщо робочим тілом служить 1г азоту, T_1=373 К, P_1=1 атм, ступінь стиску $\varepsilon = V_1/V_2 = 6$, ступінь підвищення тиску $\lambda = P_3/P_2 = 1{,}6$. ($\eta$=0,51 T_2= 764 К,T_3=1222 К, T_4=597 К).

7.19. Визначити зміну ентропії у термодинамічних процесах 2-3 і 4-1 циклу Дизеля (рис.7.4), ККД циклу, побудувати TS-діаграму циклу, якщо робочим тілом служить сухе повітря з початковими параметрами T_1=310 К, P_1= 1 атм, V_1=1 м^3, ступінь стиску $\varepsilon = V_1/V_2 = 12$, ступінь попереднього розширення $\rho = V_4/V_3 = 2$.(η=0,57, T_2=837 К, T_3=1675 К, T_4= 818 К).

7.20. Знайти зміну ентропії ΔS при нагріванні 1 кмоля триатомного ідеального газу від 0°С до 500°С, якщо процес протікає: а) при постійному стиску; б) при постійному об'ємі.(ΔS_1=26 кДж, ΔS_2=35 кДж).

7.21. На рис. 7.8 показано два процеси, якими можливо перевести ідеальний газ із стану 1 в стан 2. Довести, що приріст ентропії ΔS в обох випадках однаковий.

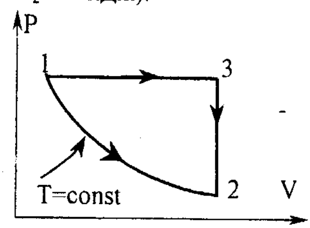


Рис.7.8

7.22. Один кіломоль двоатомного газу виконує політропічний процес, температура газу при цьому змінюється від 300 до 500К. Показник політрони n=3. Знайти зміну ентропії. (ΔS =8,5 КДж/К).

7.23. Знайти зміну ентропії при змішуванні 3кг води при температурі 300 К з 7кг води при температурі 370К.(ΔS = 188 Дж/К).

7.24. В одній посудині з об'ємом 1,6 л знаходиться 14 мг азоту. В другій, об'єм якої 3,4 л, знаходиться 16 мг кисню. Температура газів однакова. Посудини з'єднують і гази перемішуються. Знайти приріст ентропії в даному процесі. (ΔS =6,3 $\cdot 10^{-3}$ Дж/К).

7.25. 1кг льоду при температурі -40°С перетворюють в стоградусну пару при постійному тиску. Знайти зміну ентропії, вважати, що теплоємності льоду і води не змінюються. Питома теплоємність льоду, питома теплоємність води, питома теплота плавлення і питома теплота пароутворення відповідно дорівнюють: 2095 Дж/ (кг·К); 4200 Дж/(кг·К), $3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг, $2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг. (ΔS =8,8 $\cdot 10^3$ Дж/К).

7.26. Азот масою 42 г при температурі 300 К ізотермічно розширюється від об'єму V_1=10 л до V_2=25 л після чого ізохорично нагрівається до температури T_3=500 К. Знайти зміну ентропії та ентальпії . (ΔS_{13} =27,3 Дж/К , ΔH_{13}=8725Дж).

7.27. Як зміниться ентропія системи мідь - вода, якщо у воду масою 100 г при температурі 7°С помістити кусок міді масою 300 г при температурі 97°С? Теплоємність міді 390 Дж/(кг ·К) , води 4200 Дж/(кг· К).

7.28. Визначити зміну ентропії при перетворенні 5 г води при початковій температурі 0°С у пару при температурі 100°С. (39 Дж/К).

7.29. Визначити зміну ентропії при перетворенні 20 г льоду при температурі -20°С у пару при температурі 100°С. (176 Дж/К).

Тема 8

Явища переносу

1. Узагальнене рівняння явищ переносу в газах.
   Закони: Фіка, Ньютона, Фур'є.
2. Молекулярна кінетична теорія явищ переносу.
3. Коефіцієнти дифузії, в'язкості та теплопровідності.

Основні закони і формули

Середнє число зіткнень молекули газу з іншими молекулами за одиницю часу.

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi d^2 n,$$

де d - ефективний діаметр молекули, $\pi d^2/4 = \sigma$ - ефективний поперечний переріз даного процесу, n - число молекул в одиниці об'єму.

Загальне число зіткнень всіх молекул в одиниці об'єму за одиницю часу:

$$Z = zn/2 .$$

Середня довжина вільного пробігу молекул ідеального газу

$$\bar{\ell} = \bar{v} / z,$$

де $\bar{v}$ - середня арифметична швидкість поступального руху молекул.

Узагальнене рівняння переносу в ідеальних газах (закони, які описує дане рівняння, зв'язок між коефіцієнтами переносу та їх значення приведено в таблиці 8.1).

$$\Theta = G\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{x_2 - x_1}\Delta S \Delta\tau,$$

де Θ_1 - величина, яка переноситься зліва направо, Θ_2 - справа наліво, Θ - загальна кількість перенесеної величини. $x_2 - x_1$ - відстань між шарами, G - коефіцієнт, який характеризує швидкість переносу, $\Delta\tau$ - проміжок часу.

Таблиця 8.1–Явища переносу в ідеальних газах

Явище (закон)	Величина, що переноситься	Рівняння	Формула коефіцієнта та його розмірність	Зв'язок між коефіцієнтами
Дифузія (закон Фіка)	Маса	$\Delta m = -D\frac{d\rho}{dx}\Delta S\Delta\tau$ $j_m = -D \text{grad}\,\rho$	$D = \frac{1}{3}\overline{\upsilon}\,\overline{\ell}$ $\left[\frac{м^2}{c}\right]$	
Вязкість (закон Ньютона для в'язкого тертя)	Імпульс	$\Delta P = -\eta\frac{dv}{dx}\Delta S\Delta\tau$ $F = -\eta\frac{dv}{dx}\Delta S$	$\eta = \frac{1}{3}\rho\overline{\upsilon}\,\overline{\ell}$ $[Па \cdot c]$	$\eta = \rho D$
Теплопровідність (закон Фур'є)	Теплова енергія (теплота)	$\Delta Q = -\lambda\frac{dT}{dx}\Delta S\Delta\tau$ $q = -\lambda\frac{dT}{dx}\Delta S$ $j_Q = -\lambda \text{grad}\,T$	$\lambda = \frac{\rho v \overline{\ell} c_v}{3}$ $\left[\frac{Вт}{м\,K}\right]$	$\lambda = \rho c_v D$ $\lambda = c_v \eta$

(де D, η, λ - відповідно коефіцієнти дифузії, динамічної в'язкості та теплопровідності, ΔS - площа шарів, $\Delta\tau$ проміжок часу, Δm - перенесена маса, j_m - густина потоку маси, ΔP - перенесений імпульс, F - сила в'язкого тертя між шарами, ΔQ - перенесена кількість теплоти, q - питома теплота, j_Q - густина теплового потоку, ρ - густина газу, V - швидкість руху шарів газу, T - температура, $\overline{\upsilon}$ - середня арифметична швидкість руху молекул газу, $\overline{\ell}$ - середня довжина вільного пробігу молекул газу, c_v - питома теплоємність при постійному об'ємі)

Коефіцієнт взаємодії дифузії одного компонента газової суміші в іншу.

$$D_{12} = \frac{1}{3}\frac{\rho_1\ell_2 v_2 + \rho_2\ell_1 v_1}{\rho}$$

де ρ_1, ρ_2 - густини компонентів суміші, ρ - густина суміші.

Формула Стокса

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v} = -k\vec{v}$$

де F - сила опору (сила Стокса), R - радіус кульки, $\vec{v}$ - її швидкість, η - в'язкість рідини, k - коефіцієнт опору.

Формула Паузейля

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi R^2}{8\eta\ell}(P_1-P_2),$$

де dV - об'єм газу (рідини), що протікає через капіляр за проміжок часу dt, R,ℓ - відповідно радіус і довжина капіляра, η - в'язкість, P_1-P_2 - перепад тиску на капілярі.

Кількість теплоти, перенесеної через плоску багатошарову стінку за проміжок часу $\Delta\tau$

$$\Delta Q=\frac{T_г-T_х}{R}\Delta S\Delta\tau$$

де $T_г, T_х$ - відповідно температура гарячої і холодної стінок, $R=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i/\lambda_i$ - термічний опір стінки, n - число шарів, Δx_i – товщина i-го шару стінки, λ_i - його теплопровідність.

Ефективний коефіцієнт теплопровідності плоскої багатошарової стінки.

$$\lambda_e=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{\lambda_i}$$

Кількість теплоти, перенесеної через багатошарову циліндричну стінку за проміжок часу $\Delta\tau$

$$Q=\frac{T_1-T_х}{\frac{1}{2\pi}\sum\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}\ell\Delta\tau,$$

де $T_г, T_х$ - відповідно температури гарячої і холодної стінок, ℓ - довжина циліндра, d_i - внутрішній діаметр i-го циліндра, d_{i+1} - зовнішній діаметр i-го циліндра, λ_i - його теплопровідність.

Для розрідженого газу, при $\bar{\ell}\gg L$ (L - характерний розмір посудини, $\bar{\ell}$ - середня довжина вільного пробігу молекул) модуль густини теплового потоку складає:

$$q=\alpha P\sqrt{2R(T_1-T_2)/(\pi\mu T)},$$

де T - середня температура, P - тиск, α - коефіцієнт акомодації ($0{,}2\le\alpha\le0{,}95$), який залежить від властивостей молекул газу та стану поверхні посудини.

Кількість теплоти, що передана від гарячої стінки внаслідок конвективного теплообміну (формула Ньютона-Ріхмана):

$$\Delta Q=\alpha\Delta TS\Delta\tau,$$

де α - коефіцієнт конвективного теплообміну, ΔT - перепад температури між стінкою та газом (рідиною), S - площа поверхні теплообміну.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. В посудині об'ємом 1л знаходиться 0,2 г неону. Діаметр молекули неону $d \approx 0{,}3$ Нм. Знайти середню довжину вільного пробігу молекул.

Розв'язання

$V = 1л = 1 \cdot 10^3 м^3$

$m = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ кг

$d = 0{,}3 \cdot 10^{-3}$ м

$\mu = 20{,}2$ *кг моль*

$N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

$\overline{\ell} = ?$

Знайдемо число молекул неону в одиниці об'єму

$$n = \frac{N}{V} = \frac{m}{\mu}\frac{N_A}{V} \qquad (1)$$

Середня довжина вільного пробігу молекул

$$\overline{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2} = \frac{\mu V}{\sqrt{2}\pi m N_A d^2} \approx 4{,}2 \cdot 10^{-7}\, м$$

Приклад 2. Кулька масою m, радіусом R рухається під дією сили тяжіння у в'язкому середовищі. Початкова швидкість кульки $V_0 = 0$, нехтуючи силою Архімеда, знайти залежність швидкості від часу.

Розв'язання: Складемо диференційне рівняння руху кульки. На кульку діють: сила тяжіння $F_T = mg$ і сила в'язкого тертя $F_{тр} = 6\pi\eta R V = kV$. Силою Архімеда нехтуємо.

$$m\frac{dV}{dt} = mg - kV \qquad (1)$$

$$\frac{d\left(\frac{mg}{k} - V\right)}{\frac{mg}{k} - V} = -\frac{k}{m}dt \qquad (2)$$

Інтегруючи (2) маємо :

$$ln\left(\frac{mg}{k} - V\right) = -\frac{k}{m}t + C \qquad (3)$$

Знайдемо сталу інтегрування C використовуючи початкові умови. При $t = 0, V = 0$ із (3) маємо:

$$C = ln\frac{mg}{k} \qquad (4)$$

Із (3) і (4) випливає:

$$V = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{mg}{6\pi\eta R}\left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta R}{m}t}\right)$$

Приклад 3. Між двома коаксіальними циліндрами з радіусами R_1 і $R_2 (R_1 < R_2)$ рис.8.1 знаходиться повітря при нормальних умовах. Внутрішній циліндр нерухомий, а зовнішній обертається з постійною кутовою швидкістю ω. Знайти момент сил тертя, що діє на одиницю довжини зовнішнього циліндра.

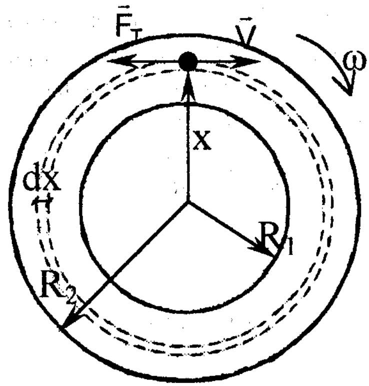


Рис.8.1

Розв'язання: Знайдемо силу, яка діє на площу циліндричної поверхні ΔS, радіусом X, довжиною ℓ

$$F_T = -\eta \frac{d\vartheta}{dx} \Delta S \qquad d\vartheta = x d\omega \qquad \Delta S = 2\pi x \ell$$

, то $\quad F_T = -2\pi\eta\ell x^2 \dfrac{d\omega}{dx}$

Момент сил тертя $\quad M_T = F_T x = -2\pi\eta\ell x^3 \dfrac{d\omega}{dx}$ або $\dfrac{dx}{x^3} = -\dfrac{2\pi\eta\ell}{M_T} d\omega$

Проінтегрувавши ліву частину від R_1 до R_2, а праву від 0 до ω маємо

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) = \frac{2\pi\eta\ell}{M_{тр}} \omega$$

Звідси маємо $M_{тр} = 4\pi\eta\ell\omega \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$. На одиницю довжини циліндра діє

момент сил тертя: $M_0 = \dfrac{M_{тр}}{\ell} == 4\pi\eta\omega \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$.

Приклад 4. Знайти розподіл температури за товщиною плоскої теплопровідної однорідної стінки (рис.8.2), якщо перепад температур на

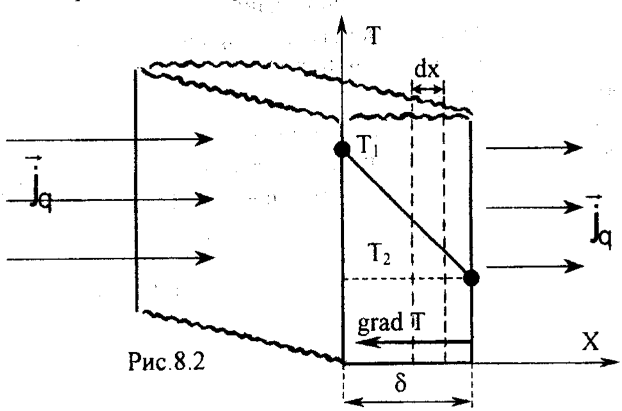


Рис.8.2

ній $T_1 - T_2$ $(T_1 > T_2)$, коефіцієнт теплопровідності λ, товщина стінки δ.
Розв'язання. Виділимо по товщині стінки кілька елементарних шарів завтовшки dx_i (рис.8.2). Якщо $\lambda = const$ для всіх шарів, то на основі рівняння Фур'є можна записати

$$j_q = -\lambda\frac{dT_1}{dx_1} = -\lambda\frac{dT_2}{dx_2} = \ldots - \lambda\frac{dT_i}{dx_i} = \ldots - \lambda\frac{dT_n}{dx_n} = -\lambda\frac{dt_x}{dx} = const \qquad (1)$$

або

$$dT_x = -\frac{j_q}{\lambda}dx, \qquad (2)$$

де T_x - температура в точці з координатою x. Інтегруючи (2) маємо

$$T_x = -\frac{j_q}{\lambda}x + c \qquad (3)$$

Враховуючи, що при x=0, $T = T_1$ із (3) отримаємо $c = T_1$

$$T_x = T_1 - \frac{j_q}{\lambda}x \qquad (4)$$

при $x = \delta$, $T_x = T_2$

$$T_2 = T_1 - \frac{j_q}{\lambda}\delta \qquad (5)$$

$$\frac{j_q}{\lambda} = \frac{T_1 - T_2}{\delta} \qquad (6)$$

із (4) і (6) випливає:

$$T_x = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta}X$$

Відповідь : температура змінюється за лінійним законом.

Приклад 5. Вивести робочу формулу, для розрахунку кількості теплоти переданої через однорідну одношарову циліндричну стінку.
Розв'язання: Розглянемо однорідну циліндричну стінку (рис.8.3) з довжиною циліндра ℓ, зовнішнім діаметром d_2, внутрішнім d_1 і коефіцієнтом теплопровідності λ. Вважаємо, що тепло передається з середини назовні, $T_1 > T_2$. Кількість теплоти, що передається через шар товщиною dx за проміжок часу $\Delta\tau$ дорівнює : $Q = -\lambda\frac{dT}{dx}\pi(d_1 + 2x)\ell\Delta t$

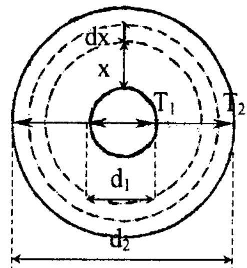


Рис. 8.3.

Зміна температури в шарі становитиме

$$dT = -\frac{Q}{\pi(d_1 + 2x)\lambda\ell\Delta\tau}dx$$

Проінтегруємо цей вираз по товщині стінки від 0 до δ (де $\delta = 0.5(d_2 - d_1)$) і по температурі від T_1 до T_2, замінивши межі інтегрування температури, визначимо кількість теплоти, переданої через стінку

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\lambda}\int_0^{\delta}\frac{dx}{(d_1 + 2x)\pi\ell\Delta t}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}}\pi\ell\Delta t$$

Відповідь : $Q = \pi\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}}\ell\Delta t$

Задачі для самостійного розв'язування

8.1. Знайти середню довжину вільного пробігу $\bar{\ell}$ і час τ між двома сусідніми зіткненнями молекул кисню при P=0,2МПа і температурі t=17^{0}С, якщо діаметр молекули d=0,35нм. (τ=8·10^{-2}с)

8.2. Герметична посудина об'ємом 2,53 л заповнена вуглекислим газом, температура газу t=127^{0}С, тиск 150 кПа, діаметр молекули газу d=0,40 нм. Знайти число всіх молекул в посудині та число зіткнень між молекулами за 1с. (Z = 2,9·10^{30}с$^{-1}$)

8.3. Яка частина всіх молекул повітря, яке знаходиться при температурі t=0^{0}С і тиску Р=2,4 Па проходить шлях 10мм без зіткнень? Діаметр молекули повітря d=0,35 нм. ($N_1 / N = 0{,}03$)

8.4. Коефіцієнт теплопровідності кисню при температурі 100^{0}С складає 3,25·10^{-2}Вт/(м·К). Визначити в'язкість кисню при цій же температурі.

(η=50мкПа·с)

8.5. Двохатомний ідеальний газ адіабатично розширюється, так, що його об'єм збільшується в два рази. Знайти, як змінюється при цьому коефіцієнти теплопровідності і дифузії. Молекули вважати абсолютно жорсткими, а їх ефективний діаметр незмінним.

(λ - зменшується в 1,15 рази, D - збільшується в 1,74 рази)

8.6. Тиск двоатомного газу внаслідок стиску збільшується в 10 раз. Визначити, як зміниться середня довжина вільного пробігу молекул, коефіцієнт теплопровідності і в'язкості, якщо : а) процес ізотермічний ; б) процес адіабатний.

Відповідь : а) $\bar{\ell}$ - зменшиться в 10 раз, η = const

б) $\bar{\ell}$ - зменшиться в 5,2 рази, η - збільшується в 1,4 рази.

8.7. Побудувати графік залежності коефіцієнта теплопровідності кисню від температури T в інтервалі температур $200 \le T \le 700$К.

8.8. Кулька масою m, радіусом R рухається під дією сили тяжіння у в'язкому середовищі. Густина рідини ρ_1, кульки ρ_2, в'язкість середовища η. Знайти залежність швидкості кульки від часу, якщо :

а) початкова швидкість кульки V_0=0;

б) початкова швидкість кульки $V_0 \neq 0$.

8.9. У гліцерин (ρ_1=1260 кг/м^3, η=1,48 Па·с) опускають стальну кульку (ρ_2=7700кг/ м^3) діаметром d=6 мм з початковою швидкістю V_0=0. Знайти, враховуючи силу Архімеда, залежність швидкості кульки від часу та швидкість кульки при усталеному режимі руху.(V=0,4м/с)

8.10. Над горизонтально розміщеним диском ,який обертається в повітрі з кутовою швидкістю ω, навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить через його центр мас підвішено другий нерухомий диск, площини дисків паралельні, відстань між дисками d радіуси дисків $R(R \gg d)$. Знайти момент сил тертя, який діє на верхній диск. ($M_{тр} = \pi\eta\omega R^4/2d$)

8.11. Між двома нерухомими дисками, які обертаються в повітрі з кутовими швидкостями ω_1=20рад/с, ω_2=30рад/с знаходиться нерухомий третій диск. Товщина диска h=1мм. Радіус дисків $R = R_1 = R_2 = R_3 = 30$мм. Відстань між першим і нерухомим диском d_1=1мм, відстань між рухомими дисками a=4мм, в'язкість повітря 17,2^{-6}Па·с. Знайти момент сил в'язкого тертя, що діють на нерухомий диск. ($M_{тр} = 8.7 \cdot 10^{-3}$ Нм)

8.12. Тонкий горизонтальний диск радіусом $R = 25$см розміщений в циліндричній порожнині (рис.8.4), заповненій киснем при нормальних умовах. Горизонтальні площини диска і порожнини паралельні. Відстань між стінками порожнини і стінками диска d=1мм. Диску надали кутову швидкість ω=20рад/с, яку потужність при цьому розвивають сили тертя ? ($P_m = \pi\eta\omega^2 R^4/d$)

8.13. Нескінченно довгий циліндр радіусом R_1 переміщують вздовж його осі з постійною швидкістю ϑ_0 в середині другого коаксіального з ним нерухомого циліндра радіусом R_2 ($R_2 > R_1, R_2 - R_1 \ll R_1$). Простір між циліндрами заповнено в'язким газом. Знайти швидкість газу в циліндрі в залежності від відстані до осі циліндрів. Вважаючи, що рух газу ламінарний. ($V = V_0 \dfrac{\ln r - \ln R_2}{\ln R_1 - \ln R_2}$)

8.14. Простір між двома коаксіальними циліндрами довжиною ℓ=0,3м заповнений киснем. Зовнішній циліндр обертається з кутовою швидкістю ω_0=20рад/с, а внутрішній - нерухомий, радіуси циліндрів $R_1 = 5$см, $R_2 = 5,1$см. Знайти ; а) залежність кутової швидкості газу від радіуса r;

б) момент сил тертя, що діє на одиницю довжини зовнішнього циліндра, вважати, що в'язкість кисню постійна $\eta = 19,8 \cdot 10^{-6}$ Па·с.

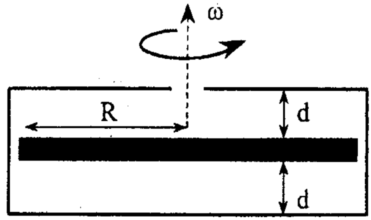


Рис.8.4.

$\left(\omega = \omega_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2}\right),\ M_m = 4\pi\eta\ell\omega_0 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = 9{,}6\cdot10^{-5}\,Н\cdot м \right)$

8.15. Простір між двома великими паралельними пластинками заповнено гелієм. Відстань між ними ℓ =5,0мм. Одна пластинка має температуру t_1 =20^{0}С друга t_2 =40^{0}С знайти густину потоку тепла при тисках P_1 = 0,1Па, P_2 = 100кПа, вважати, що коефіцієнт акомодації молекул на поверхні α =0,3, теплопровідність гелію при нормальних умовах λ= 0,142 Вт/мК.
(q_1 =4,2 $\cdot10^{-2}$Вт/м^2; q_2 = 5,6 Вт/м^2)

8.16. Знайти розподіл температури по товщині циліндричної однорідної стінки, якщо $T_1 > T_2$ і $R_2 > R_1$. ($T = T_1 - (T_1 - T_2)\frac{\ln x - \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1}$)

8.17. Вивести робочу формулу для розрахунку кількості теплоти переданої через циліндричну багатошарову стінку. ($Q = \frac{T_2 - T_x}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i}}\Delta S\Delta t$)

8.18. Вивести робочу формулу для розрахунку кількості теплоти переданої через циліндричну багатошарову стінку висотою ℓ.
($Q = 2\pi\frac{T_2 - T_x}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}\ell\Delta t$)

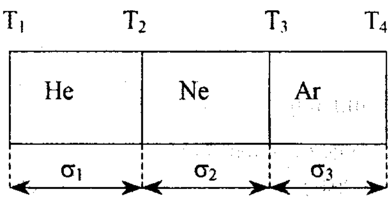


Рис.8.5

8.19. Гелій, неон, аргон знаходяться в герметичній посудині і розділені міжсобою тонкими абсолютно теплопровідними стінками (рис. 8.5). Нехтуючи теплопровідністю оболонки знайти кількість теплоти переданої від першої до четвертої стінки за час Δt =30хв, температури T_2 та T_3 ефективний коефіцієнт теплопровідності, якщо T_1 =600К, T_4 =300К, площа кожної стінки S =0,25м^2, відстані між стінками $\delta_1 = \delta_2$ = 3 мм, δ_3 =2мм. Коефіцієнти теплопровідності $\lambda_1 = 141{,}5\cdot10^{-3}$, $\lambda_2 = 46{,}4\cdot10^{-3}$, $\lambda_3 = 16{,}2\cdot10^{-3}$ Вт/м К.
(Q =6$\cdot10^5$Дж, T_2 =553К, T_3 =464К, $\lambda_{еф} = 44{,}6\cdot10^{-3}$ Вт/м К)

8.20. Побудувати графік залежності температури від товщини шарів стінки для умови попередньої задачі та записати її аналітичний вираз.

8.21. Перепад температур $T_2 - T_1$ на центральному шарі тришарової плоскої стінки складає 30 К. Знайти температуру поверхні гарячої стінки T_1 та холодної T_4, якщо T_1/T_4 = 2,74, товщина першого шару δ_1 =3см, другого δ_2 =4см, третього δ_3 =1см, їх теплопровідності (Вт/м К): $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 390$, $\lambda_3 = 40$. (T_1 =900К T_4 =328К)

8.22. Циліндр довжиною 20см складається з трьох коаксіальних теплопровідних шарів. Теплопровідність шарів відповідно дорівнюють: $\lambda_1 = 23{,}7$, $\lambda_2 = 107$, $\lambda_3 = 50$ Вт/мк, товщина кожного шару: δ_1=5см, δ_2 =3см, δ_3=4см , внутрішній радіус циліндра R_1=10см, температура всередині циліндра T_1=450К, зовні T_4=300К. Знайти кількість теплоти, переданої за 1хв. через циліндр, температури T_2 і T_3 між шарами стінки і ефективний коефіцієнт теплопровідності циліндричної стінки.

(Q=06495·10^{6}Дж, T_2=337,6К, T_3=326,4 К, $\lambda_{еф}$=34,5Вт/мк)

8.23. Побудувати графік залежності температури від радіуса шару для умови попередньої задачі та записати її аналітичний вираз у загальному вигляді.

$$\text{Відповідь:}\ T(x)=\begin{cases} T_1-(T_1-T_2)\dfrac{\ln(x/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}, & при\quad R_1\le x\le R_2\\ T_2-(T_2-T_3)\dfrac{\ln(x/R_2)}{\ln(R_2/R_1)}, & при\quad R_2< x\le R_3\\ T_3-(T_3-T_4)\dfrac{\ln(x/R_3)}{\ln(R_4/R_3)}, & при\quad R_3< x\le R_4\end{cases}$$

8.24. Циліндр довжиною 20см, внутрішнім радіусом R_1=6см, зовнішнім R_4=8см складається з трьох коаксіальних шарів з теплопровідностями $\lambda_1 = 0{,}145$, $\lambda_2 = 0{,}046$, $\lambda_3 = 0{,}021$ Вт/мК, товщини шарів відповідно складають δ_1=0,9, δ_2=0,6, δ_3=0,5см. Перепад температури на центральному циліндричному шарі $T_2 - T_3 = 35K$, а $T_1/T_4 = 1{,}25$. Знайти кількість теплоти, що передається через циліндр в радіальному напрямку за час $\Delta\tau$=5,0хв, температуру внутрішньої та зовнішньої стінок T_1 і T_4, ефективний коефіцієнт теплопровідності циліндра.

(Q=7,3кДж, T_1=400К, T_2=320К, $\lambda_{еф}$=0,069 Вт/м К)

8.25. Середня температура між поверхнями плоскої теплопровідної стінки 350К, коефіцієнт теплопровідності λ=0,168 Вт/мК, товщина стінки δ=2мм, площа теплопровідної поверхні 0,1м^2. за час τ=2 хв через стінку переноситься 50400Дж тепла. Знайти температуру холодної і гарячої частин стінки.

(T_1=325К, T_2=375К)

Тема 9

Реальні гази. Фазові перетворення

1. Рівняння Ван-дер-Ваальса та його аналіз.
2. Зв'язок температури фазового перетворення з тиском. Формула Клапейрона—Клаузіуса

3. Поверхневий натяг. Рідини.

Основні формули

Рівняння стану реального газу (рівняння Ван-дер-Ваальса) для одного моля

$$(P+\frac{a}{V_o^{\,2}})(V_0-b)=RT\ ,$$

де V_0 - об'єм одного моля газу, a,b - сталі поправок Ван-дер-Ваальса, P- тиск, T – абсолютна температура R - газова стала

Рівняння Ван-дер-Ваальса для $\nu=\frac{m}{\mu}$ молів газу:

$$\left(P+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)=\frac{m}{\mu}RT\ ,$$

де V - об'єм газу, μ - молярна маса, $\frac{m^2a}{\mu^2V^2}=P_i$ - додатковий внутрішній тиск, обумовлений силами взаємодії між молекулами, $\frac{m}{\mu}b=V'$ - власний об'єм молекул.

Критичні параметри: T_k, P_k, V_k речовини і сталі a,b позв'язані між собою такими співвідношеннями:

$$V_k=3b;\quad P_k=\frac{a}{27b^2};\quad T_k=\frac{8a}{27bR}.$$

$$a=\frac{27\cdot T_k^2R^2}{64P_k},\quad b=\frac{T_kR}{8P_k}$$

Якщо ввести безрозмірні приведені величини:

$$\tau=\frac{T}{T_k};\quad \Pi=\frac{P}{P_k};\quad \omega=\frac{V}{V_k},$$

то рівняння Ван-дер-Ваальса, для одного моля, приймає вигляд:

$$(\Pi+\frac{3}{\omega^2})(3\omega-1)=8\tau$$

Внутрішня енергія реального газу

$$U=\nu(C_vT-\frac{a}{V_0}),$$

де C_v - молярна теплоємність газу при сталому об'ємі, V_0 - об'єм одного моля, ν- кількість молів газу.

Молярна теплота пароутворення $r_0=\mu r$,

де μ - маса одного моля, r - питома теплота пароутворення.

Залежність тиску насиченої пари P_H від температури описується рівнянням Клазіуса – Клапейрона

$$\frac{dP_н}{dT} = \frac{r_н}{T(V_н - V_р)} \quad ,$$

де $V_п$ - об'єм одного моля пари, $V_р$ - об'єм одного моля рідини.

Відносна зміна об'єму рідини при нагріванні $\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta t$,

де β - коефіцієнт об'ємного розширення.

Відносна зміна об'єму рідини при зміні тиску $\frac{\Delta V}{V} = -k\Delta P$,

де k - коефіцієнт стискання.

Коефіцієнт поверхневого натягу

$$\alpha = \frac{F}{\ell} .$$

Робота сил поверхневого натягу

$$\Delta A = \alpha \, \Delta S ,$$

де ΔS – зміна площі поверхні плівки.

Додатковий тиск, обумовлений кривизною поверхні рідини, визначається за формулою Лапласа

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

де R_1, R_2 - радіуси кривизни двох взаємно перпендикулярних перерізів поверхні рідини. Радіус R вважається додатним, якщо центр кривизни знаходиться в середині рідини (опуклий меніск) і від'ємним, якщо центр кривизни знаходиться зовні рідини (меніск вгнутий).

Для сферичної поверхні $\Delta p = \frac{2\alpha}{R}$.

Висота підняття рідини в капілярній трубці

$$h = \frac{2\alpha \cos\theta}{rg\rho},$$

де r - радіус трубки, ρ - густина рідини, і θ - крайовий кут змочування. При повному змочуванні $\theta = 0$, при повному незмочуванні $\theta = \pi$.

Висота підняття рідини між двома близько розміщеними паралельними площинами

$$h = \frac{2\,\alpha \cos\theta}{g\,\rho\,d},$$

де d - відстань між пластинами, g - прискорення вільного падіння.

Тиск насиченої пари над вгнутою сферичною поверхнею рідини менший, а над опуклою - більший, ніж над плоскою, на величину

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}\frac{\rho_п}{\rho_р} \quad ,$$

де r- радіус сфери, $\rho_н$ і ρ_p - густина насиченої пари і рідини.

Витрата рідини в трубці току:

а) об'ємна витрата $Q_v = VS$;

б) масова витрата $Q_м = \rho VS$, де S- площа поперечного перерізу трубки струменя; V-швидкість рідини, ρ - її густина.

Рівняння неперервності течії:

$$V_1S_1 = V_2S_2$$

Рівняння Бернулі для ідеальної рідини:

$$P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 \ ,$$

де P_1 і P_2 - статичні тиски рідини в двох перерізах трубки струменя, V_1, V_2 - швидкості рідини в цих перерізах, $\frac{\rho V_1^2}{2}$ і $\frac{\rho V_2^2}{2}$ - динамічні тиск рідини в цих перерізах, h_1 і h_2 - їх висоти над деяким рівнем, $\rho g h_1$ і $\rho g h_2$ - гідростатичні тиски.

Швидкість витікання рідини із малого отвору в широкій посудині

$$V = \sqrt{2gh} \ ,$$

де h- висота стовпа рідини над отвором.

Формула Пуазейля

$$V = \frac{\pi r^2 t \Delta p}{8\ell\eta},$$

де r - радіус трубки; ℓ - її довжина; Δp - різниця тисків на кінцях трубки; η - коефіцієнт внутрішнього тертя рідини.

Формула Стокса. (Сила в'язкого тертя, яка діє з боку рідини на рухому кульку).

$$F = 6\pi\eta r V \ ,$$

де r - радіус кульки; V - швидкість її руху відносно рідини.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. В балоні ємністю 8л знаходиться кисень масою $m = 0{,}3$ кг при температурі T=300K. Знайти, яку частину об'єму посудини займає власний об'єм молекул газу. Визначити відношення внутрішнього тиску P' до тиску газу P, який діє на стінки посудини.

T =300 K
V = 8 л = $8\cdot10^{-3}$ м^3
m = 0,3 кг

$P'/P - ?$

Розв'язання

$$k = \frac{V'}{V}, \qquad (1)$$

де V' - власний об'єм молекул. Використаємо сталу b в рівнянні Ван-дер-Ваальса, яка в чотири рази більша від власного об'єму молекул одного моля газу.

$$(P + \nu^2 \frac{a}{V^2})(V - \nu b) = \nu RT \qquad (2)$$

$$vb = 4V' \; ; \; V' = \frac{vb}{4} = \frac{mb}{4\mu} \qquad (3)$$

Із рівнянь (1) і (3) маємо $k = \frac{mb}{4\mu V} = 0.0091$

$$k_i = \frac{P^i}{P} \qquad (4)$$

Із рівняння (2) $P^i = \frac{\upsilon^2 a}{V^2}$; або $P^i = (\frac{m}{\mu})^2 \frac{a}{V^2}$

Сталі a і b знаходимо з таблиць $P^i = 179кПа$

Тиск P на стінки посудини знайдемо із рівняння (2)

$$P = \frac{vRT}{V - vb} - \frac{v^2 a}{V^2} = 2{,}84 \cdot 10^6 \; Па$$

Підставивши в (4) значення P, P^i, знайдемо $k_i = 6.3\%$

Отже, тиск газу, обумовлений силами притягання між молекулами, становить 6,3% від загального тиску газу.

Приклад 2. В закритий стальний балон, при кімнатній температурі, залита вода, яка займає половину об'єму балона. Знайти тиск в атмосферах і густину водяної пари в балоні при температурі t=400С.

Розв'язання

Із таблиць знайдемо критичну температуру для води t_k =374С. Таким чином температура 400С більша критичної. Отже вода буде знаходитись в пароподібному стані.

Густину водяної пари ρ можна визначити, якщо врахувати, що об'єм пари став в двічі більшим об'єму води ρ_B

$$\rho_B = 1 \cdot 10^3 \; кг/м^3 \; ; \quad \rho = \frac{\rho_B}{r} = 5 \cdot 10^2 \; кг/м^3$$

При такій великій густині, пару потрібно розглядати як реальний газ, параметри якого описуються рівнянням Ван-дер-Ваальса.

Розв'язавши його відносно P, маємо

$$P = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2}, \qquad (1)$$

де V_0 - об'єм одного моля $V_0 = \frac{\mu}{\rho}$, μ - молярна маса пари,

$$P = \frac{RT}{\frac{\mu}{\rho} - b} - \frac{a\rho^2}{\mu^2} = 5{,}1 \cdot 10^8 \; Па$$

Приклад 3. Яку частину об'єму скляної ампули повинен займати рідкий ефір при 20С, щоб нагріваючи його можна було б спостерігати перехід речовини через критичний стан? Для ефіру

$\mu = 0{,}074 \, кг/моль$, $\rho = 714 \, кг/м^3$ при 20^0C, $t_k = 194^0C$, $P_k = 35{,}6 ат$.

Розв'язання

Під час переходу речовини через критичний стан зникає різниця між рідкою і газоподібною фазами. При цьому критичний об'єм всієї маси речовини дорівнює:

$$V_k = \nu V_{0k} = \frac{m}{\mu} V_{0k} \qquad (1)$$

де V_{0k} - об'єм одного моля в критичному стані $\frac{m}{\mu} = \nu$ - кількість молів речовини.

Для спостереження переходу речовини через критичний стан, необхідно, щоб при досягненні критичної температури, об'єм, який займає речовина, дорівнював критичному. Якщо $V > V_k$, то вся рідина випарується, а якщо $V < V_k$ вся пара сконденсується.

$$V = V_k \qquad (2)$$

Об'єм в той же час дорівнює об'єму ампули. Враховуючи, що $\rho = \frac{m}{V_p}$ - густина рідини, а також формули (1) і (2), знайдемо:

$$\frac{V_p}{V} = \frac{V_p}{V_k} = \frac{V_p \mu}{\rho V_{0k}} \qquad (3)$$

Виразимо величину V_{0k} через відомі P_k, T_k

$$\frac{T_k}{P_k} = \frac{8a27b^2}{27bRa} = \frac{8b}{R} \quad , V_{0k} = 3b = \frac{3T_k R}{8P_k} \qquad (4)$$

Підставивши (1,2,4) в (3) маємо: $\frac{V_p}{V} = \frac{8\mu P_k}{3R\rho T_k} = 0{,}25$

Приклад 4. В циліндрі під поршнем знаходиться хлор, масою m=20г. Визначити зміну ΔU внутрішньої енергії хлору, якщо він ізотермічно розширюється від об'єму $V_1 = 200 см^3$ до $V_2 = 500 см^3$.

m = 0,02 кг
$V_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м^3
$V_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ м^3
T = const

ΔU - ?

Розв'язання

Внутрішня енергія U реального газу

$$U = \nu\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right), \qquad (1)$$

де V_m - молярний об'єм .

$$V_m = \frac{V}{\nu} = \frac{\mu}{m} V \qquad (2)$$

$$U = \frac{m}{\mu}\left(C_V T - \frac{ma}{\mu V}\right) \qquad (3)$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m^2}{\nu} a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = 154 \text{ Дж}$$

Приклад 5. В запаяній посудині вода масою 0,5кг нагріта до 107^{0}С. Визначити тиск водяної пари в посудині при цій температурі, якщо об'єм посудини: 1) $V = 1м^3$, 2) $V = 0{,}5м^3$, 3) $V = 5л$

Розв'язання.

Температура, до якої нагріта вода, менша за критичну. Із таблиць знаходимо, що при 107^{0}С тиск насиченої пари $P_H = 1{,}3 \cdot 10^5\ Па$.

Знайдемо тиск пари для трьох випадків.

1) $V = 1м^3$. Щоб з'ясувати, ідеальним чи реальним газом слід вважати водяну пару при цих параметрах, знайдемо його молярний об'єм V_0, вважаючи, що вся вода випарувалась

$$V_0 = \frac{V}{\nu} = \frac{V\mu}{m} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}018}{0{,}5} = 0{,}036\, {}^{м^3}\!/_{моль}$$

Це значення перевищує молярний об'єм при нормальних умовах ($V_{0H} = 0{,}024\, {}^{м^3}\!/_{моль}$), тому пару можна вважати ідеальним газом . Із рівняння Менделєєва – Клапейрона для одного моля газу маємо:

$$P_1 = \frac{RT}{V_0} = \frac{8{,}3 \cdot 380}{0{,}036} = 0{,}9 \cdot 10^5\ Па.$$

Очевидно, що при $P_1 < P_H$ - вода в посудині повністю випарується.

2) $V = 0{,}5м^3$, молярний об'єм пари дорівнює:

$$V_0 = \frac{V\mu}{m} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}18}{0{,}5} = 0.018\, {}^{м^3}\!/_{моль},$$

$V_0 < V_{0H}$ густина пари більша ніж при нормальних умовах, тому вважаємо пару реальним газом і використовуємо рівняння Ван-дер-Ваальса ,нехтуючи b, оскільки $b << V_0$ ($a = 0{,}55\, {}^{м^3}\!/_{моль^2}$, $b = 3 \cdot 10^{-5}\, {}^{м^3}\!/_{моль}$)

$$P_2 = \frac{RTV_0 - a}{V_0^2} = \frac{8{,}3 \cdot 380 \cdot 0{,}018 - 0{,}55}{0{,}018^2} = 1{,}7 \cdot 10^5\ Па$$

3) V = 0,005 $м^3$. Вода випарується не повністю, тому $P_3 = P_H = 1{,}3 \cdot 10^5\ Па$.

Приклад 6. Яку роботу проти сил поверхневого натягу потрібно виконати, щоб видути мильну бульбашку радіусом 0,05м ? Чому дорівнює надлишковий тиск в середині бульбашки ?

Розв'язання

R = 0,05 м
$\sigma = 40 \cdot 10^{-3}$ Н/м

A - ?
ΔP - ?

Мильна бульбашка має дві сферичних поверхні приблизно одного радіуса. Тому загальна площа поверхні:

$$S = 4\pi \cdot R^2 + 4\pi \cdot R^2 = 8\pi \cdot R^2 \qquad (1)$$

Вважаємо, що початкова площа бульбашки дорівнювала нулю.

Тоді $\Delta S = S$. Збільшення поверхні на ΔS супроводжується збільшенням поверхневої енергії ΔE

$$\Delta E = \sigma \Delta S \qquad (2)$$

$$A = \Delta E = \sigma\Delta S = 8\pi\sigma R^2 = 2.5 \cdot 10^{-3}\ Дж \qquad (3)$$

Надлишковий тиск знаходимо за формулою Лапласа для сферичної поверхні, враховуючи зовнішню і внутрішню поверхні бульбашки.

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R} = 3.2\ Па$$

Приклад 7. З великого циліндричного бака вода подається в фонтан і виходить з отвору зі швидкістю $V_2 = 12\ м/с$. Діаметр бака D =2м, діаметр труби фонтана d =2см . Знайти: 1) швидкість V_1 зниження води в баку; 2) тиск P_1, під яким вода подається в фонтан; 3) висоту h_1 рівня води в баку і висоту h_2 струменя фонтана.

Розв'язання

D =2 м D = 0,02 м ρ = 1000 кг/м^3 V_2 = 12 м/с	
V_1 - ? P_1 - ? h_1 - ? h_2 - ?	

1)Із умови неперервності струменя маємо:

$$V_1S_1 = V_2S_2,$$

де S_1 і S_2 - площа перерізу бака і труби фонтану ($S_1 >> S_2$)

$$V_1 = \frac{V_2S_2}{S_1} \quad \text{або} \quad V_1 = \frac{V_2}{\left(\frac{d}{D}\right)^2} = 0.012\ м/с$$

2)Тиск P_1, під яким вода подається в фонтан, знайдемо з рівняння Бернулі. Для горизонтальної трубки струменя маємо :

$$P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}$$

Врахуємо, що P_2 =0 (P_2 - надлишковий тиск)

$$P_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} - \frac{\rho V_1^2}{2}, \qquad V_1 << V_2$$

$$P_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} = 72\ кПа$$

3)Висоту h_1 рівня води в баку знайдено із співвідношення $P_1 = h_1 g\rho$

$$h_1 = \frac{P_1}{g\rho};$$ підставивши значення, отримаємо: h_1=7,35 м.

Знаючи швидкість V_2, знайдемо висоту h_2, на яку піднімається вода у фонтані

$$h_2 = \frac{\upsilon_2^2}{2g} = 7,35м$$

Відмітимо, що висота рівня води в баку дорівнює висоті, на яку піднімається фонтан води. Це справедливо лише тоді, якщо опором повітря знехтувати.

Задачі для самостійного розв'язування

9.1. Яку температуру мають 2г азоту, який займає об'єм 820 $см^3$, при тиску 2 атм ? Газ вважати: а) ідеальним б) реальним . (а)T=280K, б)T=280K)

9.2. Гелій масою 10г займає об'єм 100$см^3$ під тиском $10^8\ Н/м^2$. Знайти температуру газу, розглядаючи його як: а) ідеальний б) реальний. (а)T=482K; б)T=204K)

9.3. Вуглекислий газ, об'ємом 1кмоль знаходиться при температурі 100С. Знайти тиск газу вважаючи його: 1) ідеальним 2)реальним. Задачу розв'язати для об'ємів а) $V_1 = 1м^3$ і б) $V_2 = 0{,}05 м^3$

Відповідь: 1) для реального газу а) $2{,}87\cdot10^6\ Н/м^2$, б) $2{,}73\cdot10^8\ Н/м^2$;

2) для ідеального газу а) $3{,}09\cdot10^6\ Н/м^3$, б) $6{,}18\cdot10^7\ Н/м^2$.

9.4. Визначити тиск кисню, якщо він займає об'єм 0,5л , має температуру T=300K і його кількість 1моль. Порівняти отриманий тиск з тиском розрахованим за рівнянням Менделєєва-Клапейрона. (4,78МПа, 4,99МПа)

9.5. Тиск кисню дорівнює 7 МПа, його густина $\rho = 100\ кг/м^3$ Знайти температуру кисню. (287К)

9.6. Визначити тиск р водяної пари масою m=1кг, взятої при температурі T=380 К, якщо її об'єм V: а) 1000 л б) 10 л в) 2 л. (а)174 кПа; б) 3,94МПа; в)101МПа)

9.7. Визначити внутрішню енергію U 1моля азоту при критичній температурі T_k=126 К. Розрахунки виконати для чотирьох значень об'ємів V: 1)20л 2)2л 3)0,2л 4)$V_{кр}$.

Відповідь: 1) 2,61кДж; 2)2,55 кДж 3)1,94кДж; 4)1,45кДж)

9.8. Об'єм вуглекислого газу масою 0,1 кг збільшився від $V_1 = 10^3$ л до $V_2 = 10^4$ л. Знайти роботу внутрішніх сил при розширенні газу. (1,65Дж)

9.9. Знайти густину насиченої пари води при температурі 50° С. ($8{,}2\cdot10^{-2}\ кг/м^3$)

9.10. Яка маса водяної пари в 1м^3 повітря в літній день при температурі 30 ^{0}С і відносній вологості 75% ? ($22{,}5\cdot10^{-4}\ кг$)

9.11. Питома теплота випаровування бензолу(C_6H_6) при температурі 77° С дорівнює 95 кал/г. Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії, якщо випаровується 20г бензолу при цій температурі? ($7{,}22\cdot10^3$ Дж)

9.12. При температурі 100 °С густина ртуті дорівнює 13,4 г/$см^3$. При якій температурі густина ртуті дорівнює 13,1г/$см^3$? Коефіцієнт об'ємного розширення ртуті дорівнює $1{,}8\cdot10^{-4}\ град^{-1}$. (222 °С)

9.13. Маса m 100 капель спирту, який витікає із капіляра, дорівнює 0,71г. Визначити поверхневий натяг спирту , якщо діаметр d шийки каплі в момент відриву дорівнює 1мм. (22,2мН/м)

9.14. Яку роботу проти сил поверхневого натягу потрібно виконати, щоб розбити сферичну краплину ртуті радіусом 3мм на дві однакові краплини? ($1{,}47 \cdot 10^{-5}$ *Дж*)

9.15. Яку роботу проти сил поверхневого натягу потрібно виконати, щоб видути мильну бульбашку ($\alpha = 0{,}043\, Н/м$) діаметром 4см . ($4{,}32 \cdot 10^{-4}$ *Дж*)

9.16. Визначити тиск повітря (в мм. рт. ст.) в повітряній бульбашці діаметром 0,01мм, яка знаходиться у воді на глибині 20 см. Зовнішній тиск повітря над поверхнею води $p_1 = 765$ мм. рт. ст.. (999 мм. рт. ст.)

9.17. На яку висоту підніметься бензол ($\alpha = 0{,}03\, Н/м$) в капілярі, внутрішній діаметр якого дорівнює 1мм? Змочування вважати повним. (13,9 мм)

9.18. Знайти різницю рівнів ртуті в двох сполучених капілярах з діаметрами d_1=1мм і d_2=2мм. Незмочування – повне. (7,5мм)

9.19. Яку силу потрібно прикласти, щоб відірвати одну від одної (без зсуву) дві змочені фотопластинки розміром 9х12 см? Товщина водяного шару між пластинами дорівнює 0,05 мм. Змочування - повне (31,5Н)

9.20. В широкій частині, горизонтально розташованої труби, тече нафта з швидкістю $V_1 = 2 м/с$. Визначити швидкість V_2 нафти у вузький частині труби, якщо різниця Δp тисків в широкій і вузьких частинах дорівнює 6,65 кПа . (4,33 м/с)

9.21. Тиск вітру на стінку дорівнює 200 Па. Визначити швидкість вітру, якщо вона перпендикулярна до стінки. Густина повітря 1,29 кг/м^3. (8,8 м/с)

9.22. Струмінь води діаметром 2 см рухається зі швидкістю 10м/с і вдаряється в нерухому перпендикулярну поверхню. Знайти силу тиску. (31,4Н)

9.23. Бак висотою 1,5 м повністю заповнений водою. На відстані ℓ=1м від верхнього краю бака утворився отвір малого діаметра. На якій відстані ℓ_1 від стінки бака падає струмінь на землю? (1,4м)

Тема 10
Розподіли класичної статистичної фізики

1. Розподіл частинок за абсолютним значенням швидкості. Середня квадратична, середня арифметична і найбільш імовірна швидкості.
2. Середня енергія теплового руху частинки.
3. Розподіл частинок за енергіями (Розподіл Максвела-Больцмана).

Основні формули

Імовірність того, що фізична величина x, яка характеризує молекулу, знаходиться в інтервалі значень від x до x+dx, дорівнює

$$dP(x)=f(x)dx,$$

де f(x)-функція розподілу молекул за значенням фізичної величини x (густина імовірності).

Кількість молекул, для яких фізична величина знаходиться в інтервалі значень від x до x+dx

$$dN=NdP(x)=Nf(x)dx.$$

Розподіл молекул за швидкостями (розподіл Максвела) виражається двома співвідношеннями:

а) кількість молекул, швидкості яких знаходяться в межах від V до V+dV,

$$dN(V)=Nf(V)=4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}exp\left[-\frac{mV^2}{2kT}\right]\cdot V^2dV,$$

де f(V)-функція розподілу молекул за абсолютним значенням швидкостей, яка має зміст імовірності того, що швидкість молекул знаходиться в інтервалі від V до V+dV, до величини цього інтервалу, а також долю числа молекул, швидкості яких лежать в цьому інтервалі; N-загальна кількість молекул; m-маса молекули;

б) число молекул, відносні швидкості яких знаходяться в межах від U до U+dU;

$$dN(U)=Nf(U)dU=\frac{4}{\sqrt{\pi}}N\cdot exp[-U^2]\cdot U^2dU,$$

де $U=\frac{V}{V_B}$-відносна швидкість, яка дорівнює відношенню швидкості V до найбільш імовірної швидкості V_B, f(U)-функція розподілу за відносними швидкостями.

Розподіл молекул за імпульсами. Кількість молекул імпульси яких знаходяться в межах від p до p+dp,

$$dN(p)=Nf(p)dp=4\pi N\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}}exp\left[-\frac{p^2}{2mkT}\right]\cdot p^2dp,$$

де f(p) - функція розподілу за імпульсами.

Швидкості молекул:

середня квадратична $\overline{V}_{KB} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$,

середня арифметична $\overline{V}_a = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_1}} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}$,

найбільш імовірна $\overline{V}_B = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_1}} = \sqrt{\dfrac{2RT}{\mu}}$,

де m_1-маса однієї молекули; μ- молярна маса газу.

Розподіл молекул за енергіями. Кількість молекул, енергія яких знаходиться в інтервалі від E до E+dE,

$$dN(E) = Nf(E)dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N \frac{exp\left[-\frac{E}{kT}\right]}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{E}\, dE,$$

де f(E)-функція розподілу за енергіями.

Основне рівняння кінетичної теорії газів

$$P = \frac{3}{2} n\overline{E}_{\Pi},$$

де E_{Π}-середня кінетична енергія поступального руху молекули; n-концентрація молекул.

Середня кінетична енергія, яка припадає на одну ступінь вільності молекули, $\overline{E}_i = \frac{1}{2}kT$.

Повна енергія молекули $\overline{E} = \frac{i}{2}kT$,

де і-число ступенів вільності молекули, К-стала Больцмана.

Середня кінетична енергія поступального руху молекули

$$\overline{E}_{\Pi} = \frac{3}{2}kT.$$

Залежність тиску газу від концентрації молекул і температури

P=nkT.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти частину молекул водню, який знаходиться при температурі T, має швидкості, що відрізняються від найбільш імовірної швидкості не більше чим на 5м/с? Задачу розв'язати для двох значень T: 1) 400K, 2) 900K.

Розв'язування

Використаємо формулу $dN(U) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N\, exp\left[-U^2\right] \cdot U^2 dU$, яку перепишемо в такому вигляді

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} exp\left[-U^2\right] U^2 \Delta U \qquad (1)$$

Це рівняння справедливе при умові, що $\Delta U \ll U$. В зв'язку з тим, що задача стосується найбільш імовірної швидкості, можна вважати $V=V_B$. Тоді $U = \frac{V}{V_B} = 1$ і рівняння (1) спрощується $\Delta N = \frac{4}{e\sqrt{\pi}} N \Delta U$.

Звідси визначимо ту частину молекул, відносні швидкості яких знаходяться в інтервалі ΔU: $\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{e\sqrt{\pi}} \Delta U$.

Знайдемо найбільш імовірну швидкість V_{B1} при температурі $T_1 = 400K$ і V_{B2} при $T_2 = 900K$

$$V_{B1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 400}{0{,}002}} = 1{,}82 \cdot 10^3 \, м/с;$$

$$V_{B2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 900}{0{,}002}} = 2{,}73 \cdot 10^3 \, м/с.$$

$$\Delta U = \frac{\Delta V}{V_B}; \qquad \Delta V = 10 \, м/с$$

$$\Delta U_1 = \frac{10}{1{,}82 \cdot 10^3} = \frac{1}{182}; \qquad \Delta U_2 = \frac{10}{2{,}73 \cdot 10^3} = \frac{1}{273}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta N_1}{N} = \frac{4}{e\sqrt{\pi}} \Delta U_1 = \frac{4}{2{,}7 \cdot \sqrt{3{,}14} \cdot 182} = 0{,}0046.$$

$$\frac{\Delta N_2}{N} = \frac{4}{e\sqrt{\pi}} \Delta U_2 = \frac{4}{2{,}7 \cdot \sqrt{3{,}14} \cdot 273} = 0{,}003.$$

Таким чином, при збільшенні температури найбільш імовірна швидкість молекул збільшується, а кількість молекул, швидкості яких знаходяться в одному і тому ж інтервалі навколо найбільш імовірної швидкості, зменшується.

Приклад 2. Яка частина молекул газу має швидкості, які перевищують найбільш імовірну швидкість?

Розв'язування

В умові задачі мова йде про молекули, швидкість яких знаходиться в інтервалі від V_B до $V_B + \infty$, тобто в нескінченно великому інтервалі швидкостей. Таким чином умова $\Delta U \ll U$, або $\Delta V \ll V$ в цьому випадку не виконується. Тому потрібно використати рівняння розподілу в диференціальній формі:

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \exp\left[-U^2\right] \cdot U^2 dU \qquad (1)$$

Повну кількість молекул ΔN, швидкості яких знаходяться в зазначених межах від U_1 до U_2, знайдем, інтегруючи рівняння (1).

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \int_{U_1}^{U_2} \exp\left[-U^2\right] \cdot U^2 dU \qquad (2)$$

Це рівняння є загальною формою запису закону розподілу молекул для будь-якого інтервалу швидкостей.

Враховуючи, що відносна швидкість $U = \frac{V}{V_B}$ і що в нашій задачі

$V_1=V_B$, а $V_2=\infty$, отримаємо $U_1=1$ і $U_2=\infty$. Таким чином частина молекул відповідає інтегралу :

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_1^{\infty}U^2\cdot exp\left[-U^2\right]dU \tag{3}$$

Щоб позбутися математичних труднощів, використаємо той факт , що швидкості всіх молекул знаходяться в інтервалі від 0 до ∞. Тому, якщо позначити через $\Delta N'$ кількість молекул, швидкість яких менша V_B, тобто U буде знаходитись в інтервалі від 0 до 1, то можна записати

$$\frac{\Delta N}{N}+\frac{\Delta N'}{N}=1 \tag{4}$$

Таким чином, замість того, щоб шукати $\frac{\Delta N}{N}$ із формули (3), можна знайти $\frac{\Delta N'}{N}$ за формулою

$$\frac{\Delta N'}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\exp\left[-U^2\right]U^2dU, \tag{5}$$

а потім за (4) знайти $\frac{\Delta N}{N}$.

Використаємо метод наближеного інтегрування. Для цього розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена:

$$\exp\left[-U^2\right]=1-\frac{U^2}{1}+\frac{U^4}{2}-\frac{U^6}{6}+\frac{U^8}{8}-\ldots$$

$$\exp\left[-U^2\right]\cdot U^2=U^2-\frac{U^4}{1}+\frac{U^6}{2}-\frac{U^8}{6}+\frac{U^{10}}{8}-\ldots$$

Тепер проінтегрувавши одержаний вираз, маємо

$$\frac{\Delta N'}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{14}-\frac{1}{54}+\frac{1}{264}-\ldots\right)$$

Обмежившись трьома першими членами, знайдемо $\frac{\Delta N'}{N}$, з похибкою, яка не перевищує 0,01

Враховуючи (4) отримаємо відповідь: $\frac{\Delta N}{N}=1-0,43=0,57.$

При розв'язуванні такого типу задач часто використовують таблиці або графіки, які приводяться в збірниках задач.

Приклад 3. Знаючи функцію f(p) розподілу молекул за імпульсами, визначити середнє значення квадрата імпульсу $\overline{p^2}$.

Розв'язування

Середнє значення квадрата імпульсу $\overline{p^2}$, можна визначити за загальним правилом знаходження середнього:

$$\overline{p^2} = \frac{\int_0^\infty p^2 f(p)dp}{\int_0^\infty f(p)dp} \qquad (1)$$

Функція розподілу молекул за імпульсами має вигляд

$$f(p) = 4\pi\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left[-\frac{p^2}{2mkT}\right]p^2 \qquad (2)$$

Ця функція вже нормована на одиницю, тобто $\int_0^\infty f(p)dp = 1$. Враховуючи це формулу (1) перепишемо інакше:

$$\overline{p^2} = \int_0^\infty p^2 f(p)dp \qquad (3)$$

Підставимо значення f(p) із (2) в (3)

$$\overline{p^2} = 4\pi\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty p^4 \cdot exp\left[-\frac{p^2}{2mkT}\right]dp.$$

Цей інтеграл можна привести до табличного

$\int_0^\infty x^4\, exp\left[-ax^2\right]dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\, a^{-\frac{5}{2}}$, якщо позначити $a = \frac{1}{2mkT}$.

У нашому випадку це дає

$$\overline{p^2} = 4\pi\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

Після спрощення знайдемо $\overline{p^2} = 3mkT$.

Приклад 4. Знайти середню кінетичну енергію $\overline{E}_{об}$ обертального руху одної молекули кисню при температурі T=286 K, а також кінетичну енергію обертального руху всіх молекул цього газу, якщо його маса m=4г.

Розв'язування

Відомо, що на кожну ступінь вільності молекули газу припадає однакова середня енергія $\overline{E_1} = \frac{1}{2}kT$. Молекула кисню є двоатомною, тому має два обертальних ступені вільності. Таким чином середня кінетична енергія обертального руху молекули кисню

$$\overline{E}_{об} = 2 \cdot \frac{1}{2}kT = kT.$$

Підставивши значення k і T знайдемо $\overline{E}_{об} = 3{,}94 \cdot 10^{-21}$ Дж.

Кінетична енергія всіх молекул газу

$$W_{об} = N\overline{E}_{об};$$

$$N = \nu N_A = \frac{m}{\mu} N_A;$$

$$W_{об} = \frac{m}{\mu} N_A \overline{E}_{об}.$$

де N_A-число Авогадро; μ - молярна маса газу ;

$$W_{об} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{0{,}032} 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 3{,}94 \cdot 10^{-21} = 296 Дж$$

Приклад 5. Густина суміші азоту і водню при температурі $t=47^0$ C і тиску p=2 ат дорівнює ρ=0,3 г/л. Знайти концентрації молекул азоту(n_1) і водню(n_2) в суміші

Розв'язування

Співвідношення p=nkT (1) витікає із основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів. Воно виконується і для суміші газів. При цьому n-загальне число частинок в одиниці об'єму.

$$n_1 + n_2 = n = \frac{p}{kT} \tag{2}$$

Ми маємо одне рівняння з двома невідомими. Потрібне ще одне рівняння, яке б зв'язувало величини n_1 і n_2. Із рівняння Менделєєва-Клапейрона знайдемо молярну масу $м_c$ суміші цих газів

$$\mu_c = \frac{mRT}{Vp} = \rho\frac{RT}{p} \tag{3}$$

Використовуючи закон Дальтона $p=p_1+p_2$ і рівняння Менделєєва-Клапейрона $pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\eta_2}\right)RT$, враховуючи, що $m=m_1+m_2$ отримаємо

$$\frac{m_1+m_2}{\mu_c} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2},$$

звідки
$$\mu_c = \frac{\mu_1\mu_2(m_1+m_2)}{\mu_1 m_2 + \mu_2 m_1}. \tag{4}$$

Маса газу m і його концентрація позв'язані співвідношенням

$$m = nVm_0 = nV\frac{\mu}{N_A}, \tag{5}$$

де m_0-маса однієї молекули.

Підставивши (5) в (4) знайдемо $\mu_c = \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1+n_2}$ (6)

Порівняємо праві частини співвідношень (3) і (6)

$$\frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1+n_2} = \rho\frac{RT}{p} \tag{7}$$

Розв'язавши систему рівнянь (2) і (7), знайдемо невідомі n_1 і n_2:

$$n_1 = \frac{\rho RT - p\mu_2}{kT(\mu_1 - \mu_2)}; \qquad n_2 = \frac{\rho RT - p\mu_1}{kT(\mu_2 - \mu_1)}.$$

$p = 2 \cdot 9{,}8 \cdot 10^4$ Па; T=320 K; $\rho = 0{,}3 кг/м^3$; $м_1$=0,028кг/моль;

μ_2=0,002кг/моль; $R = 8{,}31\frac{Дж}{моль \cdot K}$; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Підставивши ці значення в одержані формули, отримаємо:

$n_1 = 2{,}4 \cdot 10^{24}\, м^{-3}$; $n_2 = 4{,}2 \cdot 10^{25}\, м^{-3}$.

Задачі для самостійного розв'язування

10.1. Яка частина молекул кисню має швидкості від 100 м/с до 110 м/с? Газ знаходиться при температурі 0^0 С. (0,004).

10.2. Яка частинка молекул водню має швидкість від 2000 м/с до 2100 м/с? Газ має температуру 0^0 С. (4,5%).

10.3 Яка частина молекул азоту має швидкості, що лежать в інтервалі $V_B+\Delta V$,(де ΔV=20м/с) при температурі: а) Т=400К ; б) Т=900К ? (3,4%;2,2%)

10.4. В балоні знаходиться 2,5г кисню. Знайти кількість молекул, швидкості яких перевищують значення середньої квадратичної швидкості. $\left(1{,}9 \cdot 10^{22}\right)$

10.5. Знаючи функцію розподілу молекул за швидкостями, вивести формулу найбільш імовірної швидкості V_B. $\left(V_B = \sqrt{2kT/m}\right)$

10.6. Використовуючи функцію розподілу молекул за швидкостями, отримати функцію, яка дає розподіл молекул за відносними швидкостями (така функція приведена в основних формулах). $(U = V/V_B)$

10.7. Використовуючи функцію розподілу молекул за швидкостями, визначити середню арифметичну швидкість $\overline{V}_a$ молекул. $\left(\overline{V}_a = \sqrt{8kT/\pi m}\right)$

10.8. За функцією розподілу молекул за швидкостями визначити середню квадратичну швидкість $\overline{V}_{KB}$. $\left(V_{KB} = \sqrt{3kT/m}\right)$

10.9. Отримати формулу для найбільш імовірного імпульсу P_B молекул ідеального газу. $\left(P_B = \sqrt{2mkT}\right)$

10.10. Знайти кількість молекул ідеального газу, імпульс яких точно збігається з найбільш імовірним імпульсом P_B. (0)

10.11. При якій температурі середня квадратична швидкість молекул азоту більше їх найбільш імовірної швидкості на 50 м/с. (Т=83К)

10.12. Знайти середню арифметичну, середню квадратичну і найбільш імовірну швидкості молекул газу, густина якого під тиском 300 мм.рт.ст. дорівнює 0,3 г/л. $\left(\overline{V}_a = 579 м/с;\right)$ $\left(\overline{V}_{KB} = 628 м/с;\right)$ $\left(\overline{V}_B = 513 м/с.\right)$

10.13. Яку температуру повинні мати молекули кисню, щоб їх середня квадратична швидкість $\overline{V}_{KB}$ була такою ж, як у молекул водню при температурі Т=100К? (1600К)

10.14. Знайти вираз для середньої енергії поступального руху молекул. Функцію розподілу молекул за енергіями вважати відомою.

$$\left(\overline{E}_П = \frac{3}{2}kT\right)$$

10.15. Вивести форму, яка визначає частку ω молекул енергія яких є набагато менша кТ. Функцію розподілу за енергіями вважати відомою.

$$\left(\omega = \frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}(kT)^{\frac{3}{2}}}E^{\frac{3}{2}}\right)$$

10.16. Визначити долю молекул ω, енергія яких знаходиться в межах від $E_1=0$ до $E_2=0{,}01$ кТ. ($\omega=7{,}53\cdot10^{-4}$)

10.17. Використовуючи функцію розподілу молекул за енергіями, визначити найбільш імовірне значення енергії E_B. $\left(E_B = 1\ \ 2kT\right)$

10.18. Густина газу дорівнює $6\cdot10^{-2}$ кг/м^3, середня квадратична швидкість $\bar{V}_{кв}$ його молекул дорівнює 500 м/с. Знайти тиск газу на стінки посуди.($p=5\cdot10^3$ н/м^2).

10.19. Середня квадратична швидкість молекул газу при нормальних умовах дорівнює 461 м/с. Яка кількість молекул знаходиться в 1г цього газу? ($N=1.88\cdot10^{22}$)

10.20. Чому дорівнює енергія теплового руху 20г кисню, який має температуру 10^0 С? Яка частина цієї енергії припадає на долю поступального руху і на долю обертального руху? ($2{,}2\cdot10^3$ Дж) ($1{,}5\cdot10^3$ Дж)

10.21. Чому дорівнює енергія теплового руху молекул двоатомного газу, який знаходиться в посудині об'ємом 2л під тиском $1{,}5\cdot10^5$ н/м^2? (750 Дж)

Тема 11

Розподіл Больцмана. Основні поняття квантової статистики

1. Розподіл частинок в потенціальному полі.
2. Розподіл Фермі-Дірака.
3. Розподіл Бозе-Ейнштейна.

Основні формули

Розподіл Больцмана (розподіл частинок в силовому полі).

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{U}{KT}\right],$$

де n-концентрація частинок; U-їх потенціальна енергія; n_0-концентрація частинок в точках поля де $U=0$; К-стала Больцмана; Т-термодинамічна температура.

Барометрична формула (розподіл тиску в однорідному полі сили тяжіння)

$$P = P_0 \exp\left[-\frac{mgh}{KT}\right], \text{ або } P = P_0 \exp\left[-\frac{Mgh}{RT}\right];$$

де Р-тиск газу; m-маса частинки; м-молярна маса; h-висота точки відносно рівня, прийнятого за нульовий; P_0-тиск на цьому рівні; g-прискорення вільного падіння; R- універсальна газова стала.

Імовірність того, що фізична величина x, яка характеризує молекулу,знаходиться в інтервалі значень від x до x+dx, дорівнює

$$dP(x)=f(x)dx,$$

де f(x)-функція розподілу молекул за значенням даної фізичної величини (густина імовірності).

Кількість молекул, для яких фізична величина x знаходиться в інтервалі значень від x до x+dx,

$$dN = NdP(x) = Nf(x)dx$$

Частинки з цілим або нульовим спіном (в одиницях $\hbar$) називаються бозоном (наприклад, фотони, фонони, і деякі ядра). Системи таких частинок описуються квантовою статистикою Бозе-Ейнштейна. Бозони не підкоряються принципу Паулі і для них немає обмежень на кількість частинок, які можуть знаходитись в деякому квантовому стані.

Частинки з напівцілим спіном називаються ферміонами (електрони, протони, нейтрони і ін.).Системи таких частинок описуються квантовою статистикою Фермі-Дірака. Ферміони підкоряються принципу Паулі і в даному квантовому стані системи ферміонів не може знаходитись більше однієї частинки.

Середня кількість частинок $\bar{n}$, що припадають на один квантовий стан

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left[\frac{E-\mu}{KT}\right] \pm 1},$$

де E-енергія стану; μ-хімічний потенціал системи частинок; знак "+" відповідає статистиці Фермі-Дірака, знак "-"– статистиці Бозе- Ейнштейна.

Елемент об'єму фазового простору у квантовій статистиці

$$d\Gamma = \frac{dV \cdot dV_p}{h^3},$$

де dV_p-елемент об'єму у фазовому просторі імпульсів.

Кількість частинок у елементі фазового простору

$$dN = g\bar{n}d\Gamma,$$

де g=2S+1-кратність виродження рівня; S-спін частинки.

Кількість частинок з енергіями, що належать інтервалу E, E+dE:

$$dN(E) = \frac{gVm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\frac{\sqrt{E}\,dE}{\exp\left[\frac{E-\mu}{KT}\right] \pm 1}.$$

Розподіл вільних електронів за імпульсами

$$dN(p)=\frac{8\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p^2dp}{exp\left[\frac{E-м}{KT}\right]+1}$$

Підставивши в цю формулу значення p=mU отримаємо розподіл вільних електронів за швидкостями

$$dN(U)=\frac{mV}{\pi^2\hbar^3}\frac{U^2dU}{exp\left[\frac{E-м}{KT}\right]+1}$$

Хімічний потенціал у випадку статистики Фермі-Дірака при T=0 дорівнює енергії Фермі ($м=E_F$).
$$E_F=\frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}},$$

де n-концентрація Фермі-частинок; m-маса частинки.

Температура виродження ідеального фермі-газу $T_g=\frac{E_F}{K}$

Температура виродження ідеального бозе-газу $T'_g=\frac{3{,}31}{g^{\frac{2}{3}}}\frac{\hbar^2}{km}n^{\frac{2}{3}}$

Функція розподілу фермі-частинок за енергіями при T=0

$$f(E)=\frac{2}{3}\frac{1}{E_F}\left(\frac{E}{E_F}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Частинки масою $m=10^{-18}$г зависли в повітрі. Визначити товщину шару повітря, в межах якого концентрація частинок відрізняється не більше ніж на 1%. Температура повітря T=300K.

Розв'язування

Для розв'язування використаємо формулу Больцмана

$$n=n_0\exp\left[-\frac{mgh}{KT}\right] \qquad (1)$$

З умови задачі $\frac{\Delta n}{n}=0{,}01$, тому без суттєвої помилки зміну концентрації Δn замінимо диференціалом dn

Продиференціюємо вираз (1) по h $dn=-n_0\frac{mg}{KT}\exp\left[-\frac{mgh}{KT}\right]dh$

З врахуванням (1), маємо: $dn=-\frac{mg}{KT}ndh$

Звідси знайдемо зміну висоти dh: $dh=-\frac{KT}{mg}\cdot\frac{dn}{n}$

Знак "-" показує, що додатним змінам висоти (dh>o) відповідає зменшення відносної концентрації (dh<o). Знак мінус вилучимо (в цьому

випадку він не має значення) і замінимо диференціали dh і dn через Δh і Δn:

$$\Delta h = \frac{kT}{mg}\frac{\Delta n}{n};$$

Підставимо в цю формулу значення величин $\frac{\Delta n}{n} = 0{,}01$; $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/к; $T=300$К, $m=10^{-21}$ кг; $g=9{,}8$ м/с^2, отримаємо $\Delta h=4{,}23$ мм. Як видно із результату, концентрація навіть таких маленьких частинок дуже швидко змінюється з висотою.

Приклад 2. Показати, що для газу бозонів при T=0 всі енергетичні рівні (за винятком основного) вакантні.

Розв'язування

Запишемо формулу для розподілу бозонів

$$\bar{n} = \frac{1}{exp\left[\frac{E-\mu}{KT}\right]-1}. \qquad (1)$$

Доведемо спочатку, що при T=0 хімічний потенціал Бозе-газу μ дорівнює нулю. По-перше, маємо, що $\mu\le0$. Якби було $\mu>0$, то для деякої енергії E, як це випливає з формули (1), перетворювалась би у нескінченність середня кількість частинок $\bar{n}$ з такою енергією, що неможливо, внаслідок скінченної кількості частинок у системі. Це доводить, що для Бозе-газу, $\mu\le0$. По-друге, з формули (1) та з нерівності $\mu\le0$ маємо, що при T=0 середня кількість частинок $\bar{n}\to\infty$, якщо $\mu\ne0$ та $E\ne0$, а це, як сказано вище, неможливо. Таким чином при T=0 хімічний потенціал дорівнює нулю, звідки за допомогою формули (1) можна побачити, що всі $\bar{n}=0$, крім рівня з E=0.

Приклад 3. Скількома способами G можна розподілити n частинок по N станах у випадку: а) статистики Бозе-Ейнштейна; б) статистики Фермі-Дірака?

Розв'язування

Різниця між випадком статистики Бозе-Ейнштейна і Фермі-Дірака полягає в тому, що в першому випадку ми маємо справу з частинками, які не відрізняються одна від одної, а в другому-відрізняються.

а) Розглянемо випадок статистики Бозе-Ейнштейна. Зобразимо N квантових станів комірками, які розділені N-1 перегородками. Якщо довільно розмістити у цих комірках n-частинок, дістанемо множину з N+n-1 елементів: частинки та перемички. Всілякі перестановки між елементами дають розподіл n частинок по N комірках. Кількість таких перестановок буде (N+n-1)!. Проте перестановки між частинками та перегородками не ведуть до нових розподілів, тому

$$G = \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}$$

б) У випадку статистики Фермі-Дірака, якщо зобразити кожний квантовий стан коміркою, в ній може міститися не більше ніж один ферміон (внаслідок принципу Паулі). Тому з N комірок будуть заповнені тільки n, а решта залишаться пустими. Якщо розглянути всілякі перестановки елементів множин, яка складається, з N станів, одержимо N! розподілів частинок по станах. Перестановки між частинками (їх кількість дорвнює n!) та між незаповненими станами (їх кількість дорівнює (N-n)!) не веде до нових розподілів, тому для ферміонів маємо

$$G = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Приклад 4. Знайти кількість вільних електронів в об'ємі 10 см^3 міді і кількість електронів енергії яких знаходиться в межах між 7,01 і 7,011 еВ при Т=300К. Енергія фермі для міді E_F=7,01еВ.

Розв'язування

Концентрація вільних електронів у міді $n = \frac{\rho N_A}{M}$;

де ρ=8,9·10^3 кг/м^3-густина міді; м=0,0636 кг/моль-молярна маса.

$$n = \frac{8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{0{,}0636} = 8{,}4 \cdot 10^{28}\ м^{-3}$$

В об'ємі 10см^3 знаходиться $n_1=8{,}4\cdot10^{28}\cdot10^{-5}=8{,}4\cdot10^{23}$ електронів. Таким чином, потрібно знайти число електронів в області, де розподіл Фермі дуже швидко змінюється.

Енергетична ширина зони в якій змінюється розподіл по енергіях має порядок kT. Підрахуємо kT: $kT=1{,}38\cdot10^{-23}\cdot300=4{,}14\cdot10^{-21}$Дж$=2{,}59\cdot10^{-2}$еВ.

Це означає, що в інтервалі 0,01еВ від енергії Фермі експоненціальна частина змінюється від 1 до $exp\left[\frac{1}{2{,}59}\right]=0{,}68$В цьому випадку необхідно більш точно вирахувати інтеграл.

Однак, на інтервалі 0,001еВ експонента змінюється незначно і розрахунки можна провести замінивши диференціал dE кінцевою величиною ΔE=0,001eB.

Знайдемо кількість вільних електронів в об'ємі 10см^3 міді за формулою:

$$\Delta N(T) = \frac{gVm^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \frac{\sqrt{E}\,dE}{exp\left[\frac{E-E_F}{KT}\right]+1}$$

Спочатку знайдемо кратність виродження рівня g=2S+1; g=2·0,5+1=2

$$\Delta N = \frac{2\cdot10^{-5}(9{,}1\cdot10^{-31})^{\frac{3}{2}}}{1{,}4\cdot(3{,}14)^2\cdot(1{,}05\cdot10^{-34})^3} \cdot \frac{(7{,}01\cdot1{,}6\cdot10^{-19})^{\frac{1}{2}}}{exp[0]+1} = 9\cdot10^{20}$$

Якщо $E<<E_F$, то експоненту в знаменнику можна прирівняти до нуля, а якщо $E<<E_F$- знехтувати одиницею в порівнянні з експонентою.

Приклад 5. Знайти максимальну швидкість вільних електронів при T=0К у міді.

Розв'язування

При T=0К газ є повністю виродженим і тому заповнені всі стани з енергіями від нуля до енергії Фермі. Максимальна швидкість U_m позв'язана у цьому випадку з енергією Фермі E_F співвідношенням $\frac{mU_m^2}{2}=E_F$, тобто $U_m=\sqrt{\frac{2E_F}{m}}$; де m-маса електрона.

Запишемо формулу розподілу вільних електронів за швидкостями

$$dN(U)=\frac{mV}{\pi^2\hbar^3}\frac{U^2dU}{exp\left[\frac{E-м}{KT}\right]+1}$$

або $$N=\int_0^{U_m}dN(U)=\frac{m^3V}{\pi^2\hbar^3}\int_0^{U_m}U^2dU=\frac{m^3VU_m^3}{3\pi^2\hbar^3},$$

де N-загальна кількість електронів в об'ємі V.

тоді $$U_m=\frac{\hbar\pi^{\frac{2}{3}}}{m}\left(\frac{3\pi}{V}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{\hbar(3\pi)^{\frac{1}{3}}}{m}\left(\frac{\pi}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Для міді $\frac{n}{V}=\frac{\rho N_A}{м}$-концентрація електронів; м-молекулярна маса, м=0,0636кг/моль; $\rho=8{,}9\cdot10^3$кг/м^3; $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$моль$^{-1}$- число Авогадро.

$$\frac{n}{V}=\frac{8{,}9\cdot10^3\cdot6{,}02\cdot10^{23}}{0{,}0636}=8{,}4\cdot10^{28}\,м^{-3},$$

тому $$U_m=\frac{1{,}05\cdot10^{-34}(3\cdot3{,}14\cdot3{,}14)^{\frac{1}{3}}}{9{,}1\cdot10^{-31}}\left(8{,}4\cdot10^{28}\right)^{\frac{1}{3}}=1570км/с$$

Приклад 6. Кусок металу об'ємом V=20 см^3 знаходиться при температурі T=0К. Визначити ΔN число вільних електронів, імпульси яких відрізняються від максимального імпульсу P_m не більше ніж на $0{,}1P_m$. Енергія Фермі E_F=5еВ.

Розв'язування

Використаємо розподіл електронів в металі за імпульсами:

$$dN(p)=\frac{8\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\frac{p^2dp}{exp\left[\frac{E-м}{KT}\right]+1},$$

де dN(p) - кількість електронів в об'ємі V, імпульси яких знаходяться в межах від p до p+dp. Оскільки T=0, то функція розподілу Фермі-Дірака

$$\frac{1}{\exp\left[\frac{E-E_F}{KT}\right]+1}=1, \qquad \text{то} \qquad dN(p)=\frac{8\pi Vp^2dp}{(2\pi\hbar)^3}, \text{ або}$$

$$\Delta N=\frac{8\pi V}{2\pi\hbar^3}\int_{0,9P_m}^{P_m}p^2dp=\frac{V}{3\pi^2\hbar^3}P_m^3\left[1-(0,9)^3\right]=\frac{0,271}{3\pi^2}\frac{P_m}{\hbar^3}.$$

Врахуємо, що максимальний імпульс P_m і максимальна енергія E_F електронів в металі (T=0) позв'язані співвідношенням $P_m^2=2mE_F$.

$$\Delta N=\frac{0,271}{3\pi^2\hbar^3}(2mE_F)^{\frac{3}{2}}V, \quad \text{або} \quad \Delta N=\frac{0,271}{3\pi^2}\left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}V.$$

Підставивши значення, отримаємо ($5еВ=8\cdot10^{-19}$ Дж)

$\Delta N=2,9\cdot10^{23}$ електронів.

Задачі для самостійного розв'язання

11.1. На якій висоті тиск повітря складає 75% від тиску над рівнем моря? Температуру вважаємо сталою і рівною 0^0С. (2,3 км)

11.2. Яка вага $1м^3$ повітря: 1) біля поверхні Землі, 2) на висоті 4км від поверхні Землі? Температуру біля поверхні Землі вважаємо сталою і рівною 0^0С. Тиск повітря на поверхні дорівнює 10^5 н/м^2.

(1) 1,28кг; 2)0,78кг).

11.3. Маса кожної з частинок, завислої в повітрі, дорівнює 10^{-18}г. Відношення концентрації n_1 частинок на висоті $h_1=1м$ до концентрації n_0 їх на висоті $h_0=0$ дорівнює 0,787. Температура повітря T=300K. Знайти за цими значеннями сталу Авогадро N_A. ($5,97\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$)

11.4. Визначити зміну висоти Δh, яка відповідає зміні тиску на $\Delta p=100$ Па, в двох випадках: 1)поблизу поверхні Землі, де температура $T_1=290K$, тиск $p_1=100$ кПа; 2) на деякі висоті, де температура $T_2=220K$, тиск $p_2=25$ кПа.

(1)8,78м; 2)25,8м).

11.5. Визначити концентрацію вільних електронів в металі при температурі T=0K. Енергія Фермі $E_F=1еВ$. ($4,57\cdot10^{27}м^{-3}$)

11.6. Визначити відношення концентрації $\frac{n_1}{n_2}$ вільних електронів при T=0 в літію і цезію, якщо відомо, що енергія Фермі в цих металах відповідно дорівнює $E_{F1}=4,7еВ$, $E_{F2}=1,53$ еВ. (5,41)

11.7. Визначити імовірність того, що електрон у металі займе енергетичний стан, який знаходиться в інтервалі $\Delta E=0,05еВ$ нижче рівня Фермі і вище рівня Фермі, для двох температур: 1) $T_1=290K$; 2) $T_2=58K$.

11.8. Електрони в металі знаходяться при температурі T=0K. Знайти відносне число $\frac{\Delta N}{N}$ вільних електронів, кінетична енергія яких відрізняється від енергії Фермі не більше ніж на 2%. (0,03)

11.9. За функцією розподілу $dN(p)$ електронів в металі за імпульсами, визначити розподіл $dN(U)$ за швидкостями: 1) при будь-якій температурі T; 2) при T=0K.

11.10. Визначити максимальну швидкість U_m електронів, в металі при T=0K, якщо енергія Фермі E_F=5еВ. ($1{,}32\cdot10^6$м/с)

11.11. Знайти найбільшу кінетичну енергію E_m вільних електронів та їх середню кінетичну енергію $\overline{E_K}$ при T=0K у металі, якщо їх концентрація $n=6\cdot10^{28}м^{-3}$. (E_m=5,6еВ; $\overline{E_K}$=3,3еВ)

11.12. Скільки відсотків η вільних електронів у металі при T=0K мають кінетичну енергію, що перевищує половину максимальної? (η=65%)

11.13. Знайти кількість вільних електронів Z, що припадає на один атом натрію при T=0K, якщо рівень Фермі E_F=3,07еВ. (Z=0,93)

11.14. Обчислити тиск електронного газу у металічному натрії при T=0K, якщо концентрація вільних електронів у ньому $n=2{,}5\cdot10^{22}см^{-3}$. Скористатися рівнянням стану для класичного ідеального газу. ($p=5{,}05\cdot10^9$ Па)

11.15. Користуючись розподілом Бозе-Ейнштейна, довести, що існує така температура T_c (температура Бозе-конденсації), при досягненні якої починається накопичення Бозе-частинок у стані з нульовою енергією.

11.16. Знайти, яка частка Бозе-частинок системи перебуває у стані з найменшою енергією, якщо температура $T=\eta T_0$ (T_0-температура Бозе-концентрації, η=0,25) $\left(\frac{N_0}{N}=0{,}875\right)$

11.17 Обчислити внутрішню енергію Бозе-газу при температурі $T<T_0$.

Тема 12
Будова кристалів. Теплові властивості кристалів

1) Елементи кристалографії

Ідеальна кристалічна гратка утворюється із тотожніх елементарних комірок. Кожна комірка являє собою паралелепіпед, побудований на трьох векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Ці вектори можна прийняти за орти координатних осей (рис.12.1)

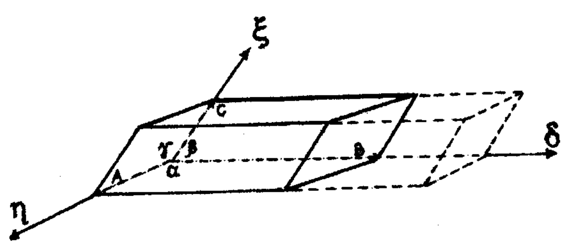


Рис. 12.1

де η,ξ,δ -афінні координатні осі.

В загальному випадку α,β,γ -довільні кути. Для описування геометричних елементів кристала (точок, прямих і площин) використовують кристалографічні індекси.

Індекси довільної точки М : $\left[\left[\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right]\right]$

де x,y,z- координати точки: a,b,c -періоди ідентичності (рис.12.2)

Для точки, яка знаходиться в межах комірки, що примикає до початку координат, індекси не перевищують 1. Індекси прямої, що проходить через початок координат, визначаються найменшими цілими числами m,n,p, які пропорційні індексам точки, через яку проходить пряма

$$m:n:p=\frac{x}{a}:\frac{y}{b}:\frac{z}{c}$$

Числа m,n,p- називають індексами напрямку і записують в одинарні квадратні дужки [m n p].

Якщо число-індекс виявляється від'ємним, то знак мінус ставиться над цим числом. Наприклад, напрямок протилежний осі OX: $[\bar{1}00]$

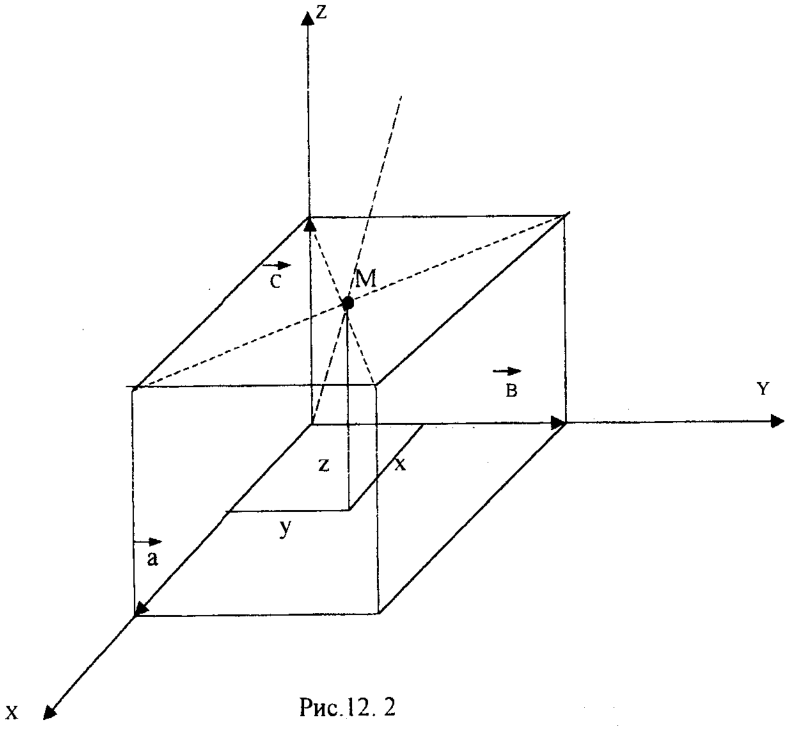


Рис.12. 2

Положення площини в кристалі задається найменшими цілими числами h,k,l, які обернено пропорційні відрізкам U, V і W, що відсікаються площиною на координатних осях (рис.12.3) числа h,k,l (індекси Мілера) беруть в круглі дужки (h,k,l)

$$h : k : l = \frac{1}{U} : \frac{1}{V} : \frac{1}{W}$$

Наприклад площина ABC відтинає на осях відрізки (рис.12.3);

OA=U;OB=V;OC=W

Період ідентичності вздовж прямої, заданої індексами $[m,n,p]$в кубічній гратці $\ell = a\sqrt{m^2+n^2+p^2}$

Кут φ між прямими $[m_1n_1p_1]$ і $[m_2n_2p_2]$ в кубічній гратці знаходиться за формулою $\cos\varphi = \dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

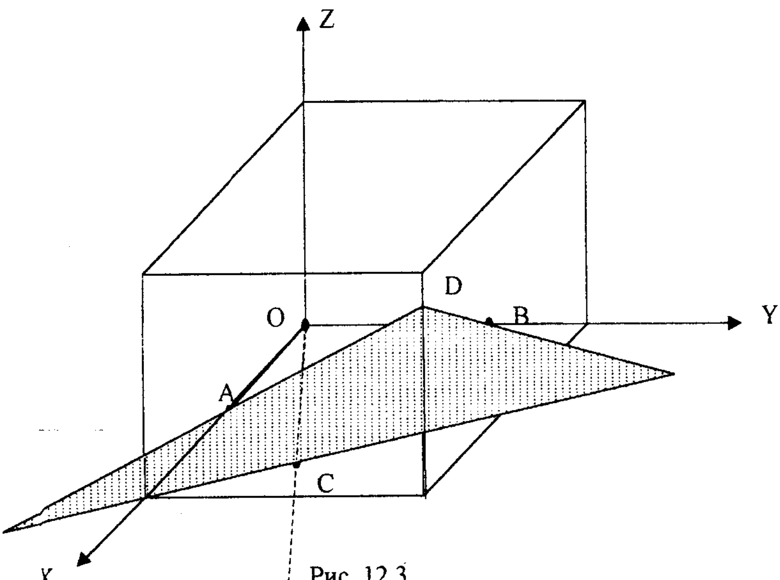


Рис. 12.3

Двогранний кут γміж площинами $(h_1k_1l_1)$ і $(h_2k_2l_2)$ визначається за формулою

$$\cos\gamma = \frac{h_1h_2+k_1k_2+l_1l_2}{\sqrt{h_1^2+k_1^2+l_1^2}\cdot\sqrt{h_2^2+k_2^2+l_2^2}}$$

Кут β між прямою $[mnp]$ і площиною (hkl) знаходимо із виразу;

$$\cos\beta = \frac{hm + kn + lp}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Число елементарних комірок в 1 молі кристала

$$Z_m = \frac{V_m}{V_0},$$

де V_m - молярний об'єм; V_0 - об'єм елементарної комірки, або

$Z_m = k\frac{N_A}{n}$ де к- число однакових атомів в хімічній формулі; n-число однакових атомів на 1 комірку. Для одиниці об'єму число комірок Z знаходиться за формулою:

$$Z = \rho\frac{k}{n}\frac{N_A}{\mu},$$

де ρ-густина кристала; μ - молярна маса; N_A-число Авогадро.

Параметр кубічної гратки $a = \sqrt[3]{\frac{n\mu}{k\rho N_A}}$

2. Пружні хвилі в кристалах. Фонони.

Кристал представляє собою систему N пружно пов'язаних один з одним атомів , які мають $s = 3N$ ступенів вільності.

Кожному нормальному гармонічному коливанню гратки відповідає стояча хвиля, яка виникає в об'ємі кристала.

Число нормальних коливань на одиницю об'єму дорівнює

$$dN_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2}\left(\frac{1}{V_{II}^2} + \frac{2}{V_1^2}\right),$$

де ω-циклічна частота , V_{II} - фазова швидкість повздовжніх хвиль V_1 - швидкість поперечних пружних хвиль.

Кожному нормальному коливанню відповідає енергія $E_m = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i$ де n_i-число нормальних коливань , частота яких ω_i

Без врахування нульових коливань енергія нормального коливання складається із порцій величини

$$E_i = \hbar\omega_i$$

Ця порція (квант) називається фононом, імпульс якого

$$\vec{P} = \hbar\vec{k},$$ де к-хвильовий вектор.

Фонон–це квазічастинка. Оскільки імпульс фонона не зберігається (може дискретними порціями передаватись гратці), то його називають квазіімпульсом. Розподіл квазічастинок фононного газу являється частковим випадком розподілу Бозе-Ейнштейна.У випадку теплової рівноваги $\langle n_1\rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_i}{kT}} - 1}$, де $\langle n_i\rangle$ - середнє число фононів з частотою ω_i.

3. Теплові властивості кристалів

Середня енергія квантового осцилятора, що приходиться на 1 ступінь вільності

$$\langle E\rangle = E_0 + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1},$$

де E_0 - нульова енергія $\quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

Молярна внутрішня енергія за Ейнштейном;

$$U_m = U_{m_0} + 3R\frac{\Theta_E}{e^{\Theta/T}-1},$$

де $\quad U_{m_0} = \frac{3}{2}R\Theta_E$ – молярна нульова енергія;

$\Theta_E = \frac{\hbar\omega}{k}$ - характеристична температура Ейнштейна

Молярна теплоємність при $\quad T \ll \Theta_E$

$$C_m = 3R\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)e^{\frac{-\Theta_E}{T}}$$

Число dN власних частот тіла, що приходиться на одиницю об'єму в інтервалі від ω до $\omega + d\omega$;

$$dN = 9n\frac{\omega^2 d\omega}{\omega_m^2}$$

де n- число атомів в одиниці об'єму; ω_m - максимальна частота.

Молярна внутрішня енергія за Дебаєм:

$$U_M = U_{\mu 0} + 9RT\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx,$$

де $U_{\mu 0} = \frac{9}{8}R\Theta_D$ - молярна нульова енергія $,\Theta_D = \frac{\hbar\omega_{max}}{k}$ -характеристична температура Дебая

Молярна теплоємність

$$C_\mu = \frac{\partial U_\mu}{\partial T} \text{ при } T \ll \Theta_D, \; C_\mu = \frac{12\pi^3}{5}R\left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3$$

Швидкість поздовжніх і поперечних хвиль в кристалі;

$$V_{II} = \sqrt{E/\rho}, \quad V_\perp = \sqrt{\varsigma/\rho},$$

де E,ς -модулі поздовжньої і поперечної пружності (модуль Юнга і модуль зсуву).

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Знайти число вузлів, що приходяться на елементарну комірку в гранецентрованій кубічній гратці.

Розв'язання.

Розглянемо елементарну комірку (рис.12.4). Вона складається з вузлів типу A (в вершинах) і типу B (по центру грані). Вузол A належить одночасно восьми коміркам, тому частка кожної комірки від вузла А дорівнює 1/8. Вузол В одночасно належить тільки лише двом коміркам, тому частка кожної комірки ½ .Число вузлів типу А в комірці 8, тому $n_A = \frac{1}{8}8 = 1$, а число вузлів типу В $n_B = \frac{1}{2}6 = 3$ загалом $n = n_A + n_B = 1 + 3 = 4$

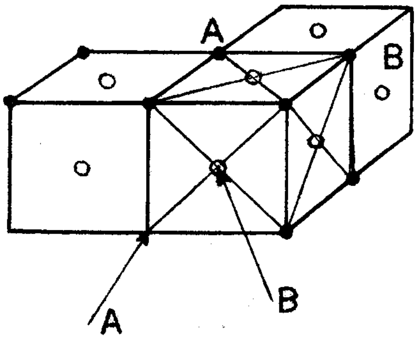


Рис.12.4

Задача 2. Знайти параметр a гратки і відстань d між сусідніми атомами кристала кальція (гратка гранецентрована кубічної сингонії) Густина кальція $1{,}55 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$.

Розв'язання

Об'єм кубічної решітки $V_0 = a^3$ З другого боку $V_0 = \frac{V_m}{Z_m}$. Прирівнявши праві частини, отримаємо $a^3 = \frac{V_m}{Z_m}$.

Молярний об'єм $V_m = \frac{\mu}{\rho}$; де μ - молярна маса; ρ -густина.

Число комірок в одному молі $Z_m = \frac{Na}{n}$ де n - число атомів на 1 комірку.

Підставивши V_m, Z_m в (1) маємо $a^3 = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{Na}{n}}$ $\quad a = \sqrt[3]{\frac{n\mu}{\rho Na}}$

Зробимо підстановку $a = \sqrt{\frac{4 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{1{,}55 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} = 0{,}55 \cdot 10^{-9} м$.

Задача 3. Написати індекси напрямку прямої, що проходить через вузли [[100]] і [[001]] кубічної примітивної гратки.

Розв'язання

Оскільки індекси точки пропорційні ідексам прямої, що проходить через початок координат і даний вузол, то вони можуть описуватись однаковими індексами. Іншими словами, якби пряма проходила через початок координат, то індекси її напрямку збігалися б з індексами вузла найближчого до початку координат, через який проходить пряма.

Якщо перенести початок координат в вузол [[100]](рис12.5), то індекс найближчого вузла [[101]], що відповідає індексу напрямку $[\bar{1}01]$

2) Другий спосіб.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $[[m_1 n_1 p_1]]$ і $[[m_2 n_2 p_2]]$

$$\frac{x-m_1}{m_2-m_1}=\frac{y-n_1}{n_2-n_1}=\frac{z-p_1}{p_2-p_1}$$

Величини в знаменнику пропорційні направляючим косинусам прямої (визначають її напрямок). А так як ці величини цілі, то вони і будуть відповідати індексам напрямку

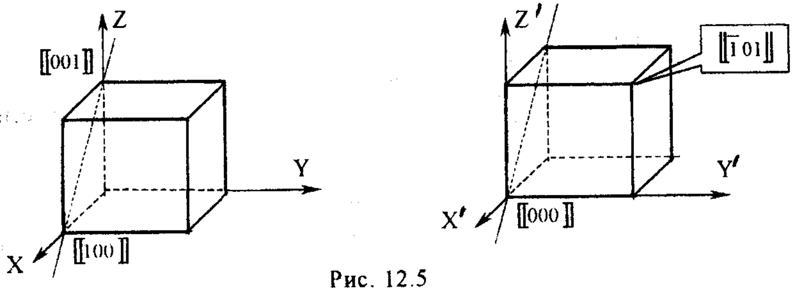


Рис. 12.5

$m_2 - m_1 = 0 - 1 = -1$

$n_2 - n_1 = 0 - 0 = 0$

$p_2 - p_1 = 1 - 0 = 1$

Шукані індекси $[\bar{1}01]$ рис.12.5.

Задача 4.

Написати індекси Міллера для площини, що проходить через вузли $[[200]]$, $[[010]]$ і $[[001]]$.

Розв'язання

1) спосіб.

Для визначення індексів Міллера можна записати

$$h:k:l=\frac{1}{U}:\frac{1}{V}:\frac{1}{\omega}$$

В нашій задачі $U=2; V=1, \omega=1$. отже

$[[010]]$ $h:k:l=\frac{1}{2}:\frac{1}{1}\frac{1}{1}=1:2:2$

Таким чином індекси Міллера для даної площини (122).

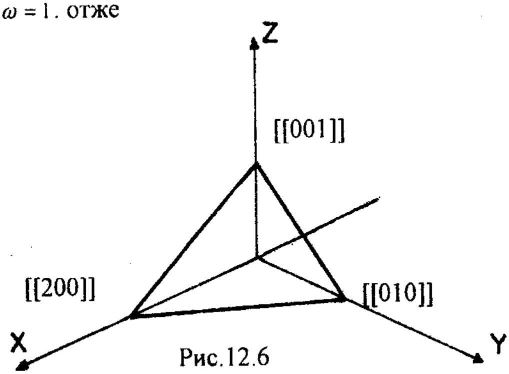


Рис.12.6

Другий спосіб:

Індекси Міллера є найменшими цілими коефіцієнтами при змінних в рівнянні площини.

Рівняння площини, що проходить через три точки з координатами $[[m_1n_1p_1]]$, $[[m_2n_2p_2]]$, $[[m_3n_3p_3]]$ задається визначником третього порядку

$$\begin{vmatrix} x-m_1 & y-n_1 & z-p_1 \\ m_2-m_1 & n_2-n_1 & p_2-p_1 \\ m_3-m_1 & n_3-n_1 & p_3-p_1 \end{vmatrix}=0$$

Підставимо значення $\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 0-2 & 1-0 & 0-0 \\ 0-2 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix}=0$

або $\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=x+2y+2z=2$

Виписавши коефіцієнти x,y,z отримаємо індекси Міллера. (122)

Задача 5. Знайти максимальну частоту коливань кристалічної гратки, якщо фазові швидкості поздовжніх і поперечних хвиль рівні.

Розв'язання

Кристал складається з однакових атомів з відомою концентрацією n. Максимальну частоту можна знайти, прирівнявши повне число коливань N числу ступенів вільності N'

$N' = 3N \qquad N' = V\int dN_\omega = V\int_0^{\omega_m}\frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 V^3}$ (див ф-лу (12.11) при

$V_{II} = V_\perp = V$, $\qquad N' = \frac{3V}{2\pi^2 V^3}\int_0^{\omega_m}\omega^2 d\omega = \frac{V\cdot\omega^3}{2\pi^2 V^3}\Big|_0^{\omega_m} = \frac{\omega_m^3 V}{2\pi^2 V^3}$.

Оскільки $N = nV$ то $3n=\frac{\omega_m^3}{2\pi^2 V^3}$, звідси $\omega_m = V\sqrt[3]{6\pi^2 n}$.

Задача 6. Визначити кількість теплоти, необхідної для нагрівання кристала $NaCl$ масою m=20г на ΔT=2К при: 1) $T = 2K$. Характеристична температура Дебая Θ_D для $NaCl$ дорівнює 320К.

Розв'язання

Кількість теплоти обчислюється за формулою $\Delta Q = \frac{m}{\mu}\int_{T_1}^{T_2} C_m dT$ (1)

Для $T \ll Q_D$ скористаємось граничним законом Дебая, згідно з яким

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{Q_D} \right)^3 \text{ тоді}$$

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{\mu} \frac{R}{Q_D^3} \int_{T_1}^{T_2} T^3 dT = \frac{12\pi^4}{5} \frac{m}{\mu} \frac{R}{Q_D^3} \frac{T^4}{4} \Bigg|_2^4 = 1{,}22 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$$

Задачі для самостійного розв'язування

12.1. Скільки атомів приходиться на одну комірку примітивної гратки кубічної сингної? (n=1)

12.2. Скільки атомів приходиться на одну елементарну комірку об'ємно-центрованої гратки ромбічної сингонії ? (n=2)

12.3. Скільки атомів приходиться на одну елементарну комірку примітивної градки гексагональної сингонії?(n=1)

12.4. Знайти густину кристала стронцію, якщо відомо, що гратка гранецентрованої кубічної сингонії, а відстань між найближчими сусідами атомами рівна 0,43нм.(2,6 10^3 кг/м^3)

12.5. Визначіть відносну атомну масу кристала , якщо відомо, що відстань між найближчими сусідніми атомами рівна 0.304нм. Гратка об'ємно - центрованої кубічної сингонії. Густина кристала дорівнює 534 кг/м^3 . (6,95) (Літій)

12.6. Написати індекси напрямку прямої, яка проходить в кубічній гратці через початок координат і вузол з кристалографічними індексами в двох випадках: 1) $[[242]]$ 2) $[[112]]$ (1) $[[121]]$, 2) $[[112]]$)

12.7. Написати індекси напрямку прямої, яка проходить через два вузли з кристалографічними індексами (в двох випадках): 1) $[[242]]$і $[[321]]$; 2) $[[121]]$ і $[[201]]$ (1. $[[111]]$ 2. $[[\bar{1}2\bar{2}]]$ або $[[1\overline{22}]]$)

12.8. Обчислити кут φ між двома напрямами в кубічній гратці кристала, які задані кристалографічними індексами $[[110]],[[111]]$ ($35^0\ 15^1$)

12.9. Площина проходить через вузли $[[100]],[[010]],[[001]]$ кубічної гратки. Написати індекси Міллера для цієї площини. (111)

12.10. Написати індекси Міллера для площин, що містять вузли з кристалографічними індексами в двох випадках : 1) $[[111]],[[112]],[[101]]$; 2) $[[111]],[[010]],[[111]]$. Знайти відрізки, які відсікаються цією площиною на осях координатах. (1. $(\bar{1}24)$; відрізки на осях 4,2,1 2. (012); відрізки на осях ∞,2,1)

12.11. Дві площини в кубічній гратці задані індексами Міллера (010) і (011).

Визначити кут γ між площинами.($\pi/4$)

12.12. В кубічній гратці напрямок прямої задано індексами (011). Визначити кут γ між цією прямою і площиною(111).(0 пряма лежить в площині)

12.13. Знайти частоту коливань атома срібла за теорією теплоємності Ейнштейна, якщо характеристична температура срібла рівна 165К.
(3,44 ТГц)

12.14. Обчислити за теорією Ейнштейна молярну нульову енергію кристала цинку . Характеристична температура дорівнює 230 К.
(2,87 МДж/моль)

12.15. Обчислити за теорією Дебая молярну нульову енергію кристала міді .Характеристична температура дорівнює 180К. (2,99МДж)

12.16. Обчислити енергію нульових коливань, яка приходиться на один грам міді з дебаєвською температурою Θ_D=330 К.($U_0 = \dfrac{9R\Theta}{8\mu} = 49{,}6 Дж/г$)

12.17. Знайти максимальну частоту власних коливань в кристалі заліза, якщо при температурі Т=20К його питома теплоємність с=2,7мДж/(гК).
$(\omega = (\frac{kT}{\hbar})\sqrt[3]{\frac{12\pi^2 R}{5\mu c}} = 6\cdot 10^{13} c^{-1})$

12.18. При нагріванні кристала міді масою m=25г від T_1=10К до T_2=20К йому було передано кількість тепла Q=0,80Дж. Знайти дебаєвську температуру ($\theta_D = \sqrt[3]{(3\pi^4 mR \;\; 5\mu\theta)(T_2^4 - T_1^4)} = 330K$)

12.19. Обчислити середнє значення енергії нульових коливань, які приходяться на один осцилятор кристала в моделі Дебая, якщо дебаєвська температура кристала дорівнює Θ_D. ($\langle E\rangle = \frac{3}{8}k\theta_D$)

12.20 . Кристал складається з N однакових атомів. Його дебаєвська температура дорівнює Θ_D. Знайти число фононів в інтервалі частоти ($\omega, \omega - d\omega$) при температурі Т. ($dN = 9N(\frac{\hbar}{k\Theta_D})^3 \frac{\omega^{2d} d\omega}{e^{\hbar\omega \;\; kT} - 1}$).

Тема 13

Термодинамічні властивості електронного газу

1.Енергія Фермі електронного газу.

Густина станів $g(E) = d\nu \;\; dE$, тобто число станів, що приходиться на одиничний інтервал енергії, дорівнює

$$g(E) = 4\pi \frac{V(2m)^{3\;2}}{2\pi\hbar^3} E^{1\;2} \qquad (1)$$

За принципом Паулі, при абсолютному нулі всі електрони провідності розподіляються по одному в кожному стані на найнижчих рівнях. Тому всі стани з енергією E меншої деякого значення $E_f(0)$ будуть заповнені, а стани з $E > E_f(0)$ - вакантними.

Ця енергія $E_f(0)$ називається енергією Фермі при абсолютному нулі. Рівень Фермі E_f відіграє роль параметра в розподілі електронів по станах з різною енергією і незначно залежить від температури.

Ізоенергетична поверхня (E = const) в K – просторі (або в P–просторі), яка відповідає значенню $E = E_f$ називається поверхнею Фермі. У випадку вільних електронів ця поверхня сферична і описується формулою

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{h^2k^2}{2m} = E_F \qquad (2)$$

Оскільки при T = 0 рівнів з $E < E_f(0)$ стільки скільки електронів, то для електронів провідності $\nu_E = nV$

де ν_E – кількість заповнених станів, n – концентрація вільних електронів.

$$\nu_E = \frac{8}{3}\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} E_F^{3/2}(0) = nV \quad \text{звідки}$$

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} \qquad (3)$$

Залежність енергії Фермі від T і n має складний характер, але при умові $kT << E_F$

$$E_F \approx E_F(0)\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F(0)}\right)^2\right] \qquad (4)$$

Для всіх практично важливих випадків $E_F >> kT$

В цих випадках внутрішня енергія електронного газу

$$U_e(T) = U_e + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 g[E_F(0)], \qquad (5)$$

де $U_e = \frac{2}{5} g(E_F)E_F^2(0)$ – енергія електронів при T = 0 K, $g[E_F(0)]$ густина станів для рівня Фермі.

Електронна теплоємність C_e,

$$C_e = \left[\frac{\partial U_e}{\partial T}\right]_{V=const} = \left[U_e^0 + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 g[E_F(0)]\right]_T^1 = \frac{\pi^2}{2}kn\left[\frac{kT}{E_F(0)}\right] = \gamma T, \qquad (7)$$

де $\quad \gamma = \frac{\pi^2}{2} kn \frac{k}{E_F(0)}$

Отже ; $C_e = \gamma T$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1.Оцінити значення енергії Фермі при абсолютному нулі для металів.

Розв'язування

При Т=0 К енергія Фермі $E_F(0)$ визначається за формулою:

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$$

Концентрація електронів провідності n в металах лежить в межах $10^{28} \div 10^{29} м^{-3}$. Взявши $n = 5 \cdot 10^{28} м^{-3}$ отримаємо :

$$E_F(0) = \frac{(1{,}05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}(3 \cdot 3{,}14^2 \cdot 5 \cdot 10^{28})^2 = 5 \ \ eB$$

Приклад 2.Знайти середню енергію електронів провідності в металі при температурі 0 К.

Розв'язування

Середнє значення будь -якої величини y визначається; $< y >= \frac{1}{b-a}\int_a^b y dy$

Отже :

$$< E >= \frac{1}{\int_0^{E_F(0)} g(E)dE} \cdot \int_0^{E_F(0)} Eg(E)dE = \frac{\int_0^{E_F(0)} E 4\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi h^3} E^{1/2} dE}{\int_0^{E_F(0)} 4\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi h^3} E^{1/2} dE} =$$

$$= \frac{\int_0^{E_F(0)} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F(0)} E^{1/2} dE} = \frac{\frac{2}{5} E^{5/2} \Big|_0^{E_F(0)}}{\frac{2}{3} E^{3/2} \Big|_0^{E_F(0)}} = \frac{3}{5} E\Big|_0^{E_F(0)} = \frac{3}{5} E_F(0) = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3 \ \ eB$$

(При виведенні використовувалась формула (1))

Задачі для самостійного розв'язування

13.1. Визначити число вільних електронів, що припадає на один атом Na при температурі T=0 K. Рівень Фермі ε_{+} для Na дорівнює 3,12 еВ.

Густина ρ натрію рівна $970 кг/м^3$.

13.2. В скільки раз число вільних електронів, що припадають на один атом металу при T = 0 більше в алюмінію ніж міді, якщо рівні Фермі відповідно дорівнюють E_{F1} = 11,7 еВ , E_{F2} = 7 еВ.

13.3. Визначити імовірність того, що електрон в металі займає енергетичний стан, що знаходиться в інтервалі $\Delta\varepsilon$ = 0,05 еВ нижче рівня Фермі і вище рівня Фермі для двох температур 1) T_1 =290 K 2) T_2 =58 K.

13.4. Метал знаходиться при температурі T = 0 K. Визначити в скільки разів число електронів з кінетичною енергією від $E_F/2$ до E_F більше числа електронів з енергією від 0 до $E_F/2$.

13.5. Оцінити температуру $T_{кр}$. для калію, якщо вважати, що на кожний атом припадає по одному вільному електрону. Густина ρ калію $860 кг/м^3$.

13.6. Знаючи розподіл dn(ε) електронів в металі за енергією, встановити розподіл dn(p) електронів за імпульсами. Знайти частинний випадок розподілу при T = 0 K.

13.7 Використовуючи функцію розподілу dn(p) електронів в металі за імпульсами з'ясувати розподіл dn(ϑ) за швидкостями 1) При будь-якій температурі T ; 2) при температурі 0 K.

13.8.Визначити максимальну швидкість ϑ_{max} електронів в металі при T = 0 K, якщо рівень Фермі E_F=5еВ.

13.9.Виразити середню швидкість $<\vartheta>$ електронів в металі при T = 0 K через максимальну швидкість ϑ_{max}. Обчислити $<\vartheta>$ для металу, рівень Фермі E_F якого при T = 0 K складає 6 еВ.

13.10.Метал знаходиться при температурі T = 0 K. Знайти в скільки разів число електронів з швидкостями від $\vartheta_{max}/2$ до ϑ_{max} більше числа електронів з швидкостями від 0 до $\vartheta_{max}/2$.

13.11. Знайти відносне число вільних електронів в металі, енергія яких відрізняється від енергії Фермі не більше ніж на $\eta = 1{,}0\,\%$.

Якщо температура металу T = 0 K.

13.12.Скільки процентів вільних електронів в металі при T = 0 K має кінетичну енергію, що перевищує половину максимальної?

13.13.До якої температури потрібно нагріти класичний електронний газ, щоб середня енергія його електронів виявилася рівною середній енергії вільних електронів в міді при T = 0 K ?Врахувати, що на кожний атом міді приходиться один вільний електрон.

13.14. Розрахувати інтервал (в електрон-вольтах) між сусідніми рівнями вільних електронів в металі при T = 0 K біля рівня Фермі, якщо концентрація вільних електронів $n = 2{,}0\cdot 10^{22}\,см^{-3}$ і об'єм металу $V=1{,}0 см^3$.

Тема 14
Електрофізичні властивості кристалів

1. Квантова теорія електропровідності металів.
2. Явище надпровідності.
3. Власна та домішкова електропровідність напівпровідників.

Основні формули

Розподіл Фермі за енергіями для вільних електронів в металі:

$$\text{при } T\neq 0 \quad dn(E)=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{E^{\frac{1}{2}}dE}{\exp\left[\frac{E-E_F}{kT}\right]+1}, \tag{1}$$

$$\text{при } T=0 \quad dn(E)=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}E^{\frac{1}{2}}dE \qquad (\text{при } E<E_F), \tag{2}$$

де $dn(E)$-концентрація електронів, енергія яких попадає в інтервал від E до $E+dE$; m і E-маса та енергія електрона; E_F-енергія Фермі.

Температура виродження

$$T_{KP}=\frac{2\pi\hbar^2}{km}n^{\frac{2}{3}}, \tag{3}$$

де k-стала Больцмана; n-концентрація вільних електронів.

Рівняння руху "середнього" електрона має вигляд:

$$m^*\frac{d\overline{U}_{\text{др}}}{dt}=-e\overline{E}-r\overline{U}_{\text{др}}, \tag{4}$$

де m^*-ефективна маса електрона; $\overline{U}_{\text{др}}$-середня дрейфова швидкість; r – коефіцієнт опору; E-напруженість електричного поля.

Ефективна маса:

$$m^*=\frac{\hbar^2}{\frac{\partial^2 W}{\partial K^2}}; \tag{5}$$

де W-енергія електрона; K-хвильове число.

Час, за який дрейфова швидкість зменшується в e раз при E=0 називається часом релаксації τ

$$\tau=\frac{m^*}{r} \tag{6}$$

Закон Ома для провідника з кубічною симетрією має вигляд:

$$j_X=\lambda E_X, \tag{7}$$

де j_x-проекція вектора густини струму на вісь X; λ-питома електропровідність; E_X- проекція напруженості електричного поля на вісь X.

Питома електропровідність визначається:

$$\lambda = \frac{e^2}{4\pi^3\hbar}\int_{S_F}\tau\frac{U^2x}{U}dS \qquad (8)$$

де U_X- проекція середньої швидкості на вісь X; S_F-поверхня Фермі.

Звідси видно, що в електропровідність вносять вклад не всі вільні електрони, а тільки ті, що знаходяться на поверхні Фермі або поблизу неї. При ізотропному розсіюванні (τ залежить тільки від енергії);

$$\lambda = \frac{e^2\tau(W)}{4\pi^3\hbar}\int_{S_F}\frac{U^2x}{U}dS \qquad (9)$$

В випадку квадратичної дисперсії (поверхня Фермі є сферою) маємо:

$$U = \frac{\hbar K}{m*};$$

$$\int_{S_F}\frac{U^2x}{U}dS = \frac{\hbar}{m*}\frac{4\pi}{3}K^2{}_F \qquad (10)$$

де K_F-імпульс Фермі.

$$K^2{}_F = 3\pi^2 n, \qquad (11)$$

де n-концентрація вільних електронів.

Підставивши (2) і (3) в (1) маємо

$$\lambda = \frac{ne^2\tau(W_F)}{m*} \qquad (12)$$

Час релаксації τ_F в області високих температур ($\left(\frac{T}{T_Д}>>1\right)$, де $T_Д$-дебаївська температура) складно визначається через багато параметрів і температур:

$$\tau_F = \frac{4}{3}\frac{\hbar\eta MK_B T_Д}{\pi m*\left|eU_1\right|^2}\frac{T_Д}{T} = \frac{B}{T}$$

Тоді виходячи з (4) $\lambda \sim \frac{1}{T}$, а питомий опір $\rho \sim T$.

При низькій температурі $\left(\frac{T}{T_Д}<<1\right)$ $\tau_F \sim \frac{1}{T^5}$, отже $\lambda \sim \frac{1}{T^5}$,

а питомий опір $\rho \sim T^5$.

Деякі метали та сплави при температурі $T \approx (1 \div 20K)$ втрачають опір (явище надпровідності).

Стан надпровідності можливий при $T<T_K$, $B<B_K$ і $j<j_K$;

де T_K , B_K і j_K- критичні (максимальні для надпровідності) значення температури, магнітної індукції та густини струму.

Зв'язок між сталою електричною різницею потенціалів $\Delta\varphi$ на контакті двох надпровідників та частотою ω надпровідного змінного струму:

$$\omega=\frac{e*}{\hbar}\Delta\varphi; \tag{13}$$

де $e* = 2e$ -заряд куперовської пари.

Магнітний потік Φ_B, що пронизує кільце з надпровідним струмом:

$$\Phi_B=n\frac{h}{e*}, \qquad \text{де } n=1,2,3.. \tag{14}$$

Максимальне значення сили надпровідного струму в електричному колі зі слабкими (джозесоніфськими) контактами, які містяться в магнітному колі.

$$I_{MAX} = C\cos\frac{\pi\Phi_B}{\Phi_0} , \tag{15}$$

де C-стала для даного кола; Φ_B-магнітний потік, що пронизує коло;

$$\Phi_0=\frac{h}{e*}$$

Ізотопічний ефект,

$$T_K M^{\frac{1}{2}}=\text{const}, \tag{16}$$

де T_K-температура переходу речовини у надпровідний стан;
М-її молярна маса;

Залежність критичної напруженості H_K від температури (у надпровідників першого роду)

$$H_K(T) = H_K(0)\left[1-\left(\frac{T_K}{T}\right)^2\right] \tag{17}$$

Довжина когерентності (радіус кореляції) надпровідних пар:

$$\xi = \frac{hU_F}{\pi\Delta} \tag{18}$$

де U_F-швидкість електронів на поверхні Фермі; Δ- величина енергетичної щілини при Т=0.

Концентрація електронів провідності напівпровідника:

$$n_e = 2\left(\frac{m_e KT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{м}{kT}\right], \tag{19}$$

де м-хімічний потенціал (рівень Фермі).

Концентрація дірок:

$$n_p = 2\left(\frac{m_p KT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{м+\Delta E}{kT}\right], \tag{20}$$

де ΔE- ширина забороненої зони.

Питома провідність власних провідників:

$$\sigma = en(B_E - B_P), \tag{21}$$

де B_E і B_P-рухливість електронів і дірок.

Сила струму через p-n перехід у прямому напрямку:

$$I_{ПР} = I_0\left(\exp\left[\frac{eU}{KT}\right]-1\right) \qquad (22)$$

В зворотному напрямку:

$$I = I_0\left(1-\exp\left[-\frac{eU}{KT}\right]\right), \qquad (23)$$

де I_0-максимальна сила струму у закритому напрямку; U-напруга на p-n переході.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Обчислити тиск електронного газу в металічному натрію при T=0, якщо концентрація вільних електронів в ньому $n=2{,}5\cdot10^{22}см^{-3}$.

Розв'язання.

Вважаючи, що електронний газ є ідеальним газом застосуємо формулу для тиску ідеального газу.

$$P = \frac{2}{3}n_e < E >_e \qquad (1)$$

де середня енергія $$<E>_e=\frac{3}{5}E_F \qquad (2)$$

Енергія Фермі

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (3)$$

Підставивши (2) і (3) в (1) маємо:

$$P = \frac{2}{3}n\frac{3}{5}\frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{5m}(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}n^{\frac{5}{3}} =$$

$$= \frac{(1{,}05\cdot10^{-34})^2}{5\cdot9{,}1\cdot10^{-34}}(3\cdot3{,}14)^{\frac{2}{3}}(2{,}5\cdot10^{28}) \approx 5\cdot10^4\,атм$$

Приклад 2. Оцінити розмір куперовської пари при критичній температурі $T_к$=10К і енергії Фермі M_{F0}=5еВ.

Розв'язання

Оскільки в обміні фононами беруть участь електрони з імпульсами поблизу сфери Фермі, то при $T_к$:

$$kT = \frac{P^2}{2m_e} - \frac{P_0^2}{2m_e}$$

Через виродження по порядку величини $P \approx P_0$, тому $P + P_0 \approx 2P_0$ тоді:

$$kT_k = \frac{1}{2m_e}\left(P^2 - P_0^2\right) = \frac{2P_0\Delta P}{2m_e}$$

отже $$kT_k = \frac{P_0 \Delta P}{m_e}$$

З співвідношення невизначеності $\Delta r \Delta P = \hbar$

Враховуючи, що $\frac{P_0}{m_e} = U_e = \sqrt{\frac{E_{F0}}{m_e}}$ знаходимо:

$$\Delta r = \sqrt{\frac{E_{F0}}{m_e}} \frac{\hbar}{KT_k} = 10^{-6}\,\text{м}$$

Приклад 3. Визначити хімічний потенціал для напівпровідника з власною провідністю і вказати де він буде знаходитись при умові, що ефективні маси m_p і m_e не сильно відрізняються.

В випадку напівпровідника з власною провідністю $n_e = n_p$ (концентрації електронів та дірок рівні.)

Оскільки $$n_e = 2\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{E_{F0}}{kT}\right],$$

то $$n_p = 2\left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{E_{F0} + \Delta E}{kT}\right]$$

Прирівнявши маємо:

$$2\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{E_{F0}}{kT}\right] = 2\left(\frac{m_p kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{E_{F0} + \Delta E}{kT}\right]$$

Після скорочень, $m_e^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{E_{F0}}{kT}\right] = m_p^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{E_{F0} + \Delta E}{kT}\right]$, або

$$\left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\exp\left[\frac{E_{F0}}{kT}\right]}{\exp\left[-\frac{E_{F0} + \Delta E}{kT}\right]} = \exp\left[\frac{2E_{F0} + \Delta E}{kT}\right]$$

Прологарифмувавши, $$\frac{3}{2}\ln\frac{m_p}{m_e} = \frac{2E_{F0} + \Delta E}{kT}$$ звідки

$$E_{F0} = -\frac{\Delta E}{2} + \frac{3}{4} kT \ln\frac{m_p}{m_e}$$

При $\frac{m_p}{m_e} \approx 1$, $\ln\frac{m_p}{m_e} \to 0$ відповідно $E_{F0} = \frac{\Delta E}{2}$, а це означає, що рівень Фермі знаходиться посередині забороненої зони.

Задачі для самостійного розв'язування

14.1. Знайти найменшу E_{min} енергію утворення пари електрон-дірка у бездомішковому напівпровіднику, провідність якого зростає у n=5 разів при збільшенні температури T_1=300K до T_2=400K.

$$E_{min} = \frac{2KT_1T_2}{T_2 - T_1}\ln n = 0{,}33 \text{ eB}$$

14.2. На деякому напівпровіднику під час проходження струму силою I=0,74 А підтримується стала напруга U=10 В. Після збільшення напруги до U_1=100В сила струму досягла I_1=10 А. За наведеними даними обчислити ширину забороненої зони ΔE у цьому напівпровіднику, якщо його температура підвищилася на ΔT=23K.

$$\Delta E = 2\cdot 10^{-3} \text{ eB}$$

14.3. У кристал кремнію, температура якого T=300K, внесено домішки бору. Як при цьому зміниться питомий опір кристала ρ.

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \exp\left[\frac{\Delta E_2 - \Delta E_1}{2kT}\right] = 9{,}7\cdot 10^{-10}$$

де ΔE_1-ширина забороненої зони у кремнію, ΔE_2-відстань акцепторного рівня бору від валентної зони кремнію.

14.4. При якій температурі T питомий опір кристала германію ρ зменшиться у n=2,24 рази, якщо в нього ввести домішку індію? Вважати, що енергія активації від температури не залежить. ($T = \frac{\Delta E_2 - \Delta E_1}{2k\ln n} = 297K$)

14.5. Яка напруга U прикладена до p-n переходу, якщо при T=300K коефіцієнт випрямлення $n = \frac{I_{пр}}{I_{зв}} = 1200$? ($U = \frac{kT}{e}\ln n = 0{,}18B$)

14.6. Оцінити розмір куперівської пари у надпровіднику та порівняти його з середньою міжатомною відстанню у кристалі. ($\Delta r \approx \sqrt{\frac{E_F}{m_e}}\frac{\hbar}{kT_K} = 10^{-6}$м)

14.7. Нуклід ^{64}Zn зазнає переходу у надпровідниковий стан при температурі T=0, 88K. При якій температурі T_2 відбувається перехід у надпровідниковий стан нукліда ^{63}Zn? ($T_2 = T_1\sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = 0{,}85K$)

14.8. Яку частку η становить напруженість критичного поля у надпровіднику при температурі $T = \frac{1}{2}T_C$ (T_C - критична температура) від напруженості критичного поля при T=0K? ($\eta = \frac{H_K(T)}{H_K(0)} = 0{,}75$)

14.9. Знайти напруженість $H_C(T)$ критичного поля у цинку, кадмію, алюмінію, олові при температурі T=0,75 T_C (T_C- критична температура).
($H_K^{(Zn)} = 3{,}69\cdot 10^3\ \frac{A}{м}$; $H_K^{(Cd)} = 2{,}09\cdot 10^3\ \frac{A}{м}$; $H_K^{(Al)} = 6{,}9\cdot 10^3\ \frac{A}{м}$; $H_K^{(Sn)} = 21{,}3\cdot 10^3\ \frac{A}{м}$;)

14.10. Довести, що у власному напівпровіднику має місце рівність $E_{F_0} = \frac{\Delta E}{2}$, де ΔE- ширина забороненої зони, а E_{F0} - хімічний потенціал напівпровідника. ($E_{F_0} = \frac{\Delta E}{2}$)

14.11. Стала різниця потенціалів $\Delta\varphi$ на діелектрику в джозефсонівському елементі дорівнює $2\cdot10^{-2}$В. Чому дорівнює частота ω, що виникає при тунельному проходженні напівпровідникових пар? ($\omega = \frac{2e}{\hbar}\Delta\varphi = 6\cdot10^{13}C^{-1}$)

14.12. Знайти найменшу силу надпровідного струму через кільце з індуктивністю L=1 нГн. ($I=\frac{h}{2eL} = 2{,}07\,мкА$)

14.13. Коливальний контур має індуктивність L=0,2 мкГн та ємність C=0,5 мкФ. Якою повинна бути різниця потенціалів на діелектрику джозефсонівського елемента, щоб контур резонував на випромінювання джозефсонівського елемента? ($\Delta\varphi = \frac{\hbar}{2e}\frac{1}{\sqrt{LC}} = 3{,}13$ нВ)

14.14. Знайти найменшу E_{min} енергію утворення пари електрон-дірка у бездомішковому напівпровіднику, провідність якого зростає у n=5 разів при збільшенні температури від T_1=300К до T_2=400К. ($E_{min} = \frac{2RT_1T_2}{T_2 - T_1}\ln n = 0{,}33eB$)

14.15. У кристал кремнію, температура якого T=300К, внесено домішку бору. Як при цьому зміниться питомий опір кристала ρ?

($\frac{\rho_2}{\rho_1} = \exp\left[\frac{\Delta E_2 - \Delta E_1}{2kT}\right] = 9{,}7\cdot10^{-10}$)

14.16. Яка напруга U прикладена до p-n переходу, якщо при T=300К коефіцієнт випрямлення $n=\frac{I_{ПР}}{I_{ЗВ}} = 1200$? ($U = \frac{kT}{e}\ln n = 0{,}18B$)

14.17. При деякій напрузі сила прямого струму через p-n перехід $I_{ПР}$=2,02 мА, а зворотного-$I_{ЗВ}$=20 мкА. Знайти за цими даними силу струму насичення для p-n переходу. ($I_н = I_{ЗВ}\frac{I_{ПР}}{I_{ПР} - I_{ЗВ}} = 20{,}2\,мкА$)

14.18. Чи однаково зміниться питомий опір кристала германію та того самого кристала з домішками фосфору при підвищенні температури від T_1=295К до T_2=300К? Вважати, що енергія активації стала.

($\exp\left[\frac{\Delta E_1 - \Delta E_2}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = 1{,}24$)

14.19. Як зміниться сила струму через кремнієвий зразок, якщо ввести в нього домішки алюмінію, а температуру підвищити від T_1=290К до T_2=300К не змінюючи напруги? Енергію активації вважати сталою.

(Сила струму зросте у $\exp\left[\frac{\Delta E_1}{2kT_1} - \frac{\Delta E_2}{2kT_2}\right]$=2 рази).

14.20. На деякому напівпровіднику під час проходження струму силою I=0,74 А підтримується стала напруга U=10 В. Після збільшення напруги до U_1=100 В сила струму досягла значення I_1=10 А. За наведеними даними обчислити ширину забороненої зони ΔE у цьому напівпровіднику, якщо його температура підвищилася на ΔT=23К $\Delta E = 2\cdot 10^{-3}$ eB

14.21. При якій температурі Т питомий опір кристала германію ρ зменшиться у n=2,24 раза, якщо в нього внести домішку індію? Вважати, що енергія активації від температури не залежить.

$$(T = \frac{\Delta E_2 - \Delta E_1}{2k\ln n} = 297K)$$

14.22. При деякій температурі Т коефіцієнт випрямлення для p-n переходу n_1=1600. Чому дорівнюватиме цей коефіцієнт, якщо температура напівпровідника підвищиться на η=0,1 від початкової при сталій напрузі. ($n_2 = n^{1/(1+\eta)}$=811).

Доданок А

Таблиця А1

Основні фізичні сталі

Фізична стала	*Позначення*	*Числове значення та одиниці вимірювання*
Прискорення вільного падіння	g	9.81 м/с^2
Гравітаційна стала	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг$\cdot$ с^2)
Стала Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярна газова стала	R	8.31 Дж/(моль$\cdot$ К)
Число Лошмідта	V_m	$22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Стала Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Елементарний заряд	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Швидкість світла у вакуумі	з	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ м/с
Стала Стефана- Больцмана	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт /(м^{2}К^4)
Стала Віна	b	$2.90 \cdot 10^{-3}$ м$\cdot$ Дж
Стала Планка	h	$6{,}625 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с
	$\hbar$	$1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с
Стала Рідберга	R	$1.10 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Радіус Бора	a **	$0.529 \cdot 10$ м
Комптоновська довжина хвилі електрона	Λ_0	$2.43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_Б$	$0.927 \cdot 10^{-23}$ А$\cdot$ м^2
Енергія іонізації атома водню	E_i	$2.18 \cdot 10^{-18}$ Дж (13.6 еВ)
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг
Електрична стала	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Таблиця А2

Густина твердих тіл

Тверде тіло	$\rho \cdot 10^{-3}$, *кг/м^3*	*Тверде тіло*	$\rho \cdot 10^{-3}$, *кг/м^3*
Алюміній	2.70	Мідь	8.93
Барій	3.50	Нікель	8.90
Ванадій	6.02	Свинець	11.3
Вісмут	9.80	Срібло	10.5
Залізо	7.88	Цезій	1.90
Літій	0.53	Цинк	7.15

Таблиця А3

Густина рідин

Рідина	*Густина, кг/м³*	*Рідина*	*Густина, кг/м³*
Вода (при 4°С)	1,00· 103		1,26-103
Гліцерин	1,26-103	Сірковуглец	0,80-103
Ртуть	13,6-103	Спирт	

Таблиця А4

Густина газів (при нормальних умовах)

Газ	*Густина, кг/м³*	*Газ*	*Густина кг/м³*
Водень	0,09	Гелій	0,18
Повітря	1,29	Кисень	1,43

Таблиця А5

Коефіцієнт поверхневого натягу рідин

Рідина	*Коефіцієнт, м/м*	*Рідина*	*Коефіцієнт, м/м*
Вода	72	Ртуть	500
Мильна піна	40	Спирт	22

Таблиця А6

Ефективний діаметр молекули

Газ	*Діаметр, м*	*Газ*	*Діаметр, м*
Азот	$3{,}0 \cdot 10^{-10}$	Гелій	$1{,}9 \cdot 10^{-10}$
Водень	$2{,}3 \cdot 10^{-10}$	Кисень	$2{,}7 \cdot 10^{-10}$

Таблиця А7

Робота виходу електронів з поверхні металу у вакуум

Метал	$A \cdot 10^{19}$, Дж	A, еВ
Платина	10	6,3
Срібло	7,5	4,7
Вольфрам	7,2	4,5
Літій	3,7	2,3
Калій	3,5	2,2
Рубідій	3,4	2,1
Цезій	3,0	1,9
Цинк	6,4	4,0

Таблиця А8

Відносні атомні маси (округлені значення) A_r і порядкові номери Z деяких елементів

Елемент	Символ	A_r	Z	Елемент	Символ	A_r	Z
Азот	N	14	7	Марганець	Mn	55	25
Алюміній	Al	27	13	Мідь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молібден	Mo	96	42
Барій	Ba	137	56	Натрій	Na	23	11
Ванадій	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водень	H	1	1	Нікель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелій	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Залізо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сірка	S	32	16
Калій	K	39	19	Срібло	Ag	108	47
Кальцій	Ca	40	20	Вуглець	C	12	6
Кисень	O	16	8	Уран	U	238	92
Магній	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

Таблиця А9

Маси атомів легких ізотопів

Ізотоп	Символ	Маса, а.е.м.	Ізотоп	Символ	Маса, а.е.м.
Нейтрон	^1_0n	1.00867	Берилій	^7_4n Be	7.01693
				^9_4n Be	9.01219
Водень	^1_1H	1.00783	Бор	$^{10}_5B$	10.01294
	^2_1H	2.01410			
	^3_1H	3.01605		$^{11}_5B$	11.00930
Гелій	^3_2He	3.01603	Вуглець	$^{14}_6C$	12.01294
	^4_2He	4.00260		$^{13}_6C$	13.00335
				$^{14}_6C$	14.00324
Літій	^6_3Li	6.01513	Азот	$^{14}_7N$	14.00307
	^7_3Li	7.01601			
			Кисень	$^{16}_8O$	15.99491
				$^{17}_8O$	16.99913

Таблиця А10

Періоди піврозпаду радіоактивних ізотопів

Ізотоп	Символ	Період піврозпаду
Актиній	$^{225}_{89}Ac$	10 діб
Йод	$^{131}_{53}I$	8 діб
Кобальт	$^{60}_{27}Co$	5.3 року
Магній	$^{27}_{12}Mg$	10 хв
Радій	$^{226}_{86}Ra$	1620 років
Радон	$^{222}_{86}Rn$	3.8 доби
Стронцій	$^{90}_{38}Sr$	27 років
Фосфор	$^{32}_{15}P$	14.3 доби
Церій	$^{144}_{58}Ce$	285 діб

Таблиця А11

Маса й енергія спокою деяких частинок

Частинка	m_0		E_0	
	Кг	а.о.м.	Дж	МеВ
Електрон	$9.11\cdot10^{-31}$	0.00055	$8.16\cdot10^{-14}$	0.511
Протон	$1.672\cdot10^{-27}$	1.00728	$1.50\cdot10^{-10}$	938
Нейтрон	$1.675\cdot10^{-27}$	1.00867	$1.51\cdot10^{-10}$	939
Дейтрон	$3.35\cdot10^{-27}$	2.01355	$3.00\cdot10^{-10}$	1876
α-частинка	$6.64\cdot10^{-27}$	4.00149	$5.96\cdot10^{-10}$	3733
Нейтральний π-мезон	$2.41\cdot10^{-28}$	0.14498	$2.16\cdot10^{-11}$	135

Таблиця А14

Множники і приставки для утворення десяткових кратних і частинних одиниць та їхні найменування

Приставка		Множник	Приставка		Множник
Найменування	Позначення		Найменування	Позначення	
Экса	Э	10^{18}	Деци	д	10^{-1}
Пэта	П	10^{15}	Санти	с	10^{-2}
Тера	Т	10^{12}	Мілі	м	10^{-3}
Гіга	Г	10^{9}	Мікро	мк	10^{-6}
Мега	М	10^{6}	Нано	н	10^{-9}
Кіло	К	10^{3}	Піко	п	10^{-12}
Гекто	г	10^{2}	Фемто	ф	10^{-15}
Дека	да	10	Атто	а	10^{-18}

Список рекомендованої літератури:

1.Савельев Й.В. Курс общей физики. Т1.,Т2.,Т3, М.,Н.,1986.
2. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика та термодинаміка. -К.; Вища школа.1993
3.Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика. Оптика. Квантова фізика.- К.;Вища школа.1993.
4.Сивухин Д.В. Атомная и ядерная физика.Ч1.-М.: Н.1986,-416 с.
5.Сивухин Д.В. Атомная и ядерная физика.Ч2.-М.: Н.1989,-416 с.
6.Давыдов А.С. Квантовая механика. . –М.: Наука, 1972,-702 с.
7.Новиков И.И. Термодинамика. –М.: Машиностроение,1984,-592 с.
8.ДетлафА..А., Яворский Б.М. Курс физики. М.,В.Ш., 1989.,
9.Андрющенко А.И. Основы термодинамики циклов теплоенергетических установок. – М.: В.Ш.,1988. 319с.
10.Крутов В.Й., Исаев. С.Й.. Кожинов И.Д., и др. Техническая термодинамика.- М.;В.Ш.,1991.
11.Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. Справочник. -К.; Наукова думка, 1989.. 864 с.
12.Кухлинг Х. Справочник по физике. -М.;Мир,1985.-520с
13.Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы. -М.: В.Ш., 1986.-256с.
13.Бурсиан Э.В. Задачи по физике для компьютера. -М.: Просвещение, 1991,-256с.
15.Горбунова О.И., Зайцева А.М., Красников С.Н. Задачник-практикум по общей физике. Оптика. Атомная физика. -М.: Просвещение, 1977,-112 с.
16.Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. -М.: В.Ш. 1981.-496 с.
17.Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики.
18.Савельев Й.В. Сборник задач по физике.
19.Коршак Є.В., Гончаренко С.У., Н.М. Коршак. Методика розв'язування задач з фізики. Практикум.-К.; В.Ш.,,240с.
20. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. -М.: Наука,1988.-432с.
21.Очков В.Ф. «MATCAD 8 Pro- для студентов и инженеров».- М., Компьютер Прес. 1999, 380с.
22.Дьяконов В. П. Абраменкова И. В. "MATCAD 8 PRO в математике, физике и в Internet".-М.;Нолидж, 2000, 512с.
23.Хертагер.М., Партоль Х. Mathcad 2000. Полное руководство.: Пер. с нем..-К.: Изд.гр. BHV.-2000.-416с.

Навчальне видання

Михайло Євтухович Дерев'яга
Віктор Григорович Дзісь
Василь Дмитрович Мартинюк
Наталія Петрівна Тимофієва

Практичні заняття з фізики. Ч.3.

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор В.О. Дружиніна
Коректор З.В. Поліщук

Підписано до друку 2.07.02р.
Формат 29,7x42 1/4 Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний Ум. друк. арк. 4.61
Тираж 75 прим.
Зам.№ 2002-163

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх
Тел.(0432) 44-01-59