СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под редакцией
А. В. ЕФИМОВА, Б. П. ДЕМИДОВИЧА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1986

ББК 22.1
С23
УДК 51(075.8)

Коллектив авторов:

В. А. БОЛГОВ, Б. П. ДЕМИДОВИЧ, А. В. ЕФИМОВ, А. Ф. КАРАКУЛИН, С. М. КОГАН, Е. Ф. ПОРШНЕВА, А. С. ПОСПЕЛОВ, Р. Я. ШОСТАК

Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов. / Болгов В. А., Демидович Б. П., Ефимов А. В. и др. Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича.— 2-е изд.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986 г.—464 с.

Содержит задачи по линейной алгебре и аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению функций одной и нескольких переменных. Краткие теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров, позволяют использовать сборник для всех видов обучения.

Для студентов первых курсов высших технических учебных заведений.

Рецензент

кафедра специальных курсов высшей математики Московского энергетического института

С $\dfrac{1702050000—039}{053(02)\text{-}86}$ 62-86

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание настоящего сборника задач несущественно отличается от первого издания. Наиболее употребительные разделы сборника расширены за счет включения циклов новых задач. Исправлены замеченные опечатки, уточнены формулировки и ответы ряда задач. Для удобства пользования задачником по многочисленным просьбам преподавателей ответы на все задачи помещены в конце сборника, а нумерация задач, в отличие от первого издания, дана по главам, так что номер каждой задачи состоит из номера главы и порядкового номера задачи в этой главе.

Указанная работа была выполнена членами авторского коллектива Ефимовым А. В., Каракулиным А. Ф., Коганом С. М. и Поспеловым А. С.

Авторы искренне признательны всем лицам, приславшим свои замечания к первому изданию сборника, а также сотрудникам кафедры специальных курсов высшей математики МЭИ, ценные указания которых были учтены при окончательном редактировании настоящего издания.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Идея создания «Сборника задач по математике для втузов», содержащего задачи по всем разделам курса математики инженерно-технических специальностей вузов, принадлежит Б. П. Демидовичу. Однако преждевременная смерть профессора Б. П. Демидовича помешала ему осуществить эту работу. Настоящий «Сборник задач», подготовленный авторским коллективом, имеющим большой педагогический опыт работы во втузах,— воплощение в жизнь идеи Б. П. Демидовича.

Общая структура «Сборника задач» предложена редактором А. В. Ефимовым и отражает содержание программы по математике для инженерно-технических специальностей вузов, рассчитанной на 510 часов и утвержденной Учебнометодическим управлением по высшему образованию Минвуза СССР 14 мая 1979 г. При составлении «Сборника задач» нашел отражение и опыт преподавания курса математики в Московском институте электронной техники, рассчитанного на 600—700 часов.

В сборник включены задачи и примеры по всем разделам втузовского курса математики. С целью закрепления материала школьной программы в нем, кроме того, приведен ряд задач, позволяющих более углубленно повторить основные разделы анализа и векторной алгебры, изучаемые в школе.

Одной из основных особенностей настоящего сборника является включение в большинство глав цикла расчетных задач, решение которых требует использования ЭВМ.

Предлагаемая первая часть сборника «Линейная алгебра и основы математического анализа» включает те разделы математики, которые, как правило, изучаются на первом курсе. Сюда относятся векторная алгебра с элементами аналитической геометрии, линейная алгебра, а также дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных и интегральное исчисление функций одной переменной.

Каждый раздел сборника задач снабжен кратким введением, содержащим как необходимые теоретические сведения (определения, формулы, теоремы), так и большое число подробно разобранных примеров. Начало решения примеров и задач отмечено знаком ◀, а конец—знаком ▶. Указания к решениям выделяются знаком ●. К задачам, номера которых помечены соответственно одной или двумя звездочками, указания или решения даются в разделе «Ответы».

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Действительные числа. Множества. Логическая символика

1. Понятие действительного числа. Из курса математики средней школы известно, что всякое неотрицательное *действительное число* x представляется бесконечной десятичной дробью

$$[x],x_1x_2\ldots, \qquad (1)$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x и называемое *целой частью* числа x, $x_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

При этом дроби, у которых $x_n = 9$ для всех $n \geqslant n_0$ (n_0 — некоторое натуральное число), обычно исключаются из рассмотрения в силу следующих равенств:

$$[x],999\ldots = [x]+1,$$

$$[x],x_1x_2\ldots x_{n_0-1}999\ldots = [x],x_1x_2\ldots(x_{n_0-1}+1) \quad (n_0>1,\ x_{n_0-1}\neq 9).$$

Действительное число x *рационально*, т. е. представимо в виде отношения $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, в том и только в том случае, когда дробь (1) периодическая. В противном случае число x *иррационально*.

Абсолютной величиной или *модулем* действительного числа x называется неотрицательное число

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Предполагается, что правила сравнения действительных чисел, а также арифметические операции над ними известны из курса математики средней школы.

1.1. Доказать, что число

$$0{,}1010010001\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\ldots$$

иррационально. Выписать по три первых члена из последовательностей конечных десятичных дробей, приближающих это число с недостатком и с избытком.

1.2. Следующие числа представить в виде правильных рациональных дробей:

а) 1,(2); б) 3,00(3); в) 0,110(25).

1.3. Доказать, что число $\lg 5$ иррационально.

◀ Предположим, что $\lg 5$ — рациональное число, т. е.

$$\lg 5 = \frac{m}{n} =; \quad m,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда:

$$10^{\frac{m}{n}} = 5, \quad 10^m = 5^n, \quad 2^m \cdot 5^m = 5^n.$$

Но последнее равенство невозможно: число 2 входит в разложение левой части на простые множители, но не входит в аналогичное разложение для правой части, что противоречит единственности разложения целых чисел на простые множители. Поэтому исходное предположение неверно, и, следовательно, число $\lg 5$ иррационально. ▶

Доказать, что следующие числа иррациональны:

1.4. $\sqrt{3}$. **1.5.** $\sqrt[n]{p}$, p — простое число, $n > 1$.

1.6. $2+\sqrt{3}$. **1.7.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

1.8. $\log_3 p$, p — простое число.

1.9. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, если известно, что π иррационально.

В задачах 1.10—1.13 сравнить указанные числа.

1.10. $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}-2$.

◀ Предположим, что верно неравенство

$$\sqrt{2}-\sqrt{5} < \sqrt{3}-2. \tag{2}$$

Тогда:

$$\sqrt{2}+2 < \sqrt{5}+\sqrt{3},$$
$$6+4\sqrt{2} < 8+2\sqrt{15},$$
$$2\sqrt{2} < 1+\sqrt{15},$$
$$8 < 16+2\sqrt{15}.$$

Так как последнее неравенство верно, то в силу обратимости выполненных преобразований верно и исходное неравенство (2). ▶

1.11. $\log_{1/2}\frac{1}{3}$ и $\log_{1/3}\frac{1}{2}$.

1.12. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}}$ и $\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$. **1.13.** $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2}$ и 1.

Не пользуясь таблицами, доказать следующие числовые неравенства:

1.14. $\log_3 10 + 4\lg 3 > 4$. **1.15.** $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi} > 2$.

1.16. $\log_4 26 > \log_6 17$.

1.17. Доказать, что модуль действительного числа обладает следующими свойствами:

а) $|x| = \max\{x, -x\}$;

б) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ и $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;

в) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ и $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$

(*неравенства треугольника*);

г) $\sqrt{x^2} = |x|$.

Решить уравнения:

1.18. $|3x-4| = 1/2$. **1.19.** $\sqrt{x^2} + x^3 = 0$.

1.20. $|-x^2 + 2x - 3| = 1$. **1.21.** $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = 1$.

1.22. $\sqrt{(x-2)^2} = -x + 2$.

Решить неравенства:

1.23. $|x-2| \geqslant 1$. **1.24.** $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$.

1.25. $x^2 + 2\sqrt{(x+3)^2} - 10 \leqslant 0$. **1.26.** $\frac{1}{|x-1|} < 4 - x$.

1.27. $\sqrt{(x+1)^2} \leqslant -x - 1$.

2. Множества и операции над ними. Под *множеством* понимается любая совокупность объектов, называемых элементами множества.

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A (принадлежит множеству A); в противном случае пишут $a \notin A$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Запись $A \subset B$ (A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B; в этом случае множество A называется *подмножеством* множества B. Множества A и B называют *равными* ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Существуют два основных способа задания (описания) множеств.

а) Множество A определяется непосредственным перечислением всех своих элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, т. е. записывается в виде

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

б) Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T, которые обладают общим свойством α. В этом случае используется обозначение

$$A = \{x \in T \mid \alpha(x)\},$$

где запись $\alpha(x)$ означает, что элемент x обладает свойством α.

Пример 1. Описать перечислением элементов множество

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x-3)(x^2-1) = 0 \text{ и } x \geqslant 0\}.$$

◀ A есть множество всех целых неотрицательных корней уравнения $(x-3)(x^2-1) = 0$. Следовательно, $A = \{1, 3\}$. ▶

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если, в частности, A — подмножество некоторого универсального множества T, то разность $T \setminus A$ обозначается символом $\bar{A}$ и называется *дополнением* множества A (до множества T).

1.28. Установить, какая из двух записей верна:

а) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;

б) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

В задачах 1.29—1.34 указанные множества задать перечислением всех своих элементов.

1.29. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$.

1.30. $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} \leqslant 2 \text{ и } x > 0\right\}$.

1.31. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leqslant 0\}$.

1.32. $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{1}{4} \leqslant 2^x < 5\right\}$.

1.33. $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \log_{1/2} \frac{1}{x} < 2\right\}$.

1.34. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos^2 2x = 1 \text{ и } 0 < x \leqslant 2\pi\}$.

Изобразить на координатной плоскости следующие множества:

1.35. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 2 = 0\}$.

1.36. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 > 0\}$.

1.37. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 1)(y + 2) = 0\}$.

1.38. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \sqrt{2x+1} \text{ и } 2x + 1 \geqslant 0\}$.

1.39. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > 2x + 1\}$.

1.40. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2^{x+1} = y^2 + 4 \text{ и } 2^{x-1} \leqslant y\}$.

1.41. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos 2x = \cos 2y\}$.

1.42. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{x} > \frac{1}{y},\ x \neq 0,\ y \neq 0\right\}$.

1.43. Описать перечислением всех элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 20 = 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 12 = 0\}.$$

Запись $m \mid n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, означает, что число m есть делитель числа n. Описать следующие множества:

1.44. $\{x \in \mathbb{N} \mid x|8 \text{ и } x \neq 1\}$. **1.45.** $\{x \in \mathbb{Z} \mid 8|x\}$.

1.46. $\{x \in \mathbb{N} \mid x|12\} \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x|8\}$.

1.47. $\{x\in\mathbb{N}\mid 12|x\}\cap\{x\in\mathbb{N}\mid 8|x\}$.

1.48. Доказать, что:

а) равенство $A\cap B=B$ верно в том и только в том случае, когда $B\subset A$;

б) равенство $A\cup B=B$ верно в том и только в том случае, когда $A\subset B$.

1.49. Пусть $A=(-1, 2]$ и $B=[1, 4)$. Найти множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$ и изобразить их на числовой оси.

Приняв отрезок $T=[0, 1]$ за универсальное множество, найти и изобразить на числовой оси дополнения следующих множеств:

1.50. $\{0, 1\}$. 1.51. $(1/4, 1/2)$. 1.52. $(0, 1/2]$.

1.53. $\{1/4\}\cup[3/4, 1)$.

1.54. Доказать, что операция взятия дополнения обладает свойством *рефлексивности*:

$$\overline{(\overline{A})}=A,$$

а также связана с отношением включения $\subset$ и операциями $\cup$ и $\cap$ следующими *законами двойственности*:

$$\text{если } A\subset B, \text{ то } \overline{A}\supset\overline{B};$$
$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \text{ и } \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

1.55. Доказать, что операции $\cup$ и $\cap$ связаны *законами дистрибутивности*:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

Используя результаты задач 1.54 и 1.55, доказать следующие равенства:

1.56. $\overline{A\setminus B}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{A}$.

◀ Так как $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$, то левая часть доказываемого равенства принимает вид

$$\overline{(A\setminus B)}\cap\overline{(A\cap B)}=\overline{(A\setminus B)\cup(A\cap B)}=\overline{A}. \ ▶$$

1.57. $A\setminus B=A\cap\overline{B}$. 1.58. $\overline{A\setminus B}=\overline{A}\cup B$.

1.59. $A\cap(\overline{A\setminus B})=A\cap B$.

Операции $\cup$ и $\cap$ естественным образом обобщаются на случай произвольного (конечного или бесконечного) семейства множеств. Пусть, например, задано семейство множеств A_n, $n\in\mathbb{N}$. *Объединение* множеств этого семейства обозначается символом $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ и определяется как множество всех тех элементов, каждый из которых принадлежит по меньшей мере одному из множеств A_n. *Пересечение* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ определяется как множество всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A_n.

Для заданных семейств множеств A_n, $n\in\mathbb{N}$, найти $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ и $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$:

1.60. $A_n=\{x\in Z \mid -n\leqslant x\leqslant n\}$.

1.61. $A_n=\{3n-2,\ 3n-1\}$.

1.62. $A_n=\left\{1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$.

1.63. Пусть A — множество всех точек плоскости, образующих стороны некоторого треугольника, вписанного в заданную окружность. Описать (словесно) объединение и пересечение всех таких множеств, если:

а) треугольники произвольные;

б) треугольники правильные;

в) треугольники прямоугольные.

Множество X называется *счетным*, если может быть установлено взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и элементами множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел.

Пример 2. Показать, что множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел счетно.

◀ Установим взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и натуральными числами, например, упорядочив множество $\mathbb{Z}$ следующим образом:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots,$$

а затем всякому целому числу поставив в соответствие его порядковый номер в этой последовательности. ▶

Доказать, что следующие множества счетны:

1.64. $\{n\in\mathbb{N} \mid n=2k,\ k\in\mathbb{N}\}$.

1.65. $\{n\in\mathbb{N} \mid n=k^2,\ k\in\mathbb{N}\}$.

1.66. $\{n\in\mathbb{N} \mid n=2^k,\ k\in\mathbb{N}\}$.

1.67. Доказать, что если множество X счетно и $A\subset X$ — его бесконечное подмножество, то множество A также счетно. Используя этот результат, доказать, что множество

$$\{n\in Z \mid n=k^2-k+1,\ k\in\mathbb{N}\}$$

счетно.

1.68. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — счетные множества. Доказать, что их объединение $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ — счетное множество.

● Пусть $X_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,l}, \ldots\}$. Тогда элементы множества $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ можно записать в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{l}
x_{1,1},\ x_{1,2},\ \ldots,\ x_{1,l},\ \ldots;\\
x_{2,1},\ x_{2,2},\ \ldots,\ x_{2,l},\ \ldots,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
x_{n,1},\ x_{n,2},\ \ldots,\ x_{n,l},\ \ldots\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

Для того чтобы доказать счетность множества $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, достаточно теперь занумеровать каким-либо образом все элементы этой таблицы.

Используя результат задачи 1.68, доказать, что следующие множества счетны:

1.69. $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{m}{n} \text{ для некоторых } m, n \neq 0 \text{ из } \mathbb{Z}\right\}$ — множество всех рациональных чисел.

1.70. Множество всех точек плоскости с рациональными координатами.

1.71. Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами.

3. Верхние и нижние грани. Пусть X — произвольное непустое множество действительных чисел. Число $M = \max X$ называется *наибольшим* (*максимальным*) элементом множества X, если $M \in X$ и для всякого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant M$. Аналогично определяется понятие *наименьшего* (*минимального*) элемента $m = \min X$ множества X.

Множество X называется *ограниченным сверху*, если существует действительное число a такое, что $x \leqslant a$ для всех $x \in X$. Всякое число, обладающее этим свойством, называется *верхней гранью* множества X. Для заданного ограниченного сверху множества X множество всех его верхних граней имеет наименьший элемент, который называется *точной верхней гранью* множества X и обозначается символом $\sup X$. Очевидно, $\sup X = \max X$ тогда и только тогда, когда $\sup X \in X$.

Аналогично определяются понятия *ограниченного снизу* множества, *нижней грани* и *точной нижней грани* множества X; последняя обозначается символом $\inf X$.

Множество X, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Пример 3. Найти точные верхнюю и нижнюю грани множества $[0, 1)$.

◀ Это множество не имеет наибольшего элемента, так как для всякого $x \in [0, 1)$ найдется $y \in [0, 1)$ такое, что $y > x$. Множество верхних граней для полуинтервала $[0, 1)$ — это множество $[1, +\infty)$ с наименьшим элементом, равным 1. Поэтому

$$\sup [0, 1) = 1,$$

причем $1 \notin [0, 1)$.

С другой стороны, наименьший элемент для рассматриваемого множества $[0, 1)$ существует и равен 0. Множество нижних граней — это множество $(-\infty, 0]$ с наибольшим элементом, равным нулю, который и является точной нижней гранью полуинтервала $[0, 1)$. Таким образом,

$$\min [0, 1) = \inf [0, 1) = 0. \blacktriangleright$$

1.72. Доказать, что приведенное выше определение точной верхней грани эквивалентно следующему:

Число M есть точная верхняя грань множества X в том и только в том случае, если:

1) $x \leqslant M$ для всех $x \in X$;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x \in X$ такой, что $x > M - \varepsilon$.

1.73. Пусть $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$.

а) Указать наименьший и наибольший элементы этого множества, если они существуют.

б) Каковы множества верхних и нижних граней для множества X? Найти $\sup X$ и $\inf X$.

Для следующих множеств найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$ и $\inf X$, если они существуют:

1.74. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. **1.75.** $X = [-1, 1]$.

1.76. $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x < 0\}$. **1.77.** $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

1.78. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{N} \text{ и } m < n\right\}$.

1.79. Пусть X — множество всех рациональных чисел, удовлетворяющих условию $r^2 < 2$. Показать, что множество X не имеет наибольшего элемента. Найти $\sup X$.

1.80. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — произвольное ограниченное множество. Доказать, что множество $-X = \{x \mid -x \in X\}$ также ограничено и справедливы равенства

$$\sup(-X) = -\inf X, \quad \inf(-X) = -\sup X.$$

1.81. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ — произвольные ограниченные сверху множества. Доказать, что множество

$$X + Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

ограничено сверху и

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y.$$

1.82. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — ограниченное сверху и $Y \subset \mathbb{R}$ — ограниченное снизу множества. Доказать, что множество

$$X - Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

ограничено сверху и

$$\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y.$$

4. Логическая символика. При записи математических рассуждений целесообразно применять экономную символику, используемую в логике. Мы укажем здесь лишь несколько наиболее простых и употребительных символов.

Пусть α, β, ...—некоторые *высказывания* или *утверждения*, т. е. повествовательные предложения, относительно каждого из которых можно сказать истинно оно или ложно.

Запись $\overline{\alpha}$ означает «не α», т. е. *отрицание* утверждения α.

Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: «из утверждения α следует утверждение β» ($\Rightarrow$—символ *импликации*).

Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает: «утверждение α эквивалентно утверждению β», т. е. из α следует β и из β следует α ($\Leftrightarrow$—символ *эквивалентности*).

Запись $\alpha \wedge \beta$ означает «α и β» ($\wedge$—символ *конъюнкции*).

Запись $\alpha \vee \beta$ означает «α или β» ($\vee$—символ *дизъюнкции*).

Запись

$$\forall x \in X \ \alpha(x)$$

означает: «для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$» ($\forall$—*квантор всеобщности*).

Запись

$$\exists x \in X \ \alpha(x)$$

означает: «существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$» ($\exists$—*квантор существования*).

Если элемент $x \in X$, для которого истинно утверждение $\alpha(x)$, не только существует, но и единствен, то пишут:

$$\exists! \ x \in X \ \alpha(x).$$

Пример 4. Используя логическую символику, записать утверждение: «число M есть точная верхняя грань множества X».

◀ Утверждение $M = \sup x$ означает, что выполнены условия;

а) $\forall x \in X \ (x \leqslant M)$ (т. е. M—верхняя грань множества X);

б) $\forall A \in \mathbb{R} \ (\forall x \in X \ (x \leqslant A) \Rightarrow A \geqslant M)$ (т. е. M—наименьшая из верхних граней множества X).

Условие б) может быть записано также в следующей эквивалентной форме (см. задачу 1.72):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X \ (x > M - \varepsilon). \ ▶$$

Пример 5. Используя логическую символику, сформулировать принцип математической индукции.

◀ Пусть α—некоторое утверждение, имеющее смысл для всех $n \in \mathbb{N}$. Введем множество

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n)\},$$

т. е. множество всех тех натуральных чисел, для которых утверждение α истинно. Тогда принцип математической индукции можно сформулировать следующим образом:

$$((1 \in A) \wedge (n \in A \Rightarrow (n+1) \in A)) \Rightarrow A = \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Так как запись $\alpha(n)$ означает, что утверждение α истинно для числа $n \in \mathbb{N}$, то утверждение (3) можно записать и иначе:

$$(\alpha(1) \wedge (\alpha(n) \Rightarrow \alpha(n+1))) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \alpha(n). \ ▶$$

Пример 6. Записать отрицания высказываний: $\forall x \in X \alpha(x)$ и $\exists x \in X \alpha(X)$.

◀ Отрицание высказывания $\forall x \in X \alpha(x)$ имеет вид $\exists x \in X \overline{\alpha(x)}$ (существует элемент $x \in X$ такой, для которого утверждение $\alpha(x)$ ложно). Иначе говоря, для любого утверждения α истинно следующее высказывание:

$$\overline{\forall x \in X \alpha(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X \overline{\alpha(x)}.$$

Аналогично

$$\overline{\exists x \in X \alpha(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X \overline{\alpha(x)}. \ ▶$$

Пример 7. Используя логические символы, записать утверждение: «функция $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, непрерывна в точке $a \in X$», а также его отрицание.

◀ Исходное утверждение:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta \, \forall x \in X \, (|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon)$$

(для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ такое, что для любого числа $x \in X$, удовлетворяющего условию $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$).

Отрицание этого утверждения:

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta \, \exists x \in X \, (|x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| \geqslant \varepsilon)$$

(существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого δ найдется число $x \in X$, удовлетворяющее условиям $|x-a| < \delta$ и $|f(x)-f(a)| \geqslant \varepsilon$). ▶

Прочитать приведенные ниже высказывания, выяснить их смысл и установить, истинны они или ложны (символами x, y, z, a, b, c всюду, где это специально не оговаривается, обозначены действительные числа).

1.83. а) $\forall x \exists y (x+y=3)$; б) $\exists y \forall x (x+y=3)$;
в) $\exists x, y (x+y=3)$; г) $\forall x, y (x+y=3)$.

1.84. $\exists x, y (x > y > 0 \wedge x+y=0)$.

1.85. $\forall x, y (x < y) \Leftrightarrow \exists z (x < z < y)$.

1.86. $\forall x, y (x^2 \neq 2y^2)$.

1.87. $\forall x (x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0)$.

1.88. $\forall x (x > 2 \wedge \overline{x > 3} \Leftrightarrow 2 < x \leqslant 3)$.

1.89. $\exists x (\sqrt{x^2} < x)$.

1.90. а) $\forall a, b, c (\exists x (ax^2+bx+c=0) \Leftrightarrow b^2-4ac \geqslant 0)$;
б) $\forall a, b, c (\forall x (ax^2+bx+c > 0) \Leftrightarrow b^2-4ac < 0 \wedge a > 0)$.

1.91. а) $\forall b \exists a \forall x (x^2+ax+b > 0)$;
б) $\exists b \forall a \exists x (x^2+ax+b=0)$;
в) $\exists a \forall b \exists x (x^2+ax+b=0)$.

Установить точный смысл приведенных ниже высказываний и записать их с использованием логической символики, сформулировать и записать их отрицания.

1.92. а) Число x_0 есть решение уравнения $f(x)=0$.
б) Число x_0 есть единственное решение уравнения $f(x)=0$.

в) Уравнение $f(x)=0$ имеет единственное действительное решение.

1.93. а) Множество $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху.

б) Число m есть наименьший элемент множества X.

в) Множество X имеет наименьший элемент.

1.94. а) Число $m \in Z$ является делителем числа $n \in Z$, или в краткой записи: $m \mid n$.

б) Если число $n \in Z$ делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.

в) Число $p \in \mathbb{N}$ простое.

§ 2. Функции действительной переменной

1. Понятие функции. Пусть D — произвольное множество действительных чисел. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f(x)$, то говорят, что на множестве D определена *числовая функция* f. Множество D называется *областью определения*, а множество

$$E=\{y \in \mathbb{R} \mid y=f(x),\ x \in D\}$$

— *множеством значений* числовой функции f. Символически функция записывается в виде $f\colon D \longrightarrow E$ или $y=f(x)$.

Наиболее распространенным является аналитический способ задания функции. Он состоит в том, что с помощью формулы конкретно устанавливается алгоритм вычисления значений функции $y=f(x)$ для каждого из значений *аргумента* x. В этом случае область определения функции обычно не указывают, понимая под нею то множество значений аргумента x, для которого данная формула имеет смысл (*естественная* область определения функции).

Пример 1. Найти область определения и множество значений функции $f(x)=1/\sqrt{1-x^2}$.

◄ Естественной областью определения этой функции является множество $D=\{x \mid |x|<1\}=(-1,\ 1)$, а множеством значений — множество $E=\{y \mid y \geqslant 1\}=[1,\ +\infty)$. ►

Пусть функция $f\colon D \longrightarrow E$ такова, что для любых $x_1,\ x_2 \in D$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае всякому числу $y \in E$ может быть поставлено в соответствие некоторое вполне определенное число $x \in D$ такое, что $f(x)=y$; тем самым определена новая функция $f^{-1}\colon E \longrightarrow D$, называемая *обратной* к заданной функции f.

Пусть заданы функции $f\colon X \longrightarrow Y$ и $g\colon Y \longrightarrow Z$. Их *композицией* (или *сложной функцией*, полученной последовательным применением функций f и g) называется функция $h=g \circ f\colon X \longrightarrow Z$, определяемая равенством

$$h(x)=g(f(x)),\quad x \in X.$$

1.95. Найти функциональную зависимость радиуса R цилиндра от его высоты H при данном объеме $V=1$.

1.96. Написать выражение для объема V конуса как функции его боковой поверхности S при данной образующей $l=2$.

1.97. Написать выражение для площади S равнобочной трапеции с основаниями $a=2$ и $b=1$ как функции угла α при основании a.

1.98. С момента покоя t_0 тело движется с постоянным ускорением a. Найти зависимость скорости и пройденного пути от времени движения. Как связаны между собой пройденный путь и скорость в момент времени t?

1.99. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 1) с основаниями a и b и высотой h проведена прямая MN, перпендикулярная основаниям и отстоящая от вершины A на расстояние $|AM|=x$. Выразить площадь S фигуры $ABNM$ как функцию переменной x.

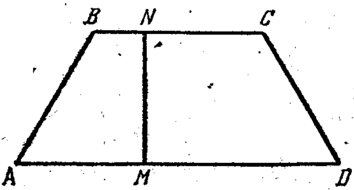


Рис. 1

1.100. В шар радиуса R вписан цилиндр. Написать функциональную зависимость объема V цилиндра от его высоты H. Найти область определения этой функции.

1.101. В шар радиуса R вписан прямой круговой конус. Написать функциональную зависимость площади боковой поверхности S конуса:

а) от его образующей l;

б) от угла α при вершине конуса в его осевом сечении;

в) от угла β при основании конуса.

Найти области определения каждой из полученных функций.

1.102. Найти $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$, если $f(x)=\lg x^2$.

1.103. Найти $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, если

$$f(x)=\begin{cases} 1+x, & -\infty<x\leqslant 0, \\ 2^x, & 0<x<+\infty. \end{cases}$$

1.104. Найти $f(1)$, $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a-1)$, $2f(2a)$, если $f(x)=x^3-1$.

1.105. Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$.

Найти естественную область определения D и множество значений E каждой из следующих функций:

1.106. $y=\ln(x+3)$. **1.107.** $y=\sqrt{5-2x}$.

1.108. $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$. **1.109.** $y=\arccos\frac{1-2x}{4}$.

1.110. $y=\ln(1-2\cos x)$. **1.111.** $y=\sqrt{1-|x|}$.

1.112. $y=\lg(5x-x^2-6)$. **1.113.** $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$.

1.114. $y=2^{\arccos(1-x)}$. **1.115.** $y=e^{x^2-2}$.

Найти множество G, на которое данная функция отображает множество F:

1.116. $y=x^2$, $F=[-1, 2]$.

1.117. $y=|x|$, $F=\{x \mid 1\leqslant|x|\leqslant 2\}$.

1.118. $y=\frac{x}{2x-1}$, $F=(0, 1)$.

1.119. $y=\sqrt{x-x^2}$, $F=(0, 1)$.

1.120. $y=\log_3 x$, $F=(3, 27)$.

1.121. $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $F=[0, 1/2)$.

Найти *множество нулей* $D_0=\{x \mid f(x)=0\}$, *область положительности* $D_+=\{x \mid f(x)>0\}$ и *область отрицательности* $D_-=\{x \mid f(x)<0\}$ для каждой из заданных функций:

1.122. $f(x)=1+x$. **1.123.** $f(x)=2+x-x^2$.

1.124. $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$. **1.125.** $f(x)=1-e^{\frac{1}{x}-1}$.

Показать, что функция $y=f(x)$ удовлетворяет соответствующему функциональному уравнению:

1.126. $f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=0$, $f(x)=kx+b$.

1.127. $f(x)+f(x+1)=f(x(x+1))$, $f(x)=\log_a x$.

1.128. $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$, $f(x)=a^x$.

1.129. $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$, $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

В задачах 1.130—1.133 определить функцию $y=f(x)$, удовлетворяющую заданному условию.

1.130. $f(x+1)=x^2-3x+2$.

◀ Пусть $x+1=t$, т. е. $x=t-1$. Тогда $x^2-3x+2=t^2-5t+6$, поэтому

$$f(t)=f(x+1)=x^2-3x+2=t^2-5t+6. \text{ ▶}$$

1.131. $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$.

1.132. $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$.

1.133. $f(x_1+x_2)=\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2$.

Функция $f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если ее область определения симметрична относительно точки $x=0$ и $f(-x)=f(x)$ ($f(-x)=-f(x)$).

Какие из указанных в задачах 1.134—1.139 функций четные, какие нечетные, а какие не являются ни четными, ни нечетными?

1.134. $f(x)=x^4+5x^2$. **1.135.** $f(x)=x^2+x$.

1.136. $f(x)=\frac{x}{2^x-1}$. **1.137.** $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$.

1.138. $f(x)=\sin x-\cos x$. **1.139.** $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

1.140. Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной и нечетной — нечетная функция.

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T (период функции) такое, что $\forall x\in D\ (f(x+T)=f(x))$.

Выяснить, какие из заданных функций являются периодическими, и определить их наименьший период T:

1.141. $f(x)=5\cos 7x$. **1.142.** $f(x)=\cos^2 2x$.

1.143. $f(x)=x\sin x$. **1.144.** $f(x)=\cos x+\sin(\sqrt{3}x)$.

1.145. $f(x)=\sin x^2$. **1.146.** $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

Установить, какие из указанных ниже функций имеют обратные, найти соответствующие обратные функции и их области определения:

1.147. $y=ax+b$. **1.148.** $y=(x-1)^3$. **1.149.** $y=\cos 2x$.

1.150. $y=\ln 2x$. **1.151.** $y=2^{\frac{x}{2}}$. **1.152.** $y=\frac{1-x}{1+x}$.

1.153. $y=x^2+1$.

◀ Для функции $y=x^2+1$ естественная область определения есть вся числовая прямая $D=(-\infty, +\infty)$, а множество значений — луч $E=[1, +\infty)$. Так как для любого $a\in E$ уравнение $x^2+1=a$ имеет два различных решения $x_1(a)=\sqrt{a-1}$ и $x_2(a)=-\sqrt{a-1}$, то данная функция не имеет обратной. Однако каждая из функций

$$y_1=x^2+1,\ D_1=[0, +\infty),\quad \text{и}\quad y_2=x^2+1,\ D_2=(-\infty, 0],$$

имеет обратную, равную соответственно

$$x_1(y)=\sqrt{y-1}\ \text{и}\ x_2(y)=-\sqrt{y-1}.\ ▶$$

Найти обратную функцию и область ее определения, если исходная функция задана на указанном промежутке:

1.154. $y=x^2-1$: а) $x\in(-\infty, -1/2]$; б) $x\in[1/2, +\infty)$.

1.155. $y=\sin x$: а) $x\in[-\pi/2, \pi/2]$; б) $x\in[\pi/2, 3\pi/2]$.

1.156. $y=\begin{cases} x, & x\in(-\infty, 0], \\ 2x, & x\in(0, +\infty). \end{cases}$

1.157. $y=\cos^2 x$: а) $x\in[0, \pi/2]$; б) $x\in[\pi/2, \pi]$; в) $x\in[\pi, 3\pi/2]$.

Найти композиции $f\circ g$ и $g\circ f$ следующих функций:

1.158. $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$.

◀ Имеем:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2=x$$

и

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=\sqrt{x^2}=|x|. \ ▶$$

1.159. $f(x)=1-x$, $g(x)=x^2$.

1.160. $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$.

1.161. $f(x)=\sin x$, $x\in[-\pi, \pi]$, $g(x)=\arcsin x$.

1.162. $f(x)=\begin{cases}0, x\in(-\infty, 0],\\ x, x\in(0, +\infty),\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty, 0],\\ -x^2, & x\in(0, +\infty).\end{cases}$

1.163. Найти $f\circ f\circ f$, если:

а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Элементарные функции и их графики. Следующие функции называются *основными элементарными*.

1. *Степенная* функция: $y=x^a$, $a\in\mathbb{R}$.
2. *Показательная* функция: $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.
3. *Логарифмическая* функция: $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.
4. *Тригонометрические* функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.
5. *Обратные тригонометрические* функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Элементарной называется всякая функция, которая может быть получена из конечного числа основных элементарных функций с помощью арифметических операций и операции композиции.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество

$$\Gamma=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in D, y=f(x)\},$$

где $\mathbb{R}^2$ — множество всех точек плоскости.

На плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат Oxy график функции представляется множеством точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют соотношению $y=f(x)$ (графическое изображение функции).

При построении графиков часто используются следующие простые геометрические рассуждения. Если Γ — график функции $y=f(x)$, то:

1) график функции $y_1=-f(x)$ есть зеркальное отображение Γ относительно оси Ox;

2) график функции $y_2=f(-x)$ — зеркальное отображение Γ относительно оси Oy;

3) график функции $y_3=f(x-a)$ — смещение Γ вдоль оси Ox на величину a;

4) график функции $y_4=b+f(x)$ — смещение Γ вдоль оси Oy на величину b;

5) график функции $y_5=f(ax)$, $a>0$, $a\neq 1$, — сжатие в a раз (при $a>1$) или растяжение в $1/a$ раз (при $a<1$) Γ вдоль оси Ox;

6) график функции $y_6=bf(x)$, $b>0$, $b\neq 1$, — растяжение в b раз (при $b>1$) или сжатие в $1/b$ раз (при $b<1$) Г вдоль оси Oy.

В некоторых случаях при построении графика функции целесообразно разбить ее область определения на несколько непересекающихся промежутков и последовательно строить график на каждом из них.

Пример 2. Построить график функции $y=|x|+|x^2-1|$.

◀ Раскрывая модули, можем записать:

$$y=\begin{cases} x^2-x-1, & x\in(-\infty, -1],\\ -x^2-x+1, & x\in(-1, 0],\\ -x^2+x+1, & x\in(0, 1],\\ x^2+x-1, & x\in(1, +\infty).\end{cases}$$

График заданной функции есть объединение графиков (парабол), представляющих эту функцию на каждом из четырех промежутков (рис. 2). ▶

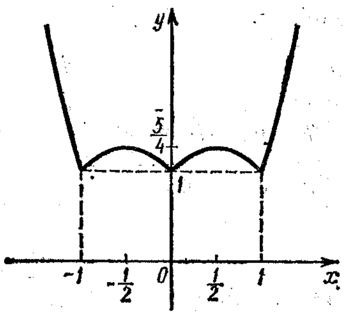


Рис. 2

Следующие элементарные функции записать в виде композиции основных элементарных функций:

1.164. $f(x)=|x|$.

1.165. $f(x)=\sin(\cos\sqrt{x})$.

1.166. $f(x)=2^{\sin x^2}$.

1.167. $f(x)=\arcsin\left(e^{\sqrt[3]{x}}\right)$.

1.168. $f(x)=\sin(2^{x^2})$.

1.169. $f(x)=1/\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\log_3 x}$.

Для каждой из следующих функций найти ее график:

1.170. $y=\sqrt{\ln\sin x}$.

◀ Естественная область определения заданной функции есть множество

$$D=\{x\mid \sin x=1\}=\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Поэтому

$$\Gamma=\left\{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ 0\right)\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}. ▶$$

1.171. $y=x+\sqrt{1-|\operatorname{cosec} x|}$. **1.172.** $y=\sqrt{-|x^2-1|}+2$.

1.173. $y=\sqrt{\cos x-1}+\frac{x}{2}$.

1.174. $y=1+\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\sin x}$.

Построить графики следующих элементарных функций:

1.175. $y=kx+b$, если:

а) $k=2$, $b=0$; б) $k=0$, $b=-2$;

в) $k=-1$, $b=-1/3$.

1.176. $y=y_0+a(x-x_0)^2$, если:

а) $a=1$, $x_0=0$, $y_0=-1$;

б) $a=2$, $x_0=1$, $y_0=0$;

в) $a=-1/2$, $x_0=-2$, $y_0=3/2$.

1.177. $y=y_0+\frac{k}{x-x_0}$, если:

а) $k=1$, $x_0=1$, $y_0=-1$;

б) $k=-2$, $x_0=-1$, $y_0=-1/2$.

1.178. $y=a\sin(kx+\alpha)$, если:

а) $a=1$, $k=2$, $\alpha=\pi/3$;

б) $a=-2$, $k=1/2$, $\alpha=-\pi/3$.

1.179. $y=a\operatorname{tg}(kx+\alpha)$, если:

а) $a=3$, $k=1/3$, $\alpha=\pi/4$;

б) $a=-1/2$, $k=2$, $\alpha=3\pi/2$.

1.180. $y=p\arcsin(x+q)$, если:

а) $p=4$, $q=-1$; б) $p=-2/3$, $q=1/2$.

1.181. $y=p\operatorname{arctg}(x+q)$, если:

а) $p=-3$, $q=5/2$; б) $p=2/5$, $q=-6$.

1.182. $y=a^{kx+b}$, если:

а) $a=2$, $k=-1$; $b=1$;

б) $a=1/2$, $k=2$, $b=-2$.

1.183. $y=\log_a(kx+b)$, если:

а) $a=10$, $k=10$, $b=-1$;

б) $a=1/10$, $k=1/2$, $b=2$.

1.184. $y=|2-x|+|2+x|$. 1.185. $y=x^2+x-|x|$.

1.186. $y=x^2-6|x|+9$. 1.187. $y=|6x^2+x|-1$.

1.188. $y=(x^2+2x)\frac{|x-1|}{x-1}$. 1.189. $y=x-1-\sqrt{(x-1)^2}$.

1.190. $y=\left|\frac{2x-3}{x+2}\right|$. 1.191. $y=\frac{|x|-1}{|x+2|}$.

1.192. $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$

1.193. $y=[x]$, где $[x]$ — целая часть x.

1.194. $y=\{x\}$, где $\{x\}=x-[x]$ — дробная часть x.

1.195. $y=2^{|x|}-1$. 1.196. $y=(1/3)^{|x+1|}+2$.

1.197. $y=\log_{1/2}|x-3|$. 1.198. $y=|\log_2(x+1)|$.

1.199. $y=\arcsin\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1.200. $y=\arccos(\cos 3x)$.

1.201. $y=\cos x+|\sin x|$. 1.202. $y=|\operatorname{arctg}(x-1)|$.

1.203. $y=x\operatorname{sgn}(\cos x)$ 1.204. $y=\left|\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

1.205. $y=\sin^2\frac{x}{2}$. **1.206.** $y=\sin\left(\arcsin\frac{x+2}{5}\right)$.

На плоскости Oxy изобразить множества точек, координаты которых удовлетворяют заданным условиям:

1.207. $xy=0$. **1.208.** $|y|=|x^2-2|x|-3|$.

1.209. $|x|+|y|=1$. **1.210.** $|x+y|+|x-y|=1$.

1.211. $||x|-|y||=1$.

1.212. $|2y-1|+|2y+1|+\frac{4}{\sqrt{3}}|x|=4$.

§ 3. Предел последовательности действительных чисел

1. Понятие последовательности. *Последовательностью* действительных чисел называется функция $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$, определенная на множестве всех натуральных чисел. Число $f(n)$ называется n-м членом последовательности и обозначается символом x_n, а формула $x_n=f(n)$ называется *формулой общего члена* последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Написать первые пять членов последовательности:

1.213. $x_n=1+(-1)^n\frac{1}{n}$. **1.214.** $x_n=n(1-(-1)^n)$.

1.215. $x_n=\frac{3n+5}{2n-3}$. **1.216.** $x_n=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n$.

Написать формулу общего члена последовательности:

1.217. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **1.218.** $0, 2, 0, 2, \ldots$

1.219. $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots$

1.220. $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$

1.221. $-3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \ldots$

1.222. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \ldots$

В задачах 1.223—1.228 требуется найти наибольший (наименьший) член ограниченной сверху (снизу) последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.223. $x_n=6n-n^2-5$. **1.224.** $x_n=e^{10n-n^2-24}$.

1.225. $x_n=\frac{\sqrt{n}}{9+n}$. **1.226.** $x_n=3n^2-10n-14$.

1.227. $x_n=2n+\frac{512}{n^2}$. **1.228.** $x_n=-\frac{n^2}{2^n}$.

2. Предел последовательности. Число a называется *пределом* последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$. При этом сама последовательность называется *сходящейся*.

Критерий Коши. *Для того чтобы последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_{n+p}-x_n| < \varepsilon$ для любого $p\in\mathbb{N}$.*

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется *бесконечно большой* (сходящейся к бесконечности), что формально записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, если для любого числа $E > 0$ существует номер $N(E)$ такой, что при $n > N(E)$ выполняется неравенство $|x_n| > E$. Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены последовательности положительны (отрицательны), то используется запись

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty \qquad \left(\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty\right).$$

Число a называется *предельной точкой* последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное число членов этой последовательности, удовлетворяющих условию $|x_n-a| < \varepsilon$.

Принцип Больцано—Вейерштрасса. *Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.*

Наибольшая (наименьшая) из предельных точек последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется *верхним* (*нижним*) пределом этой последовательности и обозначается символом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ $\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\right)$.

1.229. Используя логическую символику, записать следующие высказывания, а также их отрицания:

а) последовательность ограничена;

б) последовательность монотонно возрастает;

в) число a есть предел последовательности;

г) последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно большая;

д) число a есть предельная точка последовательности.

1.230. Найти $a=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и определить номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|x_n-a| < \varepsilon$ при всех $n > N(\varepsilon)$, если:

а) $x_n=0,\underbrace{33\ldots3}_{n}$, $\varepsilon=0,001$; б) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $\varepsilon=0,005$;

в) $x_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}$, $\varepsilon=0,001$; г) $x_n=\dfrac{5n^2+1}{7n^2-3}$, $\varepsilon=0,005$.

Вычислить пределы:

1.231. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{3n}$. **1.232.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{7-9n}$.

1.233. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{2n^3}$. **1.234.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$.

1.235. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95n^3+39n}$.

1.236. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+7}-\frac{1+2n^3}{2+5n^3}\right)$.

1.237. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4+3n+1}}{n-1}$. **1.238.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$.

1.239. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-2})$. **1.240.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

1.241. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

1.242. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$. **1.243.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n^2)}{n-1}$.

1.244. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

1.245. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{5^n}\right)$.

1.246. Доказать, что если последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно малая и $\forall n\in\mathbb{N}\,(x_n\neq 0)$, то последовательность $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно большая.

Установить, какие из заданных последовательностей являются бесконечно большими:

1.247. $x_n=2^{\sqrt{n}}$. **1.248.** $x_n=n^{(-1)^n}$.

1.249. $x_n=n\sin\frac{\pi n}{2}$. **1.250.** $x_n=\lg(\lg n)$, $n\geqslant 2$.

Найти все предельные точки последовательности:

1.251. $x_n=\frac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$. **1.252.** $x_n=\cos\frac{\pi n}{4}$.

1.253. $x_n=\arcsin\frac{(-1)^n}{2}$.

1.254. Доказать:

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

Для каждой из следующих последовательностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$:

1.255. $x_n=1+\frac{1}{n}$. **1.256.** $x_n=\frac{n+1}{n}\cos^2\frac{\pi n}{4}$.

1.257. $x_n=(-1)^n(2n+1)$.

1.258. $x_n=\frac{n+2}{n-2}\sin\frac{\pi n}{3}$, $n\geqslant 2$.

1.259. $x_n=\frac{2+(-1)^n}{2}-\frac{1}{n}$.

1.260. Доказать, что равенство $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ является необходимым и достаточным условием существования предела последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

§ 4. Предел функции. Непрерывность

1. Предел функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве D. Число a называют *пределом функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого $x\in D$ из условия $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ следует неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$.

Критерий Коши. *Для того чтобы функция $y=f(x)$ имела предел в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовало $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, как только $|x'-x_0|<\delta(\varepsilon)$ и $|x''-x_0|<\delta(\varepsilon)$.*

Говорят, что число a есть *предел функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $A(\varepsilon)>0$ такое, что $|f(x)-a|<\varepsilon$, как только $|x|>A(\varepsilon)$.

В дальнейшем используются следующие замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e, \tag{2}$$

где $e=2{,}71828\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

Наряду с введенным выше понятием предела функции используют также следующее понятие *одностороннего* предела. Число a называют *пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0 справа (слева)* и пишут $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=a$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a\right)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что из условия $0<x-x_0<\delta(\varepsilon)$ $(-\delta(\varepsilon)<x-x_0<0)$ следует $|f(x)-a|<\varepsilon$. Аналогично вводится понятие одностороннего предела на бесконечности $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right.$ и $\left.\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)$.

В задачах 1.261—1.263, пользуясь только определением предела функции, доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001
$\delta(\varepsilon)$			

1.261. $f(x)=x^2$, $x_0=2$, $a=4$.
1.262. $f(x)=1/x$, $x_0=1$, $a=1$.
1.263. $f(x)=\lg x$, $x_0=1$, $a=0$.

Используя логическую символику, записать следующие утверждения:

1.264. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$. 1.265. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$.

1.266. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$. 1.267. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

1.268. $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=0$. 1.269. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=2$.

1.270. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$. 1.271. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty$.

Вычислить пределы следующих рациональных выражений:

1.272. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$. 1.273. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3}{x^2-3}$.

1.274. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x}{|x+3|}$. 1.275. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2+1}$.

1.276. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$. 1.277. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

1.278. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$; $m,\ n\in\mathbb{N}$. 1.279. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

1.280. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. 1.281. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

1.282. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$. 1.283. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

1.284. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)^5+(x+2)^5+\ldots+(x+n)^5}{x^5+n^5}$, $n\in\mathbb{N}$.

1.285. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$.

1.286. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$.

1.287. Доказать, что если $P_n(x)=a_0x^n+\ldots+a_n$, $Q_m(x)=b_0x^m+\ldots+b_m$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0 & \text{при } n<m,\\ a_0/b_0 & \text{при } n=m,\\ \infty & \text{при } n>m.\end{cases}$$

При вычислении пределов, содержащих иррациональные выражения, часто используются следующие приемы: а) введение новой переменной для получения рационального выражения; б) перевод иррациональности из знаменателя в числитель или наоборот.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$.

◀ Пусть $t=\sqrt[4]{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}=\lim_{t\to 3}\frac{3-t}{9-t^2}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{3+t}=\frac{1}{6}.\ ▶$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})$.

◀ $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-7})(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7})}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{14}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2-7}}=0.\ ▶$$

Вычислить пределы:

1.288. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$. **1.289.** $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

1.290. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

1.291. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$, $x>0$.

1.292. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. **1.293.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sqrt{1+x}-1|}{x^2}$.

1.294. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}$.

1.295. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$. **1.296.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$; $m, n\in\mathbb{N}$.

1.297. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$. **1.298.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$.

1.299. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-a}-\sqrt{x})$.

1.300. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

1.301. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x)$.

1.302. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$.

Используя замечательный предел (1), вычислить:

1.303. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$. **1.304.** $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x}$.

1.305. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} \pi x$. 1.306. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3 \arcsin x}{4x}$.

1.307. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$. 1.308. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$, $\alpha \neq \beta$.

1.309. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right)$. 1.310. $\lim\limits_{x\to \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \sin \frac{x-\alpha}{2}$.

1.311. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi - 4x}$. 1.312. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.

1.313. $\lim\limits_{\alpha\to +0} \frac{\sin \alpha^n}{\sin^m \alpha}$, $n, m \in Z$.

1.314. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{\alpha^3}$.

1.315. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$. 1.316. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1+\cos 5x}{1-\cos 4x}$.

Доказать следующие соотношения:

1.317**. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$.

1.318*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

1.319*. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$.

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \infty$, используется замечательный предел (2).

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

◀ Имеем

$$\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x} = \left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{3x} = \left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}\left(\frac{-2}{2+x}\cdot 3x\right)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}} = \lim_{t=\frac{-2}{2+x}\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{2+x}\cdot 3x = -6,$$

то

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{2+x}\right)^{2x} = e^{-6}$$

(здесь использована непрерывность композиции непрерывных функций). ▶

Используя замечательный предел (2), а также результаты задач 1.317—1.319, вычислить пределы:

1.320. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$. **1.321.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

1.322. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$. **1.323.** $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{3/x}$.

1.324. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(2+x)-\ln x)$. **1.325.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

1.326. $\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{1/x}-1)$. **1.327.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^x-a}{x-1}$.

1.328. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log_a x-1}{x-a}$. **1.329.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

1.330. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin x}$. **1.331.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

1.332. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{1/x}$. **1.333.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

1.334. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ в том и только в том случае, когда для любой последовательности аргументов $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ значений функции сходится к a.

Используя результат задачи 1.334, доказать, что для следующих функций не существует $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$:

1.335. $f(x)=\cos x$, $x_0=\infty$. **1.336.** $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$.

1.337. $f(x)=x-[x]$, $x_0=\infty$.

Найти односторонние пределы:

1.338. $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x-3}{|x-3|}$. **1.339.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{2+x}{4-x^2}$.

1.340. $\lim\limits_{x\to\pm 0}(2+x)^{\frac{1}{x}}$. **1.341.** $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}7^{\frac{1}{2-x}}$.

1.342. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x$. **1.343.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[1/x]$.

1.344. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}\pm 0}\dfrac{|\operatorname{tg}(4x-\pi)|}{2x-\dfrac{\pi}{2}}$. **1.345.** $\lim\limits_{x\to 2\pi\pm 0}\dfrac{x^2}{\cos x-1}$.

1.346. Доказать, что предел функции $y=f(x)$ в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы и они совпадают.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ или $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — сравнимые бесконечно малые при $x \to x_0$, и пусть, для определенности, существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$. Тогда:

а) Если $C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка. В частности, при $C = 1$ бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и пишут $\alpha \sim \beta$.

б) Если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой более *высокого порядка*, чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$. Если при этом существует действительное число $r > 0$ такое, что $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} \neq 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой *порядка* r относительно $\beta(x)$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = \infty$. Подобно тому как это сделано выше для бесконечно малых, вводится понятие сравнимых бесконечно больших и их классификация.

1.347. Доказать, что если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, то найдется такое число $\delta > 0$ и константы C_1 и C_2, что

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow C_1\beta(x) \leqslant \alpha(x) \leqslant C_2\beta(x).$$

1.348. Доказать, что $\alpha \sim \beta$ в том и только в том случае, когда $\alpha - \beta = o(\alpha)$ или $\alpha - \beta = o(\beta)$.

Определить порядок малости $\alpha(x)$ относительно $\beta(x) = x$, при $x \to 0$:

1.349. $\alpha(x) = \frac{3\sqrt{x^3}}{1-x}$. **1.350.** $\alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$.

1.351. $\alpha(x) = \frac{1-\cos x}{x}$. **1.352.** $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

1.353. $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})$.

1.354. $\alpha(x) = 3\sin^3 x - x^4$.

1.355. $\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1$.

1.356. $\alpha(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$.

1.357. $\alpha(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1$. **1.358.** $\alpha(x) = 2^x - \cos x$.

1.359. Доказать, что $\alpha(x) - \beta(x)$ имеет 2-й порядок малости относительно x при $x \to 0$, если:

а) $\alpha(x) = 1/(1+x)$, $\beta(x) = 1 - x$;

б) $\alpha(x) = \sqrt{a^2 + x}$, $\beta(x) = a + \frac{1}{2a}x$ $(a \neq 0)$;

в) $\alpha(x) = (1+x)^n$, $\beta(x) = 1 + nx$ $(n \in \mathbb{N})$.

Приближенно вычислить следующие выражения:

1.360. $1/1{,}03$. **1.361.** $\sqrt{25{,}3}$.

1.362. $(1{,}03)^5$. **1.363.** $(0{,}97)^4$.

1.364. Доказать, что если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Используя результат задачи 1.364, вычислить пределы:

1.365. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$.

◀ Так как $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\ln(1-x) \sim (-x)$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{-x} = -1. \ ▶$$

1.366. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{\lg x}$. **1.367.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}$.

1.368. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$. **1.369.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{\arcsin 3x \cdot \sin \dfrac{x}{2}}$.

1.370. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x + x \operatorname{tg} 7x}$.

1.371. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{2\sqrt{2}-(\cos x + \sin x)^3}{1-\sin 2x}$.

Определить порядок роста бесконечно большой $A(x)$ относительно $B(x) = x$ при $x \to \infty$:

1.372. $A(x) = x^3 + 150x + 10$.

1.373. $A(x) = \sqrt{x^2+3x+5} + |x|$.

1.374. $A(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$. **1.375.** $A(x) = \sqrt[3]{x^2-x} + \sqrt{x}$.

1.376. $A(x) = \dfrac{5x^6}{3x^4+x^3+2}$. **1.377.** $A(x) = \dfrac{x^{5/2}}{x^{7/3}+1}$.

3. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва. Функция $y = f(x)$ с областью определения D называется *непрерывной* в точке x_0, если выполнены следующие три условия:

а) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т. е. $x_0 \in D$;

б) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если условие а) выполнено, то условия б) и в) эквивалентны следующему:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0,$$

где

$$\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

— *приращение функции* $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее *приращению аргумента* $\Delta x = x - x_0$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий а)—в), то x_0 называется точкой разрыва функции $y = f(x)$. При этом различают следующие случаи:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке x_0 или нарушено условие $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. В этом случае x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции.

б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует. Если при этом существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ (очевидно, не равные друг другу), то x_0 называется *точкой разрыва* 1-*го рода*.

в) В остальных случаях x_0 называется *точкой разрыва* 2-*го рода*.

1.378. Используя логическую символику, записать на языке «ε-δ» следующие утверждения:

а) функция $y = f(x)$ с областью определения D непрерывна в точке $x_0 \in D$;

б) функция $y = f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0 \in D$.

Доказать, что следующие функции непрерывны в каждой точке их естественной области определения:

1.379. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

◄ Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$\Delta f(x_0, \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = C_n^1 x_0^{n-1} \Delta x + C_n^2 x_0^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n$.

Отсюда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0$. ►

1.380. $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

1.381. $f(x) = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$.

1.382. $f(x) = \sin x$. **1.383.** $f(x) = \arcsin x$.

Задана функция $f(x)$. При каком выборе параметров, входящих в ее определение, $f(x)$ будет непрерывной?

1.384. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1. \end{cases}$

1.385. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 1, \\ ax^2-2, & x>1. \end{cases}$

1.386. $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x\leqslant \pi/2, \\ \sin x+b, & x>\pi/2. \end{cases}$

Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»:

1.387. $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}$. 1.388. $f(x)=\dfrac{|3x-5|}{3x-5}$.

1.389. $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, $n\in\mathbb{N}$. 1.390. $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin x$.

1.391. $f(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x}$. 1.392. $f(x)=3^{\frac{x}{4-x^2}}$.

1.393. $f(x)=(x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. 1.394. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

1.395. $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x-2}}-1}{3^{\frac{1}{x-2}}+1}$. 1.396. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

1.397. $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$. 1.398. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

1.399. $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\leqslant x<1, \\ x-1, & 1<x\leqslant 4, \\ 1, & x=1. \end{cases}$

1.400. $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}$.

1.401. $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 4-2x, & 1<x<2{,}5, \\ 2x-7, & 2{,}5\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$

1.402. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & -\pi/2\leqslant x<\pi/4, \\ 1, & x=\pi/4, \\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \pi/4<x\leqslant\pi. \end{cases}$

1.403. Доказать, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции являются точками разрыва 1-го рода.

4. Непрерывность на множестве. Равномерная непрерывность. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке $x\in D$. Она называется *равномерно непрерывной на множестве* D, если для любого $\varepsilon>0$ существует число

$\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in D$ из неравенства $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ следует $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема Кантора. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

1.404. Доказать, что если $y = f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, то она:

а) ограничена на $[a, b]$;

б) достигает на $[a, b]$ своих верхней и нижней граней (теорема Вейерштрасса);

в) принимает на любом интервале $(a', b') \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $f(a')$ и $f(b')$ (теорема Коши).

1.405. Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция ограничена на $[a, +\infty)$.

1.406. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

принимает на любом отрезке $[0, a]$ все промежуточные значения между $f(0)$ и $f(a)$, однако не является непрерывной на $[0, a]$.

1.407. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень.

1.408. На языке «ε-δ» сформулировать утверждение: функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве D, но не является равномерно непрерывной на этом множестве. В качестве примера рассмотреть следующие функции:

а) $f(x) = 1/x$, $D = (0, 1]$;

б) $f(x) = \lg x$, $D = (0, 10]$;

в) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$, $D = (0, 1]$.

1.409. Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

1.410. Показать, что неограниченная функция $f(x) = x + \sin x$ равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

Следующие функции исследовать на равномерную непрерывность на заданных множествах:

1.411. $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$, $D = [-1, 1]$.

1.412. $f(x)=\ln x, \quad D=(0, 1]$.

1.413. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}, \quad D=(0, \pi]$.

1.414. $f(x)=e^x\cos\dfrac{1}{x}, \quad D=(0, 1]$.

1.415. $f(x)=\operatorname{arctg} x, \quad D=\mathbb{R}$.

1.416. $f(x)=\sqrt{x}, \quad D=[0, +\infty)$.

1.417. $f(x)=x\sin x, \quad D=[0, +\infty)$.

§ 5. Комплексные числа

1. Алгебраические операции над комплексными числами. *Комплексными числами* называются всевозможные упорядоченные пары $z=(x, y)$ действительных чисел, для которых следующим образом определены операции сложения и умножения:

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2), \tag{1}$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1). \tag{2}$$

Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Действительные числа x и y называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа $z=(x, y)$ и обозначаются символами $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ соответственно.

Два комплексных числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ называются *равными* в том и только в том случае, когда $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Из определений (1) и (2) следует, что всякое комплексное число (x, y) может быть записано следующим образом:

$$(x, y)=(x, 0)+(0, 1)(y, 0). \tag{3}$$

Если теперь комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествить[1] с действительными числами x, а число $(0, 1)$ обозначить символом i, то равенство (3) принимает вид

$$z=x+iy$$

и называется *алгебраической формой* комплексного числа $z=(x, y)$.

1.418. Доказать, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

а) $z_1+z_2=z_2+z_1$ (*коммутативность сложения*);

б) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (*ассоциативность сложения*);

в) $z_1z_2=z_2z_1$ (*коммутативность умножения*);

г) $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$ (*ассоциативность умножения*);

д) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ (*закон дистрибутивности*).

---

[1]) То есть установить взаимно однозначное соответствие $(x, 0)\leftrightarrow x$ между множествами $\{(x, 0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ и $\mathbb{R}$. Из (1) и (2) следует, что это соответствие «сохраняет операции»:

$$(x_1, 0)+(x_2, 0)=(x_1+x_2, 0)\leftrightarrow x_1+x_2,$$

$$(x_1, 0)\cdot(x_2, 0)=(x_1x_2, 0)\leftrightarrow x_1x_2.$$

1.419. Доказать, что:

а) $\forall z_1, z_2 \neq 0 \, \exists z \, (z_2 z = z_1)$

(число z называется *частным* от деления z_1 на z_2 и обозначается символом $\frac{z_1}{z_2}$);

б) если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

В задачах 1.420—1.429 выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме.

1.420. $(1-2i)(2+i)^2 + 5i$.

◀ Задача состоит в том, чтобы заданное комплексное число представить в форме

$$(1-2i)(2+i)^2 + 5i = x + iy.$$

Для этого можно воспользоваться непосредственно формулами (1) и (2), однако этот же результат можно получить проще следующим образом. Как показывают свойства операций, перечисленные в задаче 1.418, при сложении и умножении комплексных чисел, представленных в алгебраической форме, с ними можно обращаться как с биномами вида $a+ib$, учитывая дополнительно, что $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Поэтому

$$(2+i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i,$$
$$(1-2i)(2+i)^2 = (1-2i)(3+4i) = 3 - 2i - 8i^2 = 11 - 2i,$$

откуда окончательно получаем

$$(1-2i)(2+i)^2 + 5i = 11 - 2i + 5i = 11 + 3i. \ ▶$$

1.421. $(2+3i)(3-i)$. **1.422.** $(1+2i)^2$.

1.423. $(1-i)^3 - (1+i)^3$. **1.424.** $(2i - i^2)^2 + (1-3i)^3$.

1.425. $\frac{2-i}{1+i}$.

◀ Результат может быть получен непосредственно по формуле из задачи 1.419. Заметим, однако, что $(1+i)(1-i) = 2$ есть действительное число. Поэтому, умножая числитель и знаменатель заданной дроби на $1-i$, находим:

$$\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i. \ ▶$$

1.426. $\frac{1}{1+4i} + \frac{1}{4-i}$. **1.427.** $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

1.428. $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i} - \frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$. **1.429.** $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Найти действительные решения следующих уравнений:

1.430. $(1+i)x + (-2+5i)y = -4 + 17i$.

1.431. $12((2x+i)(1+i) + (x+y)(3-2i)) = 17 + 6i$.

Решить следующие системы линейных уравнений:

1.432. $(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i,$
$(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7.$

1.433. $(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,$
$(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.$

1.434. $iz_1+z_2=i,$
$(i+1)z_1+(1-i)z_2=(1+i).$

Если на плоскости введена декартова прямоугольная система координат Oxy, то всякому комплексному числу $z=x+iy$ может быть поставлена в соответствие некоторая точка $M(x, y)$ с абсциссой x и ординатой y.

При этом говорят, что точка $M(x, y)$ *изображает* комплексное число $z=x+iy$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, ось Ox — *действительной осью*, а ось Oy — *мнимой осью*.

Число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z=x+iy$ и обозначается символом $|z|$. Модуль числа z равен расстоянию точки M, изображающей это число, от начала координат.

Всякое решение φ системы уравнений

$$\cos\varphi=x/\sqrt{x^2+y^2}, \quad \sin\varphi=y/\sqrt{x^2+y^2} \tag{4}$$

называется *аргументом* комплексного числа $z=x+iy\neq 0$. Все аргументы числа z различаются на целые кратные 2π и обозначаются единым символом $\operatorname{Arg} z$. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ некоторого угла, на который следует повернуть ось Ox до совпадения с радиус-вектором $\overline{OM}$ точки M (при этом $\varphi>0$, если поворот совершается против часовой стрелки, и $\varphi<0$ в противном случае). Значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $0\leqslant \operatorname{Arg} z<2\pi$, называется *главным значением* аргумента и обозначается символом $\arg z$.

В некоторых случаях главным значением аргумента называется значение $\operatorname{Arg} z$, удовлетворяющее условию $-\pi<\operatorname{Arg} z\leqslant\pi$.

Из соотношений (4) следует, что для всякого комплексного числа z справедливо равенство

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

называемое *тригонометрической формой* числа z.

Пример 1. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z=-2+2i\sqrt{3}$.

◀ Имеем

$$|z|=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=4, \quad \cos\varphi=-1/2, \quad \sin\varphi=\sqrt{3}/2,$$

поэтому главное значение аргумента равно $\arg z=2\pi/3$ и, следовательно, $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. ▶

Следующие комплексные числа представить в тригонометрической форме и изобразить точками на комплексной плоскости:

1.435. $-i$. **1.436.** $1-i\sqrt{3}$. **1.437.** $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.438. $\frac{1-i}{1+i}$. **1.439*.** $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

1.440. $\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$. **1.441.** $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

Комплексное число $x-iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z=x+iy$ и обозначается символом $\bar{z}$.

Доказать следующие равенства:

1.442. $z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z$ и $z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z$.

1.443. $\overline{(\bar{z})}=z$. **1.444.** $|\bar{z}|=|z|$. **1.445.** $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

1.446. $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ и $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. **1.447.** $z\bar{z}=|z|^2$.

1.448. Вычислить:

а) $z_1\bar{z}_2$ и $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$, если $z_1=1-i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{3}+i$,

б) $z_1\bar{z}_2$ и $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, если $z_1=3+2i$, $z_2=2+2i$.

1.449. Пусть $p(z)$—произвольный многочлен с действительными коэффициентами. Доказать, что для любого $z\in\mathbb{C}$ верно равенство $\overline{p(z)}=p(\bar{z})$.

Решить следующие уравнения:

1.450. $|z|-z=1+2i$. **1.451.** $|z|+z=2+i$.

1.452. Доказать равенства и выяснить их геометрический смысл:

а) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$;

б) $\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Arg}(z_1z_2)$, $\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ (равенства б) понимаются в смысле равенства множеств— см. с. 11).

Выяснить геометрический смысл следующих преобразований комплексной плоскости:

1.453. $z\to z-2$. **1.454.** $z\to z+(3-i)$. **1.455.** $z\to iz$.

1.456. $z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$. **1.457.** $z\to -z$. **1.458.** $z\to 2z$.

1.459. $z\to\frac{z}{1-i}$. **1.460.** $z\to\bar{z}$.

1.461. Доказать, что:

а) величина $|z_1-z_2|$ равна расстоянию на комплексной плоскости между точками M_1 и M_2, изображающими комплексные числа z_1 и z_2;

б) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$ и $|z_1-z_2| \geqslant ||z_1|-|z_2||$ (неравенства треугольника). Каков геометрический смысл этих неравенств?

1.462. Доказать тождества:

а) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

(каков его геометрический смысл?);

б)* $|z_1|+|z_2|=\left|\frac{z_1+z_2}{2}+\sqrt{z_1z_2}\right|+\left|\frac{z_1+z_2}{2}-\sqrt{z_1z_2}\right|$.

В задачах 1.463—1.473 дать геометрическое описание множеств всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим условиям:

1.463. $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. **1.464.** $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1$. **1.465.** $|\operatorname{Im} z| \leqslant 2$.
1.466. $|z|<1$. **1.467.** $|z+i|=2$.
1.468. $1<|z+2| \leqslant 2$. **1.469.** $|z|>1-\operatorname{Re} z$.
1.470. $|z-i|=|z+2|$. **1.471.** $0<\arg z \leqslant \pi/4$.
1.472. $|\pi-\arg z|<\pi/4$. **1.473.** $z=\bar{z}$.

1.474. Пусть $z \neq -1$. Доказать, что $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}=0 \Leftrightarrow |z|=1$.

Пусть φ — произвольное действительное число. Символом $e^{i\varphi}$ обозначается комплексное число $\cos\varphi+i\sin\varphi$. С помощью этого обозначения всякое комплексное число $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ может быть записано в *показательной форме*

$$z=|z|e^{i\varphi}.$$

Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

1.475. $\frac{7+24i}{5}$. **1.476.** $5-12i$. **1.477.** $-3-4i$.
1.478. $-2+i$. **1.479.** $\sin\alpha-i\cos\alpha$.
1.480. $\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$.

1.481. Доказать, что символ $e^{i\varphi}$ обладает следующими свойствами:

а) $\forall n \in Z\ (e^{i2\pi n}=1)$; б) $\overline{e^{i\varphi}}=e^{-i\varphi}$;

в) $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ и $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

1.482. Данные числа z_1 и z_2 представить в показательной форме и выполнить указанные действия над ними:

а) z_1z_2, $\frac{z_1^2}{z_2}$, если $z_1=2\sqrt{3}-2i$, $z_2=3-3\sqrt{3}i$;

б) $z_1^2\bar{z}_2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, если $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $z_2=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$.

1.483. Доказать *формулы Эйлера*

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

1.484. Доказать *формулу Муавра*: если $z=re^{i\varphi}$, то

$$z^n=r^ne^{in\varphi},$$

или, в тригонометрической форме,

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Используя формулу Муавра, вычислить следующие выражения:

1.485. $(1+i)^{10}$. **1.486.** $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. **1.487.** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

1.488. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$.

1.489. Доказать равенства:

а) $(1+i)^n=2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

б) $(\sqrt{3}-i)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

1.490. Используя формулы Эйлера, выразить через косинусы и синусы кратных дуг функции:

а) $\cos^3\varphi$; б) $\sin^3\varphi$.

Используя формулу Муавра, выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ следующие функции:

1.491. $\cos 3\varphi$. **1.492.** $\sin 3\varphi$.

1.493. $\cos 4\varphi$. **1.494.** $\sin 4\varphi$.

Пусть $a=re^{i\varphi}$ — фиксированное комплексное число. Тогда уравнение $z^n=a$, $n\in\mathbb{N}$, имеет в точности n различных решений $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, причем эти решения даются формулой

$$z_k=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$
$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

(здесь $\sqrt[n]{r}$ — действительное положительное число). Числа z_k, $k=0, 1, \ldots, n-1$, называются *корнями n-й степени* из комплексного числа a и обозначаются символом $\sqrt[n]{a}$.

Пример 2. Найти все корни 3-й степени из числа $a=-2+2i\sqrt{3}$.

◀ Так как $a=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, то

$$(\sqrt[3]{a})_k=\sqrt[3]{4}\,e^{i\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}\right)}=\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)+\right.$$
$$\left.+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right),\quad \text{где}\quad k=0,\ 1,\ 2.$$

При $k=0$: $(\sqrt[3]{a})_0=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$.

При $k=1$: $(\sqrt[3]{a})_1=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$.

При $k=2$: $(\sqrt[3]{a})_2=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$. ▶

1.495. Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 2-й, 3-й и 4-й степени из единицы.

Найти все значения корней:

1.496. $\sqrt{i}$. **1.497.** $\sqrt[4]{-1}$. **1.498.** $\sqrt[9]{-9}$.

1.499. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$. **1.500.** $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

1.501. $\sqrt[5]{-1-i}$.

1.502. $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$. **1.503.** $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.

1.504. Доказать, что квадратные корни из комплексного числа могут быть найдены по формуле

$$\sqrt{z}=\sqrt{x+iy}=\pm\left(\sqrt{\frac{|z|+x}{2}}+i\operatorname{sgn}y\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}\right).$$

Использование показательной формы комплексных чисел во многих случаях значительно упрощает вычисления.

Пример 3. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$S(\varphi)=\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi,\quad \varphi\neq 2\pi m,\quad m\in\mathbb{Z}.$$

◀ Так как $\sin\varphi=\operatorname{Im}e^{i\varphi}$, то, используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$S(\varphi)=\operatorname{Im}e^{i\varphi}+\operatorname{Im}e^{i2\varphi}+\ldots+\operatorname{Im}e^{in\varphi}=\operatorname{Im}\left(e^{i\varphi}+e^{i2\varphi}+\ldots+e^{in\varphi}\right)=$$
$$=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi}(1-e^{in\varphi})}{1-e^{i\varphi}}=\operatorname{Im}\frac{e^{i\varphi+i\frac{n}{2}\varphi}\left(e^{-i\frac{n}{2}\varphi}-e^{i\frac{n}{2}\varphi}\right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}}-e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)}=$$
$$=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\operatorname{Im}e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.\ ▶$$

Привести к виду, удобному для логарифмирования:

1.505. $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi$.

1.506. $\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \ldots + \cos(2n-1)\varphi$.

1.507. $\sin\varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \ldots + \sin(2n-1)\varphi$.

2. Многочлены и алгебраические уравнения. *Многочленом* (*полиномом* или *целой рациональной функцией*) n-й степени называется функция вида

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \qquad (5)$$

где $z \in \mathbb{C}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты (вообще говоря, комплексные), причем $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Уравнение

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, \qquad (6)$$

называется *алгебраическим уравнением* n-й степени. Число z_0, для которого $p_n(z_0) = 0$, называется *корнем* многочлена (5) или уравнения (6).

Теорема Гаусса (основная теорема алгебры). *Всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень* (вообще говоря, комплексный).

Число z_0 является корнем многочлена $p_n(z)$ в том и только в том случае, когда $p_n(z)$ делится без остатка на бином $z - z_0$, т. е.

$$p_n(z) = (z - z_0)\, q_{n-1}(z),$$

где $q_{n-1}(z)$ — многочлен $(n-1)$-й степени. Если $p_n(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)^k$, $k \geq 1$, но не делится на $(z - z_0)^{k+1}$, то z_0 называется *корнем кратности* k многочлена $p_n(z)$; при этом

$$p_n(z) = (z - z_0)^k\, q_{n-k}(z),$$

где $q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Теорема Гаусса может быть уточнена следующим образом: *многочлен n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Если коэффициенты многочлена (5) — действительные числа и $z_0 = x_0 + iy_0$ — его комплексный корень, то сопряженное число $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ — также корень этого многочлена, причем корни z_0 и $\bar{z}_0$ имеют одинаковую кратность (см. задачу 1.449).

Пусть многочлен $p_n(z)$ имеет корни $z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(m \leq n)$ кратностей соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$. Тогда его можно разложить на линейные множители, т. е. справедливо тождество

$$p_n(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m}.$$

Если при этом коэффициенты многочлена — действительные числа, то, объединяя скобки, соответствующие комплексно сопряженным корням, можно разложить этот многочлен в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

Пример 4. Найти корни многочлена $z^6 + 2z^3 + 1$ и разложить его на множители.

◀ Так как $z^6+2z^3+1=(z^3+1)^2$, то корнями этого многочлена являются корни 3-й степени из -1:

$$z_1=-1;$$
$$z_2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$z_3=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

При этом каждый корень имеет кратность $k=2$. Разложение этого многочлена на линейные множители имеет вид

$$z^6+2z^3+1=(z+1)^2\left(z-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2\left(z-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2.$$

Объединяя последние две скобки в один сомножитель, получим разложение на множители с действительными коэффициентами

$$z^6+2z^3+1=(z+1)^2(z^2-z+1)^2. \blacktriangleright$$

Решить квадратные уравнения:

1.508. $z^2+2z+5=0$. **1.509.** $4z^2-2z+1=0$.

1.510. $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$.

1.511. $z^2+(2i-3)z+5-i=0$.

Решить двучленные уравнения:

1.512. $z^3-1=0$. **1.513.** $z^3+1=0$.

1.514. $(z+1)^4-16=0$. **1.515.** $(z+1)^4+16=0$.

Решить биквадратные уравнения:

1.516. $z^4+18z^2+81=0$. **1.517.** $z^4+4z^2+3=0$.

1.518. $z^4+9z^2+20=0$.

1.519. $z^4-(1+i)z^2+2(1+i)=0$.

Решить трехчленные уравнения:

1.520. $z^6+4z^3+3=0$. **1.521.** $z^8+15z^4-16=0$.

1.522*. Показать, что все корни уравнения

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\frac{(1+ia)}{(1-ia)} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

действительны и различны.

Следующие многочлены разложить на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

1.523. z^4-1. **1.524.** z^4+1. **1.525.** z^4+z^2+1.

1.526. $z^4+4z^3+11z^2+14z+10$; известен один корень $z_1=-1+i$.

1.527. $z^5+z^4+z^3-z^2-z-1$; известен двукратный корень $z_1=z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.528. $z^4+6z^3+9z^2+100$; известен корень $z_1=1+2i$.

3. Предел последовательности комплексных чисел. Число a называют *пределом* последовательности комплексных чисел $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n-a|<\varepsilon$.

Последовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называют *сходящейся к бесконечности* и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$, если для любого $E>0$ существует номер $N(E)$ такой, что при $n>N(E)$ выполняется неравенство $|z_n|>E$.

1.529. Пусть $x_n=\operatorname{Re} z_n$ и $y_n=\operatorname{Im} z_n$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a\neq\infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\operatorname{Re} a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\operatorname{Im} a$.

1.530. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a\neq\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=b\neq\infty$. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n+w_n)=a+b$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} z_nw_n=ab$.

1.531. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a\neq\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=b\neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}=\frac{a}{b}$.

Вычислить пределы:

1.532. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-i+\frac{1}{n}(1+i)\right)$. **1.533.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-in}{1+in}$.

1.534. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{3n+2}\cdot\frac{in^2}{n^2+n-4i}$. **1.535.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2i)(3+7in)}{(2-i)n^2+1}$.

1.536. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{in}{n}\right)$. **1.537.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{in\frac{\pi}{4}}$.

1.538. $\lim\limits_{n\to\infty}(2i)^n$. **1.539.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^n+i\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$.

1.540. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5i}-\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(5i)^n}\right)$.

1.541. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{i^k}{3^k}$. **1.542.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}+i\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

1.543. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(2-3i)^k}$. **1.544.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3+2i}{n}\right)^n$.

Доказать, что следующие последовательности ограничены, но расходятся:

1.545. $z_n=i^n$. **1.546.** $z_n=(-1)^n+i\frac{2-n}{2+n}$.

1.547. $z_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{i\frac{n\pi}{2}}$. **1.548.** $z_n=\frac{1}{2}(i^n+(-i)^n)$.

Показать, что следующие последовательности неограничены, но не сходятся к бесконечности:

1.549. $z_n=n(1+i^n)$. **1.550.** $z_n=\left(e^{i\frac{\pi n}{2}}-i\right)\ln n$.

1.551. Пусть $r_n=|z_n|$ и $\varphi_n=\arg z_n$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ $(0<|a|<\infty)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=|a|$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\arg a$ (при надлежащем выборе области главных значений аргументов).

Результат задачи 1.551 часто используется при вычислении пределов комплексных последовательностей.

Пример 5. Пусть φ — действительное число ($\varphi\neq 0$). Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}.$$

◄ Рассмотрим две действительные последовательности:

$$r_n=\left|\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n\right|=\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n/2},$$

$$\varphi_n=\arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n=n\arg\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)=n\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n}.$$

Вычислим их пределы:

$$\lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}}\right)^{\frac{\varphi^2}{2n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi^2}{2n}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n}=\varphi\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}}=\varphi.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n=1\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=e^{i\varphi}.$$ ►

1.552. Пусть $z=x+iy$. Доказать (см. пример 5), что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y)=e^{x+iy}=e^z.$$

Доказать сходимость следующих последовательностей и найти их пределы:

1.553. $z_n = z^n$, $|z| < 1$. **1.554.** $z_n = nz^n$, $|z| < 1$.

1.555. $z_n = 1 + z + \ldots + z^n$, $|z| < 1$.

1.556. $z_n = \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$, $|z| > 1$.

1.557. Вычислить $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+z_1+\ldots+z_1^n}{1+z_2+\ldots+z_2^n}$, если $|z_1| < 1$ и $|z_2| < 1$.

1.558. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a \neq \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n} = a.$$

Глава 2

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Векторная алгебра

1. Линейные операции над векторами. *Вектором (геометрическим вектором)* $\boldsymbol{a}$ называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. О всяком отрезке $\overline{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет вектор $\boldsymbol{a}$ (получен приложением вектора $\boldsymbol{a}$ к точке A). Длина отрезка $\overline{AB}$ называется *длиной (модулем)* вектора $\boldsymbol{a}$ и обозначается символом $|\boldsymbol{a}|=|\overline{AB}|$. Вектор нулевой длины называется *нулевым вектором* и обозначается символом $\boldsymbol{0}$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *равными* ($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$), если множества представляющих их направленных отрезков совпадают.

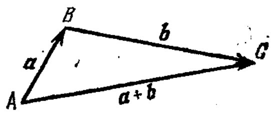


Рис. 3

В ряде задач часто бывает удобно не различать вектор и какой-либо представляющий его направленный отрезок. Именно в этом смысле, например, следует понимать выражение «построить вектор».

Пусть направленный отрезок $\overline{AB}$ представляет вектор $\boldsymbol{a}$. Приложив к точке B заданный вектор $\boldsymbol{b}$, получим некоторый направленный отрезок $\overline{BC}$. Вектор, представляемый направленным отрезком $\overline{AC}$, называется *суммой* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (рис. 3).

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на действительное число λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\boldsymbol{a}$, такой, что:

1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

2) векторы $\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{a}$ сонаправлены при $\lambda>0$ и противоположно направлены при $\lambda<0$.

2.1. Доказать, что операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

а) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

б) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_1$ (*коммутативность*);

в) $\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{a}_3$ (*ассоциативность*);

г) $\forall\boldsymbol{a}\,\exists!\,\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0})$

(вектор $\boldsymbol{b}$ называется вектором, *противоположным* вектору $\boldsymbol{a}$ и обозначается символом $-\boldsymbol{a}$);

д) $\forall\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2\ \exists!\boldsymbol{a}_3\ (\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_2)$

(вектор $\boldsymbol{a}_3$ называется *разностью* векторов $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_1$ и обозначается символом $\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1$).

2.2. Доказать равенства:

а) $-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}$; б) $\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2+(-\boldsymbol{a}_1)$;

в) $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}_0$, где $\boldsymbol{a}_0$ — *орт* вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. вектор единичной длины, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a}\neq 0)$.

2.3. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ векторы $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{p}$ представлены ребрами $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA'}$ соответственно. Построить векторы:

а) $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$; б) $^1/_2\boldsymbol{m}+{}^1/_2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$; в) $-\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}+{}^1/_2\boldsymbol{p}$.

2.4. Даны векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Построить векторы $3\boldsymbol{a}_1$, $^1/_2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$, $^1/_2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$.

2.5. Доказать, что:

а) операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

$$0\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}, \qquad (\lambda_1\lambda_2)\,\boldsymbol{a}=\lambda_1(\lambda_2\boldsymbol{a});$$

б) операции сложения векторов и умножения их на числа связаны следующими двумя свойствами *дистрибутивности*:

$$\lambda(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\lambda\boldsymbol{a}_1+\lambda\boldsymbol{a}_2 \quad \text{и} \quad (\lambda_1+\lambda_2)\,\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{a}.$$

2.6. Доказать равенства:

а) $\boldsymbol{a}+{}^1/_2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})={}^1/_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

б) $\boldsymbol{a}-{}^1/_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})={}^1/_2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

Каков их геометрический смысл?

2.7. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$ — медианы треугольника ABC. Доказать равенство $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\boldsymbol{0}$.

2.8. $\overline{AK}$ и $\overline{BM}$ — медианы треугольника ABC. Выразить через $\boldsymbol{p}=\overline{AK}$ и $\boldsymbol{q}=\overline{BM}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$.

2.9. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$. Выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$ и $\overline{MD}$, где M — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

2.10. В треугольнике ABC $\overline{AM}=\alpha\overline{AB}$ и $\overline{CN}=\beta\overline{CM}$. Полагая $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{AC}=\boldsymbol{b}$, выразить $\overline{AN}$ и $\overline{BN}$ через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

2.11. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, причем $\overline{AB}=\boldsymbol{p}$, $\overline{BC}=\boldsymbol{q}$. Выразить через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ векторы $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FA}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$.

2.12. M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overline{OM}={}^1/_3(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$.

2.13. В пространстве заданы треугольники ABC и $A'B'C'$; M и M' — точки пересечения их медиан. Выразить вектор $\overline{MM'}$ через векторы $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$.

2.14. Точки E и F — середины сторон $[AD]$ и $[BC]$ четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overline{EF} = {}^1/_2(\overline{AB} + \overline{DC})$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

2.15. В трапеции $ABCD$ отношение длины основания $[AD]$ к длине основания $[BC]$ равно λ. Полагая $\overline{AC} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{BD} = \boldsymbol{b}$, выразить через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

2.16. В треугольнике ABC $\overline{AM} = \alpha\overline{AB}$ и $\overline{AN} = \beta\overline{AC}$.

а) При каком соотношении между α и β векторы $\overline{MN}$ и $\overline{BC}$ коллинеарны.

б) Пусть α и β таковы, что векторы $\overline{MN}$ и $\overline{BC}$ неколлинеарны. Полагая $\overline{BC} = \boldsymbol{p}$ и $\overline{MN} = \boldsymbol{q}$, выразить векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ через $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$. В противном случае система называется *линейно независимой*.

2.17. Доказать следующие геометрические критерии линейной зависимости:

а) система $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ линейно зависима в том и только в том случае, когда векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ *коллинеарны*, т. е. их направления совпадают или противоположны;

б) система $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ линейно зависима в том и только в том случае, когда векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ *компланарны*, т. е. параллельны некоторой плоскости;

в) всякая система из $n \geqslant 4$ векторов линейно зависима.

2.18. На стороне $[AD]$ параллелограмма $ABCD$ отложен вектор $\overline{AK}$ длины $|\overline{AK}| = {}^1/_5|\overline{AD}|$, а на диагонали $[AC]$ — вектор $\overline{AL}$ длины $|\overline{AL}| = {}^1/_6|\overline{AC}|$. Доказать, что векторы $\overline{KL}$ и $\overline{LB}$ коллинеарны и найти λ такое, что $\overline{KL} = \lambda \cdot \overline{LB}$.

2.19. Разложить вектор $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}$.

2.20. Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами: $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} + {}^1/_2\boldsymbol{c}$.

2.21. Даны четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Вычислить их сумму, если известно, что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \beta\boldsymbol{a}$ и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны.

2.22. Доказать, что для любых заданных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ компланарны.

2.23. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ компланарны.

2.24. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Вычислить значения λ, при которых векторы $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}$ компланарны.

2.25. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Вычислить значения λ и μ, при которых векторы $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$ коллинеарны.

2. Базис и координаты вектора. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ называется *базисом* в множестве всех геометрических векторов. Всякий геометрический вектор $\boldsymbol{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\boldsymbol{a}=X_1\boldsymbol{e}_1+X_2\boldsymbol{e}_2+X_3\boldsymbol{e}_3; \tag{1}$$

числа X_1, X_2, X_3 называются *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Запись (1) называют также разложением вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\mathfrak{B}$.

Аналогично упорядоченная пара $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ неколлинеарных векторов называется базисом $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ в множестве геометрических векторов, компланарных некоторой плоскости.

Наконец, всякий ненулевой вектор $\boldsymbol{e}$ образует базис $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e})$ в множестве всех геометрических векторов, коллинеарных некоторому направлению.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ есть *линейная комбинация* векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, т. е.

$$\boldsymbol{a}=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\boldsymbol{a}_k,$$

то каждая координата $X_i(\boldsymbol{a})$ вектора $\boldsymbol{a}$ равна сумме произведений коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на одноименные координаты векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_n$:

$$X_i(\boldsymbol{a})=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_i(\boldsymbol{a}_k), \quad i=1, 2, 3.$$

Базис $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ называется *прямоугольным*, если векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}, \ \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}, \ \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k}. \tag{2}$$

Проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{e}$ называется число $\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}})$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.

Координаты X, Y, Z вектора $\boldsymbol{a}$ в прямоугольном базисе совпадают с проекциями вектора $\boldsymbol{a}$ на базисные орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ соответственно, а длина вектора $\boldsymbol{a}$ равна

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{3}$$

Числа

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{a,\ i})=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\beta=\cos(\widehat{a,\ j})=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\gamma=\cos(\widehat{a,\ k})=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

называются *направляющими косинусами* вектора $\boldsymbol{a}$.

Направляющие косинусы вектора совпадают с координатами (проекциями) его орта $a_0=\frac{1}{|a|}a$.

2.26. Задан тетраэдр $OABC$. В базисе из ребер $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ найти координаты:

а) вектора $\overline{DE}$, где D и E — середины ребер $\overline{OA}$ и $\overline{BC}$;

б) вектора $\overline{OF}$, где F — точка пересечения медиан основания ABC.

2.27. В тетраэдре $OABC$ медиана $[AL]$ грани ABC делится точкой M в отношении $|\overline{AM}|:|\overline{ML}|=3:7$. Найти координаты вектора $\overline{OM}$ в базисе из ребер $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$.

2.28. Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка O. В базисе из векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ найти координаты:

а) вектора $\overline{OM}$, где M — точка пересечения диагоналей параллелограмма;

б) вектора $\overline{OK}$, где K — середина стороны $[AD]$.

2.29. В трапеции $ABCD$ известно отношение длин оснований: $|\overline{AB}|/|\overline{CD}|=\lambda$. Найти координаты вектора $\overline{CB}$ в базисе из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

2.30. В треугольнике ABC $\overline{AM}=\alpha\overline{AB}$, $\overline{AN}=\beta\overline{AC}$ $(\alpha,\ \beta\neq 0,\ 1;\ \alpha\beta\neq 1)$, O — точка пересечения (CM) и (BN). В базисе из векторов $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$ найти координаты:

а)** вектора $\overline{AO}$;

б) векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$.

2.31. В треугольнике ABC, $\overline{AK}=\alpha\overline{AB}$, $\overline{BM}=\beta\overline{BC}$, $\overline{CF}=\gamma\overline{CA}$. Пусть P, Q и R — точки пересечения прямых (BF) и (CK), (CK) и (AM), (AM) и (BF) соответственно. В базисе из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ найти координаты векторов $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ и $\overline{CR}$.

2.32. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. В базисе из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AE}$ найти координаты:

а) векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

б) векторов $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DE}$.

2.33. Дан треугольник ABC, $\overline{AM}={}^2/_3\overline{AB}$, $\overline{AN}={}^3/_4\overline{AC}$. Прямая (MN) пересекает (BC) в точке K.

а) Найти координаты вектора $\overline{AK}$ в базисе из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

б) Доказать, что векторы $\boldsymbol{p}=\overline{AB}+\overline{KN}$, $\boldsymbol{q}=\overline{BC}+\overline{NM}$ и $\boldsymbol{r}=\overline{CA}+\overline{MK}$ коллинеарны и определить коэффициент γ в равенстве $\boldsymbol{p}=\gamma\boldsymbol{q}$.

2.34. В тетраэдре $ABCD$ $[DM]$ — медиана грани BCD и Q — центр масс этой грани. Найти координаты векторов $\overline{DM}$ и $\overline{AQ}$ в базисе $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

В дальнейшем, если не оговаривается противное, векторы представлены своими координатами в некотором прямоугольном базисе. Запись $\boldsymbol{a}(X, Y, Z)$ означает, что координаты вектора $\boldsymbol{a}$ равны X, Y и Z, т. е. $\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$.

2.35. Заданы векторы $\boldsymbol{a}_1(-1, 2, 0)$, $\boldsymbol{a}_2(3, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_3(2, 0, 1)$ и $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+{}^1/_3\boldsymbol{a}_3$. Вычислить:

а) $|\boldsymbol{a}_1|$ и координаты орта $(\boldsymbol{a}_1)_0$ вектора $\boldsymbol{a}_1$;

б) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{j}})$;

в) координату X вектора $\boldsymbol{a}$;

г) $\text{пр}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}$.

2.36. Заданы векторы $\boldsymbol{e}(-1, 1, {}^1/_2)$ и $\boldsymbol{a}(2, -2, -1)$. Убедиться, что они коллинеарны и найти разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e})$.

2.37. На плоскости заданы векторы $\boldsymbol{e}_1(-1, 2)$, $\boldsymbol{e}_2(2, 1)$ и $\boldsymbol{a}(0, -2)$. Убедиться, что $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ — базис в множестве всех векторов на плоскости. Построить заданные векторы и найти разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\mathfrak{B}$.

2.38. Показать, что тройка векторов $\boldsymbol{e}_1(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2(1, 1, 0)$ и $\boldsymbol{e}_3(1, 1, 1)$ образует базис в множестве всех векторов пространства. Вычислить координаты вектора $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$ в базисе $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ и написать соответствующее разложение по базису.

2.39. Заданы векторы $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. Найти:

а) координаты орта $\boldsymbol{a}_0$;

б) координаты вектора $\boldsymbol{a}-{}^1/_2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$;

в) разложение вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ по базису $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$;

г) $\text{пр}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

2.40. Найти координаты орта $\boldsymbol{a}_0$, если $\boldsymbol{a}(6, 7, -6)$.

2.41. Найти $Z(\boldsymbol{a})$, если $X(\boldsymbol{a})=3$, $Y(\boldsymbol{a})=-9$ и $|\boldsymbol{a}|=12$.

2.42. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, если $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

2.43. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$, образующий с ортом $\boldsymbol{j}$ острый угол и имеющий длину $|\boldsymbol{x}|=15$.

2.44. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\boldsymbol{x}|=2\sqrt{3}$.

2.45. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, образующий с ортом $\boldsymbol{j}$ угол 60°, с ортом $\boldsymbol{k}$ — угол 120°, если $|\boldsymbol{x}|=5\sqrt{2}$.

2.46. При каких значениях α и β векторы $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\alpha\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\beta\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ коллинеарны?

2.47*. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\boldsymbol{a}=7\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, если $|\boldsymbol{x}|=5\sqrt{6}$.

2.48. Заданы векторы $\boldsymbol{a}(1, 5, 3)$, $\boldsymbol{b}(6, -4, -2)$, $\boldsymbol{c}(0, -5, 7)$ и $\boldsymbol{d}(-20, 27, -35)$. Требуется подобрать числа α, β и γ так, чтобы векторы $\alpha\boldsymbol{a}$, $\beta\boldsymbol{b}$, $\gamma\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ образовывали замкнутую ломаную линию, если «начало» каждого последующего вектора совместить с «концом» предыдущего.

2.49. В тетраэдре $OABC$ плоские углы трехгранного угла с вершиной O — прямые. Точка H — основание перпендикуляра, проведенного из вершины O к плоскости грани ABC. Найти координаты вектора $\overline{OH}$ в базисе из векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $|\overline{OA}|=a$, $|\overline{OB}|=b$, $|\overline{OC}|=c$.

3. Декартовы прямоугольные координаты точки. Простейшие задачи аналитической геометрии. Говорят, что в трехмерном пространстве введена *декартова прямоугольная система координат* $\langle O, \mathfrak{B}\rangle$, если заданы:

1) некоторая точка O, называемая *началом координат*;

2) некоторый прямоугольный базис $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ в множестве всех геометрических векторов.

Оси Ox, Oy и Oz, проведенные через точку O в направлении базисных ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, называются *координатными осями* системы координат $\langle O, \mathfrak{B}\rangle = Oxyz$.

Если M — произвольная точка пространства, то направленный отрезок $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами точки M* в системе $\langle O, \mathfrak{B}\rangle$ называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OM}$ как геометрического вектора в базисе $\mathfrak{B}$, т. е.

$$x(M)=X(\overline{OM}),\quad y(M)=Y(\overline{OM}),\quad z(M)=Z(\overline{OM}).$$

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки в пространстве, то координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ равны

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1. \qquad (4)$$

Отсюда на основании (3) расстояние между точками выражается формулой

$$\rho(M_1, M_2) = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

При решении задач аналитической геометрии целесообразно максимально использовать методы векторной алгебры.

Пример 1. Заданы вершины $A(1, 0, -1)$, $B(2, 2, 1)$ и точка $E(-1, 2, 1)$ пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты вершины C.

◀ Так как координаты вершины A заданы, то для вычисления координат вершины C достаточно найти координаты вектора $\overline{AC}$. Пусть $\overline{BF}$ — медиана, проведенная из вершины B. Тогда

$$\overline{AC} = 2\overline{AF} = 2(\overline{BA}+\overline{BF}) = 2\left(\overline{AB}+\frac{3}{2}\overline{BE}\right) \qquad (5)$$

(здесь использован тот факт, что точка E делит медиану BF в отношении 2:1). Далее, из условий задачи с помощью формулы (4) вычисляем координаты векторов $\overline{AB}(1, 2, 2)$ и $\overline{BE}(-3, 0, 0)$, откуда на основании (5) получаем $\overline{AC}(-7, 4, 4)$ и, наконец, вновь используя формулу (4), находим координаты точки C:

$$x(C) = x(A) + X(\overline{AC}) = -6;$$
$$y(C) = y(A) + Y(\overline{AC}) = 4;$$
$$z(C) = z(A) + Z(\overline{AC}) = 3. \ ▶$$

Пусть на прямой l заданы точки M_1, M_2 и M, причем $M_1 \neq M_2$. Рассмотрим векторы $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$. Так как они коллинеарны, то найдется такое действительное число λ, что $\overline{M_1M} = \lambda \cdot \overline{MM_2}$. Число λ называется *отношением*, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$, причем оно положительно, если точка M находится внутри отрезка $\overline{M_1M_2}$, отрицательно (и $\lambda \neq -1$), если M находится вне $\overline{M_1M_2}$, и равно 0, если $M = M_1$.

Пример 2. Зная координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и отношение λ, в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$, найти координаты точки M.

◀ Пусть O — начало координат. Обозначим: $\overline{OM_1} = \boldsymbol{r}_1$, $\overline{OM_2} = \boldsymbol{r}_2$, $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$. Так как

$$\overline{M_1M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1,\quad \overline{MM_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r},$$

то

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}),$$

откуда (так как $\lambda \neq -1$)

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{r}_2}{1+\lambda}.$$

Полученная формула и дает решение задачи в векторной форме. Переходя в этой формуле к координатам, получим

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \blacktriangleright \tag{6}$$

2.50. Точка $M(1, -5, 5)$ задана своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат $\langle O, \mathfrak{B}=(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})\rangle$. Найти координаты этой точки в системе $\langle O', \mathfrak{B}'=(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')\rangle$, если:

а) $\overline{OO'}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$;

б) $O'=O$ и $\boldsymbol{i}'=-\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}'=\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'=\boldsymbol{i}$;

в) $\overline{OO'}=\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}), \boldsymbol{j}'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}), \boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$

(предварительно убедиться, что $\mathfrak{B}'$ — прямоугольный базис).

2.51. Даны три вершины $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$ и $C(1, 2, -3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

2.52. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-2, 6)$, $B(2, 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M(2, 2)$. Найти две другие вершины.

2.53. Определить координаты вершин треугольника, если известны середины его сторон: $K(2, -4)$, $M(6, 1)$, $N(-2, 3)$.

2.54. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $A(3, -3)$ равно 5.

2.55. На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек $A(1, -4, 7)$ и $B(5, 6, -5)$.

2.56. Даны вершины треугольника $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$ и $C(-4, 0, 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

2.57. Отрезок с концами в точках $A(3, -2)$ и $B(6, 4)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

2.58. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части.

2.59*. Заданы точки $A(1, 2, 3)$, $B(2, -2, 1)$, $C(3, 0, 3)$ и $D(16, 10, 18)$. E — точка пересечения плоскости OAB (O — начало координат) с прямой, проведенной через точку D параллельно прямой (OC). Найти координаты точки E.

2.60*. Заданы точки $A(2, 5, 2)$ и $B(14, 5, 4)$; C — точка пересечения координатной плоскости Oxy с прямой, проведенной через точку B параллельно прямой (OA). Найти координаты точки C.

2.61. Даны вершины треугольника $A(1, -1, -3)$, $B(2, 1, -2)$ и $C(-5, 2, -6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

◀ Найдем разложение вектора $\overline{AE}$ по базису из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Пусть $e_1=\overline{AB}/|\overline{AB}|$ и $e_2=\overline{AC}/|\overline{AC}|$ — орты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Тогда вектор $\overline{AE}$ сонаправлен с вектором $e=e_1+e_2$ (ср. с задачей 2.47), т. е. существует число $\lambda>0$ такое, что

$$\overline{AE}=\lambda e=\lambda\left(\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}+\frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}\right). \qquad (7)$$

С другой стороны,

$$\overline{AE}=\overline{AC}+\overline{CE}=\overline{AC}+\mu\overline{CB}=\overline{AC}+\mu(\overline{AB}-\overline{AC})=$$
$$=\mu\overline{AB}+(1-\mu)\overline{AC},\quad \mu>0. \qquad (8)$$

Формулы (7) и (8) представляют собой два разложения вектора $\overline{AE}$ по базису из векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. В силу единственности разложения вектора по базису имеем

$$\frac{\lambda}{|\overline{AB}|}=\mu \text{ и } \frac{\lambda}{|\overline{AC}|}=1-\mu. \qquad (9)$$

Решая систему (9), находим

$$\lambda=\frac{1}{1/|\overline{AC}|+1/|\overline{AB}|}=\frac{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|+|\overline{AC}|},$$

так что формула (7) принимает вид

$$\overline{AE}=\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|+|\overline{AC}|}\overline{AB}+\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB}|+|\overline{AC}|}\overline{AC}. \qquad (10)$$

Из условий задачи находим:

$\overline{AB}(1, 2, 1)$ и $|\overline{AB}|=\sqrt{6}$, $\overline{AC}(-6, 3, -3)$ и $|\overline{AC}|=3\sqrt{6}$,

и на основании (10) получаем

$$\overline{AE}=\frac{3}{4}\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{AC},$$

откуда

$$\overline{AE}\left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}, 0\right) \text{ и } |\overline{AE}|=\frac{3}{4}\sqrt{10}. \ ▶$$

2.62. Треугольник задан координатами своих вершин $A(3, -2, 1)$, $B(3, 1, 5)$, $C(4, 0, 3)$. Вычислить расстояние от начала координат до точки пересечения медиан этого треугольника.

2.63. Даны вершины треугольника $A(1, 0, 2)$, $B(1, 2, 2)$ и $C(5, 4, 6)$. Точка L делит отрезок $\overline{AC}$ в отношении $\lambda=1/3$, $[CE]$ — медиана, проведенная из вершины C.

Найти координаты точки M пересечения прямых (BL) и (CE).

4. Скалярное произведение векторов. *Скалярным произведением* ненулевых векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ называется число

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = |\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}).$$

Для скалярного произведения наряду с обозначением $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ используется также обозначение $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$.

Геометрические свойства скалярного произведения:

1) $\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = 0$ (*условие перпендикулярности векторов*);

2) если $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$, то

$$0 \leqslant \varphi < \pi/2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 > 0$$

и

$$\pi/2 < \varphi \leqslant \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 < 0.$$

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1) $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1$;

2) $(\lambda\boldsymbol{a}_1)\,\boldsymbol{a}_2 = \lambda\,(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2)$;

3) $\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_2$.

Если векторы $\boldsymbol{a}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ и $\boldsymbol{a}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ представлены своими координатами в прямоугольном базисе, то скалярное произведение равно

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Из этой формулы, в частности, следует формула для определения косинуса угла между векторами

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

2.64. Доказать справедливость алгебраических свойств скалярного произведения.

2.65. $|\boldsymbol{a}_1| = 3$, $|\boldsymbol{a}_2| = 4$, $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = 2\pi/3$. Вычислить:
а) $\boldsymbol{a}_1^2 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1$; б) $(3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2)$;
в) $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)^2$.

2.66. $|\boldsymbol{a}_1| = 3$, $|\boldsymbol{a}_2| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\boldsymbol{a}_1 + \alpha\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_1 - \alpha\boldsymbol{a}_2$ будут перпендикулярны.

2.67. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} - 3\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$, если известно, что $|\boldsymbol{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{q}| = 3$ и $(\widehat{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}}) = \pi/4$.

2.68. Определить угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если известно, что $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})^2 = 20$ и $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$.

2.69. В треугольнике ABC $\overline{AB} = 3\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2$, $\overline{BC} = \boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2$. Вычислить длину его высоты $\overline{CH}$, если известно, что $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — взаимно перпендикулярные орты.

2.70. Вычислить $\text{пр}_{a+b}(2a-b)$, если $|a|=|b|=1$ и $(\widehat{a, b})=120°$.

2.71. Известно, что $\overline{AB}=2e_1-6e_2$ и $\overline{AC}=3e_1+e_2$, где e_1 и e_2 — взаимно перпендикулярные орты. Определить углы треугольника ABC.

2.72. Найти угол, образованный единичными векторами e_1 и e_2, если известно, что векторы $a=e_1+2e_2$ и $b=5e_1-4e_2$ перпендикулярны.

2.73. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

2.74. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найти величину равнодействующей этих трех сил.

2.75. Задан прямоугольник $ABCD$ и вне его произвольная точка M. Доказать равенство $\overline{MA}\cdot\overline{MC}=\overline{MB}\cdot\overline{MD}$. Вывести отсюда, что $|\overline{MA}|^2+|\overline{MC}|^2=|\overline{MB}|^2+|\overline{MD}|^2$.

2.76*. $ABCD$ — равнобочная трапеция, $\overline{AB}=a$ — основание, $\overline{AD}=b$ — боковая сторона, угол между $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ равен $\pi/3$. Выразить через a и b векторы $\overline{DC}$, $\overline{CB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{DB}$.

2.77. Зная, что $|a|=3$, $|b|=1$, $|c|=4$ и $a+b+c=0$, вычислить $ab+bc+ca$.

2.78. Даны векторы $a_1(4, -2, -4)$ и $a_2(6, -3, 2)$. Вычислить:

а) a_1a_2; б) $(2a_1-3a_2)(a_1+2a_2)$; в) $(a_1-a_2)^2$;

г) $|2a_1-a_2|$; д) $\text{пр}_{a_1}a_2$; е) $\text{пр}_{a_2}a_1$;

ж) направляющие косинусы вектора a_1;

з) $\text{пр}_{a_1+a_2}(a_1-2a_2)$; и) $\cos(\widehat{a_1, a_2})$.

2.79. Даны точки $A(2, 2)$ и $B(5, -2)$. На оси абсцисс найти такую точку M, чтобы $\widehat{AMB}=\pi/2$.

2.80. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$.

2.81. Для заданных векторов a, b, и c вычислить $\text{пр}_c(2a-3b)$:

а) $a=-i+2j+k$, $b=3i+j+k$, $c=4i+3j$;

б) $a=i-2j+3k$, $b=-3i+2j-k$, $c=6i+2j+3k$.

2.82. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$ и $D(4, 7, -2)$ — квадрат.

2.83. Найти косинус угла φ между диагоналями (AC) и (BD) параллелограмма, если заданы три его вершины $A(2, 1, 3)$, $B(5, 2, -1)$ и $C(-3, 3, -3)$.

2.84. Вычислить работу силы $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1, 2, 0)$ в положение $B(2, 1, 3)$.

2.85. Даны векторы $\boldsymbol{a}(1, 1)$ и $\boldsymbol{b}(1, -1)$. Найти косинус угла между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, удовлетворяющими системе уравнений $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$.

2.86. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\boldsymbol{c}$, если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

◀ Если $\boldsymbol{c}=X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$, то из условия задачи следует, что вектор $\boldsymbol{c}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\boldsymbol{ca}=X+Y=\boldsymbol{ab}=1;$$
$$\boldsymbol{cb}=Y+Z=\boldsymbol{ab}=1;$$
$$|\boldsymbol{c}|^2=X^2+Y^2+Z^2=|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2=2.$$

Решая эту систему, находим $X_1=-1/3$, $Y_1=4/3$, $Z_1=-1/3$ или $X_2=1$, $Y_2=0$, $Z_2=1$. ▶

2.87. Лучи $[OA)$, $[OB)$ и $[OC)$ образуют попарно равные углы величины $\pi/3$. Найти угол между биссектрисами углов $\angle AOB$ и $\angle BOC$.

2.88. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{a}(2, 1, -1)$ и удовлетворяющего условию $\boldsymbol{ax}=3$.

2.89. Вектор $\boldsymbol{x}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}_1(2, 3, -1)$ и $\boldsymbol{a}_2(1, -2, 3)$ и удовлетворяет условию $\boldsymbol{x}(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=-6$. Найти координаты $\boldsymbol{x}$.

Если задан некоторый вектор $\boldsymbol{e}$, то *ортогональной составляющей* произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ *вдоль вектора* $\boldsymbol{e}$ называется такой вектор $\boldsymbol{a}_e$, который коллинеарен $\boldsymbol{e}$, причем разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_e$ перпендикулярна вектору $\boldsymbol{e}$.

Аналогично *ортогональной составляющей* вектора $\boldsymbol{a}$ *в плоскости* P называется вектор $\boldsymbol{a}_P$, компланарный плоскости P, причем разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_P$ перпендикулярна этой плоскости.

2.90. Для вектора $\boldsymbol{a}(-1, 2, 1)$ найти ортогональную составляющую вдоль базисного орта $\boldsymbol{j}$ и ортогональную составляющую в плоскости векторов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{k}$.

2.91. Заданы векторы $\boldsymbol{e}(1, 1, 1)$ и $\boldsymbol{a}(-1, 2, 1)$. Найти:

а) ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{a}$ вдоль вектора $\boldsymbol{e}$;

б) ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{a}$ в плоскости P, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{e}$.

2.92. Заданы вершины треугольника $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -1, 2)$ и $C(-5, 6, -4)$; $[BD]$ — его высота, проведенная через вершину B. Найти координаты точки D.

2.93*. Заданы векторы $\boldsymbol{e}_1(1, -2, 0)$, $\boldsymbol{e}_2(1, 1, 1)$ и $\boldsymbol{a}(-2, 0, 1)$. Найти ортогональную составляющую $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2}$ вектора $\boldsymbol{a}$ в плоскости векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$.

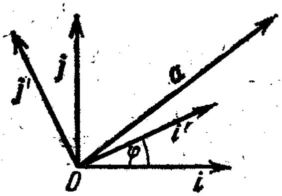


Рис. 4

Если базис $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — прямоугольный, то координаты произвольного вектора $\boldsymbol{a} = X_1\boldsymbol{e}_1 + X_2\boldsymbol{e}_2 + X_3\boldsymbol{e}_3$ в этом базисе могут быть вычислены по формуле

$$X_i = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{11}$$

В частности, формула (11) позволяет легко найти связь между координатами одного и того же вектора в различных прямоугольных базисах.

Пример 3. Пусть базис $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$ получен из базиса $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ поворотом последнего вокруг точки O на угол φ ($\varphi > 0$, если поворот произведен против часовой стрелки, $\varphi < 0$ в противном случае) (рис. 4). Установить связь между координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$.

◀ Пусть $\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$. Тогда

$$\begin{aligned} X' &= \boldsymbol{a}\boldsymbol{i}' = X\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' + Y\boldsymbol{j}\boldsymbol{i}', \\ Y' &= \boldsymbol{a}\boldsymbol{j}' = X\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}' + Y\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}'. \end{aligned} \tag{12}$$

С другой стороны, имеем:

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}' = \cos\varphi, \quad \boldsymbol{j}\boldsymbol{i}' = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi,$$

$$\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \sin\varphi, \quad \boldsymbol{j}\boldsymbol{j}' = \cos\varphi.$$

Поэтому формулы преобразования координат (12) принимают вид

$$\begin{aligned} X' &= X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \\ Y' &= X\sin\varphi + Y\cos\varphi. \end{aligned}$$ ▶

2.94. Вывести формулы преобразования координат точек плоскости при переходе от системы координат $\langle 0, \mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})\rangle$ к системе $\langle O', \mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')\rangle$, если $\overline{OO'} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j}$, а базис $\mathfrak{B}'$ получен из базиса $\mathfrak{B}$ поворотом на угол φ вокруг точки O.

2.95. Написать формулы преобразования координат векторов при переходе от базиса $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ к базису $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$, если

$$\boldsymbol{i}' = \cos\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \sin\varphi\cdot\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j}' = -\sin\varphi\cdot\boldsymbol{i} + \cos\varphi\cdot\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}.$$

2.96. В прямоугольном базисе $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ вектор $\boldsymbol{a}$ имеет разложение $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Убедиться, что тройка векторов

$$i'=i,\ j'=\frac{1}{\sqrt{2}}j-\frac{1}{\sqrt{2}}k,\quad k'=\frac{1}{\sqrt{2}}j+\frac{1}{\sqrt{2}}k$$

также образует прямоугольный базис $\mathfrak{B}'=(i', j', k')$, и найти в этом базисе координаты вектора a.

2.97. Проверить, что тройка векторов $e_1(1, -2, 0)$, $e_2(0, 1, 1)$ и $e_3(1, 2, 2)$ образует (косоугольный) базис. Выразить скалярное произведение векторов a_1, a_2 через их координаты в этом базисе, если

$$a_1=X_1^{(1)}e_1+X_2^{(1)}e_2+X_3^{(1)}e_3 \quad \text{и} \quad a_2=X_1^{(2)}e_1+X_2^{(2)}e_2+X_3^{(2)}e_3.$$

5. Векторное произведение векторов. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов e_1, e_2, e_3 называется *правой*, если наблюдателю, находящемуся внутри телесного угла, образованного этими векторами, кратчайшие повороты от e_1 к e_2 и от e_2 к e_3 кажутся происходящими против часовой стрелки. В противном случае тройка (e_1, e_2, e_3) называется *левой*.

Векторным произведением вектора a_1 на вектор a_2 называется вектор, обозначаемый символом $[a_1, a_2]$ (или $a_1\times a_2$), определяемый следующими тремя условиями:

1) длина вектора $[a_1, a_2]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах a_1 и a_2, т. е. $|[a_1, a_2]|=|a_1|\cdot|a_2|\sin(\widehat{a_1, a_2})$;

2) вектор $[a_1, a_2]$ перпендикулярен плоскости векторов a_1 и a_2;

3) упорядоченная тройка a_1, a_2, $[a_1, a_2]$ правая.

Из определения векторного произведения следует, что

$$a_1\| a_2 \Leftrightarrow [a_1, a_2]=0.$$

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) $[a_1, a_2]=-[a_2, a_1]$;

2) $[\lambda a_1, a_2]=\lambda[a_1, a_2]$;

3) $[a_1+a_2, b]=[a_1, b]+[a_2, b]$.

Если $a_1(X_1, Y_1, Z_1)$ и $a_2(X_2, Y_2, Z_2)$ — векторы, заданные своими координатами в правом прямоугольном базисе, то разложение векторного произведения $[a_1, a_2]$ в том же базисе имеет вид

$$[a_1, a_2]=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\,i+(Z_1X_2-X_1Z_2)\,j+(X_1Y_2-Y_1X_2)\,k,$$

или, в символической записи (с использованием понятия определителя 3-го порядка; см. § 1 гл. 3)

$$[a_1, a_2]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

2.98. $|a_1|=1$, $|a_2|=2$ и $(\widehat{a_1, a_2})=2\pi/3$. Вычислить:
а) $|[a_1, a_2]|$; б) $|[2a_1+a_2,\ a_1+2a_2]|$;
в) $|[a_1+3a_2,\ 3a_1-a_2]|$.

2.99. Какому условию должны удовлетворять векторы a_1 и a_2, чтобы векторы a_1+a_2 и a_1-a_2 были коллинеарны?

2.100. Упростить выражения:

а) $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]-[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}]+[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}]$,

б) $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$,

в) $[2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]$,

г) $2\boldsymbol{i}[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]+3\boldsymbol{j}[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k}]+4\boldsymbol{k}[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$.

2.101. Доказать, что $[\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]=2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ и выяснить геометрический смысл этого тождества.

2.102. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=\pi/4$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

2.103. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ связаны условием $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. Доказать, что $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$. Каков геометрический смысл этого результата?

2.104. Доказать, что при любых векторах $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ векторы $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}]$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{q}]$ и $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}]$ компланарны.

2.105. $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=5$, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=\pi/6$. Выразить через векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ единичный вектор $\boldsymbol{c}_0$, перпендикулярный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и такой, что:

а) тройка $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_0)$ правая;

б) тройка $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{a})$ левая.

2.106. Заданы векторы $\boldsymbol{a}_1(3, -1, 2)$ и $\boldsymbol{a}_2(1, 2, -1)$. Найти координаты векторов:

а) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$; б) $[2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2]$; в) $[2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2, 2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2]$.

2.107. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ и $C(4, 3, 2)$.

2.108. В треугольнике с вершинами $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ и $C(1, 3, -1)$ найти высоту $h=|\overline{BD}|$.

2.109. Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k}$ будет коллинеарен вектору $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, если $\boldsymbol{a}(3, -1, 1)$, $\boldsymbol{b}(1, 2, 0)$.

2.110. Для заданных векторов $\boldsymbol{a}(2, 0, 3)$, $\boldsymbol{b}(-3, 5, 4)$, $\boldsymbol{c}(3, 4, -1)$ вычислить проекцию вектора $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ на вектор $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

2.111. Для заданных векторов $\boldsymbol{a}(2, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}(1, 2, 1)$, $\boldsymbol{c}(2, -1, 3)$, $\boldsymbol{d}(3, -1, 2)$ вычислить проекцию вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ на вектор $[\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}]$.

2.112. Найти вектор $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]]$, если $\boldsymbol{a}(2, 1, -3)$, $\boldsymbol{b}(1, -1, 1)$.

2.113. Найти вектор $[\overline{AB}+\overline{AC}, [\overline{BC}, \overline{AB}]]$, если $A(2, 2, 3)$, $B(1, 0, 4)$, $C(2, 3, 5)$.

2.114. Три ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ связаны соотношениями $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

2.115. Сила $\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ приложена к точке $A(4, -2, 3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, 2, -1)$.

2.116. Даны три силы: $\boldsymbol{F}_1(2, -1, -3)$, $\boldsymbol{F}_2(3, 2, -1)$ и $\boldsymbol{F}_3(-4, 1, 3)$, приложенные к точке $A(-1, 4, 2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $O(2, 3, -1)$.

2.117. Вычислить площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ и $4\boldsymbol{e}_1-5\boldsymbol{e}_2$, где $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — единичные векторы и $(\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2})=\pi/4$.

2.118. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}_1(4, -2, -3)$ и $\boldsymbol{a}_2(0, 1, 3)$, образует с ортом $\boldsymbol{j}$ тупой угол и $|\boldsymbol{x}|=26$.

2.119. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$, если он перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}_1(2, -3, 1)$ и $\boldsymbol{a}_2(1, -2, 3)$, а также удовлетворяет условию $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})=10$.

2.120. При каких условиях уравнение $\boldsymbol{a}_2=[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{x}]$ имеет решение относительно $\boldsymbol{x}$? Сколько существует решений?

2.121. Найти составляющую вектора $\boldsymbol{a}(-1, 2, 0)$, перпендикулярную плоскости векторов $\boldsymbol{e}_1(1, 0, 1)$ и $\boldsymbol{e}_2(1, 1, 1)$.

2.122. Как изменится выражение (13), если координаты векторов задать в левом прямоугольном базисе? Будет ли верна эта формула в случае косоугольного базиса?

2.123*. Вектор $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]$ называется *двойным векторным произведением* заданных векторов. Доказать, что справедливо равенство

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

6. Смешанное произведение векторов. *Смешанным произведением* упорядоченной тройки векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ называется число $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\,\boldsymbol{a}_3$.

Геометрические свойства смешанного произведения:

1) если V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$, то

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\,\boldsymbol{a}_3=\begin{cases} V, & \text{если тройка } (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \text{ правая,} \\ -V, & \text{если тройка } (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \text{ левая;} \end{cases}$$

2) для того чтобы три вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ были компланарны, необходимо и достаточно выполнение условия $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\,\boldsymbol{a}_3=0$.

Основное алгебраическое свойство смешанного произведения состоит в том, что циклическая перестановка векторов не меняет его величины, т. е.

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\,\boldsymbol{a}_3=[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\,\boldsymbol{a}_1=[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1]\,\boldsymbol{a}_2.$$

Это свойство позволяет ввести обозначение $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\,\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$ (результат не зависит от того, как расставить квадратные скобки в правой части). Смешанное произведение через координаты векторов в

правом прямоугольном базисе записывается в виде

$$a_1a_2a_3=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

2.124. Векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\boldsymbol{a}_1|=4$, $|\boldsymbol{a}_2|=2$, $|\boldsymbol{a}_3|=3$. Вычислить $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$.

2.125. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ образуют левую тройку, $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$ и $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=30°$; $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$. Найти $\boldsymbol{abc}$.

2.126. Заданы векторы $\boldsymbol{a}_1(1, -1, 3)$, $\boldsymbol{a}_2(-2, 2, 1)$ и $\boldsymbol{a}_3(3, -2, 5)$. Вычислить $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3$. Какова ориентация троек:
а) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$; б) $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3)$; в) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2)$?

2.127. Установить, образуют ли векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$ базис в множестве всех векторов, если:

а) $\boldsymbol{a}_1(2, 3, -1)$, $\boldsymbol{a}_2(1, -1, 3)$, $\boldsymbol{a}_3(1, 9, -11)$;

б) $\boldsymbol{a}_1(3, -2, 1)$, $\boldsymbol{a}_2(2, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_3(3, -1, -2)$.

2.128. Доказать, что $|\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3|\leqslant|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2||\boldsymbol{a}_3|$; в каком случае имеет место знак равенства?

2.129. Доказать, что при любых $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ векторы $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

2.130. Доказать тождество

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})(4\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c})=0.$$

2.131. Доказать, что если $\alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]+\beta[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]+\gamma[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]=\boldsymbol{0}$, причем хотя бы одно из чисел α, β и γ отлично от нуля, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны.

2.132. Вычислить объем тетраэдра $OABC$, если $\overline{OA}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$; $\overline{OB}=-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\overline{OC}=2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$.

2.133. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2, -3, 5)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-2, -2, 3)$ и $D(3, 2, 4)$.

2.134. В тетраэдре с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$ и $D(3, 4, -3)$ вычислить высоту $h=|\overline{DE}|$.

2.135. Проверить, компланарны ли данные векторы:

а) $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=14\boldsymbol{i}-13\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$;

б) $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

2.136. При каком λ векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ будут компланарны?

а) $\boldsymbol{a}(\lambda, 3, 1)$, $\boldsymbol{b}(5, -1, 2)$, $\boldsymbol{c}(-1, 5, 4)$;

б) $\boldsymbol{a}(1, 2\lambda, 1)$, $\boldsymbol{b}(1, \lambda, 0)$, $\boldsymbol{c}(0, \lambda, 1)$.

2.137. Доказать, что четыре точки $A(1,\ 2,\ -1)$, $B(0,\ 1,\ 5)$, $C(-1,\ 2,\ 1)$ и $D(2,\ 1,\ 3)$ лежат в одной плоскости.

2.138. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра $ABCD$, если известно, что она лежит на оси Oy, а объем тетраэдра равен v:

а) $A(-1,\ 10,\ 0)$, $B(0,\ 5,\ 2)$, $C(6,\ 32,\ 2)$, $v=29$;

б) $A(0,\ 1,\ 1)$, $B(4,\ 3,\ -3)$, $C(2,\ -1,\ 1)$, $v=2$.

2.139. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

2.140. Доказать тождества:

а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{abc}$;

б) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=3\boldsymbol{abc}$;

в) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{abc}$;

г) $\forall\alpha,\ \beta\ (\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\boldsymbol{abc})$.

§ 2. Линейные геометрические объекты

1. Прямая на плоскости. Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax+By+C=0$ — *общее уравнение* прямой;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ — уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ перпендикулярно *нормальному* вектору $\boldsymbol{n}(A,\ B)$;

3) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$ — уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ параллельно *направляющему вектору* $\boldsymbol{q}(l,\ m)$ (*каноническое уравнение* прямой);

4) $\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \end{cases}$ $t\in(-\infty,\ +\infty)$, — *параметрические уравнения* прямой, которые в векторной форме имеют вид

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{q}t,$$

где $\boldsymbol{r}_0(x_0;\ y_0)$ — радиус-вектор точки $M_0(x_0,\ y_0)$, $\boldsymbol{q}(l,\ m)$ — направляющий вектор прямой;

5) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ — уравнение прямой *в отрезках*, где a и b — величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно;

6) $x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$ — *нормальное уравнение* прямой, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы нормального вектора $\boldsymbol{n}$, направленного из начала координат в сторону прямой, а $p>0$ — расстояние от начала координат до прямой.

Общее уравнение 1) приводится к нормальному виду 6) путем умножения на нормирующий множитель

$$\mu=-\frac{\operatorname{sgn} C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Если прямая L задана уравнением вида 6), а $M(x, y)$ — некоторая точка плоскости, то выражение

$$\delta(M, L) = x\cos\alpha + y\cos\beta - p$$

задает *отклонение точки M от прямой L*. Знак $\delta(M, L)$ указывает на взаимное расположение точки M, прямой L и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от прямой L, то $\delta(M, L) > 0$, а если M и начало координат находятся по одну сторону от прямой L, то $\delta(M, L) < 0$. Расстояние $\rho(M, L)$ от точки M до прямой L определяется равенством $\rho(M, L) = |\delta(M, L)|$.

Пример 1. Написать уравнение прямой L', параллельной двум заданным прямым L_1: $x+2y-1=0$, L_2: $x+2y+2=0$ и проходящей посередине между ними.

◀ 1-й метод. Так как вектор $\boldsymbol{n}(1, 2)$, нормальный к заданным прямым L_1 и L_2, является в то же время нормальным и к прямой L', то достаточно найти какую-нибудь точку M', лежащую посередине между L_1 и L_2. Из уравнений для L_1 и L_2 находим любые две точки $M_1 \in L_1$ и $M_2 \in L_2$, например такие: $M_1(1, 0)$ и $M_2(-2, 0)$. Тогда точка $M'(-1/2, 0)$, делящая отрезок $\overline{M_1M_2}$ пополам, лежит посередине между L_1 и L_2. Поэтому уравнение прямой L' имеет вид

$$L'\colon\ x+2y+\frac{1}{2}=0.$$

2-й метод. Произвольная точка M принадлежит L' в том и только в том случае, когда $\rho(M, L_1) = \rho(M, L_2)$, т. е.

$$|\delta(M, L_1)| = |\delta(M, L_2)|. \qquad (1)$$

Для того чтобы снять модули в этом соотношении, установим положение начала координат относительно заданных прямых L_1 и L_2. Нормальные уравнения этих прямых таковы:

$$L_1\colon\ \frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0 \text{ и } L_2\colon\ -\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}=0.$$

Так как нормали $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ из точки O в сторону L_1 и L_2 противоположно направлены, то точка O находится в полосе между L_1 и L_2.

Поэтому соотношение (1) принимает вид $\delta(M, L_1) = \delta(M, L_2)$, или

$$\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}},$$

т. е. $L'\colon\ x+2y+\dfrac{1}{2}=0$. ▶

В задачах 2.141—2.143 требуется:

1) написать уравнение прямой, привести его к общему виду и построить прямую;

2) привести общее уравнение к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

2.141. Прямая L задана точкой $M_0(x_0, y_0) \in L$ и нормальным вектором $\boldsymbol{n}(A, B)$:

а) $M_0(-1, 2)$, $\boldsymbol{n}(2, 2)$; б) $M_0(2, 1)$, $\boldsymbol{n}(2, 0)$;
в) $M_0(1, 1)$, $\boldsymbol{n}(2, -1)$.

2.142. Прямая L задана точкой $M_0(x_0, y_0) \in L$ и направляющим вектором $\boldsymbol{q}(l, m)$:

а) $M_0(-1, 2)$, $\boldsymbol{q}(3, -1)$; б) $M_0(1, 1)$, $\boldsymbol{q}(0, -1)$;
в) $M_0(-1, 1)$, $\boldsymbol{q}(2, 0)$.

2.143. Прямая L задана двумя своими точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

а) $M_1(1, 2)$, $M_2(-1, 0)$; б) $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -2)$;
в) $M_1(2, 2)$, $M_2(0, 2)$.

2.144. Заданы прямая L и точка M. Требуется:

1) вычислить расстояние $\rho(M, L)$ от точки M до прямой L;

2) написать уравнение прямой L', проходящей через точку M перпендикулярно заданной прямой L;

3) написать уравнение прямой L'', проходящей через точку M параллельно заданной прямой L.

Исходные данные:

а) L: $-2x+y-1=0$, $M(-1, 2)$;
б) L: $2y+1=0$, $M(1, 0)$;
в) L: $x+y+1=0$, $M(0, -1)$.

Пусть заданы две прямые L_1 и L_2. Возможны два случая их взаимного расположения:

1) L_1 и L_2 — параллельные прямые, в частности они совпадают;
2) L_1 и L_2 пересекаются.

В задачах 2.145—2.149 исследовать взаимное расположение заданных прямых L_1 и L_2. При этом в случае 1) найти расстояние $\rho(L_1, L_2)$ между прямыми, а в случае 2) — косинус угла $(\widehat{L_1, L_2})$ и точку M_0 пересечения прямых.

2.145. L_1: $-2x+y-1=0$, L_2: $2y+1=0$,

2.146. L_1: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{1}$, L_2: $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{0}$,

2.147. L_1: $x+y-1=0$, L_2: $2x-2y+1=0$,

2.148. L_1: $x+y-1=0$, L_2: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-2}$,

2.149. L: $-x+2y+1=0$, L_2: $2x-4y-2=0$.

2.150. Треугольник ABC задан координатами своих вершин. Требуется:

1) написать уравнение стороны (AB);

2) написать уравнение высоты (CD) и вычислить ее длину $h=|CD|$;

3) найти угол φ между высотой (CD) и медианой (BM);

4) написать уравнения биссектрис L_1 и L_2 внутреннего и внешнего углов при вершине A.

Исходные данные:

а) $A(1, 2)$, $B(2, -2)$, $C(6, 1)$;

б) $A(2, -2)$, $B(6, 1)$, $C(-2, 0)$.

2.151. Показать, что точка $M(-1, 2)$ принадлежит прямой L: $x=2t$, $y=-1-6t$. Найти соответствующее этой точке значение параметра t.

2.152. Вычислить расстояние от точки $M(1, 1)$ до прямой L: $x=-1+2t$, $y=2+t$.

Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$ и при этом $B \neq 0$ (т. е. прямая не параллельна оси Oy), то эта прямая может быть описана *уравнением с угловым коэффициентом* вида $y=kx+b$.

Пример 2. Написать уравнение прямой L', проходящей через точку $M(2, 1)$ под углом $\pi/4$ к прямой L: $2x+3y+4=0$.

◀ Углом между прямыми L и L' называется наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Поэтому (см. задачу 2.156)

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \left| \frac{k+\frac{2}{3}}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)k} \right| = 1,$$

где k — угловой коэффициент прямой L'. Из этого уравнения находим $k_1=1/5$, $k_2=-5$. Следовательно, задача имеет два решения. Используя координаты точки M, мы можем записать для каждого случая уравнение с угловым коэффициентом:

$$y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}, \quad y=-5x+11,$$

или в общем виде

$$x-5y+3=0, \quad 5x+y-11=0. \ ▶$$

2.153. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 4)$ и отстоящей от точки $A(0, 3)$ на расстояние $\rho=1$.

2.154. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1, 2)$ и удаленной от точки $A(-2, -5)$ вдвое дальше, чем от точки $B(1, 8)$.

2.155. Написать уравнение прямой, проходящей на расстоянии $\sqrt{10}$ от точки $A(5, 4)$ перпендикулярно прямой $2x+6y-3=0$.

2.156. Доказать, что если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом, то

$$\operatorname{tg}(\widehat{L_1, L_2}) = \left| \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \right|.$$

2.157. Из точки $M(5, 4)$ выходит луч света под углом $\varphi=\operatorname{arctg} 2$ к оси Ox и отражается от нее. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.

2.158. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси абсцисс от начала координат отрезок длины 2 и образующей с прямой $2x-y+3=0$ угол 45°.

2.159. В уравнении прямой $4x+\lambda y-20=0$ подобрать λ так, чтобы угол между этой прямой и прямой $2x-3y+6=0$ равнялся 45°.

2.160. В равнобедренном треугольнике ABC заданы вершина $C(4, 3)$, уравнение $2x-y-5=0$ основания (AC) и уравнение $x-y=0$ боковой стороны (AB). Написать уравнение стороны (BC).

2.161. Написать уравнение прямой, которая отстоит от точки $A(-1, 2)$ на расстояние $\rho=\sqrt{34}$ и составляет с осью Ox угол, вдвое больший угла, составляемого с осью Ox прямой $2x-6y+5=0$.

2.162. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(8, 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12.

2.163. Написать уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым L_1 и L_2 и проходящей посередине между ними, если:

а) L_1: $3x-2y-1=0$, L_2: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{3}$;

б) L_1: $3x-15y-1=0$, L_2: $\dfrac{x+\frac{1}{2}}{5}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{1}$.

2.164. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 1)$ под углом $\pi/4$ к прямой L: $x=1+t$, $y=-2-{}^2/_3t$.

2.165. Даны две противоположные вершины квадрата $A(1, 3)$ и $C(-1, 1)$. Найти координаты двух его других вершин и написать уравнения его сторон.

2.166. Известны уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-3=0$ и точка пересечения диагоналей $N(-2, 0)$. Написать уравнения остальных его сторон.

2.167. Точка $A(5, -4)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $x-7y-8=0$. Написать уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

2.168. Написать уравнения сторон треугольника ABC, если задана его вершина $A(1, 3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

2.169*. Доказать, что прямая $2x+y+3=0$ пересекает отрезок $[M_1M_2]$, где $M_1(-5, 1)$ и $M_2(3, 7)$.

2.170. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2, 3)$ на одинаковых расстояниях от точек $M_1(5, -1)$ и $M_2(3, 7)$.

2.171. Установить, лежат ли точка $M_0(1, -2)$ и начало координат в одном угле, в смежных или в вертикальных углах, образованных пересекающимися прямыми L_1 и L_2, если:

а) L_1: $2x-y-5=0$, L_2: $3x+y+10=0$;

б) L_1: $x-2y-1=0$, L_2: $3x-y-2=0$.

2.172. Установить, какой из углов — острый или тупой, — образованных прямыми $3x-5y-4=0$ и $x+2y+3=0$, содержит точку $M(2, -5)$.

2.173. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2, 6)$, а также уравнения высоты $x-7y+15=0$ и биссектрисы $7x+y+5=0$, проведенных из одной вершины.

2.174. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2, -7)$, а также уравнения высоты $3x+y+11=0$ и медианы $x+2y+7=0$, проведенных из различных вершин.

2.175. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(3, -1)$, а также уравнения биссектрисы $x-4y+10=0$ и медианы $6x+10y-59=0$, проведенных из различных вершин.

2.176. Даны уравнения $5x+4y=0$ и $3x-y=0$ медиан треугольника и координаты $(-5, 2)$ одной из его вершин. Найти уравнения сторон.

2.177. Даны уравнения $y+4=0$, $7x+4y+5=0$ биссектрис двух внутренних углов треугольника и уравнение $4x+3y=0$ стороны, соединяющей вершины, из которых выходят данные биссектрисы. Написать уравнения двух других сторон треугольника.

2.178. а) Доказать, что точка H пересечения высот треугольника лежит на одной прямой с точкой M пересечения его медиан и с центром N, описанной окружности.

б) Проверить утверждение п. а) для треугольника с вершинами в точках $A(5, 8)$, $B(-2, 9)$, $C(-4, 5)$. Определить, в каком отношении λ точка H делит направленный отрезок $\overline{MN}$.

2.179. В треугольнике $A(-3, -1)$, $B(1, -5)$, $C(9, 3)$, $\overline{AM}=3\overline{MB}$, $\overline{AN}=3\overline{NC}$. Показать, что точка пересечения прямых (BN) и (CM) лежит на медиане, проведенной из вершины A.

2. Плоскость и прямая в пространстве. Плоскость P в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax+By+Cz+D=0$ — *общее уравнение* плоскости;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ — уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно *нормальному вектору* $\boldsymbol{n}(A, B, C)$;

3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ — уравнение плоскости *в отрезках*, где a, b, c — величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy, Oz соответственно;

4) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ — *нормальное уравнение* плоскости, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормального вектора $\boldsymbol{n}$, направленного из начала координат в сторону плоскости, а $p>0$ — расстояние от начала координат до плоскости.

Общее уравнение 1) приводится к нормальному виду 4) путем умножения на нормирующий множитель

$$\mu=-\frac{\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если плоскость P задана нормальным уравнением вида 4), а $M(x, y, z)$ — некоторая точка пространства, то выражение

$$\delta(M, P)=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p$$

задает *отклонение точки M от плоскости P*. Знак $\delta(M, P)$ указывает на взаимное расположение точки M, плоскости P и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от плоскости P, то $\delta(M, P)>0$, а если M и начало координат находятся по одну сторону от плоскости P, то $\delta(M, P)<0$.

Расстояние $\rho(M, P)$ от точки M до плоскости P определяется равенством $\rho(M, P)=|\delta(M, P)|$.

Прямая L в пространстве может быть задана:

1) *общими уравнениями*

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, что равносильно ее заданию как линии пересечения плоскостей;

2) *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt, \end{cases}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{q}t,$$

где $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ — радиус-вектор некоторой точки, принадлежащей прямой, а $\boldsymbol{q}(l, m, n)$ — направляющий вектор прямой;

3) *каноническими уравнениями*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

что равносильно описанию прямой как линии пересечения трех плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости.

Пример 3. Написать уравнение плоскости P, проходящей через точки $M_1(1, 1, 1)$ и $M_2(0, 2, 1)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}(2, 0, 1)$.

◀ Задача имеет единственное решение, так как векторы $\overline{M_1M_2}(-1, 1, 0)$ и $\boldsymbol{a}(2, 0, 1)$ неколлинеарны. В качестве нормального вектора к плоскости может быть взят вектор

$$\boldsymbol{n}=[\overline{M_1M_2}, \boldsymbol{a}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}.$$

Уравнение плоскости имеет вид $(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0$, или $x+y-2z=0$. Так как в последнем уравнении отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат.

Другой способ. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости P в том и только в том случае, когда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\boldsymbol{a}$ компланарны. Следовательно,

$$\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

т. е. $x+y-2z=0$. ▶

Пример 4. Прямая L задана общими уравнениями

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2=0. \end{cases}$$

Написать канонические уравнения этой прямой, а также уравнение ее проекции на координатную плоскость Oxz.

◀ Точка $M(0, 2, 2)$ удовлетворяет общим уравнениям прямой (проверьте!) и, следовательно, лежит на этой прямой. В качестве направляющего вектора прямой может быть взят вектор $\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$, где $\boldsymbol{n}_1(1, 1, -1)$ и $\boldsymbol{n}_2(2, -1, 0)$ — нормальные векторы плоскостей, линией пересечения которых является заданная прямая. Таким образом,

$$\boldsymbol{q}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},$$

и канонические уравнения прямой таковы:

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{-3}.$$

Полученная пропорция эквивалентна системе трех уравнений

$$\begin{gathered} -2x+y-2=0, \\ -3x+z-2=0, \\ -3y+2z+2=0, \end{gathered}$$

описывающих три плоскости, проектирующие прямую на координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz соответственно (*уравнения прямой в проекциях*). В частности, уравнение $-3x+z-2=0$ есть уравнение проекции заданной прямой на плоскость Oxz. ▶

Пример 5. Заданы скрещивающиеся прямые

$$L_1: \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1} \text{ и } L_2: \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Найти расстояние $\rho(L_1, L_2)$ между прямыми и написать уравнения общего перпендикуляра L к этим прямым.

◀ Найдем уравнение плоскости P, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2 (рис. 5). Точка $M_1(0, 1, -2)$ лежит на прямой L_1 и, следовательно, принадлежит искомой плоскости P. В качестве нормального вектора к этой плоскости возьмем вектор

$$\boldsymbol{n}=[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

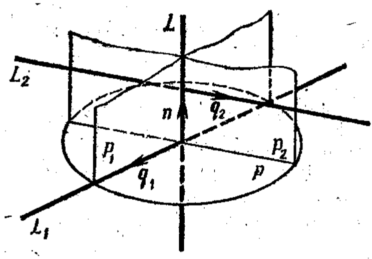


Рис. 5

Уравнение плоскости P:

$$-2x-(y-1)-4(z+2)=0,$$

или, в общем виде, $2x+y+4z+7=0$.

Расстояние $\rho(L_1, L_2)$ равно расстоянию от любой точки прямой L_2, например, точки $M_2(-1, -1, 2)$, до плоскости P. Нормальное уравнение плоскости P имеет вид

$$-\frac{2}{\sqrt{21}}x-\frac{1}{\sqrt{21}}y-\frac{4}{\sqrt{21}}z-\frac{7}{\sqrt{21}}=0,$$

откуда

$$\rho(L_1, L_2)=|\delta(M_2, P)|=\left|\frac{2}{\sqrt{21}}+\frac{1}{\sqrt{21}}-\frac{8}{\sqrt{21}}-\frac{7}{\sqrt{21}}\right|=\frac{12}{\sqrt{21}}.$$

Для того чтобы составить уравнение общего перпендикуляра L, найдем уравнение плоскостей P_1 и P_2, проходящих через заданные прямые L_1 и L_2 соответственно и перпендикулярных плоскости P. Имеем: $M_1(0, 1, -2)\in P_1$ и $\boldsymbol{n}_1=[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{n}]=\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\perp P_1$, откуда P_1: $x-10y+2z+14=0$. Аналогично $M_2(-1, -1, 2)\in P_2$ и $\boldsymbol{n}_2=[\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{n}]=-9\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}\perp P_2$, откуда P_2: $3x-2y-z+3=0$.

Так как $L=P_1\cap P_2$, то

$$\begin{cases} x-10y+2z+11=0, \\ 3x-2y-z+3=0 \end{cases}$$

— общие уравнения прямой L. ▶

2.180. Заданы плоскость P и точка M. Написать уравнение плоскости P', проходящей через точку M параллельно плоскости P, и вычислить расстояние $\rho(P, P')$, если:

а) P: $-2x+y-z+1=0$, $M(1, 1, 1)$;

б) P: $x-y-1=0$, $M(1, 1, 2)$.

2.181. Написать уравнение плоскости P', проходящей через заданные точки M_1 и M_2 перпендикулярно заданной плоскости P, если:

а) P: $-x+y-1=0$, $M_1(1, 2, 0)$ $M_2(2, 1, 1)$;

б) P: $2x-y+z+1=0$, $M_1(0, 1, 1)$, $M_2(2, 0, 1)$.

2.182. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, если:

а) $M(1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_1(0, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_2(-1, 0, 1)$;

б) $M(0, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_1(2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2(1, 1, 0)$.

2.183. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\boldsymbol{a}$, если:

а) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}(3, 0, 1)$;

б) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 3, -1)$, $\boldsymbol{a}(0, -1, 2)$.

2.184. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2 и M_3, если:

а) $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $M_3(3, 0, 1)$;

б) $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(0, -1, 2)$, $M_3(2, 3, -1)$.

Пусть заданы две плоскости P_1 и P_2. Возможны два случая их взаимного расположения:

1) $P_1 \parallel P_2$, в частности плоскости совпадают;
2) P_1 и P_2 пересекаются по некоторой прямой.

В задачах 2.185—2.188 исследовать взаимное расположение заданных плоскостей. При этом в случае 1) найти расстояние $\rho(P_1, P_2)$ между плоскостями, а в случае 2) — косинус угла между ними.

2.185. P_1: $-x+2y-z+1=0$, P_2: $y+3z-1=0$.

2.186. P_1: $2x-y+z-1=0$, P_2: $-4x+2y-2z-1=0$.

2.187. P_1: $x-y+1=0$, P_2: $y-z+1=0$.

2.188. P_1: $2x-y-z+1=0$, P_2: $-4x+2y+2z-2=0$.

2.189. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью P: $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

2.190. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 7, -5)$ и отсекающей от осей координат положительные и равные отрезки.

2.191. Три грани тетраэдра, расположенного во втором октанте ($x<0$, $y>0$, $z>0$), совпадают с координатными плоскостями. Написать уравнение четвертой грани, зная длину ребер, ее ограничивающих: $|\overline{AB}|=6$, $|\overline{BC}|=\sqrt{29}$, $|\overline{AC}|=5$, и найти длину высоты $[OH]$ тетраэдра.

2.192. Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные плоскостями P_1 и P_2, если:

а) P_1: $x-3y+2z-5=0$, P_2: $3x-2y-z+3=0$;

б) P_1: $2x-y+5z-3=0$, P_2: $2x-10y+4z-2=0$.

2.193. Написать уравнение плоскости, равноудаленной от двух заданных плоскостей P_1 и P_2, если:

а) P_1: $4x-y-2z-3=0$, P_2: $4x-y-2z-5=0$;

б) P_1: $5x-3y+z+3=0$, P_2: $10x-6y+2z+7=0$.

2.194. Установить, лежат ли точки $M_1(2, -1, 1)$ и $M_2(1, 2, -3)$ в одном угле, в смежных или в вертикальных углах, образованных плоскостями P_1 и P_2, если:

а) P_1: $3x-y+2z-3=0$, P_2: $x-2y-z+4=0$;

б) P_1: $2x-y+5z-1=0$, P_2: $3x-2y+6z-1=0$.

2.195. Известны координаты вершин тетраэдра: $A(2, 0, 0)$, $B(5, 3, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(-2, -4, 1)$. Написать уравнения его граней.

2.196. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 1, -1)$ и перпендикулярной к плоскостям $2x-y+5z+3=0$ и $x+3y-z-7=0$.

2.197. Прямая L задана общими уравнениями. Написать для этой прямой канонические уравнения и уравнения в проекциях (см. пример 4), если:

а) L: $\begin{cases} 2x-y+2z-3=0, \\ x+2y-z-1=0; \end{cases}$ б) L: $\begin{cases} x+2y-3z-5=0; \\ 2x-y+z+2=0. \end{cases}$

2.198. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$ параллельно:

а) вектору $\boldsymbol{q}(2, -3, 5)$;

б) прямой $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$;

в) оси Ox; г) оси Oz;

д) прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z-3=0; \end{cases}$

е) прямой $x=-2+t$, $y=2t$, $z=1-{}^1/_2t$.

2.199. Написать уравнения прямой, проходящей через две заданные точки M_1 и M_2, если:

а) $M_1(1, -2, 1)$, $M_2(3, 1, -1)$;

б) $M_1(3, -1, 0)$, $M_2(1, 0, -3)$.

2.200. Заданы прямая L: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ и точка $M(0, 1, 2) \notin L$ (проверить!). Требуется:

а) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку M;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L;

в) написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую L;

г) вычислить расстояние $\rho(M, L)$;

д) найти проекцию точки M на прямой L.

2.201. Заданы плоскость P: $x+y-z+1=0$ и прямая L: $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, причем $L \not\subset P$ (проверить!). Требуется:

а) вычислить $\sin(\widehat{P, L})$ и координаты точки пересечения прямой и плоскости;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L перпендикулярно к плоскости P;

в) написать уравнения проекции прямой L на плоскость P.

2.202. Пусть заданы две прямые:

$$L_1\colon \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad L_2\colon \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Доказать, что прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости в том и только в том случае, если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

2.203. Используя результат задачи 2.202, убедиться, что прямые L_1 и L_2 принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости. Исходные данные:

а) L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$, L_2: $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$;

б) L_1: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$, L_2: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

2.204. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}.$$

2.205. Найти расстояние от точки $A(2, 3, -1)$ до заданной прямой L:

а) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=3t+5, \\ y=2t, \\ z=-2t-25. \end{cases}$

2.206. Доказать, что прямые

$$L_1: \begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$$

параллельны и найти расстояние $\rho(L_1, L_2)$.

2.207. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x-3y+2z+1=0$ с прямыми

$$\frac{x-5}{5}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{-6}=\frac{z-5}{2}.$$

2.208. При каком значении λ плоскость $5x-3y+\lambda z+1=0$ будет параллельна прямой

$$\begin{cases} x-4z-1=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$$

2.209. Найти уравнения проекции прямой $\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{4}$ на плоскость $x-3y-z+8=0$.

2.210. Определить угол между прямой

$$\begin{cases} x+y+z-2=0, \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$$

и плоскостью, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, -2, 1)$.

2.211. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(7, 1, 0)$ параллельно плоскости $2x+3y-z-15=0$ и пересекающей прямую $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

2.212. Написать канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3, -2, -4)$ параллельно плоскости $3x-2y-3z-7=0$ и пересекает прямую $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

2.213. Доказать, что расстояние между скрещивающимися прямыми L_1: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{q}_1 t$ и L_2: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{q}_2 t$ может быть вычислено по формуле

$$\rho(L_1, L_2)=\frac{|(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2|}{|[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]|}.$$

Для заданных прямых L_1 и L_2 требуется:

а) доказать, что прямые не лежат в одной плоскости, т. е. являются скрещивающимися;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую L_2 параллельно L_1;

в) вычислить расстояние между прямыми.

г) написать уравнение общего перпендикуляра к прямым L_1 и L_2.

2.214. L_1: $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$, L_2: $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$.

2.215. L_1: $\frac{x-6}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+3}{4}$, L_2: $\frac{x+1}{3}=\frac{y+7}{-3}=\frac{z-4}{8}$.

2.216. L_1: $\frac{x}{1}=\frac{y-9}{4}=\frac{z+2}{-3}$, L_2: $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{9}$.

2.217. L_1: $\frac{x+7}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-4}{3}$, L_2: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+8}{2}=\frac{z+12}{-1}$.

2.218. Куб $ABCDA'B'C'D'$ задан своими вершинами $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $A'(0, 0, 1)$, $B'(1, 0, 1)$, $C'(1, 1, 1)$, $D'(0, 1, 1)$. Выполнить следующие задания:

а) написать уравнения прямых $(A'C)$ и (BC');

б) вычислить расстояние между прямыми $(A'C)$ и (BC');

в) написать уравнение общего перпендикуляра к прямым $(A'C)$ и (BC');

г) написать уравнение плоскости, проходящей через точки P, Q и H, где P — центр грани $ABB'A'$, Q делит $\overline{BC'}$ в отношении $1/3$ и H расположена на ребре (BB') так, что длина вектора $\overline{PH}+\overline{HQ}$ минимальна;

д) определить угол между полученной в п. г) плоскостью и диагональю куба (BD').

§ 3. Кривые на плоскости

1. Уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат. Говорят, что кривая Γ в системе координат Oxy имеет уравнение

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

если выполнено следующее условие: точка $M(x, y)$ принадлежит кривой Γ в том и только в том случае, когда ее координаты x и y удовлетворяют соотношению (1). Если, в частности, $F(x, y)=f(x)-y$, то уравнение (1) может быть записано в виде

$$y=f(x), \tag{2}$$

и в этом случае кривая Γ совпадает с графиком функции $f(x)$.

В настоящем параграфе изучается связь между геометрическими свойствами кривой и ее уравнением в некоторых наиболее простых случаях.

Пример 1. Написать уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(-a, 0)$, $B(0, a)$ и $C(a, 0)$ равна $3a^2$.

◀ Пусть Γ — кривая, удовлетворяющая условиям задачи; $M(x, y) \in \Gamma$ в том и только в том случае, когда

$$\rho^2(M, A)+\rho^2(M, B)+\rho^2(M, C)=3a^2,$$

или

$$(x+a^2)+y^2+x^2+(y-a)^2+(x-a^2)+y^2=3a^2.$$

После простых преобразований получаем

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}ay=0,$$

или, выделяя полный квадрат,

$$x^2+\left(y-\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{a^2}{9}.$$

Это и есть искомое уравнение кривой, являющейся окружностью радиуса $a/3$ с центром в точке $M_0(0, a/3)$. ▶

В задачах 2.219—2.232 требуется установить, какие кривые определяются заданными уравнениями, и построить эти кривые.

2.219. $x+|y|=0$. **2.220.** $|x|+y-x=0$. **2.221.** $x^2-xy=0$.
2.222. $xy+y^2=0$. **2.223.** $x^2-y^2=0$. **2.224.** $xy=0$.
2.225. $y^2-9=0$. **2.226.** $x^2-x-6=0$.
2.227. $x^2y-7xy+10y=0$. **2.228.** $x^2+y^2=4$.
2.229. $x^2+(y+3)^2=1$. **2.230.** $x^2+2y^2=0$.
2.231. $2x^2+y^2+2=0$. **2.232.** $x^2+|y^2-1|=0$.

2.233. Написать уравнение кривой, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от точек $M_1(3, 2)$ и $M_2(2, 3)$.

2.234. Написать уравнение кривой, разность квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $M_1(-a, 0)$ и $M_2(a, 0)$ равна c.

2.235. Написать уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до оси Ox вдвое больше расстояния до оси Oy.

2.236. Написать уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $M_1(-3, 0)$ и $M_2(3, 0)$ равна 50.

2.237. Написать уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до точки $M_1(-1, 1)$ вдвое меньше расстояния до точки $M_2(-4, 4)$.

2.238. Написать уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-2, 0)$ и $F_2(2, 0)$ равна $2\sqrt{5}$.

2.239. Написать уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-2, -2)$ и $F_2(2, 2)$ равен 4.

2.240. Написать уравнение кривой, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от точки $F(2, 2)$ и от оси Ox.

2.241. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет окружность, найти ее центр C и радиус R:

а) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$;

б) $x^2+y^2-8x=0$; в) $x^2+y^2+4y=0$.

2.242. Написать уравнение окружности в каждом из следующих случаев (обозначено: C — центр окружности, R — радиус, M, M_1, M_2, M_3 — точки на окружности):

а) $C(2, -3)$, $R=7$; б) $M(2, 6)$, $C(-1, 2)$;

в) $M_1(3, 2)$, $M_2(-1, 6)$ — концы диаметра окружности;

г) $C(1, -1)$, прямая $5x-12y+9=0$ — касательная к окружности;

д) $M(1, 2)$, окружность касается координатных осей;

е) $M_1(3, 1)$, $M_2(-1, 3)$, $C\in L$: $3x-y-2=0$;

ж)* $M_1(-1, 3)$, $M_2(0, 2)$, $M_3(1, -1)$.

2.243. Написать уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-6y-17=0$, перпендикулярного прямой $5x+2y-13=0$.

2.244. Вычислить кратчайшее расстояние от точки M_0 до окружности Г, если:

а) $M_0(6, -8)$, Г: $x^2+y^2=9$;

б) $M_0(-7, 2)$, Г: $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

2.245. Определить, как расположена прямая относительно окружности — пересекает, касается или проходит вне ее, если прямая и окружность заданы уравнениями:

а) $2x-y-3=0$, $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

б) $x-2y-1=0$, $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;

в) $x-y+10=0$, $x^2+y^2-1=0$.

2. Алгебраические кривые второго порядка. *Алгебраической кривой второго порядка* называется кривая Г, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{3}$$

где не все коэффициенты A, B и C равны одновременно нулю (в противном случае Г — прямая, т. е. алгебраическая кривая первого порядка).

В общем случае может оказаться, что уравнение (3) определяет так называемую *вырожденную* кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если же кривая Г невырожденная, то для нее найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих трех видов (*каноническое* *уравнение*):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a \geqslant b > 0, \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,\ b > 0, \tag{5}$$

$$y^2=2px, \qquad p > 0. \tag{6}$$

При этом кривая Г называется соответственно *эллипсом*, *гиперболой* или *параболой*, а сама система координат, в которой ее уравнение имеет вид (4), (5) или (6), называется *канонической системой координат* для заданной кривой.

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду подробно рассматривается в п. 4 § 3 гл. 4. Целью

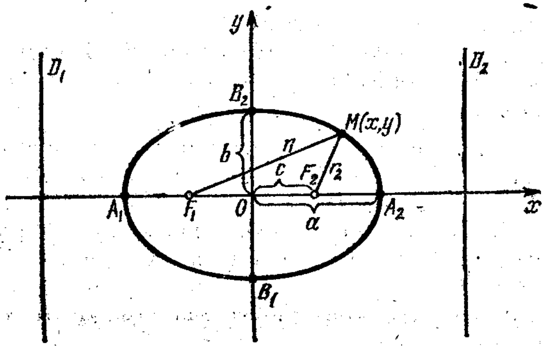


Рис. 6

настоящего пункта является изучение основных геометрических свойств невырожденных кривых второго порядка на основе их канонических уравнений.

Эллипс с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a \geqslant b > 0$, имеет форму, изображенную на рис. 6.

Параметры a и b называются *полуосями* эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1(-a,\ 0)$, $A_2(a,\ 0)$, $B_1(0,\ -b)$ и $B_2(0,\ b)$ — его *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy — *главными осями*, а центр симметрии O — *центром* эллипса.

Точки $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}\geqslant 0$, называются *фокусами* эллипса, векторы $\overline{F_1M}$ и $\overline{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1=|\overline{F_1M}|$ и $r_2=|\overline{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей эллипсу. В частном случае $a=b$ фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, или $x^2+y^2=a^2$, т. е. описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Число $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ $(0 \leqslant e < 1)$ называется *эксцентриситетом* эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $e=0$ эллипс является окружностью).

Прямые D_1: $x=-a/e$ и D_2: $x=a/e$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии a/e от центра, называются *директрисами* эллипса.

2.246. Построить эллипс $9x^2+25y^2=225$. Найти:
а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

2.247. Написать каноническое уравнение эллипса, если:
а) $a=3$, $b=2$; б) $a=5$, $c=4$; в) $c=3$, $e=3/5$; г) $b=5$, $e=12/13$; д) $c=2$ и расстояние между директрисами равно 5; е) $e=1/2$ и расстояние между директрисами равно 32.

2.248. Написать уравнение эллипса с полуосями a и b и центром в точке $C(x_0, y_0)$, если известно, что его главные оси параллельны координатным осям.

2.249. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти его центр C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:
а) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;
б) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$;
в) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

2.250. Доказать следующие утверждения:
а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a\geqslant b$, то фокальные радиусы этой точки равны

$$r_1(M)=a+ex, \quad r_2(M)=a-ex$$

(см. рис. 6). Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки M эллипса выполняется равенство

$$r_1(M)+r_2(M)=\text{const}=2a.$$

б) Пусть заданы точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, $c\geqslant 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $|\overline{F_1M}|+|\overline{F_2M}|=\text{const}=2a$, есть эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$.

2.251. Доказать следующие утверждения:
а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M, D_1)$ и $\rho(M, D_2)$ — ее расстояния до директрис, то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)}=\frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)}=\text{const}=e.$$

б) Пусть заданы точка $F(c, 0)$ и прямая D: $x-d=0$, $d>c>0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = e < 1$, есть эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a = de$ и $b^2 = a^2 - c^2$.

2.252. Эллипс, главные оси которого совпадают с координатными осями, проходит через точки $M_1(2, \sqrt{3})$ и $M_2(0, 2)$. Написать его уравнение, найти фокальные радиусы точки M_1 и расстояния этой точки до директрис.

2.253. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку, расстояние от которой до фокуса F_2 в четыре раза больше расстояния до фокуса F_1.

2.254. Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если сумма расстояний от нее до точек $F_1(-1, -1)$ и $F_2(1, 1)$ остается постоянной и равной $2\sqrt{3}$.

2.255. Написать уравнение кривой, по которой движется точка M, если расстояние от нее до точки $F(3, 0)$ остается в два раза меньше расстояния до прямой $x + y - 1 = 0$.

2.256. Определить, как расположена прямая относительно эллипса: пересекает, касается или проходит вне его, если прямая и эллипс заданы уравнениями:

а) $2x - y - 3 = 0$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,

б) $2x + y - 10 = 0$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,

в) $3x + 2y - 20 = 0$, $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

2.257. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в его точке $M_0(x_0, y_0)$.

◄ Пусть сначала $y_0 \neq 0$, т. е. точка M_0 не совпадает ни с одной из вершин $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$. В этом случае уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ неявно определяет функцию $y = y(x)$, $-a < x < a$, график которой проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и совпадает с соответствующей (верхней при $y_0 > 0$, или нижней при $y_0 < 0$) половиной эллипса. Дифференцируя по x тождество $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(x)}{b^2} = 1$, найдем, что производная $y'(x_0)$ равна

$$y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Отсюда уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0),$$

или, с учетом равенства $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad (7)$$

Если же $y_0=0$ (и, следовательно, $x_0=\pm a$), то уравнения касательных к эллипсу имеют вид $x=\pm a$, т. е. и в этом случае формула (7) остается верной. ▶

2.258. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5/2}=1$, параллельных прямой $3x+2y+7=0$.

2.259. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2+4y^2=20$, перпендикулярных прямой $2x-2y-13=0$.

2.260. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проведенные через концы одного и того же диаметра, параллельны.

2.261. Написать уравнения касательных, проведенных из точки $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ к эллипсу $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

2.262. На эллипсе $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $2x-3y+25=0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

2.263. Доказать, что касательная к эллипсу в его произвольной точке M составляет равные углы с фокальными радиус-векторами $\overline{F_1M}$ и $\overline{F_2M}$ этой точки.

2.264*. Из левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1$ под тупым углом α к оси Ox направлен луч света, причем $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Написать уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от эллипса.

Гипербола с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a, b>0$, имеет форму, изображенную на рис. 7.

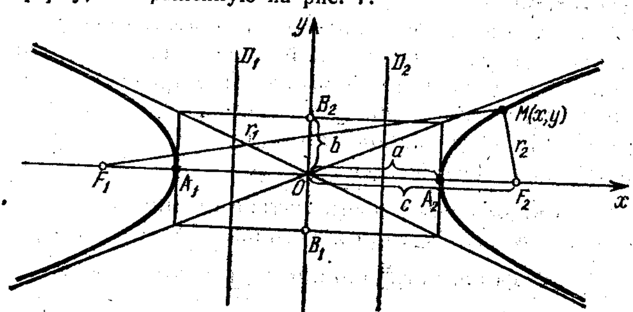


Рис. 7

Параметры a и b называются *полуосями* гиперболы, точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ — ее *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy — *действительной* и *мнимой осями*, а центр симметрии O — *центром* гиперболы.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2+b^2} > 0$, называются *фокусами* гиперболы, векторы $\overline{F_1M}$ и $\overline{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1 = |\overline{F_1M}|$ и $r_2 = |\overline{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей гиперболе.

Число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ $(1 < e < +\infty)$ называется *эксцентриситетом* гиперболы и является мерой ее «сплюснутости». В частном случае $a = b$ гипербола называется *равносторонней*; ее эксцентриситет равен $e = \sqrt{2}$, а угол между асимптотами равен $\pi/2$.

Прямые D_1: $x = -a/e$ и D_2: $x = a/e$, перпендикулярные действительной оси и проходящие на расстоянии a/e от центра, называются *директрисами* гиперболы.

2.265. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

2.266. Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$ (*сопряженную* к гиперболе задачи 2.265). Какова каноническая система координат для этой гиперболы? Найти:

а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

2.267. Написать каноническое уравнение гиперболы, если: а) $a = 2$, $b = 3$; б) $b = 4$, $c = 5$; в) $c = 3$, $e = 3/2$; г) $a = 8$, $e = 5/4$; д) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$; е) $e = 3/2$ и расстояние между директрисами равно 8/3.

2.268. Написать уравнение гиперболы с полуосями a и b и центром в точке $C(x_0, y_0)$, если известно, что ее действительная и мнимая оси параллельны осям Ox и Oy соответственно.

2.269. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

2.270. Доказать следующие утверждения:

а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то фокальные радиусы этой точки равны

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = -a + ex,$$

если точка M лежит на правой ветви гиперболы, и

$$r_1(M) = -a - ex, \quad r_2(M) = a - ex,$$

если эта точка лежит на ее левой ветви. Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки M гиперболы выполняется равенство

$$|r_1(M) - r_2(M)| = \text{const} = 2a.$$

б) Пусть заданы точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, $c > 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $||\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}|| = \text{const} = 2a$, $a > 0$, есть гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

2.271. Доказать следующие утверждения:

а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M, D_1)$ и $\rho(M, D_2)$ — расстояния от нее до директрис, то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e.$$

б) Пусть заданы точка $F(c, 0)$ и прямая D: $x - d = 0$, $c > d > 0$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)} = \text{const} = e > 1$, есть гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a = de$ и $b^2 = c^2 - a^2$.

2.272. Убедившись, что точка $M(-5, 9/4)$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, найти фокальные радиусы этой точки и ее расстояния до директрис.

2.273. Найти точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, находящиеся на расстоянии 7 от фокуса F_1.

2.274. Написать уравнение гиперболы, если известно, что ее фокусами являются точки $F_1(-3, -4)$ и $F_2(3, 4)$, а расстояние между директрисами равно 3,6.

2.275. Написать уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ и уравнение соответствующей директрисы $3x - y + 3 = 0$.

2.276. Показать, что кривая, заданная уравнением $xy = 1$ или $y = 1/x$, есть равносторонняя гипербола. Написать ее каноническое уравнение, найти эксцентриситет, фокусы и уравнения директрис.

2.277*. Написать уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в ее точке $M_0(x_0, y_0)$.

2.278. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, параллельных прямой $10x-3y+9=0$.

2.279. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, перпендикулярных прямой $4x+3y-7=0$.

2.280. Доказать, что касательные к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=$ $=1$, проведенные через концы одного и того же диаметра, параллельны.

2.281. Написать уравнения касательных, проведенных из точки $A(-1, -7)$ к гиперболе $x^2-y^2=16$.

2.282. На гиперболе $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$, найти точку M_0, ближайшую к прямой $3x+2y+1=0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

2.283. Доказать, что касательная к гиперболе в ее произвольной точке M составляет равные углы с фокальными радиус-векторами $\overline{F_1M}$ и $\overline{F_2M}$ этой точки.

2.284*. Из правого фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ под углом α ($\pi<\alpha<{}^3/_2\pi$) к оси Ox направлен луч света, причем $\operatorname{tg}\alpha=2$. Написать уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от гиперболы.

Парабола с каноническим уравнением $y^2=2px$, $p>0$, имеет форму, изображенную на рис. 8.

Число p называется *параметром* параболы, точка O — ее *вершиной*, а ось Ox — *осью* параболы.

Точка $F(p/2, 0)$ называется *фокусом* параболы, вектор $\overline{FM}$ — *фокальным радиус-вектором*, а число $r=|\overline{FM}|$ — *фокальным радиусом* точки M параболы.

Прямая D: $x=-p/2$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $p/2$ от вершины параболы, называется ее *директрисой*.

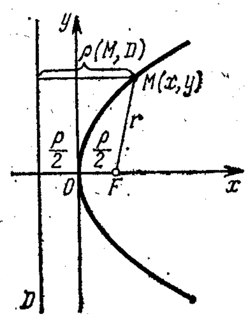


Рис. 8

2.285. Построить следующие параболы и найти их параметры:

а) $y^2=6x$; б) $x^2=5y$;
в) $y^2=-4x$; г) $x^2=-y$.

2.286. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что:

а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и $p=1/2$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и проходит через точку $M(4, -8)$;

в) фокус параболы находится в точке $F(0, -3)$.

2.287. Написать уравнение параболы, если известно, что вершина ее находится в точке $A(x_0, y_0)$, параметр равен p, ось параллельна оси Ox и парабола расположена относительно прямой $x=x_0$:

а) в правой полуплоскости;

б) в левой полуплоскости.

2.288. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, найти координаты ее вершины A и величину параметра p:

а) $y^2=4x-8$; б) $x^2=2-y$;

в) $y=4x^2-8x+7$; г) $y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$;

д) $x=-\frac{1}{4}y^2+y$; е) $x=2y^2-12y+14$.

2.289. Доказать следующие утверждения:

а) Если $M(x, y)$ — произвольная точка параболы $y^2=2px$, $r(M)$ — ее фокальный радиус, а $\rho(M, D)$ — расстояние от точки M до директрисы (см. рис. 8), то выполняется равенство

$$\frac{r(M)}{\rho(M, D)}=\text{const}=1.$$

б) Пусть заданы точка $F(p/2, 0)$ и прямая D: $x=-p/2$. Тогда множество точек M, удовлетворяющих условию $\frac{|\overline{FM}|}{\rho(M, D)}=\text{const}=1$, есть парабола $y^2=2px$.

2.290. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2=12x$, если $y(M)=6$.

2.291. Написать уравнение параболы, если известны:

а) фокус $F(4, 3)$ и директриса D: $y+1=0$;

б) фокус $F(2, -1)$ и директриса D: $x-y-1=0$.

2.292. Написать уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ в ее точке $M_0(x_0, y_0)$.

2.293. Написать уравнение касательной к параболе $y^2=8x$, параллельной прямой $2x+2y-3=0$.

2.294. Написать уравнение касательной к параболе $x^2=16y$, перпендикулярной прямой $2x+4y+7=0$.

2.295. Написать уравнения касательных к параболе $y^2=36x$, проведенных из точки $A(2, 9)$.

2.296. На параболе $y^2=64x$ найти точку M_0, ближайшую к прямой $4x+3y-14=0$, и вычислить расстояние от точки M_0 до этой прямой.

2.297. Доказать, что касательная к параболе в ее произвольной точке M составляет равные углы с фокальным радиус-вектором точки M и с лучом, исходящим из точки M и сонаправленным с осью параболы.

2.298. Из фокуса параболы $y^2=12x$ под острым углом α к оси Ox направлен луч света, причем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$. Написать уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от параболы.

3. Уравнение кривой в полярной системе координат. Говорят, что на плоскости введена полярная система координат $\langle O, u\rangle$, если заданы:

1) некоторая точка O, называемая *полюсом*;

2) некоторый луч u, исходящий из точки O и называемый *полярной осью*.

Полярными координатами точки $M\neq O$ называются два числа: *полярный радиус* $r(M)=|\overline{OM}|>0$ и *полярный угол* $\varphi(M)$ — угол, на который следует повернуть ось u для того чтобы ее направление совпало с направлением вектора $\overline{OM}$ (при этом, как обычно, $\varphi(M)>0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и $\varphi(M)<0$ в противном случае). Запись $M(r, \varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты r и φ.

Полярный угол $\varphi(M)$ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину вида $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$). Значение полярного угла, удовлетворяющее условию $0\leqslant\varphi<2\pi$, называется *главным*. В некоторых случаях главным значением полярного угла называют значение φ, удовлетворяющее условию $-\pi<\varphi\leqslant\pi$.

Пусть на плоскости введены правая декартова прямоугольная система координат Oxy (т. е. такая, что кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy происходит против часовой стрелки) и полярная система $\langle O, u\rangle$, причем полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. Тогда связь между декартовыми и полярными координатами произвольной точки $M\neq O$ дается формулами

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi;\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=y/x. \tag{7}$$

Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $F(r,\varphi)=0$ или $r=f(\varphi)$. Оно может быть получено либо непосредственно, исходя из геометрических свойств кривой, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой кривой, заданном в декартовых прямоугольных координатах.

Пример 2. Построить кривую, заданную уравнением $r=6\cos\varphi$.

◄ Прежде всего заметим следующее: если точка $M(r,\varphi)$ принадлежит заданной кривой, то для этой точки $\cos\varphi=r/6\geqslant 0$, и, следовательно, вся кривая расположена в секторе $-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

Для того чтобы построить кривую, перейдем в ее уравнении к декартовым координатам. Умножив обе части уравнения $r=6\cos\varphi$ на r, получаем $r^2=6r\cos\varphi$, откуда на основании формул перехода

(7) имеем $x^2+y^2=6x$, или $(x-3)^2+y^2=9$. Таким образом, заданная кривая — окружность радиуса 3 с центром в точке M_0 с координатами $x_0=3$, $y_0=0$ или $r_0=3$, $\varphi_0=0$. ▶

Пример 3. Вывести уравнение прямой в полярной системе координат.

◀ Если прямая L проходит через полюс и ее угловой коэффициент по отношению к полярной оси равен k, то уравнение этой прямой имеет вид $\operatorname{tg}\varphi=k$.

Пусть теперь прямая L не проходит через полюс. Напишем нормальное уравнение этой прямой в декартовой прямоугольной системе координат

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$$

и перейдем в этом уравнении к полярным координатам. Получаем (учитывая, что $\cos\beta=\sin\alpha$):

$$r\cos\varphi\cos\alpha+r\sin\varphi\sin\alpha-p=0,\quad r\cos(\varphi-\alpha)=p,$$

или

$$r=\frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}. \tag{8}$$

Уравнение (8) и есть искомое уравнение прямой в полярной системе координат. Оно может быть получено и непосредственно из

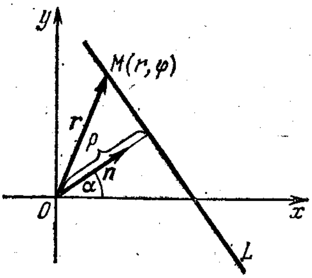


Рис. 9

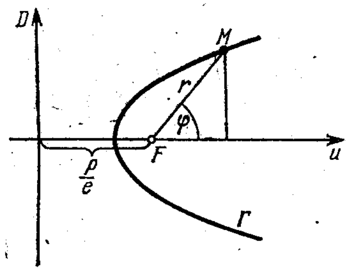


Рис. 10

следующего очевидного факта: $M\in L\Leftrightarrow \text{пр}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{r}=r\cos(\varphi-\alpha)=\text{const}=p$ (рис. 9). ▶

Пример 4. Пусть Г — эллипс, ветвь гиперболы или парабола, F — фокус этой кривой, D — соответствующая директриса. Вывести уравнение кривой Г в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом, а полярная ось сонаправлена с осью кривой (рис. 10).

◀ Общее свойство эллипса, гиперболы и параболы состоит в следующем (см. задачи 2.251, 2.270 и 2.289):

$$M\in\Gamma\Leftrightarrow\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,D)}=\text{const}=e, \tag{9}$$

где e — эксцентриситет кривой ($e<1$ для эллипса, $e>1$ для гиперболы и $e=1$ для параболы).

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через p/e (p — параметр кривой, называемый полуфокальным диаметром). Тогда из рис. 10 следует, что $\rho(M, F)=r$ и $\rho(M, D)=\frac{p}{e}+r\cos\varphi$. Подставляя эти выражения в (9), получаем

$$\frac{r}{\frac{p}{e}+r\cos\varphi}=e,$$

откуда

$$r=\frac{p}{1-e\cos\varphi}. \tag{10}$$

Уравнение (10) и есть искомое уравнение в полярной системе координат, общее для эллипса, гиперболы и параболы. ▶

Записать уравнения заданных кривых в полярных координатах:

2.299. $y=x$. **2.300.** $y=1$. **2.301.** $x+y-1=0$.

2.302. $x^2+y^2=a^2$. **2.303.** $x^2-y^2=a^2$.

2.304. $x^2+y^2=ax$.

Записать уравнения заданных кривых в декартовых прямоугольных координатах и построить эти кривые:

2.305. $r=5$. **2.306.** $\operatorname{tg}\varphi=-1$. **2.307.** $r\cos\varphi=2$.

2.308. $r\sin\varphi=1$. **2.309.** $r=\dfrac{1/\sqrt{2}}{\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$.

2.310. $r=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$. **2.311.** $r=2a\cos\varphi$.

2.312. $r=2a\sin\varphi$. **2.313.** $\sin\varphi=1/\sqrt{5}$.

2.314. $\sin r=1/2$. **2.315.** $r^2\sin 2\varphi=2a^2$.

2.316. $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

2.317. Написать в полярных координатах уравнения:

а) прямой, перпендикулярной полярной оси и отсекающей на ней отрезок, равный 3;

б) луча, исходящего из полюса под углом $\pi/3$ к полярной оси;

в) прямой, проходящей через полюс под углом $\pi/4$ к полярной оси.

2.318. Написать в полярных координатах уравнение окружности, если:

а) радиус $R=5$, окружность проходит через полюс, а ее центр лежит на полярной оси;

б) радиус $R=3$ и окружность касается в полюсе полярной оси.

2.319. Определить полярные координаты центра и радиус каждой из следующих окружностей:

а) $r=4\cos\varphi$; б) $r=3\sin\varphi$; в) $r=-5\sin\varphi$;

г) $r=6\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$; д) $r=8\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$;

е) $r=8\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)$.

2.320. В полярной системе координат вывести уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(r_0, \varphi_0)$.

2.321. Для эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ написать полярное уравнение, считая, что полярная ось сонаправлена с осью абсцисс, а полюс находится:

а) в левом фокусе; б) в правом фокусе.

2.322. Для правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ написать полярное уравнение, считая, что полярная ось сонаправлена с осью абсцисс, а полюс находится:

а) в левом фокусе; б) в правом фокусе.

2.323. Для параболы $y^2=6x$ написать полярное уравнение, считая, что полярная ось сонаправлена с осью абсцисс, а полюс находится в фокусе параболы.

2.324. Написать канонические уравнения следующих кривых 2-го порядка:

а) $r=\frac{9}{5-4\cos\varphi}$; б) $r=\frac{9}{4-5\cos\varphi}$; в) $r=\frac{3}{1-\cos\varphi}$.

2.325. Вывести полярное уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ при условии, что полярная ось сонаправлена с осью Ox, а полюс находится в центре эллипса.

2.326. Вывести полярное уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ при условии, что полярная ось сонаправлена с осью Ox, а полюс находится в центре гиперболы.

2.327. Вывести полярное уравнение параболы $y^2=2px$ при условии, что полярная ось сонаправлена с осью Ox, а полюс находится в вершине параболы.

4. Параметрические уравнения кривой. Пусть заданы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, непрерывные на некотором промежутке I числовой оси (промежуток I может быть интервалом (a, b), отрезком $[a, b]$, а также одним из полуинтервалов $(a, b]$ или $[a, b)$, причем не исключаются случаи, когда $a=-\infty$ и (или) $b=+\infty$). Уравнения

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad t\in I, \tag{10}$$

называются *параметрическими уравнениями* кривой Г в декартовой прямоугольной системе координат, если выполнено следующее условие: для всякого значения *параметра* $t\in I$ точка $M(\varphi(t), \psi(t))$ принадлежит кривой Г и, наоборот, для всякой точки $M(x, y)$ кривой Г существует такое значение параметра $t\in I$, что $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$. Исключением параметра t из (10) уравнение кривой может быть представлено в виде $F(x, y)=0$.

Аналогично определяются параметрические уравнения кривой в полярных координатах.

Пример 5. Показать, что параметрические уравнения

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad t\in[0,\ 2\pi),$$

определяют окружность $x^2+y^2=a^2$.

◀ Если точка $M(x,\ y)$ такова, что $x=a\cos t$ и $y=a\sin t$ для некоторого значения $t\in[0,\ 2\pi)$, то

$$x^2+y^2=a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t=a^2,$$

т. е. точка $M(x,\ y)$ принадлежит окружности $x^2+y^2=a^2$.

Верно и обратное: если точка $M(x,\ y)$ принадлежит окружности $x^2+y^2=a^2$, то, полагая $t=(\widehat{\overline{OM},\ i})$, $t\in[0,\ 2\pi)$, получим $x=a\cos t$ и $y=a\sin t$. ▶

Пример 6. Кривая Г задана полярным уравнением $r=2R\sin\varphi$. Составить параметрические уравнения этой кривой в полярных и декартовых прямоугольных координатах, выбирая в качестве параметра полярный угол φ.

◀ Нетрудно убедиться, что заданная кривая — окружность радиуса R с центром в точке $C(0,\ R)$. Параметрические уравнения этой кривой в полярных координатах:

$$r=2R\sin t,\quad \varphi=t,\qquad t\in[0,\ \pi).$$

Параметрические уравнения в декартовых прямоугольных координатах получаются, если в формулы перехода $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ вместо r и φ подставить их выражения в виде функций параметра t. В итоге получим

$$\begin{cases} x=r(t)\cos\varphi(t)=R\sin 2t, \\ y=r(t)\sin\varphi(t)=R(1-\cos 2t), \qquad t\in[0,\ \pi). \end{cases}$$ ▶

2.328. Составить параметрические уравнения луча $\Gamma=\{(x,y)\,|\,x-y+1=0,\ y\geqslant 0\}$, принимая в качестве параметра:

а) абсциссу x; б) ординату y;

в) расстояние $\rho(M,\ M_0)$ от точки $M\in\Gamma$ до вершины M_0 луча;

г) полярный угол, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось сонаправлена с осью Ox.

2.329. Составить параметрические уравнения отрезка с концами в точках $M_1(1,\ 1)$ и $M_2(2,\ 3)$, принимая в качестве параметра:

а) расстояние $\rho(M,\ M_1)$; б) расстояние $\rho(M,\ M_2)$.

2.330. Составить параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0,\ y_0)$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и вектором $\overline{M_0M}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

2.331. Составить параметрические уравнения окружности $x^2+y^2=2Rx$, принимая в качестве параметра полярный угол, если полярная ось сонаправлена с осью Ox, а полюс находится:

а) в начале координат; б) в центре окружности.

В задачах 2.332—2.340 требуется исключением параметра t найти уравнения заданных кривых в виде $F(x, y)=0$ и построить эти кривые.

2.332. $x=-1+2t, \quad y=2-t, \quad t\in(-\infty, +\infty)$.

2.333. $x=t^2-2t+1, \quad y=t-1, \quad t\in(-\infty, +\infty)$.

2.334. $x=-1+2\cos t, \quad y=3+2\sin t, \quad t\in[0, 2\pi)$.

2.335. $x=a\cos t, \quad y=b\sin t, \quad t\in[0, 2\pi)$.

2.336. $x=1+2\sec t, \quad y=-1+\operatorname{tg} t, \quad t\in(-\pi/2, \pi/2)$.

2.337. $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), \quad y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right), \quad t\in(0, +\infty)$.

2.338. $x=2R\cos^2 t, \quad y=R\sin 2t, \quad t\in[-\pi/2, \pi/2)$.

2.339. $x=R\sin 2t, \quad y=2R\sin^2 t, \quad t\in[0, \pi)$.

2.340. $x=2p\operatorname{ctg}^2 t, \quad y=2p\operatorname{ctg} t, \quad t\in(0, \pi/2]$.

2.341. Составить параметрические уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и радиус-вектором $\overline{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

2.342. Составить параметрические уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и радиус-вектором $\overline{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

2.343. Составить параметрические уравнения параболы $y^2=2px$, принимая в качестве параметра:

а) ординату y;

б) угол между осью Ox и вектором $\overline{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки;

в) угол между осью Ox и фокальным радиус-вектором $\overline{FM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

5. Некоторые кривые, встречающиеся в математике и ее приложениях. В настоящем пункте, имеющем справочный характер, приведены уравнения и указаны основные геометрические свойства ряда специальных кривых (алгебраических и трансцендентных), встречающихся в практике инженерных расчетов. Вывод уравнений этих кривых может быть предложен в качестве задач повышенной трудности при изучении курса аналитической геометрии. Достаточно детальное изучение формы кривых может быть выполнено с привлечением методов дифференциального исчисления.

1. *Спирали: спираль Архимеда* $r=a\varphi$ (рис. 11), *гиперболическая спираль* $r=a/\varphi$ (рис. 12), *логарифмическая спираль* $r=a^{\varphi}$ (рис. 13); **стрелкой указано направление обхода кривой, соответствующее возрастанию** φ.

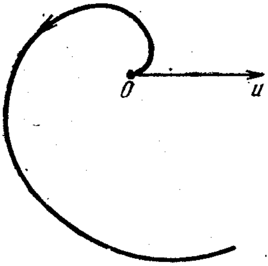


Рис. 11

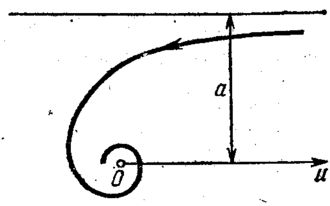
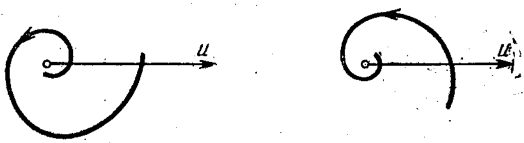


Рис. 12



$a>1$ $\qquad$ $0<a<1$

Рис. 13

2. *Лемниската Бернулли*. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (рис. 14), или $r^2=2a^2\cos 2\varphi$ (полюс помещен в точку O). Характеристическое свойство: $|F_1M|\cdot|F_2M|=\mathrm{const}=a^2$, где $F_1(-a,\ 0)$, $F_2(a,\ 0)$.

3. *Циссоида* $y^2(2R-x)=x^3$ (рис. 15), или $r=2R\operatorname{tg}\varphi\sin\varphi$ (полюс помещен в точку O). Характеристическое свойство: для всякого луча $\varphi=\varphi_0$ $(\varphi_0\in(-\pi/2,\ \pi/2))$ $|OM|=|BC|$.

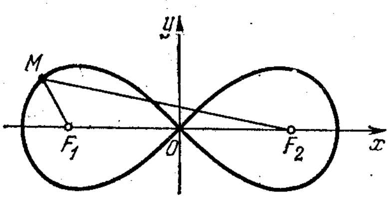


Рис. 14

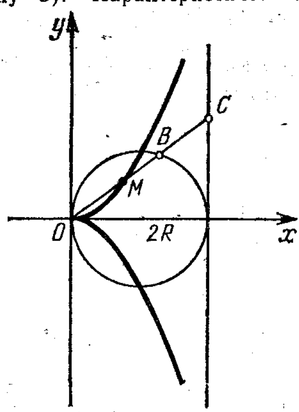


Рис. 15

4. *Конхоида* $x^2y^2+(x+a)^2(x^2-b^2)=0$ (рис. 16), или $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}\pm b$ (полюс помещен в точку $A(-a,\ 0)$). Характеристическое свойство: для всякого луча $\varphi=\varphi_0$ $(\varphi_0\in(-\pi/2,\ \pi/2))$ $|BM|=|BN|=\mathrm{const}=b$.

5. *Строфоида* $x^2((x+a)^2+y^2)=a^2y^2$ (рис. 17), или $r=\dfrac{a}{\cos\varphi}\pm$ $\pm a\operatorname{tg}\varphi$ (полюс помещен в точку $A(-a,\ 0)$). Характеристическое

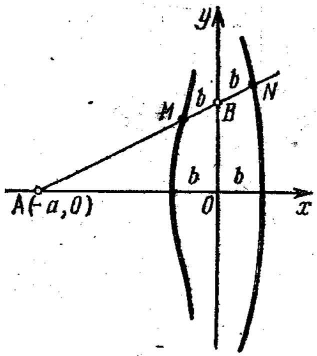


Рис. 16

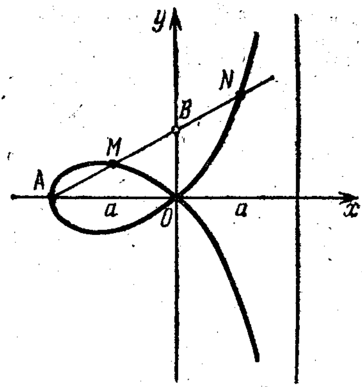


Рис. 17

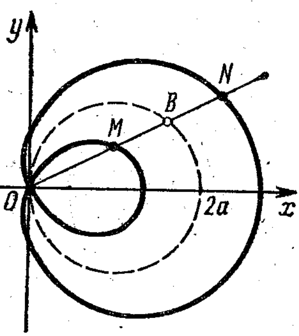


Рис. 18

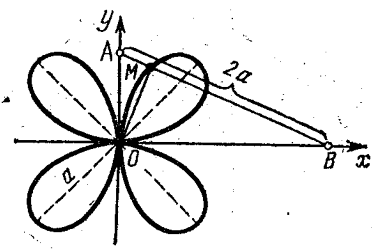


Рис. 19

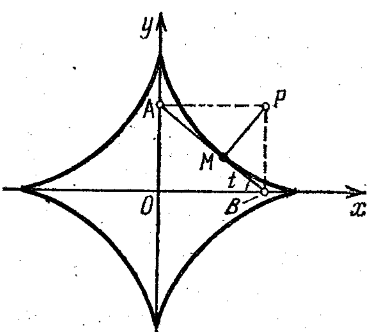


Рис. 20

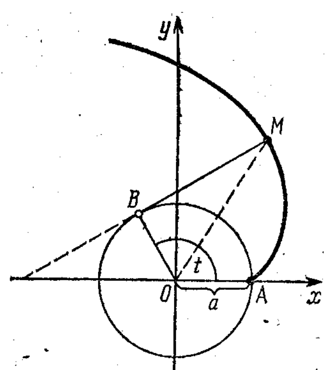


Рис. 21

свойство: для всякого луча $\varphi=\varphi_0$ $(\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2))$ $|BM|=|BN|=|OB|$.

6. *Улитка Паскаля* $(x^2+y^2-2ax)^2=b^2(x^2+y^2)$ (рис. 18), или $r=2a\cos\varphi \pm b$ (полюс помещен в точку O). Характеристическое свойство: для всякого луча $\varphi=\varphi_0$ $(\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2))$ $|BM|=|BN|=\text{const}=b$.

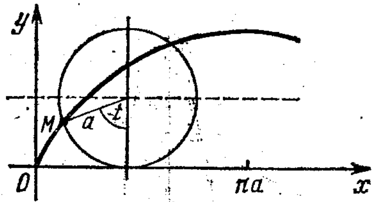


Рис. 22

7. *Четырехлепестковая роза* $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$ (рис. 19), или $r=a|\sin 2\varphi|$ (полюс помещен в точку O). Характеристическое свойство: всякая точка M этой кривой есть основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на отрезок $[AB]$ постоянной длины $2a$, движущийся так, что концы его все время находятся на координатных осях.

8. *Астроида* $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t\in[0, 2\pi)$, или $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (рис. 20). Характеристическое свойство: всякая точка M этой

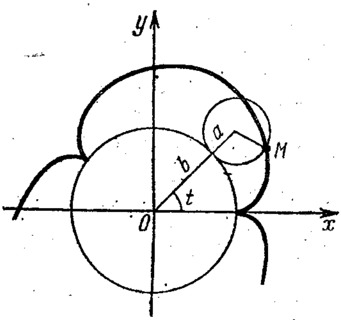


Рис. 23

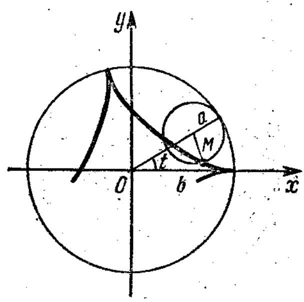


Рис. 24

кривой есть основание перпендикуляра $[PM]$ к отрезку $[AB]$ постоянной длины a, движущемуся так, что концы его все время находятся на координатных осях.

9. *Эвольвента (развертка) окружности* $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $t\in[0, +\infty)$ (рис. 21). Характеристическое свойство: каждая точка M этой кривой есть конец нити, которая, оставаясь натянутой, разматывается с окружности $x^2+y^2=a^2$ (в начальный момент конец нити находится в точке $A(a, 0)$).

10. *Циклоида* $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in(-\infty, +\infty)$ (рис. 22). Характеристическое свойство: кривая совпадает с траекторией точки M окружности радиуса a, которая катится без скольжения по оси Ox (в начальный момент точка M находится в начале координат).

11. *Эпициклоида* $x=(a+b)\cos t-a\cos\dfrac{a+b}{a}t$, $y=(a+b)\sin t-a\sin\dfrac{a+b}{a}t$, $t\in[0, +\infty)$ (рис. 23). Характеристическое свойство: кривая совпадает с траекторией точки M окружности радиуса a, которая катится без скольжения по окружности $x^2+y^2=b^2$, оставаясь

вне ее (в начальный момент точка M находится в положении $A(b, 0)$). В частном случае $a=b$ соответствующая кривая называется *кардиоидой*.

12. *Гипоциклоида* $x=(b-a)\cos t+a\cos\frac{b-a}{a}t$, $y=(b-a)\sin t-a\sin\frac{b-a}{a}t$, $t\in[0, +\infty)$ (рис. 24). Характеристическое свойство: кривая совпадает с траекторией точки M окружности радиуса a, которая катится без скольжения по окружности $x^2+y^2=b^2$, оставаясь внутри ее (в начальный момент точка M находится в положении $A(b, 0)$). В частном случае $a=b/4$ эта кривая совпадает с астроидой.

13. *Полукубическая парабола* $y^2=ax^3$ (рис. 25).

14. *Петлевая парабола* $ay^2=x(x-a)^2$ (рис. 26).

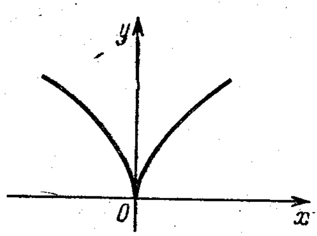


Рис. 25

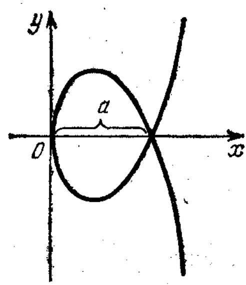


Рис. 26

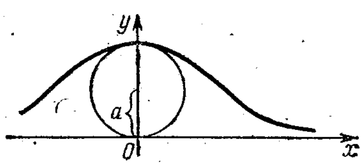


Рис. 27

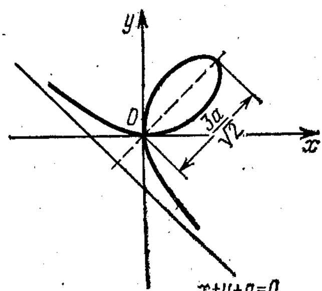


Рис. 28

15. *Локон Аньези* $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ (рис. 27).

16. *Декартов лист* $x^3+y^3-3axy=0$ (рис. 28).

§ 4. Поверхности и кривые в пространстве

1. **Уравнения поверхности и кривой в декартовой прямоугольной системе координат.** Говорят, что поверхность S в системе координат $Oxyz$ имеет уравнение

$$F(x, y, z)=0, \tag{1}$$

если выполнено следующее условие: точка $M(x, y, z)$ принадлежит поверхности S в том и только в том случае, когда ее координаты x, y и z удовлетворяют соотношению (1). Если, в частности, $F(x, y, z)=f(x, y)-z$, то уравнение (1) может быть записано в виде

$$z=f(x, y), \tag{2}$$

и в этом случае поверхность S совпадает с графиком функции двух переменных $f(x, y)$.

Кривая Γ в пространстве в общем случае определяется как линия пересечения некоторых поверхностей S_1 и S_2 (определяемых неоднозначно), т. е. заданием системы двух уравнений

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0. \tag{3}$$

Пример 1. Вывести уравнение поверхности, каждая точка которой расположена вдвое ближе к точке $A(2, 0, 0)$, чем к точке $B(-4, 0, 0)$.

◀ Если S — поверхность, заданная условиями задачи, то $M(x, y, z)\in S$ в том и только в том случае, когда $\rho(M, B)=2\rho(M, A)$, или

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}.$$

Отсюда получаем

$$(x+4)^2+y^2+z^2=4((x-2)^2+y^2+z^2),$$
$$3x^2-24x+3y^2+3z^2=0$$

или, выделяя полный квадрат в слагаемых, содержащих x,

$$(x-4)^2+y^2+z^2=16. \tag{4}$$

Уравнение (4) и есть искомое уравнение поверхности. Из него видно, что заданная поверхность S есть сфера радиуса 4 с центром в точке $M_0(4, 0, 0)$. ▶

Пример 2. Исследовать форму кривой Γ, заданной уравнениями

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=36, \\ y+z=0. \end{cases} \tag{5}$$

Определить вид ее проекции на плоскость Oxy.

◀ Кривая Γ задана как линия пересечения сферы $(x-1)^2+y^2+z^2=36$ с плоскостью $y+z=0$ и, следовательно, есть окружность. Так как центр сферы $C(1, 0, 0)$ лежит в плоскости сечения $y+z=0$, то центр окружности совпадает с точкой C, а ее радиус равен радиусу сферы, т. е. $R=4$.

Установим форму проекции окружности Γ на плоскость Oxy. Исключая z из системы (5), получаем $(x-1)^2+2y^2=36$, или $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$. Отсюда заключаем, что искомая проекция — эллипс, главные оси которого сонаправлены с осями Ox и Oy, центр находится в точке $C'(1, 0)$, а полуоси равны $a=6$, $b=3\sqrt{2}$. ▶

Установить, какие геометрические образы определяются заданными уравнениями:

2.344. $z+5=0$. **2.345.** $x-2y+z-1=0$.

2.346. $x^2+y^2+z^2=4$. **2.347.** $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=16$.

2.348. $2x^2+y^2+3z^2=0$. **2.349.** $x^2+4z^2=0$.

2.350. $x^2+2y^2+2z^2+7=0$. **2.351.** $x^2-4z^2=0$.

2.352. $xz=0$. **2.353.** $xyz=0$.

2.354. $x^2-4x=0$. **2.355.** $xy-y^2=0$.

2.356. Вывести уравнение поверхности, разность квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(2,\ 3,\ -5)$ и $F_2(2,\ -7,\ -5)$ равна 13.

2.357. Вывести уравнение поверхности, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(-a,\ 0,\ 0)$ и $F_2(a,\ 0,\ 0)$ равна постоянному числу $4a^2$.

2.358. Вывести уравнение поверхности, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0,\ 0,\ -4)$ и $F_2(0,\ 0,\ 4)$ равна 10.

2.359. Вывести уравнение поверхности, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0,\ -5,\ 0)$ и $F_2(0,\ 5,\ 0)$ равен 6.

2.360. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет сферу, найти ее центр C и радиус R:

а) $x^2+y^2+z^2-6z=0$;

б) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$.

2.361. Составить уравнение сферы в каждом из следующих случаев (обозначено: C — центр сферы, R — радиус, M, M_1, M_2, M_3 — точки на сфере):

а) $C(-1,\ 2,\ 0)$, $R=2$; б) $M(2,\ -1,\ -3)$, $C(3,\ -2,\ 1)$;

в) $M_1(2,\ -3,\ 5)$ и $M_2(4,\ 1,\ -3)$ — концы диаметра сферы;

г) $C(3,\ -5,\ -2)$, плоскость $2x-y-3z+11=0$ касается сферы;

д) $M_1(3,\ 1,\ -3)$, $M_2(-2,\ 4,\ 1)$, $M_3(-5,\ 0,\ 0)$, $C\in P$: $2x+y-z+3=0$.

2.362. Составить уравнение сферы, центр которой лежит на прямой

$$\begin{cases} 2x+4y-z-7=0, \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$$

и которая касается плоскостей $x+2y-2z-2=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

2.363. Составить уравнение сферы, вписанной в тетраэдр, образованный плоскостями

$$3x-2y+6z-8=0, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

2.364. Составить параметрические уравнения диаметра сферы $x^2+y^2+z^2-2x-6y+z-11=0$, перпендикулярного к плоскости $5x-y+2z-17=0$.

2.365. На сфере $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ найти точку M_0, ближайшую к плоскости $3x-4z+19=0$, и вычислить расстояние от этой точки до плоскости.

2.366. Определить, как расположена плоскость относительно сферы (пересекает, касается или проходит вне ее), если плоскость и сфера заданы уравнениями:

а) $z=3$, $x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+22=0$;

б) $y=1$, $x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+14=0$;

в) $x=5$, $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$.

2.367. Установить, какие кривые определяются следующими уравнениями:

а) $\begin{cases} x-5=0, \\ z+2=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49, \\ y=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20, \\ z-2=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=49, \\ x^2+y^2+z^2-4z-25=0. \end{cases}$

2.368. Найти центр и радиус окружности:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=10y, \\ x+2y+2z-19=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100, \\ 2x-2y-z+9=0. \end{cases}$

● Центр окружности есть проекция центра сферы на плоскость.

2.369. Найти проекцию на плоскость $z=0$ сечения сферы $x^2+y^2+z^2=4(x-2y-2z)$ плоскостью, проходящей через центр сферы и перпендикулярной к прямой $x=0$, $y+z=0$.

2.370. Точки $A(3, -2, 5)$ и $B(-1, 6, -3)$ являются концами диаметра окружности, проходящей через точку $C(1, -4, 1)$. Составить уравнения этой окружности.

2.371. Составить уравнения окружности, проходящей через три точки $M_1(3, -1, -2)$, $M_2(1, 1, -2)$ и $M_3(-1, 3, 0)$.

2. Алгебраические поверхности второго порядка. *Алгебраической поверхностью второго порядка* называется поверхность S, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0, \quad (6)$$

где не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю (в противном случае S — алгебраическая поверхность первого порядка, т. е. плоскость).

Может оказаться, что уравнение (6) определяет так называемую *вырожденную* поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей). Если же поверхность *невырожденная*, то преобразованием декартовой прямоугольной системы координат ее уравнение (6) может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых *каноническими* и определяющих тип поверхности.

1. *Эллипсоид:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 29).

2. *Гиперболоид*

   а) *однополостный:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 30, *а*);

   б) *двуполостный:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 30, *б*).

3. *Конус второго порядка:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (рис. 31).

4. *Параболоид*

   а) *эллиптический:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ (рис. 32, *а*);

   б) *гиперболический:* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ (рис. 32, *б*).

5. *Цилиндр второго порядка*

   а) *эллиптический:* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 33, *а*);

   б) *гиперболический:* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 33, *б*);

   в) *параболический:* $y^2=2px,\quad p>0$ (рис. 33, *в*).

Общие методы приведения уравнения (6) к каноническому виду опираются на теорию квадратичных форм и рассматриваются в п. 4 § 3 гл. 4. Цель настоящего пункта состоит в изучении основных геометрических свойств невырожденных поверхностей второго порядка с использованием их канонических уравнений.

Одним из основных методов исследования формы поверхности по ее уравнению является *метод сечений.*

Пример 3. Методом сечений исследовать форму и построить поверхность, заданную уравнением

$$z=2\left(1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}\right). \tag{7}$$

◄ В сечении поверхности горизонтальной плоскостью $z=h$ имеем кривую Γ_h, проекция которой на плоскость Oxy определяется уравнением

$$h=2\left(1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}\right),$$

или

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=2-h. \tag{8}$$

Уравнение (8) при $h>2$ не имеет решений относительно (x, y). Это означает, что соответствующее сечение пусто, т. е. рассматриваемая поверхность целиком расположена ниже плоскости $z=2$. При $h\leqslant 2$ уравнение (8) определяет эллипс с полуосями $a=4\sqrt{2-h}$ и $b=$

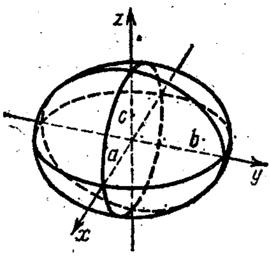


Рис. 29

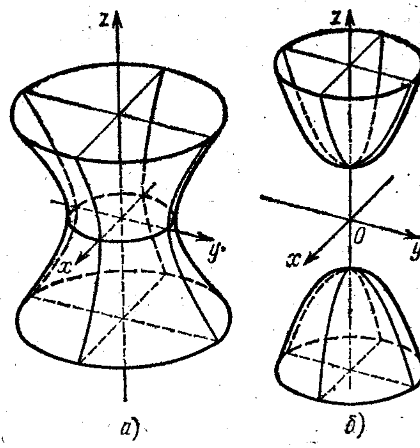


Рис. 30

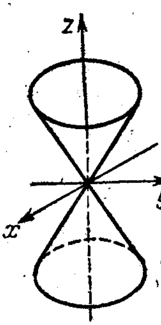


Рис. 31

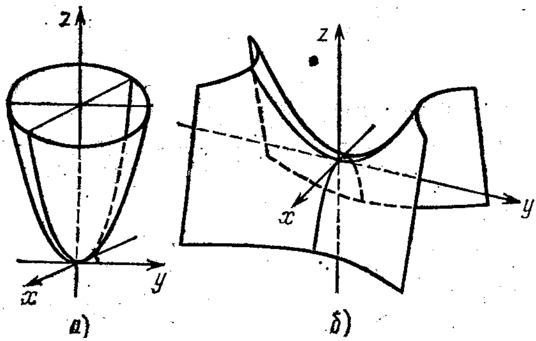


Рис. 32

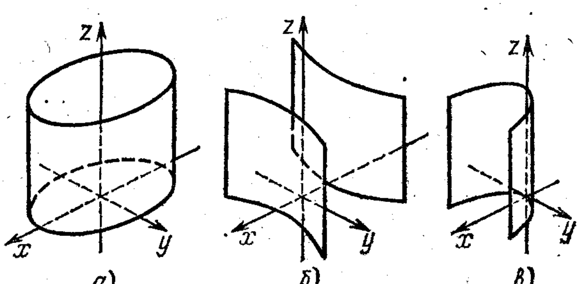


Рис. 33

$=5\sqrt{2-h}$, вырождающийся в точку $x=y=0$ при $h=2$. Заметим, что все эллипсы, получающиеся в сечениях поверхности плоскостями $x=h\leqslant 2$, подобны между собой $\left(\frac{a}{b}=\text{const}=\frac{4}{5}\right)$, причем с уменьшением h их полуоси неограниченно и монотонно возрастают.

Полученной информации достаточно, чтобы построить эскиз поверхности. Дальнейшее уточнение ее формы можно получить, если рассмотреть сечения координатными плоскостями Oxz и Oyz. Сечение плоскостью Oxz: $y=0$ дает кривую $x^2=16(2-z)$, т. е. параболу с параметром $p=8$, вершиной в точке $x=0$, $z=2$ и ветвями, направленными в сторону убывания значений z. Наконец, сечение плоскостью Oyz: $x=0$ дает параболу $y^2=25(2-z)$ с параметром $p=\frac{25}{2}$, вершиной в точке $y=0, z=2$ и аналогично направленными ветвями.

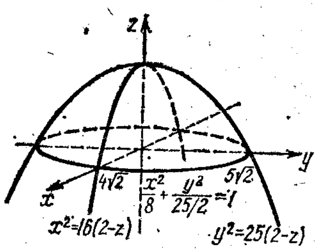


Рис. 34

Выполненное исследование позволяет теперь достаточно детально изобразить заданную поверхность (рис. 34).

Заданная поверхность есть эллиптический параболоид. Преобразование координат

$$x'=x,\quad y'=y,\quad z'=2-z$$

(которое сводится к сдвигу начала в точку (0, 0, 2) — вершину параболоида и обращению направления оси Oz) приводит его исходное уравнение (7) к каноническому виду

$$\frac{(x')^2}{16}+\frac{(y')^2}{25}=z'. \quad ▶ \tag{9}$$

Установить тип заданных поверхностей и построить их:

2.372. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$. **2.373.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{36}=1$.

2.374. $x^2+y^2-z^2=-1$. **2.375.** $x^2-y^2=z^2$.

2.376. $x^2+y^2=2az$, $a\neq 0$. **2.377.** $x^2-y^2=2az$, $a\neq 0$.

2.378. $2z=x^2+\frac{y^2}{2}$. **2.379.** $x^2=2az$, $a\neq 0$.

2.380. $z=2+x^2+y^2$. **2.381.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$.

2.382. $x^2+y^2-z^2=4$. **2.383.** $x^2-y^2+z^2+4=0$.

2.384*. Доказать, что уравнение $z^2=xy$ определяет конус с вершиной в начале координат.

2.385*. Доказать, что уравнение $z=xy$ определяет гиперболический параболоид.

2.386. Назвать и построить поверхности:

а) $x^2=2yz$;

б) $z-a=xy$.

2.387. Составить уравнения проекций на координатные плоскости сечения эллиптического параболоида $y^2+z^2=x$ плоскостью $x+2y-z=0$.

2.388. Установить, какие кривые определяются следующими уравнениями:

а) $\begin{cases} \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z, \\ 3x-y+6z-14=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z, \\ x-2y+2=0. \end{cases}$

2.389. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

а) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ и $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ и $\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

в) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

● Перейти к параметрическим уравнениям прямой.

2.390. Доказать, что в каждом из указанных ниже случаев заданные поверхность и плоскость имеют одну общую точку, найти ее координаты:

а) $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$, $2x-2y-z-10=0$;

б) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$, $5x+2z+5=0$;

в) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{9}=1$, $4x-3y+12z-54=0$.

2.391. Доказать, что плоскость $2x-12y-z+16=0$ пересекает гиперболический параболоид $x^2-4y^2=2z$ по прямолинейным образующим (т. е. прямым, целиком лежащим на этой поверхности). Составить уравнения этих образующих.

3.392. Доказать, что плоскость $4x-5y-10z-20=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ по прямолинейным образующим. Составить уравнения этих образующих.

3. Классификация поверхностей по типу преобразований пространства. Выделяют три класса поверхностей: цилиндрические, конические и поверхности вращения,— инвариантных относительно преобразований соответствующего типа.

Цилиндрической поверхностью (*цилиндром*) называется поверхность, инвариантная относительно преобразований параллельного переноса $T(t\boldsymbol{q})$, определяемых любым вектором, коллинеарным некоторому вектору $\boldsymbol{q}(l, m, n)$. Из этого определения следует, что если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит цилиндру S, то и вся прямая $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ также принадлежит этому цилиндру.

Принята следующая терминология: всякая прямая, коллинеарная вектору $\boldsymbol{q}(l, m, n)$, называется *осью* цилиндра S; прямые $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)\in S$, целиком принадлежащие цилиндру, называются его *образующими*; всякая кривая Γ, лежащая на цилиндре и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого цилиндра.

Пусть $\boldsymbol{q}(l, m, n)$ — любой вектор, коллинеарный оси цилиндра S, а направляющая Γ задана уравнениями

$$F_1(x, y, z)=0, \quad F_2(x, y, z)=0.$$

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит цилиндру S в том и только в том случае, когда существует число t такое, что точка с координатами $x+tl$, $y+tm$, $z+tn$ лежит на образующей Γ, т. е.

$$\begin{cases} F_1(x+tl, y+tm, z+tn)=0, \\ F_2(x+tl, y+tm, z+tn)=0. \end{cases} \tag{10}$$

Исключая параметр t из системы (10), получим соотношение вида $F(x, y, z)=0$, которое и является уравнением заданного цилиндра.

Пример 4. Написать уравнение цилиндра, ось которого совпадает с координатной осью Oz, а направляющая задана уравнениями $F(x, y)=0$, $z-h=0$.

◀ Полагая $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}(0, 0, 1)$, получим систему (10) в виде $F(x, y)=0$, $z+t-h=0$. Этот результат означает, что точка $M(x, y, z)$ принадлежит цилиндру в том и только в том случае, когда ее координаты x и y удовлетворяют уравнению $F(x, y)=0$ при произвольном значении координаты z. Следовательно, уравнение $F(x, y)=0$, описывающее проекцию направляющей на плоскость Oxy, и есть уравнение заданного цилиндра. ▶

Построить заданные цилиндрические поверхности:

2.393. $y^2+z^3=4$. **2.394.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

2.395. $x^2+y^2=ax$. **2.396.** $x^2=6z$. **2.397.** $z=4-x^2$.

2.398. $x^2-xy=0$. **2.399.** $x^2-z^2=0$.

2.400. $y^2+2z^2=0$. **2.401.** $xz=4$. **2.402.** $y^2+z^2=-z$.

2.403. Составить уравнения трех цилиндрических поверхностей, описанных около сферы $x^2+y^2+z^2-2ax=0$ с осями, параллельными соответственно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) оси Oz.

2.404. Найти уравнение цилиндра, проектирующего окружность

$$\begin{cases} x^2+(y+2)^2+(x-1)^2=25, \\ x^2+y^2+z^2=16 \end{cases}$$

на плоскость: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

2.405. Найти уравнение проекции окружности

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=36,\\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25\end{cases}$$

на плоскость: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

2.406. Составить уравнение поверхности, каждая точка которой одинаково удалена от прямой $x=a$, $y=0$ и плоскости Oyz. Построить поверхность.

2.407. Составить уравнение цилиндра, если:

а) ось коллинеарна вектору $\boldsymbol{q}(1,\ 2,\ 3)$, а направляющая задана уравнениями $y^2=4x$, $z=0$;

б) ось коллинеарна вектору $\boldsymbol{q}(1,\ 1,\ 1)$, а направляющая задана уравнениями $x^2+y^2=4x$, $z=0$.

2.408. Сфера $x^2+y^2+z^2=4z$ освещена лучами, параллельными прямой $x=0$, $y=z$. Найти форму тени сферы на плоскости Oxy.

2.409. Построить тело, ограниченное поверхностями $y^2=x$, $z=0$, $z=4$, $x=4$, и написать уравнение диагоналей грани, лежащей в плоскости $x=4$.

Конической поверхностью (*конусом*) называется поверхность, инвариантная относительно преобразований гомотетии $H(k,\ M_0)$ с произвольным коэффициентом k и центром в некоторой точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, называемой *вершиной* конуса. Из этого определения следует, что если точка $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ принадлежит конусу, то вся прямая $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_1}{z_1-z_0}$, проходящая через эту точку и вершину M_0 и называемая *образующей* конуса, целиком лежит на конусе. Всякая кривая Г, лежащая на конусе и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого конуса.

Пусть задан конус S с вершиной $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и направляющей

$$F_1(x,\ y,\ z)=0,\quad F_2(x,\ y,\ z)=0.$$

Точка $M(x,\ y,\ z)$ принадлежит конусу S в том и только в том случае, когда существует число t такое, что точка с координатами $x+t(x-x_0)$, $y+t(y-y_0)$, $z+t(z-z_0)$ лежит на образующей Г, т. е.

$$\begin{cases}F_1(x+t(x-x_0),\ \ y+t(y-y_0),\ \ z+t(z-z_0))=0,\\ F_2(x+t(x-x_0),\ \ y+t(y-y_0),\ \ z+t(z-z_0))=0.\end{cases} \qquad (11)$$

Исключая параметр t из системы (11), получим уравнение конуса в виде $F(x,\ y,\ z)=0$.

Пример 5. Написать уравнение конуса, вершина которого находится в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, а направляющая задана уравнениями $F(x,\ y)=0$, $z-h=0$.

◄ Система (11) при этих условиях принимает вид

$$\begin{cases}F(x+t(x-x_0),\ \ y+t(y-y_0))=0,\\ z+t(z-z_0)-h=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения $t=\frac{h-z}{z-z_0}=\frac{(h-z_0)-(z-z_0)}{z-z_0}=\frac{h-z_0}{z-z_0}-1$, что после подстановки в первое уравнение дает

$$F\left(x_0+(h-z_0)\frac{x-x_0}{z-z_0},\quad y_0+(h-z_0)\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) и есть уравнение заданного конуса. В частном случае $x_0=y_0=z_0=0$ (вершина конуса находится в начале координат) уравнение конуса принимает вид

$$F\left(h\frac{x}{z},\ h\frac{y}{z}\right)=0. \qquad (13)$$

Заметим, что уравнение (13) *однородно* относительно x, y и z (т. е. не меняется при замене x, y и z на tx, ty и tz при произвольном $t\neq 0$), а уравнение (12) однородно относительно $x-x_0$, $y-y_0$ и $z-z_0$. ►

2.410. Пусть функция трех переменных $F(x, y, z)$ однородна относительно x, y и z, т. е.

$$\forall t\neq 0\,\exists s\in\mathbb{R}\,(F(tx,\ ty,\ tz)=t^sF(x,\ y,\ z)).$$

Показать, что уравнение $F(x, y, z)=0$ определяет конус с вершиной в начале координат, причем для любого h кривая

$$F\left(\frac{x}{h},\ \frac{y}{h},\ 1\right)=0,\quad z-h=0$$

есть его направляющая.

2.411. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=h;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+(y-6)^2+z^2=25,\\ y=3;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=a;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2-2z+1=0,\\ y-z+1=0.\end{cases}$

Построить соответствующие конусы.

2.412. Составить уравнение конуса, если заданы координаты вершины M_0 и уравнения направляющей:

а) $M_0(0,\ -a,\ 0)$, $x^2=2py$, $z=h$;

б) $M_0(0,\ 0,\ c)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$;

в) $M_0(0,\ -a,\ 0)$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y+z=a$;

г) $M_0(3,\ -1,\ -2)$, $x^2+y^2-z^2=1$, $x-y+z=0$.

Построить соответствующие конусы.

2.413. Построить конус, определить его вершину и направляющую в плоскости $z=h$, если конус задан уравнением:

а) $x^2+(y-h)^2-z^2=0$; б) $x^2=2yz$.

2.414. Составить уравнение кругового конуса, для которого оси координат являются его образующими.

2.415. Составить уравнения проекций линии пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ с конусом $x^2+y^2-z^2=0$ на координатные плоскости:

а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

2.416. Источник света, находящийся в точке $M_0(5, 0, 0)$, освещает сферу $x^2+y^2+z^2=9$. Найти форму тени на плоскости Oyz.

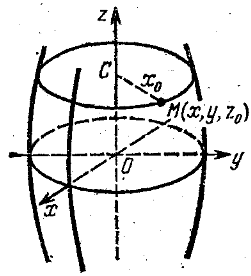


Рис. 35

Поверхностью вращения называется поверхность, инвариантная относительно поворотов $R(\varphi, u)$ на любой угол φ вокруг некоторой фиксированной оси u. Эта поверхность может быть получена вращением вокруг оси u кривой, получающейся в сечении поверхности любой плоскостью, проходящей через эту ось.

Пример 6. Вывести уравнение поверхности, образованной вращением кривой $F(x, z)=0$, $y=0$ вокруг оси Oz (рис. 35).

◀ Сечение поверхности произвольной плоскостью $z=z_0$ есть окружность с центром в точке $C(0, 0, z_0)$ радиуса x_0, причем $F(x_0, z_0)=0$. Поэтому для произвольной точки $M(x, y, z)$ этой окружности имеем: $z=z_0$ и $\rho(M, Oz)=\sqrt{x^2+y^2}=x_0$. Подставляя эти равенства в соотношение $F(x_0, z_0)=0$, получаем

$$F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) и есть искомое уравнение заданной поверхности вращения. ▶

2.417. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $z=x^2$, $y=0$:

а) вокруг оси Oz; б) вокруг оси Ox.

Построить обе поверхности.

2.418. Составить уравнение поверхности, образованной вращением прямой $z=y$, $x=0$:

а) вокруг оси Oy; б) вокруг оси Oz.

Построить обе поверхности.

2.419. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz:

а) кривой $z=e^{-x^2}$, $y=0$;

б) кривой $z=\dfrac{4}{x^2}$ $y=0$.

Построить обе поверхности в левой системе координат.

2.420. Показать, что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ есть уравнение поверхности вращения с осью вращения Ox. Написать уравнение кривой в плоскости $z=0$, вращением которой получена эта поверхность.

2.421. Показать, что $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ есть уравнение поверхности вращения. Найти ее ось вращения и уравнения какой-нибудь кривой, вращением которой образована эта поверхность.

Глава 3

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Определители

1. Определители 2-го и 3-го порядка. Квадратная таблица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

составленная из четырех действительных (или комплексных) чисел, называется *квадратной матрицей 2-го порядка. Определителем 2-го порядка*, соответствующим матрице A (или просто — *определителем матрицы* A), называется число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Аналогично, если

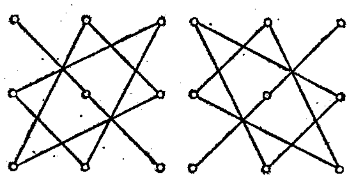
$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— квадратная матрица 3-го порядка, то соответствующим ей *определителем 3-го порядка* называется число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1)$$

Определители 3-го порядка обычно вычисляются с использованием следующего правила Саррюса: одно из трех слагаемых, входящих в правую часть (1) со знаком плюс, есть произведение элементов *главной* диагонали матрицы A, каждое из двух других — произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла матрицы (рис. 36, *а*), а слагаемые, входящие в (1) со знаком минус, строятся таким же образом, но относительно второй (*побочной*) диагонали (рис. 36, *б*).



а) (+) *б)* (−)

Рис. 36

Вычислить определители 2-го порядка:

3.1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$. **3.2.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **3.3.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

3.4. $\begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$. **3.5.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha+i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha-i\sin\alpha \end{vmatrix}$.

3.6. $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$. **3.7.** $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ -\dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

3.8. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$. **3.9.** $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0$.

3.10*. Доказать, что при действительных a, b, c, d корни уравнения $\begin{vmatrix} a-x & c+di \\ c-di & b-x \end{vmatrix}=0$ действительны.

3.11. Доказать, что для равенства нулю определителя 2-го порядка необходимо и достаточно, чтобы его строки были пропорциональны (т. е. чтобы элементы одной строки получались из соответствующих элементов другой строки умножением на одно и то же число). То же верно и для столбцов.

Вычислить определители 3-го порядка:

3.12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **3.13.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. **3.14.** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

3.15. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$. **3.16.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

3.17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

3.18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, где $\varepsilon=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$.

Решить уравнения:

3.19. $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$. **3.20.** $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix}=0$.

Решить неравенства:

3.21. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}<0$. **3.22.** $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix}>0$.

3.23. Доказать следующие свойства определителя 3-го порядка, используя его определение:

а) если строки матрицы определителя сделать столбцами с теми же номерами (т. е. *транспонировать* матрицу), то определитель не изменится;

б) если все элементы строки (столбца) умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число;

в) если переставить две строки (столбца) определителя, то он изменит знак; в частности, если две строки (столбца) определителя равны, то он равен нулю;

г) если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором — вторые слагаемые;

д) если одна строка (столбец) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), то определитель равен нулю.

Используя свойства определителя 3-го порядка, перечисленные в задаче 3.23, доказать следующие тождества (определители не развертывать):

3.24. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

3.25. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

3.26*. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

Вычислить следующие определители, используя свойства определителя 3-го порядка, перечисленные в задаче 3.23:

3.27. $\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}$. **3.28.** $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & a^2+1 & a \\ (b+1)^2 & b^2+1 & b \\ (c+1)^2 & c^2+1 & c \end{vmatrix}$.

3.29. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$. **3.30.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

3.31. Проверить, что определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ делится на $x-y$, $y-z$ и $z-x$.

3.32. Проверить, что определитель

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

делится на $x+y$ и на x^2-xy+y^2.

3.33. Построить график функции

$$y=\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \end{vmatrix} \quad (a\neq b).$$

2. Определители n-го порядка. Всякое взаимно однозначное отображение π множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ первых n натуральных чисел на себя называется *подстановкой n-го порядка.*

Всякая подстановка может быть записана в виде

$$\pi=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \ldots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\alpha_{i_k}=\pi(i_k)$ — образ элемента $i_k\in\{1, 2, \ldots, n\}$ при отображении π. Для фиксированной подстановки π существует много различных способов записи вида (2), отличающихся нумерацией элементов верхней строки. В частности, запись вида

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

называется *канонической*.

Говорят, что пара элементов (i, j) образует *инверсию* в подстановке π, если $i<j$, но $\alpha_i>\alpha_j$. Число $s(\pi)$ всех инверсных пар определяет четность подстановки: подстановка называется *четной*, если $s(\pi)$ — четное число, и *нечетной*, если $s(\pi)$ — число нечетное.

Пример 1. Определить четность подстановки

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

◀ Перейдем к канонической записи (3)

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

и подсчитаем число инверсий. Так как инверсии образуют пары (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), то $s(\pi)=4$ и π — четная подстановка. ▶

Определителем n-го порядка, соответствующим квадратной матрице

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(или *определителем матрицы* A), называется число

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\pi}(-1)^{s(\pi)}\,a_{1,\,\pi(1)}\cdots a_{n,\,\pi(n)},$$

где сумма берется по всем подстановкам π n-го порядка.

Для определителя n-го порядка выполняются основные свойства, аналогичные свойствам а)—д) из задачи 3.23.

3.34. На множестве $\{1, \dots, 6\}$ найти подстановку π, если $\pi(k)$ является остатком от деления числа $3k$ на 7. Определить ее четность.

3.35. На множестве $\{1, \dots, 8\}$ найти подстановку π, если $\pi(k)$ является остатком от деления числа $5k$ на 9. Определить ее четность.

Определить четность подстановок:

3.36. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. **3.37.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3.38. $\begin{pmatrix} 2n & 2n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & 2n & \dots & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.39. $\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & n-k+1 & n-k & n-k-1 & \dots & 2 & 1 \\ k & k-1 & \dots & 1 & n & n-1 & \dots & k+2 & k+1 \end{pmatrix}$.

Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

3.40. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$. **3.41.** $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$.

3.42. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$. **3.43.** $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

3.44. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение

$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$

входило в некоторый определитель со знаком минус.

3.45. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в некоторый определитель со знаком плюс.

3.46. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие x^4 и x^3.

Пользуясь только определением, вычислить следующие определители:

3.47. $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

3.48. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3.49. Как изменится определитель, если:

а) к каждой строке, кроме последней, прибавить последнюю строку;

б) из каждой строки, кроме последней, вычесть все последующие строки;

в) из каждой строки, кроме последней, вычесть последующую строку, из последней строки вычесть прежнюю первую строку;

г) его матрицу «повернуть на 90° вокруг центра»;

д) первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение.

3. Основные методы вычисления определителей n-го порядка. Метод понижения порядка определителя основан на следующем соотношении (i фиксировано):

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A^{(i,k)}, \qquad (4)$$

где

$$A^{(i,k)} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} и представляет собой (с точностью до знака $(-1)^{i+k}$) определитель $(n-1)$-го порядка, получающийся из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и k-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}.

Соотношение (4) называется *разложением определителя по i-й строке*. Аналогично определяется *разложение определителя по столбцу*. Прежде чем применять метод понижения порядка, полезно, используя основные свойства определителя, обратить в нуль все, кроме одного, элементы его некоторой строки (столбца).

Пример 2. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

◀ Из первой строки вычтем, а ко второй прибавим удвоенную третью. Полученный определитель разложим по первому столбцу. Имеем

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 10 & 15 & 20 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Далее опять обращаем в нуль все элементы первого столбца, кроме элемента в левом верхнем углу, и затем вычисляем определитель второго порядка:

$$D=4\begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & -45 & 20 \\ 0 & -27 & 2 \end{vmatrix}=4\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix} -45 & 20 \\ -27 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=-4\,(-90+540)=-1800. \text{ ▶}$$

Метод приведения к треугольному виду заключается в таком преобразовании определителя, когда все элементы, лежащие по одну сторону одной из его диагоналей, становятся равными нулю.

Пример 3. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

◀ Вычитая первую строку из всех остальных, получаем

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-8. \text{ ▶}$$

Метод рекуррентных соотношений позволяет выразить данный определитель, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением.

Пример 4. Вычислить *определитель Вандермонда*

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

◀ Покажем, что при любом n ($n \geqslant 2$) определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$. Доказательство проведем по индукции, используя метод рекуррентных соотношений.

Действительно, при $n=2$ имеем

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Пусть наше утверждение доказано для определителей Вандермонда порядка $(n-1)$, т. е.

$$D_{n-1} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n-1} (a_i - a_j).$$

Преобразуем определитель D_n следующим образом: из последней n-й строки вычитаем $(n-1)$-ю, умноженную на a_1 и, вообще, последовательно вычитаем из k-й строки $(k-1)$-ю, умноженную на a_1. Получаем

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по первому столбцу и вынесем из всех столбцов общие множители. Определитель принимает вид

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) D_{n-1}.$$

Получили рекуррентное соотношение. Используя предположение индукции, окончательно выводим:

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) =$$

$$= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j). \ ▶$$

Вычислить определители, используя подходящее разложение по строке или столбцу:

3.50. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **3.51.** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

3.52. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **3.53.** $\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3.54. а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители:

3.55. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$. **3.56.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

3.57. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$. **3.58.** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

3.59. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **3.60.** $\begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix}$.

3.61. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. **3.62.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

3.63. $\begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$. **3.64.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^3 & 5y^4 \end{vmatrix}$.

3.65*. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

3.66. $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Вычислить определители порядка n приведением их к треугольному виду:

3.67. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$. **3.68.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 3 \end{vmatrix}$.

3.69. Вычислить определитель, элементы которого заданы условиями $a_{ij}=\min(i, j)$.

3.70. Вычислить определитель, элементы которого заданы условиями $a_{ij}=\max(i, j)$.

Вычислить определители порядка n методом рекуррентных соотношений:

3.71. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$. **3.72.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

3.73. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

3.74. Доказать, что для любого определителя выполняется соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A^{(k,j)}=\begin{cases} \det A, & k=i, \\ 0, & k\neq i, \end{cases}$$

где $A^{(k,j)}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{kj} (см. (5)).

§ 2. Матрицы

1. Операции над матрицами. *Матрицей размера* $m\times n$ или $(m\times n)$-*матрицей* называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij}, $i=1$, $2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Суммой $A+B$ $(m\times n)$-*матриц* $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называется матрица $C=(c_{ij})$ того же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц A и B:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Произведением αA *матрицы* $A=(a_{ij})$ *на число* α (действительное или комплексное) называется матрица $B=(b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на α:

$$b_{ij}=\alpha a_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Произведением AB $(m\times n)$-*матрицы* $A=(a_{ij})$ *на* $(n\times k)$-*матрицу* $B=(b_{ij})$ называется $(m\times k)$-матрица $C=(c_{ij})$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}b_{\nu j}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad j=1, 2, \ldots, k.$$

3.75. Доказать следующие свойства алгебраических операций над матрицами:

а) $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$;

б) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$, $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$, $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$;

в) $A(BC)=(AB)C$, $A(B+C)=AB+AC$.

Вычислить линейные комбинации матриц A и B:

3.76. $3A+2B$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

3.77. $(1+i)A+(1-i)B$, $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}i & 1\\ -i & 1\end{pmatrix}$.

Вычислить:

3.78. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$. **3.79.** $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$.

3.80. $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. **3.81.** $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

3.82. $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$. **3.83.** $\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix}$.

3.84. а) $(4\ 0\ -2\ 3\ 1)\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}(4\ 0\ -2\ 3\ 1)$.

3.85. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$.

3.86. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3$. **3.87.** $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$, $a\in\mathbb{R}$.

3.88. $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$. **3.89.** $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$.

Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A:

3.90. $f(x)=3x^2-4$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

3.91. $f(x)=x^2-3x+1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.92. $f(x)=3x^2-2x+5$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Вычислить $AB-BA$:

3.93. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

3.94. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.95. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB=BA$.

Найти все матрицы, перестановочные с данной:

3.96. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **3.97.** $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. **3.98.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3.99. Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны нулевой матрице $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3.100. Найти все матрицы 2-го порядка, квадраты которых равны единичной матрице $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.101. Как изменится произведение AB матриц A и B, если:

а) переставить i-ю и j-ю строки матрицы A,

б) к i-й строке матрицы A прибавить j-ю строку, умноженную на число α,

в) переставить i-й и j-й столбцы матрицы B,

г) к i-му столбцу матрицы B прибавить j-й столбец, умноженный на число α?

Матрица A^{T} называется *транспонированной* к матрице A, если выполняется условие $a_{ij}^{\mathrm{T}}=a_{ji}$ для всех i, j, где a_{ij} и a_{ij}^{T} — элементы матриц A и A^{T} соответственно.

3.102. Доказать следующие соотношения:

а) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$; б) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

б) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

Вычислить AA^{T} и $A^{\mathrm{T}}A$ для заданных матриц A:

3.103. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. **3.104.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Квадратная матрица B называется *симметричной*, если $B^{\mathsf{T}} = B$. Квадратная матрица C называется *кососимметричной*, если $C^{\mathsf{T}} = -C$.

3.105. Доказать, что любую матрицу A можно представить, и при этом единственным образом, в виде $A = B + C$, где B — симметричная, а C — кососимметричная матрицы.

2. Обратная матрица. Квадратная матрица A называется *вырожденной* (*особенной*), если ее определитель равен нулю, и *невырожденной* (*неособенной*) в противном случае. Если A — невырожденная матрица, то существует и притом единственная матрица A^{-1} такая, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица (т. е. такая, на главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю). Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A.

Укажем основные методы вычисления обратной матрицы.

Метод присоединенной матрицы. Присоединенная матрица $A^{\vee}$ определяется как транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A (см. формулу (5) из § 1). Таким образом,

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} A^{(1,1)} & A^{(2,1)} & \dots & A^{(n,1)} \\ A^{(1,2)} & A^{(2,2)} & \dots & A^{(n,2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A^{(1,n)} & A^{(2,n)} & \dots & A^{(n,n)} \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство

$$A^{\vee}A = AA^{\vee} = \det A \cdot E.$$

Отсюда следует, что если A — невырожденная матрица, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\vee}.$$

Пример 1. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

◀ Имеем $\det A = -4$. Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A:

$$A^{(1,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A^{(2,1)} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A^{(3,1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A^{(1,2)} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7, \quad A^{(2,2)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad A^{(3,2)} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A^{(1,3)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A^{(2,3)} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10, \quad A^{(3,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Поэтому

$$A^{\vee}=\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix} \text{ и } A^{-1}=-\frac{1}{4}A^{\vee}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 7/4 & -9/4 & 5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Метод элементарных преобразований. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Для данной матрицы A n-го порядка построим прямоугольную матрицу $\Gamma_A=(A\,|\,E)$ размера $n\times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу. Далее, используя элементарные преобразования над строками, приводим матрицу Γ_A к виду $(E\,|\,B)$, что всегда возможно, если A невырождена. Тогда $B=A^{-1}$.

Пример 2. Методом элементарных преобразований найти A^{-1} для

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

◀ Образуем матрицу Γ_A:

$$\Gamma_A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Обозначив через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ строки матрицы Γ_A, произведем над ними следующие преобразования:

$$\gamma_1'=\frac{1}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_1''=\gamma_1'-\frac{2}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_1'''=\gamma_1''-\frac{1}{24}\gamma_3'',$$

$$\gamma_2'=\gamma_2-\frac{4}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_2''=\frac{3}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_2'''=\gamma_2''-\frac{1}{12}\gamma_3'',$$

$$\gamma_3'=\gamma_3-\frac{2}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_3''=\gamma_3'+\frac{1}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_3'''=\frac{7}{24}\gamma_3''.$$

В результате последовательно получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/3 & 1 & 0\\ 0 & -1/3 & 10/3 & -2/3 & 0 & 1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0\\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0\\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12\\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24\end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3/4 & -7/24 & -1/24\\ -1/2 & 5/12 & -1/12\\ -1/4 & 1/24 & 7/24\end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Методом присоединенной матрицы найти обратные для следующих матриц:

3.106. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **3.107.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **3.108.** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

3.109. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **3.110.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. **3.111.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

3.112. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.113. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1/\sqrt{5} & -3/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Методом элементарных преобразований найти обратные для следующих матриц:

3.114. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. **3.115.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **3.116.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.117. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **3.118.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

3.119. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **3.120.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения:

3.121. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **3.122.** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3.123. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

3.124. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

3.125. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

3.126. Доказать следующие равенства:

а) $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$; б) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

в) $(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Вычислить значение функции $g(x)$ при $x=A$:

3.127. $g(x)=x^2-3x+2x^{-1}-x^{-2}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

3.128. $g(x)=x-8x^{-1}+16x^{-2}$, $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$.

3.129. $g(x)=(x^2-1)^{-1}-(x^2+1)^{-1}$, $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

§ 3. Пространство арифметических векторов. Ранг матрицы

1. Арифметические векторы. Всякая упорядоченная совокупность из n действительных (комплексных) чисел называется *действительным* (*комплексным*) *арифметическим вектором* и обозначается символом

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n).$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *компонентами* арифметического вектора $\boldsymbol{x}$.

Над арифметическими векторами вводятся следующие операции. *Сложение*: если

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\quad \boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),$$

то

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n). \tag{1}$$

Умножение на число: если λ — число (действительное или комплексное) и $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — арифметический вектор, то

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots,\ \lambda x_n). \tag{2}$$

Множество всех действительных (комплексных) арифметических n-компонентных векторов с введенными выше операциями сложения (1) и умножения на число (2) называется *пространством арифметических векторов* (соответственно действительным или комплексным). Всюду в дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматривается действительное пространство арифметических векторов, обозначаемое символом $\mathbb{R}^n$.

Система арифметических векторов $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s\}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, не равные одновременно нулю, такие, что $\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\lambda_s\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{0}$ (где $\boldsymbol{0}=(0, 0, \ldots, 0)$ — нулевой вектор). В противном случае эта система называется *линейно независимой*.

Пусть Q — произвольное множество арифметических векторов. Система векторов $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s)$ называется *базисом* в Q, если выполнены следующие условия:

а) $e_k \in Q$, $k=1, 2, \ldots, s$;
б) система $\mathfrak{B}=(e_1, \ldots, e_s)$ линейно независима;
в) для любого вектора $x \in Q$ найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ такие, что

$$x=\sum_{k=1}^{s} \lambda_k e_k. \tag{3}$$

Формула (3) называется *разложением* вектора x по базису $\mathfrak{B}$. Коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ однозначно определяются вектором x и называются *координатами* этого вектора в базисе $\mathfrak{B}$.

Справедливы следующие утверждения:

1) Всякая система векторов $Q \subset \mathbb{R}^n$ имеет по меньшей мере один базис; при этом оказывается, что все базисы этой системы состоят из одинакового числа векторов, называемого *рангом* системы Q и обозначаемого $\operatorname{rang} Q$ или $r(Q)$.

2) Ранг всего пространства $\mathbb{R}^n$ равен n и называется *размерностью* этого пространства; при этом в качестве базиса $\mathbb{R}^n$ можно взять следующую систему:

$$\begin{aligned} e_1&=(1, 0, 0, \ldots, 0),\\ e_2&=(0, 1, 0, \ldots, 0),\\ e_3&=(0, 0, 1, \ldots, 0),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e_n&=(0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Этот базис принято называть *каноническим*.

Зафиксируем произвольный базис $\mathfrak{B}=(e_1, \ldots, e_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда всякому вектору x можно поставить во взаимно однозначное соответствие столбец его координат в этом базисе, т. е.

$$x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n \end{pmatrix}.$$

Замечание. Необходимо различать компоненты вектора и его координаты в некотором базисе. Мы используем для них одинаковое обозначение, хотя следует помнить, что координаты вектора совпадают с его компонентами только в каноническом базисе.

Линейные операции (1) и (2) над арифметическими векторами в координатной форме выглядят следующим образом:

$$z=x+y \Leftrightarrow Z=X+Y \quad (\Leftrightarrow z_k=x_k+y_k, \quad k=1, 2, \ldots, n),$$
$$y=\lambda x \Leftrightarrow Y=\lambda\cdot X \quad (\Leftrightarrow y_k=\lambda x_k, \quad k=1, 2, \ldots, n).$$

3.130. Доказать, что линейные операции (1) и (2) обладают следующими свойствами:

1а) $x+y=y+x$;
1б) $(x+y)+z=x+(y+z)$;
1в) $x+0=x$;

1г) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\ \exists! \boldsymbol{z}\ (\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ (вектор $\boldsymbol{z}$ называется *разностью* векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и обозначается так: $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$);

2а) $\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$ для любых чисел λ и μ;

2б) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

3а) $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$;

3б) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$.

Заданы арифметические векторы: $\boldsymbol{a}_1=(4, 1, 3, -2)$, $\boldsymbol{a}_2=(1, 2, -3, 2)$, $\boldsymbol{a}_3=(16, 9, 1, -3)$, $\boldsymbol{a}_4=(0, 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{a}_5=(1, -1, 15, 0)$. Найти следующие линейные комбинации:

3.131. $3\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3$. **3.132.** $\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_4-2\boldsymbol{a}_5$.

3.133. $2\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3-2\boldsymbol{a}_5$. **3.134.** $^1/_2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_3-{}^1/_2\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$.

Заданы те же, что и выше, арифметические векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из уравнения:

3.135. $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{0}$. **3.136.** $\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_5+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$.

3.137. $2(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{x})+5(\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$.

3.138. $3(\boldsymbol{a}_3+2\boldsymbol{x})-2(\boldsymbol{a}_5-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$.

3.139. Доказать, что линейно зависима всякая система векторов:

а) содержащая два равных вектора;

б) содержащая два вектора, различающихся числовым множителем;

в) содержащая нулевой вектор;

г) содержащая линейно зависимую подсистему.

Выяснить, являются ли следующие системы арифметических векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

3.140. $\boldsymbol{x}_1=(-3, 1, 5)$, $\boldsymbol{x}_2=(6, -3, 15)$.

3.141. $\boldsymbol{x}_1=(1, 2, 3, 0)$, $\boldsymbol{x}_2=(2, 4, 6, 0)$.

3.142. $\boldsymbol{x}_1=(2, -3, 1)$, $\boldsymbol{x}_2=(3, -1, 5)$, $\boldsymbol{x}_3=(1, -4, 3)$.

3.143. $\boldsymbol{x}_1=(1, i, 2-i, 3+i)$, $\boldsymbol{x}_2=(1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$.

3.144*. Показать, что система арифметических векторов $\boldsymbol{e}_1=(1, 1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_4=(0, 0, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_5=(0, 0, 0, 0, 1)$ образует базис в $\mathbb{R}^5$.

Найти координаты заданного вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_5)$ из задачи 3.144:

3.145.** $\boldsymbol{x}=(1, 0, 1, 0, 1)$. **3.146.** $\boldsymbol{x}=(5, 4, 3, 2, 1)$.

3.147. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы и вектор $\boldsymbol{a}_3$ не выражается линейно через векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, то векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ различаются лишь числовым множителем.

3.148. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_k$ линейно независимы, а векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}$ линейно зависимы, то вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$.

3.149. Доказать, что упорядоченная система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, не содержащая нулевого вектора, линейно независима тогда и только тогда, когда ни один из этих векторов не выражается линейно через предыдущие.

2. Ранг матрицы. Пусть в матрице A размера $m \times n$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \leqslant \min(m, n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется *минором k-го порядка* матрицы A.

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется ее *рангом*, а любой минор порядка r, отличный от нуля,— *базисным минором*.

Строки (столбцы) матрицы A размера $m \times n$ можно рассматривать как систему арифметических векторов из $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{R}^m$).

Теорема о базисном миноре. *Ранг матрицы равен рангу системы ее строк (столбцов); при этом система строк (столбцов) матрицы, содержащая базисный минор, образует базис в системе всех строк (столбцов) этой матрицы.*

Приведем основные методы вычисления ранга матрицы.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры ($k+1$)-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор ($k+1$)-го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

◀ Фиксируем минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$M_2=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Минор 3-го порядка

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

окаймляющий минор M_2, также отличен от нуля. Однако оба минора 4-го порядка, окаймляющие M_3, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Поэтому ранг A равен трем, а базисным минором является, например, M_3. ▶

Метод элементарных преобразований основан на том факте, что элементарные преобразования (см. п. 2 § 2) матрицы не меняют ее ранга (см. задачу 3.158). Используя эти преобразования, матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы, кроме $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ $(r \leqslant \min(m, n))$, равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r.

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

◀ Производя последовательно элементарные преобразования, будем иметь

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен двум, следовательно, таков же и ранг исходной матрицы. ▶

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

3.150. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. **3.151.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

3.152. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **3.153.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

3.154. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **3.155.** $\begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 2+3i \\ i & 1 & 2 \\ 1-i & -1-i & 3-2i \\ 4 & -4i & 10+2i \end{pmatrix}$.

Чему равен ранг матрицы A при различных значениях λ?

3.156. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. **3.157.** $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & \lambda \end{pmatrix}$.

3.158. Показать, что элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Вычислить ранг матрицы методом элементарных преобразований:

3.159. $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$. **3.160.** $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$.

3.161. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$. **3.162.** $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

3.163. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. **3.164.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить ранг матрицы:

3.165. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -3 & 10 \\ 17 & 1 & -7 & 22 \\ 3 & 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. **3.166.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 16 & 4 & 52 & 9 \\ 8 & -1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

3.167. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **3.168.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.169. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -1 & -8 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$. **3.170.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.171. Доказать что если произведение матриц AB определено, то $\operatorname{rang}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$.

3.172. Пусть A — невырожденная матрица, а матрицы B и C таковы, что AB, CA определены. Доказать, что $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang} B$ и $\operatorname{rang}(CA) = \operatorname{rang} C$.

3.173. Доказать, что если сумма матриц $A+B$ определена, то $\operatorname{rang}(A+B) \leqslant \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$.

Понятие ранга матрицы используется для исследования линейной зависимости системы арифметических векторов.

Пример 3. Выяснить, является ли система арифметических векторов $a_1=(2, -3, 1)$, $a_2=(3, -1, 5)$, $a_3=(1, -5, -3)$ линейно зависимой или линейно независимой. Найти ее ранг и какой-нибудь базис.

◀ Запишем матрицу A, вектор-столбцами которой являются a_1, a_2, a_3:

$$A=\left(a_1^{\mathrm{T}}, a_2^{\mathrm{T}}, a_3^{\mathrm{T}}\right)=\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \\ \hline 1 & 5 & -3 \end{array}\right).$$

Ранг A, как нетрудно видеть, равен 2. Следовательно, исходная система арифметических векторов линейно зависима, и ее ранг также равен 2 (по теореме о базисном миноре). Минор 2-го порядка

$$M_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=7$$

отличен от нуля и потому может быть принят за базисный. Отсюда следует, что арифметические векторы a_1 и a_2 образуют базис исходной системы.

Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми:

3.174. $x_1=(1, 1, 1, 1)$, $x_2=(1, -1, -1, 1)$, $x_3=(1, -1, 1, -1)$, $x_4=(1, 1, -1, -1)$.

3.175. $x_1=(4, -5, 2, 6)$, $x_2=(2, -2, 1, 3)$, $x_3=(6, -3, 3, 9)$, $x_4=(4, -1, 5, 6)$.

Найти ранг системы векторов:

3.176. $a_1=(1, -1, 0, 0)$, $a_2=(0, 1, -1, 0)$, $a_3=(1, 0, -1, 1)$, $a_4=(0, 0, 0, 1)$, $a_5=(3, -5, 2, -3)$.

3.177. $a_1=(1, i, -1, -i, 1)$, $a_2=(1, -i, -1, i, 1)$, $a_3=(1, -1, 1, -1, 1)$, $a_4=(3, -1, -1, -1, 3)$.

Найти все значения λ, при которых вектор x линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3:

3.178. $a_1=(2, 3, 5)$, $a_2=(3, 7, 8)$, $a_3=(1, -6, 1)$, $x=(7, -2, \lambda)$.

3.179. $a_1=(3, 2, 5)$, $a_2=(2, 4, 7)$, $a_3=(5, 6, \lambda)$, $x=(1, 3, 5)$.

3.180. $a_1=(3, 2, 6)$, $a_2=(7, 3, 9)$, $a_3=(5, 1, 3)$, $x=(\lambda, 2, 5)$.

Найти ранг и какой-нибудь базис заданной системы векторов:

3.181. $a_1=(5, 2, -3, 1)$, $a_2=(4, 1, -2, 3)$, $a_3=(1, 1, -1, -2)$, $a_4=(3, 4, -1, 2)$.

3.182. $a_1=(2, -1, 3, 5)$, $a_2=(4, -3, 1, 3)$, $a_3=(3, -2, 3, 4)$, $a_4=(4, -1, 15, 17)$, $a_5=(7, -6, -7, 0)$.

3.183. $a_1=(1, 2, 3, -4)$, $a_2=(2, 3, -4, 1)$, $a_3=(2, -5, 8, -3)$, $a_4=(5, 26, -9, -12)$, $a_5=(3, -4, 1, 2)$.

Найти ранг и все базисы системы векторов:

3.184. $a_1=(1, 2, 0, 0)$, $a_2=(1, 2, 3, 4)$, $a_3=(3, 6, 0, 0)$.

3.185. $a_1=(1, 2, 3, 4)$, $a_2=(2, 3, 4, 5)$, $a_3=(3, 4, 5, 6)$, $a_4=(4, 5, 6, 7)$.

3.186. $a_1=(2, 1, -3, 1)$, $a_2=(4, 2, -6, 2)$, $a_3=(6, 3, -9, 3)$, $a_4=(1, 1, 1, 1)$.

§ 4. Системы линейных уравнений

1. Правило Крамера. Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n, \end{aligned} \qquad (1)$$

или, в матричной форме, $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix}.$$

Правило Крамера: Если в системе (1) $\det A=\Delta\neq 0$, т. е. матрица A имеет обратную A^{-1}, то система (1) имеет, и притом единственное, решение

$$X=A^{-1}B,$$

или, в покомпонентной записи,

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},\qquad i=1, 2, \ldots, n,$$

где Δ_i — определитель, получаемый из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3&=5,\\ 2x_1-\ x_2+x_3&=6,\\ x_1+5x_2\qquad&=-3. \end{aligned}$$

◄ Матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ невырожденная, так как $\det A=-2\neq 0$.

Присоединенная матрица $A^{\vee}$ имеет вид

$$A^{\vee}=\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 5 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 11 & -13 & -7\end{pmatrix}$$

и

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 5 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 11 & -13 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 6\\ -3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\ 2\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix},$$

т. е. $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=1$. ►

Следующие системы решить по правилу Крамера:

3.187. $\begin{aligned}3x-5y&=13,\\ 2x-7y&=81.\end{aligned}$ **3.188.** $\begin{aligned}3x-4y&=1,\\ 3x+4y&=18.\end{aligned}$

3.189. $\begin{aligned}2ax-3by&=0,\\ 3ax-6by&=ab.\end{aligned}$ **3.190.** $\begin{aligned}7x+2y+3z&=15,\\ 5x-3y+2z&=15,\\ 10x-11y+5z&=36.\end{aligned}$

3.191. $\begin{aligned}2x+y\qquad&=5,\\ x\qquad+3z&=16,\\ 5y-z&=10.\end{aligned}$ **3.192.** $\begin{aligned}x+y-2z&=6,\\ 2x+3y-7z&=16,\\ 5x+2y+z&=16.\end{aligned}$

3.193.
$$\begin{aligned}4x_1+4x_2+5x_3+5x_4&=0,\\ 2x_1\qquad+3x_3-x_4&=10,\\ x_1+x_2-5x_3\qquad&=-10,\\ 3x_2+2x_3\qquad&=1.\end{aligned}$$

3.194.
$$\begin{aligned}2x_1-x_2+3x_3+2x_4&=4,\\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4&=6,\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4&=6,\\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4&=6.\end{aligned}$$

3.195*. Доказать, что для любых различных чисел x_1, x_2, x_3 и любых чисел y_1, y_2, y_3 существует, и притом только один, многочлен $y=f(x)$ степени $\leqslant 2$, для которого $f(x_i)=y_i$, $i=1, 2, 3$. Когда степень этого многочлена <2 (равна 1, равна 0)?

По заданным условиям найти многочлен $f(x)$:

3.196. $f(1)=-1$, $f(-1)=9$, $f(2)=-3$.

3.197. $f_j(x_i)=\delta_{ij}$, $i, j=1, 2, 3$, $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

Решить системы уравнений:

3.198. $\begin{aligned}5x_1+8x_2+x_3&=2,\\ 3x_1-2x_2+6x_3&=-7,\\ 2x_1+x_2-x_3&=-5.\end{aligned}$ **3.199.** $\begin{aligned}2x_1-3x_2+x_3&=-7,\\ x_1+4x_2+2x_3&=-1,\\ x_1-4x_2\qquad&=-5.\end{aligned}$

3.200.
$$\begin{aligned}2x_1+2x_2-x_3+x_4&=4,\\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4&=6,\\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4&=12,\\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4&=6.\end{aligned}$$

3.201.
$$\begin{aligned}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4&=2,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4&=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4&=-3,\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4&=-3.\end{aligned}$$

3.202.

$$\begin{aligned} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4-20&=0,\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4-11&=0,\\ 2x_1+10x_2+9x_3+9x_4-40&=0,\\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4-37&=0.\end{aligned}$$

3.203.

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3&=0,\\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6&=0,\\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8&=0,\\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8&=0.\end{aligned}$$

2. Решение произвольных систем. Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными общего вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m,\end{aligned} \tag{2}$$

или, в матричной форме,

$$AX=B, \tag{3}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ b_m\end{pmatrix},$$

Если $B=O$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Решением системы (2) называется всякий n-компонентный вектор-столбец X, обращающий матричное уравнение (3) в равенство (соответствующий решению X арифметический вектор $x\in\mathbb{R}^n$ также будем называть решением системы (2)).

Система называется *совместной*, если у нее существует по крайней мере одно решение, в противном случае она называется *несовместной*.

Две системы называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Теорема Кронекера—Капелли. *Для того чтобы система* (2) *была совместной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}, \tag{4}$$

где $\overline{A}=(A\,|\,B)$ — *расширенная матрица системы.*

Пусть $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}=r$, т. е. система совместна. Не ограничивая общности, будем считать, что базисный минор располагается в первых r $(1\leqslant r\leqslant\min(m,n))$ строках и столбцах матрицы A. Отбросив последние $m-r$ уравнений системы (2), запишем *укороченную* систему:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r+a_{1,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r+a_{r,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}x_n&=b_r,\end{aligned} \tag{5}$$

которая эквивалентна исходной. Назовем неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ *базисными*, а $x_{r+1}, \ldots, x_n$ *свободными* и перенесем слагаемые, содержащие свободные неизвестные, в правую часть уравнений (5). Получаем систему относительно базисных неизвестных:

$$a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,\,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,\,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n,$$

которая для каждого набора значений свободных неизвестных $x_{r+1}=c_1,\ \ldots,\ x_n=c_{n-r}$ имеет единственное решение $x_1(c_1,\ \ldots,\ c_{n-r}),\ \ldots,\ x_r(c_1,\ \ldots,\ c_{n-r})$, находимое по правилу Крамера. Соответствующее решение укороченной, а следовательно, и исходной систем имеет вид

$$X(c_1,\ \ldots,\ c_{n-r})=\begin{pmatrix} x_1(c_1,\ \ldots,\ c_{n-r})\\ \vdots\\ x_r(c_1,\ \ldots,\ c_{n-r})\\ c_1\\ \vdots\\ c_{n-r}\end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Формула (6), выражающая произвольное решение системы в виде вектор-функции от $n-r$ свободных неизвестных, называется *общим решением* системы (2).

Пример 2. Установить совместность и найти общее решение системы

$$\begin{aligned} 2x_1+\ x_2-\ x_3-3x_4&=2,\\ 4x_1\qquad\ +\ x_3-7x_4&=3,\\ 2x_2-3x_3+\ x_4&=1,\\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4&=3. \end{aligned}$$

◄ Выпишем основную и расширенную матрицы системы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3\\ 4 & 0 & 1 & -7\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 3 & -4 & -2\end{pmatrix},\qquad \bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2\\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3\\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3\end{array}\right).$$

Так как $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\bar{A}=2$ (проверьте!), то исходная система совместна.

Выберем в качестве базисного минор $M_2=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}$. Тогда неизвестные x_1, x_2 — базисные, x_3, x_4 — свободные, а укороченная система имеет вид

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2&=2+x_3+3x_4,\\ 4x_1\quad\ &=3-x_3+7x_4. \end{aligned}$$

Полагая $x_3=c_1$; $x_4=c_2$ и решая укороченную систему относительно базисных неизвестных, получаем

$$x_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}c_1+\frac{7}{4}c_2,$$
$$x_2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2.$$

Следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$X(c_1, c_2)=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}-\frac{1}{4}c_1+\frac{7}{4}c_2 \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{2}c_1-\frac{1}{2}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Исследовать совместность и найти общее решение следующих систем:

3.204. $\begin{aligned} x-\sqrt{3}y&=1, \\ \sqrt{3}x-3y&=\sqrt{3}. \end{aligned}$

3.205. $\begin{aligned} \sqrt{5}x-5y&=\sqrt{5}, \\ x-\sqrt{5}y&=5. \end{aligned}$

3.206. $\begin{aligned} 2x-y+z&=-2, \\ x+2y+3z&=-1, \\ x-3y-2z&=3. \end{aligned}$

3.207. $\begin{aligned} x+2y-4z&=1, \\ 2x+y-5z&=-1, \\ x-y-z&=-2. \end{aligned}$

3.208.

$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4&=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4&=-3, \\ x_1+2x_2-4x_4&=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4&=22. \end{aligned}$$

3.209.

$$\begin{aligned} x_1+x_2-6x_3-4x_4&=6, \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4&=2, \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4&=6, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4&=-7. \end{aligned}$$

3.210.

$$\begin{aligned} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4&=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4&=4, \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4&=2. \end{aligned}$$

3.211.

$$\begin{aligned} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4&=2, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4&=5, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4&=3. \end{aligned}$$

3.212.

$$\begin{aligned} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4&=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4&=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4&=-8. \end{aligned}$$

3.213.

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+5x_4&=3, \\ 9x_1+x_2+4x_3-5x_4&=1, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5, \\ 7x_1+x_2+6x_3-x_4&=7. \end{aligned}$$

3.214. $\begin{aligned} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5&=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5&=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5&=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5&=2. \end{aligned}$

3.215. $\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5&=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5&=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5&=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5&=1. \end{aligned}$

3.216. $\begin{aligned} 12x_1+14x_2-15x_3+24x_4+27x_5&=5, \\ 16x_1+18x_2-22x_3+29x_4+37x_5&=8, \\ 18x_1+20x_2-21x_3+32x_4+41x_5&=9, \\ 10x_1+12x_2-16x_3+20x_4+23x_5&=4. \end{aligned}$

3.217. $24x_1+14x_2+30x_3+40x_4+41x_5=28,$
$36x_1+21x_2+45x_3+61x_4+62x_5=43,$
$48x_1+28x_2+60x_3+82x_4+83x_5=58,$
$60x_1+35x_2+75x_3+99x_4+102x_5=69.$

Исследовать совместность и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

3.218.
$$
\begin{aligned}
5x_1-3x_2+2x_3+4x_4&=3,\\
4x_1-2x_2+3x_3+7x_4&=1,\\
8x_1-6x_2-x_3-5x_4&=9,\\
7x_1-3x_2+7x_3+17x_4&=\lambda.
\end{aligned}
$$

3.219.
$$
\begin{aligned}
\lambda x_1+x_2+x_3+x_4&=1,\\
x_1+\lambda x_2+x_3+x_4&=1,\\
x_1+x_2+\lambda x_3+x_4&=1,\\
x_1+x_2+x_3+\lambda x_4&=1.
\end{aligned}
$$

3.220.
$$
\begin{aligned}
2x_1-x_2+3x_3+4x_4&=5,\\
4x_1-2x_2+5x_3+6x_4&=7,\\
6x_1-3x_2+7x_3+8x_4&=9,\\
\lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4&=11.
\end{aligned}
$$

3.221.
$$
\begin{aligned}
(1+\lambda)x_1+x_2+x_3&=1,\\
x_1+(1+\lambda)x_2+x_3&=1,\\
x_1+x_2+(1+\lambda)x_3&=1.
\end{aligned}
$$

3. Однородные системы. Однородная система $AX=O$ всегда совместна, так как имеет *тривиальное* решение $X=O$. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы $r=\operatorname{rang} A<n$ (при $m=n$ это условие означает, что $\det A=0$).

Пусть $Q\subset\mathbb{R}^n$ — множество всех решений однородной системы. Всякий базис в множестве Q состоит из $n-r$ векторов $e_1, \ldots, e_{n-r}$. Соответствующая ему в каноническом базисе (см. (4) из § 3) система вектор-столбцов $E_1, \ldots, E_{n-r}$ называется *фундаментальной системой решений*. Общее решение однородной системы имеет вид

$$X=c_1E_1+\ldots+c_{n-r}E_{n-r},$$

где $c_1, \ldots, c_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Базисные решения $E_1, \ldots, E_{n-r}$ могут быть получены методом, изложенным в п. 2, если свободным неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными 0.

Пример 3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение следующей однородной системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5&=0,\\
2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5&=0,\\
x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5&=0,\\
x_1-5x_2+2x_3-16x_4+3x_5&=0.
\end{aligned}
$$

◀ Матрица коэффициентов

$$
A=\left(\begin{array}{rr|rrr}
3 & 1 & -8 & 2 & 1\\
2 & -2 & -3 & -7 & 2\\
\hline
1 & 11 & -12 & 34 & -5\\
1 & -5 & 2 & -16 & 3
\end{array}\right)
$$

имеет ранг $r=2$ (проверьте!). Выберем в качестве базисного минор $M_2=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}\neq 0$. Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{aligned}3x_1+\ x_2&=8x_3-2x_4-\ x_5,\\ 2x_1-2x_2&=3x_3+7x_4-2x_5,\end{aligned}$$

откуда, полагая $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, $x_5=c_3$, находим

$$x_1=-\frac{19}{8}c_1-\frac{3}{8}c_2+\frac{1}{2}c_3,\qquad x_2=-\frac{7}{8}c_1+\frac{25}{8}c_2-\frac{1}{2}c_3.$$

Общее решение системы

$$X(c_1,\ c_2,\ c_3)=\begin{pmatrix}-\frac{19}{8}c_1-\frac{3}{8}c_2+\frac{1}{2}c_3\\ -\frac{7}{8}c_1+\frac{25}{8}c_2-\frac{1}{2}c_3\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений

$$E_1=X(1,\ 0,\ 0)=\begin{pmatrix}-19/8\\ -7/8\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad E_2=X(0,\ 1,\ 0)=\begin{pmatrix}-3/8\\ 25/8\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$E_3=X(0,\ 0,\ 1)=\begin{pmatrix}1/2\\ -1/2\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы общее решение может быть записано в виде

$$X(c_1,\ c_2,\ c_3)=c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3.\ ▶$$

3.222. Доказать, что всякая линейная комбинация решений однородной системы уравнений также является ее решением.

Найти фундаментальную систему решений и общее решение следующих систем:

3.223. $\begin{aligned}x_1+2x_2-\ x_3&=0,\\ 2x_1+9x_2-3x_3&=0.\end{aligned}$ **3.224.** $\begin{aligned}x_1-2x_2-3x_3&=0,\\ -2x_1+4x_2+6x_3&=0.\end{aligned}$

3.225. $\begin{aligned}3x_1+2x_2+\ x_3&=0,\\ 2x_1+5x_2+3x_3&=0,\\ 3x_1+4x_2+2x_3&=0.\end{aligned}$ **3.226.** $\begin{aligned}2x_1-3x_2+\ x_3&=0,\\ x_1+\ x_2+\ x_3&=0,\\ 3x_1-2x_2+2x_3&=0.\end{aligned}$

3.227.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-3x_4&=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4&=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4&=0. \end{aligned}$$

3.228.
$$\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4&=0,\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4&=0. \end{aligned}$$

3.229.
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5&=0,\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5&=0,\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5&=0,\\ 3x_1+2x_2\qquad\quad+4x_4+8x_5&=0. \end{aligned}$$

3.230.
$$\begin{aligned} x_1+x_3+x_5&=0,\\ x_2-x_4+x_6&=0,\\ x_1-x_2+x_5-x_6&=0,\\ x_2+x_3+x_6&=0,\\ x_1-x_4+x_5&=0. \end{aligned}$$

3.231.
$$\begin{aligned} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5&=0,\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5&=0,\\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5&=0,\\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5&=0. \end{aligned}$$

3.232.
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5&=0,\\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5&=0,\\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5&=0,\\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5&=0. \end{aligned}$$

3.233*. Выяснить, образуют ли строки каждой из матриц

$$A=\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & 50 & -5\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 9 & -20 & -30 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3\\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5&=0,\\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5&=0,\\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5&=0,\\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5&=0. \end{aligned}$$

Определить значения параметра a, при которых система имеет нетривиальные решения, и найти эти решения:

3.234.
$$\begin{aligned} a^2x_1+3x_2+2x_3&=0,\\ ax_1-x_2+x_3&=0,\\ 8x_1+x_2+4x_3&=0. \end{aligned}$$

3.235.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3&=0,\\ 4x_1-x_2+7x_3&=0,\\ x_1+ax_2+2x_3&=0. \end{aligned}$$

Если задана неоднородная система $AX=B$, то ее общее решение может быть найдено как сумма общего решения соответствующей однородной системы $AX=O$ и произвольного частного решения неоднородной системы.

Найти общие решения неоднородных систем, используя фундаментальную систему решений соответствующих однородных:

3.236. $$\begin{aligned}2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5&=1,\\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5&=0,\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5&=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5&=3.\end{aligned}$$

3.237. $$\begin{aligned}2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5&=1,\\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5&=1,\\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5&=1,\\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5&=1.\end{aligned}$$

3.238. $$\begin{aligned}x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6&=1,\\ 2x_1-2x_2+2x_3+x_4-x_5+x_6&=1.\end{aligned}$$

3.239. $$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=0,\\ x_1-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5&=2,\\ 2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=-1.\end{aligned}$$

4. Метод последовательных исключений Жордана — Гаусса. С помощью элементарных преобразований над строками и перестановкой столбцов расширенная матрица системы (2) может быть приведена к виду

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,\,r+1} & \dots & a'_{1n} & & b'_1\\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,\,r+1} & \dots & a'_{2n} & & b'_2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\ \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,\,r+1} & \dots & a'_{rn} & & b'_r\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & b'_{r+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\ \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & b'_m \end{array}\right). \tag{7}$$

Матрица (7) является расширенной матрицей системы

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad +a'_{1,\,r+1}x_{r+1}+\dots+a'_{1n}x_n&=b'_1,\\ x_2 \quad +a'_{2,\,r+1}x_{r+1}+\dots+a'_{2n}x_n&=b'_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\ x_r+a'_{r,\,r+1}x_{r+1}+\dots+a'_{rn}x_n&=b'_r,\\ 0&=b'_{r+1},\\ \dots&\\ 0&=b'_m, \end{aligned} \tag{8}$$

которая с точностью до обозначения неизвестных эквивалентна исходной системе.

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \dots, b'_m$ отлично от нуля, то система (8), а следовательно, и исходная система (2) несовместны.

Если же $b'_{r+1}=\dots=b'_m=0$, то система совместна и формулы (8) дают по существу явное выражение для базисных неизвестных $x_1, \dots, x_r$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$.

Пример 4. Методом Жордана—Гаусса найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x_1-2x_2\qquad\;\; + x_4 &= -3,\\ 3x_1- x_2-2x_3\qquad &= 1,\\ 2x_1+ x_2-2x_3- x_4 &= 4,\\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4 &= 7. \end{aligned}$$

◀ Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3\\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4\\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Первые две строки последней матрицы составляют расширенную матрицу системы

$$\begin{aligned} x_1-\frac{4}{5}x_3-\frac{1}{5}x_4 &= 1,\\ x_2-\frac{2}{5}x_3-\frac{3}{5}x_4 &= 2, \end{aligned}$$

эквивалентной исходной. Считая x_1, x_2 базисными неизвестными, а x_3 и x_4 свободными, получаем общее решение в виде

$$X(c_1, c_2)=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\frac{4}{5}c_1+\frac{1}{5}c_2\\ 2+\frac{2}{5}c_1+\frac{3}{5}c_2\\ c_1\\ c_2 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Методом Жордана—Гаусса исследовать совместность и найти общее решение следующих систем:

3.240.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 0,\\ 7x_1+14x_2+20x_3+27x_4 &= 0,\\ 5x_1+10x_2+16x_3+19x_4 &= -2,\\ 3x_1+5x_2+6x_3+13x_4 &= 5. \end{aligned}$$

3.241.

$$\begin{aligned} x_1+x_2\qquad\qquad\qquad &= 1,\\ x_1+x_2+x_3\qquad\quad &= 4,\\ x_2+x_3+x_4\qquad &= -3,\\ x_3+x_4+x_5 &= 2,\\ x_4+x_5 &= -1. \end{aligned}$$

3.242. $$\begin{aligned} 105x_1-175x_2-315x_3+245x_4 &= 84,\\ 90x_1-150x_2-270x_3+210x_4 &= 72,\\ 75x_1-125x_2-225x_3+175x_4 &= 59. \end{aligned}$$

3.243.

$$
\begin{aligned}
8x_1+12x_2&=20,\\
14x_1+21x_2&=35,\\
9x_3+11x_4&=0,\\
16x_3+20x_4&=0,\\
10x_5+12x_6&=22,\\
15x_5+18x_6&=33.
\end{aligned}
$$

3.244.

$$
\begin{aligned}
7x_1-5x_2-2x_3-\ 4x_4&=8,\\
-3x_1+2x_2+\ x_3+\ 2x_4&=-3,\\
2x_1-\ x_2-\ x_3-\ 2x_4&=1,\\
-\ x_1\qquad\ +\ x_3+24x_4&=1,\\
-\ x_2+\ x_3+\ 2x_4&=3.
\end{aligned}
$$

§ 5. Некоторые вычислительные задачи линейной алгебры

1. Операции над матрицами.

В задачах 3.245—3.248 составить на фортране указанные подпрограммы.

3.245. Подпрограмма сложения двух матриц размера $m\times n$. Параметры: A, B, C, M, N, где A и B—двумерные массивы размерности $M\times N$, содержащие исходные матрицы, C—двумерный массив размерности $M\times N$ для результирующей матрицы.

3.246. Подпрограмма умножения матрицы размера $m\times n$ на число α. Параметры: A, M, N, ALFA, где A — двумерный массив размерности $M\times N$, содержащий исходную матрицу перед обращением к подпрограмме и результат после выполнения вычислений, $\mathrm{ALFA}=\alpha$.

3.247. Подпрограмма перемножения двух матриц. Параметры: A, B, C, L, M, N, где A, B и C—двумерные массивы размерностей $L\times M$, $M\times N$ и $L\times N$ соответственно, содержащие исходные матрицы и результат.

3.248. Подпрограмма транспонирования квадратной матрицы. Параметры: A, M, где A—двумерный массив размерности $M\times M$ с исходной матрицей в начале вычислений и с результатом после вычислений.

3.249. Даны матрицы

$$
A=\begin{pmatrix} 1{,}6 & 3{,}2 & 0 & 8\\ -1{,}6 & 3{,}2 & 1{,}6 & 6{,}4\end{pmatrix},\quad
B=\begin{pmatrix} 0{,}625 & -3{,}125\\ 1{,}25 & 0\\ 0{,}625 & 1{,}25\\ -0{,}625 & 0{,}625\end{pmatrix},
$$

$$
C=\begin{pmatrix} 0{,}625 & -3{,}125 & 0{,}625\\ 1{,}25 & 0 & -1{,}25\\ 0{,}625 & 1{,}25 & 0\\ -0{,}625 & 0{,}625 & 3{,}125\end{pmatrix}.
$$

Найти AB, BA и AC.

3.250. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2,5 & -1,25 & 3,75 & -5 \\ 4,125 & -2,75 & 5,5 & -4,125 \\ 8,125 & -4,875 & -3,25 & 1,625 \\ 5,25 & -5,25 & -1,75 & 3,5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2,8 & 6,4 & 3,6 & 1,8 \\ 2 & 5,6 & 2,4 & 1 \\ 1,2 & 3,2 & 3 & 1,2 \\ 0,8 & 0,8 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы AB, BA и $A^{\top}B^{\top}$.

3.251. Используя подпрограммы, полученные в задачах 3.245—3.248, составить на фортране программу решения задач 3.249—3.250, а также одной из задач 3.78—3.86 и 3.90—3.92.

Метод обращения матрицы с помощью элементарных преобразований (рассмотренный в п. 2 § 2) может быть описан следующим образом:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right)\longrightarrow\ldots$$

$$\ldots\longrightarrow\left(\begin{array}{ccccccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{1n}^{(k)} & b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \ldots & b_{1n}^{(k)} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{2n}^{(k)} & b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & \ldots & b_{2n}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{k,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{kn}^{(k)} & b_{k1}^{(k)} & b_{k2}^{(k)} & \ldots & b_{kn}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} & b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \ldots & b_{nn}^{(k)} \end{array}\right)\longrightarrow\ldots$$

$$\ldots\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} & \ldots & b_{1n}^{(n)} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{21}^{(n)} & b_{22}^{(n)} & \ldots & b_{2n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{n1}^{(n)} & b_{n2}^{(n)} & \ldots & b_{nn}^{(n)} \end{array}\right)$$

где $(b_{ij})=E$ — единичная матрица, а элементы матриц $(a_{ij}^{(k)})$ и $(b_{ij}^{(k)})$ связаны соотношениями

$$a_{kj}^{(k)}=\frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad j=k+1,\ \ldots,\ n,$$

$$b_{kj}^{(k)}=\frac{b_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

$$a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-\frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{ik}^{(k-1)},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,\ n,$$

$$j=k+1,\ \ldots,\ n,\quad a_{ik}^{(0)}=a_{ik},$$

$$b_{ij}^{(k)}=b_{ij}^{(k-1)}-\frac{b_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{ik}^{(k-1)},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\ k+1,\ \ldots,\ n,$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad b_{ij}^{(0)}=b_{ij}.$$

3.252. Составить на фортране подпрограмму обращения матрицы методом элементарных преобразований. Параметры: A, B, N, где A и B — двумерные массивы размерности N×N с элементами исходной и обращенной матриц соответственно. Сохранение массива A после вычислений не предусматривается.

В задачах 3.253—3.256 для заданных матриц A найти A^{-1}:

3.253. $A=\begin{pmatrix} 0,24 & 0,84 & 0,68 & 0,88 \\ -0,84 & 0,24 & -0,88 & 0,68 \\ -0,68 & 0,88 & 0,24 & -0,84 \\ -0,88 & -0,68 & 0,84 & 0,24 \end{pmatrix}.$

3.254. $A=\begin{pmatrix} -0,96875 & 0,0625 & 0,125 & 0,25 & 0,5 \\ 0,0625 & -1,875 & 0,25 & 0,5 & 1 \\ 0,125 & 0,25 & -3,5 & 1 & 2 \\ 0,25 & 0,5 & 1 & -6 & 4 \\ 0,5 & 1 & 2 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$

3.255. $A=\begin{pmatrix} 26,4 & 35,2 & 9,9 & 13,2 \\ 44 & 61,6 & 16,5 & 23,1 \\ 16,5 & 22 & 6,6 & 8,8 \\ 27,5 & 38,5 & 11 & 15,4 \end{pmatrix}.$

3.256. $A=\begin{pmatrix} 1,2 & 2,4 & -1,2 & -2,4 \\ 3,6 & 9,6 & 0 & -4,8 \\ 2,4 & 2,4 & -4,8 & -3,6 \\ 3,6 & 9,6 & 1,2 & -7,2 \end{pmatrix}.$

3.257. Используя подпрограмму, полученную в задаче 3.252, составить на фортране программу решения задач 3.253—3.256, а также одной из задач 3.114—3.117 и 3.121—3.126. При решении матричных уравнений в задачах 3.121—3.126 использовать подпрограмму задачи 3.248.

2. Вычисление определителей. Определитель

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{при} \quad a_{11} \neq 0$$

представим в виде

$$\Delta_n=a_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \Delta_n=a_{11}\cdot\Delta_{n-1}.$$

Элементы определителей $\Delta_n, \Delta_{n-1}, \ldots, \Delta_1$, где

$$\Delta_{n-k}=\begin{vmatrix} a_{k+1,\,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{k+1,\,n}^{(k)} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ a_{n,\,k+1}^{(k)} & \ldots & a_{nn}^{(k)} \end{vmatrix},$$

связаны соотношениями

$$a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-\frac{a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \qquad i=k+1, \ldots, n; \quad j=k+1, \ldots, n;$$

$$a_{ij}^{(0)}=a_{ij}, \quad \Delta_1=a_{nn}^{(n-1)},$$

и $a_{kk}^{(k-1)}\neq 0$ при всех k для $\Delta_{n-k+1}\neq 0$. Поэтому

$$\Delta_n=a_{11}^{(0)}\cdot a_{22}^{(1)}\ldots a_{kk}^{(k-1)}\ldots a_{nn}^{(n-1)}.$$

Если $a_{kk}^{(k-1)}=0$, то следует, учитывая изменение знака, поменять местами первую и некоторую другую строки определителя Δ_{n-k+1} так, чтобы левый верхний элемент, называемый *ведущим*, не был равен нулю. Для повышения точности вычислений ведущим элементом нужно выбирать наибольший по модулю из всех элементов первого столбца каждого из определителей Δ_{n-k}, $k=0, 1, \ldots, n-2$.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

◄ $$\Delta=5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 2,8 & 1,4 & 3,8 \\ -0,4 & 6,4 & -0,8 & 5,4 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix} 2,8 & 1,4 & 3,8 \\ 6,4 & -0,8 & 5,4 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=-5\cdot\begin{vmatrix} 6,4 & -0,8 & 5,4 \\ 2,8 & 1,4 & 3,8 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=-5\cdot 6,4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,4375 & 1,75 & 1,4375 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=-5\cdot 6,4\cdot\begin{vmatrix} 1,75 & 1,4375 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=5\cdot 6,4\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1,75 & 1,4375 \end{vmatrix}=$$

$$=5\cdot 6,4\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0,4375 & 1,875 \end{vmatrix}=5\cdot 6,4\cdot 4\cdot 1,875=240.$$ ►

3.258. Составить на фортране подпрограмму-функцию вычисления определителя порядка n. Параметры: A, N, где A — двумерный массив размерности N×N.

Вычислить определители:

3.259. $$\begin{vmatrix} 1,6 & 8,1 & 1464,1 & 62,5 & 240,1 \\ 0,8 & 2,7 & 133,1 & 12,5 & 34,3 \\ 0,8 & 1,8 & 24,2 & 5 & 9,8 \\ 1 & 1,5 & 5,5 & 2,5 & 3,5 \\ 1,3 & 2,3 & 24,7 & 5,5 & 10,3 \end{vmatrix}.$$

3.260. $\begin{vmatrix} 5 & 7{,}5 & 17{,}5 & 2{,}5 & 22{,}5 & 27{,}5 \\ 3{,}2 & -3{,}3 & 10{,}7 & 1{,}1 & 5{,}9 & 12{,}1 \\ 17{,}5 & 10 & 22{,}5 & -2{,}5 & 27{,}5 & -12{,}5 \\ 8{,}7 & 4{,}4 & 8{,}9 & -1{,}1 & 13{,}1 & -5{,}5 \\ 22{,}5 & -10 & 27{,}5 & 2{,}5 & 32{,}5 & 5 \\ 6{,}9 & -3{,}4 & 9{,}1 & 1{,}1 & 9{,}3 & 11{,}2 \end{vmatrix}.$

3.261. $\begin{vmatrix} 2{,}15 & 1{,}14 & 1{,}23 & 1{,}48 & 1{,}05 \\ 4{,}3 & 1{,}71 & 2{,}87 & 3{,}7 & 2{,}73 \\ 6{,}45 & 2{,}85 & 4{,}51 & 5{,}92 & 4{,}41 \\ 4{,}3 & -3{,}99 & 2{,}87 & 2{,}59 & 0{,}42 \\ 2{,}15 & 2{,}28 & 2{,}05 & 1{,}11 & 2{,}1 \end{vmatrix}.$

3.262. $\begin{vmatrix} 1{,}697 & 1{,}5588 & 2{,}2361 & 1{,}3856 \\ 2{,}9394 & 4{,}1243 & 3{,}1623 & -2{,}7713 \\ 3{,}7947 & 6{,}9714 & 5 & 1{,}9596 \\ 2{,}4 & 4{,}4091 & 3{,}1623 & 3{,}0984 \end{vmatrix}.$

3.263. $\begin{vmatrix} 1{,}575 & 2{,}4 & -0{,}5 & -0{,}75 \\ 2{,}1 & -2{,}4 & 1{,}5 & 1{,}2 \\ 1{,}75 & -1{,}6 & 1{,}33 & 0{,}7 \\ 0{,}84 & -0{,}96 & 0{,}5 & 0{,}36 \end{vmatrix}.$

3.264. Используя подпрограмму-функцию, полученную в задаче 3.258, составить на фортране программу решения задач 3.259—3.263 и одной из задач 3.55—3.60.

3. Системы линейных уравнений. Метод Жордана—Гаусса (см. п. 4 § 4) в случае системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{1}$$

заключается в последовательном исключении неизвестных, причем после исключения $(k-1)$-го неизвестного остаются уравнения

$$\sum_{j=k}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j = b_i^{(k)}, \qquad i=k,\ k+1,\ \ldots,\ n, \tag{2}$$

где

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \quad a_{ij}^{(0)} = a_{ij},$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \qquad b_i^{(0)} = b_i.$$

Точность вычислений увеличивается, когда ведущие элементы $a_{kk}^{(k)}$ имеют наибольший модуль в первом столбце матрицы системы (2).

При $k=n$ в системе (2) остается одно уравнение, из которого вычисляется x_n. Этим завершается прямой ход вычислений. Обратный ход состоит в последовательном нахождении x_k по найденным ранее $x_{k+1},\ \ldots,\ x_n$, $k=n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1$.

Пример 2. Решить методом Жордана—Гаусса систему уравнений

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 9{,}13, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 &= 25, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 43. \end{aligned}$$

◀ Последовательно исключая x_1 и x_2 и выбирая ведущими элементами наибольшие по модулю в соответствующих столбцах, получаем

$$\begin{aligned} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 &= 1{,}826, \\ -0{,}6x_2 + 4{,}6x_3 &= 21{,}348, \\ 3{,}8x_2 - 0{,}8x_3 &= 44{,}826, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 &= 1{,}826, \quad (*) \\ 3{,}8x_2 - 0{,}8x_3 &= 44{,}826, \\ -0{,}6x_2 + 4{,}6x_3 &= 21{,}348, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 - 0{,}2105x_3 &= 11{,}7963, \quad (*) \\ 4{,}4737x_3 &= 28{,}4258, \end{aligned} \qquad x_3 = 6{,}3540.$$

Из уравнений, помеченных звездочкой, находим вначале $x_2 = 13{,}1338$, потом $x_1 = 3{,}1820$. ▶

3.265. Составить на фортране подпрограмму решения квадратной системы линейных уравнений методом Жордана—Гаусса. Параметры: A, B, N, где A—двумерный массив элементов матрицы системы, B—одномерный массив, содержащий свободные члены до обращения к подпрограмме и решение системы после вычислений, N—порядок системы.

Решить следующие системы линейных уравнений:

3.266. $$\begin{aligned} 3{,}2x_1 + 5{,}4x_2 + 4{,}2x_3 + 2{,}2x_4 &= 2{,}6, \\ 2{,}1x_1 + 3{,}2x_2 + 3{,}1x_3 + 1{,}1x_4 &= 4{,}8, \\ 1{,}2x_1 + 0{,}4x_2 - 0{,}8x_3 - 0{,}8x_4 &= 3{,}6, \\ 4{,}7x_1 + 10{,}4x_2 + 9{,}7x_3 + 9{,}7x_4 &= -8{,}4. \end{aligned}$$

3.267. $$\begin{aligned} 6{,}087x_1 - 3{,}913x_2 + 7{,}547x_3 + 1{,}734x_4 &= 3{,}21, \\ 1{,}739x_1 + 0{,}869x_2 + 1{,}887x_3 + 0{,}73x_4 &= 6{,}35, \\ 2{,}174x_1 - 1{,}305x_2 + 2{,}83x_3 + 1{,}04x_4 &= 1{,}5, \\ 4{,}5\,x_1 - 1{,}305x_2 + 1{,}887x_3 + 0{,}541x_4 &= -1{,}27. \end{aligned}$$

3.268. $$\begin{aligned} 2{,}67x_1 + 5{,}1x_2 + 3{,}31x_3 + 5{,}64x_4 + 4{,}76x_5 &= 6{,}19, \\ 4{,}44x_1 + 7{,}5x_2 + 4{,}67x_3 + 5{,}7\,x_4 + 6{,}14x_5 &= 6{,}95, \\ 5{,}33x_1 + 9{,}8x_2 + 8{,}67x_3 + 4{,}8x_4 + 7{,}33x_5 &= 12{,}2, \\ 3{,}56x_1 + 5{,}3x_2 + 4{,}15x_3 + 3{,}69x_4 + 3{,}25x_5 &= 5{,}97, \\ 1{,}78x_1 + 4{,}17x_2 + 2{,}67x_3 + 4{,}69x_4 + 3{,}75x_5 &= 4{,}42. \end{aligned}$$

3.269. Используя подпрограмму, полученную в задаче 3.265, составить на фортране программу решения одной из задач 3.266—3.268, 3.190—3.194, 3.198—3.203, 3.208, 3.209.

Метод итераций. Если для системы (1) выполняются неравенства

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

то ее решение $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix}$ удовлетворяет соотношению $X=\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$, т. е. $x_i=\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, $i=1, \ldots, n$, где компоненты вектор-столбца $X^{(k)}$ определяются равенствами

$$x_i^0=\beta_i,$$

$$x_i^{(k+1)}=\beta_i+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j^{(k)}, \quad \alpha_{ii}=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \quad k=0, 1, \ldots,$$

в которых $\beta_i=b_i/a_{ii}$, $\alpha_{ij}=-a_{ij}/a_{ii}$.

Пример 3. Решить методом итераций систему

$$\begin{aligned} 5x_1+0{,}12x_2+0{,}09x_3&=10,\\ 0{,}08x_1+\quad 4x_2-0{,}15x_3&=20,\\ 0{,}18x_1-0{,}06x_2+\quad 3x_3&=-4{,}5. \end{aligned}$$

◄ Система удовлетворяет условиям (3), и на главной диагонали матрицы располагаются наибольшие по модулю элементы строки. Приведем систему к нормальному виду:

$$\begin{aligned} x_1&=\ \ 2\ -0{,}024x_2-0{,}018x_3,\\ x_2&=\ \ 5\ -0{,}02x_1+0{,}03x_3,\\ x_3&=-1{,}5-0{,}06x_1+0{,}02x_2. \end{aligned}$$

Выберем нулевое приближение $X^{(0)}=\begin{pmatrix} 2\\ 5\\ -1{,}5\end{pmatrix}$ и найдем $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}&=\ \ 2\ -0{,}024\cdot 5-0{,}018\cdot(-1{,}5)=1{,}907,\\ x_2^{(1)}&=\ \ 5\ -0{,}02\cdot 2+0{,}03\cdot(-1{,}5)=4{,}915,\\ x_3^{(1)}&=-1{,}5-0{,}06\cdot 2+0{,}02\cdot 5=-1{,}52; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(2)}&=\ \ 2\ -0{,}024\cdot 4{,}915-0{,}018\cdot(-1{,}52)=1{,}90940,\\ x_2^{(2)}&=\ \ 5\ -0{,}02\cdot 1{,}907+0{,}03\cdot(-1{,}52)=4{,}91626,\\ x_3^{(2)}&=-1{,}5-0{,}06\cdot 1{,}907+0{,}02\cdot 4{,}915=-1{,}51612; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(3)}&=\ \ 2\ -0{,}024\cdot 4{,}91626-0{,}018\cdot(-1{,}51612)=1{,}9092999,\\ x_2^{(3)}&=\ \ 5\ -0{,}02\cdot 1{,}90940+0{,}03\cdot(-1{,}51612)=4{,}9163284,\\ x_3^{(3)}&=-1{,}5-0{,}06\cdot 1{,}90940+0{,}02\cdot 4{,}91626=-1{,}5162388. \end{aligned}$$

Первые три знака после запятой в $X^{(2)}$ и $X^{(3)}$ одинаковы, поэтому с точностью до 10^{-3} решением системы является вектор

$$X=\begin{pmatrix} 1,909 \\ 4,916 \\ -1,516 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

3.270. Составить на фортране подпрограмму решения линейной системы уравнений методом итераций. Параметры: A, B, X, N, EPS, где A — двумерный массив элементов матрицы системы, B — одномерный массив, содержащий свободные члены, X — одномерный массив с решениями системы, N — порядок системы, EPS — предельная абсолютная погрешность.

Решить методом итераций системы:

3.271.
$$\begin{aligned} &4,1x_1+0,1x_2+0,2x_3+0,2x_4=21,14,\\ &0,3x_1+5,3x_2+0,9x_3-0,1x_4=-17,82,\\ &0,2x_1+0,3x_2+3,2x_3+0,2x_4=9,02,\\ &0,1x_1+0,1x_2+0,2x_3-9,1x_4=17,08. \end{aligned}$$

3.272.
$$\begin{aligned} &2,4x_1+0,2x_2-0,3x_3-1,1x_4+5,8x_5=23,84,\\ &0,3x_1+0,1x_2+1,1x_3+10,2x_4+x_5=38,85,\\ &0,5x_1-6,2x_2+0,1x_3+1,5x_4-1,2x_5=17,23,\\ &0,1x_1+2,1x_2+5,1x_3+0,2x_4-0,3x_5=6,56,\\ &2,5x_1+0,1x_2+0,2x_3+0,3x_4+0,4x_5=6,63. \end{aligned}$$

3.273. Используя подпрограмму, полученную в задаче 3.270, составить на фортране программу решения задач 3.271 и 3.272.

Глава 4

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Линейные пространства и пространства со скалярным произведением

1. Линейное пространство. Множество $\mathscr{L}$ называется *линейным* (*векторным*) *пространством*, если выполнены следующие условия:

1) В $\mathscr{L}$ введена операция сложения элементов, т. е. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{L}$ определено отображение

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \longrightarrow \boldsymbol{z} \in \mathscr{L}$$

(обозначение: $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$), обладающее следующими свойствами:

1а) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

1б) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;

1в) $\exists \boldsymbol{0} \in \mathscr{L}\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{L}\ (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x})$ (элемент $\boldsymbol{0}$ называется *нулевым*);

1г) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{L}\ \exists (-\boldsymbol{x}) \in \mathscr{L}\ (\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0})$ (элемент $-\boldsymbol{x}$ называется *противоположным* элементу $\boldsymbol{x}$).

2) В $\mathscr{L}$ введена операция умножения элементов на действительные (комплексные) числа, т. е. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda \in \mathbb{C})$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathscr{L}$ определено отображение

$$\langle \lambda, \boldsymbol{x}\rangle \longrightarrow \boldsymbol{y} \in \mathscr{L}$$

(обозначение: $\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{x}$), обладающее свойствами:

2а) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

2б) $\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$.

3) Операции сложения элементов и умножения их на числа удовлетворяют законам дистрибутивности:

3а) $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$;

3б) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$.

Элементы линейного пространства называются *векторами*. Пространство $\mathscr{L}$ называется *действительным*, если в $\mathscr{L}$ операция умножения векторов на число определена только для действительных чисел, и *комплексным*, если эта операция определена для комплексных чисел.

Проверить, что следующие множества являются линейными пространствами:

4.1. Множество $\mathscr{V}_3$ всех геометрических векторов (операции над геометрическими векторами определены в § 1 гл. 2).

4.2. Множество $\mathbb{R}^n$ всех арифметических n-компонентных векторов $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ (операции над арифметическими векторами определены в § 3 гл. 3).

4.3. Множество $\mathcal{P}_n$ всех многочленов

$$p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

степени $\leqslant n-1$ с естественным образом введенными операциями сложения многочленов и умножения их на числа.

4.4. Множество $C_{[a,\,b]}$ всех функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с естественным образом введенными операциями сложения функций и умножения их на числа.

4.5. Множество $\mathcal{M}_{m,\,n}$ всех матриц размера $m \times n$ (операции над матрицами определены в § 2 гл. 3).

Выяснить, являются ли следующие множества линейными пространствами:

4.6. Множество $\mathcal{V}_1$ всех геометрических векторов, коллинеарных фиксированной прямой.

4.7. Множество всех геометрических векторов, исходящих из начала координат, концы которых лежат на фиксированной прямой.

4.8. Множество всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|\boldsymbol{x}| > a$, где $a > 0$ — фиксированное число.

4.9. Множество всех сходящихся последовательностей.

4.10. Множество всех расходящихся последовательностей.

4.11. Множество всех функций, интегрируемых на отрезке $[a, b]$.

4.12. Множество всех преобразований поворота трехмерного пространства геометрических векторов вокруг фиксированной оси.

Система векторов $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s\} \subset \mathcal{L}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, не равные одновременно нулю и такие, что $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_s\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$; в противном случае эта система называется *линейно независимой*.

Пусть $Q \subset \mathcal{L}$ — произвольное множество векторов линейного пространства. Упорядоченная система векторов $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s)$ называется *базисом* в Q, если:

а) $\boldsymbol{e}_k \in Q$, $k = 1, 2, \ldots, s$;

б) система $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s)$ линейно независима;

в) для любого $\boldsymbol{x} \in Q$ найдутся такие числа $x_1, \ldots, x_s$, что

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{s} x_k \boldsymbol{e}_k. \tag{1}$$

Формула (1) называется *разложением вектора $\boldsymbol{x}$ по базису* $\mathfrak{B}$. Коэффициенты $x_1, \ldots, x_s$ однозначно определяются вектором $\boldsymbol{x}$ и называются *координатами* этого вектора в базисе $\mathfrak{B}$.

Если множество $Q \subset \mathcal{L}$ обладает базисами, то все они состоят из одинакового числа векторов, называемого *рангом* Q (и обозначаемого rang Q). В частности, если все пространство $\mathscr{L}$ имеет базис, то оно называется *конечномерным* и обозначается $\mathscr{L}_n$, где $n = \dim \mathscr{L}$ — число векторов в любом базисе, называемое *размерностью* пространства. В противном случае пространство $\mathscr{L}$ называется *бесконечномерным*.

Пусть $\mathscr{L}_n$ — произвольное n-мерное пространство, $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ — фиксированный базис в нем. Тогда всякому вектору $x \in \mathscr{L}_n$ взаимно однозначно соответствует столбец его координат в этом базисе:

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом линейные операции над векторами в координатной форме выглядят следующим образом:

$$z = x + y \Leftrightarrow Z = X + Y,$$
$$y = \lambda x \Leftrightarrow Y = \lambda X.$$

Пусть $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathfrak{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ — два различных базиса в $\mathscr{L}_n$. Каждый из векторов базиса $\mathfrak{B}'$ разложим по базису $\mathfrak{B}$:

$$e_k' = t_{1k} e_1 + \ldots + t_{nk} e_n \Leftrightarrow E_k' = \begin{pmatrix} t_{1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{nk} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрицей перехода $T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$ от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$ называется матрица

$$T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

k-й столбец которой есть столбец E_k' координат вектора e_k' в базисе $\mathfrak{B}$. Если x — произвольный вектор из $\mathscr{L}_n$, X и X' — столбцы его координат в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно, то имеет место равенство

$$X' = (T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'})^{-1} X \tag{2}$$

(формула преобразования координат при преобразовании базиса).

Пример 1. Найти координаты геометрического вектора $x = -i + 2j + k$ в базисе $\mathfrak{B}'$, состоящем из векторов $e_1' = i + j$, $e_2' = j + k$, $e_3' = i + k$.

◀ Выпишем координаты векторов e_1', e_2', e_3' в исходном базисе $\mathfrak{B} = (i, j, k)$:

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ имеет вид

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

Обращая матрицу $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ и используя формулу (2), находим

$$X'=(T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'})^{-1}X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix},$$

т. е. $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{e}_2'-\boldsymbol{e}_3'$. ▶

4.13. Пусть Q — произвольная система векторов из $\mathscr{L}$. Подсистема $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s\}\subset Q$ называется *максимальной линейно независимой подсистемой* в Q, если $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s\}$ — линейно независимая система и всякая расширенная система $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{x}$, где $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор из Q, линейно зависима. Доказать, что всякий базис в Q есть максимальная линейно независимая подсистема в Q, и наоборот.

4.14. Если заданы произвольные k векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, то из них можно построить не более k линейно независимых комбинаций. Используя этот результат, доказать: если $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ — два различных базиса в системе Q, то они состоят из одинакового числа векторов (т. е. имеет смысл понятие ранга системы Q).

4.15. В пространстве $\mathscr{V}_3$ заданы векторы

$$\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{e}_3'=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

Доказать, что система $\mathfrak{B}'=(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')$ — базис в $\mathscr{V}_3$, и написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}, \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{j}, \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{k})$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$.

Пусть $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ и $\mathfrak{B}'=(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$ — прямоугольные базисы в $\mathscr{V}_3$. В задачах 4.16—4.18 найти матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ и выписать столбец координат вектора $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$.

4.16. Базис $\mathfrak{B}'$ получен изменением на противоположное направление всех трех базисных ортов $\mathfrak{B}$.

4.17. Базис $\mathfrak{B}'$ получен перестановкой $\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{i}$.

4.18. Базис $\mathfrak{B}'$ получен поворотом базиса $\mathfrak{B}$ на угол φ вокруг орта $\boldsymbol{i}$.

4.19. Найти ранг и какой-нибудь базис системы геометрических векторов $\boldsymbol{x}_1=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{x}_2=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}_3=-4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}_4=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

4.20. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы $e_1'=(1, 2, -1, -2)$, $e_2'=(2, 3, 0, -1)$, $e_3'=(1, 2, 1, 4)$, $e_4'=(1, 3, -1, 0)$. Доказать, что система $\mathfrak{B}'=(e_1', e_2', e_3', e_4')$ — базис в $\mathbb{R}^4$, и написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^4$ (см. § 3 гл. 3). Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}=(7, 14, -1, 2)$ в базисе $\mathfrak{B}'$.

4.21. Доказать, что система арифметических векторов $\boldsymbol{x}_1=(1, 2, 0, 4)$, $\boldsymbol{x}_2=(-1, 0, 5, 1)$, $\boldsymbol{x}_3=(1, 6, 10, 14)$ линейно зависима, и написать какое-нибудь нетривиальное соотношение вида $\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\lambda_3\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$. Найти ранг и все базисы этой системы.

4.22. Доказать, что система матриц вида

$$A_{\alpha\beta}=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}0&\dots&0&0&0&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ 0&\dots&0&0&0&\dots&0\\ 0&\dots&0&1&0&\dots&0\\ 0&\dots&0&0&0&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ 0&\dots&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix} & \alpha, \\ \beta & \end{array}\qquad \begin{array}{l}\alpha=1,\dots,m,\\ \beta=1,\dots,n\end{array}$$

образует базис в пространстве $\mathscr{M}_{m,n}$ всех матриц размера $m\times n$, и, следовательно, $\dim\mathscr{M}_{m,n}=mn$. Чему равны координаты произвольной матрицы $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_{m,n}$ в этом базисе?

4.23. Доказать, что система многочленов $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ образует базис в пространстве $\mathscr{P}_n$ всех многочленов степени $\leqslant n-1$ и, следовательно, $\dim\mathscr{P}_n=n$ (этот базис называется *каноническим*). Найти координаты:

а) многочлена $-3t^2+1$ в каноническом базисе пространства $\mathscr{P}_3$;

б) многочлена t^2-2t в каноническом базисе пространства $\mathscr{P}_4$.

4.24. Доказать, что система многочленов t^3+t^2+t+1, t^2+t+1, $t+1$, 1 линейно независима.

4.25. Доказать, что система многочленов t^2+1, $-t^2+2t$, t^2-t образует базис в пространстве $\mathscr{P}_3$. Выписать в этом базисе столбец координат многочлена $-2t^2+t-1$.

4.26. Доказать, что при произвольном t_0 система многочленов 1, $t-t_0$, $(t-t_0)^2$, $\dots$, $(t-t_0)^{n-1}$ образует базис в $\mathscr{P}_n$.

4.27. Найти матрицу перехода от канонического базиса $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ к базису 1, $t-t_0$, $(t-t_0)^2$, $\dots$, $(t-t_0)^{n-1}$ в $\mathscr{P}_n$.

4.28. Найти координаты многочлена t^2-t+2 в базисе 1, $t-1$, $(t-1)^2$.

4.29. Доказать, что пространство $\mathscr{P}$ всех многочленов бесконечномерно. Вывести отсюда, что пространство $C_{[a, b]}$ функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, также бесконечномерно.

В задачах 4.30—4.34 в произвольном пространстве $\mathscr{L}_n$ векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ и $\boldsymbol{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе $\mathfrak{B}$. Доказать, что система $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{e}'_n)$ — базис в $\mathscr{L}_n$, и найти столбец X' координат вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе.

4.30. $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

4.31. $E'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

4.32. $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$E'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4.33. $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} i \\ -2i \end{pmatrix}$.

4.34. $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.35. Доказать следующие утверждения:

а) матрица перехода $T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$ всегда невырождена, и $T_{\mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}} = (T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'})^{-1}$;

б) если

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

— невырожденная матрица и $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — некоторый базис в пространстве $\mathscr{L}_n$, то система векторов

$$\boldsymbol{e}'_i = t_{1i}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + t_{ni}\boldsymbol{e}_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

также образует базис в $\mathscr{L}_n$.

4.36. Доказать, что если $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$ — базисы в $\mathscr{L}_n$, то справедливо матричное равенство

$$T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}''} = T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} \cdot T_{\mathfrak{B}' \to \mathfrak{B}''}.$$

В задачах 4.37, 4.38 в произвольном пространстве $\mathscr{L}_n$ векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ заданы своими координатами в некотором базисе. Требуется доказать, что системы $\mathfrak{B}=(e_1, \ldots, e_n)$ и $\mathfrak{B}'=(e'_1, \ldots, e'_n)$ — базисы в $\mathscr{L}_n$, и, используя результаты задач 4.35 и 4.36, написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$.

4.37. $E_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$;

$E'_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $E'_2=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$, $E'_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$.

4.38. $E_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\3\end{pmatrix}$;

$E'_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\3\end{pmatrix}$, $E'_2=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\\-4\end{pmatrix}$, $E'_3=\begin{pmatrix}2\\2\\5\\4\end{pmatrix}$, $E'_4=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

Пусть $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ — два действительных (или комплексных) линейных пространства. Отображение $\varphi\colon \mathscr{L}\to\mathscr{L}'$ пространства $\mathscr{L}$ на пространство $\mathscr{L}'$ называется *изоморфизмом*, если:

а) φ взаимно однозначно;

б) $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$ и $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ для любых $x, y\in\mathscr{L}$ и для любого числа λ.

Если существует изоморфизм $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}'$, то пространства $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ называются *изоморфными*: $\mathscr{L}\simeq\mathscr{L}'$.

В задачах 4.39—4.41 [1]) установить, является ли изоморфизмом заданное отображение $\mathscr{V}_3$ на $\mathbb{R}^3$.

4.39. $\varphi(xi+yj+zk)=(2x-y,\ z,\ x+y+z)$.

4.40. $\varphi(xi+yj+zk)=(x+y-1,\ 2z,\ 3y)$.

4.41. $\varphi(xi+yj+zk)=(x+y,\ -y+2z,\ x+2y-2z)$.

4.42. Отображение $\varphi\colon\mathscr{L}_n\to\mathbb{R}^n$ произвольного пространства $\mathscr{L}_n$ на пространство $\mathbb{R}^n$ арифметических векторов имеет вид

$$\varphi(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)=(x_1, \ldots, x_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

---

[1]) Для обозначения координат геометрических векторов в прямоугольном базисе (i, j, k) условимся в этой главе использовать строчные буквы x, y, z, в отличие от прописных букв, используемых в главе 2, так как здесь прописными буквами мы обозначаем вектор-столбцы.

где $\mathfrak{B}=(e_1, \ldots, e_n)$ — некоторый базис в $\mathscr{L}_n$, а $A=(a_{ij})$ — невырожденная матрица порядка n. Доказать, что это отображение — изоморфизм и, следовательно, что $\mathscr{L}_n \simeq \mathbb{R}^n$.

4.43. Доказать, что множество всех комплексных чисел с обычным сложением и умножением на действительные числа образует действительное пространство, изоморфное пространству $\mathbb{R}^2$. Написать матрицу перехода от базиса $\mathfrak{B}=(1, i)$ к базису $\mathfrak{B}'=(1+i, -i)$ в этом пространстве, и для числа $-2+3i$ написать разложение по базису $\mathfrak{B}'$.

2. Подпространства и линейные многообразия. *Подпространством* линейного пространства $\mathscr{L}$ называется такое подмножество $\mathscr{L}' \subset \mathscr{L}$, которое обладает свойствами:

а) $x, y \in \mathscr{L}' \Rightarrow x+y \in \mathscr{L}'$;

б) $x \in \mathscr{L}' \Rightarrow \lambda x \in \mathscr{L}'$ для всякого числа λ.

Если $\mathscr{L}'$ — некоторое подпространство в $\mathscr{L}$, то множество векторов

$$\mathscr{L}'+x_0=\{x \in \mathscr{L} \mid x=x'+x_0,\ x' \in \mathscr{L}' \text{ для некоторого } x_0 \in \mathscr{L}\}$$

называется *линейным многообразием*, полученным сдвигом подпространства $\mathscr{L}'$ на вектор x_0.

4.44. Доказать, что всякое подпространство $\mathscr{L}'$ линейного пространства $\mathscr{L}$ также является линейным пространством (при этом $\dim \mathscr{L}' \leqslant \dim \mathscr{L}$).

В задачах 4.45—4.49 требуется установить, являются ли заданные множества подпространствами в соответствующих пространствах. В случае положительного ответа найти их размерность.

4.45. Множество всех геометрических векторов из $\mathscr{V}_3$:

а) компланарных фиксированной плоскости;

б) удовлетворяющих условию $(x, a)=0$, где a — фиксированный вектор;

в) удовлетворяющих условию $|x|=1$.

4.46. Множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вида:

а) $x=(0, x_2, 0, x_4, x_5, \ldots, x_n)$;

б) $x=(1, x_2, 1, x_4, x_5, \ldots, x_n)$.

4.47*. Множество всех векторов произвольного пространства $\mathscr{L}_n$, координаты которых в фиксированном базисе удовлетворяют условиям:

а) $x_1=x_n$; б) $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$; в) $x_1-x_2=1$;

г) $a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0,$

или, в матричной форме, $AX=0$, где A — заданная матрица размера $m \times n$.

4.48. Множество всех матриц A порядка n, удовлетворяющих условиям:

а) $A^{\mathrm{T}} = A$ (симметричные матрицы); б) $\det A = 0$.

4.49. Множество всех функций $f(t) \in C_{[a,\,b]}$ (см. задачу 4.4), удовлетворяющих условиям:

а) $f(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in [a,\, b]$;

б) $f(t_0) = 1$ для некоторого $t_0 \in [a,\, b]$;

в) $f(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, т. е. $f(t)$ — многочлен степени не выше $n-1$.

Пусть Q — произвольная система векторов из линейного пространства $\mathscr{L}$.

Линейной оболочкой системы Q называется множество векторов

$$\mathscr{L}(Q) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{x}_s,\ \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_s \in Q\}.$$

4.50. Доказать, что,

а) $\mathscr{L}(Q)$ — подпространство в $\mathscr{L}$;

б) $\dim \mathscr{L}(Q) = \operatorname{rang} Q$, причем в качестве базиса в $\mathscr{L}(Q)$ можно взять любой базис системы Q.

4.51. Найти размерность линейной оболочки $\mathscr{L}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ арифметических векторов $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (0, -1, 2, 0)$. Показать, что вектор $\boldsymbol{x} = (1, -1, 4, -1)$ принадлежит $\mathscr{L}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$.

Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки заданной системы арифметических векторов:

4.52. $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{x}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{x}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{x}_5 = (0, 1, 2, 3)$.

4.53. $\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $\boldsymbol{x}_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $\boldsymbol{x}_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

4.54*. Показать, что линейная оболочка системы многочленов $-3t^2 - 1$, $2t^2 + t$, $-t$ совпадает с пространством $\mathscr{P}_3$ всех многочленов степени $\leqslant 2$.

Пусть V — произвольная система геометрических векторов. *Геометрическим образом* системы V назовем множество точек, являющихся концами векторов из V, при условии, что все векторы исходят из начала координат.

4.55. Написать уравнение геометрического образа линейной оболочки $\mathscr{L}(\boldsymbol{a})$ и многообразия $\mathscr{L}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$.

4.56. Написать уравнение геометрического образа линейной оболочки $\mathscr{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ и многообразия $\mathscr{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) + \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$.

4.57. Задана система уравнений:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 &= 1,\\
3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 4,\\
x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0.
\end{aligned}$$

а) Доказать, что множество решений этой системы есть линейное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^5$.

б) Сдвигом какого пространства получается это линейное многообразие? Найти ранг и какой-нибудь базис этого подпространства.

в) Найти какой-нибудь вектор сдвига.

3. Пространства со скалярным произведением. Действительное линейное пространство $\mathscr{E}$ называется *евклидовым пространством*, если каждой паре векторов x и y из $\mathscr{E}$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое символом (x, y) и называемое *скалярным произведением* векторов x и y, причем выполнены следующие условия:

1) $(x, y)=(y, x)$;

2) $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)$;

3) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

4) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Длиной вектора x называется число

$$|x|=\sqrt{(x, x)}.$$

Вектор x, длина которого равна единице, называется *нормированным*.

Для любых векторов x, y евклидова пространства справедливо неравенство Коши—Буняковского

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y),$$

которое позволяет следующим образом определить угол между ненулевыми векторами:

$$\cos\varphi=\frac{(x, y)}{|x|\cdot|y|}.$$

Ненулевые векторы $x, y \in \mathscr{E}$ называются *ортогональными*, если $(x, y)=0$.

Базис $\mathfrak{B}=(e_1, \ldots, e_n)$ n-мерного евклидова пространства $\mathscr{E}_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(e_i, e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i=j. \end{cases}$$

Если в пространстве $\mathscr{E}_n$ задан произвольный базис $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, то векторы

$$e_1=f_1,\quad e_k=f_k-\sum_{i=1}^{k-1} c_i^{(k-1)} e_i, \qquad k=2, 3, \ldots, n,$$

где $c_i^{(k-1)}=\dfrac{(f_k, e_i)}{(e_i, e_i)}$, образуют ортогональный базис в этом пространстве (процесс ортогонализации Шмидта).

Комплексное линейное пространство $\mathcal{U}$ называется *унитарным*, если каждой паре векторов x, y из $\mathcal{U}$ поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое символом (x, y) и называемое *скалярным произведением* векторов x и y, причем выполнены следующие условия:

1) $(x, y)=\overline{(y, x)}$;

2) $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)$;

3) $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\lambda \in \mathbb{C}$;

4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$, причем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

В унитарном пространстве не определяется угол между векторами. Однако все остальные определения и результаты, сформулированные выше для евклидова пространства, остаются справедливыми и для унитарного пространства.

Евклидовы и унитарные пространства в дальнейшем называются *пространством со скалярным произведением*.

4.58. Доказать следующие свойства скалярного произведения унитарного пространства:

а) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$;

б) $(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{y}) = \bar{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$;

в) $(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$;

г) $(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) = 0$.

4.59. Доказать, что базис $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}_n$ является ортонормированным в том и только в том случае, когда выполнено любое из следующих условий:

а) если $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$, то $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$;

б) если $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$, то $x_k = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

4.60. Доказать, что любая система попарно ортогональных векторов линейно независима.

4.61. Пользуясь неравенством Коши—Буняковского, доказать следующие н е р а в е н с т в а т р е у г о л ь н и к а:

а) $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$;

б) $||\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{y}|| \leqslant |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|$.

4.62. а) Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ формула

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, задает скалярное произведение (получаемое евклидово пространство арифметических векторов в дальнейшем будем также обозначать символом $\mathbb{R}^n$).

б) Показать, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ канонический базис (см. § 3 гл. 3) является ортонормированным.

в) Написать неравенство Коши—Буняковского для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

г) Написать неравенства треугольника в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

4.63. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ — произвольные векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^2$. Показать, что скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ можно определить следующими способами:

а) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$;

б) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

Вычислить скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x} = (1, -2)$ и $\boldsymbol{y} = (5, 1)$ каждым из указанных способов.

4.64. Доказать, что в пространстве $\mathcal{P}_n$ многочленов степени $\leqslant n-1$ скалярное произведение многочленов

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$$

и

$$q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_{n-1} t^{n-1}$$

можно определить способами:

а) $(p, q) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1}$;

б) $(p, q) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(t_k)\, q(t_k)$, $t_1, \ldots, t_n$ — произвольные попарно различные действительные числа.

Вычислить скалярное произведение многочленов $p(t) = 1 + t + t^2$ и $q(t) = t - 2t^2 + 3t^3$ каждым из указанных способов $(n = 4)$, если в случае б) $t_1 = -2$, $t_2 = -1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$.

4.65. а) Доказать, что в пространстве $C_{[a, b]}$ соотношение

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

задает скалярное произведение.

б) Написать неравенство Коши — Буняковского для этого пространства.

в) Написать неравенства треугольника для этого пространства.

Применить процесс ортогонализации к следующим системам векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (см. задачу 4.62):

4.66. $\boldsymbol{f}_1 = (1, -2, 2)$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1, 0, -1)$, $\boldsymbol{f}_3 = (5, -3, -7)$.

◀ Полагаем $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1 = (1, -2, 2)$. Вектор $\boldsymbol{e}_2$ ищем в виде $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f}_2 - c_1^{(1)}\boldsymbol{e}_1$. Так как $(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1) = -3$, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 9$, то $c_1^{(1)} = (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{e}_1)/(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = -1/3$. Следовательно, $\boldsymbol{e}_2 = (-2/3, -2/3, -1/3)$. Наконец, вектор $\boldsymbol{e}_3$ находим в виде следующей линейной комбинации: $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_3 - c_1^{(2)}\boldsymbol{e}_1 - c_2^{(2)}\boldsymbol{e}_2$. Вычисляя скалярные произведения $(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1) = -3$, $(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2) = 1$, $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 1$, находим значения коэффициентов $c_1^{(2)} = (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_1)/(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = -1/3$, $c_2^{(2)} = (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{e}_2)/(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 1$. Следовательно, $\boldsymbol{e}_3 = (6, -3, -6)$. ▶

4.67. $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (3, 3, -1, -1)$, $\boldsymbol{f}_3 = (-2, 0, 6, 8)$.

4.68. $f_1=(1,\ 2,\ 1,\ 3)$, $f_2=(4,\ 1,\ 1,\ 1)$, $f_3=(3,\ 1,\ 1,\ 0)$.

4.69. $f_1=(1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $f_2=(1,\ 1,\ -5,\ 3)$, $f_3=(3,\ 2,\ 8,\ -7)$.

4.70*. $f_1=(2,\ 1,\ 3,\ -1)$, $f_2=(7,\ 4,\ 3,\ -3)$, $f_3=(1,\ 1,\ -6,\ 0)$, $f_4=(5,\ 7,\ 7,\ 8)$.

Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

4.71. $f_1=(1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $f_2=(1,\ 1,\ -5,\ 3)$, $f_3=(3,\ 2,\ 8,\ -7)$.

4.72. $f_1=(2,\ 1,\ 3,\ -1)$, $f_2=(7,\ 4,\ 3,\ -3)$, $f_3=(1,\ 1,\ -6,\ 0)$, $f_4=(5,\ 7,\ 7,\ 8)$.

Проверить ортогональность следующих систем векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и дополнить их до ортогональных базисов:

4.73*. $e_1=(1,\ -2,\ 1,\ 3)$, $e_2=(2,\ 1,\ -3,\ 1)$.

4.74. $e_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $e_2=(1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -2)$, $e_3=(2,\ 1,\ -1,\ 0,\ 2)$.

4.75. $e_1=(2/3,\ 1/3,\ 2/3)$, $e_2=(1/3,\ 2/3,\ -2/3)$.

4.76. $e_1=(1,\ 1,\ 1,\ 2)$, $e_2=(1,\ 2,\ 3,\ -3)$.

4.77. Пусть L — линейное подпространство в $\mathcal{E}_n$. Доказать, что:

а) любой вектор $x\in\mathcal{E}_n$ однозначно представим в виде $x=y+z$, где $y\in L$ и z ортогонален к L (y называется *ортогональной проекцией* вектора x на L, а z — *ортогональной составляющей* x относительно L);

б) если $\mathfrak{B}=(e_1,\ \ldots,\ e_k)$ — базис L, то $y=\sum\limits_{i=1}^{k} c_i e_i$, где коэффициенты c_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, однозначно находятся из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} (e_j,\ e_i)\,c_i=(e_j,\ x),\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

а $z=x-y$.

Используя результат задачи 4.77, найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на линейное подпространство L евклидова пространства $\mathbb{R}^n$:

4.78. $x=(-3,\ 5,\ 9,\ 3)$, L натянуто на векторы: $e_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $e_2=(2,\ -1,\ 1,\ 1)$, $e_3=(2,\ -7,\ -1,\ -1)$.

4.79. $x=(4,\ -1,\ -3,\ 4)$, L натянуто на векторы: $e_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $e_2=(1,\ 2,\ 2,\ -1)$, $e_3=(1,\ 0,\ 0,\ 3)$.

4.80. $x=(5,\ 2,\ -2,\ 2)$, L натянуто на векторы: $e_1=(2,\ 1,\ 1,\ -1)$, $e_2=(1,\ 1,\ 3,\ 0)$, $e_3=(1,\ 2,\ 8,\ 1)$.

4.81. Доказать, что в действительном евклидовом пространстве справедлива теорема Пифагора, а также ей обратная: два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2$.

4.82*. Доказать, что теорема Пифагора остается справедливой и в унитарном пространстве: если векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны, то $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2$. Показать вместе с тем, что обратное к теореме Пифагора утверждение в этом случае неверно.

§ 2. Линейные операторы

1. Алгебра линейных операторов. *Линейным оператором* в линейном пространстве $\mathscr{L}$ называется всякое отображение $\boldsymbol{A}$: $\mathscr{L}\longrightarrow\mathscr{L}$ пространства $\mathscr{L}$ в себя, обладающее свойствами

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \text{ и } \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

Пусть $\boldsymbol{A}$ — линейный оператор в конечномерном пространстве $\mathscr{L}_n$ и $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — некоторый фиксированный базис. Разложим векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k$, $k=1, \ldots, n$, по базису $\mathfrak{B}$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k=a_{1k}\boldsymbol{e}_1+\ldots+a_{nk}\boldsymbol{e}_n, \quad k=1, \ldots, n.$$

Тогда матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе* $\mathfrak{B}$. Матрицу оператора $\boldsymbol{A}$ будем иногда обозначать также символом $[\boldsymbol{A}]$ или $[\boldsymbol{A}]_{\mathfrak{B}}$, если существенно, о каком базисе идет речь.

Заданием матрицы оператор определяется однозначно, а именно: если $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, то $Y=AX$, где X, Y — столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и A — матрица оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\mathfrak{B}$.

Пусть A и A' — матрицы оператора $\boldsymbol{A}$ в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$, а $T=T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$. Тогда формула преобразования матрицы оператора при преобразовании базиса имеет вид

$$A'=T^{-1}AT. \tag{1}$$

Пример 1. В базисе $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ написать матрицу оператора проектирования $\boldsymbol{P}_\alpha$ на плоскость α: $x+y+z=0$.

◀ Оператор проектирования на плоскость α определяется равенством $\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_\alpha$, где $\boldsymbol{x}_\alpha$ — ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на плоскость α. Имеем

$$\boldsymbol{P}_\alpha\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}-\text{пр}_n\boldsymbol{x}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\boldsymbol{x}-\frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{n}|^2}\boldsymbol{n},$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормальный вектор плоскости α. В рассматриваемом случае $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ и, следовательно,

$$P_\alpha \boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{n}=\frac{2}{3}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k},$$

$$P_\alpha \boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{n}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k},$$

$$P_\alpha \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}-\frac{1}{3}\boldsymbol{n}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k},$$

откуда

$$P_\alpha=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Над линейными операторами, действующими в фиксированном пространстве $\mathscr{L}$, вводятся следующие операции:

а) сложение операторов: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$; при этом $[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}]=A+B$;

б) умножение операторов на числа: $(\lambda\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$; при этом $[\lambda\boldsymbol{A}]=\lambda A$;

в) умножение операторов: $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})$; при этом $[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}]=AB$.

Обратным к оператору $\boldsymbol{A}$ называется оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$ такой, что $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ — *единичный* оператор, реализующий тождественное отображение. Оператор $\boldsymbol{A}$ имеет обратный (и в этом случае называется *невырожденным*) в том и только в том случае, когда его матрица A невырождена (в любом базисе); при этом $[\boldsymbol{A}^{-1}]=A^{-1}$.

В задачах 4.83—4.89 установить, какие из заданных отображений пространства $\mathscr{V}_3$ в себя являются линейными операторами; выписать их матрицы в прямоугольном базисе $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$.

4.83. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, λ — фиксированное число.

4.84. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$, λ и $\boldsymbol{a}$ фиксированы.

4.85. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e}$ — заданный единичный вектор. Выяснить геометрический смысл этого отображения.

4.86. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}]$, $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор.

4.87. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор.

4.88.** $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{e},\ \varphi)$ — отображение, состоящее в повороте на угол φ вокруг оси, задаваемой единичным вектором $\boldsymbol{e}$.

4.89. Если $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, то

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(y+z)\,\boldsymbol{i}+(2x+z)\,\boldsymbol{j}+(3x-y+z)\,\boldsymbol{k}.$$

В задачах 4.90—4.95 установить, какие из заданных отображений пространства арифметических векторов $\mathbb{R}^3$ в себя являются линейными операторами; выписать их матрицы в каноническом базисе.

4.90. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(x_2+x_3,\ 2x_1+x_3,\ 3x_1-x_2+x_3)$.

4.91. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2+1,\ x_3+2)$.

4.92. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(0,\ x_2-x_3,\ 0)$.

4.93. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(x_1+2x_2+2x_3,\ -3x_2+x_3,\ 2x_1+3x_3)$.

4.94. $A\boldsymbol{x}=(3x_1+x_2,\ x_1-2x_2-x_3,\ 3x_2+2x_3)$.

4.95. $A\boldsymbol{x}=(3x_1+5x_3,\ x_1+x_3+1,\ 3x_2-6x_3)$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два линейных оператора $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Найти матрицу $[\boldsymbol{C}]$ линейного оператора $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ и его явный вид в каноническом базисе $\mathbb{R}^3$:

4.96. $A\boldsymbol{x}=(2x_2,\ -2x_1+3x_2+2x_3,\ 4x_1-x_2+5x_3)$,
$B\boldsymbol{x}=(-3x_1+x_3,\ 2x_2+x_3,\ -x_2+3x_3)$.

◀ Так как $Ae_1=(0,\ -2,\ 4)$, $Ae_2=(2,\ 3,\ -1)$, $Ae_3=(0,\ 2,\ 5)$ и $Be_1=(-3,\ 0,\ 0)$, $Be_2=(0,\ 2,\ -1)$, $Be_3=(1,\ 1,\ 3)$, то

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\-2&3&2\\4&-1&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&2&1\\0&-1&3\end{pmatrix}.$$

Далее,

$$AB=\begin{pmatrix}0&4&2\\6&4&7\\-12&-7&18\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}4&-7&5\\0&5&9\\14&-6&13\end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$[C]=AB-BA=\begin{pmatrix}-4&11&-3\\6&-1&-2\\-26&-1&5\end{pmatrix}.$$

По определению матрицы линейного оператора в каноническом базисе $\mathbb{R}^n$ ее столбцы являются наборами компонент образов базисных векторов, т. е.

$$Ce_1=(-4,\ 6,\ -26),\quad Ce_2=(11,\ -1,\ -1),\quad Ce_3=(-3,\ -2,\ 5).$$

Отсюда находим:

$$Cx=C(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)=x_1Ce_1+x_2Ce_2+x_3Ce_3=$$
$$=(-4x_1+11x_2-3x_3,\ 6x_1-x_2-2x_3,\ -26x_1-x_2+5x_3). ▶$$

4.97. $A\boldsymbol{x}=(7x_1+4x_3,\ 4x_2-9x_3,\ 3x_1+x_2)$,
$B\boldsymbol{x}=(x_2-6x_3,\ 3x_1+7x_3,\ x_1+x_2-x_3)$.

4.98. $A\boldsymbol{x}=(2x_1-x_2+5x_3,\ x_1+4x_2-x_3,\ 3x_1-5x_2+2x_3)$,
$B\boldsymbol{x}=(x_1+4x_2+3x_3,\ 2x_1+x_3,\ 3x_2-x_3)$.

4.99. $A\boldsymbol{x}=(3x_1+x_2-2x_3,\ 3x_1-2x_2+4x_3,\ -3x_1+5x_2-x_3)$,
$B\boldsymbol{x}=(2x_1+x_2,\ x_1+x_2+2x_3,\ -x_1+2x_2+x_3)$.

4.100. $A\boldsymbol{x}=(3x_1+x_2+x_3,\ 2x_1+x_2+2x_3,\ x_1+2x_2+3x_3)$,
$B\boldsymbol{x}=(x_1+x_2-x_3,\ 2x_1-x_2+x_3,\ x_1+x_2)$.

В задачах 4.101—4.105 найти матрицы указанных линейных операторов $\boldsymbol{A}$, действующих в пространстве $\mathscr{V}_3$, в базисе $\mathfrak{B}'$ из задачи 4.18.

4.101. $A\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}]$, $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор.

◀ Пусть $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$. Тогда матрица линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$ имеет вид (см. задачу 4.86):

$$[A]_{\mathfrak{B}}=\begin{pmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{pmatrix}.$$

Матрица перехода из базиса $\mathfrak{B}$ в базис $\mathfrak{B}'$ была найдена в задаче 4.18:

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Так как

$$T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},$$

то, используя формулу (1), находим

$$[A]_{\mathfrak{B}'}=T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}\cdot[A]_{\mathfrak{B}}\cdot T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -a_3\cos\varphi+a_2\sin\varphi & a_3\sin\varphi+a_2\cos\varphi\\ a_3\cos\varphi-a_2\sin\varphi & 0 & -a_1\\ -a_3\sin\varphi-a_2\cos\varphi & a_1 & 0\end{pmatrix}. ►$$

4.102. $Ax=\lambda x$, λ — фиксированное число.

4.103. $Ax=(x, e)e$, где e — заданный единичный вектор.

4.104. $Ax=(a, x)x$, a — фиксированный вектор.

4.105. $A=U(e, \varphi_0)$ из задачи 4.88, $\varphi_0=\frac{\pi}{3}$; $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4.106. В $\mathscr{L}_4$ задан линейный оператор A, матрица которого в некотором базисе $\mathfrak{B}=(e_1, e_2, e_3, e_4)$ равна

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисах:

а) $\mathfrak{B}'=(e_1, e_3, e_2, e_4)$;

б) $\mathfrak{B}'=(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3, e_1+e_2+e_3+e_4)$.

4.107. В $\mathscr{L}_3$ заданы два базиса:

$\mathfrak{B}'$: $e_1'=8e_1-6e_2+7e_3$, $e_2'=-16e_1+7e_2-13e_3$, $e_3'=9e_1-3e_2+7e_3$,

$\mathfrak{B}''$: $e_1''=e_1-2e_2+e_3$, $e_2''=3e_1-e_2+2e_3$, $e_3''=2e_1+e_2+2e_3$.

Найти матрицу оператора A в базисе $\mathfrak{B}''$, если его матрица в базисе $\mathfrak{B}'$ имеет вид

$$A'=\begin{pmatrix}1 & -18 & 15\\ -1 & -22 & 20\\ 1 & -25 & 22\end{pmatrix}.$$

4.108. В пространстве $\mathscr{L}_2$ оператор $\boldsymbol{A}$ в базисе $\mathfrak{B}'$: $e_1'=e_1+2e_2$, $e_2'=2e_1+3e_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix}3&5\\4&3\end{pmatrix}$. Оператор $\boldsymbol{B}$ в базисе $\mathfrak{B}''$: $e_1''=3e_1+e_2$, $e_2''=4e_1+2e_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix}4&6\\6&9\end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ в базисе $\mathfrak{B}''$.

4.109. Пусть $p(t)=a_{n-1}t^{n-1}+\ldots+a_1t+a_0$ — некоторый многочлен и $\boldsymbol{A}$ — линейный оператор. Рассмотрим оператор $p(\boldsymbol{A})$, определяемый равенством

$$p(\boldsymbol{A})=a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\ldots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}.$$

Найти матрицу оператора $p(\boldsymbol{A})$, если $p(t)=3t^2-2t+5$, а оператор $\boldsymbol{A}$ задан матрицей $A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\end{pmatrix}$.

4.110. В пространстве $\mathscr{P}_n$ задан линейный оператор дифференцирования $\boldsymbol{D}=\frac{d}{dt}$. Найти матрицу этого оператора в базисе:

а) $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$;

б) $1, (t-t_0), \frac{(t-t_0)^2}{2!}, \ldots, \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}$, $t_0\in\mathbb{R}$.

Доказать операторное равенство $\boldsymbol{D}^n=\boldsymbol{O}$ ($\boldsymbol{O}$ — *нулевой* оператор: $\boldsymbol{O}x=0$).

4.111. В пространстве $\mathscr{P}_4$ задано отображение

$$\boldsymbol{A}p(t)=\int_0^1 K(t,\tau)\,p(\tau)\,d\tau,$$

где $K(t,\tau)$ — многочлен от двух переменных, степень которого по t не превосходит 3. Доказать, что $\boldsymbol{A}$ — линейный оператор в $\mathscr{P}_4$; найти его матрицу в базисе $1, t, t^2, t^3$ для случая, когда $K(t,\tau)=t+\tau$.

4.112. В пространстве $\mathscr{P}_4$ задано отображение

$$\boldsymbol{A}_h p(t)=p(t+h),$$

где h — некоторое фиксированное число. Доказать, что $\boldsymbol{A}_h$ — линейный оператор, и найти его матрицу в базисе $1, t, t^2, t^3$.

4.113. В пространстве функций, дифференцируемых на всей оси, заданы оператор дифференцирования $\boldsymbol{D}=\frac{d}{dt}$ и оператор $\boldsymbol{A}=e^{\lambda t}$ умножения на функцию $e^{\lambda t}$. Проверить равенство $\boldsymbol{DA}-\boldsymbol{AD}=\lambda\boldsymbol{A}$.

В задачах 4.114—4.119 требуется установить, какие из заданных линейных операторов в $\mathscr{V}_3$ являются невырожденными, и найти для них явный вид обратных операторов ($\boldsymbol{e}$—фиксированный вектор единичной длины, а $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$).

4.114. $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, λ—фиксированное число.

4.115. а) $A\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$; б) $A\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}]$.

4.116. а) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$; б)* $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$.

4.117. $A\boldsymbol{x}=(y+z)\boldsymbol{i}+(2x+z)\boldsymbol{j}+(3x-y+z)\boldsymbol{k}$.

4.118. $A\boldsymbol{x}=2z\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(2x+3z)\boldsymbol{k}$.

4.119. $A=U(\boldsymbol{e}, \varphi)$—оператор поворота на угол φ вокруг оси, заданной вектором $\boldsymbol{e}$.

Установить, какие из заданных линейных операторов в $\mathbb{R}^3$ являются невырожденными, и найти явный вид обратных операторов:

4.120. $A\boldsymbol{x}=(x_1-x_2+x_3,\ x_3,\ x_2)$.

4.121. $A\boldsymbol{x}=(x_2+2x_3,\ -x_2,\ 2x_2-x_3)$.

4.122. $A\boldsymbol{x}=(x_1+2x_2+2x_3,\ 2x_1+x_2-2x_3,\ 2x_1-2x_2+x_3)$.

Множество T_A всех векторов $A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\in\mathscr{L}$, называется *образом* оператора A. Множество N_A всех векторов $\boldsymbol{x}\in\mathscr{L}$, для которых $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, называется *ядром* оператора A. Образ и ядро линейного оператора являются подпространствами в $\mathscr{L}$. При этом размерность образа $r_A=\dim T_A$ называется *рангом*, а размерность ядра $n_A=\dim N_A$ — *дефектом* оператора A. Справедливо равенство $r_A+n_A=n$, где n — размерность пространства $\mathscr{L}$.

4.123. Описать образ и ядро следующих линейных операторов, действующих в пространстве $\mathscr{V}_3$:

а) $A\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, $|\boldsymbol{e}|=1$;

б) $A\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}]$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$.

4.124. Описать образ и ядро оператора дифференцирования D, действующего в пространстве $\mathscr{P}_n$.

В задачах 4.125—4.127 для указанных линейных операторов, действующих в пространстве $\mathbb{R}^3$, определить ранг и дефект, а также найти базисы образа и ядра.

4.125. $A\boldsymbol{x}=(x_1+2x_2+x_3,\ x_1-x_3,\ x_1+x_2)$.

◄ Для представления арифметических векторов и заданного линейного оператора воспользуемся каноническим базисом в $\mathbb{R}^3$. В этом базисе матрица оператора имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

По определению $y \in T_A$ в том и только в том случае, когда найдется вектор $x \in \mathbb{R}^3$ такой, что $y = Ax$, или, в координатной записи,

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Равенство (2) означает, что образ T_A совпадает с линейной оболочкой системы столбцов матрицы A. Следовательно, ранг оператора A совпадает с рангом его матрицы, т. е. равен двум, а в качестве базиса T_A может быть выбран любой из базисов системы столбцов матрицы A, например

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично $x \in N_A$ в том и только в том случае, когда $Ax = 0$, или, в координатной записи,

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что ядро N_A совпадает с подпространством решений однородной системы (3), т. е. дефект оператора A равен $n_A = n - r_A = 3 - 2 = 1$, а в качестве базиса в N_A может быть выбрана фундаментальная система решений системы (3), например, $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ►

4.126. $Ax = (2x_1 - x_2 - x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - 2x_3)$.

4.127. $Ax = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$.

4.128. Доказать, что оператор A невырожденный тогда и только тогда, когда его дефект равен нулю, а, следовательно, ранг совпадает с размерностью пространства.

2. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Пусть число λ и вектор $x \in \mathscr{L}$, $x \neq 0$, таковы, что

$$Ax = \lambda x. \quad (4)$$

Тогда число λ называется *собственным числом* линейного оператора A, а вектор x — *собственным вектором* этого оператора, соответствующим собственному числу λ.

В конечномерном пространстве $\mathscr{L}_n$ векторное равенство (4) эквивалентно матричному равенству

$$(A - \lambda E) X = O, \quad X \neq O. \quad (5)$$

Отсюда следует, что число λ есть собственное число оператора A в том и только в том случае, когда $\det(A - \lambda E) = 0$, т. е. λ есть корень многочлена $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, называемого *характеристическим многочленом* оператора A. Столбец координат X любого собственного вектора, соответствующего собственному числу λ, есть некоторое нетривиальное решение однородной системы (5).

Пример 2. Найти собственные числа и собственные векторы оператора P_{Oxy} проектирования на плоскость Oxy в пространстве $\mathcal{V}_3$.

◀ 1) Геометрическое решение. Равенство $P_{Oxy}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, означает, что ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на плоскость Oxy коллинеарна самому вектору $\boldsymbol{x}$. Но это возможно лишь в двух случаях.

а) Вектор $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ компланарен плоскости Oxy. Для всех таких векторов $P_{Oxy}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, т. е. все они являются собственными векторами оператора P_{Oxy}, соответствующими собственному числу $\lambda_1=1$.

б) Вектор $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ортогонален плоскости Oxy. Для всех таких векторов $P_{Oxy}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}=0\cdot\boldsymbol{x}$, т. е. все они являются собственными векторами оператора P_{Oxy}, соответствующими собственному числу $\lambda_2=0$.

В итоге заключаем, что оператор P_{Oxy} имеет два собственных числа: $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=0$. Соответствующие им собственные векторы:

$$\lambda_1=1:\ \boldsymbol{x}^{(\lambda_1)}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{x}^{(\lambda_1)}\neq 0,$$
$$\lambda_2=0:\ \boldsymbol{x}^{(\lambda_2)}=z\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{x}^{(\lambda_2)}\neq 0.$$

2) Аналитическое решение. Матрица оператора P_{Oxy} в прямоугольном базисе $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$ имеет вид

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(P-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2=0,$$

откуда $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=0$ — собственные числа оператора.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1=1$. При $\lambda=1$ система (5) принимает вид

$$(P-E)X=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений:

$$E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

а общее решение:

$$xE_1+yE_2=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1=1$, имеют вид

$$\boldsymbol{x}^{(\lambda_1)}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},$$

где x и y — произвольные числа, не равные одновременно нулю.

Аналогично рассматривается случай $\lambda_2=0$. При этом получим

$$\boldsymbol{x}^{(\lambda_2)}=z\boldsymbol{k},$$

где z — произвольное число, отличное от нуля. ▶

В задачах 4.129—4.133 найти собственные числа и собственные векторы операторов в $\mathscr{V}_3$. Решить эти задачи геометрически, т. е. в инвариантной форме, не связанной с выбором какого-либо базиса в $\mathscr{V}_3$ (см. пример 2, геометрическое решение). После этого в задачах 4.129—4.131 провести аналитическое решение.

4.129. $\boldsymbol{Ax} = a\boldsymbol{x}$, a—фиксированное число.

4.130. $\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{i})\boldsymbol{i}$—оператор проектирования на ось Ox.

4.131. $\boldsymbol{Ax} = [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{x}]$.

4.132. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{e}, \varphi)$—оператор поворота на угол φ вокруг оси, заданной вектором $\boldsymbol{e}$.

4.133. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$—оператор зеркального отражения в плоскости с нормальным вектором $\boldsymbol{e}$.

В задачах 4.134—4.143 найти собственные числа и собственные векторы линейных операторов, заданных своими матрицами.

4.134. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **4.135.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.136. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. **4.137.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

4.138. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. **4.139.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

4.140. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **4.141.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

4.142. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. **4.143.** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.144. В пространстве $\mathscr{V}_2$ геометрических векторов на плоскости задан оператор поворота $\boldsymbol{U}(\varphi)$ на угол $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ вокруг начала координат. Проверить (геометрически и аналитически), что при $\varphi \neq 0, \pi$ этот оператор не имеет собственных чисел. Этот пример показывает, что линейный оператор в действительном пространстве может не иметь собственных чисел (и собственных векторов).

4.145. В комплексном пространстве $\mathscr{L}_2$ оператор $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\varphi)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Найти его собственные числа и собственные векторы. Сравнить полученные результаты с результатами задачи 4.144.

4.146*. Пусть оператор $\boldsymbol{A}$, действующий в комплексном пространстве $\mathscr{L}_n$, задан в некотором базисе матрицей с действительными элементами. Доказать, что:

а) если λ — собственное число, то $\bar{\lambda}$ — также собственное число;

б) если $X^{(\lambda)}$ — столбец координат собственного вектора, соответствующего собственному числу λ, то $\overline{X^{(\lambda)}}$ — столбец координат собственного вектора, соответствующего собственному числу $\bar{\lambda}$.

4.147*. В комплексном пространстве $\mathscr{L}_3$ найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного вещественной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.148. Показать, что если $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор оператора $\boldsymbol{A}$, соответствующий собственному числу λ, то он является собственным вектором оператора $p(\boldsymbol{A}) = a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\ldots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$, соответствующим собственному числу $p(\lambda)$.

4.149. Доказать, что:

а) оператор $\boldsymbol{A}$ имеет обратный в том и только в том случае, когда он не имеет нулевых собственных чисел;

б) если оператор $\boldsymbol{A}$ имеет обратный, то $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы. Как связаны между собой собственные числа этих операторов?

3. Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением. Пусть $\boldsymbol{A}$ — линейный оператор, действующий в пространстве со скалярным произведением $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Линейный оператор $\boldsymbol{A}^*$ называется *сопряженным к оператору* $\boldsymbol{A}$, если для любых векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ выполняется равенство

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}).$$

Для всякого оператора $\boldsymbol{A}$ сопряженный оператор $\boldsymbol{A}^*$ существует и единствен.

Если оператор $\boldsymbol{A}$ в ортонормированном базисе имеет матрицу $A=(a_{ij})$, то сопряженный оператор $\boldsymbol{A}^*$ в том же базисе имеет матрицу $A^*=(a^*_{ij})$, где $a^*_{ij}=\bar{a}_{ji}$ (матрица A^* называется сопряженной к матрице A). В частном случае евклидова пространства $A^*=A^{\mathsf{T}}$.

Пример 3. Линейный оператор A: $\mathcal{E}_3 \longrightarrow \mathcal{E}_3$ в базисе $\mathfrak{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ имеет матрицу

$$[A]_{\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Известно, что $e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3$, $e_2' = e_1 + e_2 + 2e_3$, $e_3' = e_1 + e_2$ и базис $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, e_3)$ ортонормирован. Найти матрицу сопряженного оператора A^* в базисе $\mathfrak{B}'$.

◀ Так как базис $\mathfrak{B}'$ не ортонормирован (проверьте!), то, чтобы воспользоваться утверждением о связи матриц операторов A и A^*, необходимо найти матрицу $[A]_{\mathfrak{B}}$. Имеем

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} = T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$[A]_{\mathfrak{B}} = T^{-1}_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} \cdot [A]_{\mathfrak{B}'} \cdot T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \quad [A^*]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$[A^*]_{\mathfrak{B}'} = T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} \cdot [A^*]_{\mathfrak{B}} \cdot T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}. \ ▶$$

4.150. Доказать, что операция * перехода от оператора A к сопряженному A^* обладает следующими свойствами:

а) $(A^*)^* = A$.

◀ Запишем цепочку равенств, верных для любых векторов x и y,

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = \overline{(A^*y, x)} = \overline{(y, (A^*)^* x)} = \overline{\overline{((A^*)^*x, y)}} = ((A^*)^*x, y),$$

т. е. $(Ax, y) = ((A^*)^*x, y)$. Отсюда, в силу произвольности векторов x, y, получаем $A = (A^*)^*$ (показать подробнее!). ▶

б) $(A+B)^* = A^* + B^*$; в) $(AB)^* = B^*A^*$; г) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$; д) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, если A невырожден.

Линейный оператор A в базисе $\mathfrak{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ имеет матрицу A. Найти матрицу сопряженного оператора A^* в том же базисе $\mathfrak{B}'$, если векторы $e_1', \ldots, e_n'$ заданы столбцами своих координат в некотором ортонормированном базисе $\mathfrak{B} = (e_1, \ldots, e_n)$:

4.151. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.152. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.153. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\end{pmatrix}$, $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $E_1'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_2'=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_3'=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

В пространстве многочленов $\mathcal{P}_3$ задано скалярное произведение

$$(f,\ g)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2, \tag{6}$$

где $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, $g(t)=b_0+b_1t+b_2t^2$. Найти матрицы оператора дифференцирования $\boldsymbol{D}=\frac{d}{dt}$ и сопряженного оператора $\boldsymbol{D}^*$ в базисе $\mathfrak{B}$:

4.154. $\mathfrak{B}=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t,\ t^2-1,\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t\right)$.

4.155. $\mathfrak{B}=\left(1,\ t,\ \frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)$.

4.156. Найти сопряженный оператор для поворота евклидовой плоскости на угол α вокруг начала координат против часовой стрелки.

4.157. Пусть Oxy—декартова прямоугольная система координат на плоскости и $\boldsymbol{A}$—оператор проектирования на ось Ox параллельно прямой l: $ax+by=0$ $(a\neq 0)$. Найти матрицу сопряженного оператора $\boldsymbol{A}^*$.

4.158. Пусть Oxy—декартова прямоугольная система координат на плоскости и $\boldsymbol{A}$—оператор отражения точек плоскости относительно прямой l: $ax+by=0$. Найти матрицу оператора $\boldsymbol{A}^*$.

Понятие сопряженного оператора может быть использовано при исследовании совместности неоднородной системы линейных уравнений. Пусть $AX=B$—матричная запись такой системы, причем $m=n$. Тогда X и B—столбцы координат соответствующих арифметических векторов в каноническом базисе евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а квадратной матрице A в этом же базисе соответствует некоторый линейный оператор $\boldsymbol{A}$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Система $A^*X=O$, где A^*—матрица сопряженного оператора $\boldsymbol{A}^*$ в каноническом базисе, называется *сопряженной* однородной системой. Верна следующая теорема Фредгольма: *для того чтобы система $AX=B$ была совместна, необходимо и достаточно, чтобы вектор-столбец B был ортогонален ко всем решениям сопряженной однородной системы.*

4.159.** Доказать теорему Фредгольма.

Используя теорему Фредгольма, исследовать совместность следующих систем линейных уравнений:

4.160. $3x_1+2x_2+\ x_3=-1,$
$7x_1+6x_2+5x_3=5,$
$5x_1+4x_2+3x_3=2.$

4.161. $x_1+x_2+x_3=0,$
$x_1+x_2+x_3=1,$
$x_1+x_2+x_3=-1.$

4.162. $2x_1+\ x_2-2x_3=1,$
$x_1-2x_2+\ x_3=1,$
$-2x_1+\ x_2+\ x_3=1.$

4.163. $x_1+x_2+x_3=1,$
$x_1+x_2+x_3=1,$
$x_1+x_2+x_3=1.$

4.164*. Доказать альтернативу Фредгольма: либо система $AX=B$ совместна при любой правой части B, либо сопряженная однородная система $A^*X=0$ имеет ненулевые решения.

4.165. Какие из систем линейных уравнений, указанных в задачах 4.160—4.163, совместны при любой правой части?

Линейный оператор $\boldsymbol{H}$ в пространстве со скалярным произведением называется *самосопряженным*, если $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^*$. Самосопряженный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве называется также *эрмитовым* (*симметричным*). Для того чтобы оператор $\boldsymbol{A}$ был эрмитовым (симметричным), необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе его матрица $A=(a_{ij})$ удовлетворяла соотношению $a_{ij}=\overline{a}_{ji}$ $(a_{ij}=a_{ji})$. Такие матрицы называются *эрмитовыми* (*симметричными*).

Линейный оператор $\boldsymbol{U}$ в унитарном (евклидовом) пространстве называется *унитарным* (*ортогональным*), если

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^*=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}=\boldsymbol{E},\quad \text{т. е.}\ \boldsymbol{U}^*=\boldsymbol{U}^{-1}.$$

Для того чтобы оператор $\boldsymbol{A}$ был унитарным (ортогональным) необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе его матрица $A=(a_{ij})$ удовлетворяла соотношению $A^{-1}=A^*$ $(A^{-1}=A^{\mathrm{T}})$. Такие матрицы называются *унитарными* (*ортогональными*).

4.166. Доказать следующие свойства самосопряженного оператора:

а) собственные числа действительны;

б) собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

4.167. Доказать следующие свойства унитарного оператора:

а) собственные числа по модулю равны единице;

б) для того чтобы линейный оператор был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы он переводил ортонормированный базис снова в ортонормированный базис;

в) унитарный оператор сохраняет скалярное произведение;

г) унитарный оператор сохраняет длины векторов.

4.168. Показать, что в пространстве $\mathscr{V}_3$ следующие операторы являются симметричными:

а) $\boldsymbol{Ax}=\lambda \boldsymbol{x}$, λ—фиксированное число;
б) $\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, $|\boldsymbol{e}|=1$;
в) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, $|\boldsymbol{e}|=1$.

4.169. Показать, что в пространстве многочленов $\mathscr{P}_3$ со скалярным произведением (6) следующие операторы являются симметричными:

а) $f(t)\to f(-t)$; б) $f(t)=t^n f\left(\frac{1}{t}\right)$.

4.170. Показать, что в пространстве $\mathscr{V}^3_2$ оператор $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{e}, \varphi)$ поворота на угол φ вокруг оси, заданной единичным вектором $\boldsymbol{e}$ (см. задачу 4.88), является ортогональным.

4.171. Показать, что операторы задачи 4.168 являются ортогональными.

4. **Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.** Если оператор $\boldsymbol{A}$, действующий в пространстве $\mathscr{L}_{n}$, имеет n линейно независимых собственных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то в базисе из этих векторов матрица оператора $\boldsymbol{A}$ имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Пример 4. Привести матрицу A линейного оператора к диагональному виду и найти соответствующий базис, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

◄ Характеристическое уравнение

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)(1-\lambda^2)=0$$

имеет корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. Следовательно, матрица может быть приведена к диагональному виду. Находим соответствующие собственные векторы. При $\lambda=2$ система (5) принимает вид:

$$(A-2E)X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2 &= 0, \\ -2x_1-2x_2-3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $E_1 = (2, 1, -2)^{\mathsf T}$. Аналогично, при $\lambda = 1$ система (5) принимает вид:

$$(A-E)X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x_2 &= 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы находим второй собственный вектор $E_2 = (1, 0, -1)^{\mathsf T}$.

Наконец, при $\lambda = -1$ из системы

$$(A+E)X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0, \\ 3x_2 &= 0, \end{aligned}$$

находим третий собственный вектор $E_3 = (0, 0, 1)^{\mathsf T}$.

Найденные векторы E_1, E_2, E_3 образуют искомый базис, в котором матрица A линейного преобразования имеет следующий диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \ ▶$$

В задачах 4.172—4.179 выяснить, какие из заданных матриц линейных операторов можно диагонализировать переходом к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему диагональную форму матрицы.

4.172. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **4.173.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

4.174. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **4.175.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4.176. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. **4.177.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4.178. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **4.179.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.180*. Вычислить A^m, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Вычислить:

4.181. $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^5$. **4.182.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}^6$.

Матрица A самосопряженного оператора всегда приводится к диагональному виду. При этом, используя понятие унитарного оператора, ее можно представить в виде

$$A=UDU^{-1},$$

где U — матрица унитарного оператора, осуществляющего переход от исходного базиса к базису из собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$, а D — диагональная матрица вида (7).

Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей A (искомый базис определен неоднозначно):

4.183. $A=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$. **4.184.** $A=\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

4.185. $A=\begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **4.186.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Для данной матрицы A найти диагональную матрицу D и унитарную (ортогональную) матрицу U такие, что $A=UDU^{-1}$:

4.187. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$. **4.188.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$.

4.189. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4i & 0 \\ -4i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.190. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. **4.191.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

§ 3. Билинейные и квадратичные формы

1. Линейные формы. Говорят, что в действительном линейном пространстве $\mathscr{L}$ задана *линейная форма*, если каждому вектору $x \in \mathscr{L}$ поставлено в соответствие число $f(x)$, причем выполнены условия

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \qquad x,\ y \in \mathscr{L},$$
$$f(\lambda x)=\lambda f(x), \qquad x \in \mathscr{L},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Доказать, что в пространстве $\mathscr{L}$ функция $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathscr{L}$, является линейной формой:

4.192. $f(\boldsymbol{x})=\int\limits_a^b x(t)\,dt, \quad \mathscr{L}=C_{[a,b]}, \quad \boldsymbol{x}=x(t)$;

4.193. $f(\boldsymbol{x})=x(t_0), \quad \mathscr{L}=C_{[a,b]}, \quad \boldsymbol{x}=x(t), \quad t_0 \in [a, b]$;

4.194. $f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}), \quad \mathscr{L}=\mathscr{V}_3, \quad \boldsymbol{a} \in \mathscr{V}_3$ — фиксированный вектор.

4.195. $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{abx}, \quad \mathscr{L}=\mathscr{V}_3, \quad \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in \mathscr{V}_3$ — фиксированные векторы.

4.196. $f(\boldsymbol{x})=x'(t_0)$, $\mathscr{L}=C^{(1)}_{[a,\,b]}$, $\boldsymbol{x}=x(t)$, $t_0\in[a,\,b]$.

4.197. Пусть в пространстве $\mathscr{L}$ фиксирован базис $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Пусть, далее, $f(\boldsymbol{e}_i)=a_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, где $f(\boldsymbol{x})$ — линейная форма в $\mathscr{L}$.

а) Доказать, что $f(\boldsymbol{x})=a_1x_1+\ldots+a_nx_n$, где $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ — координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\mathfrak{B}$.

б) Обозначим $\mathscr{L}^*$ множество линейных форм $f(\boldsymbol{x})$, в котором введены операции сложения и умножения на число следующим образом:

$$g=f_1+f_2,\text{ если } \forall\boldsymbol{x}\in\mathscr{L}\ (g(\boldsymbol{x})=f_1(\boldsymbol{x})+f_2(\boldsymbol{x}));$$
$$h=\lambda f,\text{ если } \forall\boldsymbol{x}\in\mathscr{L}\ (h(\boldsymbol{x})=\lambda f(\boldsymbol{x})).$$

Доказать, что $\mathscr{L}^*$ — линейное пространство.

в) Доказать, что $\dim\mathscr{L}^*=n$ (пространство $\mathscr{L}^*$ называется *сопряженным* к пространству $\mathscr{L}$).

4.198. Доказать, что:

а) если $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, то формула $f(\boldsymbol{x})=x_1$ определяет линейную форму;

б) всякую не равную тождественно нулю линейную форму $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, надлежащим выбором базиса можно привести к виду $f(\boldsymbol{x})=x_1$, где x_1 — первая координата вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе.

2. Билинейные формы. Числовая функция $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$: $\mathscr{L}\times\mathscr{L}\longrightarrow\mathbb{R}$, заданная на действительном линейном пространстве $\mathscr{L}$, называется *билинейной формой*, если при фиксированном $\boldsymbol{y}$ она является линейной формой по $\boldsymbol{x}$, а при фиксированном $\boldsymbol{x}$ — линейной формой по $\boldsymbol{y}$. Билинейная форма называется *симметрической*, если $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=A(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in\mathscr{L}$. Если в пространстве $\mathscr{L}_n$ фиксирован некоторый базис $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, то матрица $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=A(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$, называется *матрицей билинейной формы* $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$.

Доказать, что в пространстве $\mathscr{L}$ функция $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ является билинейной формой:

4.199. $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=f_1(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{y})$, где f_1, f_2 — линейные формы в $\mathscr{L}$.

4.200. $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\int\limits_a^b\int\limits_a^b K(s, t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt$, где $\mathscr{L}=C_{[a,\,b]}$, $\boldsymbol{x}=x(t)\in C_{[a,\,b]}$, $\boldsymbol{y}=y(t)\in C_{[a,\,b]}$, $K(s, t)$ — некоторая непрерывная функция двух переменных.

4.201. $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$, где $\mathscr{L}=\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, $A=(a_{ij})$ — некоторая матрица.

4.202. Пусть в пространстве $\mathscr{L}_n$ фиксирован базис $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — билинейная форма в $\mathscr{L}_n$ и $A(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=a_{ij}$. Доказать, что:

а) $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, где x_i, y_j, $i, j = 1, 2, \ldots, n$,— координаты векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в базисе $\mathfrak{B}$;

б) если $A' = (a'_{ij})$—матрица билинейной формы $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в базисе $\mathfrak{B}' = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)$, то $A' = T^{\top} A T$, где $T = T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана билинейная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Найти ее матрицу в базисе $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, если:

4.203. $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, -1, -1)$;

4.204. $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1, 1, 1)$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ задана билинейная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$. Найти ее матрицу в базисе $\mathfrak{B}'$, если:

4.205. $n = 4$, $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4$,

$$T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

4.206. $n = 2$, $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2$,

$$T_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.207. Доказать, что скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в евклидовом пространстве $\mathscr{E}$ является билинейной формой.

3. Квадратичные формы. Пусть $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$—симметрическая билинейная форма. Форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, которая получается из $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, если положить $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, называется *квадратичной*. При этом $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ называется билинейной формой, *полярной* к квадратичной форме $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$.

Если в действительном линейном пространстве $\mathscr{L}_n$ фиксирован некоторый базис $\mathfrak{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, то квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в этом базисе имеет вид

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$—матрица квадратичной формы и $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n$.

Пусть в некотором базисе выражение (1) квадратичной формы не содержит произведений $x_i x_j$ $(i \neq j)$, т. е.

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2. \tag{2}$$

Тогда выражение (2) называется *каноническим видом* квадратичной формы. В частности, если $\lambda_i = \pm 1, 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то получаем *нормальный вид* квадратичной формы $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$.

Для всякой квадратичной формы существует такой базис $\mathfrak{B}'$, в котором она имеет канонический (и даже нормальный) вид.

Методы приведения квадратичной формы к каноническому виду. **Метод Лагранжа выделения полных квадратов.** Пусть квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$ имеет вид (1). Если все коэффициенты a_{ii} (при квадратах x_i^2), $i=1, 2, \ldots, n$, равны нулю и в то же время форма не равна тождественно нулю, то отлично от нуля хотя бы одно произведение, например $2a_{12}x_1x_2$. Выполним преобразование базиса, при котором координаты векторов в старом и новом базисах связаны формулами

$$x_1 = x_1' + x_2',$$
$$x_2 = x_1' - x_2',$$
$$x_i = x_i', \qquad i = 3, \ldots, n.$$

Тогда $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}\left(x_1'^2 - x_2'^2\right) = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2$, и так как, по предположению, $a_{11} = a_{22} = 0$, то коэффициент при $x_1'^2$ отличен от нуля.

Таким образом, всегда найдется такой базис $\mathfrak{B}$, в котором в записи (1) хотя бы один коэффициент при квадрате отличен от нуля.

В дальнейшем считаем, что $a_{11} \neq 0$. (Если $a_{11} = 0$, то отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-нибудь другой координаты и к рассматриваемому случаю можно прийти, иначе занумеровав векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, что также является некоторым преобразованием базиса.)

Рассмотрим часть квадратичной формы, содержащую x_1, т. е.

$$\sigma_1 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n.$$

Дополним эту сумму до полного квадрата:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \gamma,$$

где γ есть алгебраическая сумма членов, не зависящих от x_1. Если теперь сделать замену

$$x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$x_i' = x_i, \qquad i = 2, \ldots, n,$$

то квадратичная форма в новом базисе примет вид

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}'x_i'x_j' = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + A_1.$$

В полученной форме выделено слагаемое $\frac{1}{a_{11}}x_1'^2$, а оставшаяся часть A_1 является квадратичной формой в $\mathscr{L}_{n-1}$. Далее рассуждения повторяются для квадратичной формы $A_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, и т. д.

Пример 1. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2.$$

◀ 1-е преобразование: $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_1'$, $x_3 = x_3'$. Тогда получим

$$A = -x_1'^2 + 2x_1'x_2' + 4x_2'x_3' - 8x_3'^2.$$

2-е преобразование: $x_1''=-x_1'+x_2'$, $x_2''=x_2'$, $x_3''=x_3'$. Получим новое выражение для квадратичной формы:

$$A=-x_1''^2+x_2''^2+4x_2''x_3''-8x_3''^2.$$

3-е преобразование: $x_1'''=x_1''$, $x_2'''=x_2''+2x_3''$, $x_3'''=x_3''$, и форма принимает канонический вид:

$$A(x, x)=-x_1'''^2+x_2'''^2-12x_3'''^2.$$

При этом

$$\begin{aligned} x_1''' &= x_1-x_2, \\ x_2''' &= x_1 \qquad +2x_3, \\ x_3''' &= \qquad\qquad x_3. \end{aligned}$$ ►

Метод собственных векторов. Будем рассматривать квадратичную форму (1) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Так как ее матрица $A=(a_{ij})$ симметрична, то она может быть представлена в виде $A=UDU^{\top}$, где D — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы A, а U — ортогональная матрица (см. пп. 3 и 4 § 2). Столбцы матрицы U являются координатами некоторого ортонормированного базиса $\mathfrak{B}'=(e_1', \ldots, e_n')$, в котором матрица A имеет диагональный вид D, и, следовательно, квадратичная форма — искомый канонический вид. Соответствующее преобразование координат определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}=U\begin{pmatrix} x_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $A(x, x)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$, заданную в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, к каноническому виду. Написать этот канонический вид.

◄ Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(Обратить внимание, как получаются элементы a_{ij} $(i \neq j)$ из явного вида квадратичной формы!) Собственные числа этой матрицы суть $\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$. Соответствующие ортонормированные собственные векторы:

$$\begin{aligned} e_1' &= (2/3,\ 2/3,\ -1/3), \\ e_2' &= (-1/3,\ 2/3,\ 2/3), \\ e_3' &= (2/3,\ -1/3,\ 2/3), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad U^{\top}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В базисе $\mathfrak{B}'=(e_1', e_2', e_3')$ заданная квадратичная форма имеет вид $A(x, x)=3x_1'^2+6x_2'^2+9x_3'^2$, а соответствующее преобразование координат:

$$x_1=\frac{1}{3}(2x_1'-x_2'+2x_3'),$$

$$x_2=\frac{1}{3}(2x_1'+2x_2'-x_3'),$$

$$x_3=\frac{1}{3}(-x_1'+2x_2'+2x_3'). \blacktriangleright$$

4.208. Доказать, что всякая квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ в евклидовом пространстве $\mathscr{E}_n$ может быть записана в виде $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, где $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — скалярное произведение в $\mathscr{E}_n$ и $\boldsymbol{A}$ — некоторый линейный оператор.

4.209. Доказать, что полярная билинейная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ однозначно определяется своей квадратичной формой $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$.

Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

4.210. $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

4.211. $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

4.212. $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.

Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду, и написать этот канонический вид:

4.213. $11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$.

4.214. $x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

4.215. $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

4.216. $17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$.

Квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, определенная в действительном линейном пространстве $\mathscr{L}_n$, называется положительно (отрицательно) определенной, если для всякого $\boldsymbol{x}\in\mathscr{L}_n$ $(\boldsymbol{x}\neq 0)$

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})>0 \quad (<0).$$

Пусть $A=(a_{ij})$ — матрица квадратичной формы $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ и

$$D_1=a_{11},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— последовательность главных миноров матрицы A.

Критерием положительной определенности квадратичной формы является следующее утверждение (критерий Сильвестра): *для того чтобы квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы A были положительны, т. е. $D_k>0$, $k=1, 2, \ldots, n$.*

4.217*. Доказать: для того чтобы квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства $(-1)^k D_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В задачах 4.218—4.224 определить, какие квадратичные формы являются положительно либо отрицательно определенными, а какие нет:

4.218. $x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$.

4.219. $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$.

4.220. $x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

4.221. $12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2$.

4.222. $9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$.

4.223. $2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$.

4.224. $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$.

4.225. Доказать, что квадрат длины вектора $|\boldsymbol{x}|^2$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{E}_n$ является положительно определенной квадратичной формой.

4. Кривые и поверхности второго порядка. *Гиперповерхностью второго порядка* в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + c = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = 0, \tag{3}$$

где в левой части стоит многочлен второй степени от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Задача классификации гиперповерхностей второго порядка состоит в нахождении такого базиса в $\mathbb{R}^n$, в котором левая часть уравнения в новых переменных $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ имеет наиболее простой вид. Для этого сначала ищется такое ортогональное преобразование, что в новых переменных квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ имеет канонический вид. В новом базисе уравнение (3) записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k'^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b_k' x_k' + c = 0,$$

причем не все λ_k, $i = 1, 2, \ldots, n$, равны нулю. Если $\lambda_k \neq 0$, то переносом начала координат можно уничтожить линейный член:

$$\lambda_k x_k'^2 + 2b_k x_k' = \lambda_k\left(x_k' + \frac{b_k}{\lambda_k}\right)^2 - \frac{b_k^2}{\lambda_k} = \lambda_k x_k'' - \frac{b_k^2}{\lambda_k}.$$

После этих преобразований получаем (изменяя нумерацию переменных, если это необходимо)

$$\lambda_1 x_1''^2 + \ldots + \lambda_s x_s''^2 + b_{s+1}'' x_{s+1}'' + c'' = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется *каноническим уравнением* гиперповерхности второго порядка.

Множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению (3), называется *кривой второго порядка*. В этом случае каноническое уравнение (4) может принимать один из следующих видов (в переменных x, y):

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0 \quad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;
2) $\lambda_1 x^2 + by = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0)$;
3) $\lambda_1 x^2 + c = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0)$.

Пример 3. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0,$$

определить ее тип и найти каноническую систему координат.

◀ Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа: $\lambda_1 = 8$ и $\lambda_2 = -2$; собственные векторы: $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Выполняя преобразование

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

получаем

$$8x'^2 - 2y'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' + \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0.$$

Так как λ_1 и λ_2 отличны от нуля, то по каждой из новых переменных x' и y' можно выделить полный квадрат:

$$8x'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' = 8\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4,$$

$$-2y'^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}y' = -2\left(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 9.$$

Заменой переменных

$$x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

соответствующей сдвигу по каждой из координатных осей, получим

$$8x''^2 - 2y''^2 - 8 = 0, \text{ или } x''^2 - \frac{1}{4}y''^2 = 1.$$

Последнее уравнение есть каноническое уравнение гиперболы. Результирующее преобразование координат имеет вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') + 2,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - y'') - 1,$$

а каноническая система координат (O', e_1, e_2), где $O'(2, -1)$, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j$. ▶

В задачах 4.226—4.231 написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат.

4.226. $9x^2-4xy+6y^2+16x-8y-2=0$.

4.227. $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$.

4.228. $5x^2+12xy-22x-12y-19=0$.

4.229. $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

4.230. $2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0$.

4.231. $x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0$.

4.232. Кривая второго порядка определяется уравнением:

а) $x^2-2y+\lambda(y^2-2x)=0$; б) $x^2+2\lambda xy+y^2-1=0$.

Определить ее тип при изменении параметра λ от $-\infty$ до $+\infty$.

Множество точек евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению (3), называется *поверхностью второго порядка*. Каноническое уравнение (4) в этом случае принимает один из следующих видов (в переменных x, y, z):

1) $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+c=0$ $\quad(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0)$,
2) $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+bz=0$ $\quad(\lambda_1\lambda_2\neq 0)$;
3) $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+c=0$ $\quad(\lambda_1\lambda_2\neq 0)$,
4) $\lambda_1x^2+by=0$ $\quad(\lambda_1\neq 0)$;
5) $\lambda_1x^2+c=0$ $\quad(\lambda_1\neq 0)$.

Поверхности типов 3)—5) являются цилиндрами (эллиптическим, гиперболическим и т. д. в зависимости от типа кривой в сечении плоскостью $z=0$).

Пример 4. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка

$$4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx-16x-16y-8z+72=0,$$

определить ее тип и найти каноническую систему координат.

◄ Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2\\ -5 & 4 & 2\\ 2 & 2 & -8\end{pmatrix}$. Ее собственные числа: $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-9$, $\lambda_3=0$, а собственные векторы:

$$e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),\quad e_2=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{3\sqrt{2}},\ -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right),$$
$$e_3=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right).$$

Выполнив преобразование

$$x=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\ \ 3x'+y'+2\sqrt{2}\,z'),$$
$$y=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x'+y'+2\sqrt{2}\,z'),$$
$$z=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\qquad -4y'+\sqrt{2}\,z'),$$

получаем

$$9x'^2-9y'^2-72z'+72=0.$$

Преобразование сдвига необходимо выполнить лишь по переменной z':

$$-72z'+72=-72(z'-1)=-72z''.$$

Второе преобразование координат имеет вид

$$x''=x',\quad y''=y',\quad z''=z'-1,$$

откуда окончательно получаем каноническое уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x''^2}{8}-\frac{y''^2}{8}=z''.$$

Результирующее преобразование координат таково:

$$x=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\ \ 3x''+y''+2\sqrt{2}z'')+\frac{2}{3},$$

$$y=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x''+y''+2\sqrt{2}z'')+\frac{2}{3},$$

$$z=\frac{1}{3\sqrt{2}}(\qquad -4y''+\sqrt{2}z'')+\frac{1}{3},$$

а каноническая система координат (O', e_1, e_2, e_3), где

$$O'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),\quad e_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$e_2=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right),\quad e_3=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right). \blacktriangleright$$

В задачах 4.233—4.240 написать каноническое уравнение поверхности второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат.

4.233. $7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z+30=0.$

4.234. $2x^2-7y^2-4z^2+4xy+20yz-16zx+60x-12y+12z-90=0.$

4.235. $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0.$

4.236. $2x^2+2y^2+3z^2+4xy+2yz+2zx-4x+6y-2z+3=0.$

4.237. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+4yz-8zx-28x+2y+16z+45=0.$

4.238. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0.$

4.239. $x^2+5y^2+z^2+2xy+2yz+6zx-2x+6y+2z=0.$

4.240. $x^2-2y^2+z^2+4xy+4yz-10zx+2x+4y-10z-1=0.$

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная

1. Определение производной. Дифференцирование явно заданных функций. Пусть $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ — *приращение функции* $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующее *приращению аргумента* Δx. *Производной* 1-го порядка (или *первой производной*) функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Числа

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

и

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой* и *правой производными* функции $y=f(x)$ в точке x_0. Для существования производной $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы ее левая и правая производные в этой точке существовали и совпадали, т. е.

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Пример 1. Найти $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$ для функции $f(x)=|x|$.

◀ Имеем по определению

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

и

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Заметим, что функция $f(x)=|x|$ не имеет производной в точке $x_0=0$. ▶

Производная функции $f(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек, где она существует, сама является функцией. Процесс нахождения производной называют также *дифференцированием*.

Таблица производных основных элементарных функций.

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$, $a \neq 0$.

2. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$; $(e^x)' = e^x$. $e \approx 2{,}7$

3. $(\log_a x)' = \log_a e \cdot \dfrac{1}{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

4. $(\sin x)' = \cos x$.

5. $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования функций

I. Пусть C — постоянная и $f(x)$, $g(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда:

1. $(C)' = 0$.
2. $(f+g)' = f' + g'$.
3. $(Cf)' = Cf'$.
4. $(fg)' = f'g + fg'$.
5. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$, $g \neq 0$.

II. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z = g(f(x))$ в точке x_0 имеет производную, равную

$$z'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) \tag{2}$$

(*правило дифференцирования сложной функции*).

Пример 2. Найти производную функции $z = \log_3(\arcsin x)$.

◄ Полагая $z = \log_3 y$ и $y = \arcsin x$, имеем

$$z'(y) = \log_3 e \cdot \frac{1}{y} \quad \text{и} \quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда, согласно (2), получаем

$$z'(x) = \frac{\log_3 e}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \ ►$$

Найти $\Delta f(x_0, \Delta x)$, если:

5.1. $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

5.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}25$.

5.3. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 100$, $\Delta x = -90$.

Найти $\Delta f(x_0, \Delta x)$ как функцию Δx, если:

5.4. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi/2$.

◄ Имеем

$$\Delta f\left(\frac{\pi}{2}, \Delta x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta x\right) - \sin\frac{\pi}{2} =$$
$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta x}{2}\right) = -2\sin^2\frac{\Delta x}{2}. \ ►$$

5.5. $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$. 5.6. $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$.

5.7. $f(x) = \log_2 x$, $x_0 = 1$.

Пользуясь только определением производной, найти $f'(x)$:

5.8. $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

◀ Имеем:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{ctg}(x+\Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(-\Delta x)}{\Delta x \sin x \sin(x+\Delta x)} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sin x \sin(x+\Delta x)} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \ ▶$$

5.9. $f(x) = 1/x^2$. 5.10. $f(x) = \sqrt{x}$.

5.11. $f(x) = 2^x$. 5.12. $f(x) = \log_2 x$.

5.13. Известно, что $f(0) = 0$ и существует предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$. Доказать, что этот предел равен $f'(0)$.

5.14*. Доказать, что если $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Для заданной $f(x)$ найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$:

5.15. $f(x) = |x-1| + |x+1|$, $x_0 = \pm 1$.

5.16. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1, \\ -x^2 + 2x, & x > 1, \end{cases} \quad x_0 = 1.$

◀ Имеем

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

и

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x-1} =$$

$$= -\lim_{x \to 1+0} (x-1) = 0. \ ▶$$

5.17. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^2 \ln x, & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

5.18. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$, $x_0 = 0$.

5.19. $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

5.20*. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна при $x=0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

Найти производные следующих функций:

5.21. $y=3-2x+\frac{2}{3}x^4$. 5.22. $y=-\frac{5x^5}{a^2}$.

5.23. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$. 5.24. $y=\frac{x-1}{x+1}$.

5.25. $y=\frac{x^2+1}{x^3-x}$. 5.26. $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2+9)$.

5.27. $y=\frac{1+3x^2}{\sqrt{2\pi}}$. 5.28. $y=\frac{1}{x^3+3x-1}$.

5.29. $y=\frac{a}{\sqrt[5]{x^3}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{b}$. 5.30. $y=\frac{a+bx}{c+dx}$.

5.31. $y=\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}$. 5.32. $y=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

5.33. $y=(\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)$. 5.34. $y=3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[4]{x^3}$.

5.35. $y=(3\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[3]{x})\sqrt[3]{x^4}$. 5.36. $y=\frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

5.37. $y=x^3\operatorname{ctg}x$. 5.38. $y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

5.39. $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$. 5.40. $y=\sqrt{x}\sin x$.

5.41. $y=x\sqrt[3]{x^2}(2\ln x-3^x)$. 5.42. $y=3x^3\log_2 x+\frac{x^2}{e^x}$.

5.43. $y=2\sin x-3\operatorname{tg}x$. 5.44. $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

5.45. $y=x^{3/2}\sqrt[3]{x^5+a}$. 5.46. $y=\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

5.47. $y=\sin\frac{3x}{2}$. 5.48. $y=6\cos\frac{2x}{3}$.

5.49. $y=(1+4x^2)^3$. 5.50. $y=\sqrt[4]{(1+3x^2)^3}$.

5.51. $y=\sin^2\frac{x}{2}$. 5.52. $y=\sqrt{1+\sin 4x}-\sqrt{1-\sin 4x}$.

5.53. $y=x\arcsin\ln x$. 5.54. $y=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

5.55. $y=\sqrt[4]{(1+\sin^2 x)^3}$. 5.56. $y=x^2e^{-2x}$.

5.57. $y=e^{x/3}\cos^2\frac{x}{3}$.

5.58. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a})$.

5.59. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. 5.60. $y=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

5.61. $y=\sqrt{\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}}$. **5.62.** $y=\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

5.63. $y=\cos^2\left(\sin\frac{x}{3}\right)$. **5.64.** $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

5.65. $y=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$.

5.66. $y=\arccos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$.

5.67. $y=\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}$. **5.68.** $y=\frac{e^{-x^2}}{2x}$.

5.69. $y=2^{\frac{x}{\ln x}}$. **5.70.** $y=2^{\sqrt{\sin^2 x}}$.

5.71. $y=3^{2^x}$. **5.72.** $y=\ln x\cdot\lg x-\ln a\cdot\log_a x$.

5.73. $y=\log_2\ln 2x$. **5.74.** $y=e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

5.75. $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$. **5.76.** $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$.

Найти производные *гиперболических функций*:

5.77. $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (*гиперболический синус*),

5.78. $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (*гиперболический косинус*),

5.79. $\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ (*гиперболический тангенс*),

5.80. $\operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$ (*гиперболический котангенс*).

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}.$$

Применение предварительного логарифмирования часто упрощает вычисление производной.

Пример 3. Найти производную функции $y=\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

◄ Так как функция определена при $x\in[0,1]\cup(2,+\infty)$, то

$$\ln y=\frac{1}{2}(\ln x+\ln|x-1|-\ln|x-2|).$$

Отсюда (см. пример 5.117)

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right),$$

т. е.

$$y'=(\ln y)'\cdot y=\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}.$$ ►

Пример 4. Найти производную *сложно-показательной* функции $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

◀ Логарифмируя, получим (так как $1+\frac{1}{x}>0$)

$$\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Отсюда находим производные левой и правой частей

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}.$$

Следовательно,

$$y' = (\ln y)'\cdot y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right). \blacktriangleright$$

Используя предварительное логарифмирование, найти производные следующих функций:

5.81. $y=\frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$. 5.82. $y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$.

5.83. $y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$.

5.84. $y=x^3\sqrt{\frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}$.

5.85. $y=x^x$. 5.86. $y=x^{2^x}$.

5.87. $y=\sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}$. 5.88. $y=(\ln x)^{1/x}$.

5.89. $y=(\sin x)^{\arcsin x}$. 5.90. $y=x^{x^x}$.

5.91. $y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$. 5.92*. $y=x^{x^2}+x^{2^x}+2^{x^x}$.

Вводя промежуточные переменные, вычислить производные заданных функций:

5.93*. $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^2 x})$.

5.94. $y=(\arccos x)^2\ln(\arccos x)$.

5.95. $y=\frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}$.

5.96. $y=\frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arctg} a^{-x}$.

5.97*. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & x>0.\end{cases}$$

Найти коэффициенты a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и дифференцируема в любой точке.

5.98. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x|\geqslant 1,\\ ax^2+b, & |x|<1.\end{cases}$$

Найти коэффициенты a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и дифференцируема в любой точке.

Найти производные следующих функций:

5.99. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$. **5.100.** $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

5.101. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

5.102. $y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$. **5.103.** $y=\frac{1}{\cos^n mx}$.

5.104. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$, $a, b>0$.

5.105. $y=\ln(\ln^n mx)$. **5.106.** $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

5.107. $y=\log_2\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$. **5.108.** $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

5.109. $y=\log_x e$. **5.110.** $y=(\sin x)^{\cos x}$.

5.111. $y=\sqrt{x}^{\,\sin^2 x}$. **5.112.** $y=\sqrt{\cos x}\cdot a^{\sqrt{\cos x}}$.

5.113. $y=\ln(\operatorname{sh} x)+\frac{1}{2\operatorname{sh} x}$. **5.114.** $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.

5.115. $y=e^{-x}\operatorname{sh} ax$. **5.116.** $y=\arccos(1/\operatorname{ch} x)$.

5.117. $y=\ln|x|$.

◀ Функция $y=\ln|x|$ определена $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, и

$$\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$$

Отсюда

$$(\ln|x|)'=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0\\ \frac{1}{x}, & x<0\end{cases}=\frac{1}{x},\quad x\neq 0. \ ▶$$

5.118. $y=\arcsin\frac{1}{|x|}$. **5.119.** $y=|\sin x|$.

5.120. $y=|\operatorname{arctg} x|$.

5.121. $y=[x]x$, где $[x]$ — целая часть числа x.

◀ Функция $y=[x]x$ определена $\forall x\in\mathbb{R}$. Если $k\in\mathbb{Z}$, то $y=kx$ при $x\in[k, k+1)$. Поэтому

$$y'=k,\quad x\in(k, k+1),$$

а в точках $x=k$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$f'_-(k)=k-1,\quad f'_+(k)=k. \ ▶$$

5.122. $y=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0.\end{cases}$ **5.123.** $y=\begin{cases}x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

5.124. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1, \\ 1/e, & |x|>1. \end{cases}$

5.125. $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$.

5.126. $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$.

5.127. $y=a^{x^a}$. 5.128. $y=(\log_x a)^x$.

5.129. $y=\sin(\sin(\sin x))$. 5.130. $y=(1/x)^{1/x}$.

5.131. $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

5.132. $y=3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}+\frac{1}{3}\frac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$.

5.133. Доказать, что производная четной функции — функция нечетная, а производная нечетной функции — функция четная.

5.134. Доказать, что производная периодической функции есть функция также периодическая.

5.135*. Найти $f'(x_0)$, если $f(x)=(x-x_0)\varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции. Найти производные следующих сложных функций:

5.136. $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$. 5.137. $y=\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

5.138. $y=\psi(x)^{\varphi(x)}$, $\psi(x)>0$.

5.139. $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$; $\varphi(x)>0$, $\psi(x)>0$, $\varphi(x)\neq 1$.

◀ Перейдем к натуральным логарифмам:

$$y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}.$$

Отсюда находим

$$y'=\frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}=\frac{1}{\ln\varphi(x)}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-y\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right).$$ ▶

Пусть $f(x)$ — произвольная дифференцируемая функция. Найти y':

5.140. $y=f(\ln x)$. 5.141. $y=\ln(f(x))$.

5.142. $y=f(e^x)e^{f(x)}$.

◀ Имеем $y'=f'(e^x)e^xe^{f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}(e^xf'(e^x)+$ $+f'(x)f(e^x))$. ▶

5.143. $y=f(f(x))$.

2. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически. Говорят, что функция $y=f(x)$, $x\in(a, b)$, *неявно задана* уравнением $F(x, y)=0$, если для всех $x\in(a, b)$

$$F(x, f(x))=0. \tag{3}$$

Для вычисления производной функции $y=f(x)$ следует тождество (3) продифференцировать по x (рассматривая левую часть как сложную функцию x), а затем полученное уравнение разрешить относительно $f'(x)$.

Пример 5. Уравнение $x^2+y^2=1$ неявно определяет на интервале $(-1, 1)$ две функции:

$$\begin{aligned} y_1(x)&=\sqrt{1-x^2}, \\ y_2(x)&=-\sqrt{1-x^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Найти их производные, не используя явных выражений (4).

◀ Пусть $y(x)$ — любая из этих функций. Тогда, дифференцируя по x тождество

$$x^2+y^2(x)=1,$$

получим

$$2x+2y(x)\,y'(x)=0.$$

Отсюда

$$y'(x)=-\frac{x}{y(x)},$$

т. е.

$$y_1'(x)=-\frac{x}{y_1(x)}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

и

$$y_2'(x)=-\frac{x}{y_2(x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \ ▶$$

Пример 6. Вывести правило дифференцирования обратной функции.

◀ Если $x=f^{-1}(y)$, $y\in E$, — функция, обратная к $y=f(x)$, $x\in D$, то для всех $y\in E$ выполнено равенство

$$f(f^{-1}(y))-y=0.$$

Иначе говоря, обратная функция $x=f^{-1}(y)$ есть функция, заданная неявно уравнением

$$f(x)-y=0. \tag{5}$$

Для вычисления производной функции $x=f^{-1}(y)$ дифференцируем (5) по y:

$$f'(x(y))\,x'(y)-1=0,$$

откуда

$$x'(y)=\frac{1}{f'(x(y))}. \ ▶$$

При неявном задании функций, а также для сложных функций будем для производной использовать также обозначения типа y'_x там, где необходимо уточнить, по какой переменной ведется дифференцирование.

5.144. Найти значение y'_x в точке $x=1$, если

$$x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0,\ y(1)=1.$$

5.145. Найти y'_x в точке $(0,\ 1)$, если $e^y+xy=e$.

Найти y'_x для следующих функций, заданных неявно:

5.146. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **5.147.** $x^4+y^4=x^2y^2$.

5.148. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $a>0$. **5.149.** $2y\ln y=x$.

5.150. $e^x\sin y-e^y\cos x=0$. **5.151.** $\sin(xy)+\cos(xy)=0$.

5.152. $2^x+2^y=2^{x+y}$. **5.153.** $x-y=\arcsin x-\arcsin y$.

5.154. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. **5.155.** $xy=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

5.156. $x^y=y^x$. **5.157.** $a^{\frac{x}{y}}=\left(\frac{x}{y}\right)^a$.

5.158. Доказать, что функция y, определенная уравнением $xy-\ln y=1$, удовлетворяет также уравнению $y^2+(xy-1)y'=0$.

Найти производные функций, обратных к заданным:

5.159. $y=\operatorname{sh}x$.

◀ Имеем по определению $\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Так как $(\operatorname{sh}x)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0$ для всех $x\in\mathbb{R}$, то функция $\operatorname{sh}x$ монотонно возрастает на всей действительной оси и, следовательно, имеет обратную, обозначаемую $\operatorname{arsh}x$. По правилу дифференцирования обратной функции получаем

$$x'_y=(\operatorname{arsh}y)'=\frac{1}{y'_x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{\operatorname{ch}x}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Следовательно, переходя к обычным обозначениям, имеем

$$(\operatorname{arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\ ▶$$

5.160*. $y=\operatorname{ch}x$. **5.161.** $y=\arcsin 2^x$.

5.162. $y=2x^2-x$, $x\in(1/2,\ +\infty)$.

Пусть $y=\alpha(x)$ — функция, обратная к заданной $y=f(x)$. Выразить $\alpha'(x)$ через x и $\alpha(x)$, если:

5.163. $y=x^x$.

◀ Учитывая, что

$$(x^x)'=x^x(\ln x+1),$$

получаем:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{x^x(\ln x+1)}=\frac{1}{y(\ln\alpha(y)+1)},$$

так как $x=\alpha(y)$. В обычных обозначениях

$$\alpha'(x)=\frac{1}{x(\ln\alpha(x)+1)}. \ \blacktriangleright$$

5.164. $y=x+e^x$. **5.165.** $y=\frac{1}{2}x+x^3$.
5.166. $y=x+\log_2 x$. **5.167.** $y=x\ln x$.

Пусть заданы функции

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad t\in(\alpha, \beta). \tag{6}$$

Если при этом $x=\varphi(t)$ на интервале (α, β) имеет обратную $t=\varphi^{-1}(x)$, то определена новая функция

$$y(x)=\psi(\varphi^{-1}(x)), \tag{7}$$

называемая функцией, *заданной параметрически* соотношениями (6). Дифференцируя (7) по x и используя правило дифференцирования обратной функции (пример 6), получаем

$$y'_x=\psi'_t\cdot t'_x=\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}=\frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8}$$

Пример 7. Найти y'_x, если

$$x=\cos^2 t, \quad y=\sin t, \quad t\in(0, \pi/2).$$

◀ Так как $\varphi'_t=-2\cos t\sin t$, $\psi'_t=\cos t$, то по формуле (8) находим

$$y'_x=-\frac{1}{2\sin t}. \ \blacktriangleright$$

Для функций, заданных параметрически, найти y'_x:

5.168. $x=2t$, $y=3t^2-5t$, $t\in(-\infty, +\infty)$.
5.169. $x=t^3+2$, $y=0{,}5t^2$, $t\in(-\infty, +\infty)$.
5.170. $x=\frac{1}{t+1}$, $y=\left(\frac{t}{t+1}\right)^2$, $t\neq-1$.
5.171. $x=2^{-t}$, $y=2^{2t}$, $t\in(-\infty, +\infty)$.
5.172. $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, $\varphi\in(0, \pi)$.
5.173. $x=\operatorname{tg} t$, $y=\sin 2t+2\cos 2t$, $t\in(-\pi/2, \pi/2)$.
5.174. $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $t\in(0, +\infty)$.
5.175. $x=\ln(1+t^2)$, $y=t-\operatorname{arctg} t$, $t\in(0, +\infty)$.
5.176. $x=3\log_2\operatorname{ctg} t$, $y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t$, $t\in(0, \pi/2)$.
5.177. $x=\arcsin(t^2-1)$, $y=\arccos\frac{t}{2}$, $t\in(0, \sqrt{2})$.
5.178. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$, $t\in(1; +\infty)$.
5.179. $x=a\operatorname{sh} t$, $y=b\operatorname{ch} t$, $t\in(0, +\infty)$.

Найти y'_x в указанных точках:

5.180. $x = t\ln t,\ y = \frac{\ln t}{t},\ t = 1.$

5.181. $\begin{matrix} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t), \end{matrix}\ t = \pi/4.$

5.182. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ t = \pi/6.$

5.183. $x = \frac{3at}{1+t^2},\ y = \frac{3at^2}{1+t^2},\ t = 2.$

3. Производные высших порядков. *Производной 2-го порядка* от функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е.

$$y''(x) = (y'(x))'.$$

Вообще *производной n-го порядка* (или *n-й производной*) называется производная от производной порядка $(n-1)$, т. е.

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))', \quad n = 2,\ 3,\ \ldots$$

Для производной n-го порядка используется также обозначение $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Пример 8. Найти y'', если $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

◀ Имеем $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Следовательно,

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}. \ ▶$$

Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

5.184. $y = \cos^2 x$. 5.185. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

5.186. $y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}$. 5.187. $y = e^{-x^2}$.

5.188. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 5.189*. $y = x^{\sqrt{x}}$.

5.190. Найти $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, если $y(x) = e^{2x}\sin 3x$.

5.191. Найти $y'''(2)$, если $y = \ln(x-1)$.

5.192. Найти $y^{\mathrm{IV}}(1)$, если $y = x^3\ln x$.

5.193. Найти $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, если $y = 2^{\sin x}\cos(\sin x)$.

Пусть $f(u)$ — дважды дифференцируемая функция. Найти y' и y'', если:

5.194. $y = f(1/x^2)$. 5.195. $y = \ln f(e^x)$.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти y', y'', если:

5.196. $y = u^v\ (u > 0)$.

◀ Имеем $\ln y = v\ln u$. Отсюда находим

$$\frac{y'}{y} = v'\ln u + \frac{v'}{u}u',$$

т. е.

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) = u^v\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right),$$

$$y'' = y'\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right) + y\left(v'' \ln u + \frac{v'}{u} u' + \frac{v'u'u + vu''u - vu'^2}{u^2}\right) =$$

$$= u^v\left(\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right)^2 + v\frac{uu'' - u'^2}{u^2} + \frac{2u'v'}{u} + v'' \ln u\right). \blacktriangleright$$

5.197. $y = \sqrt{u^2 + v^2}$. **5.198.** $y = \ln \frac{u}{v}$.

Найти формулу для n-й производной заданных функций:

5.199. $y = x^m$, $m \in \mathbb{N}$. **5.200.** $y = a^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$.

5.201*. $y = \sin x$. **5.202.** $y = \ln x$. **5.203*.** $y = \cos^2 x$.

5.204. $y = \frac{1+x}{1-x}$.

Применяя разложение в линейную комбинацию более простых функций, найти указанные производные от заданных функций:

5.205. $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$, найти $y^{(n)}$.

◀ Преобразуем выражение к виду

$$y = \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}.$$

Так как

$$\left(\frac{1}{x \pm 1}\right)^{(n)} = (-1)^n \, n! \, \frac{1}{(x \pm 1)^{n+1}}$$

(докажите!), то

$$y^{(n)} = (-1)^n \, n! \left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \blacktriangleright$$

5.206. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, найти $y^{(50)}$.

5.207*. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, найти $y^{(20)}$.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно. Тогда для производной n-го порядка их произведения $u(x)\,v(x)$ справедлива ф о р м у л а Л е й б н и ц а

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)} v'' + \ldots + uv^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков от заданных функций:

5.208. $y=(x^2+x+1)\sin x$, найти $y^{(15)}$.

5.209. $y=(x^2-x)e^x$, найти $y^{(20)}$.

5.210. $y=\sin x\cdot e^{-x}$, найти $y^{(5)}$.

5.211. $y=x\log_2 x$, найти $y^{(10)}$.

5.212. $y=x\,\mathrm{sh}\,x$, найти $y^{(100)}$.

5.213*. Показать, что

$$(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=r^n e^{ax}\cos(bx+n\varphi),$$

где $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}$.

5.214. Доказать, что $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

5.215. Вычислить значение n-й производной функции $y=\dfrac{3x+2}{x^2-2x+5}$ в точке $x=0$.

◀ По условию имеем

$$y(x)(x^2-2x+5)=3x+2.$$

Продифференцируем это тождество n раз, применяя формулу Лейбница. Тогда (для $n\geqslant 2$) получим

$$y^{(n)}(x)(x^2-2x+5)+ny^{(n-1)}(2x-2)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)}(x)\cdot 2=0,$$

откуда при $x=0$

$$5y^{(n)}(0)-2ny^{(n-1)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0,$$

или

$$y^{(n)}(0)=\frac{2}{5}ny^{(n-1)}(0)-\frac{n(n-1)}{5}y^{(n-2)}(0).$$

Мы получили рекуррентную формулу для определения n-й производной в точке $x=0$ $(n\geqslant 2)$. Значения $y(0)$ и $y'(0)$ найдем непосредственно:

$$y(0)=\frac{2}{5},\quad y'(0)=\left.\frac{-3x^2-4x+19}{(x^2-2x+5)^2}\right|_{x=0}=\frac{19}{25}.$$

Затем, полагая последовательно $n=2, 3, 4, \ldots$, с помощью рекуррентной формулы получим значения производных высших порядков. Например,

$$y''(0)=\frac{2}{5}\cdot 2\cdot\frac{19}{25}-\frac{2\cdot 1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{56}{125},$$

$$y'''(0)=\frac{2}{5}\cdot 3\cdot\frac{56}{125}-\frac{3\cdot 2}{5}\cdot\frac{19}{25}=-\frac{234}{625}.\ ▶$$

Применяя метод, описанный в задаче 5.215, найти производную 4-го порядка в точке $x=0$ от заданной функции:

5.216. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$. 5.217. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

5.218. Показать, что функция $y=\arcsin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)y''=xy'$.

5.219. Показать, что функция $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y''-4y'+4y=e^x$.

5.220. Показать, что функция $y=e^{-x}\cos x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{(IV)}+4y=0$.

5.221. Показать, что функция $y=x^n(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0$.

В задачах 5.222—5.226 найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

5.222. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, $a>0$.

◀ Дифференцируя уравнение, определяющее функцию $y(x)$, получаем

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{y'x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Отсюда

$$x+yy'=xy'-y \tag{9}$$

и, следовательно,

$$y'=\frac{x+y}{x-y}. \tag{10}$$

Дифференцируя (9) и используя найденное для y' выражение (10), получаем

$$y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \ ▶$$

5.223. $y^2=2px$. 5.224. $y=1+xe^y$.

5.225. $y=\operatorname{tg}(x+y)$. 5.226. $e^{x-y}=xy$.

5.227. Вывести формулу для второй производной функции, обратной к заданной функции $y=f(x)$.

5.228. Доказать, что если $(a+bx)e^{y/x}=x$, то $x^3y''=(xy'-y)^2$.

Найти производные 2-го порядка следующих функций, заданных параметрически:

5.229. $x=\ln t$, $y=t^3$, $t\in(0, +\infty)$.

◀ Имеем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=3t^3 \quad \text{и} \quad y''_{xx}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t\cdot t'_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{9t^3}{1/t}=9t^3.$$

Заметим, что в данном случае параметр t легко исключить из заданных уравнений, полагая $t=e^x$. Следовательно, выражение для y''_{xx} как функции от x имеет вид $y''_{xx}=9e^{3x}$. ▶

В общем случае, если $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то y''_{xx} вычисляется по формуле

$$y''_{xx}=\frac{\psi''(t)\,\varphi'(t)-\varphi''(t)\,\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}=\frac{\begin{vmatrix}\varphi'(t) & \psi'(t)\\ \varphi''(t) & \psi''(t)\end{vmatrix}}{(\varphi'(t))^3}.$$

5.230. $x=\sec t$, $y=\operatorname{tg} t$, $t\in(0,\ \pi/2)$.

5.231. $x=\arcsin t$, $y=\ln(1-t^2)$, $t\in(-1,\ 1)$.

5.232. $x=\operatorname{arctg} t$, $y=\ln(1+t^2)$, $t\in(-\infty,\ +\infty)$.

5.233. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t\in(0,\ \pi/2)$.

5.234. Показать, что функция $y(x)$, заданная параметрически уравнениями $x=\sin t$, $y=ae^{t\sqrt{2}}+be^{-t\sqrt{2}}$, $t\in(-\pi/2,\ \pi/2)$, при любых постоянных a и b удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1-x^2)\,y''_{xx}-xy'_x=2y$.

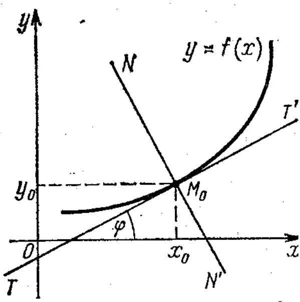


Рис. 37

4. Геометрические и механические приложения производной. Значение производной $f'(x_0)$ функции $y=f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту $k=\operatorname{tg}\varphi$ касательной TT' к графику этой функции, проведенной через точку $M_0(x_0,\ y_0)$, где $y_0=f(x_0)$ (рис. 37) (г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л п р о и з в о д н о й).

Уравнение *касательной* TT' к графику функции $y=f(x)$ в его точке $M_0(x_0,\ y_0)$ имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)\,(x-x_0).$$

Прямая NN', проходящая через точку касания M_0 перпендикулярно к касательной, называется *нормалью* к графику функции $y=f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали

$$(x-x_0)+f'(x_0)\,(y-y_0)=0.$$

Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y=f(x)$ в данной точке, если:

5.235. $y=x^2-5x+4$, $x_0=-1$.

5.236. $y=x^3+2x^2-4x-3$, $x_0=-2$.

5.237. $y=\sqrt{x}$, $x_0=4$.

5.238. $y=\operatorname{tg} 2x$, $x_0=0$.

5.239. $y=\ln x$, $x_0=1$.

5.240. $y=e^{1-x^2}$, $x_0=-1$.

5.241. Написать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2,\ 2)$ к кривой $x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}$, $t\neq 0$.

5.242. Написать уравнения касательных к кривой

$$x=t\cos t,\quad y=t\sin t,\quad t\in(-\infty,\ +\infty),$$

в начале координат и в точке $t=\pi/4$.

5.243. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^3+y^2+2x-6=0$ в точке с ординатой $y_0=3$.

5.244. Написать уравнение касательной к кривой $x^5+y^5-2xy=0$ в точке $M_0(1, 1)$.

5.245. Под каким углом график функции $y=e^{x/2}$ пересекает прямую $x=2$?

5.246. В какой точке M_0 кривой $y^2=2x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $4x-3y+2=0$?

5.247. Найти коэффициенты b и c в уравнении параболы $y=x^2+bx+c$, касающейся прямой $y=x$ в точке $M_0(1, 1)$.

5.248. Показать, что касательные к гиперболе $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ в точках ее пересечения с осями координат параллельны между собой.

5.249. Составить уравнение нормали к графику функции $y=-\sqrt{x}+2$ в точке пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

5.250. Составить уравнение такой нормали к параболе $y=x^2-6x+6$, которая перпендикулярна к прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

5.251. В точках пересечения прямой $x-y+1=0$ и параболы $y=x^2-4x+5$ проведены нормали к параболе. Найти площадь треугольника, образованного нормалями и хордой, стягивающей указанные точки пересечения.

5.252. Показать, что нормали к развертке окружности $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ являются касательными к окружности $x^2+y^2=a^2$.

Углом ω *между кривыми* $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в их общей точке $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0.

5.253. Доказать, что $\operatorname{tg}\omega=\dfrac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)f_2'(x_0)}$.

Найти углы, под которыми пересекаются заданные кривые:

5.254. $y=x^2$ и $y=x^3$.

5.255. $y=(x-2)^2$ и $y=4x-x^2+4$.

5.256. $y=\sin x$ и $y=\cos x$, $x\in[0, 2\pi]$.

5.257. $x^2+y^2=8ax$ и $y^2=\dfrac{x}{2a-x}$.

5.258. Доказать, что сумма отрезков, отсекаемых касательной к кривой $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ на осях координат, для всех ее точек равна a.

5.259. Показать, что отрезок касательной к астроиде $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину, равную a.

5.260. Найти расстояние от начала координат до нормали к линии $y=e^{2x}+x^2$, проведенной в точке с абсциссой $x=0$.

5.261. Доказать, что отрезок касательной к *трактрисе*

$$y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2},$$

заключенный между осью ординат и точкой касания, имеет постоянную длину.

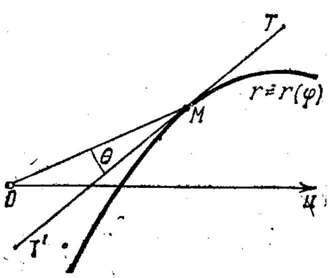


Рис. 38

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, то угол θ, образованный касательной TT' и радиус-вектором $\overline{OM}$ точки касания M (рис. 38), определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{r(\varphi)}{r'_\varphi}. \qquad (11)$$

5.262.** Вывести формулу (11).

5.263. Найти угол θ между касательной и радиус-вектором точки касания для логарифмической спирали $r=ae^{k\varphi}$.

5.264. Найти угол θ между касательной и радиус-вектором точки касания для лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

Если $x=x(t)$ — функция, описывающая закон движения материальной точки, то первая производная $\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ есть скорость, а вторая производная $\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$ — ускорение этой точки в момент времени t (механический смысл первой и второй производных).

5.265. Закон движения материальной точки по прямой имеет вид $x=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$.

а) В какие моменты времени точка находится в начале координат?

б) В какие моменты времени направление ее движения совпадает с положительным направлением оси Ox?

в) В какие моменты времени ее ускорение равно нулю?

5.266. Найти скорость гармонического колебания с амплитудой a, частотой ω и начальной фазой $\varphi=0$.

5.267. Тело массой 4 движется прямолинейно по закону $x=t^2+t+1$. Определить кинетическую энергию тела в момент времени $t=5$.

5.268. В какой момент $t\in[0, 2\pi]$ надо устранить действие сил, чтобы точка, участвующая в гармоническом колебании $x=\cos 3t$, продолжала двигаться равномерно со скоростью $v=3/2$.

5.269. Точка движется по логарифмической спирали $r=e^{a\varphi}$. Найти скорость изменения полярного радиуса, если известно, что он вращается с постоянной скоростью ω.

5.270. Точка движется по окружности $r=2a\cos\varphi$. Найти скорости изменения абсциссы и ординаты точки, если полярный радиус вращается с угловой скоростью ω.

5.271. В какой точке эллипса $16x^2+9y^2=400$ ордината убывает с той же скоростью, с какой абсцисса возрастает?

5.272. Радиус шара изменяется со скоростью v. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

5.273. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за время $T=8$ с. Найти угловую скорость ω в момент времени $t=32$ с после начала движения.

§ 2. Дифференциал

1. Дифференциал 1-го порядка. Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение $\Delta y(x_0, \Delta x)$ может быть представлено в виде

$$\Delta y(x_0, \Delta x)=A\,\Delta x+o(\Delta x). \qquad (1)$$

Главная линейная часть $A\,\Delta x$ приращения Δy называется *дифференциалом* этой функции в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается символом $dy(x_0, \Delta x)$.

Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$; при этом справедливо равенство $A=f'(x_0)$.

Это утверждение позволяет называть дифференцируемой всякую функцию, имеющую производную. Именно в таком смысле мы и употребляли это выражение в § 1.

Выражение для дифференциала имеет вид

$$dy(x_0, dx)=f'(x_0)\,dx,$$

где принято обозначение $dx=\Delta x$. Из формулы (1) следует, что если $f'(x_0)\neq 0$, то при $\Delta x\to 0$ приращение функции и ее дифференциал dy в фиксированной точке являются эквивалентными бесконечно малыми, что позволяет записать приближенное равенство:

$$\Delta y\approx dy \quad \text{при} \quad |\Delta x|\ll 1. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти приближенно значение объема V шара радиуса $r=1{,}02$ м.

◀ Так как $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$, то, полагая $r_0=1$, $\Delta r=0{,}02$ и используя формулу (2), получаем:

$$V(1{,}02)=V(1)+\Delta V(1,\ 0{,}02)\approx V(1)+V'(1)\cdot 0{,}02=$$
$$=\frac{4}{3}\pi+4\pi\cdot 0{,}02\approx 4{,}43\ \text{м}^3.$$ ▶

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал $dy(x_0,\ \Delta x)$ равен приращению ординаты касательной TT' к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ при приращении аргумента, равном Δx (рис. 39).

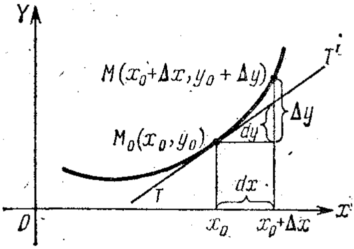


Рис. 39

5.274. Используя формулу $dy=y'\,dx$ и правила вычисления производных (см. § 1, п. 1), доказать следующие свойства дифференциала:

а) $d(C)=0$, где C — постоянная;

б) $d(C_1u+C_2v)=C_1\,du+C_2\,dv$;

в) $d(uv)=u\,dv+v\,du$; г) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$.

5.275. Пусть $z(x)=z(y(x))$ — сложная функция, образованная композицией функций $y=y(x)$ и $z=z(y)$. Доказать, что

$$dz(x,\ dx)=z'_y(y)\,dy(x,\ dx),$$

т. е. выражение для дифференциала сложной функции через дифференциал промежуточного аргумента имеет такую же форму, что и основное определение $dz(x,\ dx)=z'_x(x)\,dx$ (это утверждение называется *инвариантностью формы 1-го дифференциала*).

5.276. Доказать, что для линейной функции $y=ax+b$ приращение Δy и дифференциал dy совпадают.

5.277. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y=x^3$, соответствующие значению аргумента $x_0=2$ и двум различным приращениям аргумента $(\Delta x)_1=0{,}1$ и $(\Delta x)_2=0{,}01$.

5.278. Найти приращение ΔS и дифференциал dS площади S квадрата, соответствующие приращению Δx стороны x. С помощью рисунка геометрически истолковать ΔS, dS и разность $\Delta S-dS$.

5.279. Материальная точка M движется прямолинейно по закону $s=f(t)$, где t — момент времени, а s — пройденный путь за промежуток времени от 0 до t. Дать механическое истолкование дифференциала пути ds, соответствующего промежутку времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

5.280. Используя результат предыдущей задачи и формулу (2), найти приближенно путь Δs, пройденный точкой M за промежуток времени от $t_1 = 3$ до $t_2 = 4$, если закон движения точки M задан формулой $s = 1 + \operatorname{arctg} t$. Сопоставить ответ с точным значением Δs.

5.281. Для функций: а) $f(x) = x^n$ и б) $\varphi(x) = \sin x$ найти значения аргумента x, при которых дифференциалы этих функций не являются эквивалентными их приращениям при $\Delta x \to 0$.

5.282. Дан отрезок $[x_0, x_0 + \Delta x]$ изменения аргумента x функции $y = f(x)$; Δy и dy — соответствующие приращение и дифференциал функции y. Возможны ли равенства: а) $dy = \frac{3}{2}\Delta y$, б) $dy = \Delta y$, в) $dy = \frac{1}{2}\Delta y$ на всем этом отрезке?

5.283. Ребра куба увеличены на 1 см. При этом дифференциал dV объема V куба оказался равным 12 см³. Найти первоначальную длину ребер.

5.284. Радиус круга увеличен на 1 см. Дифференциал площади круга оказался при этом равным 6π см². Найти первоначальную величину радиуса.

Найти дифференциалы указанных функций при произвольных значениях аргумента x и при произвольном его приращении $\Delta x = dx$:

5.285. $x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - 5$.

5.286. $\sin x - x\cos x + 4$.

5.287. $x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1 + x^2}$. **5.288.** $x \ln x - x + 1$.

5.289. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} - 3$.

При вычислении дифференциалов неявно заданных функций удобно использовать основные свойства дифференциала, перечисленные в задачах 5.274 и 5.275.

Пример 2. Найти dy, если функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением

$$\ln\frac{y}{x} = x^2 y^2. \qquad (3)$$

◀ Перепишем (3) в виде тождества

$$\ln\frac{y(x)}{x} = x^2 y^2(x)$$

и вычислим дифференциалы левой и правой части. Используя свойства дифференциала, находим

$$d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{y/x}\, d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{y}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{1}{y}\,dy - \frac{1}{x^2}\,dx,$$

$$d(x^2y^2) = x^2\,d(y^2) + y^2\,d(x^2) = 2x^2y\,dy + 2xy^2\,dx.$$

Приравнивая полученные выражения, получаем

$$\frac{1}{y}dy-\frac{1}{x^2}dx=2x^2y\,dy+2xy^2\,dx.$$

Из этого уравнения, линейного относительно dy, находим окончательное выражение для dy через x, y и dx:

$$dy=\frac{y}{x^2}\frac{1+2x^3y^2}{1-2x^2y^2}dx.$$

Отсюда, в частности, может быть получено и выражение для производной неявной функции:

$$y'=\frac{y}{x^2}\frac{1+2x^3y^2}{1-2x^2y^2}. \blacktriangleright$$

Найти дифференциалы следующих неявно заданных функций:

5.290. $y^5+y-x^2=1$. **5.291.** $x^4+y^4=x^2y^2$.

5.292. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. **5.293.** $e^y=x+y$.

5.294. $y=x+\operatorname{arctg} y$. **5.295.** $y=\cos(x+y)$.

5.296. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$. **5.297.** $\cos(xy)=x$.

В задачах 5.298—5.302 произвести указанные приближенные вычисления, используя замену приращения Δy подходящей функции $y=f(x)$ дифференциалом dy этой функции при малой абсолютной величине приращения Δx аргумента x.

5.298. Вычислить приближенно: а) $\arcsin 0{,}05$; б) $\operatorname{arctg} 1{,}04$; в) $\ln 1{,}2$.

5.299. Обосновать приближенную формулу

$$\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

и вычислить по этой формуле $\sqrt[3]{25}$.

5.300. Найти приближенное значение функции $f(x)=e^{x^2-x}$ при $x=1{,}2$.

5.301*. Найти приближенное выражение для приращения ΔV объема V прямого кругового цилиндра с высотой h при изменении радиуса основания r на величину Δr.

5.302*. По закону Клапейрона объем V, занимаемый газом, давление газа p и абсолютная температура T связаны формулой $pV=RT$, где R — газовая постоянная. Найти приближенное выражение для приращения ΔV объема V при изменении давления p на величину Δp, считая неизменной температуру T.

2. Дифференциалы высших порядков. Рассмотрим дифференциал $dy(x, \Delta_1 x) = f'(x)\Delta_1 x$ как функцию x при фиксированном $\Delta x = \Delta_1 x$. Предполагая, что функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x, найдем дифференциал от $dy(x, \Delta_1 x)$ при $\Delta x = \Delta_2 x$:

$$d(dy(x, \Delta_1 x))\big|_{x,\ \Delta x = \Delta_2 x} = f''(x)\,\Delta_1 x\,\Delta_2 x.$$

Значение полученного выражения при $\Delta_1 x = \Delta_2 x = dx$ называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом 2-го порядка* функции $y = f(x)$ и обозначается символом $d^2y(x, dx)$.

Таким образом,

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

Аналогично

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)\,dx^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Найти дифференциалы 2-го порядка указанных функций y аргумента x:

5.303. $y = a\sin(bx + c)$. **5.304.** $y = 3^{-x^2}$.

5.305. $y = \dfrac{\sin x}{x}$. **5.306.** $y = ax^2 + bx + c$.

5.307. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

5.308. $y = \sqrt{1 - x^2}\arcsin x$.

5.309. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

5.310. $y = \arcsin(a\sin x)$.

5.311. Доказать, что второй дифференциал сложной функции $z(x) = z(y(x))$ выражается через дифференциалы dy и d^2y промежуточного аргумента формулой

$$d^2z = z''_{yy}\,dy^2 + z'_y\,d^2y.$$

◀ Для первого дифференциала имеем (см. задачу 5.275) $dz = z'_y\,dy$, откуда, дифференцируя еще раз (по x, но используя инвариантность формы первого дифференциала), получим:

$$d^2z = d(dz) = d\left(z'_y\,dy\right) = z'_y\,d(dy) + dy\cdot d\left(z'_y\right) = z'_y\,d^2y + z''_{yy}\,dy^2. \ ▶$$

Этот пример показывает, что дифференциалы 2-го порядка (и более высоких порядков) не обладают инвариантностью формы, свойственной дифференциалам 1-го порядка (см. задачу 5.275).

Найти дифференциалы 2-го порядка следующих неявно заданных функций:

5.312. $xy + y^2 = 1$.

5.313. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

5.314. $x^3 + y^3 = y$. **5.315.** $x = y - a\sin y$.

3. Теоремы о дифференцируемых функциях. Формула Тейлора

1. Теоремы о среднем.

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема при $x \in (a, b)$ и $f(a)=f(b)$, то существует по крайней мере одна точка $\zeta \in (a, b)$ такая, что $f'(\zeta)=0$.*

Точки, в которых $f'(x)=0$, называются *стационарными точками* функции $f(x)$.

Теорема Лагранжа. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема при $x \in (a, b)$, то существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a) \quad (\textit{формула Лагранжа}).$$

Теорема Коши. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы при $x \in (a, b)$ и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то существует по крайней мере одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\textit{формула Коши}).$$

5.316. Функция $f(x)=\frac{5-x^2}{x^4}$ имеет на концах отрезка $[-1, 1]$ равные значения (проверьте!). Ее производная $f'(x)$ равна нулю только в двух точках $x=\pm\sqrt{10}$ (проверьте!), расположенных за пределами этого отрезка. Какова причина нарушения заключения теоремы Ролля?

5.317. Показать, что функция $f(x)=x^2-1$ на отрезке $[-1, 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Найти все стационарные точки этой функции.

5.318. Пусть $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$. Доказать, что все три корня уравнения $f'(x)=0$ действительны.

5.319*. Доказать, что уравнение $16x^4-64x+31=0$ не может иметь двух различных действительных корней на интервале $(0, 1)$.

5.320*. Доказать, что уравнение $e^{x-1}+x-2=0$, имеющее корень $x=1$ (проверьте!), не имеет других действительных корней.

5.321*. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то функция $F(x)=(f(x)-f(a))(b-a)-(f(b)-f(a))(x-a)$ имеет по крайней мере одну стационарную точку на интервале (a, b).

5.322. Записав формулу Лагранжа для функции $f(x)=\sqrt{3}x^3+3x$ на отрезке $[0, 1]$, найти на интервале $(0, 1)$ соответствующее значение ξ.

5.323. Доказать, что если производная $f'(x)$ тождественно равна нулю на интервале (a, b), то функция $f(x)$ постоянна на этом интервале.

5.324. Доказать, что если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на интервале (a, b), то функция $f(x)$ монотонно возрастает (монотонно убывает) на этом интервале.

Функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на интервале (a, b), если существует такое $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, что

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K \cdot |x_2 - x_1|$$

для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$.

5.325. Доказать, что если $\sup\limits_{a < x < b} f'(x) = M$, то функция $f(x)$ на интервале (a, b) удовлетворяет условию Липшица с константой K, равной M.

5.326*. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ дважды дифференцируемы на интервале (a, b). Доказать, что если $f''(x) = \varphi''(x)$ на (a, b), то $f(x)$ и $\varphi(x)$ отличаются на линейное слагаемое.

5.327. Доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на $[a, b]$, то $|f(b) - f(a)| \geqslant \geqslant m \cdot (b - a)$, где $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f'(x)$.

5.328. Записав формулу Коши для $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ и $g(x) = x^2 + 4$ на отрезке $[0, 2]$, найти значения ξ.

2. Правило Лопиталя — Бернулли. Раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ обе бесконечно малые или обе бесконечно большие. Тогда их отношение не определено в точке $x = a$, и в этом случае говорят, что оно представляет собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или соответственно $\frac{\infty}{\infty}$. Однако это отношение может иметь предел в точке $x = a$, конечный или бесконечный. Нахождение этого предела называется раскрытием неопределенности. Одним из способов раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ является правило Лопиталя—Бернулли, основанное на следующей теореме, носящей их имя.

Теорема. *Пусть в некоторой окрестности U точки $x = a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы всюду, кроме, может быть, самой точки $x = a$, и пусть $\varphi'(x) \neq 0$ в U. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются одновременно либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to a$ и при этом существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ их производных при $x \to a$, то тогда существует также и предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ самих функций, причем*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (1)$$

Правило применимо и в случае, когда $a=\infty$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x}$ (т. е. раскрыть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$).

◀ Используя формулу (1), получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\dfrac{1}{1+25x^2}\cdot 5}=\frac{2}{5},$$

поскольку $e^{2x}\longrightarrow 1$ и $\dfrac{1}{1+25x^2}\longrightarrow 1$ при $x\longrightarrow 0$. ▶

В некоторых случаях раскрытие неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ может потребовать неоднократного применения правила Лопиталя—Бернулли.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$ (т. е. раскрыть неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$).

◀ Применяя дважды формулу (1), получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2\ln x}{x}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{3x^2}=0. \text{ ▶}$$

На каждом этапе применения правила Лопиталя—Бернулли следует пользоваться упрощающими отношение тождественными преобразованиями, а также комбинировать это правило с любыми другими приемами вычисления пределов.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$ (т. е. раскрыть неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$).

◀ Используем формулу (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}.$$

Освободим знаменатель дроби от множителя $\cos^2 x$, поскольку он имеет предел 1 при $x\longrightarrow 0$. Развернем стоящую в числителе разность кубов и освободим числитель от сомножителя $(1+\cos x+\cos^2 x)$, имеющего предел 3 при $x\longrightarrow 0$. После этих упрощений получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Применяем снова (1):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}.$$

Используя первый замечательный предел, получаем окончательный ответ 1/2, уже не прибегая вновь к правилу Лопиталя—Бернулли. ▶

Раскрыть неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

5.329. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$. **5.330.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

5.331. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$, $m\neq n$, $a\neq 0$.

5.332. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$, $a\neq b$, $c\neq d$.

5.333. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.

5.334. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\arcsin 3x}$. **5.335.** $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$.

5.336. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. **5.337.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

5.338. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$. **5.339.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$.

5.340. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. **5.341.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

5.342. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$. **5.343.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

5.344. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^m}$, $m>0$. **5.345.** $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

5.346. $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. **5.347.** $\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{\cos x\cdot\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$.

5.348. $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Раскрытие неопределенностей типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$. Для вычисления $\lim\limits_{x\to a} f(x)\varphi(x)$, где $f(x)$ — бесконечно малая, а $\varphi(x)$ — бесконечно большая при $x\to a$ (раскрытие неопределенности типа $0\cdot\infty$), следует преобразовать произведение к виду $\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ $\left(\text{неопределенность типа } \frac{0}{0}\right)$ или к виду $\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ $\left(\text{неопределенность типа } \frac{\infty}{\infty}\right)$ и далее использовать правило Лопиталя—Бернулли.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ (раскрыть неопределенность типа $0\cdot\infty$).

◀ Имеем: $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\sin^2\frac{\pi x}{2}=-\frac{2}{\pi}. \blacktriangleright$$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — бесконечно большие при $x\longrightarrow a$ (раскрытие неопределенности типа $\infty-\infty$), следует преобразовать разность к виду $f(x)\left(1-\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right)$, затем раскрыть неопределенность $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ типа $\frac{\infty}{\infty}$. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-\varphi(x))=\infty$. Если же $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=1$, то получаем неопределенность типа $\infty\cdot 0$, рассмотренную выше.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)$ (раскрыть неопределенность типа $\infty-\infty$).

◀ Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln^3 x}{x}\right).$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln^2 x\cdot\frac{1}{x}}{1}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=$$

$$=6\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln^3 x)=+\infty. \blacktriangleright$$

Раскрыть неопределенности типа $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$:

5.349. $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{1/x}-1)$. **5.350.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$.

5.351. $\lim\limits_{x\to\infty}x^n e^{-x}$. **5.352.** $\lim\limits_{x\to+0}x\ln^3 x$.

5.353. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

5.354. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-2)\operatorname{ctg}x$. **5.355.** $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$.

5.356. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi(x-1)$. **5.357.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{a}{x}$.

5.358. $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$. **5.359.** $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$.

5.360. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{arctg}x}-\frac{1}{x}\right)$.

5.361. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.

5.362. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$. **5.363.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

Раскрытие неопределенностей типа 0^0, ∞^0, 1^∞. Во всех трех случаях имеется в виду вычисление предела выражения $(f(x))^{\varphi(x)}$, где $f(x)$ есть в первом случае бесконечно малая, во втором случае — бесконечно большая, в третьем случае — функция, имеющая предел, равный единице. Функция же $\varphi(x)$ в первых двух случаях является бесконечно малой, а в третьем случае — бесконечно большой.

Поступаем следующим образом. Логарифмируя предварительно $y=(f(x))^{\varphi(x)}$, получаем равенство

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x) \tag{2}$$

и находим предел $\ln y$, после чего находится и предел y. Во всех трех случаях $\ln y$ в силу (2) является неопределенностью типа $0\cdot\infty$ (проверьте!), метод раскрытия которой изложен выше.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ (раскрыть неопределенность типа 1^∞).

◀ Введем обозначение $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$. Тогда $\ln y=2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ является неопределенностью типа $\infty\cdot 0$. Преобразуя выражение $\ln y$ к виду $\ln y=2\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{1/x}$, находим по правилу Лопиталя—Бернулли

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=2.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=e^2. \ ▶$$

Раскрыть неопределенности типа 0^0, ∞^0, 1^∞:

5.364. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$. **5.365.** $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

5.366. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\pi-2x)^{\cos x}$. **5.367.** $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

5.368. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$. **5.369.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{1/x}$.

5.370. $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$. **5.371.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

5.372. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$. **5.373.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

5.374. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$. **5.375.** $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

5.376. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

5.377. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$. **5.378.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. Формула Тейлора. Если функция $y=f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(a)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$ точки a, то для всякого $x\in U_\delta(a)$ справедлива формула Тейлора (порядка n)

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

(остаточный член в форме Лагранжа). Таким образом, формула Тейлора порядка n позволяет представить функцию $y=f(x)$ в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена.

В частности, при $a=0$ имеем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

(формула Маклорена).

5.379. Многочлен $2x^3-3x^2+5x+1$ разложить по степеням двучлена $x+1$.

5.380. Для многочлена x^4+4x^2-x+3 написать формулу Тейлора 2-го порядка в точке $a=1$. Записать остаточный член в форме Лагранжа и найти значение θ, соответствующее следующим значениям аргумента: а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=2$.

5.381. Пусть $P(x)$ — многочлен 4-й степени, $P(2)=-1$, $P'(2)=0$, $P''(2)=2$, $P'''(2)=-12$, $P^{(IV)}(2)=24$. Вычислить $P(-1)$, $P'(0)$ и $P''(1)$.

Для заданных функций написать формулу Маклорена n-го порядка:

5.382. $y=e^x$. **5.383.** $y=\sin x$. **5.384.** $y=\cos x$.

5.385. $y=\ln(1+x)$. **5.386*.** $y=\operatorname{arctg} x$. **5.387.** $y=(1+x)^\alpha$.

Используя формулы Маклорена, полученные в задачах 5.382—5.387, написать первые n членов формулы Маклорена (без остаточного члена) для следующих функций:

5.388*. $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$. **5.389*.** $y=\sin^2 x$. **5.390.** $y=\sin\frac{5x}{2}$.

5.391. $y=\ln(4+x^2)$. **5.392.** $y=\sqrt[3]{8+x^2}$.

5.393. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\frac{x}{x-1}$ в точке $a=2$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

5.394. Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции $y=\operatorname{tg} x$ в точке $a=0$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 2-й степени.

5.395. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\arcsin x$ в точке $a=0$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

5.396. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $a=1$. Построить графики данной функции и ее многочлена Тейлора 3-й степени.

Формула Тейлора широко используется при вычислении значений функции с заданной степенью точности. Пусть, например, требуется вычислить значение функции $f(x)$ в точке x_0 с абсолютной погрешностью, не превосходящей ε, если известно значение этой функции и ее производных в точке a. Из формулы Тейлора следует, что

$$f(x_0)\approx f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x_0-a)+\ldots+\frac{f^{(n_0)}(a)}{n_0!}(x_0-a)^{n_0},$$

где n_0 — минимальный из номеров n, для которых

$$|R_{n+1}(x_0)|<\varepsilon.$$

Пример 7. Вычислить число e с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001.

◀ Применяя формулу Маклорена к функции $f(x)=e^x$, получаем

$$e=f(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1.$$

Наименьшее значение n, удовлетворяющее условию $\frac{e^\theta}{(n+1)!}<0{,}001$, где $0<\theta<1$, равно $n_0=6$. Следовательно,

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{6!}=2{,}718.\ ▶$$

5.397. Вычислить с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001, приближенные значения следующих чисел:

а) $\sin 1$; б) $\sqrt{e}$; в) $\ln 1{,}05$; г) $\sqrt[5]{33}$.

5.398. Выяснить происхождение приближенных равенств:

а) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2, \quad |x|<1;$

б) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2, \quad |x|<1,$

и найти их предельные абсолютные погрешности.

Остаточный член в формуле Тейлора может быть записан в форме Пеано

$$R_{n+1}(x)=o(|x-a|^n),$$

использование которой полезно при вычислении пределов.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}$.

◀ Так как $1-\cos^3 x=(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)$, а $5x^2+7x^3 \sim 5x^2$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3(1-\cos x)}{5x^2}.$$

Заменяя $\cos x$ его разложением по формуле Маклорена $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2},$$

поскольку $\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\sim\frac{x^2}{2}$ при $x\longrightarrow 0$. Окончательно

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\frac{3}{10}. \text{ ▶}$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)}$.

◀ По формуле Тейлора

$$\sin(2x-2)=\sin 2(x-1)=\frac{2(x-1)}{1!}+o(|x-1|),$$

$$\sin(3x-3)=\frac{3(x-1)}{1!}+o(|x-1|).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)-o(|x-1|)}{4(x-1)+o(|x-1|)}.$$

Отбрасывая бесконечно малые высших порядков, т. е. переходя в числителе и в знаменателе к эквивалентным бесконечно малым при $x\longrightarrow 1$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\sin(2x-2)}{x-1+\sin(3x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{4(x-1)}=-\frac{1}{4}. \text{ ▶}$$

5.399. Показать, что разложение по формуле Маклорена для функций $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, e^x-1 и $\ln(1+x)$ можно записать в виде $x+o(|x|)$ и что при $x\to 0$ все эти функции эквивалентны бесконечно малой $\alpha(x)=x$ (и, следовательно, эквивалентны между собой).

5.400. Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3+x^4}$.

§ 4. Исследование функций и построение графиков

1. Возрастание и убывание функции. Экстремум. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) в интервале (a, b), если из неравенства $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in (a, b)$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x)>0$ при всех $x\in(a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает на (a, b); если же $f'(x)<0$ при всех $x\in(a, b)$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

В простейших случаях область определения функции $y=f(x)$ можно разбить на конечное число *интервалов монотонности*. Каждый из интервалов монотонности ограничен *критическими точками*, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует.

Если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что для всякой точки $x\neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$ (или $f(x)<f(x_0)$), то точка x_0 называется *точкой минимума* (*максимума*) функции $y=f(x)$, а число $f(x_0)$ — *минимумом* (*максимумом*) этой функции. Точки минимума и максимума функции называются ее *точками экстремума*.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует, т. е. x_0 — критическая точка этой функции.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Достаточные условия экстремума непрерывной функции. 1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ критической точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Если при этом в интервалах $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ производная $f'(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 — точка экстремума, причем, если $f'(x)>0$ при $x\in(x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка максимума, а если $f'(x)<0$ при $x\in(x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x)>0$ при $x\in(x_0, x_0+\delta)$, то x_0 — точка минимума. Если же $f'(x)$ при $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, сохраняет знак, то точка x_0 не является точкой экстремума.

2) Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в критической точке x_0 и в некоторой ее окрестности. Если $f''(x_0)<0$, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0)>0$, то x_0 — точка минимума. Если же $f''(x_0)=0$, то требуются дополнительные исследования.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Находим производную:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2} & \text{при} \quad x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1], \\ \dfrac{2-x}{x^3} & \text{при} \quad x\in(1,\ +\infty). \end{cases}$$

Приравнивая ее нулю, получаем $x=2$. Таким образом, критическими точками (с учетом тех точек, где производная не существует) являются: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Они разбивают область определения $f(x)$ на четыре интервала монотонности: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$ и $(2,\ +\infty)$. Так как $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty,\ 0)\cup(1,\ 2)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(0,\ 1)\cup\cup(2,\ +\infty)$, то $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty,\ 0)$ и $(1,\ 2)$, убывает на интервалах $(0,\ 1)$ и $(2,\ +\infty)$, в точке $x_3=2$ достигает максимума ($f(2)=1/4$), а в точке $x_2=1$ — минимума ($f(1)=0$). Полученные результаты удобно свести в следующую таблицу:

Таблица 4.1

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$
$f'(x)$	>0	не сущ.	<0	не сущ.	>0	0	<0

Заметим, что в рассматриваемом примере первое достаточное условие позволяет определить характер каждой из критических точек данной функции. В то же время второе достаточное условие неприменимо в точке x_2, так как в этой точке не существует первая производная. ▶

5.401*. Доказать следующее обобщение второго достаточного условия экстремума. Пусть x_0 — критическая точка функции $f(x)$, и первая из не равных нулю производных этой функции в точке x_0 имеет порядок k. Если k — четное число, то x_0 является точкой экстремума, причем точкой максимума, если $f^{(k)}(x_0)<0$, и точкой минимума, если $f^{(k)}(x_0)>0$. Если же k — нечетное число, то экстремума в точке x_0 нет.

5.402. Исследовать на экстремум в точке x_0 функцию $f(x)=(x-x_0)^k\varphi(x)$, где $k\in\mathbb{N}$ и $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $\varphi(x_0)\neq 0$.

5.403*. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Доказать, что функция $f(x)$ имеет в точке $x_0=0$ минимум, а функция $g(x)$ не имеет в точке x_0 экстремума, хотя

$$f^{(k)}(0)=g^{(k)}(0)=0,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Для указанных функций найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума:

5.404. $y=x\sqrt{1-x^2}$. **5.405.** $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$. **5.406.** $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

5.407. $y=x-2\sin x$. **5.408.** $y=x-2\ln x$.

5.409. $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$. **5.410.** $y=e^x\cos x$.

5.411. $y=x^x$. **5.412.** $y=\operatorname{ch}^3 x+1$.

Наибольшее (*наименьшее*) *значение* непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ достигается или в критических точках, или на концах этого отрезка.

Определить наибольшее M и наименьшее m значения следующих функций на указанных отрезках (а если отрезок не указан, то во всей области определения):

5.413. $y=-3x^4+6x^2$; $[-2, 2]$. **5.414.** $y=x+2\sqrt{x}$; $[0, 4]$.

5.415. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; $[0, 4]$. **5.416.** $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; $[0, 1]$.

5.417. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$; $[0, 1]$.

5.418. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$; $[0, 1]$.

5.419. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **5.420.** $y=xe^{-x^2/2}$.

Доказать следующие неравенства:

5.421*. $e^x>1+x$, $x\neq 0$. **5.422.** $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$, $x\neq 0$.

5.423. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>1+\dfrac{x^2}{2}$, $x\neq 0$.

5.424. $\sin x+\operatorname{tg} x>2x$, $x\in(0, \pi/2)$.

5.425. Два тела движутся с постоянными скоростями v_1 м/с и v_2 м/с. Движение происходит по двум прямым, образующим угол $\pi/2$, в направлении к вершине этого угла, от которой в начале движения первое тело находилось на расстоянии a м, а второе — на расстоянии b м. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?

5.426. Для доставки продукции завода N в город A (рис. 40) строится шоссе NP, соединяющее завод с железной дорогой AB, проходящей через город A. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. К какому пункту P нужно провести шоссе, чтобы общая стоимость перевозок продукции завода N в город A по шоссе и по железной дороге была наименьшей?

5.427. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом (рис. 41). Задан периметр p этой фигуры. При каких размерах x и y окно будет пропускать наибольшее количество света?

5.428. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле α наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения желоба будет наибольшей?

5.429. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник, основание которого лежит на основании треугольника, а две вершины — на боковых сторонах. Найти наибольшую площадь вписанного прямоугольника.

5.430. Периметр осевого сечения цилиндра равен $6a$. Найти наибольший объем такого цилиндра.

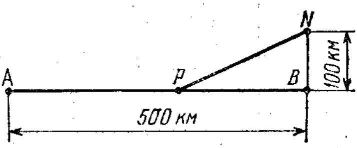


Рис. 40

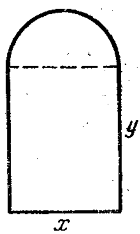


Рис. 41

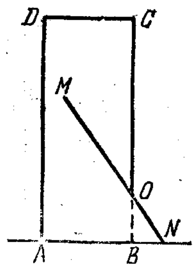


Рис. 42

5.431. Цилиндр вписан в конус с высотой h и радиусом основания r. Найти наибольший объем вписанного цилиндра.

5.432. Найти наименьший объем конуса, описанного около шара радиуса r.

5.433. Найти наибольший объем конуса при заданной длине l его образующей.

5.434. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса r.

5.435. На параболе $y=x^2$ найти точку N, наименее удаленную от прямой $y=2x-4$.

5.436. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник с наибольшей площадью. Определить его основание x и высоту y.

5.437. Отрезок длины a разделить на две части так, чтобы сумма площадей квадратов, построенных на этих частях, была наименьшей.

5.438. Коническая воронка, радиус основания которой R, а высота H, наполнена водой. В воронку погружается шар. Каким должен быть радиус шара r, чтобы объем воды, вытесненный из воронки погруженной частью шара, был наибольшим?

5.439. Определить наименьшую высоту $h=|OB|$ двери вертикальной башни $ABCD$, чтобы через эту дверь в башню можно было внести жесткий стержень MN длины l, конец которого N скользит вдоль горизонтальной прямой AB. Ширина башни $|AB|=d<l$ (рис. 42).

2. Направление выпуклости. Точки перегиба. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *выпуклым вниз* (или *вогнутым вверх*) на интервале (a, b), если дуга кривой на этом промежутке расположена выше касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в любой точке $x\in(a, b)$.

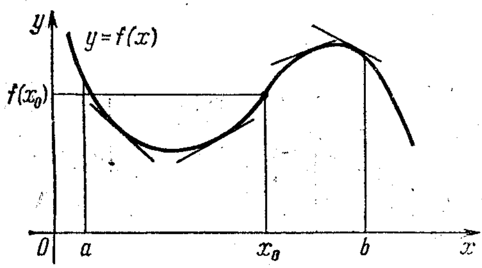


Рис. 43

Если же на интервале (a, b) всякая касательная располагается выше дуги кривой, то график дифференцируемой функции на этом интервале называется *выпуклым вверх* (или *вогнутым вниз*) (на рис. 43 график функции $y=f(x)$ является выпуклым вниз на интервале (a, x_0) и выпуклым вверх на интервале (x_0, b)).

Если функция дважды дифференцируема на (a, b) и $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$), то ее график является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале.

В простейших случаях область определения функции $f(x)$ можно разбить на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости. Каждый из этих интервалов ограничен точками, в которых $f''(x)=0$, либо $f''(x)$ не существует. Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой направление выпуклости графика функции меняется на противоположное, называется *точкой перегиба* (см. рис. 43).

Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0, в которой $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при этом в интервалах $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ производная $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 — точка перегиба.

Пример 2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y=\frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Находим вторую производную:

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{2(3-x)}{x^4}, & x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ 1),\\ \frac{2(x-3)}{x^4}, & x\in(1,\ +\infty).\end{cases}$$

Следовательно, критическими точками первой производной являются точки $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$. При этом в точках x_1 и x_2 вторая производная не существует (в частности, $f''_-(1)=4$, а $f''_+(1)=-4$), а в точке x_3 она равна нулю.

Получаем четыре интервала выпуклости: $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ +\infty)$. Исследуя знак второй производной в каждом из этих интервалов, выводим, что график функции является выпуклым вниз на интервалах $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(3,\ +\infty)$ и выпуклым вверх на интервале $(1,\ 3)$. Следовательно, точки x_2 и x_3 являются точками перегиба графика функции, а x_1 не является. Полученные результаты удобно свести в следующую таблицу:

Таблица 4.2

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ 3)$	3	$(3,+\infty)$
$f(x)$	вып. вниз	$+\infty$	вып. вниз	0	вып. вверх	$\frac{2}{9}$	вып. вниз
$f''(x)$	>0	не сущ.	>0	не сущ.	<0	0	>0

▶

Найти интервалы выпуклости графика функции $y=f(x)$, точки перегиба и угловые коэффициенты k касательных в точках перегиба:

5.440. $y=x^7+7x+1$. **5.441.** $y=x^4+6x^2$.

5.442. $y=\sqrt[3]{(x-2)^5}+3$. **5.443.** $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$.

5.444. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$. **5.445.** $y=xe^{2x}+1$.

5.446. $y=x\ln|x|$. **5.447.** $y=x^3\ln x+1$.

5.448. При каких значениях a и b точка $(1,\ 3)$ является точкой перегиба кривой $y=ax^3+bx^2$?

5.449. При каком выборе параметра h *кривая вероятности*

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2},\ h>0,$$

имеет точки перегиба с абсциссами $x=\pm 6$?

5.450. Показать, что кривая $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

5.451*. Показать, что точки перегиба кривой $y=x\sin x$ лежат на кривой $y^2(4+x^2)=4x^2$.

3. Асимптоты. Пусть для функции $y=f(x)$ существует такая прямая, что расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до этой прямой стремится к нулю при бесконечном удалении точки M от начала координат. Тогда такая прямая называется *асимптотой* графика функции.

Если при этом координата x точки M стремится к конечному числу a, то полупрямая $x=a$ ($y>0$ либо $y<0$) является вертикальной асимптотой. Для существования вертикальной асимптоты в точке $x=a$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ был равен бесконечности.

Непрерывные функции не имеют вертикальных асимптот.

Если же координата x точки M стремится к $+\infty$ или $-\infty$, то имеем наклонную асимптоту $y=kx+b$, для существования которой необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b.$$

При этом указанные пределы могут быть различными при $x\to+\infty$ (для правой наклонной асимптоты) и при $x\to-\infty$ (для левой наклонной асимптоты).

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Так как функция непрерывна на всей оси, кроме точки $x=0$, то вертикальная асимптота может существовать лишь в этой точке. Имеем:

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{|x-1|}{x^2}=+\infty,$$

и, следовательно, прямая $x=0$ — вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты. Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{|x-1|}{x^2}}{x}=0=k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{|x-1|}{x^2}-0\cdot x\right)=0=b,$$

то прямая $y=0\cdot x+0=0$ является **одновременно и правой и левой** наклонной (в данном случае горизонтальной) асимптотой. ▶

Найти асимптоты графиков указанных функций:

5.452. $y=\sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}$. **5.453.** $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$.

5.454. $y=\sqrt{|x^2-3|}/x$. **5.455.** $y=3x+\operatorname{arctg} 5x$.

5.456. $y=\frac{\ln(x+1)}{x^2}+2x$. **5.457.** $y=\frac{\sin x}{x}$.

5.458. $y = x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$. **5.459.** $y = x\operatorname{arcsec} x$.

5.460. Доказать, что график целой рациональной функции $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $n \geqslant 2$, не имеет никаких асимптот.

4. Построение графиков функций. Для построения графика функции $y=f(x)$ с непрерывной второй производной (всюду в области определения функции кроме, быть может, конечного числа точек) сначала проводим элементарное исследование, выясняющее некоторые особенности функции (если они имеются): симметрия, периодичность, постоянство знака, нули, точки пересечения с осью Oy, точки разрыва и т. п. Затем, используя первую и вторую производные, находим точки экстремума и перегиба, интервалы монотонности и выпуклости, а также асимптоты.

Пример 4. Построить график функции $y = \frac{|x-1|}{x^2}$.

◀ Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x=0$, всюду неотрицательна и равна нулю лишь в точке $x=1$. Ее исследование проведено в примерах 1—3. Результат этого исследования полезно свести в одну таблицу—объединение таблиц 4.1 и 4.2. При этом следует вычислить и записать в соответствующую клетку таблицы $f'(3) = -1/27$—угловой коэффициент касательной к графику функции в точке перегиба. Рекомендуется также вычислить $f'_-(1) = -1$ и $f'_+(1) = 1$—угловые коэффициенты левой и правой касательных в точке $(1, 0)$ графика. Эти данные помогают точнее построить график функции, приведенный на рис. 44. ▶

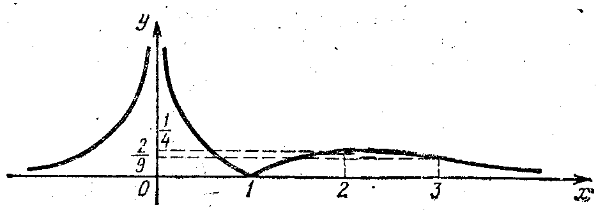


Рис. 44

Пример 5. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

◀ Функция определена и непрерывна на всей действительной оси и обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=1$.

Находим первую производную

$$y' = \frac{3x^2-4x+1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}} = \frac{x-\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}.$$

Приравнивая ее нулю, получаем $x=1/3$. Таким образом, критическими точками функции являются: $x_1=0$, $x_2=1/3$, $x_3=1$ (в точках $x_1=0$ и $x_3=1$ производная не существует). Эти точки разбивают область определения на четыре интервала монотонности $(-\infty, 0)$, $(0, 1/3)$, $(1/3, 1)$, $(1, +\infty)$. Так как $y'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup$

$\cup(0,\ 1/3)\cup(1,\ +\infty)$, то $y(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty, 1/3)$ и $(1, +\infty)$. Аналогично рассуждая, находим, что $y'(x) < 0$ при $x \in (1/3,\ 1)$ и, следовательно, функция на этом интервале убывает. В точке $x_2 = 1/3$ функция достигает максимума $\left(y_{\max}(1/3) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx\right.$ $\left.\approx 0{,}529\right)$, а в точке $x_3 = 1$ — минимума $(y_{\min}(1) = 0)$.

Таблица 4.3

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1/3)$	1/3	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	>0	не сущ.	>0	0	<0	не сущ.	>0
y''	>0	не сущ.	<0			не сущ.	<0
y	$\nearrow$ вып. вниз	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$ вып. вверх
			вып. вверх				

Находим теперь вторую производную $y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}$.

Критическими точками первой производной являются $x_1 = 0$ и $x_3 = 1$ (вторая производная в этих точках не существует). Получаем три интервала выпуклости исходной функции: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. В первом интервале функция выпукла вниз (так как $y'' > 0$ при $x < 0$), а во втором и третьем — выпукла вверх ($y'' < 0$ при $x > 0$, кроме точки $x = 1$). Следовательно, $(0,\ 0)$ является точкой перегиба графика функции (с вертикальной касательной).

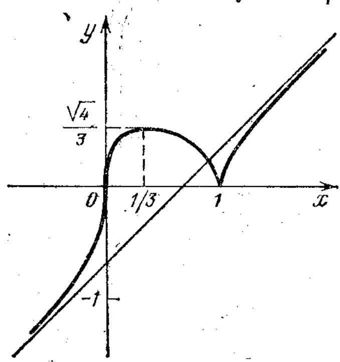


Рис. 45

Результаты проведенных исследований сводим в таблицу (таблица 4.3).

Для уточнения поведения функции в окрестности точки $x = 1$ заметим, что $f'_-(1) = -\infty$, $f'_+(1) = +\infty$, т. е. в точке $(1,\ 0)$ графика функции левая и правая касательные совпадают, образуя вертикальную касательную.

Наконец, определим асимптоты. Так как функция непрерывна на всей оси, то вертикальные асимптоты отсутствуют. Для определения наклонных асимптот находим сначала

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = 1,$$

а затем

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+x}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x\sqrt[3]{x(x-1)^2}+x^2}=-2/3.$$

Следовательно, правая и левая наклонные асимптоты совпадают и определяются уравнением $y=x-\dfrac{2}{3}$.

График функции приведен на рис. 45. ▶

Построить графики следующих функций:

5.461. $y=\dfrac{(x^2-5)^3}{125}$. 5.462. $y=\dfrac{1}{4}x^2(x^2-3)^2$.

5.463. $y=\dfrac{1}{6}x^3(x^2-5)$. 5.464. $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

5.465. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$. 5.466. $y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$. 5.467. $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$.

5.468. $y=\dfrac{x}{x^3+2}$. 5.469. $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$. 5.470. $y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$.

5.471. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$. 5.472. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$. 5.473. $y=\dfrac{x}{2-x^3}$.

5.474. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. 5.475. $y=\dfrac{x^3}{x^3+1}$.

5.476. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$. 5.477. $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$.

5.478. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

5.479. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$. 5.480. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$.

5.481. $y=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}$.

5.482. $y=\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{x^3-1}$.

5.483. $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$. 5.484. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

5.485. $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt[3]{x^3+2}}$. 5.486. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$.

5.487. $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}$. 5.488. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

5.489. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$. 5.490. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$.

5.491. $y=\dfrac{\sqrt{|x^2-3|}}{x}$. 5.492. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

5.493. $y=\sqrt[3]{|x^2-1|}$. 5.494. $y=\sqrt{|x^2-2|^3}$.

5.495. $y=\sin x+\cos x$. **5.496.** $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$.

5.497. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$. **5.498.** $y=\dfrac{x}{2}+\mathrm{arcctg}\,x$.

5.499. $y=e^{2x-x^2}$. **5.500.** $y=xe^{-x^2/2}$.

5.501. $y=\dfrac{1}{x}e^{-1/x}$. **5.502.** $y=\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x^2}$.

5.503. $y=xe^{1/x}$. **5.504.** $y=\dfrac{1}{x}e^{-1/x^2}$.

5.505. $y=(x-2)e^{-1/x}$. **5.506.** $y=(2x-1)e^{2/x}$.

5.507. $y=(x^2+1)e^{-x^2/2}$. **5.508.** $y=x^2e^{2/x}$.

5.509. $y=x^3e^{-x^2/2}$.

5.510. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. **5.511.** $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

5.512. $y=\dfrac{1}{x\ln x}$. **5.513.** $y=x^2\ln x$.

5.514. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$. **5.515.** $y=x^2\ln^2 x$.

5.516. $y=x^2/\ln|x|$. **5.517.** $y=x\ln^2|x|$.

5.518. $y=\ln|x^2-1|$. **5.519.** $y=\dfrac{1}{x^2}\ln^2|x|$.

5.520. $y=x^x$, $x>0$. **5.521*.** $y=x^{1/x}$, $x>0$.

5.522. $y=(1+x)^{1/x}$, $x>-1$. **5.523*.** $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Построить кривые, заданные параметрически:

5.524. $x=te^t$, $y=te^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$.

◀ Проведем вспомогательные вычисления:

$$x'_t=(1+t)e^t,\quad y'_t=(1-t)e^{-t},\quad y'_x=\frac{1-t}{1+t}e^{-2t},$$

$$x''_{tt}=(2+t)e^t,\quad y''_{tt}=(t-2)e^{-t},\quad y''_{xx}=2\frac{t^2-2}{(1+t)^3}e^{-3t}.$$

Так как $x'_t=0$ при $t=-1$ и $x''_{tt}(-1)=\dfrac{1}{e}>0$, то $x_{\min}=-\dfrac{1}{e}$. Так как $y'_t=0$ при $t=1$ и $y''_{tt}(1)=-\dfrac{1}{e}<0$, то $y_{\max}=\dfrac{1}{e}$. Отсюда следует, что кривая расположена в области $\{(x,y)\,|\,x\in[-1/e,+\infty),\ y\in(-\infty,1/e]\}$. Из выражения для производной y'_x определяем критические точки $t_1=1$ $(y'_x(1)=0)$ и $t_2=-1$ $(y'_x(-1)$ не существует$)$. Критические точки первой производной находим из выражения для второй производной y''_{xx}: $t_3=\sqrt{2}$ $(y''_{xx}(\sqrt{2})=0)$, $t_4=-\sqrt{2}$ $(y''_{xx}(-\sqrt{2})=0)$ и $t_5=-1$ $(y''_{xx}(-1)$ не существует$)$. Следовательно, $A\left(-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}},\ -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$ и $B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}/e^{\sqrt{2}}\right)$ — точки перегиба.

Наконец, находим асимптоты. Если $t \to -\infty$, то $x \to 0$, а $y \to -\infty$, т. е. $x=0$ — вертикальная асимптота. Отметим, что при приближении точек кривой к этой асимптоте их координата по x остается отрицательной. Если $t \to +\infty$, то $x \to +\infty$, а $y \to 0$,

Таблица 4.4

t	x	y	y'_x	y''_{xx}	Поведение кривой
$(-\infty, -\sqrt{2})$	<0	<0	<0	<0	Выпукла вверх, убывает, $x=0$ — вертикальная асимптота
$-\sqrt{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$	$-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$		>0	Точка перегиба
$(-\sqrt{2}, -1)$	<0	<0	<0	>0	Выпукла вниз, убывает
-1	$-\frac{1}{e}$	$-e$	не сущ.	не сущ.	Точка возврата
$(-1, 1)$			>0	<0	Выпукла вверх, возрастает, точка (0, 0) лежит на кривой
1	e	$\frac{1}{e}$	0		Максимум
$(1, \sqrt{2})$	>0	>0	<0	<0	Выпукла вверх, убывает
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$		0	Точка перегиба
$(\sqrt{2}, +\infty)$	>0	>0	<0	>0	Выпукла вниз, убывает, $y=0$ — горизонтальная асимптота

т. е. $y=0$ — горизонтальная асимптота. Точки кривой при приближении к ней имеют положительную координату по y.

Результаты исследования сводим в таблицу (таблица 4.4) и делаем все необходимые выводы в правой ее колонке. Кривая приведена на рис. 46. ▶

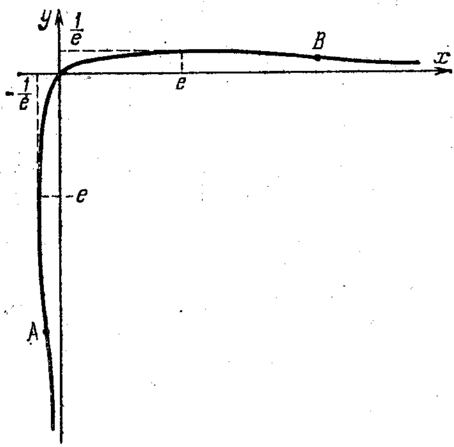


Рис. 46

5.525. $x=t^2-2t$, $y=t^2+2t$, $t\in\mathbb{R}$.

5.526. $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$, $t\in\mathbb{R}$.

5.527. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t\in[0,\ 2\pi)$.

5.528. $x=t^3-3\pi$, $y=t^3-6\,\mathrm{arctg}\, t$, $t\in\mathbb{R}$.

Построить следующие кривые, заданные в полярной системе координат:

5.529. $r=a\sin 3\varphi$. 5.530. $r=a(1+\cos\varphi)$.

5.531. $r=\sqrt{\pi/\varphi}$. 5.532. $r^2=2a^2\cos 2\varphi$.

§ 5. Векторные и комплексные функции действительной переменной

1. Определение вектор-функции действительной переменной. Если каждому значению действительной переменной $t\in D\subset\mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{a}(t)\in\mathcal{V}_3$, то говорят, что на множестве D задана *вектор-функция* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ действительной переменной t.

Задание вектор-функции $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ равносильно заданию трех числовых функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ — координат вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a}=a_x(t)\,\boldsymbol{i}+a_y(t)\,\boldsymbol{j}+a_z(t)\,\boldsymbol{k},$$

или, кратко, $\boldsymbol{a}=(a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t))$. Если вектор $\boldsymbol{a}$ является радиус-вектором точки $M(x,\ y,\ z)$, то соответствующую вектор-функцию принято обозначать:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\,\boldsymbol{i}+y(t)\,\boldsymbol{j}+z(t)\,\boldsymbol{k}.$$

Годографом вектор-функции $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ называется линия, описываемая в пространстве концом вектора $\boldsymbol{r}$. Всякую линию в пространстве можно рассматривать как годограф некоторой вектор-функции. Параметрические уравнения годографа:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t).$$

Пример 1. Найти годограф вектор-функции

$$\boldsymbol{r}(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\boldsymbol{i}+\frac{2t}{1+t^2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\quad t\in\mathbb{R}.$$

◀ Имеем параметрические уравнения годографа

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{2t}{1+t^2},\quad z=1.$$

Исключая параметр t, получим

$$x^2+y^2=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=1.$$

Следовательно, годографом вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ является окружность

$$x^2+y^2=1,\quad z=1,$$

из которой исключена точка $(-1,\ 0,\ 1)$, получающаяся в пределе при $t\to\pm\infty$. ▶

Найти годографы вектор-функций:

5.533. $\boldsymbol{r}=(2t-1)\boldsymbol{i}+(-3t+2)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k},\ t\in\mathbb{R}$.

5.534. $\boldsymbol{r}=\sqrt{1-t^2}\,\boldsymbol{i}+\sqrt{1+t^2}\,\boldsymbol{j},\ t\in[0,\ 1]$.

5.535. $\boldsymbol{r}=4\operatorname{ch}t\cdot\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\operatorname{sh}t\cdot\boldsymbol{k},\ t\in\mathbb{R}$.

5.536. $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+(2t-t^2)\boldsymbol{j},\ t\in\mathbb{R}$.

5.537. $\boldsymbol{r}=\cos t\cdot\boldsymbol{i}+\sin t\cdot\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\ t\in\mathbb{R}$.

5.538. $\boldsymbol{r}=2\cos^3 t\cdot\boldsymbol{i}+2\sin^3 t\cdot\boldsymbol{j},\ t\in[0,\ 2\pi]$.

5.539. $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k},\ t\in\mathbb{R}$.

5.540. $\boldsymbol{r}=\cos^2 t\cdot\boldsymbol{i}+\sin t\cos t\cdot\boldsymbol{j}+\sin t\cdot\boldsymbol{k},\ t\in[0,\ 2\pi]$.

5.541. $\boldsymbol{r}=5\cos t\cdot\boldsymbol{i}+4\sin t\cdot\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\ t\in[0,\ 2\pi]$.

5.542. $\boldsymbol{r}=(\operatorname{sh}t-1)\boldsymbol{i}+\operatorname{ch}^2 t\cdot\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\ t\in\mathbb{R}$.

2. Дифференцирование вектор-функции. *Производной вектор-функции* $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ по аргументу t называется новая вектор-функция

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{a}(t+\Delta t)-\boldsymbol{a}(t)}{\Delta t}.$$

Если $\boldsymbol{a}(t)=(a_x(t),\ a_y(t),\ a_z(t))$, то

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=\left(\frac{da_x(t)}{dt},\ \frac{da_y(t)}{dt},\ \frac{da_z(t)}{dt}\right).$$

Если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, то производная $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ есть вектор, направленный по касательной к годографу вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ в сторону возрастания аргумента t.

Если t — время, то $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}$ есть вектор скорости конца вектора $\boldsymbol{r}$.

Правила дифференцирования вектор-функции ($\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(t)$).

1) $\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}=0$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

2) $\frac{d}{dt}(\alpha\boldsymbol{a})=\alpha\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, где α — постоянный скаляр.

3) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\pm\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$.

4) $\frac{d}{dt}(\varphi\boldsymbol{a})=\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{a}+\varphi\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, где $\varphi=\varphi(t)$ — скалярная функция от t.

5) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt},\ \boldsymbol{b}\right)+\left(\boldsymbol{a},\ \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right)$.

6) $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=\left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt},\ \boldsymbol{b}\right]+\left[\boldsymbol{a},\ \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\right]$.

7) $\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(\varphi(t))=\frac{d\boldsymbol{a}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, где $\varphi=\varphi(t)$ — скалярная функция от t.

5.543. Доказать, что $\left(\boldsymbol{a},\ \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right)=0$, если $|\boldsymbol{a}|=\text{const}$.

5.544. Дано уравнение движения $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$. Определить траекторию и скорость движения.

5.545. Дано уравнение движения $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+(4t-t^2)\boldsymbol{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$.

5.546. Дано уравнение движения $\boldsymbol{r}=2(t-\sin t)\boldsymbol{i}+2(1-\cos t)\boldsymbol{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t=\pi/2$, $t=\pi$.

5.547. Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции $\boldsymbol{r}=e^{2t}\boldsymbol{i}-(t+8)^{4/3}\boldsymbol{j}$ при $t=0$.

5.548. Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции $\boldsymbol{r}=(t^3+t)\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}$ при $t=-1$.

5.549. Найти производные вектор-функций:

а) $\boldsymbol{r}=\sin t\cdot\boldsymbol{i}+\cos^2 t\cdot\boldsymbol{j}+\sin t\cos t\cdot\boldsymbol{k}$;

б) $\boldsymbol{r}=t\cos t\cdot\boldsymbol{i}+t\sin t\cdot\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$;

в) $\boldsymbol{r}=(t+\cos t)\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+\sin t\cdot\boldsymbol{k}$.

5.550. Найти производные вектор-функций:

а) $\boldsymbol{r}=e^t\boldsymbol{i}+\cos t\cdot\boldsymbol{j}+(t^2+1)\boldsymbol{k}$ в точке $(1,\ 1,\ 1)$;

б) $\boldsymbol{r}=t^3\boldsymbol{i}+(t+1)^2\boldsymbol{j}+\sqrt{t^2+1}\,\boldsymbol{k}$ при $t=-2$.

5.551. Найти $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$, если

$$\boldsymbol{a}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}.$$

5.552. Найти $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$, если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$.

5.553. Найти $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$, если $\boldsymbol{a}=u\boldsymbol{i}+u^2\boldsymbol{j}+u^3\boldsymbol{k}$, где $u=\sin t$.

Если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$, то

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Если t — время, то $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{w}$ — вектор ускорения конца вектора $\boldsymbol{r}$.

5.554. Найти вторые производные вектор-функций:

а) $\boldsymbol{r}=\cos t\cdot\boldsymbol{i}+e^t\boldsymbol{j}+(t^2+1)\,\boldsymbol{k}$,

б) $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t\cos t\cdot\boldsymbol{j}+t\sin t\cdot\boldsymbol{k}$

при произвольном t и при $t=0$.

5.555. Дано уравнение движения: $\boldsymbol{r}=2(t-\sin t)\,\boldsymbol{i}+2(1-\cos t)\,\boldsymbol{j}$. Определить ускорение движения. Построить векторы ускорения для моментов $t=\pi/2$, $t=\pi$.

5.556*. Дано уравнение движения: $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+(4t-t^2)\,\boldsymbol{j}$. Определить ускорение $\boldsymbol{w}$ движения и его тангенциальную w_τ и нормальную w_n составляющие в любой момент t и при $t=0$.

5.557. Дано уравнение движения: $\boldsymbol{r}={}^1/_2t^2\boldsymbol{i}+{}^1/_3(2t+1)^{3/2}\boldsymbol{j}$. Определить ускорение движения и его тангенциальную и нормальную составляющие в любой момент t и при $t=0$.

3. Касательная к пространственной кривой и нормальная плоскость. Уравнения касательной к пространственной кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, которой соответствует значение параметра t_0, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}},$$

где x, y, z — текущие координаты точки касательной. Уравнение нормальной плоскости в той же точке:

$$(x-x_0)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0}+(y-y_0)\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0}+(z-z_0)\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_0}=0.$$

Пример 2. Доказать, что касательная к винтовой линии $\boldsymbol{r}=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ образует постоянный угол с осью Oz.

◀ Найдем вектор, касательный к годографу вектора $\boldsymbol{r}$:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(-a\sin t,\ a\cos t,\ b).$$

Отсюда

$$\cos\gamma=\frac{z'(t)}{\left|\frac{dr}{dt}\right|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

т. е. $\gamma=\text{const}$. ▶

Пример 3. Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой $x=t^2-1$, $y=t+1$, $z=t^3$ в точке $M_0(0, 2, 1)$.

◀ Данной точке соответствует значение параметра $t=1$. Имеем

$$\frac{dx}{dt}=2t,\quad \frac{dy}{dt}=1,\quad \frac{dz}{dt}=3t^2.$$

Подставляя значение $t=1$, получаем

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=1}=2,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1}=1,\quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1}=3.$$

Уравнения касательной:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$2(x-0)+1\cdot(y-2)+3(z-1)=0,$$

или

$$2x+y+3z-5=0.\ ▶$$

Для каждой из следующих кривых написать уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости в данной точке:

5.558. $x=4\sin^2 t$, $y=4\sin t\cos t$, $z=2\cos^2 t$ при $t=\pi/4$.

5.559. $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=\frac{1}{3}t^3$, $z=\frac{1}{4}t^4$ при $t=2$.

5.560. $x=a\operatorname{ch} t$, $y=a\operatorname{sh} t$, $z=at$ при $t=0$.

5.561. $x^2+y^2=10$, $y^2+z^2=25$ в точке $M_0(1, 3, 4)$.

5.562. $2x^2+3y^2+z^2=9$, $3x^2+y^2-z^2=0$ в точке $M_0(1, -1, 2)$.

4. Дифференциальные характеристики плоских кривых. Пусть кривая в плоскости Oxy является годографом вектор-функции $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=(x(s), y(s))$, где s — длина дуги кривой.

Кривизной кривой в точке M_0 называется число

$$K=\left|\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi}{\Delta s}\right|,$$

где φ — угол поворота касательной, соответствующий дуге $\overset{\frown}{M_0M}$ (рис. 47) данной кривой, а Δs — длина этой дуги. Величина $R=1/K$ называется *радиусом кривизны*.

Кривизна K определяется соотношением

$$K=\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|.$$

Формулы для вычисления кривизны: 1) если кривая задана уравнением в явной форме $y=f(x)$, то

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\right|;$$

2) если кривая задана уравнением в неявной форме[1] $F(x, y)=0$, то

$$K=\left|\frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x+F'^2_y)^{3/2}}\right|;$$

3) если кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то

$$K=\left|\frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\right|;$$

4) если кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, то

$$K=\left|\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}\right|.$$

Окружностью кривизны (*соприкасающейся окружностью*) кривой в ее точке M называется предельное положение окружности, проведенной через точку M и две другие точки кривой P и Q, когда $P\longrightarrow M$ и $Q\longrightarrow M$.

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны в соответствующей точке M, а центр окружности кривизны (*центр кривизны*) находится на нормали к кривой, проведенной в точке M в сторону вогнутости кривой.

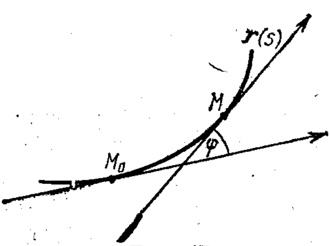


Рис. 47

Координаты X и Y центра кривизны равны

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Эволютой кривой называется линия, описываемая центром кривизны при движении точки по кривой. Формулы для координат центра кривизны определяют параметрические уравнения эволюты.

Пример 4. Найти уравнение эволюты параболы $y^2=2(x+1)$.

◀ Имеем $2yy'=2$, т. е. $y'=\frac{1}{y}$. После повторного дифференцирования получаем $y'^2+yy''=0$, откуда $y''=-\frac{y'^2}{y}=-\frac{1}{y^3}$. Находим ко-

[1]) Здесь используются частные производные функции двух переменных; определение см. в п. 3 § 1 гл. 7.

ординаты центра кривизны:

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=\frac{y^2}{2}-1-\frac{\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}{-1/y^3}=\frac{3}{2}y^2,$$

$$Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{1+\frac{1}{y^2}}{-1/y^3}=-y^3;$$

тем самым найдены параметрические уравнения эволюты:

$$X=\frac{3}{2}y^2,\quad Y=-y^3.$$

Исключив параметр y, найдем уравнение эволюты в виде

$$Y^2=\frac{8}{27}X^3. \ ►$$

Вычислить кривизну данной кривой:

5.563. $y=x^2$ в начале координат и в точке $M(1,\ 1)$.
5.564. $x^2+9y^2=9$ в вершинах эллипса $A(3,\ 0)$ и $B(0,\ 1)$.
5.565. $x^2-xy+y^2=1$ в точке $M(1,\ 1)$.
5.566. $x=t^2,\ y=t-{}^1/_3t^3$ при $t=1$.
5.567. $x={}^1/_2t^2,\ y={}^1/_3t^3$ в точке $M({}^1/_2,\ {}^1/_3)$.
5.568. $r=a(1-\cos\varphi)$ в любой точке и при $\varphi=\pi$.
5.569. $r^2=a^2\sin 2\varphi$ при $\varphi=\pi/4$.

Найти радиусы кривизны (в любой точке) данных кривых:

5.570. а) $y=\sqrt[3]{x}$; б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
5.571. а) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$; б) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.
5.572. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.
5.573. а) $r^2=a^2\cos 2\varphi$; б) $r=a\varphi$.

5.574*. *Вершиной* кривой называется такая ее точка, в которой кривизна имеет максимум или минимум. Найти вершину кривой $y=e^{-x}$.

5.575. Найти вершину кривой $y=\ln x$.

Вычислить координаты центров кривизны и написать уравнения окружностей кривизны данных кривых в указанных точках:

5.576. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$ в точке $M(0,\ a)$.
5.577. $y=e^{-x^2}$ в точке $M(0,\ 1)$.
5.578. $y=xe^x$ в точке $M(-1,\ -1/e)$.
5.579. $y=\sin x$ в точке $M(\pi/2,\ 1)$.
5.580. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ в точке $M(\pi a,\ 2a)$.

Найти эволюты кривых:

5.581. а) $y=x^3$; б) $x^2-y^2=a^2$; в) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

5.582. $x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$.

5.583. $x = 2t,\ y = t^2 - 2$.

5. Дифференциальные характеристики пространственных кривых. Во всякой неособой точке $M(x, y, z)$ пространственной кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ можно построить три взаимно перпендикулярных вектора:

$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ (направляющий вектор *касательной*),

$\boldsymbol{B} = \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]$ (направляющий вектор *бинормали*),

$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{T}]$ (направляющий вектор *главной нормали*)

или соответствующие им основные *единичные векторы*:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{T}}{|\boldsymbol{T}|},\quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|},\quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|},$$

которые можно вычислить также по формулам:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\quad \boldsymbol{\nu} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\Big/\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|,\quad \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}].$$

Трехгранник с вершиной в точке M_0, ребрами которого служат касательная, главная нормаль и бинормаль, называется *естественным трехгранником* (*триэдром*) пространственной кривой. Гранями его являются плоскости: *соприкасающаяся* (проходит через векторы $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{N}$), *нормальная* (проходит через векторы $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{B}$), *спрямляющая* (проходит через векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{T}$).

Уравнения главной нормали имеют вид

$$\frac{x-x_0}{N_x} = \frac{y-y_0}{N_y} = \frac{z-z_0}{N_z},$$

где x, y, z — текущие координаты точки главной нормали, N_x, N_y, N_z — координаты вектора $\boldsymbol{N}$.

Уравнения бинормали:

$$\frac{x-x_0}{B_x} = \frac{y-y_0}{B_y} = \frac{z-z_0}{B_z}.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости:

$$B_x(x-x_0) + B_y(y-y_0) + B_z(z-z_0) = 0.$$

Уравнение спрямляющей плоскости:

$$N_x(x-x_0) + N_y(y-y_0) + N_z(z-z_0) = 0.$$

Пример 5. Найти основные единичные векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ кривой $x = 1 - \sin t,\ y = \cos t,\ z = t$ в точке M, которой соответствует значение параметра $t = 0$. Написать уравнения касательной, главной нормали и бинормали в этой точке.

◄ Имеем

$$\boldsymbol{r} = (1 - \sin t)\,\boldsymbol{i} + \cos t\cdot\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\cos t\cdot\boldsymbol{i} - \sin t\cdot\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \sin t\cdot\boldsymbol{i} - \cos t\cdot\boldsymbol{j}.$$

При $t=0$ получим

$$T=\frac{dr}{dt}=-i+k, \quad \frac{d^2r}{dt^2}=-j,$$

$$B=\left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=i+k,$$

$$N=[B, T]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2j.$$

Следовательно,

$$\tau=\frac{-i+k}{\sqrt{2}}, \quad \nu=-j, \quad \beta=\frac{i+k}{\sqrt{2}}.$$

Так как при $t=0$ имеем $x=1$, $y=1$, $z=0$, то:

$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$ — уравнения касательной;

$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{0}$ — уравнения главной нормали;

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$ — уравнения бинормали. ▶

Если пространственная кривая задана как пересечение двух поверхностей

$$\begin{cases} F(x, y, z)=0, \\ G(x, y, z)=0, \end{cases}$$

то удобнее вместо векторов $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{d^2r}{dt^2}$ рассматривать векторы $dr=(dx, dy, dz)$ и $d^2r=(d^2x, d^2y, d^2z)$, причем можно считать одну из переменных x, y, z независимой и ее второй дифференциал равным нулю.

Пример 6. Написать уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей кривой

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6, \\ x^2-y^2+z^2=4 \end{cases}$$

в ее точке $M(1, 1, 2)$.

◀ Дифференцируя данные уравнения и считая x независимой переменной, получим:

$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,$$
$$x\,dx-y\,dy+z\,dz=0$$

и

$$dx^2+dy^2+y\,d^2y+dz^2+z\,d^2z=0;$$
$$dx^2-dy^2-y\,d^2y+dz^2+z\,d^2z=0.$$

При $x=1$, $y=1$, $z=2$ имеем:

$$dy=0, \quad dz=-\frac{1}{2}dx, \qquad d^2y=0, \quad d^2z=-\frac{3}{8}dx^2.$$

Следовательно, $dr=\left(dx, 0, -\frac{1}{2}dx\right)$, $d^2r=\left(0, 0, -\frac{3}{8}dx^2\right)$.

Заменим эти векторы векторами, им коллинеарными, $(2, 0, -1)$ и

$(0, 0, -1)$, откуда

$$T=(2, 0, -1),$$

$$B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2j, \quad N=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2(-i-2k).$$

Отсюда находим:

$y-1=0$ — уравнение соприкасающейся плоскости;
$2x-z=0$ — уравнение нормальной плоскости;
$x+2z-5=0$ — уравнение спрямляющей плоскости. ▶

Найти основные единичные векторы τ, ν, β и составить уравнения касательной, главной нормали и бинормали данных кривых:

5.584. $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t$ при $t=0$.

5.585. $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$ при $t=\pi$.

5.586. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ при $t=1$.

5.587. $y=x$, $z=2x^2$ в точке $x=1$.

5.588. Написать уравнения плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой $x=t^2+1$, $y=\cos t$, $z=e^t$ в точке $(1, 1, 1)$.

5.589. Написать уравнения плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой $x=t/\sqrt{2}$, $y=t/\sqrt{2}$, $z=\ln\sin t$ при $t=\pi/2$.

5.590. Найти векторы τ, ν, β и написать уравнения всех ребер и плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой $x=(t+1)^2$, $y=t^3$, $z=\sqrt{t^2+1}$ в точке $(1, 0, 1)$.

5.591. Найти векторы τ, ν, β и написать уравнения всех ребер и плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ x+2y-z=2 \end{cases}$ в точке $(1, 2, 3)$.

Кривизна пространственной кривой определяется аналогично кривизне плоской кривой. Если кривая задана уравнением $r=r(s)$, то

$$K=\frac{1}{R}=\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|.$$

В случае общего параметрического задания кривой имеем

$$K=\frac{1}{R}=\frac{\left|\left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{dr}{dt}\right|^3}.$$

Кручением (*второй кривизной*) пространственной кривой в точке M называется число

$$\sigma=\frac{1}{\rho}=\lim_{N\to M}\frac{\theta}{\Delta s},$$

где θ — угол поворота бинормали, соответствующий дуге $\breve{MN}$. Величина ρ называется *радиусом кручения* или *радиусом второй кривизны*.

Если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, то

$$\sigma=\mp\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right|=\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\cdot\dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}}{\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right|^2},$$

где знак минус берется в том случае, когда векторы $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ и $\boldsymbol{\nu}$ имеют одинаковое направление, и знак плюс — в противоположном случае.

Если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, где t — произвольный параметр, то

$$\sigma=\frac{\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\cdot\dfrac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}}{\left|\left[\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]\right|^2}.$$

Пример 7. Найти кривизну и кручение кривой $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ в любой точке.

◀ Имеем

$$\boldsymbol{r}=(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t),$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(e^t(\cos t-\sin t),\ e^t(\sin t+\cos t),\ e^t),$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=(-2e^t\sin t,\ 2e^t\cos t,\ e^t),$$

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}=(-2e^t(\sin t+\cos t),\ 2e^t(\cos t-\sin t),\ e^t).$$

Отсюда

$$\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ e^t(\cos t-\sin t) & e^t(\sin t+\cos t) & e^t\\ -2e^t\sin t & 2e^t\cos t & e^t\end{vmatrix}=$$

$$=e^{2t}(\sin t-\cos t,\ -(\sin t+\cos t),\ 2),$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\cdot\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}=\begin{vmatrix} e^t(\cos t-\sin t) & e^t(\sin t+\cos t) & e^t\\ -2e^t\sin t & 2e^t\cos t & e^t\\ -2e^t(\sin t+\cos t) & 2e^t(\cos t-\sin t) & e^t\end{vmatrix}=2e^{3t}.$$

Следовательно,

$$K=\frac{e^{2t}\sqrt{(\sin t-\cos t)^2+(\sin t+\cos t)^2+4}}{e^{3t}\sqrt{((\sin t-\cos t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1)^3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t},$$

$$\sigma=\frac{2e^{3t}}{e^{4t}((\sin t-\cos t)^2+(\sin t+\cos t)^2+4)}=\frac{e^{-t}}{3}.\ ▶$$

Вычислить кривизну и кручение кривых:

5.592. $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$ в любой точке и при $t=0$.

5.593. $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ в любой точке и при $t=0$.

5.594. $x=3t-t^3$, $y=3t^2$, $z=3t+t^3$, в любой точке и при $t=1$.

5.595. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ в любой точке и при $t=1$.

5.596. $y=\frac{x^2}{2}$, $z=\frac{x^3}{3}$ при $x=1$.

5.597. $2x=y^2$, $z=x^2$ в любой точке и при $y=1$.

5.598*. Дано уравнение движения $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}t^3\boldsymbol{k}$. Определить ускорение $\boldsymbol{w}$ движения, тангенциальную w_τ и нормальную w_ν составляющие ускорения в любой момент t и при $t=1$.

6. Комплексные функции действительной переменной. Если каждому значению действительной переменной $t\in D\subset\mathbb{R}$ поставлено в соответствие определенное комплексное число $z=x+iy$, то $z(t)$ называется *комплексной функцией действительной переменной* t с областью определения D:

$$z=z(t)=x(t)+iy(t).$$

Задание комплексной функции $z=z(t)$ равносильно заданию двух действительных функций $x=x(t)$, $y=y(t)$, или заданию вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t))$.

Пример 8. Построить кривую, заданную уравнением $z(t)=e^{(\alpha+i\beta)t}$, $-\infty<t<+\infty$.

◀ Так как $z(t)=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$, то $|z(t)|=e^{\alpha t}$ и $\arg z(t)=\beta t$. Полагая $\varphi=\beta t$, находим, если $\beta\neq 0$, $t=\frac{\varphi}{\beta}$. Следовательно, $r=|z(t)|=e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$ $(-\infty<\varphi<+\infty)$, и мы получили уравнение логарифмической спирали (гл. 2, § 3, п. 5, а также рис. 13, слева), если $\alpha\beta\neq 0$. При $\alpha=0$ — окружность $r=1$, при $\beta=0$ — луч $\varphi=0$.

Производной комплексной функции $z(t)$ называется комплексная функция $z'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z(t,\ \Delta t)}{\Delta t}=x'(t)+iy'(t)$. На комплексные функции действительной переменной распространяются обычные правила дифференцирования (см. п. 1 § 1).

Пример 9. Доказать, что $(e^{\lambda t})'=\lambda e^{\lambda t}$, где $\lambda=\alpha+i\beta$ — произвольное комплексное число.

◀ Пусть $z(t)=e^{\lambda t}=e^{(\alpha+i\beta)t}$, тогда $x(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $y(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$. Отсюда находим:

$$x'(t)=\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t-\beta e^{\alpha t}\sin\beta t,$$
$$y'(t)=\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t+\beta e^{\alpha t}\cos\beta t.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}z'(t)=x'(t)+iy'(t)&=(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t-\beta e^{\alpha t}\sin\beta t)+\\&+i(\alpha e^{\alpha t}\sin\beta t+\beta e^{\alpha t}\cos\beta t)=\alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)+\\&+i\beta e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)=\alpha e^{(\alpha+i\beta)t}+i\beta e^{(\alpha+i\beta)t}=\\&=(\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t}=\lambda e^{\lambda t}.\ ▶\end{aligned}$$

Построить кривые, заданные уравнениями $z=z(t)$, и найти $z'(t)$:

5.599. $z=t^2+it,\ t\in(-\infty,\ +\infty)$.

5.600. $z=1-i+te^{i\frac{\pi}{4}},\ t\in(-\infty,\ +\infty)$.

5.601. $z=2e^{it},\ t\in[0,\ \pi]$.

5.602. $z=3e^{it}+e^{-it},\ t\in(-\infty,\ +\infty)$.

5.603. $z=(2+i)\,e^t+(2-i)\,e^{-t},\ t\in(-\infty,\ +\infty)$.

5.604. $z=t^2+it^4,\ t\in(-\infty,\ +\infty)$.

5.605. $z=t+i-ie^{-it},\ t\in[0,\ 2\pi]$.

5.606. $z=ae^{it}(1-it),\ a\in\mathbb{R},\ t\in(-\infty,\ +\infty)$.

5.607*. Известно, что $z=z(t)$ определяет закон движения точки на плоскости. Найти компоненты скорости и ускорения по направлению касательной к кривой $z=z(t)$ и перпендикулярному к нему.

5.608*. Точка z пробегает окружность $|z|=R$ с постоянной угловой скоростью, равной единице. Найти вектор скорости точки w, движущейся вместе с z по закону $w=f(z)$.

Пусть $D=\dfrac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, т. е. $Dz(t)=z'(t)$. Линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $p(D)=a_nD^n+\ldots+a_1D+a_0$ определяется следующим образом:

$$p(D)\,z(t)=a_nz^{(n)}(t)+\ldots+a_1z'(t)+a_0z(t).$$

5.609*. Доказать следующие свойства линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами:

а) $p(D)\,e^{\lambda t}=p(\lambda)\,e^{\lambda t}$;

б) $p(D)\,(e^{\lambda t}z(t))=e^{\lambda t}p(D+\lambda)\,z(t)$, где $z(t)$ — произвольная комплекснозначная функция, n раз дифференцируемая при любом $t\in(-\infty,\ +\infty)$.

Для заданных функций вычислить указанные линейные комбинации производных:

5.610. $x''(t)+3x'(t)+x(t)$, если $x(t)=te^{-t}\cos t$.

◄ Заметим, что $x(t)=\operatorname{Re}(te^{(-1+i)t})$. Поэтому $x''(t)+3x'(t)+x(t)=(D^2+3D+1)\,x(t)=\operatorname{Re}(D^2+3D+1)\,te^{(-1+i)t}$. Используя результат задачи 5.609б), находим:

$$(D^2+3D+1)\,te^{(-1+i)t}=e^{(-1+i)t}((D+i-1)^2+3(D+i-1)+1)\,t=$$
$$=e^{(-1+i)t}(D^2+2(i-1)\,D+(i-1)^2+3D+3(i-1)+1)\,t=$$
$$=e^{(-1+i)t}(D^2+(1+2i)\,D+(-2+i))\,t=e^{(-1+i)t}((1-2t)+i(2+t))=$$
$$=e^{-t}(((1-2t)\cos t-(2+t)\sin t)+i((1-2t)\sin t+(2+t)\cos t)).$$

Отсюда получаем:

$$x''(t)+3x'(t)+x(t)=\operatorname{Re}(D^2+3D+1)\,te^{(-1+i)t}=$$
$$=e^{-t}((1-2t)\cos t-(2+t)\sin t).$$ ►

5.611. $x'''(t)+46x(t)$; $x(t)=e^{2t}\cos 3t$.

5.612*. $x''(t)-x'(t)+\frac{5}{4}x(t)$; $x(t)=e^{t/2}\sin t$.
5.613. $x''(t)+2x'(t)+2x(t)$; $x(t)=e^{t}\sin 2t+e^{-t}\cos t$.
5.614. $x'''(t)-x(t)$; $x(t)=t^3\sin t$.
5.615. $x''(t)-2x'(t)+5x(t)$; $x(t)=e^{t}\sin 2t\sqrt{1+t^2}$.
5.616. $\frac{1}{2}x''(t)-x'(t)+x(t)$; $x(t)=(1+t^2)e^{t}\cos t$.

§ 6. Численные методы функции одной переменной

1. Численное решение уравнений. Корень $\xi\in(a, b)$ уравнения $f(x)=0$ *изолирован* на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке не содержится других корней указанного уравнения. Отрезок $[a, b]$ называется *отрезком изоляции корня*.

Метод хорд. Пусть на отрезке $[a, b]$ изоляции корня уравнения $f(x)=0$ выполняются условия:

а) функции $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны;

б) $f(a)\cdot f(b)<0$;

в) функции $f'(x)$ и $f''(x)$ не изменяют своего знака.

Определим числа x_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ равенствами

$$x_n=\begin{cases} x_{n-1}-\dfrac{(x_{n-1}-a)\,f(x_{n-1})}{f(x_{n-1})-f(a)}, & x_0=b, \text{ если } f(a)\cdot f(x_1)<0,\\ x_{n-1}-\dfrac{(b-x_{n-1})\,f(x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}, & x_0=a, \text{ если } f(a)\cdot f(x_1)\geqslant 0.\end{cases}$$

Тогда последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к корню ξ при $n\to\infty$, и для всех натуральных n выполняются неравенства

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m},$$

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{M-m}{m}|x_n-x_{n-1}|,$$

где $m=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$ и $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f'(x)|$.

Пример 1. Найти корни уравнения

$$x\cdot\operatorname{arctg}x-1=0$$

методом хорд с точностью до 0,0001.

◀ Построив графики функций $y=\operatorname{arctg}x$ и $y=1/x$, по расположению точек пересечения заключаем, что указанное уравнение имеет два корня ξ_1 и ξ_2, равных по абсолютной величине и различных по знаку. Найдем положительный корень ξ_1, выбрав отрезком изоляции этого корня отрезок $[1, \sqrt{3}]$. Для функции $f(x)=x\cdot\operatorname{arctg}x-1$ имеем

$$f'(x)=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{1+x^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1+x^2)^2}$$

и

$$f(1)\cdot f(\sqrt{3})=\left(\frac{\pi}{4}-1\right)\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-1\right)=-0,2146019\cdot 0,8137992<0,$$

поэтому условия а), б) и в) выполняются. Так как $f''(x) > 0$ при $x \in [1, \sqrt{3}]$, то $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, где

$$m = f'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = 1,2853981,$$

$$M = f'(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1,4802102,$$

и $\frac{M-m}{m} = 0,1515577$. Чтобы определить знак произведения $f(1) \cdot f(x_1)$, найдем x_1. Поскольку

$$x_1 = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1) f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1,1527608$$

и, следовательно, $f(1) \cdot f(x_1) > 0$, то числа x_n следует вычислять по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{(\sqrt{3} - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(\sqrt{3}) - f(x_{n-1})}.$$

Сведем вычисления в таблицу:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M-m}{m}(x_n - x_{n-1})$
1	1	—0,2146019	—0,1527608	1,1527608	0,0231520
2	1,1527608	—0,0129601	—0,0090807	1,1618415	0,0013762
3	1,1618415	—0,0006758	—0,0004730	1,1623145	0,0000716

Последний столбец определяет предельную абсолютную погрешность [1]. Таким образом, $\xi_1 = 1,1623 \pm 0,0001$ и $\xi_2 = -1,1623 \pm 0,0001$. ▶

Метод касательных. Пусть на отрезке $[a, b]$ изоляции корня ξ уравнения $f(x) = 0$ выполняются указанные выше условия а), б) и в) и числа x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) определяются равенством

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

причем

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{если } f(a) \cdot f(c) < 0, \\ b, & \text{если } f(a) \cdot f(c) > 0, \\ c, & \text{если } f(c) = 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad c = a - \frac{(b-a) f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Тогда последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к корню ξ при $n \to \infty$, и для всех натуральных n выполняются неравенства

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m} \quad \text{и} \quad |x_n - \xi| \leqslant \frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2,$$

[1] Здесь и во всех приведенных далее расчетных задачах промежуточные вычисления проводятся с таким числом десятичных знаков, которое обеспечивается используемой ЭВМ.

где

$$m = \min_{a<x<b} |f'(x)|, \quad M_1 = \max_{a<x<b} |f''(x)|.$$

Пример 2. Найти положительный корень уравнения $x \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$ методом касательных с точностью до 0,0001.

◄ Как и в предыдущем примере, отрезком изоляции является отрезок $[1, \sqrt{3}]$. Поскольку для функции $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - 1$ имеем $c = 1 - \frac{(\sqrt{3}-1) f(1)}{f(\sqrt{3}) - f(1)} = 1{,}1527608 > 0$ и $f(1) f(c) > 0$, то числа x_n вычисляем по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad x_0 = \sqrt{3}.$$

Функции $f'(x)$, $f''(x)$ и значение $m = 1{,}2853981$ найдены в примере 1. Далее, $M_1 = f''(1) = 0{,}25$, потому что $f'''(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^3} < 0$ на отрезке изоляции. Наконец, $\frac{M_1}{2m} = 0{,}0972461$.

Результаты вычислений сведем в таблицу:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	$-(x_n - x_{n-1})$	x_n	$\frac{M_1}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$
1	1,7320508	0,8137992	1,4802102	0,5497862	1,1822646	0,0534645
2	1,1822646	0,0270628	1,3617976	0,0198728	1,1623918	0,0000384

Следовательно, корень уравнения $\xi = 1{,}16239 \pm 0{,}00004$. ►

Убедиться в том, что уравнения не имеют действительных корней:

5.617. $2^x - x - \frac{1}{2} = 0$. **5.618.** $x^2 - \operatorname{arctg} x + 1 = 0$.

5.619. $(x^2 + 2x + 2)^2 = 0$. **5.620.** $\sqrt{2x-1} + \lg \frac{1}{x} = 0$.

5.621. $x^4 - x^2 + 1 = 0$.

5.622.** Корень ξ уравнения $f(x) = 0$ изолирован на отрезке $[a, b]$, функция $f(x)$ непрерывна и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Составить на фортране подпрограмму уменьшения отрезка изоляции в 2^n раз, используя последовательное деление отрезка пополам. Параметрами выбрать величины F, A, B, N, где F — идентификатор подпрограммы-функции для вычисления значений функции $f(x)$, A и B — концы исходного отрезка изоляции до вычислений и концы полученного отрезка изоляции после вычислений, N — показатель степени в выражении 2^n, характеризующем уменьшение отрезка изоляции.

5.623. Решить уравнение $x^3+x^2-3=0$ комбинированным методом, применяя метод хорд и метод касательных и сравнивая результаты.

◀ Построив графики функций $y=x^3$ и $y=3-x^2$, приходим к выводу, что указанное уравнение имеет один действительный корень ξ на отрезке [1, 2]. Уменьшим отрезок изоляции в 4 раза, используя метод половинного деления. Для $f(x)=x^3+x^2-3$ имеем $f(1)=-1<0$ и $f(2)=9>0$. Найдем $f(1{,}5)=\frac{21}{8}>0$, поэтому более узким отрезком изоляции является отрезок [1, 1,5]. Найдя $f(1{,}25)=0{,}515625>0$, получим отрезок [1, 1,25]. Так как

$$c=1-\frac{(1{,}25-1)f(1)}{f(1{,}25)-f(1)}=1{,}1649484>0 \quad \text{и} \quad f(1)f(c)>0,$$

то, применяя метод хорд, необходимо использовать формулу

$$\bar{x}_n=\bar{x}_{n-1}-\frac{(1{,}25-\bar{x}_{n-1})f(\bar{x}_{n-1})}{f(1{,}25)-f(\bar{x}_{n-1})} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

а, применяя метод касательных,— формулу

$$\tilde{x}_n=\tilde{x}_{n-1}-\frac{f(\tilde{x}_{n-1})}{f'(\tilde{x}_{n-1})} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\ \tilde{x}_0=1{,}25.$$

Результаты вычислений сведем в две таблицы:

а) для метода хорд:

n	$\bar{x}_{n-1}$	$f(\bar{x}_{n-1})$	$-(\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1})$	$\bar{x}_n$
1	1	−1	−0,1649484	1,1649484
2	1,1649484	−0,0619384	−0,0091209	1,1740693
3	1,1740693	−0,0031786	−0,0004651	1,1745344

б) для метода касательных:

n	$\tilde{x}_{n-1}$	$f(\tilde{x}_{n-1})$	$f'(\tilde{x}_{n-1})$	$-(\tilde{x}_n-\tilde{x}_{n-1})$	$\tilde{x}_n$
1	1,25	0,515625	7,1875	0,0717391	1,1782609
2	1,1782609	0,0240767	6,5214179	0,0036919	1,1745690

При вычислении методом хорд получили возрастающую последовательность $(\bar{x}_n)$ приближений корня ξ:

$$1<1{,}1649484<1{,}1740693<1{,}1745344<\ldots<\xi,$$

а при вычислении методом касательных — убывающую последовательность $(\tilde{x}_n)$:

$$\xi < \ldots < 1{,}1745690 < 1{,}1782609 < 1{,}25.$$

Совпадающие десятичные знаки членов обеих последовательностей являются точными для корня ξ. По заданной предельной абсолютной погрешности ε значение n, при котором достигается необходимая точность, находится из неравенства

$$|\bar{x}_n - \tilde{x}_n| < \varepsilon,$$

при этом $\xi = \frac{1}{2}(\bar{x}_n + \tilde{x}_n) \pm \varepsilon$. Таким образом,

$$\xi = 1{,}17455 \pm 0{,}00003. \blacktriangleright$$

Вычислить одним из указанных методов с точностью до 0,0001 действительные корни уравнений: а) методом хорд, б) методом касательных, в) комбинированным методом:

5.624. $x^3 + 2x - 8 = 0$.
5.625. $x^3 + x + 1 = 0$.
5.626. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$.
5.627. $x^3 + 2x - 30 = 0$.
5.628. $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$.
5.629. $x^3 - 2x - 5 = 0$.
5.630. $x^3 - 5x + 1 = 0$.
5.631. $2x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$.
5.632. $(x+1)^3 - x = 0$.
5.633. $x^4 - 2x - 2 = 0$.
5.634. $x^4 - 4x + 1 = 0$.
5.635. $x^5 + x + 1 = 0$.
5.636. $x = \sqrt[3]{5 - x}$.
5.637. $x = 2 + \sqrt[4]{x}$.
5.638. $x^3 + 60x - 80 = 0$.
5.639. $x^5 - x - 2 = 0$.
5.640. $x = 10 \lg x$.
5.641. $x = 2 - \lg x$.
5.642. $x^2 = -\ln x$.
5.643. $x^2 = \ln(x+1)$.
5.644. $4x = 2^x$.
5.645. $x^2 = e^x + 2$.
5.646. $x + \sin x - 1 = 0$.
5.647. $x - \cos x = 0$.
5.648. $x^2 = \cos x$.
5.649. $x = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$.
5.650. $\ln x = \operatorname{arctg} x$.
5.651. $x^2 + \ln x - 4 = 0$.
5.652. $x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - 1 = 0$.

5.653. Составить на фортране программу решения следующей задачи: найти методом хорд корни уравнения $e^{x-2} - x = 0$ с точностью до 0,0001.

◀ Программу следует представить как совокупность трех программных единиц: основной программы, подпрограммы-функции нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ методом хорд на отрезке изоляции корня $[a, b]$, подпрограммы-функции вычисления значений функции $f(x)$.

Подпрограмма-функция вычисления значений функции:

```
FUNCTION F(X)
F=EXP(X-2.)-X
RETURN
END
```

Подпрограмма-функция нахождения корня методом хорд. Параметры: F, A, B, S, EPS, F — имя подпрограммы-функции вычисления значений функции $f(x)$, A и B — концы отрезка изоляции корня, S — наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке изоляции, EPS — предельная абсолютная погрешность.

```
      FUNCTION CHORD(F,A,B,S,EPS)
      FA=F(A)
      FB=F(B)
      X=A-(B-A)*FA/(FB-FA)
      FX=F(X)
      IF(FA*FX.GT.0) GO TO 2
    1 X=X-(X-A)*FX/(FX-FA)
      FX=F(X)
      IF(ABS(FX)/S.GT.EPS) GO TO 1
      CHORD=X
      RETURN
    2 X=X-(B-X)*FX/(FB-FX)
      FX=F(X)
      IF(ABS(FX)/S.GT.EPS) GO TO 2
      CHORD=X
      RETURN
      END
```

Операторы FA=F(A), FB=F(B) и FX=F(X) используются в указанной подпрограмме для того, чтобы избежать лишних вычислений значений функции $f(x)$; при исполнении программы запись F(X) влечет обращение к подпрограмме-функции и вычисление соответствующего значения этой функции.

Основная программа. Анализируя поведение функции $f(x)=e^{x-2}-x$ и ее производной $f'(x)=e^{x-2}-1$, заключаем, что уравнение $e^{x-2}-x=0$ имеет два корня на отрезках [0, 0,3] и [3, 3,2]. Поскольку $f''(x)=e^{x-2}>0$, то $f'(x)$ возрастает, и выполняются неравенства $-0{,}864665=e^{-2}-1\leqslant f'(x)\leqslant e^{-1,7}-1=-0{,}817316$ для $x\in[0,\ 0{,}3]$, $1{,}718281=e-1\leqslant f'(x)\leqslant e^{1,2}-1=2{,}320116$ для $x\in[3,\ 3{,}2]$. Поэтому $|f'(x)|>0{,}8173$ в первом случае и $|f'(x)|>1{,}7182$ во втором. Эти числа вместе с концами отрезков изоляции и заданной предельной абсолютной погрешностью определяют значения параметров, т. е., как говорят, являются фактическими параметрами для подпрограммы CHORD. Основная программа имеет вид:

```
      EXTERNAL F
      ROOT1=CHORD(F,0.0,0.3,0.8173,0.0001)
      ROOT2=CHORD(F,3.,3.2,1.7182,0.0001)
      WRITE (3,1) ROOT1, ROOT2
    1 FORMAT (' КОРНИ УРАВНЕНИЯ',F6.4,' И ',F6.4)
      STOP
      END
```

▶

Составить на фортране подпрограммы-функции для нахождения указанным методом корня уравнения $f(x)=0$ на отрезке изоляции $[a,\ b]$. Параметры: F, A, B, S, EPS; F — имя подпрограммы-функции вычисления значений функции $f(x)$, A и B — концы отрезка изоляции корня, S — параметр, определенный ниже, EPS — предельная абсолютная погрешность. Параметр FD — имя подпрограммы-функции вычисления $f'(x)$.

5.654. Метод хорд. Параметры: F, A, B, S, EPS, $S = \frac{M-m}{m}$, где $M = \max|f'(x)|$ и $m = \min|f'(x)|$ для $x \in [a, b]$.

5.655. Метод касательных. Параметры: F, FD, A, B, S, EPS, $S = \frac{M_1}{2m}$, где $M_1 = \max|f''(x)|$ и $m = \min|f'(x)|$ для $x \in [a, b]$.

5.656. Комбинированный метод. Параметры: F, FD, A, B, EPS.

5.657. Для уравнения $f(x) = 0$ одной из задач 5.624 — 5.652 составить на фортране подпрограмму-функцию вычисления значений функции $f(x)$.

Составить на фортране программы решения одной из задач 5.624—5.652 указанным методом:

5.658. Метод хорд. Использовать решения задач 5.654 и 5.667.

5.659. Метод касательных. Использовать решения задач 5.655 и 5.657.

5.670. Комбинированный метод. Использовать решения задач 5.656 и 5.657.

2. Интерполирование функций. Пусть функция $y = f(x)$ в *узлах интерполяции* $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, принимает значения $f(x_k) = y_k$, тогда *разделенные разности* определяются равенствами:

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_k - y_{k+1}}{x_k - x_{k+1}},$$

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{\Delta y(x_k, x_{k+1}) - \Delta y(x_{k+1}, x_{k+2})}{x_k - x_{k+2}},$$

. . . .

$$\Delta y(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}, x_{k+l}) = \frac{\Delta y(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l-1}) - \Delta y(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l})}{x_k - x_{k+l}} \quad (k + l \leqslant n),$$

а *интерполяционный полином* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет вид

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) \Delta y(x_0, x_1, \ldots, x_k); \quad (1)$$

при этом в случае существования непрерывной производной $f^{(n+1)}(x)$ на $[a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|, \quad (2)$$

где

$$M_{n+1} = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Пример 3. Найти $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-4}, построив для функции $f(x) = \sqrt{x}$ интерполяционный полином на отрезке $[1,69, 2,25]$.

◀ Выберем $n=2$ и узлы интерполяции $x_0=1{,}69$, $x_1=1{,}96$, $x_2=2{,}25$. Оценим точность по формуле (2). Так как $f^{(IV)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-7/2}<0$, функция $f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$ убывает на отрезке $I=[1{,}69,\ 2{,}25]$; поэтому

$$M_3=\max_{x\in I} f'''(x)=f'''(1{,}69)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(1{,}69)^2\cdot 1{,}3}=0{,}1009984.$$

Тогда для разности $r_2(x)=f(x)-p_2(x)$ получим неравенство

$$|r_2(x)|<\frac{M_3}{3!}|(x-1{,}69)(x-1{,}96)(x-2{,}25)|,$$

откуда следует выполнение неравенства

$$|r_2(x)|<\frac{0{,}1009984}{6}0{,}31\cdot 0{,}04\cdot 0{,}25=0{,}0000521$$

и достижение заданной точности.

Найдем коэффициенты интерполяционного полинома, вычислив разделенные разности и поместив результаты вычислений в таблицу:

k	x_k	y_k	$\Delta y(x_k,\ x_{k+1})$	$\Delta y(x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+2})$
0	1,69	1,3	$\frac{1{,}3-1{,}4}{1{,}69-1{,}96}=0{,}3703703$	$\frac{0{,}3703703-0{,}3448275}{1{,}69-2{,}25}=$ $=-0{,}0456121$
1	1,96	1,4	$\frac{1{,}4-1{,}5}{1{,}96-2{,}25}=0{,}3448275$	
2	2,25	1,5		

Полином имеет вид

$$p_2(x)=1{,}3+0{,}3703703(x-1{,}69)-0{,}0456121(x-1{,}69)(x-1{,}96),$$
$$p_2(2)=1{,}3+0{,}3703703\cdot 0{,}31-0{,}0456121\cdot 0{,}31\cdot 0{,}04=$$
$$=1{,}3+0{,}1148147-0{,}0005655=1{,}4142492.$$

Отсюда

$$\sqrt{2}=1{,}4142\pm 0{,}0001.\ ▶$$

Конечные разности $\Delta^k y_i$ $(k=1,\ 2,\ \ldots;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ определяются равенствами:

$$\Delta^1 y_i=\Delta y_i=y_{i+1}-y_i,$$
$$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta^k y_i=\Delta^{k-1}y_{i+1}-\Delta^{k-1}y_i.$$

Для *равноотстоящих узлов* $x_k=x_0+kh$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ с шагом интерполяции $h>0$ интерполяционный полином (1) приобретает вид

$$p_n(x)=y_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}\Delta^k y_0, \qquad (3)$$

где $t=\dfrac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^k y_0$ — конечные разности k-го порядка, а неравенство (2) — вид

$$|f(x)-p_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1} \left|\prod_{k=0}^{n} (t-k)\right|. \qquad (4)$$

Пример 4. Функция $y=f(x)$ задана таблицей

x	1,0	1,1	1,2	1,3
y	2,7854	2,8330	2,8761	2,9151

Определить, каким аналитическим выражением можно представить указанную функцию на отрезке [1, 1,3], и вычислить $f(1,15)$.

◀ Аналитическое выражение, позволяющее вычислить значения функции $f(x)$, не данные в таблице, будем искать в виде полинома, значения которого совпадают с заданными значениями функции, т. е. в виде полинома $p_3(x)$, удовлетворяющего соотношениям $p_3(x_k)=f(x_k)$ при $k=0$, 1, 2, 3. Единственным полиномом с такими свойствами является интерполяционный полином $p_3(x)$, определяемый равенством (3). Найдем конечные разности, сведя вычисления в следующую таблицу:

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
0	1	2,7854	0,0476	−0,0045	0,0004
1	1,1	2,8330	0,0431	−0,0041	
2	1,2	2,8761	0,0390		
3	1,3	2,9151			

Применяя формулу (3) при $h=0,1$, $n=3$ и $x_0=1$, получим

$$p_3(x)=2,7854+0,476(x-1)-0,225(x-1)(x-1,1)+$$
$$+0,0666(x-1)(x-1,1)(x-1,2).$$

Тогда

$$p_3(1,15)=2,7854+0,476\cdot 0,15-0,225\cdot 0,15\cdot 0,05+$$
$$+0,0666\cdot 0,15\cdot 0,05(-0,05)=2,7854+0,0714-0,0017+0,0000=2,8551.$$

Для вычисления $f(1,15)$ заметим, что $f(1,15)=p_3(1,15)$, и предельной абсолютной погрешностью равенства $f(x)=p_n(x)$, если производная $f^{(n+1)}(x)$ неизвестна, считается модуль последнего из слагаемых, входящих в сумму (3). Поэтому $f(1,15)=2,8551$. ▶

5.671*. Доказать равенство

$$\Delta^k y_l=\sum_{\nu=0}^{k} C_k^{\nu}(-1)^{\nu}\cdot y_{k+l-\nu},$$

где $C_k^{\nu}=\dfrac{k!}{\nu!\,(k-\nu)!}$, $0!=1$.

5.672*. Доказать равенство

$$\Delta y(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{y_\nu}{w'_k(x_\nu)},$$

где $w_k = \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)$.

5.673. Для функции $f(x) = \cos\frac{\pi}{12}x$ построить интерполяционный полином, выбрав узлы $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Вычислить $\cos\frac{\pi}{10}$.

5.674*. Для функции $f(x) = \ln x$ построить интерполяционный полином, выбрав узлы $x_0 = 9$, $x_1 = 10$, $x_2 = 12$, $x_3 = 15$ и используя значения $\ln 2 = 0{,}693147$, $\ln 3 = 1{,}098613$ и $\ln 5 = 1{,}609438$. Вычислить $\ln 11$.

Функция $y = f(x)$ задана таблицей. Найти значения этой функции при указанных, не входящих в таблицу значениях x_1 и x_2 аргумента x.

5.675.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y	1,042	1,061	1,087	1,119	1,160	1,212	1,274	1,350

$x_1 = 1{,}26$, $x_2 = 1{,}58$.

5.676.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y	1,958	2,107	2,268	2,443	2,632	2,841	3,071	3,324

$x_1 = 1{,}89$, $x_2 = 2{,}43$.

5.677.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
y	0,742	0,789	0,835	0,880	0,924	0,967	1,008	1,046

$x_1 = 0{,}83$, $x_2 = 0{,}97$.

5.678.

x	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
y	1,2322	1,2097	1,1789	1,1389	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 1{,}74$, $x_2 = 1{,}97$.

5.679.

x	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00	3,05
y	1,5827	1,4865	1,3721	1,2383	1,0838	0,9071	0,7069	0,4817

$x_1 = 2{,}72$, $x_2 = 2{,}93$.

5.680.

x	10	15	20	25	30	35	40	45
y	0,985	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819	0,766	0,707

$x_1 = 23$, $x_2 = 41$.

5.681.

x	1,1	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6
y	1,029	1,389	1,649	1,800	1,852	1,822	1,739	1,632

$x_1 = 1{,}3$, $x_2 = 4{,}0$.

5.682.

x	0,13	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48
y	0,1296	0,1790	0,2280	0,2764	0,3242	0,3712	0,4173	0,4626

$x_1 = 0{,}20$, $x_2 = 0{,}41$.

5.683.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
y	0,1198	0,0897	0,0660	0,0477	0,0339	0,0236	0,0162	0,0109

$x_1 = 1{,}25$, $x_2 = 1{,}76$.

5.684.

x	50	55	60	65	70	75	80	85
y	0,285	0,319	0,223	0,042	−0,148	−0,273	−0,283	−0,178

$x_1 = 58$, $x_2 = 79$.

5.685. Вычислить значения *интегрального синуса* $\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ при $x = 0{,}26$ и при $x = 0{,}45$, используя таблицу его значений:

x	0,17	0,22	0,27	0,32	0,37	0,42	0,47	0,52
$\mathrm{Si}(x)$	0,16973	0,21941	0,26891	0,31819	0,36720	0,41591	0,46427	0,51225

5.686. Вычислить значения *интеграла вероятностей* $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ при $x=0{,}27$ и при $x=0{,}58$, используя таблицу его значений:

x	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75
$\Phi(x)$	0,05637	0,16800	0,27633	0,37938	0,47548	0,56332	0,64203	0,71116

5.687. Применяя интерполирование, решить уравнение

$$x\cdot\ln x-1=0.$$

◀ На отрезке $I=[1{,}6,\ 1{,}9]$ изоляции корня для функции $y=x\ln x-1$ имеем:

x	1,6	1,7	1,8	1,9
y	—0,2479952	—0,0979324	0,0580148	0,2195226

Функция $y=x\ln x-1$ на отрезке I возрастает, поскольку $y'=\ln x+1>0$ при $x\in I$. Следовательно, существует обратная функция $x=\varphi(y)$, для которой, считая теперь y аргументом и x значением функции, построим интерполяционный полином $x_3(y)$. Данный прием называется *обратной интерполяцией*. Поместив результаты вычислений в таблицу, получим:

k	y	x	$\Delta x(y_k, y_{k+1})$	$\Delta x(y_k, y_{k+1}, y_{k+2})$	$\Delta x(y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, y_{k+3})$
0	—0,2479952	1,6			
1	—0,0979324	1,7	0,6663876	—0,0821705	0,0270049
2	0,0580148	1,8	0,6412426	—0,0695452	
3	0,2195226	1,9	0,6191651		

Отсюда искомый полином имеет вид

$$x_3(y)=1{,}6+0{,}6663876\,(y+0{,}2479952)-\\ -0{,}0821705\,(y+0{,}2479952)\,(y+0{,}0979324)+\\ +0{,}0270049\,(y+0{,}2479952)\,(y+0{,}0979324)\,(y-0{,}0580148).$$

Для нахождения корня нужно положить $y=0$. Получаем

$$x_3(0)=1{,}6+0{,}1652609-0{,}0019956-0{,}000038=1{,}7632273.$$

Следовательно, корень равен $1{,}76323\pm0{,}00004$, где предельная абсолютная погрешность полагается равной абсолютной величине последнего слагаемого в выражении для $x_3(0)$. ▶

5.688. Пользуясь таблицей значений функции $y=f(x)$, найти значение x_0, при котором $f(x_0)=0{,}569$:

x	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85
y	−1,125	−0,926	−0,704	−0,458	−0,187	0,109	0,432	0,782

5.689. Пользуясь таблицей значений функции $y=f(x)$, найти значение x_0, при котором $f(x_0)=4{,}498$:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	2,431	2,928	3,497	4,144	4,875	5,696

5.690. Используя таблицу, методом обратного интерполирования решить уравнение $\operatorname{sh} x=4{,}9370$:

x	2	2,2	2,4	2,6
y	3,6269	4,4571	5,4662	9,6947

5.691. Используя таблицу, методом обратного интерполирования решить уравнение $\operatorname{tg} x=1{,}767$:

x	60°	61°	62°
y	1,732	1,804	1,881

Составить на фортране указанные подпрограммы:

5.692. Подпрограмма вычисления разделенных разностей $\Delta y(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$, $\Delta y(x_1)=y(x_1)$. Параметры: X, Y, N, где N — число элементов массивов X и Y, содержащих соответственно значения аргумента и значения функции. Результат вычислений содержится в массиве Y.

5.693*. Подпрограмма вычисления конечных разностей $\Delta^k y_1$, $k=1, 2, \ldots, n-1$. Параметры Y и N, где Y — массив, содержащий N элементов — значения функции при входе и конечные разности при выходе из подпрограммы.

5.694*. Подпрограмма-функция вычисления значений интерполяционного полинома для функции, заданной таблично. Параметры: X, Y, N, KEY, ARG, где X — массив значений аргумента, Y — массив значений функции, если KEY $=0$, и массив разделенных разностей, если KEY $\neq 0$, N — размерность массивов X и Y, ARG — значение аргумента полинома.

5.695. Подпрограмма вычисления значений интерполяционного полинома функции, заданной таблично. Параметры: X, Y, N, KEY, ARG, P, EPS, где X — массив значений аргумента, Y — массив значений функции, если KEY $=0$, и массив разделенных разностей, если KEY $\neq 0$, N — размерность массивов X и Y, ARG — значение аргумента полинома, P — значение полинома, EPS — модуль последнего слагаемого, входящего в интерполяционный полином.

5.696. Подпрограмма-функция вычисления значений интерполяционного полинома функции, заданной таблично, при равноотстоящих узлах интерполирования. Параметры: X, H, Y, N, KEY, ARG, где X — начальный узел интерполирования, H — шаг, Y — массив значений функции, если KEY = 0, и массив конечных разностей с соответствующими коэффициентами, если KEY $\neq$ 0, N — величина массива, ARG — значение аргумента полинома.

5.697. Используя подпрограмму-функцию, полученную в задаче 5.696, решить с помощью ЭВМ одну из задач 5.675—5.686.

5.698. Используя подпрограмму-функцию, полученную в задаче 5.694, решить с помощью ЭВМ одну из задач 5.687—5.691.

5.699. Используя подпрограмму, полученную в задаче 5.695, решить с помощью ЭВМ одну из задач 5.688, 5.689.

3. Численное дифференцирование. Формулы численного дифференцирования получаются в результате дифференцирования интерполяционных формул:

$$f'(x) \approx p_n'(x) = \Delta y(x_0, x_1) + ((x-x_0)+(x-x_1))\,\Delta y(x_0, x_1, x_2) + \\ + ((x-x_0)(x-x_1)+(x-x_0)(x-x_2) + \\ + (x-x_1)(x-x_2))\,\Delta y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots,$$

при этом погрешность приближенного равенства $f'(x) = p_n'(x)$ равна производной от погрешности $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

В случае равноотстоящих узлов $x_k = x_{k-1} + h$ $(k = 1, \ldots, n)$, $x_k \in [a, b]$ и $f(x_k) = y_k$ справедливы соотношения

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_0 + \right. \\ \left. + \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right), \tag{5}$$

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2-18t+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right), \tag{6}$$

где $t = \frac{1}{h}(x - x_0)$. Формулы (5) и (6) содержат соответственно по n и $n-1$ слагаемому.

Пример 5. Материальная точка M движется прямолинейно. Закон движения $s = f(\tau)$ представлен с помощью таблицы (τ — время в секундах, s — путь в метрах):

τ	0	1	2	3	4	5	6
s	0	2	10	30	68	130	222

Найти скорость v и ускорение w точки M в момент времени $\tau=3{,}5$.

◄ Составляем таблицу конечных разностей функции $s=f(\tau)$:

τ	s	Δs	$\Delta^2 s$	$\Delta^3 s$	$\Delta^4 s$
0	0	2	6	6	0
1	2	8	12	6	0
2	10	20	18	6	0
3	30	38	24	6	
4	68	62	30		
5	130	92			
6	222				

Принимая за начальный момент времени момент $\tau=3$, ближайший к $\tau=3{,}5$, будем иметь $t=\frac{3{,}5-3}{1}=0{,}5$. Применяя формулы (5) и (6), получаем:

$$v=f'(3{,}5)=\frac{1}{1}\left(38+\frac{2\cdot 0{,}5-1}{2}\,24+\frac{3\cdot(0{,}5)^2-6\cdot 0{,}5+2}{6}\cdot 6\right)=$$
$$=37{,}75\ (\text{м/с}),$$

$$w=f''(3{,}5)=\frac{1}{1^2}\left(24+(0{,}5-1)\cdot 6+\frac{6\cdot(0{,}5)^2-18\cdot 0{,}5+11}{12}\cdot 0\right)=$$
$$=21\ (\text{м/с}^2).\ ►$$

Функция $f(x)$ задана таблицей. Вычислить значения производной $f'(x)$ в указанных двух точках x_1 и x_2!

5.700.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x)$	1,44013	1,54722	1,67302	1,81973	1,98970	2,18547	2,40978	2,66557

$x_1=2{,}03,\ x_2=2{,}22.$

5.701.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$f(x)$	1,0083	1,1134	1,2208	1,3310	1,4449	1,5634	1,6876	1,8186

$x_1=1,14,\ x_2=1,42.$

5.702.

x	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$f(x)$	3,92847	4,41016	4,93838	5,51744	6,15213	6,84782	7,61045	8,44671

$x_1=3,02,\ x_2=3,31.$

5.703.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
$f(x)$	0,2803	0,3186	0,3592	0,4021	0,4472	0,4945	0,5438	0,5952

$x_1=0,82,\ x_2=1,03.$

5.704.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$	0,8802	0,9103	0,9340	0,9523	0,9661	0,9764	0,9838	0,9891

$x_1=1,34,\ x_2=1,65.$

Вычислить значения $f'(x)$ и $f''(x)$ в указанной точке:

5.705.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	5	21	55	113	201

$x=2.$

5.706.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	19	85	261	631

$x=2{,}5$.

Составить на фортране указанные подпрограммы:

5.707*. Подпрограмма-функция вычисления значений первой производной полинома $w_n(t)=\prod_{k=0}^{n}(t-k)$. Параметры: N, T.

5.708*. Подпрограмма-функция вычисления значений второй производной полинома $w_n(t)=\prod_{k=0}^{n}(t-k)$. Параметры: N, T.

5.709. Подпрограмма-функция вычисления значений первой производной интерполяционного полинома

$$p_n(x)=y_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{k!}\Delta^k y_0,\quad t=\frac{x-x_0}{h}.$$

Параметры: X, H, Y, N, KEY, ARG, где X — начальный узел интерполирования, Y — массив значений функции при KEY $=0$ и массив, содержащий величины y_0, $\frac{1}{k!}\Delta^k y_0$ ($k=1, \ldots, n$) при KEY $\neq 0$, ARG — значение аргумента, при котором вычисляется производная, N есть $n+1$.

5.710. Подпрограмма-функция вычисления значений второй производной интерполяционного полинома $p_n(x)$. Параметры те же, что в задаче 5.709.

5.711. Используя подпрограмму-функцию, составленную в задаче 5.709, написать на фортране программу решения одной из задач 5.700—5.704.

5.712. Используя подпрограммы-функции, составленные при решении задач 5.709 и 5.710, написать на фортране программу решения одной из задач 5.705, 5.706.

Глава 6

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Основные методы вычисления неопределенного интеграла

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X, если $F'(x)=f(x)$ для всех $x \in X$. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x)$ является первообразной той же функции в том и только в том случае, когда $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — некоторая постоянная. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Таким образом, по определению

$$\int f(x)\,dx=\{F(x)+C\}, \tag{1}$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а постоянная C принимает действительные значения.

В силу установившейся традиции равенство (1) записывается без явного обозначения множества справа, т. е. в виде

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

при этом C называют произвольной постоянной.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x)$.

2. $\int f'(x)\,dx=f(x)+C$.

3. $\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx,\ a\neq 0$.

4. $\int (f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx$.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^n\,dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

3. $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,\ a\neq 1);\qquad \int e^x\,dx=e^x+C$.

4. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$.

5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C$.

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad (a \neq 0)$.

11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \qquad (a \neq 0)$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad |x| > |a| > 0$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \qquad (a \neq 0)$.

15. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

16. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Найти первообразные следующих функций:

6.1. $2x^7$. **6.2.** $4\sqrt[3]{x}$. **6.3.** $\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}$.

6.4. $\frac{x^3 + 5x^2 - 1}{x}$. **6.5.** $\frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}$. **6.6.** $1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$.

6.7. $\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$. **6.8.** e^{2-3x}. **6.9.** $\frac{1}{\sqrt[3]{5^x}}$.

6.10. $\frac{1}{\cos^2 4x}$. **6.11.** $\frac{x^3+1}{x-1}$. **6.12.** $1 - 8\sin^2 2x\cos^2 2x$.

6.13. $\left(\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)^2$.

6.14. $\cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x)$.

Отыскание неопределенного интеграла с помощью таблицы основных интегралов и тождественных преобразований называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2-x^4}$.

◀ $$\int \frac{dx}{x^2-x^4}=\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}=\int \frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)}dx=$$
$$=\int \frac{dx}{x^2}+\int \frac{dx}{1-x^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$ ▶

Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

6.15. $\int \left(3x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx.$ **6.16.** $\int \frac{2x+3}{x^4}dx.$

6.17. $\int \sqrt{mx}\,dx.$ **6.18.** $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$

6.19. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx.$

6.20. $\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}dx.$ **6.21.** $\int \frac{x^3+2}{x}dx.$

6.22. $\int 2^x e^x\,dx.$ **6.23.** $\int 2^x(1+3x^2\cdot 2^{-x})\,dx.$

6.24. $\int (2x+3\cos x)\,dx.$ **6.25.** $\int \frac{2-\sin x}{\sin^2 x}dx.$

6.26. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx.$ **6.27.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx.$

6.28. $\int \sin^2\frac{x}{2}\,dx.$

6.29*. а) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; б) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx.$

6.30. $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}.$ **6.31.** $\int (\arcsin x+\arccos x)dx.$

6.32. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$

6.33. $\int \frac{dx}{x^2+4}.$ **6.34.** $\int \frac{dx}{5-x^2}.$ **6.35.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$

6.36. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}dx.$ **6.37.** $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx.$

6.38. $\int (x+a)(x+b)\,dx.$ **6.39.** $\int (a^{1/3}+x^{1/3})^3\,dx.$

6.40. $\int \frac{\cos^2 x+3\cos x-2}{\cos^2 x}dx.$

6.41. а) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; б) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx.$

6.42. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}.$ **6.43.** $\int \frac{x^2-9}{x^2-8}dx.$

2. Метод замены переменной. Существуют следующие два варианта этого метода.

а) Метод подведения под знак дифференциала. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Предположим, что существуют дифференцируемая функция $u=\varphi(x)$ и функция $g(u)$ такие, что подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ может быть записано в виде

$$f(x)\,dx=g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=g(u)\,du$$

(указанное преобразование называется подведением $u=\varphi(x)$ под знак дифференциала). Тогда

$$\int f(x)\,dx=\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)},$$

т. е. вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)\,du$ (который может оказаться проще исходного) и последующей подстановке $u=\varphi(x)$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

◀ Имеем:

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx=\int \sin^3 x\,d(\sin x)=\int u^3du=\frac{u^4}{4}\Big|_{u=\sin x}+C=$$
$$=\frac{\sin^4 x}{4}+C. \ ▶$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$.

◀ Имеем:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx=\int \frac{d(x^2+x-3)}{x^2+x-3}=\int \frac{du}{u}=$$
$$=\ln|u|\,\Big|_{u=x^2+x-3}+C=\ln|x^2+x-3|+C. \ ▶$$

Операция подведения функции $\varphi(x)$ под знак дифференциала эквивалентна замене переменной x на новую переменную $u=\varphi(x)$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$.

◀ Произведем замену переменной по формуле

$$u=3x+1.$$

Тогда $du=3dx$, т. е. $dx=\frac{1}{3}du$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{2/3}}=u^{1/3}\Big|_{u=3x+1}+C=\sqrt[3]{3x+1}+C.$$

Выполненное преобразование эквивалентно подведению под знак дифференциала функции $u=3x+1$. ▶

Вычислить интегралы с помощью подходящей замены:

6.44. $\int \sqrt{3+x}\,dx$. **6.45.** $\int (3-4\sin x)^{1/3}\cos x\,dx$.

6.46. $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x \, dx$. 6.47. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^4 x} dx$.

6.48. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$. 6.49. $\int \frac{dx}{a+bx}$.

6.50. $\int \frac{\sec^2 x}{a-b \operatorname{tg} x} dx$. 6.51. $\int \frac{\cos \frac{x}{\sqrt{2}}}{2-3\sin \frac{x}{\sqrt{2}}} dx$.

6.52. $\int \operatorname{ctg} x \, dx$. 6.53. $\int 3^{4x} dx$.

6.54. $\int \cos(ax+b) \, dx$. 6.55. $\int \sin(\ln x) \frac{dx}{x}$.

6.56. $\int \sin \sqrt{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 6.57. $\int \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

6.58. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 3x}$. 6.59. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} dx$.

6.60. $\int x \cdot 5^{-x^2} dx$. 6.61. $\int \frac{dx}{1-4x^2}$.

6.62. $\int \frac{e^{-ax}}{1+e^{-2ax}} dx$. 6.63. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}}$.

6.64. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$. 6.65. $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$.

6.66. $\int \frac{x^3 \, dx}{x^8+1}$. 6.67. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

6.68. $\int \frac{dx}{a^2+b^2 x}$. 6.69. $\int \frac{\sin ax}{\cos^3 ax} dx$.

6.70. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x \, dx$. 6.71. $\int \frac{e^x}{(7-e^x)^2} dx$.

6.72. $\int \operatorname{tg} x \, dx$. 6.73. $\int \operatorname{cth} 4x \, dx$.

6.74. $\int \frac{a^{1/x}}{x^2} dx$. 6.75. $\int \frac{x \, dx}{\operatorname{ch}^2 (x^2+1)}$.

6.76. $\int \frac{dx}{(a-b)x^2-(a+b)} \quad (0 < b < a)$.

6.77. $\int \frac{dx}{4x^2+7}$. 6.78. $\int \frac{x \, dx}{4x^2+7}$.

6.79. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^6+1}}$. 6.80. $\int \frac{a^x}{\sqrt{a^{2x}-1}} dx$.

Применяя различные приемы, найти неопределенные интегралы.

6.81*. $\int \frac{x-1}{(x+2)^2} dx$. 6.82. $\int \frac{x^2}{3+x^2} dx$.

6.83. $\int \frac{x^2-2x+3}{x^2-4}\,dx$. 6.84. $\int \frac{x\,dx}{a^2x^4-b^2}$.

6.85. $\int \frac{x^3}{9-4x^8}\,dx$. 6.86. $\int \frac{x^4+1}{x^5+5x-8}\,dx$.

6.87. $\int x^3\sqrt[4]{5x^4-3}\,dx$. 6.88. $\int \left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

6.89. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$. 6.90. $\int \frac{a^2+\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a^2+b^2x^2}\,dx$.

6.91. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{a^x}}$. 6.92. $\int e^x\sqrt[3]{4+e^x}\,dx$.

6.93. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx$. 6.94*. $\int \frac{dx}{2^x+1}$.

6.95. $\int \frac{e^{\arcsin x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

6.96. $\int \frac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$. 6.97. $\int \sqrt{3-\operatorname{ch} x}\,\operatorname{sh} x\,dx$.

6.98. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$. 6.99. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$.

6.100*. $\int \sin^2 x\,dx$. 6.101*. $\int \cos^2 x\,dx$.

6.102. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{\sqrt{2}}}$. 6.103. $\int (\sin ax+\cos ax)^2\,dx$.

6.104. $\int \frac{x^2}{\cos(x^3)}\,dx$. 6.105. $\int \frac{(1+\cos 2x)^3}{\cos 2x}\,dx$.

6.106. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^2 x}}\,dx$. 6.107. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^4 x+3}}\,dx$.

6.108*. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$. 6.109. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg}\sqrt{3}x}$.

6.110. $\int \operatorname{th} ax\,dx$. 6.111. $\int \operatorname{tg}^2(ax+b)\,dx$.

6.112. $\int x^2\operatorname{ctg}^2(x^3-3)\,dx$.

6.113. $\int e^{\sec x}\operatorname{tg} x\sec x\,dx$.

б) Метод подстановки. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ определена на некотором множестве X. Введем новую переменную u формулой

$$x=\varphi(u)\colon\ U\longrightarrow X,$$

где функция $\varphi(u)$ дифференцируема на некотором множестве U и осуществляет взаимно однозначное отображение U на X, т. е. имеет обратную

$$u=\varphi^{-1}(x)\colon X \longrightarrow U.$$

Подставив $x=\varphi(u)$ в исходное подынтегральное выражение, получаем

$$f(x)\,dx=f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du=g(u)\,du.$$

Далее, справедливо равенство

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)}=\int g(u)\,du\Big|_{u=\varphi^{-1}(x)},$$

т. е. вычисление интеграла $\int f(x)\,dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)\,du$ (который может оказаться проще исходного) и последующей подстановке $u=\varphi^{-1}(x)$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

◀ В рассматриваемом случае область определения подынтегральной функции $X=[0, +\infty)$. Произведем подстановку

$$x=\varphi(u)=u^2,\quad u\in[0, +\infty).$$

Тогда $dx=2u\,du$, $u=\varphi^{-1}(x)=\sqrt{x}$, откуда

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx=2\int \frac{u^3+u}{u+1}\,du=2\int (u^2-u+2)\,du-4\int \frac{du}{u+1}=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{2}u^2+2u\right)-4\ln(u+1)+C\,\Big|_{u=\sqrt{x}}=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x+2x^{1/2}\right)-4\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C. \ ▶$$

Применяя указанные подстановки, найти интегралы:

6.114. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$, $x=(1-t^2)^{1/3}$.

6.115. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$, $x=\frac{2}{t}$.

6.116. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, $x=t^2$.

6.117. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$, $x=\ln t$.

Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

6.118. $\int x(5x-1)^{19}\,dx$. **6.119.** $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$.

6.120. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$. **6.121.** $\int \frac{x}{(3-x)^7}\,dx$.

6.122. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$. **6.123.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

3. Метод интегрирования по частям. Если $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx,$$

или в краткой записи

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (2)$$

Эта формула используется в тех случаях, когда подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ можно так представить в виде $u\,dv$, что стоящий в правой части (2) интеграл при надлежащем выборе выражений u и dv может оказаться проще исходного интеграла. При этом за u удобно принимать множитель, который упрощается при дифференцировании. Например, если под знаком интеграла стоит произведение многочлена на тригонометрическую или показательную функцию, то к u следует отнести многочлен, а оставшееся выражение к dv. При этом формула (2) может применяться неоднократно.

Пример 6. Найти $\int x^2 \cos x\,dx$.

◀ Полагаем $u = x^2$ и $dv = \cos x\,dx$. Тогда $du = 2x\,dx$ и $v = \int \cos x\,dx = \sin x$ (постоянную C здесь полагаем равной нулю, т. е. в качестве v берем одну из первообразных). По формуле (2) имеем

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\,dx.$$

К стоящему справа интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям, причем к u снова относим многочлен (т. е. $2x$). Имеем: $u = 2x$, $dv = \sin x\,dx$. Отсюда

$$du = 2dx \quad \text{и} \quad v = \int \sin x\,dx = -\cos x.$$

Применяя формулу (2), получаем окончательно:

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - \left(-2x \cos x - \int (-\cos x)\,2dx\right) =$$
$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C. \ ▶$$

Если подынтегральная функция содержит сомножителем логарифмическую или обратную тригонометрическую функции, то их следует принимать за u, так как в результате дифференцирования эти функции упрощаются.

Пример 7. Найти $\int \ln x\,dx$.

◀ Полагаем $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = \dfrac{dx}{x}$ и $v = \int dx = x$. Подставив в формулу (2), находим

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C. \ ▶$$

Иногда после двукратного применения формулы интегрирования по частям, приходим в правой части к выражению, содержащему исходный интеграл, т. е. получаем уравнение с искомым интегралом в качестве неизвестного.

Пример 8. Найти $\int e^{ax} \sin bx\,dx$.

◀ Полагаем $u=e^{ax}$, $dv=\sin bx\,dx$. Тогда $du=ae^{ax}\,dx$, $v=-\frac{1}{b}\cos bx$. Подставив в (2), имеем

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Теперь полагаем $u=e^{ax}$, $dv=\cos bx\,dx$. Тогда $du=ae^{ax}\,dx$, $v=\frac{1}{b}\sin bx$ и

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx\right).$$

В итоге получено уравнение относительно неизвестного интеграла $\int e^{ax}\sin bx\,dx$. Решая это уравнение, находим

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bx\,dx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{b^2}+C_1,$$

или

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$ ▶

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

6.124. $\int \arccos x\,dx$. **6.125.** $\int x\cos x\,dx$.

6.126. $\int x\ln x\,dx$. **6.127.** $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

6.128. $\int (x^2-x+1)\ln x\,dx$. **6.129.** $\int x^2\sin x\,dx$.

6.130. $\int x^2e^{-x}\,dx$. **6.131.** $\int x^3e^x\,dx$.

6.132*. $\int x^3e^{-x^2}\,dx$. **6.133.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$.

6.134. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. **6.135.** $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

6.136. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$. **6.137.** $\int e^{\arccos x}\,dx$.

6.138. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. **6.139.** $\int x^3\ln x\,dx$.

6.140. $\int x3^x\,dx$. **6.141.** $\int (x^2-2x+3)\cos x\,dx$.

6.142. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **6.143.** $\int \cos(\ln x)\,dx$.

Применяя различные методы, найти интегралы:

6.144*. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. **6.145.** $\int x(\mathrm{arctg}\,x)^2\,dx$.

6.146. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$. **6.147.** $\int x\,\mathrm{ctg}^2 x\,dx$.

6.148. $\int \frac{\cos^2 x}{e^x}\,dx$. **6.149*.** $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$.

6.150.** Вывести рекуррентную формулу для интеграла $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Найти I_2 и I_3.

Найти интегралы.

6.151.** $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$. **6.152**.** $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

6.153. $\int x\arcsin x\,dx$. **6.154.** $\int\frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$.

6.155. $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$. **6.156.** $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

6.157*. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

§ 2. Интегрирование основных классов элементарных функций

1. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование произвольной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0}{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}$ с действительными коэффициентами в общем случае производится следующим образом.

Если $m\geqslant n$, т. е. исходная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *неправильная*, то следует предварительно выделить в этой дроби *целую часть*, т. е. представить ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{R_r(x)}{Q_n(x)},\tag{1}$$

где $M_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ — многочлены степеней $m-n\geqslant 0$ и r соответственно, причем $r<n$, т. е. дробь $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ *правильная.*

Выделение целой части в дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ производится делением числителя на знаменатель «уголком».

Пример 1. Выделить целую часть дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)}.$$

◀ Дробь неправильная, так как $m=6>n=3$. Для выделения целой части записываем числитель и знаменатель в каноническом виде:

$$(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1,$$
$$x(x^2-2x+1)=x^3-2x^2+x,$$

и далее, выполняя деление «уголком» первого многочлена на второй, получаем в частном $x^3+2x^2+6x+10$, а в остатке $17x^2-10x+1$. Следовательно,

$$\frac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)}=x^3+2x^2+6x+10+\frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x},$$

и выделение целой части закончено. ▶

Как показывает формула (1), операция выделения целой части сводит интегрирование произвольной рациональной дроби к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Для того чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$, следует предварительно разложить ее в сумму так называемых простейших дробей. Это разложение осуществляется следующим образом. Пусть знаменатель $Q_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ имеет действительные корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ кратностей $s_1, \ldots, s_l$ и комплексно-сопряженные пары корней $\beta_1, \overline{\beta}_1, \ldots, \beta_k, \overline{\beta}_k$ кратностей $t_1, \ldots, t_k$ соответственно $(s_1+\ldots+s_l+2t_1+\ldots+2t_k=n)$, т. е. справедливо разложение

$$Q_n(x)=a_n(x-\alpha_1)^{s_1}\ldots(x-\alpha_l)^{s_l}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_kx+q_k)^{t_k},$$

где

$$x^2+p_\nu x+q_\nu=(x-\beta_\nu)(x-\overline{\beta}_\nu), \quad \nu=1, \ldots, k.$$

Тогда разложение дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в сумму простейших имеет вид

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1}+\ldots+\frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{s_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(l)}}{x-\alpha_l}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_{s_l}^{(l)}}{(x-\alpha_l)^{s_l}}+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_{t_1}^{(1)}x+C_{t_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{B_1^{(k)}x+C_1^{(k)}}{x^2+p_kx+q_k}+\ldots+\frac{B_{t_k}^{(k)}x+C_{t_k}^{(k)}}{(x^2+p_kx+q_k)^{t_k}}. \quad (2)$$

Коэффициенты $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$ и $C_i^{(j)}$ в этом разложении определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x у многочлена $P_m(x)$ и многочлена, который получается в числителе правой части (2) после приведения ее к общему знаменателю (метод неопределенных коэффициентов). Можно также определять эти коэффициенты, полагая в равенстве (2) или ему эквивалентном x равным подходяще подобранным числам (в первую очередь значениям действительных корней знаменателя $Q_n(x)$).

Пример 2. Дробь $\frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}$ разложить в сумму простейших.

◀ Искомое разложение имеет вид

$$\frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем тождественное равенство

$$x^2+4x+4=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx. \quad (3)$$

Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x дает систему уравнений:

$$A+B=1, \quad -2A-B+C=4, \quad A=4,$$

откуда получаем $A=4$, $B=-3$, $C=9$. Следовательно, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}.$$

Можно определить коэффициенты A, B, C другим способом, полагая последовательно в тождестве (3) $x=0$, $x=1$ и, например, $x=-1$: при $x=0$ находим $A=4$, при $x=1$ получаем $C=9$, а при $x=-1$ имеем $4A+2B-C=1$, т. е. $B=-3$.

При решении этого примера лучше всего было бы комбинировать оба способа, т. е. найти $A=4$ при $x=0$, $C=9$ при $x=1$, а B определить из равенства коэффициентов при x^2 в (3), т. е. из равенства $A+B=1$. ▶

Формула (2) показывает, что интегрирование произвольной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-\alpha}$. $\displaystyle\int\frac{A}{x-\alpha}\,dx=A\ln|x-\alpha|+C$.

2) $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ $(k=2,\ 3,\ \ldots)$. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx=-\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}+C$.

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $p^2-4q<0$.

Метод интегрирования дробей этого типа рассмотрим на примере.

Пример 3. Найти $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$.

◀ В рассматриваемом случае дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, отрицателен: $p^2-4q=1-4=-3<0$, т. е. имеем дробь третьего типа. Так как $(x^2+x+1)'=2x+1$, то числитель дроби преобразуем следующим образом:

$$x-1=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x^2+x+1)'-\frac{3}{2}$$

(это преобразование называется выделением в числителе производной квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе). Поэтому

$$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Оставшийся интеграл находится выделением полного квадрата в квадратном трехчлене:

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{1+\left(\dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d\,\dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}}{1+\left(\dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

В результате заданный интеграл равен

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \ \blacktriangleright$$

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $p^2-4q<0$, $k=2, 3, \ldots$

Метод интегрирования дробей этого типа рассмотрим также на примере.

Пример 4. Найти $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$.

◀ Здесь $p^2-4q=4-12=-8<0$, т. е. имеем простейшую дробь четвертого типа. Сначала выделяем в числителе производную квадратного трехчлена:

$$\int \frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \int \frac{{}^1\!/_2\,(x^2+2x+3)'+1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \\ = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Для вычисления оставшегося интеграла предварительно приведем его к стандартному виду, выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{du}{(1+u^2)^2}\Bigg|_{u=\frac{x+1}{\sqrt{2}}}.$$

Далее используем метод интегрирования по частям.

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \int \frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^2}\,du = \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2} = \\ = \mathrm{arctg}\,u + \frac{1}{2}\int u\,d\left(\frac{1}{1+u^2}\right) = \mathrm{arctg}\,u + \frac{1}{2}\,\frac{u}{1+u^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,u + C = \\ = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\,u + \frac{u}{1+u^2}\right) + C.$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx = \\ = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\,\frac{x+1}{x^2+2x+3} + C. \ \blacktriangleright$$

В общем случае $k>2$ рассмотренный в примере 4 прием позволяет свести вычисление интеграла $\int (1+u^2)^{-k}\,du$ к вычислению интеграла $\int (1+u^2)^{-k+1}\,du$, т. е. дает рекуррентный метод вычисления интегралов этого типа.

Проиллюстрируем метод интегрирования рациональных дробей в целом на следующем примере.

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

◀ Дробь $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ правильная, ее разложение в сумму простейших дробей имеет вид

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Имеем

$$1=A(x^2+1)^2+Bx^2(x^2+1)+Cx(x^2+1)+Dx^2+Ex.$$

Полагая $x=0$, находим $A=1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $0=A+B$, $0=C$, $0=2A+B+D$, $0=C+E$, т. е.

$$B=-1,\ C=0,\ D=-1 \text{ и } E=0.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}+C.$$

Заметим, что разложение дроби $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ на простейшие можно получить и не применяя метода неопределенных коэффициентов, а именно

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}. \ ▶$$

Найти интегралы:

6.158. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$.

6.159. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$.

6.160. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+4}$.

6.161. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x+3}$.

6.162. $\int \frac{dx}{x^2-6x}$.

6.163. $\int \frac{4x-3}{x^2-2x+6}\,dx$.

6.164. $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+13}$.

6.165. $\int \frac{3^x\,dx}{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}$.

6.166. $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$.

6.167. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$.

6.168. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}\,dx$.

6.169. $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$.

6.170. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$.

6.171. $\int \frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^3}\,dx$.

6.172. $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$.

6.173. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

6.174*. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2}$.

6.175*. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$.

6.176. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$.

6.177. $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx$.

6.178. $\int \frac{dx}{x^3+8}$.

6.179. $\int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2}\,dx$.

6.180. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx$.

6.181. $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$.

Найти интегралы, не применяя метода неопределенных коэффициентов:

6.182*. $\int \frac{dx}{x^4+a^2x^2}$.

6.183*. $\int \frac{dx}{x^4-a^4}$.

6.184. $\int \frac{dx}{x^4-4x^2+3}$.

6.185*. $\int \frac{dx}{x(x^6+1)^2}$.

6.186. $\int \frac{dx}{x^7+x^5}$.

6.187*. $\int \frac{x^7}{(x^4+1)(x^4-2)}\,dx$.

6.188. $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^9}\,dx$.

6.189. $\int \frac{x^5+x^2}{x^9+x^3-2}\,dx$.

2. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций.

а) Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

Если хотя бы одно из чисел m или n — нечетное положительное целое число, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Пример 6. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\,dx$.

◀ Имеем:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\,dx=\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\sin x\,dx=-\int \frac{1-\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\,d\cos x=$$
$$=-\int \frac{d\cos x}{\sqrt[4]{\cos x}}+\int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}}\,d\cos x=$$
$$=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x}+\frac{4}{11}\sqrt[4]{\cos^{11} x}+C. \ ▶$$

Если же m и n — четные неотрицательные числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 7. Найти $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

◀ Имеем:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x\,dx =$$
$$= \int \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx +$$
$$+ \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx +$$
$$+ \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d\sin 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \ \blacktriangleright$$

Если $m+n=-2k$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. $m+n$ является целым четным отрицательным числом, то целесообразно использовать подстановки $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.

Пример 8. Найти $\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x\,dx$.

◀ Так как $\frac{1}{3} - \frac{13}{3} = -4$, то вычисление интеграла сводится к интегрированию степеней тангенса:

$$\int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x\,dx = \int \operatorname{tg}^{1/3} x \cdot \frac{dx}{\cos^4 x} =$$
$$= \int \operatorname{tg}^{1/3} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^{1/3} x\,d\operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^{7/3} x\,d\operatorname{tg} x =$$
$$= \frac{3}{4}\operatorname{tg}^{4/3} x + \frac{3}{10}\operatorname{tg}^{10/3} x + C. \ \blacktriangleright$$

Для вычисления интегралов вида $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$, $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$, где $m=2, 3, \ldots$, используются тригонометрические формулы

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

Пример 9. Вычислить $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

◀ Имеем:

$$\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx = \int \operatorname{ctg}^2 x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx =$$
$$= -\int \operatorname{ctg}^2 x\,d\operatorname{ctg} x - \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)\,dx =$$
$$= -\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x + C. \ \blacktriangleright$$

В общем случае интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, где m и n — целые числа, вычисляются с помощью рекуррентных формул, которые выводятся путем интегрирования по частям.

Пример 10. Вывести рекуррентную формулу для $\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}$ и с ее помощью найти $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

◀ Имеем:

$$I_{2k+1}=\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^{2k+1} x}\,dx=$$

$$=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^{2k+1} x}\,dx+\int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x}=\int \sin x \frac{\sin x}{\cos^{2k+1} x}\,dx+I_{2k-1}.$$

Полагаем $u=\sin x$, $dv=\dfrac{\sin x}{\cos^{2k+1} x}\,dx$. Тогда $du=\cos x\,dx$, $v=$ $=\dfrac{1}{2k\cos^{2k} x}$, и интегрированием по частям получаем

$$I_{2k+1}=\frac{\sin x}{2k\cos^{2k} x}-\frac{1}{2k}\int \frac{dx}{\cos^{2k-1} x}+I_{2k-1},$$

или

$$I_{2k+1}=\frac{\sin x}{2k\cos^{2k} x}+\left(1-\frac{1}{2k}\right) I_{2k-1}$$

(рекуррентная формула).

В частности, при $k=1$ имеем

$$I_3=\int \frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x}=$$

$$=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|+C. ▶$$

Найти интегралы:

6.190. $\int \sin^3 x\,dx$.

6.191. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}\,dx$.

6.192. $\int \cos^7 x\,dx$.

6.193. $\int \cos^4 \frac{x}{2}\,dx$.

6.194. $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

6.195. $\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx$.

6.196. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

6.197. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

6.198. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

6.199. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

6.200. $\int \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}\,dx$.

6.201. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

6.202. $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

6.203. $\int \left(\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2}\right)dx$.

6.204. $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x\sin^3 x}}$.

6.205. $\int \cos^5 x\,dx$.

6.206. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx.$ **6.207.** $\int \sin^6 2x\,dx.$

6.208. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$ **6.209.** $\int \frac{dx}{\cos\frac{x}{3}\sin^3\frac{x}{3}}.$

6.210. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$ **6.211.** $\int \cos x \cos^2 2x\,dx.$

б) Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются тригонометрические формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Пример 11. Найти $\int \cos 9x \cos 5x\,dx.$

◄ Имеем

$$\int \cos 9x\cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 14x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{28}\sin 14x + C. \ ►$$

Найти интегралы:

6.212. $\int \sin 3x\cos 5x\,dx.$ **6.213.** $\int \sin 10x\sin 15x\,dx.$

6.214. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx.$ **6.215.** $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx.$

6.216. $\int \cos x\cos^2 3x\,dx.$ **6.217.** $\int \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx.$

в) Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных, приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. При этом используются формулы

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Пример 12. Найти $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}.$

◀ Полагаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогда

$$\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=2\int \frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+5\right)(1+t^2)}=$$

$$=2\int \frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int \frac{dt}{(t+3)^2}=-\frac{2}{t+3}+C=$$

$$=-\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}+C. \ ▶$$

Если под интегралом $\sin x$ и $\cos x$ содержатся только в четных степенях, то удобнее использовать подстановку $\operatorname{tg} x=t$.

Пример 13. Найти $\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x}$.

◀ Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и используя подстановку $\operatorname{tg} x=t$, получим:

$$\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x}=\int \frac{d\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x-5\operatorname{tg}^2 x}=\int \frac{dt}{1-4t^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2\operatorname{tg} x}{1-2\operatorname{tg} x}\right|+C. \ ▶$$

Найти интегралы:

6.218. $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$. **6.219.** $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$.

6.220*. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$. **6.221.** $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$.

6.222. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x-2\cos x+5}dx$. **6.223.** $\int \frac{\sin 2x}{1+4\cos^2 x}dx$.

6.224. $\int \frac{dx}{2-\sin x}$. **6.225*.** $\int \frac{dx}{(\sin x+4)(\sin x-1)}$.

6.226. $\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{1-\operatorname{ctg} x}dx$. **6.227.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x+8\sin x\cos x+12\cos^2 x}$.

г) Интегрирование гиперболических функций производится аналогично интегрированию тригонометрических функций, причем используются следующие формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1, \quad \operatorname{sh} x\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x+1), \quad \operatorname{sh}^2 x=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x-1),$$

$$1-\operatorname{th}^2 x=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \operatorname{cth}^2 x-1=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Найти интегралы:

6.228. $\int \operatorname{ch}^2 3x\,dx$. **6.229.** $\int \operatorname{sh}^3 2x\,dx$.

6.230. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\,dx$. 6.231. $\int \operatorname{ch}^4 x\,dx$.

6.232. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$. 6.233*. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4\operatorname{ch}^2 x}$.

6.234*. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - 1}$. 6.235. $\int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1}\,dx$.

6.236. $\int \operatorname{cth}^3 x\,dx$. 6.237. $\int \operatorname{th}^4 x\,dx$.

3. Интегрирование некоторых иррациональных функций. а) Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx,$$

где $R(x, y, z, \ldots)$ — рациональная функция своих аргументов, m_1, n_1, m_2, n_2, ..., — целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s — общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, ...

Пример 14. Найти $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}}$.

◀ Производим подстановку $x+3=t^4$. Тогда $dx=4t^3dt$, и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}} = 4\int \frac{t^3\,dt}{(t-1)t^2} = 4\int \frac{t\,dt}{t-1} = 4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}dt =$$
$$= 4(t + \ln|t-1|) + C = 4\left(\sqrt[4]{x+3} + \ln\left|\sqrt[4]{x+3}-1\right|\right) + C. \ ▶$$

Найти интегралы:

6.238. $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$. 6.239. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

6.240. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$. 6.241. $\int \frac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)(1+\sqrt[3]{x+a})}dx$.

6.242. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$. 6.243. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$.

6.244. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$. 6.245. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

б) Вычисление интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

где R — рациональная функция двух аргументов, производится с помощью тригонометрических подстановок следующим образом. Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой переменной $u=x+\frac{b}{2a}$ исходный интеграл приводится к интегралу одного из следующих трех типов:

1) $\int R\left(u, \sqrt{l^2-u^2}\right) du$,

2) $\int R\left(u, \sqrt{l^2+u^2}\right) du$,

3) $\int R\left(u, \sqrt{u^2-l^2}\right) du$.

Последние интегралы тригонометрической или гиперболической подстановкой соответственно

1) $u=l\sin t$ или $u=l\,\mathrm{th}\,t$,

2) $u=l\,\mathrm{tg}\,t$ или $u=l\,\mathrm{sh}\,t$,

3) $u=l\sec t$ или $u=l\,\mathrm{ch}\,t$

приводятся к интегралам вида $\int R(\sin t, \cos t)\,dt$ или $\int R(\mathrm{sh}\,t, \mathrm{ch}\,t)\,dt$.

Пример 15. Найти $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

◀ Производим подстановку $x=a\,\mathrm{ch}\,t$. Тогда $dx=a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{sh}\,t$, и далее

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx=a^2\int \mathrm{sh}^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(\mathrm{ch}\,2t-1)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}\,2t}{2}-t\right)+C=$$
$$=\frac{a^2}{2}(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t-t)+C=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C. \ ▶$$

Пример 16. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

◀ Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+4x+7)^3}}=\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+3)^3}}, \quad \text{где} \quad u=x+2.$$

Производя теперь подстановку $u=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,t$, $du=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt$, $\sqrt{u^2+3}=$ $=\sqrt{3}\sec t$, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+3)^3}}=\int \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t\sqrt{3^3}\sec^3 t}\,dt=\frac{1}{3}\int \cos t\,dt=$$
$$=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\frac{u}{\sqrt{u^2+3}}=\frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C. \ ▶$$

При вычислении интегралов вида

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

следует предварительно выделить в числителе производную квадратного трехчлена.

Пример 17. Найти $\int \frac{x-1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx$.

◀ Имеем

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx=\int \frac{-\frac{1}{2}(-2x-4)-3}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{(1-4x-x^2)'}{\sqrt{1-4x-x^2}}\,dx-3\int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+2)^2}}=-\sqrt{1-4x-x^2}-$$

$$-3\int \frac{d\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)^2}}=-\sqrt{1-4x-x^2}-3\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C.$$

Заметим, что в этом примере нет необходимости производить тригонометрическую подстановку, так как выделение полного квадрата сразу приводит к табличному интегралу. ▶

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (r=1,\ 2)$$

сводятся к рассмотренным выше интегралам с помощью подстановки $mx+n=\frac{1}{t}$.

Пример 17. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$.

◀ Полагаем $x=\frac{1}{t}$. Тогда $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}=$ $=\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}$ и

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}=-\int \frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-2t-t^2}}{t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}}=$$

$$=-\arcsin\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{2}}+C=-\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{2}}+C. \text{ ▶}$$

Найти интегралы:

6.246. $\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$. **6.247.** $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$.

6.248. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$. **6.249.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

6.250. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$. **6.251.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

6.252. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$. **6.253.** $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$.

6.254. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}\,dx.$ **6.255.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$

6.256. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}.$ **6.257.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}.$

6.258. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x+2x^2}}.$ **6.259.** $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}.$

6.260. $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx.$ **6.261.** $\int \sqrt{(3-2x-x^2)^3}\,dx.$

6.262. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}.$ **6.263.** $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx.$

6.264. $\int \sqrt{x^2-2x+10}\,dx.$ **6.265.** $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx.$

6.266. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2}\,dx.$ **6.267.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx.$

6.268. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}.$ **6.269.** $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx.$

§ 3. Смешанные задачи на интегрирование

Найти интегралы:

6.270. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}\,dx.$ **6.271.** $\int \frac{x^3}{x^2-x-1}\,dx.$

6.272. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)}.$ **6.273.** $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}.$

6.274. $\int \frac{dx}{x^5(x^4+1)^2}.$ **6.275.** $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+2}}.$

6.276. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}}.$ **6.277.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+4}}.$

6.278. $\int x\sqrt{x^2-4}\,dx.$ **6.279.** $\int x\sqrt{x^2+4x-5}\,dx.$

6.280. $\int \sqrt{x^2+4x+5}\,dx.$ **6.281.** $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{16-x^2}}.$

6.282. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}}.$ **6.283.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

6.284. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}.$ **6.285.** $\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx.$

6.286. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx.$ **6.287.** $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x}.$

6.288. $\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^4}\,dx.$ **6.289.** $\int \frac{dx}{2+\cos x}.$

6.290. $\int \frac{dx}{3-4\sin^2 x}.$ **6.291.** $\int \frac{2-\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx.$

6.292. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{5-\sec^2 x}} dx$. 6.293. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + 5} dx$.

6.294. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x}$. 6.295. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

6.296. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$. 6.297. $\int x \sin x \cos 2x\, dx$.

6.298. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$. 6.299. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}$.

6.300. $\int \operatorname{th}^5 x\, dx$. 6.301. $\int \frac{\operatorname{ch}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} dx$.

6.302. $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{ch}^2 x}$. 6.303. $\int \sin^2 (\ln x)\, dx$.

6.304. $\int x e^{2x}\, dx$. 6.305. $\int x e^{-x^2}\, dx$.

6.306. $\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x} + 4e^x - 5}$. 6.307. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$.

6.308. $\int e^{\arcsin x}\, dx$. 6.309. $\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

6.310. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 6.311. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$.

6.312. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$. 6.313. $\int x (1+x^2) \operatorname{arctg} x\, dx$.

6.314. $\int \frac{\ln (1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx$. 6.315. $\int x \ln (4+x^4)\, dx$.

6.316. $\int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1}\, dx$.

6.317. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

6.318. $\int x^x (1+\ln x)\, dx$. 6.319. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)} dx$.

§ 4. Определенный интеграл и методы его вычисления

1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1} < x_n = b$ — произвольное разбиение этого отрезка на n частей (рис. 48), то *интегральной суммой* функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется сумма вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k,$$

где $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Геометрически S_n есть алгебраическая сумма площадей прямоугольников, имеющих основания Δx_k и высоты $f(\xi_k)$.

Если определенная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ такова, что существует конечный предел последовательности интегральных сумм

S_n при условии, что наибольшая из разностей Δx_k стремится к нулю, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, ни от выбора точек ξ_k на этих отрезках, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, а сам предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{1}$$

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Геометрически определенный интеграл (1) представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, ограниченных графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, причем площади, расположенные выше оси Ox, входят в эту сумму со знаком плюс, а площади, расположенные ниже оси Ox, — со знаком минус.

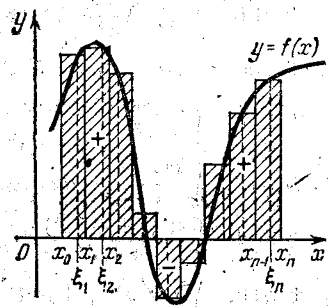


Рис. 48

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 x^2\,dx$, рассматривая определенный интеграл как предел интегральных сумм.

◀ 1-й способ. Разделим отрезок интегрирования $[1, 2]$ на n равных частей длины $\Delta x = \frac{1}{n}$.

Точки деления:

$$x_0=1, \quad x_1 = 1+\frac{1}{n}, \quad x_2 = 1+\frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = 1+\frac{n-1}{n}, \quad x_n = 2.$$

В качестве точек ξ_k выберем, например, левые концы каждого частичного отрезка. Тогда

$$f(x_0)=1, \quad f(x_1) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2, \quad f(x_2) = \left(1+\frac{2}{n}\right)^2, \ \ldots$$
$$\ldots, \ f(x_{n-1}) = \left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2\right)=$$
$$=\frac{1}{n^3}\left(n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(2n-1)^2\right)=\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1} k^2-\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right).$$

Применяя формулу суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)\,2n\,(4n-1)}{6} - \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\right) = \frac{14n^2-9n+1}{6n^2},$$

откуда

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{14n^2-9n+1}{6n^2} = \frac{7}{3}.$$

2-й способ. Разобьем отрезок [1, 2] на части так, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию:

$$x_0 = 1,\ x_1 = q,\ x_2 = q^2,\ \ldots,\ x_{n-1} = q^{n-1},\ x_n = q^n = 2,$$

где $q = 2^{1/n}$. Точку ξ_k выберем на левом конце k-го отрезка. Тогда

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = q^2,\ f(x_2) = q^4,\ \ldots,\ f(x_{n-1}) = q^{2(n-1)},$$

$$\Delta x_1 = q-1,\ \Delta x_2 = q^2-q = q(q-1),\ \Delta x_3 = q^2(q-1),\ \ldots$$

$$\ldots,\ \Delta x_n = q^{n-1}(q-1),$$

$$S_n = 1\cdot(q-1) + q^3(q-1) + q^6(q-1) + \ldots + q^{3(n-1)}(q-1) =$$

$$= (q-1)(1+q^3+q^6+\ldots+q^{3(n-1)}) = (q-1)\frac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} =$$

$$= \frac{2^3-1}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1}.$$

Следовательно,

$$\int_1^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{7}{2^{2/n}+2^{1/n}+1} = \frac{7}{3}. \ ▶$$

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм:

6.320*. $\int_0^5 (1+x)\,dx.$ **6.321*.** $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

6.322*. $\int_0^{10} e^x\,dx.$ **6.323*.** $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}.$

2. Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона — Лейбница. Если $F(x)$ — одна из первообразных непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, то справедлива следующая формула Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

◀ Имеем

$$\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int\limits_{e}^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_{e}^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2 \approx 0{,}69. \ ▶$$

Используя формулу Ньютона—Лейбница, вычислить интегралы:

6.324. $\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx$. **6.325.** $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

6.326. $\int\limits_{1}^{2} (3x^2 - 2x + 1)\,dx$. **6.327.** $\int\limits_{0}^{1} (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})\,dx$.

6.328. $\int\limits_{1}^{8} \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx$. **6.329.** $\int\limits_{2}^{9} \sqrt[3]{x-1}\,dx$.

6.330. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx$. **6.331.** $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

6.332. $\int\limits_{1}^{2} e^x\,dx$. **6.333.** $\int\limits_{0}^{3} 2^x\,dx$.

6.334. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{x}$. **6.335.** $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}$.

6.336. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$. **6.337.** $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin^2\varphi\,d\varphi$.

6.338. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^4 x\,dx$. **6.339.** $\int\limits_{0}^{2} \operatorname{sh}^3 x\,dx$.

6.340. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$. **6.341.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

6.342. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$. **6.343.** $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx$.

6.344. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$. **6.345.** $\int\limits_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$.

6.346. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. 6.347. $\int_{0}^{\pi/2} \cos^3 \alpha \, d\alpha$.

6.348. $\int_{0}^{1/3} \operatorname{ch}^2 3x \, dx$. 6.349. $\int_{2}^{3} \frac{dy}{y^2-2y-8}$.

6.350. $\int_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. 6.351. $\int_{0}^{2} \frac{2x-1}{2x+1} dx$.

6.352. $\int_{0}^{1} \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

С помощью определенных интегралов найти пределы сумм:

6.353**. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$.

6.354. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos 2\frac{\pi}{2n} + \ldots + \cos (n-1) \frac{\pi}{2n} \right)$.

6.355. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}} \right)$.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

6.356. $y=\frac{1}{2}x^2, \ y=0, \ x=2, \ x=3$.

6.357. $y=\sqrt[3]{x}, \ y=0, \ x=1, \ x=8$.

6.358. $y=6-x-2x^2, \ y=x+2$.

6.359. $y=\frac{x^2}{4}, \ y=2\sqrt{x}$.

6.360. $y=\cos x, \ y=0, \ x=-\frac{\pi}{2}, \ x=-\frac{\pi}{4}$.

6.361. $y=e^{-x}, \ y=0, \ x=1, \ x=2$.

6.362. $y=\frac{2}{x}, \ y=0, \ x=2, \ x=3$.

6.363. $y=\frac{3}{x}, \ x+y=4$.

3. Свойства определенного интеграла.

1) Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, то $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geqslant 0$.

2) Если $f(x) \leqslant g(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{b} g(x)\,dx.$$

3) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

4) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, m — наименьшее, M — наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

(теорема об оценке определенного интеграла).

Пример 3. Оценить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

◀ Имеем: $1 \leqslant 1+x^4 \leqslant 2$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant 1,$$

т. е. $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b-a=1$. Следовательно, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant I \leqslant 1$. ▶

5) Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $g(x) \geqslant 0$, m и M — наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b g(x)\,dx$$

(обобщенная теорема об оценке определенного интеграла).

6) Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(**теорема о среднем значении**).

Число

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

7) Если $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $g(x) \geqslant 0$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx$$

(обобщенная теорема о среднем).

8) Если $f^2(x)$ и $g^2(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx}$$

(неравенство Коши—Буняковского).

9) Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах. Если функция $f(x)$ четная, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. Если функция $f(x)$ нечетная, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

10) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то *интеграл с переменным верхним пределом*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной для функции $f(x)$, т. е.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x), \quad x \in [a, b].$$

11) Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы в точке $x \in (a, b)$ и $f(t)$ непрерывна при $\varphi(a) \leqslant t \leqslant \psi(b)$, то

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right)'_x = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Пример 4. $I(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$. Найти $I'(x)$.

◀ Используя свойство 11) и учитывая, что $\varphi(x) = 0$, т. е. $\varphi'(x) = 0$, имеем

$$I'(x) = e^{-(x^2)^2}\cdot(x^2)' = 2xe^{-x^4}. \;▶$$

6.364. Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

а)* $\int_{-2}^{1} \sqrt[3]{x}\,dx$; б) $\int_{-1}^{1} x^3e^x\,dx$; в) $\int_{1/3}^{1} x\ln x\,dx$.

6.365. Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ или $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ или $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$;

в) $\int_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx$ или $\int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

6.366. Найти среднее значение функции на данном отрезке:

а) x^3, $0 \leqslant x \leqslant 1$; в) $\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$;

б) $\sqrt[3]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; г) $\cos^3 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

6.367. Сила переменного тока меняется по закону $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$, где T — период. Найти среднее значение силы тока за полупериод.

6.368. Оценить интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8 + x^3}\, dx$.

6.369. Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5 + 2\sin x}}$.

6.370. Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{(1 + x)(1 + x^3)}\, dx$, пользуясь:

а) обобщенной теоремой об оценке интеграла;

б) неравенством Коши — Буняковского.

6.371. Оценить интеграл $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{(4 + x^3)\, x}\, dx$, пользуясь:

а) обобщенной теоремой об оценке интеграла;

б) неравенством Коши — Буняковского.

6.372. Найти: а) $\frac{dI}{d\beta}$, б) $\frac{dI}{d\alpha}$, если

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{e^x}{x}\, dx \quad (0 < \alpha < \beta).$$

6.373. Найти точки экстремума функции

$$\Phi(x) = \int\limits_{a}^{x} \frac{\cos t}{t}\, dt \quad \left(x > 0,\ 0 < a < \frac{\pi}{2}\right).$$

Найти производные следующих функций:

6.374. $\Phi(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$. **6.375.** $\Phi(x) = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\, dt$.

6.376. $\Phi(x) = \int\limits_{x}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^3}}$. **6.377.** $\Phi(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}$ $(x > 0)$.

6.378. Доказать, что

$$\int_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin x}{1+x^4}\,dx = 0.$$

4. Замена переменной в определенном интеграле. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1, t_2]$, причем $a=\varphi(t_1)$, $b=\varphi(t_2)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Пример 5. Вычислить $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx.$

◀ Применим подстановку $x=\sin t$. Тогда $dx=\cos t\,dt$, $t=\arcsin x$, $t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ и $t_2=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = (-\operatorname{ctg} t - t)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{4} = 1-\frac{\pi}{4}. \;\blacktriangleright$$

6.379. Можно ли интеграл $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ вычислить с помощью подстановки $x=\sin t$?

Вычислить интегралы с помощью указанных подстановок:

6.380. $\displaystyle\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$, $3x-2=t^2$.

6.381. $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$, $e^x+1=t^2$.

6.382. $\displaystyle\int_0^{\operatorname{sh} 1} \sqrt{x^2+1}\,dx$, $x=\operatorname{sh} t$.

6.383. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

6.384. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$, $\operatorname{tg} x = t$.

6.385. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$, $x+1=2\sin t$.

Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

6.386. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 6.387. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$.

6.388. $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$. 6.389. $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

6.390. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$. 6.391. $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$.

6.392. $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}$. 6.393. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

6.394. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}\,dx$. 6.395. $\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

6.396. Показать, что $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_{1}^{2} \frac{e^x}{x}\,dx$.

6.397. Показать, что $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{dx}{\arcsin x} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

6.398. Убедиться в том, что

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{3x^7-2x^5+x^3-x}{x^4+3x^2+1}\,dx = 0.$$

5. Интегрирование по частям. Если функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ и их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$$

(формула интегрирования по частям).

Пример 6. Вычислить $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

◀ Положим $u=\ln x$, $dv=dx$, тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$. Имеем

$$\int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = e-e+1=1.\ ▶$$

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

6.399. $\int_0^1 xe^x\,dx$. **6.400.** $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

6.401. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$. **6.402.** $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

6.403. $\int_0^{\pi/4} e^{3x}\sin 4x\,dx$. **6.404.** $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^3}\,dx$.

6.405. $\int_1^e x\ln x\,dx$. **6.406.** $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

6.407. $\int_0^{\pi/4} x^2\cos 2x\,dx$. **6.408.** $\int_0^{\pi/2} e^x\cos x\,dx$.

6.409. Показать, что для интеграла

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx,\quad n\in\mathbb{N},$$

верна рекуррентная формула $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. Вычислить I_7 и I_8.

6.410. Показать, что для интеграла

$$I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx,\quad n\in\mathbb{N},$$

верна рекуррентная формула $I_n=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$. Вычислить I_4.

§ 5. Несобственные интегралы

1. Интегралы с бесконечными пределами. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a\leqslant x<+\infty$, то по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (1), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если этот предел не существует, то — *расходящимся*.

Геометрически несобственный интеграл (1) в случае $f(x) > 0$ есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямой $x=a$ и осью Ox (асимптотой).

Аналогично определяется интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$. Далее, по определению

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad (2)$$

где c, $-\infty < c < +\infty$, — произвольно, причем интеграл в левой части равенства (2) считается сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части.

П р и з н а к и   с х о д и м о с т и   и   р а с х о д и м о с т и приведем только для интегралов вида (1).

1) Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty)$, то интеграл (1) сходится и равен

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx=F(+\infty)-F(a);$$

если же $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ не существует, то интеграл (1) расходится.

2) Пусть при $a\leqslant x<+\infty$ $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. Если $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, причем $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$. Если $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ (п р и з н а к и   с р а в н е н и я).

3) Если при $a\leqslant x<+\infty$ $f(x)>0$, $g(x)>0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, то интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (п р е д е л ь н ы й   п р и з н а к   с р а в н е н и я).

4) Если сходится $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ (последний интеграл называется в этом случае *абсолютно сходящимся*).

П р и м е р 1. Вычислить $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3x}\,dx$.

◀ Имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^b\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}(1-e^{-3b}) = \frac{1}{3}. \ ▶$$

На практике в качестве интеграла, с которым производится сравнение, обычно используются интегралы вида

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx, \quad a>0,\ \alpha>0,$$

которые сходятся при $\alpha>1$ и расходятся при $\alpha\leqslant 1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

◀ При $x\to+\infty$ имеем

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1/2}}$ расходится $(\alpha=1/2<1)$, то и заданный интеграл также расходится. ▶

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

6.411. $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$. **6.412.** $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

6.413. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$. **6.414.** $\int\limits_0^{+\infty}e^{-2x}\cos x\,dx$.

6.415. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$. **6.416.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1+2x}{x^2(1+x)}\,dx$.

6.417. $\int\limits_2^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$. **6.418.** $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx$.

6.419. $\int\limits_0^{+\infty}x\cos x\,dx$. **6.420.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+8}\,dx$.

6.421. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3}\,dx$. **6.422.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

6.423. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. **6.424.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

Исследовать на сходимость интегралы:

6.425. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2+5x^4}$. **6.426.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx$.

6.427. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1}\,dx$. **6.428.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

6.429. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}$. **6.430.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx$.

6.431. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$. **6.432.** $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}$.

2. Интегралы от неограниченных функций. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < b$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma\to+0} \int\limits_a^{b-\gamma} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (3), то несобственный интеграл называется *сходящимся*, если этот предел не существует, то — *расходящимся*.

Геометрически несобственный интеграл (3) в случае $f(x)>0$ есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямой $x=a$ и вертикальной асимптотой $x=b$.

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$.

В случае, когда $c\in(a,\ b)$ — точка разрыва и функция $f(x)$ неограничена в любой окрестности точки c,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma_1\to+0} \int\limits_a^{c-\gamma_1} f(x)\,dx + \lim_{\gamma_2\to+0} \int\limits_{c+\gamma_2}^{b} f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам из п. 1.

На практике в качестве интеграла, с которым производится сравнение, обычно используются интегралы вида

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\alpha > 0), \tag{5}$$

которые сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geqslant 1$ (сравните с аналогичными интегралами в случае бесконечных пределов интегрирования).

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

◀ При $x \to 1$ $\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}$ (эквивалентные бесконечно большие), так как

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1/x} = 1.$$

Интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ расходится как интеграл типа (5) при $\alpha = 1$. Следовательно, расходится и $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$. ▶

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{2x^2+\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x - x}\, dx.$$

◀ Задача состоит в том, чтобы установить характер поведения подынтегральной функции при $x \to +0$. В числителе при $x \to +0$ имеем

$$2x^2+\sqrt{x} = x^{1/2}(2x^{3/2}+1) \sim x^{1/2}.$$

В знаменателе воспользуемся формулой Маклорена для функции $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x - x = \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \sim -\frac{1}{3}x^3.$$

Следовательно, при $x \to +0$

$$\frac{2x^2+\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x - x} \sim \frac{x^{1/2}}{-{}^1/_3 x^3} = -3\frac{1}{x^{5/2}}.$$

Так как интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{5/2}}$ расходится, то расходится и заданный интеграл. ▶

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

6.433. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$. **6.434.** $\int\limits_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{4/5}}$. **6.435.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

6.436. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$. **6.437.** $\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$.

6.438. $\int\limits_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **6.439.** $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

6.440. $\int\limits_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$. **6.441.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Исследовать на сходимость интегралы:

6.442. $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. **6.443.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

6.444. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$. **6.445.** $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}\,dx$.

6.446. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$. **6.447.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}\,dx$.

6.448. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$. **6.449.** $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

6.450. $\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$. **6.451.** $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$.

6.452. Доказать, что при $\alpha>0$ определяющий *гамма-функцию* $\Gamma(\alpha)$ интеграл Эйлера $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ сходится, и установить следующие соотношения:

а) если $\alpha=n$ — целое число, то $\Gamma(n+1)=n!$;

б) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ для любого $\alpha>0$;

в) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

г) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$;

д) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}$, n — целое.

§ 6. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры. Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox, или площадь *криволинейной трапеции*,

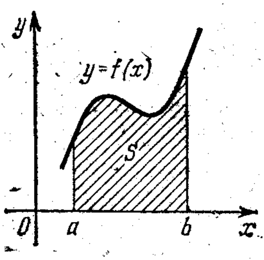


Рис. 49

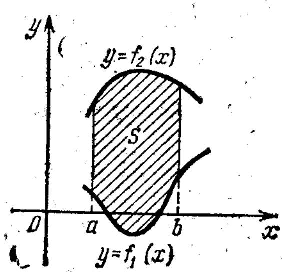


Рис. 50

ограниченной дугой графика функции $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ (рис. 49), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, $f_1(x)\leqslant f_2(x)$, и двумя прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 50), определяется по формуле

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx. \tag{2}$$

Простейшие задачи на применение формул (1) и (2) были приведены в § 4 (задачи 6.356—6.363).

Пример 1. **Найти площадь фигуры, лежащей в правой полуплоскости и ограниченной окружностью $x^2+y^2=8$ и параболой $y^2=2x$.**

◀ Найдем точки пересечения кривых (рис. 51), решив систему уравнений

$$x^2+y^2=8,$$
$$y^2=2x.$$

Получим точки (2, 2) и (2, —2). Используя симметрию относительно оси Ox, найдем искомую площадь S как удвоенную сумму площадей криволинейных трапеций, ограниченных соответственно дугами параболы $y=\sqrt{2x}$, $0\leqslant x\leqslant 2$, и окружности $y=\sqrt{8-x^2}$, $2\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$:

$$S=2\left(\int\limits_0^2\sqrt{2x}\,dx+\int\limits_2^{\sqrt{8}}\sqrt{8-x^2}\,dx\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^2+\left(\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2}+4\arcsin\frac{x}{\sqrt{8}}\right)\Big|_2^{\sqrt{8}}\right)=$$

$$=2\left(\frac{8}{3}+2\pi-2-\pi\right)=2\pi+\frac{4}{3}.\ ▶$$

Иногда удобно использовать формулы, аналогичные (1) и (2), но по переменной y (считая x функцией от y), в частности,

$$S=\int\limits_c^d(f_2(y)-f_1(y))\,dy. \tag{3}$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $(y-2)^2=x-1$, касательной к ней в точке с ординатой $y_0=3$ и осью Ox.

◀ Форма фигуры (рис. 52) не позволяет непосредственно применить формулы (1) или (2). Однако если рассматривать фигуру относительно оси Oy, то можно применить формулу (3). Итак, пусть y — независимая переменная. Уравнение параболы запишем в виде $x=y^2-4y+5$. Найдем уравнение касательной к параболе. Оно имеет вид: $x-x_0=x_0'(y-y_0)$. Так как $x_y'=2(y-2)$, то $x_0'=x'\big|_{y=3}=2$. Найдя, далее, абсциссу точки касания $x_0=2$, получаем уравнение касательной

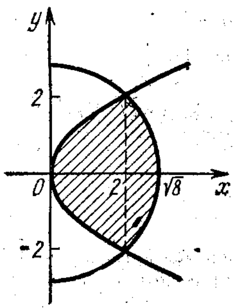


Рис 51

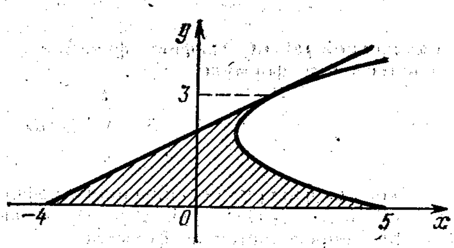


Рис. 52

$$x-2=2(y-3),\ \text{или}\ x=2y-4.$$

Полагая в (3) $f_1(y)=2y-4$, $f_2(y)=y^2-4y+5$, имеем:

$$S=\int\limits_0^3((y^2-4y+5)-(2y-4))\,dy=\int\limits_0^3(y^2-6y+9)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^3(y-3)^2\,dy=\frac{1}{3}(y-3)^3\Big|_0^3=9.\ ▶$$

Заметим, что применение формул (1) и (2) при решении примера 2 потребовало бы вычисления суммы трех интегралов:

$$S=\int_{-4}^{1}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx+\int_{1}^{2}\left(\left(\frac{1}{2}x+2\right)-(2+\sqrt{x-1})\right)dx+$$
$$+\int_{1}^{5}(2-\sqrt{x-1})\,dx.$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=1/x^2$, осью Ox и прямой $x=1$ и лежащей правее этой прямой.
◀ Искомая площадь (рис. 53) выражается несобственным интегралом

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{1}^{\infty}=1. \ ▶$$

Если фигура ограничена кривой, имеющей параметрические уравнения $x=x(t)$, $y=y(t)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox, то площадь ее вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\,x'(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\,dx(t), \tag{4}$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ ($y(t)\geqslant 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$).

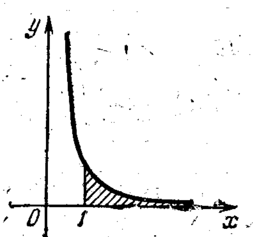


Рис. 53

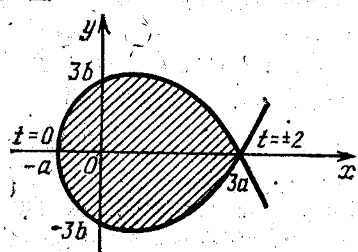


Рис. 54

Формула (4) применима также для вычисления площади фигуры, ограниченной замкнутой кривой (изменение параметра t от t_1 до t_2 должно соответствовать обходу контура по часовой стрелке).

Пример 4. Найти площадь петли кривой

$$x=a(t^2-1),\quad y=b(4t-t^3)\quad (a>0,\ b>0).$$

◀ Найдем точки пересечения кривой с координатными осями. Имеем: $x=0$ при $t=\pm 1$; $y=0$ при $t=0$, $t=\pm 2$. Следовательно, получаем следующие точки: $(0, 3b)$ при $t=1$; $(0, -3b)$ при $t=-1$; $(-a, 0)$ при $t=0$; $(3a, 0)$ при $t=\pm 2$. Точка $(3a, 0)$ является точкой самопересечения кривой. При $0\leqslant t\leqslant 2$ $y\geqslant 0$; при $-2\leqslant t\leqslant 0$ $y\leqslant 0$ (рис. 54).

Площадь фигуры находим как удвоенную площадь верхней ее половины:

$$S=2\int_{-a}^{3a} y\,dx=2\int_{0}^{2} y(t)\,x'(t)\,dt=2\int_{0}^{2} b(4t-t^3)\,a\cdot 2t\,dt=$$

$$=4ab\int_{0}^{2}(4t^2-t^4)\,dt=4ab\left(\frac{4}{3}t^3-\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{256}{15}ab. \blacktriangleright$$

Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $r=r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, где φ и r — полярные координаты, или площадь *криволинейного сектора*, ограниченного дугой графика функции $r=r(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi. \qquad (5)$$

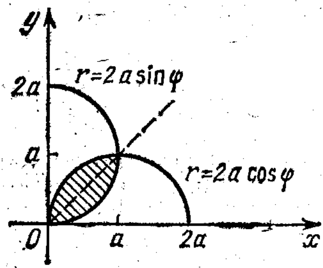


Рис. 55

Пример 5. Найти площадь лунки, ограниченной дугами окружностей $r=2a\cos\varphi$, $r=2a\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $a>0$.

◀ Окружности пересекаются при $\varphi=\pi/4$; рассматриваемая фигура (рис. 55) симметрична относительно луча $\varphi=\pi/4$. Следовательно, ее площадь можно вычислять так:

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} 4a^2\sin^2\varphi\,d\varphi=2a^2\int_{0}^{\pi/4}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=2a^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/4}=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2. \blacktriangleright$$

6.453. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$, $y=0$.

6.454. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

6.455. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2=4x$ и $x^2=4y$.

6.456. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x$ и прямой $y=x+2$.

6.457. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{27}{x^2+9}$ и $y=\frac{x^2}{6}$.

6.458. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=2px$ и $y^2=\frac{4}{p}(x-p)^3$ $(p>0)$.

6.459. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностями $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2-2ay=a^2$ и прямой $y=a$.

6.460. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=\frac{a^2x}{a^2+x^2}$ и осью Oy.

6.461. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Oy, параболой $(x-a)^2=2p(y-b)$ и касательной к ней в точке с абсциссой $x=c$ $(c>a>0,\ p>0)$.

6.462. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=e^x-1$, $y=e^{2x}-3$, $x=0$.

6.463. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3+2x-x^2$ и осью Ox.

6.464. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\arcsin x$ и прямыми $x=0$, $y=\pi/2$.

6.465. Найти площадь верхней лунки, ограниченной окружностями $x^2+y^2=a^2$ и $x^2+y^2+2ay=a^2$.

6.466. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x-1)(y+2)=2$ и $x+y=2$.

6.467. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$, касательной к ней в точке $x=e$ и осью Ox.

6.468. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\ln(x+2)$, $y=2\ln x$, $y=0$.

6.469. Найти площади каждой из двух частей, на которые круг $x^2+y^2\leqslant 2ax$ разделен параболой $y^2=2ax-a^2$.

6.470. Найти площадь лунки, ограниченной гиперболой $x^2-y^2=a^2$ и параболой $y^2=\frac{3}{2}ax$.

6.471. Найти площадь гиперболического сегмента с высотой h и основанием $2r$ (действительная полуось гиперболы равна a).

6.472. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $a^2y^2=\frac{x^5}{2a-x}$ и ее асимптотой.

6.473. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2-y^2=a^2$, $(x^2-a^2)^3y^2=a^8$ и осью Ox $(x>0)$.

6.474. Найти площади каждой из двух частей, на которые круг $x^2+y^2\leqslant 2ax$ разделен гиперболой $4x^2-3y^2=a^2$.

6.475. Найти площадь эллиптического сегмента с высотой h и основанием $2r$ (большая полуось эллипса равна a, основание сегмента параллельно малой оси).

6.476. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=\frac{a^2x}{a^2+x^2}$ и осью Ox.

6.477. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^3=\frac{x^4}{a^2-x^2}$ и ее асимптотами.

6.478. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

6.479. Найти площадь петли кривой $x=\frac{1}{3}t(3-t^2)$, $y=t^2$.

6.480. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ и осью Ox.

6.481. Найти площадь петли кривой $x=a(t^2+1)$, $y=b(t^3-3t)$.

6.482. Найти площадь петли кривой $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.

6.483. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1+\sin\varphi)$.

6.484. Найти площадь одного лепестка кривой $r=a\sin 2\varphi$.

6.485. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=a\sin 5\varphi$.

6.486. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r=a\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi$, $r=2a\cos\varphi$ и полярной осью.

6.487. Найти площадь фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной кривыми $r=a\operatorname{tg}\varphi$, $r=\frac{a}{\cos\varphi}$ и полярной осью.

6.488. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя последовательными витками логарифмической спирали $r=e^{\varphi}$, начиная с $\varphi=0$.

6.489. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r^2=2\cos 2\varphi$, $r=1$ $(r\geqslant 1)$.

6.490. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r=a\cos 3\varphi$.

6.491. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2=a^2\sin 2\varphi$.

6.492. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $r=\sqrt{3}\sin\varphi$ и кардиоидой $r=1-\cos\varphi$ (вне кардиоиды).

2. Длина дуги кривой. Если гладкая кривая задана уравнением $y=f(x)$, то длина l ее дуги равна

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

где a и b — абсциссы концов дуги.

Если же кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$, то

$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

Аналогично выражается длина дуги пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt.$$

Если задано полярное уравнение гладкой кривой $r=r(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, то

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$$

Пример 6. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$ от начала координат до точки (4, 8).

◀ Имеем:

$$y=x^{3/2},\quad y'=\frac{3}{2}x^{1/2},$$

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^4=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).\ ▶$$

Пример 7. Найти длину астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

◀ Имеем

$$x_t'=-3a\cos^2 t\sin t,\quad y_t'=3a\sin^2 t\cos t,$$

$$\frac{1}{4}l=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=3a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt=3a\cdot\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3a}{2},$$

откуда $l=6a$. ▶

Пример 8. Найти длину кардиоиды $r=a(1-\cos\varphi)$ $(a>0)$.

◀ Имеем:

$$r'=a\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{2}l=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi=2a\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4a,$$

откуда $l=8a$. ▶

6.493. Найти длину дуги параболы $y=x^2$ от $x=0$ до $x=1$.

6.494. Найти длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками ее пересечения с осью Ox.

6.495. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3$, лежащей внутри параболы $y^2=2px$.

6.496. Найти длину дуги кривой $y=a\ln(a^2-x^2)$ $(a>1)$, лежащей выше оси Ox.

6.497. Найти длину замкнутой кривой $8a^2y^2=x^2(a^2-x^2)$.

6.498*. Найти периметр лунки, образованной окружностями: $x^2+y^2=2ax$ и $x^2+y^2=2by$ $(a>b>0)$.

6.499. Найти длину дуги цепной линии $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x$ от $x=0$ до $x=3$.

6.500. Найти длину дуги кривой $y=\frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ от $x=1/2$ до $x=3/2$.

6.501. Найти длину дуги полукубической параболы $y^2=\frac{5}{p}(x-p)^3$, отсекаемой прямой $x=2p$ $(p>0)$.

6.502. Найти длину дуги кривой $x=a(3\cos t-\cos 3t)$, $y=a(3\sin t-\sin 3t)$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$ $(a>0)$.

6.503. Найти длину дуги кривой $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$ от $t=0$ до $t=1$.

6.504. Найти длину петли кривой $x=t^2$, $y=t\left(\frac{1}{3}-t^2\right)$.

6.505. Найти длину дуги кривой $x=\frac{t^6}{6}$, $y=2-\frac{t^4}{4}$ между точками ее пересечения с осями координат.

6.506. Найти длину петли кривой $x=a(t^2+1)$, $y=\frac{a}{3}(t^3-3t)$ $(a>0)$.

6.507. На циклоиде $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ найти точку, которая делит длину первой арки циклоиды в отношении 1:3, считая от начала координат $(a>0)$.

6.508. Найти длину дуги логарифмической спирали $r=e^{a\varphi}$, находящейся внутри окружности $r=1$ $(a>0)$.

6.509. Найти длину дуги кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r=1$.

6.510*. Найти длину всей кривой $r=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$ $(a>0)$.

6.511. Найти длину дуги спирали Архимеда $r=5\varphi$, находящейся внутри окружности $r=10\pi$.

6.512. Найти длину всей кривой $r=a\sin^4\frac{\varphi}{4}$ $(a>0)$.

Найти длины дуг пространственных кривых:

6.513. $x=at^2$, $y=a\left(t+\frac{1}{3}t^3\right)$, $z=a\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)$ от $t=0$ до $t=\sqrt{3}$ $(a>0)$.

6.514. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ между плоскостями $z=0$ и $z=a$ $(a>0)$.

6.515. $x^2=4y$, $9z^2=16xy$ между плоскостями $x=0$ и $x=4$.

6.516. $x=a\sqrt{t}\cos t$, $y=a\sqrt{t}\sin t$, $z=at$ от $t=0$ до произвольного $t>0$ $(a>0)$.

6.517. $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\cos\frac{t}{2}$ между двумя точками пересечения кривой с плоскостью Oxz.

3. Площадь поверхности вращения. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, вычисляется по формуле

$$Q_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Если дуга задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, то

$$Q_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Если дуга задана в полярных координатах $r=r(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, то

$$Q_x=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$$

Если дуга кривой вращается вокруг произвольной оси, то площадь поверхности вращения выражается интегралом

$$Q=2\pi\int_A^B R\,dl,$$

где R — расстояние от точки на кривой до оси вращения, dl — дифференциал дуги, A и B — пределы интегрирования, соответствующие концам дуги. При этом R и dl должны быть выражены через переменную интегрирования.

Пример 9. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ вокруг оси Ox.

◀ Имеем:

$$y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2},$$

$$y'=\frac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)=-\frac{(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}},$$

$$\sqrt{1+\frac{a^{2/3}-x^{2/3}}{x^{2/3}}}=\frac{a^{1/3}}{|x|^{1/3}}.$$

Следовательно,

$$Q_x=2\cdot 2\pi\int\limits_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}\cdot\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx=4\pi a^{1/3}\int\limits_0^a (a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}x^{-1/3}\,dx=$$

$$=-4\pi a^{1/3}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{(a^{2/3}-x^{2/3})^{5/2}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^a=\frac{12}{5}\pi a^2. \blacktriangleright$$

Пример 10. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг оси Ox.

◀ Имеем:

$$x_t'=a(1-\cos t),\quad y_t'=a\sin t,$$

$$\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}=$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}=2a\sin\frac{t}{2}.$$

Отсюда

$$Q_x=2\pi\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{64}{3}\pi a^2. \blacktriangleright$$

Пример 11. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r=2a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

◀ Имеем:

$$r'=-2a\sin\varphi,$$

$$\sqrt{r^2+(r')^2}=\sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2+4a^2\sin^2\varphi}=4a\cos\frac{\varphi}{2},$$

и, далее,

$$Q_x=2\pi\int\limits_0^{\pi} 2a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=64\pi a^2\int\limits_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=\frac{128}{5}\pi a^2. \blacktriangleright$$

6.518. Найти площадь поверхности (называемой *катеноидом*), образованной вращением дуги цепной линии $y=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x$, $0\leqslant x\leqslant 3$, вокруг оси Ox.

6.519. Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $4x^2+y^2=4$ вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

6.520. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=\frac{1}{3}x^3$ от $x=-1$ до $x=1$.

6.521. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=\frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$ между точками ее пересечения с осью Ox.

6.522. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy дуги полукубической параболы $9ay^2=4x^3$, отсекаемой прямой $x=a$.

6.523. Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $9ay^2=x(3a-x)^2$ вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

6.524. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $y=e^{-x/2}, 0\leqslant x<+\infty$, вокруг оси Ox.

6.525. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $x=a(3\cos t-\cos 3t)$, $y=a(3\sin t-\sin 3t)$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$, вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

6.526. Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x=a(t^2+1)$, $y=\frac{at}{3}(3-t^2)$ вокруг оси Ox.

6.527. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг ее оси симметрии.

6.528. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги эвольвенты окружности $x=a(t\sin t+\cos t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant \pi$, вокруг оси Ox.

6.529. Найти площадь поверхности, образованной вращением окружности $r=2a\sin\varphi$ вокруг полярной оси.

6.530. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$ вокруг касательной в ее вершине $(2a, 0)$.

6.531. Доказать, что площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $r^2=a^2\sin 2\varphi$ вокруг полярной оси, равна площади поверхности сферы радиуса a.

6.532. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $r=a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, вокруг полярной оси.

4. **Объем тела.** Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$, то объем тела вычисляется по формуле

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \tag{6}$$

Пример 12. Найти объем тела, основание которого — круг радиуса a, а сечение плоскостью, перпендикулярной фиксированному диаметру круга, есть равнобедренный треугольник высоты h.

◀ Выберем систему координат так, чтобы плоскость Oxy совпадала с плоскостью круга, начало координат — с его центром, а ось Ox содержала фиксированный диаметр (рис. 56). Получим уравнение окружности в виде $x^2+y^2=a^2$.

Сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть равнобедренный треугольник с основанием $2y=2\sqrt{a^2-x^2}$ и высотой h. Имеем:

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}\,h=h\sqrt{a^2-x^2} \qquad (-a\leqslant x\leqslant a),$$

$$V=h\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2h\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=2h\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a=2h\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\pi a^2 h. \text{ ▶}$$

Выражение для функции $S(x)$ достаточно просто получается в случае тел вращения. Так, если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, вращается вокруг оси Ox или

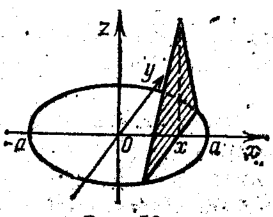


Рис. 56

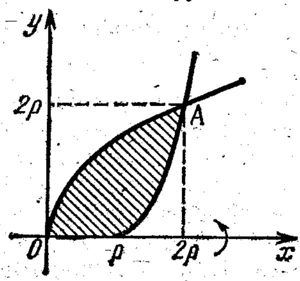


Рис. 57

оси Oy, то объемы тел вращения вычисляются соответственно по формулам:

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx, \tag{7}$$

$$V_y=2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,dx, \qquad a\geqslant 0. \tag{8}$$

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r=r(\varphi)$ и лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения равен

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi\, d\varphi.$$

Вычисление объемов тел значительно проще производится с помощью кратных интегралов. Поэтому мы ограничимся здесь только простейшими задачами.

Пример 13. Фигура, ограниченная кривыми $y=\sqrt{2px}$ и $y=\frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

◀ Найдем точки пересечения кривых:

$$\sqrt{2px}=\frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}, \text{ или } 2p^2x=4(x-p)^3;$$

очевидно, уравнению удовлетворяет значение $x=2p$, и тогда $y=2p$, т. е. имеем точку пересечения $(2p, 2p)$,—рис. 57. Искомый объем есть разность двух объемов: объема V_1, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=\sqrt{2px}$ $(0\leqslant x\leqslant 2p)$, и объема V_2, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной полукубической параболой $y=\frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}$ $(p\leqslant x\leqslant 2p)$.

Используя формулу (7), получаем:

$$V_x=V_1-V_2=$$

$$=\pi\int_0^{2p} y_1^2\,dx-\pi\int_p^{2p} y_2^2\,dx=\pi\cdot 2p\int_0^{2p} x\,dx-\pi\cdot\frac{4}{p}\int_p^{2p}(x-p)^3\,dx=$$

$$=2\pi p\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2p}-\frac{4\pi}{p}\cdot\frac{(x-p)^4}{4}\bigg|_p^{2p}=4\pi p^3-\pi p^3=3\pi p^3. \blacktriangleright$$

Пример 14. Фигура, ограниченная кривой $x=a\cos t$, $y=a\sin 2t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$ и осью Ox, вращается вокруг оси Oy. Найти объем тела вращения.

◀ Очевидно, что $0\leqslant x\leqslant a$ и $0\leqslant y\leqslant a$, а также что $y=0$ при $t=0$ и при $t=\pi/2$, т. е. рассматриваемая фигура является криволинейной трапецией. Далее, при $t=0$ $x=a$, при $t=\pi/2$ $x=0$. Следовательно, искомый объем выражается формулой (8). Имеем:

$$V_y=2\pi\int_0^a x(t)\,y(t)\,dt=2\pi\int_{\pi/2}^{0} a\cos t\cdot a\sin 2t\,(-a\sin t)\,dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac{\pi a^3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=\frac{\pi a^3}{2}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2a^3}{4}. \blacktriangleright$$

Пример 15. Кардиоида $r=a(1-\cos\varphi)$ вращается вокруг полярной оси. Найти объем тела вращения.

$$◀\ V=\frac{2}{3}\pi\int_0^\pi a^3(1-\cos\varphi)^3\sin\varphi\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi a^3\left.\frac{(1-\cos\varphi)^4}{4}\right|_0^\pi=\frac{8}{3}\pi a^3.\ ▶$$

6.533. Найти объем тела, основание которого — область плоскости Oxy, ограниченная астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, а сечение плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть квадрат.

6.534. Найти объем клина, отсеченного от прямого кругового цилиндра радиуса a плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания.

6.535. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$ и $2x+2y-3=0$.

6.536. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=e^{-2x}-1$, $y=e^{-x}+1$, $x=0$.

6.537. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=x+\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

6.538. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{2}+$ $+2x+2$ и $y=2$.

6.539. Найти объем тела, образованного вращением параболического сегмента с основанием $2a$ и высотой h вокруг высоты.

6.540. Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной кривой $x=at^2$, $y=a\ln t$ $(a>0)$ и осями координат, вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

6.541. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $x=a\cos t$, $y=a\sin 2t$ и осью Ox $(0\leqslant x\leqslant a)$.

6.542. Найти объем тела, образованного вращением астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ вокруг прямой $x=a$.

6.543. Найти объем тела, образованного вращением кривой $r=a\sin^2\varphi$ вокруг полярной оси.

6.544. Найти объем тела, образованного вращением лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

6.545*. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{\sin x}{x}$ и осью Ox.

§ 7. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач механики и физики

1. Моменты и центры масс плоских кривых. Если дуга кривой задана уравнением $y=f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и имеет плотность[1] $\rho=\rho(x)$, то статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy равны

$$M_x=\int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$M_y=\int_a^b \rho(x)\, x \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

моменты инерции I_x и I_y относительно тех же осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$I_x=\int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$I_y=\int_a^b \rho(x)\, x^2 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

а координаты центра масс $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — по формулам

$$\overline{x}=\frac{M_y}{l}=\frac{1}{l}\int_a^b \rho(x)\, x \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{l}=\frac{1}{l}\int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

где l — масса дуги, т. е.

$$l=\int_a^b \rho(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Пример 1. Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей Ox и Oy дуги цепной линии $y=\operatorname{ch} x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

◀ Имеем: $y'=\operatorname{sh} x$, $\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}=\operatorname{ch} x$. Следовательно,

$$M_x=\int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 (1+\operatorname{ch} 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{4}(2+\operatorname{sh} 2),$$

---

[1]) Всюду в задачах, где плотность не указана, предполагается, что кривая однородна и $\rho=1$.

$$M_y=\int_0^1 x\operatorname{ch}x\,dx=\int_0^1 x\,d(\operatorname{sh}x)=x\operatorname{sh}x\Big|_0^1-\int_0^1 \operatorname{sh}x\,dx=$$

$$=\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}x\Big|_0^1=\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1,$$

$$I_x=\int_0^1 \operatorname{ch}^3 x\,dx=\int_0^1 (1+\operatorname{sh}^2 x)\operatorname{ch}x\,dx=\left(\operatorname{sh}x+\frac{\operatorname{sh}^3 x}{3}\right)\Big|_0^1=\operatorname{sh}1+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1,$$

$$I_y=\int_0^1 x^2\operatorname{ch}x\,dx=\int_0^1 x^2 d(\operatorname{sh}x)=x^2\operatorname{sh}x\Big|_0^1-2\int_0^1 x\operatorname{sh}x\,dx=$$

$$=\operatorname{sh}1-2\int_0^1 x\,d(\operatorname{ch}x)=\operatorname{sh}1-2\left(x\operatorname{ch}x\Big|_0^1-\int_0^1 \operatorname{ch}x\,dx\right)=$$

$$=\operatorname{sh}1-2\operatorname{ch}1+2\operatorname{sh}1=3\operatorname{sh}1-2\operatorname{ch}1. \ \triangleright$$

Пример 2. Найти координаты центра масс дуги окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, расположенной в первой четверти.

◀ Имеем: $l=\dfrac{\pi a}{2}$, $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $x'_t=-a\sin t$, $y'_t=a\cos t$,

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}=a.$$

Отсюда получаем:

$$M_x=a^2\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt=a^2\sin t\Big|_0^{\pi/2}=a^2,$$

$$M_y=a^2\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt=-a^2\cos t\Big|_0^{\pi/2}=a^2,$$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{l}=\frac{a^2}{\pi a/2}=\frac{2a}{\pi};\quad \bar{y}=\frac{a^2}{\pi a/2}=\frac{2a}{\pi}. \ \triangleright$$

В приложениях часто оказывается полезной следующая

Теорема Гульдена. *Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой ее центром масс.*

Пример 3. Найти координаты центра масс полуокружности $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

◀ Вследствие симметрии $\bar{x}=0$. При вращении полуокружности вокруг оси Ox получается сфера, площадь поверхности которой равна $4\pi a^2$, а длина полуокружности равна πa. По теореме Гульдена имеем

$$4\pi a^2=\pi a\cdot 2\pi\bar{y}.$$

Отсюда $\bar{y}=\dfrac{2a}{\pi}$, т. е. центр масс C имеет координаты $C\left(0,\ \dfrac{2a}{\pi}\right)$. ▶

6.546. Найти статический момент синусоиды $y=\sin x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$ относительно оси Ox.

6.547. Найти статический момент и момент инерции относительно оси Ox дуги кривой $y=e^x$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$.

6.548. Найти статический момент и момент инерции относительно оси Ox одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

6.549. Найти статический момент и момент инерции полуокружности радиуса a относительно ее диаметра.

6.550. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy всей дуги окружности $r=2a\cos\varphi$, лежащей выше полярной оси.

6.551. Найти центр масс дуги цепной линии $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$.

6.552. Найти центр масс всей дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, расположенной выше оси Ox.

6.553. Найти декартовы координаты центра масс дуги кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.

6.554. Пользуясь теоремой Гульдена, найти центр масс дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти.

2. Физические задачи. Некоторые применения определенного интеграла при решении физических задач иллюстрируются ниже в примерах 4—7.

Пример 4. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v=2t+3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

◀ Так как путь, пройденный телом со скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$, выражается интегралом

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt,$$

то имеем:

$$S=\int_0^5 (2t+3t^2)\,dt=(t^2+t^3)\Big|_0^5=150\ (\text{м}). \ ▶$$

Пример 5. Какую работу необходимо затратить для того, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется в бесконечность?

◀ Работа переменной силы $f(x)$, действующей вдоль оси Ox на отрезке $[a, b]$, выражается интегралом

$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Согласно закону всемирного тяготения сила F, действующая на тело массы m, равна

$$F = k\frac{mM}{r^2},$$

где M — масса Земли, r — расстояние массы m от центра Земли, k — гравитационная постоянная. Так как на поверхности Земли, т. е. при $r=R$, имеем $F=mg$, то можем записать $mg = k\frac{mM}{R^2}$. Отсюда находим $kM = gR^2$, а потому

$$F = mg\frac{R^2}{r^2}.$$

Следовательно, искомая работа равна

$$A = \int\limits_R^{R+h} F\,dr = \int\limits_R^{R+h} mg\,R^2\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R+h} = mgR\frac{h}{R+h}.$$

Отсюда при $h\to+\infty$ имеем

$$\lim_{h\to+\infty} A = mgR. \ ▶$$

Пример 6. Вычислить кинетическую энергию однородного кругового конуса, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, если заданы радиус основания конуса R, высота H и плотность γ.

◀ Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, равна $\frac{1}{2}I\omega^2$, где I — момент инерции тела относительно оси вращения. За элементарную массу dm примем массу полого цилиндра высоты h с внутренним радиусом r и толщиной стенок dr (рис. 58). Тогда $dm = 2\pi rh\gamma\,dr$ $(0\leqslant r\leqslant R)$. Из подобия треугольников OCD и OAB имеем

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}, \text{ т. е. } h = H\left(1-\frac{r}{R}\right).$$

Следовательно,

$$dm = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr,$$

и элементарный момент инерции dI равен

$$dI = dm\cdot r^2 = 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3\,dr.$$

Таким образом, момент инерции всего конуса есть

$$I = \int\limits_0^R dI = \int\limits_0^R 2\pi\gamma H\left(1-\frac{r}{R}\right)r^3\,dr = 2\pi\gamma H\left(\frac{R^4}{4}-\frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\gamma HR^4,$$

и кинетическая энергия конуса равна

$$K = \frac{1}{20}\pi\gamma HR^4\omega^2. \ ▶$$

Пример 7. С какой силой жидкость плотности γ давит на вертикальную треугольную пластину с основанием a и высотой h, погруженную в жидкость вершиной вниз так, что основание находится на ее поверхности?

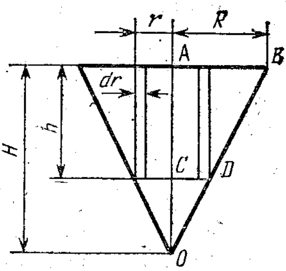


Рис. 58

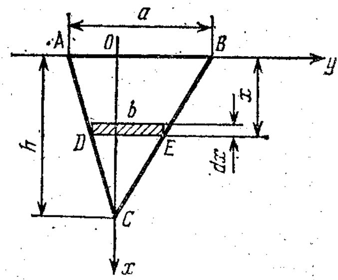


Рис. 59

◀ Согласно закону Паскаля сила P, с которой жидкость плотности γ давит на площадку S при глубине погружения H, равна

$$P=\gamma gHS.$$

Вводя систему координат, показанную на рис. 59, рассмотрим элементарную прямоугольную площадку, находящуюся на глубине x и имеющую основание b и высоту dx. Из подобия треугольников CAB и CDE имеем

$$\frac{b}{a}=\frac{h-x}{h}, \text{ т. е. } b=\frac{a}{h}(h-x),$$

следовательно,

$$dS=b\,dx=\frac{a}{h}(h-x)\,dx,\ dP=\gamma gx\,dS=\frac{\gamma gax}{h}(h-x)\,dx.$$

Таким образом, сила давления жидкости на всю пластину равна

$$P=\int_0^h dP=\frac{\gamma ga}{h}\int_0^h x(h-x)\,dx=\frac{\gamma ga}{h}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{\gamma gah^2}{6}. \ ▶$$

6.555. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха равна $v=v_0-gt$, где t — протекшее время, g — ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту поднимается тело?

6.556. Точка оси Ox совершает гармонические колебания около начала координат со скоростью $v=v_0\cos(\omega t+\varphi)$, где t — время, v_0, ω, φ — постоянные. Найти закон колебания точки и среднее значение абсолютной величины скорости за период колебаний.

6.557. Два тела движутся по одной и той же прямой: первое со скоростью $v_1=3t^2-4t$ (м/с), второе со скоростью $v_2=4(t+3)$ (м/с). Если в начальный момент они были вместе, то в какой момент и на каком расстоянии от начала движения они опять будут вместе?

6.558. Скорость движения точки $v=0{,}1te^{-0{,}02t}$ (м/с). Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки ($v(t_2)=0$).

6.559*. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть пружину на 5 см, если сила в 1 Н растягивает ее на 1 см?

6.560. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой H. Плотность песка γ.

6.561. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из котла, имеющего форму параболоида вращения, обращенного вершиной вверх. Радиус основания R, высота H.

6.562. Вычислить работу, которую надо затратить при постройке пирамиды с квадратным основанием, если высота пирамиды H, сторона основания a, плотность материала γ.

6.563. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вверх. Радиус основания R, высота H.

6.564. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из цистерны, ограниченной поверхностями: $y^2=2pz$, $x=\pm a$, $z=p$ $(p>0)$.

6.565*. Электрический заряд e_0, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд e из точки $(a,\ 0)$ в точку $(b,\ 0)$. Определить работу A силы отталкивания F. Чему равна работа при удалении заряда e в бесконечность?

6.566*. Цилиндр с подвижным поршнем заполнен паром объема $V_0=0{,}2\ \text{м}^3$ с упругостью $p_0=10\,330\ \text{Н/м}^2$. Какую работу надо затратить, чтобы при постоянной температуре (изотермический процесс) объем пара уменьшить в 2 раза?

6.567*. Определить работу, произведенную при адиабатическом сжатии воздуха, имеющего начальные объем $V_0=8\ \text{м}^3$ и давление $p_0=10\,000\ \text{Н/м}^2$ до объема $V_1=2\ \text{м}^3$.

6.568. Найти кинетическую энергию однородного шара радиуса R и плотности γ, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра.

6.569. Найти кинетическую энергию пластинки, имеющей форму параболического сегмента и вращающейся вокруг оси параболы с постоянной угловой скоростью ω. Основание сегмента a, высота h, толщина пластинки d, плотность материала γ.

6.570. Найти кинетическую энергию треугольной пластинки, вращающейся вокруг основания с угловой скоростью ω. Основание пластинки a, высота h, толщина l, плотность γ.

6.571. Найти кинетическую энергию однородного кругового цилиндра плотности γ с радиусом основания R и высотой H, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси.

6.572. С какой силой жидкость плотности γ давит на вертикальную треугольную пластинку с основанием a и высотой h, погруженную в нее так, что вершина находится на поверхности, а основание параллельно поверхности?

6.573. Конец трубы, погруженной в жидкость плотности γ, закрыт круглой заслонкой. Определить силу давления на заслонку, если ее радиус R, а центр находится на глубине H.

6.574. Найти силу, с которой жидкость плотности γ давит на вертикальную стенку, имеющую форму полуэллипса, большая ось которого находится на поверхности жидкости. Большая полуось эллипса a, малая b.

6.575. Найти силу давления жидкости плотности γ, заполняющей круговой цилиндр, на боковые стенки цилиндра, если радиус основания R, высота H.

6.576. Найти массу стержня длины $l = 5$ м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\gamma = 1 + 0{,}1\,x^3$ (кг/м), где x — расстояние от одного из концов стержня.

6.577*. Найти количество тепла, выделяемое переменным током $I = I_0 \cos \omega t$ в течение периода $2\pi/\omega$ в проводнике с сопротивлением R.

6.578*. За какое время вода, наполняющая цилиндрический сосуд с площадью основания $S = 100$ см^2 и высотой $H = 20$ см, вытечет через отверстие на дне площадью $S_0 = 1$ см^2?

6.579.** При установившемся ламинарном (струйном) течении жидкости через трубу круглого сечения радиуса a скорость течения v в точке, находящейся на расстоянии r от оси трубы, дается формулой $v = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2)$, p — разность давлений жидкости на концах трубы, μ — вязкость жидкости, l — длина трубы. Определить расход жидкости Q, т. е. объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени.

6.580*. С какой силой полукольцо радиуса R и массы M притягивает материальную точку m, находящуюся в его центре?

6.581. За какое время вода вытечет из конической воронки, имеющей высоту $H=50$ см, радиус верхнего основания $R=5$ см, радиус нижнего основания $r=0{,}2$ см?

6.582. Определить расход жидкости через водослив прямоугольного сечения. Высота водослива h, ширина a, вязкость жидкости μ.

§ 8. Численное интегрирование функций одной переменной

Численное интегрирование состоит в нахождении интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ от непрерывной функции $f(x)$ *по квадратурной формуле*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(x_k),$$

где коэффициенты a_{nk} — действительные числа и узлы x_k принадлежат $[a, b]$, $k=1, 2, \ldots, n$. Вид суммы

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f(x_k)$$

определяет метод численного интегрирования, а разность

$$R_n(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx - S_n(f)$$

— погрешность метода.

Для метода прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{k=1}^{n} f(x_k), \tag{1}$$

$h=\dfrac{b-a}{n}$ (шаг разбиения), $x_0=a-\dfrac{h}{2}$, $x_k=x_{k-1}+h$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Для метода трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right), \tag{2}$$

$h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_0=a$, $x_k=x_{k-1}+h$ $(k=1, \ldots, n)$.

Для метода Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right), \tag{3}$$

$h=\frac{b-a}{2n}$, $x_0=a$, $x_k=x_{k-1}+h$ $(k=1, 2, \ldots, 2n)$.

Правые части формул прямоугольников (1), трапеций (2) и Симпсона (3) являются интегральными суммами и при $h \to 0$ стремятся к данному интегралу. Однако при фиксированном h каждая из них отличается от соответствующего интеграла на величину $R_n(f)$. По заданной предельной абсолютной погрешности $\varepsilon > 0$ подбирается параметр n, или, что то же самое, шаг h, при котором выполняется неравенство

$$|R_n(f)| < \varepsilon.$$

Величины $R_n(f)$ (в предположении существования входящих в них производных) характеризуются равенствами

$R_n(f)=\frac{b-a}{24} f''(\xi)\,h^2$, $\xi \in [a, b]$, для метода прямоугольников,

$R_n(f)=\frac{b-a}{12} f''(\xi)\,h^2$, $\xi \in [a, b]$, для метода трапеций,

$R_n(f)=-\frac{b-a}{180} f^{(IV)}(\xi)\,h^4$, $\xi \in [a, b]$, для метода Симпсона.

Пример 1. Найти $\ln 2$ с точностью до 10^{-4} из соотношения $\ln 2 = \int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{x}$, вычислив интеграл методом Симпсона.

◀ Для подынтегральной функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, имеем $f^{(IV)}(x)=\frac{24}{x^5}$, откуда $|f^{(IV)}(x)| < 24\cdot 2^5$. Учитывая, что $a=\frac{1}{2}$, $b=1$, $h=\frac{1}{4n}$, получаем

$$|R_n(f)| < \frac{1}{2\cdot 180}\,24\cdot 2^5\left(\frac{1}{4n}\right)^4, \quad \text{или} \quad |R_n(f)| < \frac{1}{120n^4}.$$

Для достижения заданной точности необходимо выполнение неравенства

$$\frac{1}{120n^4} < 10^{-4}, \quad \text{или} \quad n^4 > \frac{10^3}{12},$$

что будет иметь место при $n^4 > 100$. Поэтому следует выбрать $n=4$. Найдя $h=\frac{1}{16}=0{,}0625$, мы заведомо сможем вычислить значения функции с точностью до 10^{-4}. Получим таблицу [1]):

[1]) См. сноску на с. 251.

$x_0=0{,}5$ $x_1=0{,}5625$ $x_2=0{,}6250$ $x_3=0{,}6875$ $x_4=0{,}7500$ $x_5=0{,}8125$ $x_6=0{,}8750$ $x_7=0{,}9375$ $x_8=1$	$f(x_0)=2$ $f(x_8)=1$	$f(x_1)=1{,}7777777$ $f(x_3)=1{,}4545454$ $f(x_5)=1{,}2307692$ $f(x_7)=1{,}0666666$	$f(x_2)=1{,}6$ $f(x_4)=1{,}3333333$ $f(x_6)=1{,}1428571$
	$\sigma_1=3$	$\sigma_2=5{,}5297589$	$\sigma_3=4{,}0761904$

Подсчитав сумму

$$\sigma=\sigma_1+4\sigma_2+2\sigma_3=33{,}271415$$

и $\frac{h}{3}=0{,}0208333$, по формуле Симпсона (3) получаем результат:

$$\ln 2=0{,}6931.$$

Другой способ оценки погрешности метода численного интегрирования состоит в том, что используется асимптотическое равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx-S_{n_{\nu+1}}(f)=\frac{S_{n_{\nu+1}}(f)-S_{n_\nu}(f)}{\lambda^m-1}+o\left(n_{\nu+1}^{-m}\right),$$

где

$$n_{\nu+1}=\lambda n_\nu \quad (\lambda>1), \quad \nu=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

и $m=2$ для методов прямоугольников и трапеций, $m=4$ для метода Симпсона. Вычисления по формулам для нахождения суммы $S_n(f)$ производятся при $n=n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots$ до тех пор, пока не будет выполнено соотношение

$$\frac{\left|S_{n_{\nu+1}}(f)-S_{n_\nu}(f)\right|}{\lambda^m-1}<\varepsilon. \tag{4}$$

Указанный способ называется **правилом Рунге**. Критерием его применимости является соотношение

$$\frac{\left|S_{n_{\nu+1}}(f)-S_{n_\nu}(f)\right|}{\left|S_{n_\nu}(f)-S_{n_{\nu-1}}(f)\right|}\approx\lambda^{-m}.$$

Число $\lambda>1$ выбирается любым, однако предпочтительно равным 2 или 3.

Пример 2. Вычислить методом трапеций с точностью до 10^{-4} интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

◀ Выберем $n_1=10$, $n_2=20$ и вычислим значения подынтегральной функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ соответственно в узлах $x_k^{(1)}=x_0+kh_1=\frac{k}{10}$ ($k=1, 2, \ldots, 10$) и $x_k^{(2)}=x_0+kh_2=\frac{k}{20}$ ($k=1, 2, \ldots, 20$) (см. таблицу 6.1).

Сначала находим сумму $S_{n_1}=\sigma_1\cdot h_1=0{,}9091616$, где $\sigma_1=\frac{f(x_0^{(1)})+f(x_{10}^{(1)})}{2}+\sum_{k=1}^{9} f(x_k^{(1)})$ и $h_1=\frac{1}{10}$. Применяя снова формулу трапеций (2), найдем

$$S_{n_2}=(\sigma_1+\sigma_2)\,h_2=0{,}9094937,$$

где $h_2=\frac{1}{20}$ и $\sigma_2=\sum_{k=1}^{10} f(x_{2k-1}^{(2)})$. Из соотношений $x_k^{(1)}=x_{2k}^{(2)}$,

Таблица 6.1

$x_0^{(1)}=0$	$f(x_0^{(1)})=1$	$x_0^{(2)}=0$	
		$x_1^{(2)}=0{,}05$	$f(x_1^{(2)})=0{,}9999376$
$x_1^{(1)}=0{,}1$	$f(x_1^{(1)})=0{,}9995004$	$x_2^{(2)}=0{,}1$	
		$x_3^{(2)}=0{,}15$	$f(x_3^{(2)})=0{,}9983168$
$x_2^{(1)}=0{,}2$	$f(x_2^{(1)})=0{,}9960238$	$x_4^{(2)}=0{,}2$	
		$x_5^{(2)}=0{,}25$	$f(x_5^{(2)})=0{,}9922778$
$x_3^{(1)}=0{,}3$	$f(x_3^{(1)})=0{,}9867674$	$x_6^{(2)}=0{,}3$	
		$x_7^{(2)}=0{,}35$	$f(x_7^{(2)})=0{,}9792281$
$x_4^{(1)}=0{,}4$	$f(x_4^{(1)})=0{,}9694584$	$x_8^{(2)}=0{,}4$	
		$x_9^{(2)}=0{,}45$	$f(x_9^{(2)})=0{,}9573324$
$x_5^{(1)}=0{,}5$	$f(x_5^{(1)})=0{,}9428091$	$x_{10}^{(2)}=0{,}5$	
		$x_{11}^{(2)}=0{,}55$	$f(x_{11}^{(2)})=0{,}9259358$
$x_6^{(1)}=0{,}6$	$f(x_6^{(1)})=0{,}9068453$	$x_{12}^{(2)}=0{,}6$	
		$x_{13}^{(2)}=0{,}65$	$f(x_{13}^{(2)})=0{,}8857451$
$x_7^{(1)}=0{,}7$	$f(x_7^{(1)})=0{,}8629030$	$x_{14}^{(2)}=0{,}7$	
		$x_{15}^{(2)}=0{,}75$	$f(x_{15}^{(2)})=0{,}8386278$
$x_8^{(1)}=0{,}8$	$f(x_8^{(1)})=0{,}8132501$	$x_{16}^{(2)}=0{,}8$	
		$x_{17}^{(2)}=0{,}85$	$f(x_{17}^{(2)})=0{,}7871027$
$x_9^{(1)}=0{,}9$	$f(x_9^{(1)})=0{,}7605057$	$x_{18}^{(2)}=0{,}9$	
		$x_{19}^{(2)}=0{,}95$	$f(x_{19}^{(2)})=0{,}7337535$
$x_{10}^{(1)}=1$	$f(x_{10}^{(1)})=0{,}7071068$	$x_{20}^{(2)}=1$	
	$\sigma_1=9{,}0916166$		$\sigma_2=9{,}0982576$

$k=0, 1, \ldots, 10$, видно, что для нахождения S_{n_2} нет необходимости заново вычислять каждое из 21 значений функции, а к найденным ранее значениям, вошедшим в сумму σ_1, следует добавить 10 новых значений, образующих сумму σ_2. Полагая в левой части неравенства (4) $\lambda=2$, $m=2$, учитывая значения S_{n_1} и S_{n_2}, получаем

$$\frac{S_{n_2}-S_{n_1}}{3}=0{,}0001106.$$

Поэтому с точностью до 10^{-4} имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}=0{,}9094. \blacktriangleright$$

Пример 3. Составить на фортране программу вычисления методом прямоугольников интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

◀ Задание для ЭВМ целесообразно составить в виде трех программных единиц: основной программы, подпрограммы-функции, вычисляющей значения подынтегральной функции, и подпрограммы-функции, которая осуществляет вычисление интеграла методом прямоугольников.

Основная программа:

```
  EXTERNAL F
  S=RECT (0.,1.,F,20)
  WRITE (3, 1) S
1 FORMAT (' ИНТЕГРАЛ=' F6.4)
  STOP
  END
```

Подпрограмма-функция для вычисления значений подынтегральной функции:

```
  FUNCTION F(X)
  F=1./SQRT(1.+X**3)
  RETURN
  END
```

Подпрограмма-функция вычисления определенного интеграла методом прямоугольников:

```
  FUNCTION RECT(A, B, F, N)
  H=(B-A)/N
  RECT=0.
  X=A-H/2.
  DO 1 I=1,N
  X=X+H
1 RECT=RECT+F (X)
  RECT=RECT*H
  RETURN
  END
```

▶

В задачах 6.583—6.606 вычислить указанные определенные интегралы с точностью до 10^{-4} одним из следующих методов: а) методом прямоугольников, б) методом трапеций, в) методом Симпсона.

6.583. $\int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. **6.584.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$. **6.585.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$.

6.586. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$. **6.587.** $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$. **6.588.** $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{1+x^3}\,dx$.

6.589. $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{1+x^5}\,dx$. **6.590.** $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$. **6.591.** $\int\limits_{0}^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

6.592. $\int\limits_{2}^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$. **6.593.** $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x(1-x)}\,dx$.

6.594. $\int\limits_{0}^{1} x\ln(1+x)\,dx$. **6.595.** $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}\,dx$.

6.596. $\int\limits_{0}^{1} e^{x^3}\,dx$. **6.597.** $\int\limits_{0}^{0,5} e^{\sqrt{x}}\,dx$. **6.598.** $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\ln x}$.

6.599. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$. **6.600.** $\int\limits_{0}^{3,1416} \ln(5+4\cos x)\,dx$.

6.601. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$. **6.602.** $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$.

6.603. $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\sin x}\sin\frac{x}{2}\,dx$. **6.604.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

6.605. $\int\limits_{0,4}^{0,6} \frac{e^x}{x}\,dx$. **6.606.** $\int\limits_{0}^{0,8} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

В задачах 6.607—6.613 составить на фортране подпрограммы для вычисления определенных интегралов, применив указанные методы и выбрав названные параметры, обозначив через A, B и F соответственно начало отрезка интегрирования, его конец и идентификатор подпрограммы-функции, вычисляющей значения подынтегральной функции.

6.607. Подпрограмма-функция вычисления определенного интеграла методом прямоугольников, параметры:

A, B, F, N, где N — число отрезков, на которые разбивается исходный отрезок [A, B].

6.608. Подпрограмма-функция вычисления определенного интеграла методом трапеций, параметры: A, B, F, N.

6.609. Подпрограмма-функция вычисления определенного интеграла методом трапеций, параметры: A, B, F, EPS, где EPS — предельная абсолютная погрешность.

6.610. Подпрограмма-функция вычисления определенного интеграла методом Симпсона, параметры: A, B, F, N.

6.611. Составить на фортране подпрограммы-функции для вычисления значений подынтегральных функций в задачах 6.583—6.606.

6.612. Составить на фортране программу решения задач 6.583—6.606, используя подпрограммы, полученные при решении задач: а) 6.608 и 6.611; б)* 6.607 и 6.611; в) 6.610 и 6.611.

6.613*. Составить на фортране программу решения задач 6.583—6.606, используя подпрограммы, полученные при решении задач 6.609 и 6.611.

Глава 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия

1. Понятие функции нескольких переменных. Всякий упорядоченный набор из n действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ обозначается $(x_1, \ldots, x_n)$ или $P(x_1, \ldots, x_n)$ и называется точкой n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$, числа $x_1, \ldots, x_n$ называются координатами точки $P=P(x_1, \ldots, x_n)$. Расстояние между точками $P(x_1, \ldots, x_n)$ и $P'(x_1', \ldots, x_n')$ определяется формулой

$$\rho(P, P')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+\ldots+(x_n-x_n')^2}.$$

Пусть $D\subset\mathbb{R}^n$ — произвольное множество точек n-мерного арифметического пространства. Если каждой точке $P(x_1, \ldots, x_n)\in D$ поставлено в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $f(P)=f(x_1, \ldots, x_n)$, то говорят, что на множестве D задана *числовая функция* $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$. Множество D называется областью определения, а множество $E=\{u\in\mathbb{R} \mid u=f(P),\ P\in D\}$ — областью значений функции $u=f(P)$.

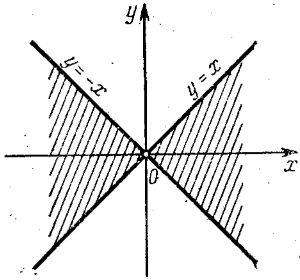


Рис. 60

В частном случае $n=2$ функция двух переменных $z=f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости в трехмерном геометрическом пространстве с фиксированной системой координат $Oxyz$. Графиком этой функции называется множество точек

$$\Gamma=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=f(x, y)\},$$

представляющее собой, вообще говоря, некоторую поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Пример 1. Найти область определения функции

$$z=\arcsin\frac{y}{x}.$$

◀ Функция определена при

$$-1\leqslant\frac{y}{x}\leqslant 1, \qquad x\neq 0.$$

Следовательно, $-x\leqslant y\leqslant x$ при $x>0$ и $x\leqslant y\leqslant -x$ при $x<0$. Область определения функции изображена на рис. 60 (содержит границы, за исключением начала координат). ▶

Пример 2. Пусть $f(x, y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$. Найти $f(3, -2)$, $f(y, x)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$.

◀ Имеем:

$$f(3, -2)=\frac{3^2-(-2)^2}{3\cdot(-2)}=-\frac{5}{6}, \quad f(y, x)=\frac{y^2-x^2}{xy},$$

$$f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{y^2-x^2}{xy}=-f(x, y). \ ▶$$

7.1. Выразить площадь S треугольника как функцию длин двух его сторон x и y, если его периметр равен $2p$. Найти область определения этой функции.

7.2. Выразить объем V кругового конуса как функцию площади S его боковой поверхности и длины l образующей. Найти область определения этой функции.

7.3. Выразить площадь S равнобочной трапеции как функцию длин ее сторон, если x и y — длины оснований, z — длина боковой стороны. Найти область определения этой функции.

Найти области определения функций двух переменных ($R=\text{const}$):

7.4. $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. 7.5. $z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}$.

7.6. $z=\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$. 7.7. $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}$.

7.8. $z=(2x+3y-1)/(x-y)$.

7.9. $z=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$. 7.10. $z=\ln(-x-y)$.

7.11. $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$. 7.12. $z=y\sqrt{\cos x}$.

7.13. $z=\sqrt{\log_a(x^2+y^2)}$. 7.14. $z=\arccos\frac{x}{x+y}$.

7.15. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-4}$.

7.16. $z=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

7.17. $f(r, \varphi)=r\sqrt{\sin\varphi}$. 7.18. $f(r, \varphi)=r\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Найти области определения функций трех переменных:

7.19. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}$ $(R=\text{const})$.

7.20. $u=\arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

7.21. $u=\ln(1-x^2-y^2+z^2)$.

Найти области определения функций n переменных:

7.22. $u=\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}+\ldots+\sqrt{1-x_n^2}$.

7.23. $u=\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\ldots-\frac{x_n^2}{a_n^2}}$.

7.24. Дана функция $f(x, y)=\frac{2x-3y}{3x-2y}$. Найти $f(2, 1)$, $f(1, 2)$, $f(3, 2)$, $f(a, a)$, $f(a, -a)$.

7.25. Дана функция $f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$. Найти $f(-3, 4)$ и $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

7.26. Найти $f(x)$, если $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x>0)$.

7.27. Пусть $z=x+y+f(x-y)$. Найти функции f и z, если $z=x^2$ при $y=0$.

7.28.** Найти $f(x, y)$, если $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$.

7.29. Даны функции: $f(x, y)=x^2+y^2$, $\varphi(x, y)=x^2-y^2$. Найти: а) $f(\varphi(x, y), y^2)$; б) $\varphi(f(x, y), \varphi(x, y))$.

7.30. Даны функции: $\varphi(x, y)=e^x\cos y$, $\psi(x, y)=e^x\sin y$. Доказать:

а) $\varphi^2(x, y)-\psi^2(x, y)=\varphi(2x, 2y)$;

б) $2\varphi(x, y)\psi(x, y)=\psi(2x, 2y)$.

7.31. Даны функции: $f(x, y)=x^2-y^2$, $\varphi(x)=\cos x$, $\psi(x)=\sin x$. Найти: а) $f(\varphi(x), \psi(x))$; б) $\varphi(f(x, y))$.

2. Предел и непрерывность функции. Число A называется *пределом* функции $u=f(P)$ при стремлении точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к точке $P_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из условия

$$0<\rho(P, P_0)=\sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2}<\delta$$

следует

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-A|<\varepsilon.$$

При этом пишут:

$$A=\lim_{P\to P_0} f(P)=\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 3. Выяснить, имеет ли функция $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ предел при $x\to 0$, $y\to 0$?

◀ Пусть точка $P(x, y)$ стремится к точке $P_0(0, 0)$. Рассмотрим изменение x и y вдоль прямой $y=kx$. Получаем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Результат имеет различные значения в зависимости от выбранного k, и поэтому функция предела не имеет. ▶

Функция $u=f(P)$ называется *непрерывной в точке* P_0, если выполнены следующие три условия:

1) функция $f(P)$ определена в точке P_0;
2) существует $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$;
3) $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Функция называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области. Если в точке P_0 хотя бы одно из условий 1)—3) нарушено, то P_0 называется точкой разрыва функции $f(P)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и т. д.

Пример 4. Найти точки разрыва функции

$$u = \frac{1-xyz}{2x+3y-z+4}.$$

◀ Функция не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Поэтому она имеет поверхность разрыва — плоскость $2x+3y-z+4=0$. ▶

Найти пределы:

7.32. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$. **7.33.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy}$.

7.34. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$. **7.35.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

7.36. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

7.37. Показать, что при $x\to 0$ и $y\to 0$ функция $z = \dfrac{x}{y-x}$ может стремиться к любому пределу. Привести примеры такого приближения точки (x, y) к точке $(0, 0)$, при котором $\lim z=3$, $\lim z=2$, $\lim z=1$, $\lim z=-2$.

7.38. Показать, что для функции $f(x, y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$, вычислив повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right).$$

7.39. Показать, что для функции $f(x, y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ существуют и равны между собой повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right)=0,$$

тем не менее $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ не существует.

7.40. Выяснить, имеет ли функция $\sin\ln(x^4+y^2)$ предел при $x\to 0$, $y\to 0$?

7.41. Выяснить, имеет ли функция $\frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ предел при $x\to\infty$, $y\to\infty$?

7.42*. Показать, что функция

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{если}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad x=y=0\end{cases}$$

в точке (0, 0) непрерывна вдоль каждого луча $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$ $(0\leqslant t<+\infty)$, проходящего через эту точку, т. е. $\lim\limits_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0, 0)$, однако эта функция не является непрерывной в точке (0, 0).

7.43. Показать, что в точке (0, 0) следующие функции непрерывны по каждой из переменных x и y, но разрывны по совокупности переменных:

а) $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{если}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad x=y=0;\end{cases}$

б) $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{если}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad x=y=0.\end{cases}$

Найти точки разрыва функций двух переменных:

7.44. $z=\frac{1}{(x-1)^2+(y+1)^2}$. **7.45.** $z=\frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

7.46. $z=\frac{1}{\sin x\sin y}$. **7.47.** $z=\ln(1-x^2-y^2)$.

7.48. $z=\frac{x^2+y^2}{(x+y)(y^2-x)}$. **7.49.** $z=\frac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$.

Найти точки разрыва функций трех переменных:

7.50. $u=\frac{1}{xyz}$. **7.51.** $u=\frac{1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1}$.

7.52. $u=\frac{1}{x^2+y^2-z^2}$. **7.53.** $u=\frac{1}{x^2+y^2-z^2-1}$.

7.54. $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-z^2+1}$.

3. Частные производные. Пусть $(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ — произвольная фиксированная точка из области определения функции $u=f(x_1, \ldots, x_n)$. Придавая значению переменной x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ приращение Δx_k, рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k+\Delta x_k, \ldots, x_n)-f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x_k}.$$

Этот предел называется *частной производной* (*1-го порядка*) данной функции по переменной x_k в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k}(x_1, \ldots, x_n)$.

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования (при этом все переменные, кроме x_k, рассматриваются как постоянные).

Пример 5. Найти частные производные функции

$$z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

◀ Считая y постоянной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Считая x постоянной, получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}. \ ▶$$

Функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *однородной* функцией степени m, если для любого действительного числа $t \neq 0$ справедливо равенство

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)=t^m \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Если однородная степени m функция $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет частные производные по каждой из переменных, то выполняется соотношение (теорема Эйлера)

$$x_1 f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)+x_2 f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\ldots$$
$$\ldots+x_n f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=mf(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 6. Проверить теорему Эйлера, если

$$f(x, y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2.$$

◀ Имеем

$$f(tx, ty)=A(tx)^2+2B(tx)(ty)+C(ty)^2=t^2 f(x, y).$$

Следовательно, $m=2$;

$$f'_x(x, y)=2(Ax+By), \quad f'_y(x, y)=2(Bx+Cy),$$
$$xf'_x(x, y)+yf'_y(x, y)=2x(Ax+By)+2y(Bx+Cy)=2f(x, y). \ ▶$$

Частными производными 2-го порядка функции $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=f''_{x_k x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l}=f''_{x_k x_l}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_n)$$

и т. д.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго.

Результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от очередности дифференцирования при условии, что возникающие при этом «смешанные» частные производные непрерывны.

Пример 7. Найти частные производные 2-го порядка функции $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

◀ Имеем (см. пример 5)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(мы здесь убедились в том, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$),

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \ ▶$$

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков от заданных функций:

7.55. $z=x^5+y^5-5x^3y^3$. **7.56.** $z=xy+\frac{y}{x}$.

7.57. $z=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **7.58.** $z=xe^{-xy}$.

7.59. $z=\frac{\cos y^2}{x}$. **7.60.** $z=y^x$.

7.61. $z=\ln(x^2+y^2)$. **7.62.** $z=\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

7.63. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **7.64.** $u=\left(\frac{y}{x}\right)^z$.

7.65. $u = xy^2z^3t^4 + 3x - 4y + 2z - t + 1$.

7.66. Найти $f'_x(3, 2)$, $f'_y(3, 2)$, $f''_{xx}(3, 2)$, $f''_{xy}(3, 2)$, $f''_{yy}(3, 2)$, если $f(x, y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$.

7.67. Найти $f'_x(1, 2)$, $f'_y(1, 2)$, $f''_{xx}(1, 2)$, $f''_{xy}(1, 2)$, $f''_{yy}(1, 2)$, если $f(x, y) = \int\limits_x^{x^2+y^2} e^t\,dt$.

7.68. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, если $z = x\sin(ax + by)$.

7.69. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, если $z = \cos\dfrac{y}{x}\arccos\dfrac{x}{y}$.

7.70. Найти $f'''_{xxx}(0, 1)$, $f'''_{xxy}(0, 1)$, $f'''_{xyy}(0, 1)$, $f'''_{yyy}(0, 1)$, если $f(x, y) = e^{x^2y}$.

7.71. Найти $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta}$, если $u = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$.

7.72. Найти $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3}$, если $u = x^3\sin y + y^3\sin x$.

7.73. Найти $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p\,\partial y^q}$, если $u = (x - x_0)^p\,(y - y_0)^q$.

В задачах 7.74—7.77 проверить теорему Эйлера об однородных функциях.

7.74. $z = x^3 + x^2y - y^3$. **7.75.** $z = \dfrac{y}{x^3 - y^3}$.

7.76. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **7.77.** $u = \dfrac{x + y + z}{\sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}$.

7.78. Вычислить

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix},$$

если $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$.

7.79. Показать, что $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0$, если $z = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3)\,e^{-y} - x - 1$.

7.80. Показать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{3}{x + y + z}$, если $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$.

7.81. Показать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, если $u = \dfrac{x - y}{z - t} + \dfrac{t - x}{y - z}$.

7.82. Показать, что функция $u = A \sin \lambda x \cos a\lambda t$ удовлетворяет *уравнению колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

7.83. Показать, что функция $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$ удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

7.84. Показать, что функция $u = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

7.85*. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке $(0, 0)$, хотя и разрывна в этой точке.

7.86*. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

значение второй смешанной производной в точке $(0, 0)$ зависит от порядка дифференцирования, а именно: $f''_{xy}(0, 0) = -1$, $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

4. Дифференциал функции и его применение. *Полным приращением* функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, называется разность

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Функция $u = f(P)$ называется *дифференцируемой* в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если всюду в некоторой окрестности этой точки полное приращение функции может быть представлено в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — числа, не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Дифференциалом du *1-го порядка* функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется главная часть полного приращения этой функции в рассматриваемой точке, линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, т. е.

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n.$$

Дифференциалы независимых переменных по определению принимаются равными их приращениям:

$$dx_1 = \Delta x_1, \quad dx_2 = \Delta x_2, \quad \ldots, \quad dx_n = \Delta x_n.$$

Для дифференциала функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ справедлива формула

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n. \tag{1}$$

Функции u, v нескольких переменных подчиняются обычным правилам дифференцирования:

$$d(u+v) = du + dv,$$
$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Пример 8. Найти полное приращение и дифференциал функции $f(x, y) = x^2 y$ в точке (x, y).

◀ $$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)^2 (y+\Delta y),$$
$$\Delta f(x, y) = (x+\Delta x)^2 (y+\Delta y) - x^2 y =$$
$$= 2xy\,\Delta x + x^2 \Delta y + 2x\,\Delta x\,\Delta y + y\,\Delta x^2 + \Delta x^2\,\Delta y,$$
$$df(x, y) = 2xy\,\Delta x + x^2\,\Delta y. \text{ ▶}$$

Пример 9. Найти дифференциал функции

$$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

◀ 1-й способ. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{xz}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{yz}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

По формуле (1) получаем

$$df(x, y, z) = -\frac{xz}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx - \frac{yz}{(x^2+y^2)^{3/2}} dy + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dz =$$
$$= \frac{(x^2+y^2)\,dz - z\,(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

2-й способ. Применяя правила дифференцирования, имеем:

$$df(x, y, z) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dz - z \cdot d\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dz - z \cdot \dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)\,dz - z\,(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \text{ ▶}$$

При достаточно малом $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\ldots+\Delta x_n^2}$ для дифференцируемой функции $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеют место приближенные равенства

$$\Delta u \approx du,$$

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) \approx$$
$$\approx f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+df(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 10. Вычислить приближенно

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}.$$

◀ Искомое число будем рассматривать как значение функции $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ при $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, если $x_0=4$, $y_0=3$ $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Имеем:

$$f(4, 3)=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

$$\Delta f(x, y) \approx df(x, y)=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\Delta f(4, 3) \approx \frac{4\cdot 0{,}05+3\cdot 0{,}07}{5} \approx 0{,}08.$$

Следовательно,

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2} \approx 5+0{,}08=5{,}08. ▶$$

Дифференциалом 2-го порядка d^2u функции $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется дифференциал от ее дифференциала 1-го порядка, рассматриваемого как функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при фиксированных значениях $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$:

$$d^2u=d(du).$$

Аналогично определяется дифференциал 3-го порядка:

$$d^3u=d(d^2u).$$

Вообще,

$$d^mu=d(d^{m-1}u).$$

Дифференциал m-го порядка функции $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые переменные, выражается символической формулой

$$d^mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u, \tag{2}$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

Например, в случае функции $z=f(x, y)$ двух независимых переменных x и y для дифференциалов 2-го и 3-го порядков справедливы формулы

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2, \tag{3}$$

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \tag{4}$$

Пример 11. Найти d^2z, если $z=e^{xy}$.

◀ Имеем (по правилам дифференцирования)

$$dz=e^{xy}\cdot d(xy)=e^{xy}(y\,dx+x\,dy).$$

Дифференцируем вторично, учитывая, что dx и dy не зависят о x и y (т. е. считая dx и dy постоянными):

$$d^2z = e^{xy}\,d(xy)\cdot(y\,dx + x\,dy) + e^{xy}\cdot d(y\,dx + x\,dy) =$$
$$= e^{xy}(y\,dx + x\,dy)^2 + e^{xy}2\,dx\,dy = e^{xy}((y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy). \quad ▶$$

7.87. Найти полное приращение и дифференциал функции $z = x^2 - xy + y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y — от 1 до 1,2.

7.88. Найти полное приращение и дифференциал функции $z = \lg(x^2 + y^2)$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y — от 1 до 0,9.

Найти дифференциалы функций:

7.89. $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$. **7.90.** $z = \operatorname{tg}\frac{y^2}{x}$.

7.91. $z = \ln\cos\frac{x}{y}$. **7.92.** $u = (xy)^z$.

7.93. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{x_2 - x_3}\cdot\ln x_4$.

7.94. Найти $df(1, 2, 1)$, если $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

Вычислить приближенно:

7.95. $(2{,}01)^{3{,}03}$. **7.96.** $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.

7.97. $\sin 28°\cdot\cos 61°$.

7.98. Цилиндрический стакан имеет внутренние размеры: радиус основания $R = 2{,}5$ м, высоту $H = 4$ м и толщину стенок $l = 1$ дм. Найти приближенно объем материала, затраченного на изготовление стакана.

7.99. Прямоугольный параллелепипед имеет измерения: $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 6$ м. Найти приближенно величину изменения длины диагонали параллелепипеда, если a увеличится на 2 см, b — на 1 см, а c уменьшится на 3 см.

7.100. В усеченном конусе радиусы оснований $R = 20$ см, $r = 10$ см, высота $h = 30$ см. Как приближенно изменится объем конуса, если R увеличить на 2 мм, r — на 3 мм и h уменьшить на 1 мм?

Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков следующих функций (x, y, z — независимые переменные):

7.101. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$. **7.102.** $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$.

7.103. $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$. **7.104.** $z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

7.105. $z = (x + y)e^{xy}$. **7.106.** $z = x\ln\frac{y}{x}$.

7.107. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{x + y}$. **7.108.** $u = xy + yz + zx$.

7.109. $u = e^{xyz}$.

7.110. Найти d^3z, если $z=e^y \sin x$.
7.111. Найти d^3u, если $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$.
7.112. Найти d^6u, если $u=\ln(x+y+z)$.
7.113. Найти d^mu, если $u=e^{ax+by+cz}$.

§ 2. Дифференцирование сложных и неявных функций

1. Сложные функции одной и нескольких независимых переменных. Если $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые сами являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t:

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ \ldots,\ x_n=\varphi_n(t),$$

то производная сложной функции $u=f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}. \qquad (1)$$

В частности, если t совпадает, например, с переменной x_1, то «полная» производная функции u по x_1 равна

$$\frac{du}{dx_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dx_1}. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=xyz$, где $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=\operatorname{tg} t$.

◀ По формуле (1) имеем

$$\frac{du}{dt}=yz\cdot 2t+xz\cdot\frac{1}{t}+xy\cdot\sec^2 t=$$
$$=2t\ln t\operatorname{tg} t+\frac{(t^2+1)\operatorname{tg} t}{t}+(t^2+1)\ln t\sec^2 t. \ ▶$$

Пример 2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=y^x$, где $y=\varphi(x)$.

◀ Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$. По формуле (2) получим

$$\frac{dz}{dx}=y^x\ln y+xy^{x-1}\cdot\varphi'(x). \ ▶$$

Пусть $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1=\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $x_2=\varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\ldots$, $x_n=\varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ ($t_1, t_2, \ldots, t_m$ — независимые переменные). Частные производные функции u по $t_1, t_2, \ldots, t_m$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t_1}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_1},\\
\frac{\partial u}{\partial t_2}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial u}{\partial t_m}&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_m}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_m}.
\end{aligned} \qquad (3)$$

При этом выражение (1) из § 1 для дифференциала 1-го порядка сохраняет свой вид (*свойство инвариантности формы первого дифференциала*)

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Выражения для дифференциалов высших порядков сложной функции, вообще говоря, отличаются от выражения вида (2) из § 1.

Например, дифференциал 2-го порядка выражается формулой

$$d^2u=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2u+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}d^2x_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}d^2x_n. \qquad (4)$$

Пример 3. Найти dz и d^2z, если $z=f(u, v)$, где $u=(x^2-y^2)/2$, $v=xy$.

◀ Имеем $dz=f'_u\,du+f'_v\,dv$, где $du=x\,dx-y\,dy$, $dv=y\,dx+x\,dy$. Следовательно,

$$dz=f'_u\cdot(x\,dx-y\,dy)+f'_v\cdot(y\,dx+x\,dy)=(xf'_u+yf'_v)\,dx+(xf'_v-yf'_u)\,dy.$$

Дифференцируем вторично:

$$d^2z=d\,(f'_u)\cdot du+f'_u\cdot d\,(du)+d\,(f'_v)\,dv+f'_v\cdot d\,(dv)=$$
$$=(f''_{uu}\,du+f''_{uv}\cdot dv)\,du+f'_u\cdot d^2u+(f''_{uv}\,du+f''_{vv}\,dv)\,dv+f'_v\cdot d^2v,$$

где $d^2u=dx^2-dy^2$, $d^2v=2dx\,dy$. Следовательно,

$$d^2z=(f''_{uu}\,(x\,dx-y\,dy)+f''_{uv}\,(y\,dx+x\,dy))\,(x\,dx-y\,dy)+$$
$$+f'_u\,(dx^2-dy^2)+(f''_{uv}\,(x\,dx-y\,dy)+f''_{vv}\,(y\,dx+x\,dy))\,(y\,dx+x\,dy)+$$
$$+f'_v\cdot 2\,dx\,dy=f''_{uu}\,(x\,dx-y\,dy)^2+f''_{uv}\,(y\,dx+x\,dy)\,(x\,dx-y\,dy)+$$
$$+f'_u\,(dx^2-dy^2)+f''_{uv}\,(x\,dx-y\,dy)\,(y\,dx+x\,dy)+f''_{vv}\,(y\,dx+x\,dy)^2+$$
$$+2f'_v\,dx\,dy=f''_{uu}\,(x^2\,dx^2-2xy\,dx\,dy+y^2\,dy^2)+2f''_{uv}\,(xy\,(dx^2-dy^2)+$$
$$+(x^2-y^2)\,dx\,dy)+f''_{vv}\,(y^2\,dx^2+2xy\,dx\,dy+x^2\,dy^2)+f'_u\,(dx^2-dy^2)+$$
$$+2f'_v\,dx\,dy=(x^2f''_{uu}+2xyf''_{uv}+y^2f''_{vv}+f'_u)\,dx^2+$$
$$+2\,(xyf''_{vv}+(x^2-y^2)\,f''_{uv}-xyf''_{uu}+f'_v)\,dx\,dy+$$
$$+(y^2f''_{uu}-2xyf''_{uv}+x^2f''_{vv}-f'_u)\,dy^2. \ ▶$$

7.114. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=e^{2x-3y}$, где $x=\operatorname{tg}t$, $y=t^2-t$.

7.115. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=x^y$, где $x=\ln t$, $y=\sin t$.

7.116. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, где $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$.

7.117. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\frac{yz}{x}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$, $z=t^2-1$.

7.118. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=\ln(e^x+e^y)$, где $y=\frac{1}{3}x^3+x$.

7.119. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{y}$, где $y=e^{(x+1)^2}$.

7.120. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2\ln v$, где $u=\frac{y}{x}$, $v=x^2+y^2$.

7.121. Найти dz, если $z=u^2v-v^2u$, где $u=x\sin y$, $v=y\cos x$.

7.122. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=f(u, v)$, где $u=\frac{2y}{x+y}$, $v=x^2-3y$.

7.123. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=f(u, v)$, где $u=\ln(x^2-y^2)$, $v=xy^2$.

7.124. Найти dz, если $z=f(u, v)$, где $u=\cos(xy)$, $v=x^5-7y$.

7.125. Найти dz, если $z=f(u, v)$, где $u=\sin\frac{x}{y}$, $v=\sqrt{x/y}$.

7.126. Найти du, если $u=f(x, y, z)$, где $x=s^2+t^2$, $y=s^2-t^2$, $z=2st$.

7.127. Найти $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, если $u=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $x_3=g(x_1, x_2)$, $x_4=h(x_1, x_2, x_3)$.

7.128. Показать, что функция $z=y\cdot\varphi(\cos(x-y))$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}$.

7.129. Показать, что функция $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)-x^2-y^2$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2$.

7.130. Показать, что функция $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

7.131. Показать, что функция $u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x, z-x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz.$$

7.132. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z=f(u, v)$, где $u=xy$, $v=x/y$.

7.133. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, если $u=f(x, y, z)$, где $z=\varphi(x, y)$.

7.134. Найти все частные производные 2-го порядка от функции $u=f(x, xy, xyz)$.

7.135. Показать, что функция $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

7.136. Показать, что функция $u=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

7.137. Найти d^2u, если $u=f(t)$, где $t=x^2+y^2+z^2$.

7.138. Найти d^2u, если $u=f(ax, by, cz)$.

7.139. Найти d^2z, если $z=f(u, v)$, где $u=x\sin y$, $v=y\cos x$.

2. Неявные функции одной и нескольких независимых переменных. Пусть уравнение $f(x, y)=0$, где f — дифференцируемая функция переменных x и y, определяет y как функцию x. Первая производная этой неявной функции $y=y(x)$ в точке x_0 выражается по формуле

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} \qquad (5)$$

при условии, что $f'_y(x_0, y_0)\neq 0$, где $y_0=y(x_0)$, $f(x_0, y_0)=0$.

Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием формулы (5).

Пример 4. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, если

$$1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0.$$

◀ Обозначим левую часть данного уравнения через $f(x, y)$. Тогда

$$f'_x(x, y)=y-\frac{ye^{xy}-ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}=\frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}},$$

$$f'_y(x, y)=x-\frac{xe^{xy}-xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}=\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}.$$

По формуле (5) получаем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2ye^{-xy}}{2xe^{-xy}}=-\frac{y}{x}.$$

Дифференцируем вторично, учитывая, что y есть функция x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right)=-\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=\frac{y-x\left(-\frac{y}{x}\right)}{x^2}=\frac{2y}{x^2}. \ ▶$$

Пусть уравнение $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)=0$, где F — дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$, определяет u как функцию независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Частные производные этой неявной функции $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $M^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ вычисляются по формулам

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M=M^0} = -\frac{F'_{x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)}{F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0)} \quad (k=1, 2, \ldots, n) \qquad (6)$$

при условии, что $F'_u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u^0) \neq 0$, где $u^0 = u(M^0)$ и $F(M^0, u^0) = 0$.

Можно также найти частные производные функции u следующим образом: вычисляем полный дифференциал функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$, приравниваем его нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F}{\partial u}du = 0$$

и выражаем отсюда du.

Пример 5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

◀ 1-й способ. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x, y, z)$. Тогда

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz,$$
$$F'_y(x, y, z) = 6y^2 - 3xz - 2,$$
$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

По формулам (6) получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3z^2 - 3xy} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}.$$

2-й способ. Дифференцируем данное уравнение:

$$3x^2\,dx + 6y^2\,dy + 3z^2\,dz - 3yz\,dx - 3xz\,dy - 3xy\,dz - 2dy = 0.$$

Отсюда выражаем dz:

$$dz = \frac{3(x^2 - yz)\,dx + (6y^2 - 3xz - 2)\,dy}{3(xy - z^2)}.$$

Сравнивая с формулой $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}. \ ▶$$

7.140. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x^2e^{2y} - y^2e^{2x} = 0$.

7.141. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

7.142. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x+y=e^{x-y}$.

7.143. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $x-y+\operatorname{arctg} y=0$.

7.144. Найти $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$, если $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$.

7.145. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(1, -2, 2)$, если $z^3-4xz+y^2-4=0$.

7.146. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z\ln(x+z)-\frac{xy}{z}=0$.

7.147. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $F(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$.

7.148. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $f(yz,\ e^{xz})=0$.

7.149. Найти dz, если $yz=\operatorname{arctg}(xz)$.

7.150. Найти dz, если $xz-e^{z/y}+x^3+y^3=0$.

7.151. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, если $x^2-2y^2+z^2-4x+$ $+2z-5=0$.

7.152. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $x+y+z=e^z$.

7.153. Найти d^2z, если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

7.154. Показать, что функция z, определяемая уравнением $\varphi(cx-az,\ cy-bz)=0$, где φ — произвольная дифференцируемая функция двух переменных, удовлетворяет уравнению

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

7.155. Показать, что функция z, определяемая уравнением $(x-a\cos\alpha)^2+(y-a\sin\alpha)^2=\left(\frac{z-a}{m}\right)^2$, где a, α, m — постоянные, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=m^2.$$

7.156. Показать, что функция z, определяемая уравнением $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

3. Системы неявных и параметрически заданных функций. Ограничимся рассмотрением функций двух независимых переменных. Пусть система двух уравнений

$$\begin{aligned} F(x, y, u, v) &= 0, \\ G(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$ и $v = v_0$, причем функции F и G имеют в окрестности точки $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ непрерывные частные производные первого порядка, и якобиан

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в точке P_0. Тогда в некоторой окрестности точки P_0 система (7) определяет единственную систему непрерывных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, имеющих непрерывные частные производные и удовлетворяющих условиям

$$u(x_0, y_0) = u_0, \quad v(x_0, y_0) = v_0.$$

Дифференциалы этих функций du и dv (а значит, и частные производные) можно найти из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv &= 0. \end{aligned}$$

Пример 6. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$u + v = x, \quad u - yv = 0.$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

◀ Якобиан системы $\dfrac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1$ отличен от нуля при $y \neq -1$. Дифференцированием находим два уравнения, связывающие дифференциалы всех четырех переменных:

$$du + dv = dx, \quad du - y\,dv - v\,dy = 0.$$

Решая эту систему относительно du и dv при $y \neq -1$, получим

$$du = \frac{y\,dx + v\,dy}{1 + y}, \quad dv = \frac{dx - v\,dy}{1 + y}.$$

Дифференцируем повторно:

$$d^2u = \frac{(dx\,dy + dv\,dy)(1+y) - dy\,(y\,dx + v\,dy)}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{\left(dx\,dy + \frac{dx - v\,dy}{1+y}\,dy\right)(1+y) - dy\,(y\,dx + v\,dy)}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{(1+y)\,dx\,dy + dx\,dy - v\,dy^2 - y\,dx\,dy - v\,dy^2}{(1+y)^2} = \frac{2\,(dx\,dy - v\,dy^2)}{(1+y)^2},$$

$$d^2v = \frac{-dv\,dy\,(1+y) - dy\,(dx - v\,dy)}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{dx - v\,dy}{1+y}\,dy\,(1+y) - dx\,dy + v\,dy^2}{(1+y)^2} =$$

$$= \frac{-dx\,dy + v\,dy^2 - dx\,dy + v\,dy^2}{(1+y)^2} = \frac{2\,(v\,dy^2 - dx\,dy)}{(1+y)^2} = -d^2u. \ ►$$

Пусть функция z независимых переменных x и y задана параметрически уравнениями

$$x = x\,(u,\ v),\quad y = y\,(u,\ v),\quad z = z\,(u,\ v)$$

и

$$\frac{D\,(x,\ y)}{D\,(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

в окрестности точки $P\,(u_0;\ v_0)$. Тогда дифференциал dz этой функции (а значит, и ее частные производные) в окрестности точки P можно найти из системы уравнений

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv.$$

Пример 7. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = cv.$$

◄ Имеем

$$\frac{D\,(x,\ y)}{D\,(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u \neq 0 \quad \text{при} \quad u \neq 0.$$

Дифференцированием находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$dx = \cos v\,du - u\sin v\,dv,\quad dy = \sin v\,du + u\cos v\,dv,\quad dz = c\,dv.$$

Из первых двух уравнений найдем dv:

$$dv = \frac{\cos v\,dy - \sin v\,dx}{u}.$$

Подставим найденное значение dv в третье уравнение:

$$dz = \frac{c}{u}(\cos v\,dy - \sin v\,dx).$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c \sin v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c \cos v}{u}. \ ►$$

7.157. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1, \quad 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0.$$

Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ при $x=1$, $y=-2$, $z=2$.

7.158. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Найти dy, dz, d^2y, d^2z.

7.159. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$xu + yv = 1, \quad x + y + u + v = 0.$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

7.160. Показать, что $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, если $uv = 3x - 2y + z$, $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

7.161. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2v^2$.

7.162. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = a\cos u \operatorname{ch} v$, $y = b\sin u \operatorname{ch} v$, $z = c \operatorname{sh} v$.

7.163. Найти dz, если $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$.

7.164. Найти dz, если $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ $(u \neq v)$.

4. Замена переменных в дифференциальных выражениях. Часто в дифференциальных выражениях входящие в них производные по одним переменным необходимо выразить через производные по новым переменным.

Пример 8. Преобразовать уравнение

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0,$$

полагая $x = \cos t$.

◀ Выразим производные от y по x через производные от y по t:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{-\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sin t\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\cdot\frac{dy}{dt}}{\sin^2 t\cdot(-\sin t)}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Подставим полученные выражения производных в данное уравнение и заменим x на $\cos t$:

$$(1-\cos^2 t)\left(\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3 t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)-\cos t\left(-\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=0,$$

или $\frac{d^2y}{dt^2}=0$. ▶

Пример 9. Преобразовать уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

приняв x за функцию, а y за аргумент.

◀ Выразим производные от y по x через производные от x по y:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\cdot\frac{dy}{dx}=$$

$$=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Подставим эти выражения производных в данное уравнение:

$$-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}+2y\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=0,$$

или

$$\frac{d^2x}{dy^2}-2y\frac{dx}{dy}=0.$$ ▶

Пример 10. Перейти к полярным координатам в выражении

$$A=\frac{x+yy'}{xy'-y}.$$

◀ Имеем

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi;$$
$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,\quad dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi,$$

откуда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi}.$$

Подставим выражения x, y, y' в A:

$$A=\frac{r\cos\varphi+r\sin\varphi\cdot\dfrac{\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi}}{r\cos\varphi\cdot\dfrac{\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi}-r\sin\varphi}=\frac{\dfrac{dr}{d\varphi}}{r}.\ \blacktriangleright$$

Пример 11. Преобразовать уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

перейдя к новым независимым переменным u и v, если $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

◀ Выразим частные производные от z по x и y через частные производные от z по u и v.

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}.$$

По формулам (3) получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=$$
$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{1}{y}\right)y+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}y+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=$$
$$=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}x-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=x\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{1}{y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right)=$$
$$=x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{1}{y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right)=$$
$$=x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x-\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{x}{y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}x-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{x}{y^2}\right)\frac{1}{y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{2}{y^3}\right)=$$
$$=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Подставим найденные выражения производных в данное уравнение:

$$x^2\left(y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)-$$
$$-y^2\left(x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0.$$

После упрощений при $x \neq 0$ и $y \neq 0$ получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2xy}\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}. \ ▶$$

Пример 12. Преобразовать уравнение $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$, приняв за новые независимые переменные величины $u=x^2+y^2$, $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ и за новую функцию $w=\ln z-(x+y)$.

◀ Выразим частные производные от z по x и y через частные производные от w по u и v. Для этого продифференцируем данные соотношения:

$$du=2(x\,dx+y\,dy),$$
$$dv=-\left(\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}\right),$$
$$dw=\frac{dz}{z}-(dx+dy).$$

Учитывая формулу (1) § 1, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial v}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv=\frac{dz}{z}-(dx+dy),$$

или

$$2\frac{\partial w}{\partial u}(x\,dx+y\,dy)-\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2}+\frac{dy}{y^2}\right)=\frac{dz}{z}-(dx+dy),$$

откуда

$$dz=z\left(\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)dx+\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)dy\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right).$$

Подставим эти выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение:

$$yz\left(2x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)-xz\left(2y\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+1\right)=(y-x)z,$$

или $\frac{\partial w}{\partial v}=0.$ ▶

7.165. Преобразовать уравнение

$$x^4\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}-y=0,$$

полагая $x=1/t$.

7.166. Преобразовать уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{(1+x^2)^2}=0,$$

полагая $x=\operatorname{tg} t$.

7.167. Преобразовать уравнение

$$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

приняв y за аргумент.

7.168. Преобразовать уравнение

$$(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2),$$

перейдя к полярным координатам.

7.169. Преобразовать выражение $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$, перейдя к полярным координатам.

7.170. Преобразовать уравнение

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

перейдя к новым независимым переменным u и v, если $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

7.171. Преобразовать уравнение $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$, перейдя к новым независимым переменным u и v, если $u=y$, $v=y/x$.

7.172. Преобразовать выражение $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, перейдя к полярным координатам.

7.173. Преобразовать выражение

$$w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

перейдя от цилиндрических координат к сферическим ($r=\rho\sin\theta$, $\varphi=\varphi$, $z=\rho\cos\theta$).

7.174. Преобразовать уравнение

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,$$

приняв за новые независимые переменные $u = yz - x$, $v = xz - y$ и за новую функцию $w = xy - z$.

7.175. Преобразовать уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x},$$

приняв за новые независимые переменные $u = \frac{x}{y}$, $v = x$ и за новую функцию $w = xz - y$.

7.176. Преобразовать уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z,$$

приняв за новые независимые переменные $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$ и за новую функцию $w = ze^y$.

§ 3. Приложения частных производных

1. Формула Тейлора. Если функция $f(P)$ дифференцируема $m+1$ раз в некоторой окрестности $U(P_0)$ точки $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, то для всякой точки $P(x_1, \ldots, x_n) \in U(P_0)$ справедлива **формула Тейлора**

$$f(P) = f(P_0) + \frac{df(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{1!} + \frac{d^2 f(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{2!} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{d^m f(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{m!} + \frac{d^{m+1} f(\tilde{P}, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)}{(m+1)!}, \qquad (1)$$

где $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_n^0$, а $\tilde{P}$ — некоторая точка указанной окрестности.

В случае, например, функции $f(x, y)$ двух переменных x и y формула Тейлора в развернутом виде записывается следующим образом

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) +\right.$$
$$\left.+ f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\right) + \ldots + \frac{1}{m!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{1}{(m+1)!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 +$$
$$+ \theta_2(y - y_0)), \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1. \qquad (2)$$

Последнее слагаемое в формуле (2) (*остаточный член*) можно короче записать в виде

$$o(\rho^m), \text{ где } \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

(**форма Пеано**).

В частном случае, при $x_0 = y_0 = 0$, формула (2) называется **формулой Маклорена**.

Пример 1. Функцию $f(x, y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y-4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(2, -1)$.

◀ Имеем $f(2, -1)=2$. Вычислим последовательно частные производные данной функции и их значения в точке $(2, -1)$:

$$\begin{array}{ll}
f'_x(x, y)=3x^2-10x-y+10, & f'_x(2, -1)=3;\\
f'_y(x, y)=-x+2y+5, & f'_y(2, -1)=1;\\
f''_{xx}(x, y)=6x-10, & f''_{xx}(2, -1)=2;\\
f''_{xy}(x, y)=-1, & f''_{xy}(2, -1)=-1\\
f''_{yy}(x, y)=2, & f''_{yy}(2, -1)=2;\\
f'''_{xxx}(x, y)=6, & f'''_{xxx}(2, -1)=6.
\end{array}$$

Все последующие производные тождественно равны нулю. По формуле (2) получаем искомое разложение

$$f(x, y)=2+3(x-2)+(y+1)+(x-2)^2-(x-2)(y+1)+(y+1)^2+ \\ +(x-2)^3. \ ▶$$

Пример 2. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, 1)$ до членов 2-го порядка включительно функцию

$$f(x, y)=y^x.$$

◀ Имеем $f(1, 1)=1$. Вычислим частные производные 1-го и 2-го порядка данной функции и их значения в точке $(1, 1)$:

$$\begin{array}{ll}
f'_x(x, y)=y^x \ln y, & f'_x(1, 1)=0;\\
f'_y(x, y)=xy^{x-1}, & f'_y(1, 1)=1;\\
f''_{xx}(x, y)=y^x \ln^2 y, & f''_{xx}(1, 1)=0;\\
f''_{xy}(x, y)=y^{x-1}(x\ln y+1), & f''_{xy}(1, 1)=1;\\
f''_{yy}(x, y)=x(x-1)y^{x-2}, & f''_{yy}(1, 1)=0.
\end{array}$$

По формуле (2) получим

$$f(x, y)=1+(y-1)+(x-1)(y-1)+o(\rho^2),$$

где $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. ▶

7.177. Разложить $f(x+h, y+k)$ по целым положительным степеням h и k, если $f(x, y)=xy^2$.

7.178. Найти приращение, получаемое функцией $f(x, y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ при переходе от значений $x=-2$, $y=1$ к значениям $x_1=-2+h$, $y_1=1+k$.

7.179. Функцию $f(x, y)=x^3-2y^3+3xy$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(2, 1)$.

7.180. Разложить $f(x+h, y+k, z+l)$ по целым положительным степеням h, k, l, если $f(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2+xy-2yz+3x-y-4z+1$.

7.181. Функцию $f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-2(xy+xz+yz)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1, -1, 2)$.

7.182. Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y)=e^y\cos x$.

7.183. Разложить по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно функцию $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

7.184. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1, 1) до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = y/x$.

7.185. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1, 1, 0) до членов 2-го порядка включительно функцию $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$.

7.186. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1, 1) до членов 2-го порядка включительно неявную функцию $z(x, y)$, определяемую уравнением $z^3 + 3yz - 4x = 0$, если $z(1, 1) = 1$.

2. Экстремум функции. Функция $u = f(P)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если существует такая окрестность точки P_0, для всех точек $P(x_1, \ldots, x_n)$ которой, отличных от точки P_0, выполняется неравенство $f(P_0) > f(P)$ (соответственно $f(P_0) < f(P)$). Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*.

Необходимое условие экстремума. Если *дифференцируемая* функция $f(P)$ достигает экстремума в точке P_0, то в этой точке

$$f'_{x_k}(P_0) = 0 \text{ для всех } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

или $df(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) = 0$ тождественно относительно $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

Точки, в которых выполняются условия (3), называются *стационарными* точками функции $u = f(P)$. Таким образом, если P_0 — точка экстремума функции $u = f(P)$, то либо P_0 — стационарная точка, либо в этой точке функция недифференцируема.

Достаточные условия экстремума. Пусть $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — стационарная точка функции $u = f(P)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все ее вторые частные производные непрерывны в точке P_0. Тогда:

1) если второй дифференциал $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ как функция $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ имеет постоянный знак при всевозможных наборах значений $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, не равных одновременно нулю, то функция $u = f(P)$ имеет в очке P_0 экстремум, а именно — максимум при $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) < 0$ и минимум при $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) > 0$;

2) если $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ является знакопеременной функцией $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, т. е. принимает как положительные, так и отрицательные значения, то точка P_0 не является точкой экстремума функции $u = f(P)$;

3) если $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \geqslant 0$ или $d^2u(P_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \leqslant 0$, причем существуют такие наборы значений $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, не равных одновременно нулю, для которых значение второго дифференциала обращается в нуль, то ункция $u = f(P)$ в точке P_0 может иметь экстремум, но может и не иметь его (в этом случае для выяснения вопроса требуется дополнительное исследование).

В частном случае функции двух переменных достаточные условия экстремума можно сформулировать следующим образом. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $z = f(x, y)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все ее вторые частные производные непрерывны в точке P_0. Введем обозначения:

$$A=f''_{xx}(x_0, y_0),\ B=f''_{xy}(x_0, y_0),\ C=f''_{yy}(x_0, y_0)$$

и

$$D=AC-B^2.$$

Тогда:

1) если $D>0$, то функция $z=f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум, а именно — максимум при $A<0$ $(C<0)$ и минимум при $A>0$ $(C>0)$;

2) если $D<0$, то экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$ отсутствует;

3) если $D=0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию

$$z=x^3+y^3-3xy.$$

◀ Найдем частные производные 1-го порядка и составим систему уравнений вида (3):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-y)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-x)=0,$$

или

$$x^2-y=0,$$
$$y^2-x=0.$$

Решая систему, найдем две стационарные точки:

$$P_1(0, 0) \text{ и } P_2(1, 1).$$

Найдем частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

Затем составим дискриминант $D=AC-B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки P_1

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1}=0,\ B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{P_1}=-3,\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1}=0,\ D=-9<0.$$

Следовательно, экстремума в точке P_1 нет.

Для точки P_2

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2}=6,\ B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{P}=-3,\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2}=6,$$

$$D=36-9>0,\ A>0.$$

Следовательно, в точке P_2 функция имеет минимум, равный

$$z_{\min}=z\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=1+1-3=-1.$$

Для того чтобы установить тип стационарной точки, нет необходимости использовать изложенный выше признак, связанный с определением знаков D и A. Достаточно непосредственно исследовать знак второго дифференциала как квадратичной формы dx и dy, используя метод выделения полного квадрата. Так, например, для стационарной точки P_2 имеем:

$$d^2z(P_2;\ dx,\ dy)=6dx^2-3dx\,dy+6dy^2=6\left(dx-\frac{1}{4}dy\right)^2+\frac{45}{8}dy^2,$$

откуда сразу видно, что при любых dx и dy, не равных одновременно нулю, $d^2z>0$ и, следовательно, P_2 — точка минимума. ▶

Найти экстремумы функций двух переменных:

7.187. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

7.188. $z=xy^2(1-x-y)\ (x>0,\ y>0)$.

7.189. $z=3x^2-x^3+3y^2+4y$.

7.190. $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}\quad (x>0,\ y>0)$.

7.191. $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y\ (x>0,\ y>0)$.

7.192. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

7.193. $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

7.194. $z=(2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

7.195. $z=2-\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

Найти экстремумы функций трех переменных:

7.196. $u=x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z$.

7.197. $u=xy^2z^3(1-x-2y-3z)\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$.

7.198. $u=x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{2}{z}$.

Найти экстремумы функций z, заданных неявно:

7.199*. $x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z-7=0$.

7.200. $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$.

3. Условный экстремум. Функция $u=f(P)=f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ имеет *условный максимум (условный минимум)* в точке $P_0(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$, если существует такая окрестность точки P_0, для всех точек P которой ($P\neq P_0$), удовлетворяющих *уравнениям связи*

$$\varphi_k(P)=\varphi_k(x_1,\ \ldots,\ x_n)=0\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ m<n),$$

выполняется неравенство $f(P_0)>f(P)$ (соответственно $f(P_0)<f(P)$).

Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум *функции Лагранжа*

$$L(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m)=f(x_1,\ \ldots,\ x_n)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,\ \ldots,\ x_n);$$

λ_k ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$) называются *множителями Лагранжа.*

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой $n+m$ уравнений

$$\frac{\partial L(P)}{\partial x_i}=0\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{4}$$

$$\varphi_k(P)=0\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

из которой могут быть найдены неизвестные

$$x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1^0,\ \ldots,\ \lambda_m^0,$$

где $x_1^0, \ldots, x_n^0$ — координаты точки, в которой возможен условный экстремум.

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака 2-го дифференциала функции Лагранжа $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n)$ для каждой системы значений $x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$, полученной из (4) при условии, что $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_k(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (k=1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

при $dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 \neq 0$. А именно, функция $f(P)$ имеет условный максимум в точке $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если для всевозможных значений $dx_1, \ldots, dx_n$, удовлетворяющих условиям (5) и не равных одновременно нулю, выполняется неравенство $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n) < 0$, и условный минимум, если при этих условиях $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n) > 0$.

В случае функции $z=f(x, y)$ при уравнении связи $\varphi(x, y)=0$ функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\cdot\varphi(x, y).$$

Система (4) состоит из трех уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial L}{\partial y}=0, \quad \varphi(x, y)=0.$$

Пусть $P_0(x_0, y_0)$, λ_0 — любое из решений этой системы и

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(P_0) & \varphi'_y(P_0) \\ \varphi'_x(P_0) & L''_{xx}(P_0, \lambda_0) & L''_{xy}(P_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(P_0) & L''_{xy}(P_0, \lambda_0) & L''_{yy}(P_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta < 0$, то функция $z=f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ условный максимум; если $\Delta > 0$ — то условный минимум.

Пример 4. Найти условный экстремум функции $z=x+2y$ при $x^2+y^2=5$.

◀ Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2+y^2-5).$$

Имеем $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$.

Система уравнений (4) принимает вид

$$1+2\lambda x = 0,$$
$$2+2\lambda y = 0,$$
$$x^2+y^2=5.$$

Система имеет два решения: $x_1=-1$, $y_1=-2$, $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$; $x_2=1$, $y_2=2$, $\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$. Так как $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda$, то

$$d^2L = 2\lambda(dx^2+dy^2).$$

При $\lambda=\frac{1}{2}$ $d^2L>0$. Поэтому функция имеет условный минимум в точке $P_1(-1, -2)$ и $z_{\min}=-5$. При $\lambda=-\frac{1}{2}$ $d^2L<0$. Поэтому функция имеет условный максимум в точке $P_2(1, 2)$ и $z_{\max}=5$.

Или иначе:

$$\varphi(x, y)=x^2+y^2-5,$$

$$\varphi'_x=2x, \quad \varphi'_y=2y, \quad \varphi'_x(-1, -2)=-2, \ \varphi'_y(-1, -2)=-4,$$

$$L''_{xx}=1, \quad L''_{xy}=0, \quad L''_{yy}=1 \ \text{при} \ \lambda=\frac{1}{2};$$

следовательно,

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=20>0,$$

т. е. функция имеет условный минимум в точке $P_1(-1, -2)$. Аналогично для точки $P_2(1, 2)$

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-20<0,$$

т. е. $P_2(1, 2)$ — точка условного максимума. ▶

Найти условные экстремумы функций:

7.201. $z=x^2+y^2-xy+x+y-4$ при $x+y+3=0$.

7.202. $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ при $x+y=2$.

7.203. $z=\frac{x-y-4}{\sqrt{2}}$ при $x^2+y^2=1$.

7.204. $z=xy^2$ при $x+2y=1$.

7.205. $z=2x+y$ при $x^2+y^2=1$.

7.206. $u=2x+y-2z$ при $x^2+y^2+z^2=36$.

7.207. $u=x^2+y^2+z^2$ при $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

7.208. $u=xy^2z^3$ при $x+2y+3z=12$ $(x>0, y>0, z>0)$.

7.209. $u=xyz$ при $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=5$.

7.210*. Доказать неравенство

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geqslant\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3,$$

если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции. Если функция $f(P)$ дифференцируема в ограниченной замкнутой области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке или в граничной точке области.

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^3+y^3-3xy$ в области

$$0\leqslant x\leqslant 2, \quad -1\leqslant y\leqslant 2.$$

◀ Данная область — прямоугольник.

1) Найдем стационарные точки (см. пример 3): $P_1(0, 0)$ и $P_2(1, 1)$. Значения функции в этих точках: $z_1=0$, $z_2=-1$.

2) Исследуем функцию на границах области.

а) При $x=0$ имеем $z=y^3$. Эта функция монотонно возрастает и на концах отрезка $[-1, 2]$ принимает значения: $z|_{y=-1}=-1$, $z|_{y=2}=8$.

б) При $x=2$ имеем $z=8+y^3-6y$. Найдем значения этой функции в стационарной точке и на концах отрезка $[-1, 2]$. Имеем $z'=3y^2-6$; $z'=0$ при $y^2=2$, или, в данной области, при $y=\sqrt{2}$; $z|_{y=\sqrt{2}}=8+2\sqrt{2}-6\sqrt{2}=8-4\sqrt{2}$; $z|_{y=-1}=13$; $z|_{y=2}=4$.

в) При $y=-1$ имеем $z=x^3-1+3x$ и $z'=3x^2+3>0$. Функция монотонно возрастает от $z|_{x=0}=-1$ до $z|_{x=2}=13$.

г) При $y=2$ имеем $z=x^3+8-6x$; $z'=3x^2-6$; $z'=0$ при $x=\sqrt{2}$; $z|_{x=\sqrt{2}}=8-4\sqrt{2}$; $z|_{x=0}=8$, $z|_{x=2}=6$.

3) Сравнивая все найденные значения функции, заключаем, что $z_{наиб}=13$ в точке $(2, -1)$; $z_{наим}=-1$ в точках $(1, 1)$ и $(0, -1)$. ▶

Пример 6. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую площадь поверхности. Найти эту площадь.

◀ Ванна имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Пусть его измерения равны x, y, z. Так как объем $V=xyz$ задан, то $z=\frac{V}{xy}$. Площадь поверхности ванны равна

$$S=S(x, y)=2(xz+yz)+xy=2(x+y)\frac{V}{xy}+xy=2V\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)+xy.$$

Задача сводится к нахождению минимума функции $S(x, y)$, причем по смыслу задачи $x>0$, $y>0$.

Решая систему уравнений

$$S'_x(x, y)=-\frac{2V}{x^2}+y=0,$$
$$S'_y(x, y)=-\frac{2V}{y^2}+x=0,$$

находим стационарную точку $x_0=y_0=\sqrt[3]{2V}$. Проверим выполнение достаточных условий минимума:

$$S''_{xx}(x, y)=\frac{4V}{x^3}, \quad S''_{xy}(x, y)=1, \quad S''_{yy}(x, y)=\frac{4V}{y^3}.$$

Следовательно,

$$A=S''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})=2, \quad B=S''_{xy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})=1,$$
$$C=S''_{yy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})=2, \quad D=AC-B^2=4-1>0, \quad A>0.$$

Итак, функция $S(x, y)$ имеет минимум при $x=y=\sqrt[3]{2V}$;

тогда $z=\frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}}=\frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$;

$$S_{\min}=2V\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2V}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2V}}\right)+\sqrt[3]{4V^2}=3\sqrt[3]{4V^2}. \blacktriangleright$$

7.211. Найти наибольшее значение функции $z=x-2y+5$ в областях:

а) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$;

б) $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $y-x\leqslant 1$.

7.212. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-xy-x-y$ в области $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 3$.

7.213. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy$ в области $x^2+y^2\leqslant 1$.

7.214. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy^2$ в области $x^2+y^2\leqslant 1$.

7.215. Представить положительное число a в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

7.216. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную сумму длин ребер $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объемом.

7.217. Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d, имеющий наибольший объем.

7.218. Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

7.219. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

7.220. В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

7.221. Из всех треугольников с основанием a и углом α при вершине найти треугольник с наибольшей площадью.

7.222*. На эллипсе $x^2+9y^2=9$ найти точки, наиболее и наименее удаленные от прямой $4x+9y=16$.

7.223*. На эллипсе $x^2+4y^2=4$ даны две точки $A(-\sqrt{3}, 0{,}5)$ и $B(1, \sqrt{3}/2)$. На том же эллипсе найти такую третью точку C, чтобы треугольник ABC имел наибольшую площадь.

7.224. Определить наружные размеры закрытого ящика с заданной толщиной стенок δ и емкостью (внутренней) V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

7.225. На плоскости даны n материальных точек $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n)$ с массами, соответственно равными $m_1, m_2, \ldots, m_n$. При каком положении точки $P(x, y)$ момент инерции системы относительно точки P будет наименьшим?

7.226*. Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделенных одна от другой плоскостью A_1B_1 (рис. 61). Скорость распространения света в первой среде равна v_1, во второй — v_2. Пользуясь принципом

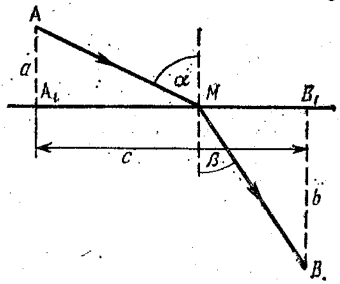


Рис. 61

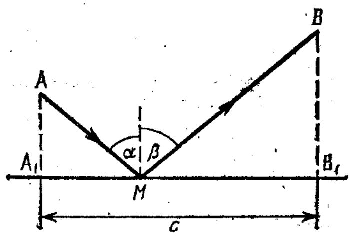


Рис. 62

Ферма, согласно которому световой луч распространяется вдоль той линии AMB, для прохождения которой требуется минимум времени, вывести закон преломления светового луча.

7.227. Пользуясь принципом Ферма, вывести закон отражения светового луча от плоскости в однородной среде (рис. 62).

7.228*. Если в электрической цепи, имеющей сопротивление R, течет ток I, то количество тепла, выделяющегося в единицу времени, пропорционально I^2R. Определить, как следует разветвить ток I на токи $I_1, I_2, \ldots, I_n$ при помощи n проводов, сопротивления которых $R_1, R_2, \ldots, R_n$, чтобы выделение тепла было наименьшим.

5. Геометрические приложения частных производных. *Касательной плоскостью* к поверхности в ее точке M_0 (*точка касания*) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если уравнение поверхности имеет вид

$$F(x, y, z) = 0,$$

то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \qquad (5)$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}. \qquad (6)$$

В случае задания поверхности в явной форме

$$z=f(x,\ y)$$

уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0;\ y_0,\ z_0)$ имеет вид

$$z-z_0=f'_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,\ y_0)(y-y_0),$$

а уравнения нормали —

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,\ y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,\ y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Пример 7. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$$

в точке $M(1,\ 2,\ 3)$.

◀ Обозначив через $F(x,\ y,\ z)$ левую часть уравнения поверхности, найдем частные производные и их значения в точке M:

$$F'_x(x,\ y,\ z)=2x+y-2z, \qquad F'_x(1,\ 2,\ 3)=-2;$$
$$F'_y(x,\ y,\ z)=4y+x+z, \qquad F'_y(1,\ 2,\ 3)=12;$$
$$F'_z(x,\ y,\ z)=-6z+y-2x, \qquad F'_z(1,\ 2,\ 3)=-18.$$

По формулам (5) и (6) имеем

$$-2(x-1)+12(y-2)-18(z-3)=0, \quad \text{или} \quad x-6y+9z-16=0$$

— уравнение касательной плоскости,

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-3}{-18}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9}$$

— уравнения нормали. ▶

Особой точкой плоской кривой $f(x,\ y)=0$ называется точка $M(x_0,\ y_0)$, координаты которой удовлетворяют системе трех уравнений:

$$f(x_0,\ y_0)=0, \quad f'_x(x_0,\ y_0)=0, \quad f'_y(x_0,\ y_0)=0. \qquad (7)$$

Пусть выполнены условия (7), числа

$$A=f''_{xx}(x_0,\ y_0), \quad B=f''_{xy}(x_0,\ y_0), \quad C=f''_{yy}(x_0,\ y_0)$$

не все равны нулю и $\Delta=AC-B^2$. Тогда:

а) если $\Delta>0$, то M — *изолированная точка* (рис. 63).

б) если $\Delta<0$, то M — *узел (двойная точка)* (рис. 64).

в) если $\Delta=0$, то M — либо *точка возврата* 1-*го рода* (рис. 65) или 2-*го рода* (рис. 66), либо *изолированная точка*, либо *точка самоприкосновения* (рис. 67).

Угловой коэффициент $k=y'$ касательной к кривой в особой точке находится из уравнения

$$A+2Bk+Ck^2=0.$$

В случае изолированной точки касательной нет, в узле — две различные касательные; в точке возврата и точке самоприкосновения — одна общая касательная к двум ветвям кривой.

Если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о типе особой точки нужно изучить расположение точек кривой в некоторой окрестности особой точки.

В случае трансцендентной кривой могут быть и иные типы особых точек: *угловые точки*, *точки прекращения* и т. д.

Рис. 63

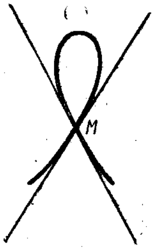


Рис. 64

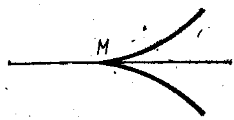


Рис. 65

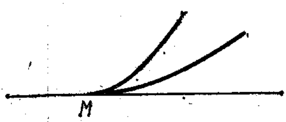


Рис. 66

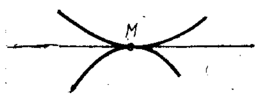


Рис. 67

Пример 8. Исследовать особые точки конхоиды

$$(x^2+y^2)(x-a)^2-b^2x^2=0 \qquad (a>0,\ b>0).$$

◀ Обозначив левую часть уравнения через $f(x, y)$, найдем частные производные и приравняем их нулю:

$$f'_x(x, y) = 2x(x-a)^2+2(x-a)(x^2+y^2)-2b^2x=0,$$
$$f'_y(x, y) = 2y(x-a)^2=0.$$

Система уравнений имеет единственное решение $x_0=y_0=0$, т. е. кривая имеет одну особую точку $O(0, 0)$.

Найдем вторые производные:

$$f''_{xx}(x, y) = 2((x-a)^2+2x(x-a)+x^2+y^2+2x(x-a)-b^2),$$
$$f''_{xy}(x, y) = 4y(x-a),$$
$$f''_{yy}(x, y) = 2(x-a)^2.$$

Вычислив их значения в точке O, получаем

$$A=2(a^2-b^2), \quad B=0, \quad C=2a^2, \quad \Delta = AC-B^2=4a^2(a^2-b^2).$$

Если $a>b$, то $\Delta>0$, и точка O — изолированная (рис. 68). Если $a<b$, то $\Delta<0$, и точка O — узел (рис. 69). Если $a=b$, то $\Delta=0$. Найдем угловой коэффициент касательной:

$$2(a^2-b^2)+2a^2k^2=0, \qquad k=\frac{b^2-a^2}{a^2}=0,$$

т. е. касательная совпадает с осью Ox.

Из уравнения кривой получаем (при $a=b$) $y=\pm\frac{x}{x-a}\times$ $\times\sqrt{2ax-x^2}$, и, следовательно, кривая симметрична относительно оси Ox ($0\leqslant x<a$; $a<x\leqslant 2a$). Поэтому при $a=b$ O — точка возврата 1-го рода (рис. 70). ▶

Огибающей семейства плоских кривых называется линия (или совокупность нескольких линий), которая касается всех кривых данного семейства, причем каждая ее точка является точкой касания.

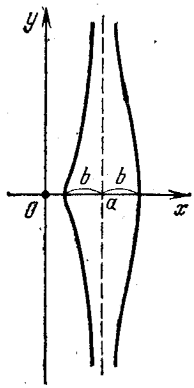


Рис. 68

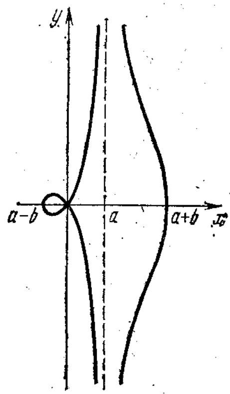


Рис. 69

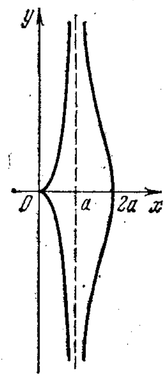


Рис. 70

Если однопараметрическое семейство кривых $f(x, y, \alpha)=0$ имеет огибающую, то ее уравнение можно получить из системы уравнений

$$f(x, y, \alpha)=0, \quad f'_\alpha(x, y, \alpha)=0. \tag{8}$$

Исключая из системы (8) параметр α, получим уравнение вида $D(x, y)=0$. Кривая, определенная этим уравнением, называется *дискриминантной кривой*. Дискриминантная кривая состоит из огибающей и множества особых точек данного семейства.

Пример 9. Уравнение траектории движения снаряда, выпущенного из точки O с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (без учета сопротивления воздуха), есть

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Принимая угол α за параметр, найти огибающую всех траекторий снаряда, расположенных в одной и той же вертикальной плоскости.

◀ Имеем

$$f(x, y, \alpha)=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}-y,$$

$$f'_\alpha(x, y, \alpha)=\frac{x}{\cos^2\alpha}-\frac{gx^2\sin\alpha}{v_0^2\cos^3\alpha}=\frac{x}{\cos^2\alpha}\left(1-\frac{gx}{v_0^2}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Составим систему вида (8)

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

$$\frac{x}{\cos^2\alpha}\left(1 - \frac{gx}{v_0^2}\operatorname{tg}\alpha\right) = 0.$$

Из второго уравнения получим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gx}$ и $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{g^2x^2}{g^2x^2+v_0^4}$. Подставляя в первое уравнение, найдем уравнение огибающей (*парабола безопасности*):

$$y = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g^2x^2+v_0^4}{2v_0^2g}, \quad \text{или} \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \ ▶$$

7.229. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

а) $z = \sin x \cos y$ в точке $(\pi/4, \pi/4, 1/2)$;

б) $z = e^{x\cos y}$ в точке $(1, \pi, 1/e)$.

7.230. Найти расстояние от начала координат до касательной плоскости к поверхности $z = y\operatorname{tg}\frac{x}{a}$ в точке $\left(\frac{\pi a}{4}, a, a\right)$.

7.231. Найти углы, которые образует нормаль к поверхности $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ в точке $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$ с осями координат.

7.232. Для поверхности $z = 4x - xy + y^2$ найти уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $4x + y + 2z + 9 = 0$.

7.233. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

а) $x(y+z)(xy-z)+8=0$ в точке $(2, 1, 3)$;

б) $2^{x/z}+2^{y/z}=8$ в точке $(2, 2, 1)$;

в) $z^2+4z+x^2=0$ в точках пересечения с осью Oz.

7.234. Для поверхности $x^2-z^2-2x+6y=4$ найти уравнения нормали, параллельной прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$.

7.235. На поверхности $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

7.236. Показать, что касательные плоскости к поверхности $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов которых постоянна и равна a^2.

7.237. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям, заданным параметрически, в указанных точках:

а) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r\operatorname{ctg}\alpha$ в точке (r_0, φ_0);

б) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$ в точке (u_0, v_0).

7.238*. Под каким углом пересекаются цилиндр $x^2+y^2=a^2$ и гиперболический параболоид $bz=xy$ в общей точке (x_0, y_0, z_0)?

7.239*. Показать, что следующие поверхности попарно ортогональны:

а) $x^2+y^2+z^2=2ax$ и $x^2+y^2+z^2=2by$;

б) $xyz=a^3$ и $2z^2=x^2+y^2+f(x^2-y^2)$;

в) $xy=az^2$, $x^2+y^2+z^2=b$ и $z^2+2x^2=c(z^2+2y^2)$.

Исследовать особые точки кривых:

7.240. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

7.241. $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$. **7.242.** $x^2+y^4=x^6$.

7.243. $y^2=(x-1)^3$. **7.244.** $(y-2x^2)^2=x^5$.

7.245. $4y^2=x^5+5x^4$. **7.246.** $y^2=ax^2+x^3$.

7.247. $y^2=1-e^{-x^2}$. **7.248.** $y^2=1-e^{-x^3}$.

7.249*. $y=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$. **7.250*.** $y=x^x$.

7.251. Найти огибающую семейства прямых $y=ax+a^2$.

7.252. Найти огибающую семейства прямых $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ($p=\text{const}$, $p>0$).

7.253. Найти огибающую семейства окружностей $x^2+(y-C)^2=R^2$ ($R=\text{const}$).

7.254. Найти огибающую семейства парабол $y^2=2px+p^2$.

7.255. Найти огибающую семейства парабол $y=3a^2+2ax-x^2$.

7.256. Найти огибающую семейства эллипсов $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{(l-a)^2}=1$ ($l=\text{const}$).

7.257. Найти огибающую семейства окружностей, проходящих через начало координат и имеющих центр на параболе $y^2=4ax$.

7.258. Исследовать характер дискриминантных кривых семейства следующих линий (C — переменный параметр):

а) кубических парабол $y-1=(x-C)^3$;

б) полукубических парабол $(y-C)^2=(x-C)^3$;

в) парабол Нейля $(y-1)^3=(x-C)^2$;

г) строфоид $(a-x)(y-C)^2=x^2(a+x)$.

§ 4. Приближенные числа и действия над ними

1. Абсолютная и относительная погрешности. Пусть число a есть *приближение* числа A. Например, $A=\sqrt{3}$ и $a=1{,}7$. При $a > A$ число a называется *приближением по избытку*, при $a < A$ — *по недостатку*. Так, число 1,73 есть приближение $\sqrt{3}$ по недостатку, а число 1,74 — по избытку. *Абсолютная погрешность* приближения (приближенного числа) a определяется равенством

$$\Delta=|a-A|.$$

Поскольку точное число A во многих случаях неизвестно, то неизвестна и абсолютная погрешность Δ, однако при этом может быть указана верхняя грань абсолютной погрешности. Наименьшая из верхних граней Δ_a абсолютной погрешности называется *предельной абсолютной погрешностью*. На практике часто за предельную абсолютную погрешность Δ_a принимают одну из верхних граней. Имеет место включение

$$A\in[a-\Delta_a,\ a+\Delta_a],$$

которое принято записывать в виде $A=a\pm\Delta_a$. Например, $\sqrt{3}= =1{,}7321\pm0{,}0001$.

Относительная погрешность числа a определяется равенством

$$\delta=\frac{\Delta}{a}.$$

Аналогично определяется *предельная относительная погрешность*

$$\delta_a=\frac{\Delta_a}{a}.$$

Например, для $A=\sqrt{3}$ и $a=1{,}7321$

$$\delta_a=\frac{0{,}0001}{1{,}7321}=0{,}00006.$$

В десятичной записи числа *значащей цифрой* или знаком называется любая цифра, отличная от нуля. Нуль считается значащей цифрой в том случае, когда он расположен между значащими цифрами или стоит правее всех значащих цифр.

Округлением числа называется замена его числом с меньшим количеством значащих цифр. При округлении соблюдаются следующие правила:

1) если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые знаки оставляют без изменения:

2) если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;

3) если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а среди следующих за ней цифр есть отличные от нуля, то последний из сохраняемых знаков увеличивают на 1;

4) если первая из отбрасываемых цифр равна 5, а все следующие за ней являются нулями, то последний из сохраняемых десятичных знаков увеличивают на 1, когда он нечетный, и сохраняют неизменным, когда он четный.

Если абсолютная погрешность приближенного числа a не превышает единицы разряда, выражаемого n-й значащей цифрой в десятичной записи этого числа, то a называется *числом, имеющим n верных знаков в широком смысле*. Если же абсолютная погрешность не превышает половины единицы указанного выше разряда, то приближенное число a называется *числом, имеющим n верных знаков в узком смысле*. При этом для предельной относительной погрешности δ_a справедливы неравенства

$$\delta_a \leqslant \frac{1}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \quad \text{и} \quad \delta_a \leqslant \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

соответственно в первом и во втором случаях; в обоих неравенствах k означает первую значащую цифру числа a. Обратно, если предельная относительная погрешность удовлетворяет неравенству

$$\delta_a \leqslant \frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{10^{n-1}},$$

то соответствующее приближенное число a с первой значащей цифрой k имеет n верных знаков в узком смысле.

7.259. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности следующих приближенных чисел, полученных при измерении:

а) 23,015 кг; б) 84,5 см; в) 25°15′.

7.260. При измерении длины пути получен результат 25,2 км с точностью до 2 м, а при измерении площади (аэрофотосъемка) получен результат 1500 м² с точностью до 30 м². Вычислить предельную абсолютную и предельную относительную погрешности обоих результатов.

7.261. При измерении длины участка пути в 10 км допущена ошибка в 10 м, а при измерении диаметра гайки в 4 см допущена ошибка в 1 мм. Какое из этих двух измерений более точное?

7.262. Каковы предельные абсолютная и относительная погрешности приближенных чисел, полученных при округлении:

а) 36,1; б) 0,08.

7.263. Округлить числа 29,15 и 3,25 до первого десятичного знака после запятой.

7.264. Округлить число 5,3726 до тысячных, до сотых и до десятых долей. Найти абсолютную и относительную погрешности каждого из этих трех округлений.

7.265. Округлить до трех значащих цифр следующие числа: 0,02025, 1876672, 599983.

7.266. Определить число верных знаков в узком смысле и дать соответствующую запись приближенных чисел:

а) 413287,51, если предельная относительная погрешность не превышает 1%;

б) 0,0794, если предельная относительная погрешность не превышает 2%.

7.267. Со сколькими знаками нужно взять число $\sqrt{21}$, чтобы предельная относительная погрешность не превышала 1%?

7.268. Со сколькими знаками нужно взять числа $\ln 40$ и $\operatorname{arctg} 2$, чтобы их предельная относительная погрешность не превышала 0,1 %?

2. **Действия над приближенными числами.** Пусть $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — дифференцируемая в рассматриваемой области функция. Тогда предельная абсолютная погрешность Δ_u значения функции определяется соотношением

$$\Delta_u=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|\Delta_{x_k}, \qquad (1)$$

где Δ_{x_k} — предельные абсолютные погрешности значений соответствующих аргументов. Для предельной относительной погрешности имеет место равенство

$$\delta_u=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|\Delta_{x_k}. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти предельные абсолютную и относительную погрешности обьема конуса радиуса r и высоты h, если $r=15\pm 0{,}02$ см, $h=19{,}1\pm 0{,}05$ см и $\pi=3{,}14$.

◀ Имеем $v=\frac{1}{3}\pi r^2h=4498{,}1$ см³. Учитывая, что $r=15$, $h=19{,}1$, $\pi=3{,}14$, $\Delta_r=0{,}02$, $\Delta_h=0{,}05$ и $\Delta_\pi=0{,}0016$, найдем $\frac{\partial v}{\partial \pi}=\frac{1}{3}r^2h=1432{,}5$, $\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{2}{3}\pi rh=599{,}74$ и $\frac{\partial v}{\partial h}=\frac{1}{3}\pi r^2=235{,}5$. Применяя формулу (1), получаем предельную абсолютную погрешность

$$\Delta_v=\left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right|\Delta_\pi+\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|\Delta_r+\left|\frac{\partial v}{\partial h}\right|\Delta_h=26{,}06\text{ см}^3.$$

Предельная относительная погрешность может быть определена из равенства

$$\delta_v=\frac{26{,}1}{4498}=0{,}006.$$

Таким образом, $v=4498\pm 26{,}1$ см³. ▶

Доказать следующие утверждения:

7.269*. Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

7.270*. Предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

7.271*. Предельная относительная погрешность n-й степени в n раз больше предельной относительной погрешности основания.

7.272*. Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя.

7.273*. Предельная абсолютная погрешность Δ_{uv} произведения uv удовлетворяет соотношению $\Delta_{uv}=\Delta_u v+\Delta_v u$.

Произвести указанные действия над приближенными числами, в которых все десятичные знаки являются верными в узком смысле:

7.274. $130{,}6+0{,}255+1{,}15224+41{,}84+11{,}8216$.

7.275. $17{,}83+1{,}07+1{,}1\cdot 10^2$. **7.276.** $153{,}21-81{,}329$.

7.277. $61{,}32-61{,}31$. **7.278.** $35{,}2\cdot 1{,}748$.

7.279. $65{,}3\cdot 78{,}5$. **7.280.** $7{,}6:2{,}314$.

7.281. $170:5$. **7.282.** $40{,}5^3$.

7.283. $\sqrt{54{,}71}$.

7.284. При измерении радиуса круга с точностью до 0,5 см получилось число 12 см. Найти абсолютную и относительную погрешности площади круга.

7.285. Определить абсолютную погрешность десятичного логарифма положительного приближенного числа x, вычисленного с относительной погрешностью δ.

7.286. С какой предельной абсолютной погрешностью следует измерить стороны прямоугольника $a\approx 4$ м и $b\approx 5$ м, чтобы его площадь S можно было вычислить с точностью до 0,1 м²?

◀ Имеем $S=ab$ и $\Delta S=0{,}1$. Предполагая равными слагаемые в формуле (1), получим

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}=\frac{\Delta_u}{n},\ \text{откуда}\ \Delta_{x_i}=\frac{\Delta_u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}$$

(принцип равных влияний). Поэтому, вычисляя частные производные $\frac{\partial S}{\partial a}=b=5$ и $\frac{\partial S}{\partial b}=a=4$, найдем, что

$$\Delta_a=\frac{0{,}1}{2\cdot 5}=0{,}01,\ \Delta_b=\frac{0{,}1}{2\cdot 4}=0{,}0125.$$

Распределяя число 0,1 в формуле для Δ_s между двумя слагаемыми не поровну, а как-нибудь иначе, получим другие значения для Δ_a и Δ_b, обеспечивающие, однако, все ту же предельную абсолютную погрешность. ▶

7.287. С какой абсолютной погрешностью следует измерить сторону x квадрата, чтобы определить площадь этого квадрата с точностью до 0,001 м², если 2 м $<x<$ 3 м?

7.288. Вычислить плотность алюминия, если алюминиевый цилиндр диаметром 2 см и высотой 11 см имеет массу 93,4 г. Относительная погрешность измерения длин равна 0,01, а относительная погрешность определения массы равна 0,001.

7.289. С какой точностью следует определить радиус основания R и высоту H цилиндрической банки, чтобы ее вместимость можно было определить с точностью до 1%?

7.290. С какой точностью следует взять приближенное значение угла $x \approx 25°$, чтобы найти значение $\sin x$ с четырьмя верными знаками в узком смысле?

7.291. С каким числом верных знаков в широком смысле следует взять значение аргумента $x \approx 2$, чтобы получить значение функции $y = e^x$ с точностью до 0,001?

7.292. С каким числом верных знаков должен быть известен свободный член уравнения $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$, чтобы получить корни этого уравнения с четырьмя верными знаками в узком смысле?

7.293. Требуется измерить с точностью в 1% площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого ≈ 2 м и ≈ 1 м, а образующая ≈ 5 м. С какой точностью нужно для этого измерить радиусы и образующую и со сколькими знаками нужно взять число π?

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

1.1. Приближение с недостатком 0,1; 0,10; 0,101. Приближение с избытком: 0,2; 0,11; 0,102. **1.2.** а) $\frac{11}{9}$; б) $\frac{901}{300}$; в) $\frac{2183}{19\,800}$.

1.11. $\log_{1/2}\frac{1}{3} > \log_{1/3}\frac{1}{2}$. **1.12.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$.

1.13. $\log_{\log_8 2}\frac{1}{2} > 1$. **1.18.** $\left\{\frac{7}{6}, \frac{3}{2}\right\}$. **1.19.** $\{-1, 0\}$. **1.20.** $\varnothing$.
1.21. $\{0, 2\}$. **1.22.** $(-\infty, 2]$. **1.23.** $(-\infty, 1]\cup[3, +\infty)$. **1.24.** $(3, 4)$.
1.25. $[1-\sqrt{17}, -1+\sqrt{5}]$. **1.26.** $\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$. **1.27.** $(-\infty, -1]$. **1.28.** а) $\{1, 2\}\subset\{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$; б) обе записи верны. **1.29.** $A=\{0, 1, 2\}$. **1.30.** $A=\{1\}$. **1.31.** $A=\{1, 2, 3, 4\}$. **1.32.** $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. **1.33.** $A=\{1, 2, 3\}$. **1.34.** $A=\{\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$. **1.35.** См. рис. 71. **1.36.** См. рис. 72 (граница заштрихо-

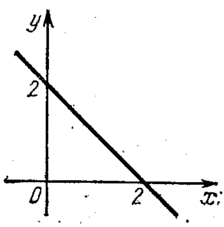


Рис. 71

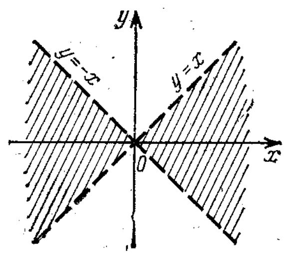


Рис. 72

ванной области не принадлежит множеству). **1.37.** См. рис. 73. **1.38.** См. рис. 74 (штриховая линия не принадлежит множеству). **1.39.** См. рис. 75 (граница заштрихованной области не принадлежит множеству). **1.40.** Точка (2, 2). **1.41.** См. рис. 76. **1.42.** См. рис. 77 (граница заштрихованной области не принадлежит множеству). **1.43.** $A\cup B=\{-5, 3, 4\}$; $A\cap B=\{4\}$; $A\setminus B=\{-5\}$; $B\setminus A=\{3\}$. **1.44.** $\{2, 4, 8\}$. **1.45.** $\{8k \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **1.46.** $\{1, 2, 4\}$. **1.47.** $\{24k \mid k\in\mathbb{N}\}$. **1.49.** $A\cup B=(-1, 4)$; $A\cap B=[1, 2]$; $A\setminus B=(-1, 1)$; $B\setminus A=(1, 4)$. **1.50.** $(0, 1)$. **1.51.** $[0, 1/4]\cup[1/2, 1]$. **1.52.** $\{0\}\cup(1/2, 1)$. **1.53.** $[0, 1/4)\cup(1/4, 3/4)\cup\{1\}$. **1.60.** $\mathbb{Z}$; $\{-1, 0, 1\}$. **1.61.** $\{n\in\mathbb{N} \mid n\neq 3k, k\in\mathbb{N}\}$; $\varnothing$.

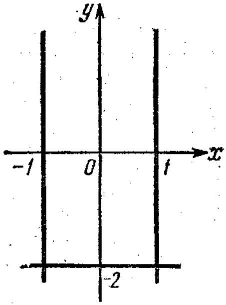


Рис. 73

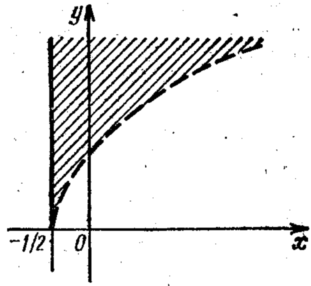


Рис. 74

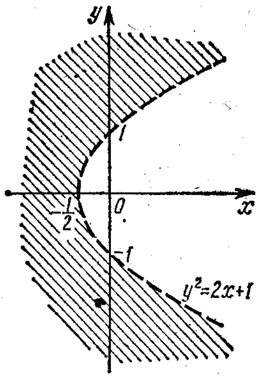


Рис. 75

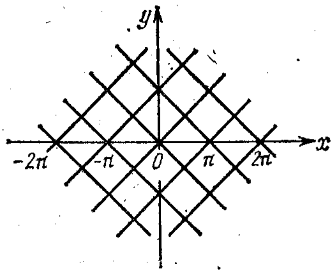


Рис. 76

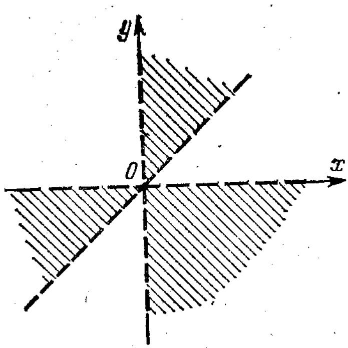


Рис. 77

1.62. $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{1\}$. **1.63.** а) Все точки данного круга; $\varnothing$; б) все точки кольца между данной окружностью и концентрической окружностью вдвое меньшего радиуса; $\varnothing$; в) все точки круга; центр круга. **1.73.** а) $\min X$ не существует; $\max X = 1$; б) $[1, +\infty)$; $(-\infty, 0]$; $\sup X = 1$; $\inf X = 0$. **1.74.** $1/2$; не существует; $1/2$; 0. **1.75.** 1; -1; 1; -1. **1.76.** Не существует; -5; 0; -5. **1.77.** Не существует; не существует; 0; не существует. **1.78.** Не существует; не существует; 1; 0. **1.79.** $\sup X = \sqrt{2}$. **1.83.** а) Истинно; б) ложно; в) истинно; г) ложно. **1.84.** Ложно. **1.85.** Истинно. **1.86.** Ложно. **1.87.** Истинно. **1.88.** Истинно. **1.89.** Ложно. **1.90.** а) Истинно; б) истинно. **1.91.** а) Истинно; б) истинно; в) ложно. **1.92.** а) $f(x_0) = 0$; $f(x_0) \neq 0$. б) $f(x_0) = 0 \wedge \forall x\ (x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) \neq 0)$; $f(x_0) \neq 0 \vee (f(x_0) = 0 \wedge \exists x\ (x \neq x_0 \wedge f(x) = 0))$. в) $\exists x_0\ (f(x_0) = 0) \wedge (\forall x\ (x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \neq 0))$; $\forall x\ (f(x) \neq 0) \vee (\exists x_1, x_2\ (x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) = 0))$. **1.93.** а) $\exists M \forall x \in X\ (x \leqslant M)$; $\forall M \exists x \in X\ (x > M)$. б) $(m \in X) \wedge (\forall x \in X\ (m \leqslant x))$; $(m \notin X) \vee (\exists x \in X\ (x < m))$. в) $(\exists m \in X) \wedge (\forall x \in X\ (m \leqslant x))$; $\forall x' \in X \exists x \in X\ (x < x')$. **1.94.** а) $\exists k \in \mathbb{Z}\ (n = km)$; $\forall k \in \mathbb{Z}\ (n \neq km)$. б) $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \Rightarrow 6 \mid n$; $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \wedge 6 \nmid n$. (З а м е ч а н и е. Так как исходное высказывание истинно, то его отрицание ложно.) в) $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \mid p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p))$; $\exists n \in \mathbb{N}\ (n \mid p \wedge (n \neq 1 \wedge n \neq p))$.

1.95. $R = \sqrt{\dfrac{1}{\pi H}}$. **1.96.** $V = \dfrac{S^2 \sqrt{16\pi^2 - S^2}}{24\pi^2}$. **1.97.** $S = \dfrac{3}{4} \operatorname{tg} \alpha$.

1.98. $v = a(t - t_0)$; $s = \dfrac{a}{2}(t - t_0)^2$; $s = \dfrac{v^2}{2a}$, где $t \geqslant t_0$.

$$1.99.\quad S_{ABNM} = \begin{cases} \dfrac{x^2 h}{a-b}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a-b}{2}, \\ hx + \dfrac{(a-b)h}{4}, & \dfrac{a-b}{2} < x \leqslant \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{a+b}{2} h - \dfrac{(a-x)^2 h}{a-b}, & \dfrac{a+b}{2} < x \leqslant a. \end{cases}$$

1.100. $V = \dfrac{1}{4}\pi h (4R^2 - h^2)$, $D = [0, 2R]$. **1.101.** а) $S = \dfrac{\pi l^2}{2R}\sqrt{4R^2 - l^2}$, $D = [0, 2R]$; б) $S = 4\pi R^2 \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, $D = [0, \pi]$; в) $S = 4\pi R^2 \cos\beta \sin^2\beta$, $D = [0, \pi/2]$. **1.102.** 0, -6, 4. **1.103.** -1, 0, 1, 2, 4. **1.104.** 0, $a^3 - 1$, $a^3 + 3a^2 + 3a$, $a^3 - 3a^2 + 3a - 2$, $16a^3 - 2$. **1.105.** 1, $\dfrac{1+x}{1-x}$, $-\dfrac{x}{2+x}$, $\dfrac{2}{1+x}$, $\dfrac{x-1}{x+1}$, $\dfrac{1+x}{1-x}$. **1.106.** $D = (-3, +\infty)$, $E = (-\infty, +\infty)$. **1.107.** $D = (-\infty, 5/2)$, $E = [0, +\infty)$. **1.108.** $D = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} [4\pi^2 k^2, \pi^2 (2k+1)^2]$, $E = [0, \pi]$. **1.109.** $D = [-3/2, 5/2]$, $E = [0, \pi]$. **1.110.** $D = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left(\dfrac{2\pi}{3}\left(3k + \dfrac{1}{2}\right), \dfrac{2\pi}{3}\left(3k + \dfrac{5}{2}\right)\right)$, $E = [-\infty, \ln 3]$.

1.111. $D = [-1, 1]$, $E = [0, 1]$. **1.112.** $D = (2, 3)$, $E = \left(-\infty, \lg\dfrac{1}{4}\right]$.

1.113. $D = [-1, 1]$, $E = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. **1.114.** $D = [0, 2]$, $E = [1, 2^{\pi}]$.

1.115. $D=(-\infty, +\infty)$, $E=[1/e^2, +\infty)$. **1.116.** $G=[0, 4]$. **1.117.** $G=[1, 2]$. **1.118.** $G=(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$. **1.119.** $G=(0, 1/2]$. **1.120.** $G=(1, 3]$. **1.121.** $G=[0, \sqrt{2}/2)$. **1.122.** $D_0=\{-1\}$, $D_+=(-1, +\infty)$, $D_-=(-\infty, -1)$. **1.123.** $D_0=\{-1, 2\}$, $D_+=(-1, 2)$, $D_-=(-\infty, -1)\cup(2, +\infty)$. **1.124.** $D_0=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$,

$$D_+=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n+1}\right), \quad D_-=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2(n+1)}\right).$$

1.125. $D_0=\{1\}$, $D_+=(-\infty, 0)\cup(1, +\infty)$, $D_-=(0, 1)$. **1.131.** $f(x)=x^2-2$. **1.132.** $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. **1.133.** $f(x)=\sin x$. **1.134.** Четная. **1.135.** Ни четная, ни нечетная. **1.136.** Ни четная, ни нечетная. **1.137.** Нечетная. **1.138.** Ни четная, ни нечетная. **1.139.** Нечетная. **1.141.** $T=2\pi/7$. **1.142.** $T=\pi/2$. **1.143.** Непериодическая. **1.144.** Непериодическая. **1.145.** Непериодическая. **1.146.** $T=6\pi$. **1.147.** Если $a=0$, то обратная функция не существует; если $a\neq 0$, то $y=\dfrac{x-b}{a}$ — обратная функция и $D=(-\infty, +\infty)$. **1.148.** Обратная $y=\sqrt[3]{x}+1$, $D=(-\infty, +\infty)$. **1.149.** Обратная не существует. **1.150.** Обратная $y=\dfrac{1}{2}e^x$, $D=(-\infty, +\infty)$. **1.151.** Обратная $y=2\log_2 x$, $D=(0, +\infty)$. **1.152.** Обратная $y=\dfrac{1-x}{1+x}$, $x\neq -1$. **1.154.** а) $y=-\sqrt{x+1}$, $D=\left[-\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$; б) $y=\sqrt{x+1}$, $D=\left[-\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$. **1.155.** а) $y=\arcsin x$, $D=[-1, 1]$; б) $y=\pi+\arcsin x$, $D=[-1, 1]$. **1.156.** $y=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ x/2, & x>0. \end{cases}$ **1.157.** а) $y=\dfrac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$; б) $y=\pi-\dfrac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$; в) $y=\pi+\dfrac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D=[0, 1]$. **1.159.** $f\circ g=1-x^2$, $g\circ f=(1-x)^2$. **1.160.** $f\circ g=x$, $x>0$; $g\circ f=x$. **1.161.** $f\circ g=x$,

$$g\circ f=\begin{cases} x+\pi, & x\in[-\pi, -\pi/2), \\ x, & x\in[-\pi/2, \pi/2], \\ x-\pi & x\in(\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

1.162. $f\circ g=0$, $g\circ f=g$. **1.163.** а) x; б) $x/\sqrt{1+3x^2}$. **1.164.** $f(u)=\sqrt{u}$, $u=x^2$. **1.165.** $f(u)=\sin u$, $u=\cos v$, $v=\sqrt{x}$. **1.166.** $f(u)=2^u$, $u=\sin v$, $v=x^2$. **1.167.** $f(u)=\arcsin u$, $u=e^v$, $v=\sqrt[3]{x}$. **1.168.** $f(u)=\sin u$, $u=2^v$, $v=x^2$. **1.169.** $f(u)=u^{-1/3}$, $u=v^2$, $v=\operatorname{tg} t$, $t=\log_3 x$. **1.171.** $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right) \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$. **1.172.** $\{(-1, 2), (1, 2)\}$. **1.173.** $\{(2k\pi, k\pi) \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **1.174.** $\{(k\pi, 1) \mid k\in\mathbb{Z}\}$. **1.175.** а) Прямая, проходящая через начало координат и через точку $(1, 2)$; б) прямая, параллельная оси Ox, проходящая через точку $(0, -2)$; в) прямая, проходящая через точку $(0, -1/3)$, параллельная биссектрисе 2-го и

4-го координатных углов. **1.176.** а) Парабола $y=x^2$, смещенная вдоль оси Oy вниз на 1; б) парабола $y=x^2$, растянутая в 2 раза вдоль оси Oy, смещенная вдоль оси Ox вправо на 1; в) парабола $y=x^2$, отраженная относительно оси Ox, сжатая вдоль оси Oy в 2 раза, смещенная вдоль оси Ox влево на 2 и вдоль оси Oy вверх на 3/2. **1.177.** а) Гипербола $y=1/x$, смещенная вдоль оси Oy вниз на 1 и вдоль оси Ox вправо на 1; б) гипербола $y=1/x$, отраженная относительно оси Ox, растянутая вдоль оси Oy в 2 раза, смещенная вдоль оси Oy вниз на 1/2 и вдоль оси Ox влево на 1. **1.178.** а) Синусоида $y=\sin x$, сжатая в 2 раза вдоль оси Ox и смещенная вдоль оси Ox влево на $\pi/6$; б) синусоида $y=\sin x$, отраженная относительно оси Ox, растянутая вдоль оси Oy в 2 раза, растянутая вдоль оси Ox в 2 раза и смещенная вдоль оси Ox вправо на $2\pi/3$. **1.179.** а) Тангенсоида $y=\operatorname{tg} x$, растянутая вдоль оси Oy в 3 раза, растянутая вдоль оси Ox в 3 раза и смещенная вдоль оси Ox влево на $3\pi/4$; б) тангенсоида $y=\operatorname{tg} x$, отраженная относительно оси Ox, сжатая вдоль оси Oy в 2 раза, сжатая вдоль оси Ox в 2 раза и смещенная вдоль оси Ox влево на $3\pi/4$. **1.180.** а) График обратной тригонометрической функции $y=\arcsin x$, растянутый вдоль оси Oy в 4 раза и смещенный вдоль оси Ox вправо на 1; б) график функции $y=\arcsin x$, отраженный относительно оси Ox, сжатый вдоль оси Oy в 3/2 раза и смещенный вдоль оси Ox влево на 1/2. **1.181.** а) График обратной тригонометрической функции $y=\operatorname{arctg} x$, отраженный относительно оси Ox, растянутый вдоль оси Oy в 3 раза и смещенный вдоль оси Ox влево на 5/2; б) график функции $y=\operatorname{arctg} x$, сжатый вдоль оси Oy в 5/2 раза и смещенный вдоль оси Ox вправо на 6. **1.182.** а) График показательной функции $y=2^x$, отраженный относительно оси Oy и смещенный вдоль оси Ox вправо на 1; б) график функции $y=2^x$, отраженный относительно оси Oy, сжатый вдоль оси Ox в 2 раза и смещенный вдоль оси Ox вправо на 1. **1.183.** а) График логарифмической функции $y=\lg x$, смещенный вдоль оси Oy вверх на 1 и вдоль оси Ox вправо на 1/10; б) график функции $y=\lg x$, отраженный относительно оси Ox, смещенный вдоль оси Oy вверх на $\lg 2$ и вдоль оси Ox влево на 4.

1.184 [1].

$$y=\begin{cases} -2x, & x\in(-\infty, -2], \\ 4, & x\in(-2, 2], \\ 2x, & x\in(2, +\infty). \end{cases}$$

1.185.

$$y=\begin{cases} (x+1)^2-1, & x\in(-\infty, 0], \\ x^2, & x\in(0, +\infty). \end{cases}$$

1.186. $y=\begin{cases} (x+3)^2, & x\in(-\infty, 0], \\ (x-3)^2, & x\in(0, +\infty). \end{cases}$

1.187. $y=\begin{cases} 6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2-\frac{25}{24}, & x\in\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right]\cup[0, +\infty), \\ -6\left(x+\frac{1}{12}\right)^2-\frac{23}{24}, & x\in\left(-\frac{1}{6}, 0\right). \end{cases}$

1.188.

$$y=\begin{cases} -(x+1)^2+1, & x\in(-\infty, 1], \\ (x+1)^2-1, & x\in(1, +\infty). \end{cases}$$

1.189.

$$y=\begin{cases} 2(x-1), & x\in(-\infty, 1], \\ 0, & x\in(1, +\infty). \end{cases}$$

---

[1] Здесь и далее ко всем аналогичным задачам этого параграфа в ответе фактически приводится тот вид исходной функции, из которого уже легко получить ее график.

1.190. $y=\begin{cases} 2-\dfrac{7}{x+2}, & x\in(-\infty,\ -2)\cup[3/2,\ +\infty), \\ -2+\dfrac{7}{x+2}, & x\in(-2,\ 3/2). \end{cases}$

1.191. $y=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-\infty,\ -2), \\ -1+\dfrac{1}{x+2}, & x\in(-2,\ 0], \\ 1-\dfrac{3}{x+2}, & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$

1.192. При $x\in(-\infty,\ 0)$ — прямая $y=-1$, при $x\in(0,\ +\infty)$ — прямая $y=1$, при $x=0$ $y=0$. **1.193.** При $x\in[n,\ n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, — прямая $y=n$. **1.194.** При $x\in[n,\ n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$, — прямая $y=x-n$.

1.195. $y=\begin{cases} 2^{-x}-1, & x\in(-\infty,\ 0], \\ 2^{x}-1, & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$

1.196. $y=\begin{cases} 3^{x+1}+2, & x\in(-\infty,\ -1], \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+2, & x\in(-1,\ +\infty). \end{cases}$

1.197. $y=\begin{cases} \log_{1/2}(3-x), & x\in(-\infty,\ 3), \\ \log_{1/2}(x-3), & x\in(3,\ +\infty). \end{cases}$

1.198. $y=\begin{cases} -\log_2(x+1), & x\in(-1,\ 0], \\ \log_2(x+1), & x\in(0,\ +\infty). \end{cases}$

1.199. $y=\begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4}-2k\pi, & x\in\left[2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right],\quad k\in\mathbb{Z}, \\ x+\dfrac{\pi}{4}-(2k+1)\pi, & x\in\left((2k+1)\pi-\dfrac{3\pi}{4},\ (2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

1.200. $y=\begin{cases} 3x-2k\pi, & x\in\left[2k\dfrac{\pi}{3},\ (2k+1)\dfrac{\pi}{3}\right], \\ 3x-(2k+1)\pi, & x\in\left((2k+1)\dfrac{\pi}{3},\ 2(k+1)\dfrac{\pi}{3}\right), \end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}.$

1.201. $y=\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in[2k\pi,\ (2k+1)\pi], \\ \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in((2k+1)\pi,\ 2(k+1)\pi), \end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}.$

1.202. $y=\begin{cases} -\operatorname{arctg}(x-1), & x\in(-\infty,\ 1], \\ \operatorname{arctg}(x-1), & x\in(1,\ +\infty). \end{cases}$

1.203. $y=\begin{cases} x, & x\in\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \\ -x, & x\in\left((2k+1)\pi-\dfrac{\pi}{2},\ (2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}.$

1.204. $y=\begin{cases} \operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in\left[k\pi-\dfrac{\pi}{4},\ k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right], \\ -\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right), & x\in\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4},\ (k+1)\pi-\dfrac{\pi}{4}\right), \end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}.$

1.205. $y=\frac{1}{2}(1-\cos x)$. **1.206.** Отрезок прямой $y=\frac{x}{5}+\frac{2}{5}$, $x\in[-7, 3]$. **1.207.** Оси координат. **1.208.** Кривая, симметричная относительно обеих осей координат; в первой четверти — часть параболы $y=-(x-1)^2+4$ при $x\in[0, 3]$ и часть параболы $y=(x-1)^2-4$ при $x\in(0, +\infty)$. **1.209.** Квадрат с вершинами $(1, 0)$; $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. **1.210.** Квадрат со сторонами $x=\pm 1/2$, $y=\pm 1/2$. **1.211.** Кривая, симметричная относительно обеих осей координат и биссектрисы первого и третьего квадрантов; в области $G=\{(x, y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0, x\geqslant y\}$ — луч $y=x-1$. **1.212.** Кривая, симметричная относительно обеих осей координат; в первом квадранте при $y\leqslant\frac{1}{2}$ — отрезок прямой $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, при $y>\frac{1}{2}$ — отрезок прямой $y=1-\frac{x}{\sqrt{3}}$.

1.213. $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ **1.214.** $2, 0, 6, 0, 10, \ldots$ **1.215.** $-8, 11, \frac{14}{3}, \frac{17}{5}, \frac{20}{7}, \ldots$ **1.216.** $\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \ldots$ **1.217.** $x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$. **1.218.** $x_n=1+(-1)^n$. **1.219.** $x_n=\frac{2n}{2n-1}$. **1.220.** $x_n=n\cos\frac{\pi(n-1)}{2}$. **1.221.** $x_n=(-1)^n\frac{2n+1}{2n-1}$. **1.222.** $x_n=\sin\frac{(n-1)\pi}{4}$. **1.223.** Наибольший член $x_3=4$. **1.224.** Наибольший член $x_5=e$. **1.225.** Наибольший член $x_9=1/6$. **1.226.** Наименьший член $x_2=-22$. **1.227.** Наименьший член $x_8=24$. **1.228.** Наименьший член $x_3=-9/8$. **1.229.** а) $\exists A>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ (|x_n|\leqslant A)$; $\forall A>0\ \exists n\in\mathbb{N}\ (|x_n|>A)$. б) $\forall n\in\mathbb{N}\ (x_n<x_{n+1})$; $\exists n\in\mathbb{N}\ (x_n\geqslant x_{n+1})$. в) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ (n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon)$; $\exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\in\mathbb{N}\ (n>N\wedge|x_n-a|\geqslant\varepsilon)$. г) $\forall E>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ (n>N\Rightarrow|x_n|>E)$; $\exists E>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\in\mathbb{N}\ (n>N\wedge|x_n|\leqslant E)$. д) $\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}\ (|x_n-a|<\varepsilon)$; $\exists\varepsilon>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ (|x_n-a|\geqslant\varepsilon)$. **1.230.** а) $a=1/3$, $N=3$; б) $a=1$, $N=10$; в) $a=0$, $N=999$; г) $a=5/7$, $N=3$. **1.231.** $1/3$. **1.232.** $-5/9$. **1.233.** 0. **1.234.** $-1/2$. **1.235.** 0. **1.236.** 0. **1.237.** $+\infty$. **1.238.** 0. **1.239.** $1/2$. **1.240.** -1. **1.241.** $1/2$. **1.242.** $1/3$. **1.243.** 0. **1.244.** 1. **1.245.** $1/6$. **1.247.** Является. **1.248.** Не является. **1.249.** Не является. **1.250.** Является. **1.251.** $1/3$, 3. **1.252.** $0, \sqrt{2}/2, 1, -\sqrt{2}/2, -1$. **1.253.** $\pi/6, -\pi/6$. **1.255.** $\inf\{x_n\}=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$, $\sup\{x_n\}=2$. **1.256.** $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\inf\{x_n\}=0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=1$, $\sup\{x_n\}=5/4$. **1.257.** Последовательность неограничена сверху и снизу; $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$. **1.258.** $\inf\{x_n\}=-\sqrt{3}$, $\sup\{x_n\}=2\sqrt{3}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.259.** $\inf\{x_n\}=-\frac{1}{2}$, $\sup\{x_n\}=\frac{3}{2}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

1.264. $\forall E>0\ \exists\delta>0\ (0<|x|<\delta\Rightarrow|f(x)|>E)$. **1.265.** $\forall E>0\ \exists\delta>0\ (-\delta<x-1<0\Rightarrow f(x)<-E)$. **1.266.** $\forall\varepsilon>0\ \exists A>0\ (x>A\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon)$. **1.267.** $\forall E>0\ \exists A>0\ (x>A\Rightarrow f(x)>E)$. **1.268.** $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (0<x<\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon)$. **1.269.** $\forall\varepsilon>0\ \exists A>0\ (|x|>A\Rightarrow|f(x)-2|<\varepsilon)$. **1.270.** $\forall E>0\ \exists A>0\ (x<-A\Rightarrow f(x)<-E)$.

1.271. $\forall E>0\ \exists A>0\ (x<-A \Rightarrow |f(x)|>E)$. **1.272.** -2. **1.273.** 2. **1.274.** $-\infty$. **1.275.** 0. **1.276.** $\mp\infty$. **1.277.** 0. **1.278.** m/n. **1.279.** $3x^2$. **1.280.** 6. **1.281.** $(a-1)/3a^2$. **1.282.** 1/4. **1.283.** $+\infty$. **1.284.** n. **1.285.** 0. **1.286.** $-1/2$. **1.288.** 3/5. **1.289.** 1/6. **1.290.** $\sqrt{2}/2$. **1.291.** $1/2\sqrt{x}$. **1.292.** 3. **1.293.** $+\infty$. **1.294.** $\sqrt{2/3}$. **1.295.** $1/n$. **1.296.** m/n. **1.297.** 3/2. **1.298.** $3\sqrt[6]{2}/2$. **1.299.** 0. **1.300.** 1/2. **1.301.** $-7/4$. **1.302.** 2. **1.303.** 3. **1.304.** 7/3. **1.305.** $1/\pi$. **1.306.** 3/4. **1.307.** 2. **1.308.** $(\alpha^2-\beta^2)/2$. **1.309.** 0. **1.310.** $-\alpha/\pi$. **1.311.** $-\sqrt{2}/4$. **1.312.** 1. **1.313.** 0 при $n>m$, 1 при $n=m$, $+\infty$, при $n<m$. **1.314.** 4. **1.315.** 1/2. **1.316.** 25/16. **1.317.** ◀ Замечая, что $\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a(1+x)^{1/x}$, и воспользовавшись непрерывностью функции $f(x)=\log_a x$ (см. задачу 1.381), можем записать: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)=\log_a e$. ▶ **1.318.** ● Сделать замену $a^x-1=y$. **1.319.** ● Сделать замену $(1+x)^a-1=y$. Тогда $a\ln(1+x)=\ln(1+y)$. Следовательно, $\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=\dfrac{y}{x}=\dfrac{y}{\ln(1+y)}\cdot a\cdot\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. **1.320.** e^{10}. **1.321.** e^{10}. **1.322.** $e^{-1/2}$. **1.323.** e^3. **1.324.** 2. **1.325.** 1. **1.326.** $\ln a$. **1.327.** $a\ln a$. **1.328.** $\dfrac{1}{a}\log_a e$. **1.329.** $a-b$. **1.330.** 1. **1.331.** $-1/2$. **1.332.** e. **1.333.** $1/e$. **1.338.** $+1$, -1. **1.339.** $-\infty$, $+\infty$. **1.340.** $+\infty$, 0. **1.341.** 0, $+\infty$. **1.342.** $\pi/2$, $-\pi/2$. **1.343.** 0, -1. **1.344.** 2, -2. **1.345.** -2, -2. **1.349.** 3/2. **1.350.** 2/3. **1.351.** 1. **1.352.** 3. **1.353.** 1. **1.354.** 3. **1.355.** 1/3. **1.356.** 1/2. **1.357.** 1/2. **1.358.** 1/2. **1.360.** 0,97. **1.361.** 5,03. **1.362.** 1,15. **1.363.** 0,88. **1.366.** $-\ln 10$. **1.367.** 3. **1.368.** -2. **1.369.** 2/3. **1.370.** 8/9. **1.371.** $3\sqrt{2}/2$. **1.372.** 3. **1.373.** 1. **1.374.** 1/2. **1.375.** 2/3. **1.376.** 2. **1.377.** 1/6. **1.384.** $A=3$. **1.385.** $a=2$. **1.386.** $b=\pi a/2$. **1.387.** $x_1=0$, $x_2=1$ — точки разрыва второго рода. **1.388.** $x=5/3$ — точка разрыва первого рода. **1.389.** $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=n$. **1.390.** $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=1$. **1.391.** $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=1$. **1.392.** $x_1=2$, $x_2=-2$ — точки разрыва второго рода. **1.393.** $x=0$ — точка разрыва первого рода. **1.394.** $x=-2$ — точка разрыва первого рода. **1.395.** $x=2$ — точка разрыва первого рода. **1.396.** $x=0$ — точка устранимого разрыва, $f(0)=2$; $x=\pm 1$ — точки разрыва второго рода. **1.397.** $x_1=0$ — точка устранимого разрыва, $f(0)=-1$; $x_2=1$ — точка устранимого разрыва, $f(1)=0$; $x_3=-1$ — точка разрыва второго рода. **1.398.** $x=0$ — точка устранимого разрыва; $f(0)=1/2$. **1.399.** $x=1$ — точка разрыва первого рода. **1.400.** $x=1$ — точка разрыва первого рода. **1.401.** $x=2{,}5$ — точка разрыва первого рода. **1.402.** $x=\pi/4$ — точка разрыва первого рода. **1.408.** $(\forall\varepsilon>0\ \forall x_0\in D\ \exists\delta>0\ (|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon))\wedge(\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x',\ x''\in D\ (|x'-x''|<\delta\wedge |f(x')-f(x'')|>\varepsilon))$. **1.411.** Равномерно непрерывна. **1.412.** Не является равномерно непрерывной. **1.413.** Равномерно непрерывна. **1.414.** Не является равномерно непрерывной. **1.415.** Равномерно непрерывна. **1.416.** Не является равномерно непрерывной. **1.417.** Не является равномерно непрерывной.

1.421. $9+7i$. **1.422.** $-3+4i$. **1.423.** $-4i$. **1.424.** $-29+22i$. **1.426.** $\dfrac{5}{17}-\dfrac{3}{17}i$. **1.427.** i. **1.428.** $\dfrac{14}{5}i$. **1.429.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$. **1.430.** $x=2$, $y=3$. **1.431.** $x=1/3$, $y=1/4$. **1.432.** $z_1=1$, $z_2=i$. **1.433.** $z_1=2+i$,

$z_2=2-i$. **1.434.** $z_1=1+it$, $z_2=t$, $t\in R$. **1.435.** $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$. **1.436.** $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. **1.437.** $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **1.438.** $\cos\frac{3\pi}{2}+$ $+i\sin\frac{3\pi}{2}$. **1.439.** $\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$. ● Определить угол φ, удовлетворяющий условиям: $\varphi\in[0, 2\pi)$, $\cos\varphi=-\cos\frac{\pi}{7}$, $\sin\varphi=\sin\frac{\pi}{7}$. **1.440.** $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$. **1.441.** $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$. **1.448.** а) $-4i$, $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $10-2i$, $-\frac{7}{4}-\frac{17}{4}i$. **1.450.** $\frac{3}{2}-2i$. **1.451.** $\frac{3}{4}+i$. **1.453.** Сдвиг на вектор $a(-2, 0)$. **1.454.** Сдвиг на вектор $a(3, -1)$. **1.455.** Поворот на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. **1.456.** Поворот на угол $\pi/4$ по часовой стрелке. **1.457.** Симметрия относительно начала координат. **1.458.** Гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом $k=2$. **1.459.** Поворот на угол $\pi/4$ против часовой стрелки с последующей гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом $1/\sqrt{2}$. **1.460.** Отражение относительно действительной оси. **1.462.** а) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. б) ● Воспользоваться тождеством а). **1.463.** Полуплоскость $x\geqslant 0$. **1.464.** Полоса $0\leqslant y<1$. **1.465.** Полоса $|y|\leqslant 2$. **1.466.** Внутренность круга радиуса 1 с центром в начале координат. **1.467.** Окружность $x^2+(y+1)^2=4$. **1.468.** Кольцо между окружностями γ_1: $(x+2)^2+y^2=1$ и γ_2: $(x+2)^2+y^2=4$ (γ_1 не принадлежит кольцу). **1.469.** $D=\{(x, y)\mid y^2>1-2x\}$. **1.470.** Прямая $2x+y+\frac{3}{2}=0$. **1.471.** Сектор, ограниченный лучами $l_1=\{(x, y)\mid y=0,\ x\geqslant 0\}$ и $l_2=\{(x, y)\mid y=x,\ x\geqslant 0\}$ (луч l_1 не принадлежит сектору). **1.472.** Сектор, ограниченный лучами $l_1=\{(x, y)\mid y=x,\ x<0\}$ и $l_2=\{(x, y)\mid y=-x,$ $x\leqslant 0\}$. **1.473.** Ось Ox. **1.475.** $5e^{i\operatorname{arctg}\frac{24}{7}}$. **1.476.** $13e^{i\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)}$. **1.477.** $5e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi\right)}$. **1.478.** $\sqrt{5}\,e^{i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$. **1.479.** $e^{i\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$. **1.480.** $2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ при $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, $-2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$ при $\sin\frac{\alpha}{2}<0$.

1.482. а) $24e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $\frac{8}{3}$; б) $16e^{i\frac{7\pi}{4}}$, $2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. **1.485.** $32i$. **1.486.** 2. **1.487.** $512(1-i\sqrt{3})$. **1.488.** $-\frac{1}{4}$. **1.490.** а) $\frac{1}{4}(3\cos\varphi+\cos 3\varphi)$; б) $\frac{1}{4}(3\sin\varphi-\sin 3\varphi)$. **1.491.** $4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$. **1.492.** $3\sin\varphi-4\sin^3\varphi$. **1.493.** $\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi$. **1.494.** $4\sin\varphi\cos^3\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi$. **1.495.** Корни 2-й степени из единицы: $z_1=1$, $z_2=-1$, корни 3-й степени из единицы: $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; корни 4-й степени из единицы: $z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=-1$, $z_4=-i$. **1.496.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. **1.497.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. **1.498.** $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\right.$ $\left.+\frac{2\pi}{9}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{9}k\right)$, $k=0, 1, \ldots, 8$. **1.499.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$.

1.500. $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

1.501. $\sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{5}k\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

1.502. $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k\right)\right)$, $k=0,\ 1,2,3,\ 4,5$.

1.503. $2\sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{5}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{5}\right)\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

1.505. $\dfrac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. 1.506. $\dfrac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}$. 1.507. $\dfrac{\sin^2 n\varphi}{\sin\varphi}$. 1.508. $-1\pm 2i$.

1.509. $\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$. 1.510. $-2+i$, $-3+i$. 1.511. $1+i$, $2-3i$. 1.512. 1, $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1.513. -1, $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1.514. 1, -3, $-1\pm 2i$.
1.515. $(-1+\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$, $(-1-\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$. 1.516. $z_{1,2}=z_{3,4}=\pm 3i$.
1.517. $\pm i$, $\pm\sqrt{3}i$. 1.518. $\pm 2i$; $\pm\sqrt{5}i$. 1.519. $\pm(1+i)$, $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$. 1.520. $\frac{1}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, -1, $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1\pm i\sqrt{3})$, $-\sqrt[3]{3}$. 1.521. ± 1, $\pm i$, $\pm\sqrt{2}(1\pm i)$. 1.522. $x=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\pi k}{n}$, $k=0$, 1, ..., $n-1$, где $\alpha=\operatorname{arctg} a$. ● Положить $a=\operatorname{tg}\alpha$, $x=\operatorname{tg} y$ и воспользоваться тригонометрической формой комплексного числа.
1.523. $(z-1)(z+1)(z^2+1)$. 1.524. $(z^2-z\sqrt{2}+1)(z^2+z\sqrt{2}+1)$.
1.525. $(z^2-z+1)(z^2+z+1)$. 1.526. $(z^2+2z+2)(z^2+2z+5)$. 1.527. $(z-1)(z^2+z+1)^2$. 1.528. $(z^2-2z+5)(z^2+8z+20)$. 1.532. $2-i$.
1.533. -1. 1.534. $\frac{5}{3}i$. 1.535. $-\frac{7}{5}+\frac{14}{5}i$. 1.536. 1. 1.537. 0. 1.538. ∞.
1.539. ∞. 1.540. $\frac{-1-5i}{26}$. 1.541. $\frac{3}{10}(3+i)$. 1.542. $1+ie$. 1.543. $\frac{11+3i}{10}$. 1.544. $e^3(\cos 2+i\sin 2)$. 1.553. 0. 1.554. 0. 1.555. $\frac{1}{1-z}$.
1.556. 0. 1.557. $\frac{1-z_2}{1-z_1}$.

ГЛАВА 2

2.8. $\overline{AB}=\frac{2}{3}p-\frac{2}{3}q$, $\overline{BC}=\frac{2}{3}p+\frac{4}{3}q$, $\overline{CA}=-\frac{4}{3}p-\frac{2}{3}q$.
2.9. $\overline{MA}=-\frac{1}{2}(a+b)$, $\overline{MB}=\frac{1}{2}(a-b)$, $\overline{MC}=-\overline{MA}$, $\overline{MD}=-\overline{MB}$.
2.10. $\overline{AN}=\alpha\beta a+(1-\beta)b$, $\overline{BN}=(\alpha\beta-1)a+(1-\beta)b$. 2.11. $\overline{CD}=q-p$, $\overline{DE}=-p$, $\overline{EF}=-q$, $\overline{FA}=p-q$, $\overline{AC}=p+q$, $\overline{AD}=2q$, $\overline{AE}=2q-p$.
2.13. $\overline{MM'}=\frac{1}{3}(\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'})$. 2.15. $\overline{AB}=\frac{\lambda a-b}{1+\lambda}$, $\overline{BC}=\frac{a+b}{1+\lambda}$,

$\overline{CD}=\frac{\lambda \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{1+\lambda}$, $\overline{DA}=-\frac{\lambda}{1+\lambda}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. **2.16.** а) $\alpha=\beta$; б) $\overline{AB}=$ $=\frac{1}{\alpha-\beta}(\beta \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$, $\overline{AC}=\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})$. **2.18.** $\lambda=5$. **2.19.** $\boldsymbol{s}=\frac{2}{5}\boldsymbol{p}+$ $+\frac{3}{5}\boldsymbol{q}+\frac{3}{5}\boldsymbol{r}$. **2.20.** $3\boldsymbol{p}-4\boldsymbol{q}-3\boldsymbol{r}-2\boldsymbol{s}=0$. **2.21.** 0. **2.24.** 0, 1, 2. **2.25.** $\lambda=\mu=$ $=1$. **2.26.** а) $(-1/2,\ 1/2,\ 1/2)$; б) $(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$. **2.27.** $(7/10,\ 3/20,$ $3/20)$. **2.28.** а) $(1/2,\ 0,\ 1/2)$; б) $(1,\ -1/2,\ 1/2)$. **2.29.** $(1,\ -1/\lambda,\ -1)$. **2.30.** а) $\left(\frac{1}{\alpha-1},\ \frac{1}{\beta-1}\right)$. ◀ $\overline{AO}=\overline{AM}+\overline{MO}=\alpha\overline{AB}-\overline{OM}=$ $=\alpha(\overline{AN}+\overline{NB})-\overline{OM}=\alpha(\overline{AO}+\overline{ON})+\alpha\overline{NB}-\overline{OM}=\alpha\overline{AO}+\alpha\overline{ON}+$ $+\alpha\lambda\overline{ON}-\overline{OM}$. Отсюда находим $\overline{AO}=\frac{\alpha(1+\lambda)}{1-\alpha}\overline{ON}-$ $-\frac{1}{1-\alpha}\overline{OM}$. Аналогично рассуждая, получаем $\overline{AO}=\frac{\beta(1+\mu)}{1-\beta}\overline{OM}-$ $-\frac{1}{1-\beta}\overline{ON}$. Здесь $\overline{NB}=\lambda\overline{ON}$ и $\overline{MC}=\mu\overline{OM}$. В силу единственности разложения по базису тогда имеем $\overline{AO}=\frac{1}{\alpha-1}\overline{OM}+$ $+\frac{1}{\beta-1}\overline{ON}$; ▶ б) $\overline{AB}\left(\frac{1}{\alpha-1},\ \frac{1}{\alpha(\beta-1)}\right)$, $\overline{BC}\left(\frac{1-\beta}{\beta(1-\alpha)},\frac{\alpha-1}{\alpha(1-\beta)}\right)$, $\overline{CA}\left(\frac{1}{\beta(1-\alpha)},\ \frac{1}{1-\beta}\right)$. ● Воспользоваться результатом задачи 2.30а).
2.31. $\overline{AP}\left(\frac{\alpha(1-\gamma)}{1-\alpha\gamma},\ \frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha\gamma}\right)$, $\overline{BQ}\left(\frac{2\alpha\beta-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta},\ \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}\right)$, $\overline{CQ}\left(\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\beta\gamma},\ \frac{2\beta\gamma-\beta-\gamma}{1-\beta\gamma}\right)$. **2.32.** а) $\overline{AC}\,((\sqrt{5}+1)/2,\ 1)$, $\overline{AD}\,(1,\ (\sqrt{5}+1)/2)$; б) $\overline{BC}\,((\sqrt{5}-1)/2,\ 1)$, $\overline{CD}\,((\sqrt{5}+3)/2,$ $(\sqrt{5}+3)/2)$, $\overline{DE}\,(-1,\ (1-\sqrt{5})/2)$. **2.33.** а) $(2/5,\ 3/5)$; б) $-9/5$. **2.34.** $\overline{DM}\,(1/2,\ 1/2,\ -1)$, $\overline{AQ}\,(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$. **2.35.** а) $|\boldsymbol{a}_1|=$ $=\sqrt{5}$, $\boldsymbol{a}_{1,0}\,(-1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5},\ 0)$; б) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{j}})=2/\sqrt{5}$; в) $X(\boldsymbol{a})=$ $=-19/3$; г) $\text{пр}_{\boldsymbol{j}}\,\boldsymbol{a}=Y(\boldsymbol{a})=0$. **2.36.** $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}$. **2.37.** $\boldsymbol{a}=-\frac{4}{5}\boldsymbol{e}_1-\frac{2}{5}\boldsymbol{e}_2$. **2.38.** $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$. **2.39.** а) $\boldsymbol{a}_0\,(2/\sqrt{13},\ 3/\sqrt{13},\ 0)$; б) $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+$ $+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}\,(3,\ 11/2,\ 0)$; в) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{j}$; г) $\text{пр}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=6$. **2.40.** $(6/11,\ 7/11,\ -6/11)$. **2.41.** $\pm 3\sqrt{6}$. **2.42.** $|\boldsymbol{p}|=\sqrt{154}$, $\cos\alpha=$ $=9/\sqrt{154}$, $\cos\beta=8/\sqrt{154}$, $\cos\gamma=3/\sqrt{154}$. **2.43.** $\boldsymbol{x}=-5\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$. **2.44.** $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$. **2.45.** $\boldsymbol{x}=\pm 5\boldsymbol{i}+\frac{5}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}-\frac{5}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$. **2.46.** $\alpha=-1$, $\beta=4$. **2.47.** $\boldsymbol{x}=\frac{5}{3}(\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$. ● $\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{b}_0)$, где $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{b}_0$ — орты заданных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. **2.48.** $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$. **2.49.** $\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\ \frac{ba^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\ \frac{ca^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)$. **2.50.** а) $(3,\ -6,\ 6)$; б) $(5,\ 5,\ 1)$; в) $(-5/\sqrt{2},\ 7/\sqrt{2},\ 5)$. **2.51.** $D\,(9,\ -5,\ 6)$ **2.52.** $C\,(6,\ -2)$, $D\,(2,\ -4)$. **2.53.** $A\,(-6,\ -2)$, $B\,(2,\ 8)$, $C\,(10,\ -6)$. **2.54.** $M_1\,(7,\ 0)$ и $M_2\,(-1,\ 0)$.

2.55. $M(0,\ 1,\ 0)$. **2.56.** 7. **2.57.** (4, 0) и (5, 2). **2.58.** (—1, 2, 4) и (8, —4, —2). **2.59.** (—19, 10, —17). ● Разложить вектор $\overline{OD}$ по базису из векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. **2.60.** (10, —5, 0). ● Разложить вектор $\overline{OB}$ по базису из векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\overline{OA}$. **2.62.** $\sqrt{182}/3$. **2.63.** (11/7, 10/7, 18/7). **2.65.** а) 9; б) —61; в) 13. **2.66.** $\alpha=\pm 3/5$. **2.67.** 15, $\sqrt{593}$. **2.68.** $2\pi/3$. **2.69.** 19/5. **2.70.** 1/2. **2.71.** $\widehat{A}=\pi/2$, $\widehat{B}=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\widehat{C}=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

2.72. $(\widehat{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2})=\pi/3$. **2.73.** $\arccos\dfrac{4}{5}$. **2.74.** 5. **2.76.** $\overline{DC}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, $\overline{CB}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\overline{AC}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overline{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. ● Сначала найти вектор $\overline{AK}$, где K — такая точка основания, что $|\overline{AK}|=|\overline{AB}|$. **2.77.** —13. **2.78.** а) 22; б) —200; в) 41; г) $\sqrt{105}$; д) 11/3; е) 22/7; ж) $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-1/3$, $\cos\gamma=-2/3$; з) $-84/\sqrt{129}$; и) 11/21. **2.79.** $M_1(1,\ 0)$ и $M_2(6,\ 0)$. **2.80.** $|\overline{AB}|=5$, $|\overline{BC}|=5\sqrt{2}$, $|\overline{AC}|=5$; $\widehat{A}=\pi/2$, $\widehat{B}=\widehat{C}=\pi/4$. **2.81.** а) —41/5; б) 73/7. **2.83.** $\dfrac{15}{7\sqrt{85}}$. **2.84.** 4. **2.85.** —4/5.

2.87. arccos 5/6. **2.88.** (1, 1/2, —1/2). **2.89.** (—3, 3, 3). **2.90.** $\boldsymbol{a}_j=2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a}_{i,k}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$. **2.91.** а) (2/3, 2/3, 2/3); б) (—5/3, 4/3, 1/3). **2.92.** (—2, 0, 2). **2.93.** $-\boldsymbol{i}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{j}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{k}$. ● Вектор $\boldsymbol{a}_{e_1, e_2}$ имеет вид $\boldsymbol{a}_{e_1, e_2}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$, где коэффициенты λ_1 и λ_2 могут быть найдены из условия перпендикулярности вектора $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_{e_1, e_2}$ плоскости векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. **2.94.** $x'=(x-x_0)\cos\varphi-(y-y_0)\sin\varphi$, $y'=(x-x_0)\sin\varphi+(y-y_0)\cos\varphi$. **2.95.** $X'=X\cos\varphi+Y\sin\varphi$, $Y'=-X\sin\varphi+Y\cos\varphi$, $Z'=-Z$. **2.96.** $(-2,\ \sqrt{2},\ 0)$. **2.97.** $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2=\sum\limits_{i,k=1}^{3}X_i^{(1)}X_k^{(2)}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k=$ $=5X_1^{(1)}X_1^{(2)}+2X_2^{(1)}X_2^{(2)}+9X_3^{(1)}X_3^{(2)}-2\left(X_1^{(1)}X_2^{(2)}+X_2^{(1)}X_1^{(2)}\right)-3\left(X_1^{(1)}X_3^{(2)}+X_3^{(1)}X_1^{(2)}\right)+4\left(X_2^{(1)}X_3^{(2)}+X_3^{(1)}X_2^{(2)}\right)$. **2.98.** а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) $10\sqrt{3}$. **2.99.** $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]=0$, т. е. $\boldsymbol{a}_1 \parallel \boldsymbol{a}_2$. **2.100.** а) $2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})$; б) $2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$; в) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$; г) 3. **2.102.** $50\sqrt{2}$. **2.105.** а) $\dfrac{1}{5}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$; б) $-\dfrac{1}{5}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$.

2.106. а) (—3, 5, 7); б) (—6, 10, 14); в) (—12, 20, 28). **2.107.** $2\sqrt{6}$. **2.108.** 5. **2.109.** $\alpha=-6$, $\beta=21$. **2.110.** $-103/\sqrt{26}$. **2.111.** $\sqrt{6}$. **2.112.** (—20, 7, —11). **2.113.** (5, 16, 7). **2.114.** $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$; векторы попарно перпендикулярны. **2.115.** $-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$. **2.116.** $\sqrt{66}$; $\cos\alpha=1/\sqrt{66}$, $\cos\beta=-4/\sqrt{66}$, $\cos\gamma=-7/\sqrt{66}$. **2.117.** $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

2.118. (—6, —24, 8). **2.119.** (7, 5, 1). **2.120.** $\boldsymbol{a}_2 \perp \boldsymbol{a}_1$, бесконечное множество решений. **2.121.** (—1/2, 0, 1/2). **2.122.** Появится знак минус перед определителем; в случае косоугольного базиса формула неверна. **2.123.** ● Вычислить координаты векторов в обеих частях и убедиться, что они равны. Вычисление координат удобно производить в следующем специальном базисе: орт $\boldsymbol{i}$ сонаправлен с вектором $\boldsymbol{b}$, орт $\boldsymbol{j}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. **2.124.** 24. **2.125.** —3/2. **2.126.** —7. а) Левая; б) правая; в) правая. **2.127.** а) Нет; б) да. **2.132.** 17/2. **2.133.** 6. **2.134.** $3\sqrt{2}$. **2.135.** а) Да; б) нет. **2.136.** а) —3; б) при любом λ. **2.138.** а) (0, 0, 0); б) (0, 1, 0).

2.141. а) $2(x+1)+2(y-2)=0$. Общее уравнение: $x+y-1=0$. Нормальное уравнение: $\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. б) $2(x-2)=0$. Общее уравнение: $x-2=0$, прямая параллельна оси Oy. Нормальное уравнение: $x-2=0$; $p=2$. в) $2(x-1)-(y-1)=0$. Общее уравнение: $2x-y-1=0$. Нормальное уравнение: $\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{5}}$. **2.142.** а) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$. Общее уравнение: $x+3y-5=0$. Нормальное уравнение: $\frac{1}{\sqrt{10}}x-\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{5}{\sqrt{10}}=0$; $p=\frac{5}{\sqrt{10}}$. б) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}$. Общее уравнение: $-x+1=0$, прямая параллельна оси Oy. Нормальное уравнение: $x-1=0$; $p=1$. в) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{0}$. Общее уравнение: $y-1=0$, прямая параллельна оси Ox. Нормальное уравнение: $y-1=0$; $p=1$. **2.143.** а) $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}$. Общее уравнение: $x-y+1=0$. Нормальное уравнение: $-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$; $p=\frac{1}{\sqrt{2}}$. б) $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-3}$. Общее уравнение: $x-1=0$, прямая параллельна оси Oy. Нормальное уравнение: $x-1=0$; $p=1$. в) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{0}$. Общее уравнение: $y-2=0$, прямая параллельна оси Ox. Нормальное уравнение: $y-2=0$, $p=2$. **2.144.** а) $\rho(M, L)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, L': $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}$, L'': $-2(x+1)+(y-2)=0$; б) $\rho(M, L)=1/2$, L': $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}$, L'': $2y=0$; в) $\rho(M, L)=0$, L': $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}$, L'': $x+y+1=0$. **2.145.** Пересекаются в точке $M_0(-3/4, -1/2)$; $\cos(\widehat{L_1, L_2})=1/\sqrt{5}$. **2.146.** Пересекаются в точке $M_0(1, 0)$; $\cos(\widehat{L_1, L_2})=2/\sqrt{5}$. **2.147.** Параллельны; $\rho(L_1, L_2)=\sqrt{2}/4$. **2.148.** Параллельны; $\rho(L_1, L_2)=\sqrt{2}$. **2.149.** Совпадают. **2.150.** а) (AB): $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4}$, (CD): $\frac{x-6}{-4}=\frac{y-1}{-1}$, $h=\frac{19}{\sqrt{17}}$, $\cos\varphi=\frac{19}{\sqrt{17\cdot 58}}$, L_1: $\frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}}=\frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}}$, L_2: $(\sqrt{26}+5\sqrt{17})(x-1)+(-4\sqrt{26}-\sqrt{17})(y-2)=0$; б) (AB): $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{3}$, (CD): $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-4}$, $h=4$, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$, L_1: $\frac{x-2}{4-2\sqrt{5}}=\frac{y+2}{3+\sqrt{5}}$, L_2: $(4-2\sqrt{5})(x-2)+(3+\sqrt{5})(y+2)=0$. **2.151.** $t=-1/2$. **2.152.** $4/\sqrt{5}$. **2.153.** $x+1=0$, $y-2=0$. **2.154.** $13x+y-11=0$, $15x-y-13=0$. **2.155.** $3x-y-1=0$, $3x-y-21=0$. **2.157.** $y-2x+6=0$, $y+2x-6=0$. **2.158.** $3x+y\pm 6=0$, $x-3y\pm 2=0$. **2.159.** 20, $-4/5$. **2.160.** $7x-y-$

$-25=0$. **2.161.** $3x-5y+47=0$, $3x-5y-11=0$, $3x+5y+17=0$, $3x+5y-41=0$. **2.162.** $3x-2y-12=0$, $3x-8y+24=0$. **2.163.** а) $3x-2y-7=0$; б) $x-5y-{}^7/_6=0$. **2.164.** $x-5y+3=0$, $5x+y-11=0$. **2.165.** $B(1, 1)$, $D(-1, 3)$, (AB): $x-1=0$, (BC): $y-1=0$, (CD): $x+1=0$, (AD): $y-3=0$. **2.166.** $3x-y+1=0$, $x+3y+7=0$, $3x-y+11=0$. **2.167.** (AB): $3x+4y+1=0$, (BC): $4x-3y-7=0$, (CD): $3x+4y-24=0$, (AD): $4x-3y-32=0$, (AC): $7x+y-31=0$. **2.168.** $x+2y-7=0$, $x-4y-1=0$, $x-y+2=0$. **2.169.** ● Отклонения $\delta(M_1, L)$ и $\delta(M_2, L)$ имеют разные знаки. **2.170.** $4x+y+5=0$ или $y-3=0$. **2.171.** а) В одном углу; б) в вертикальных углах. **2.172.** Тупой. **2.173.** $4x-3y+10=0$, $7x+y-20=0$, $3x+4y-5=0$. **2.174.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$. **2.175.** $2x+9y-65=0$, $6x-7y-25=0$, $18x+13y-41=0$. **2.176.** $x-6y+17=0$, $8x+3y-17=0$, $7x+9y+17=0$. **2.177.** $4x-3y=0$, $12x+5y+16=0$. **2.178.** б) $\lambda=-2/3$. **2.180.** а) $2x-y+z-2=0$; $1/\sqrt{6}$; б) $x-y=0$, плоскость параллельна оси Oz и проходит через начало координат; $1/\sqrt{2}$. **2.181.** а) $x+y-3=0$; б) $x+2y-2=0$. **2.182.** а) $x-2y-z=0$; б) $-x+y+2z-5=0$. **2.183.** а) $-x+2y-3z-3=0$; б) $2x-2y-z+1=0$. **2.184.** а) $x+y-3=0$; б) $2x-y-1=0$. **2.185.** Пересекаются, $\cos(\widehat{P_1, P_2})=\frac{1}{2\sqrt{15}}$. **2.186.** Параллельны, $\rho(P_1, P_2)=\frac{3}{2\sqrt{6}}$. **2.187.** Пересекаются, $\cos(\widehat{P_1, P_2})=1/2$. **2.188.** Совпадают. **2.189.** 8. **2.190.** $x+y+z-3=0$. **2.191.** $3\sqrt{5}x-6y-4\sqrt{5}z+12\sqrt{5}=0$, $4\sqrt{5}/\sqrt{161}$. **2.192.** а) $4x-5y+z-2=0$ и $2x+y-3z+8=0$; б) $3x-6y+7z-4=0$ и $x+4y+3z+4=0$. **2.193.** а) $4x-y-2z-4=0$; б) $20x-12y+4z+13=0$. **2.194.** а) В смежных углах; б) в одном углу. **2.195.** $x-y+3z-2=0$, $x-y-2=0$, $5x-2y+12z-10=0$, $5x-2y+21z-19=0$. **2.196.** $2x-y-z-2=0$. **2.197.** а) $\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, уравнения в проекциях: $\begin{cases}4x+3y-5=0,\\ 5x+3z-7=0,\\ 5y-4z+1=0;\end{cases}$ б) $\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]=-\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$, уравнения в проекциях: $\begin{cases}7x-y+1=0,\\ 5x-z-1=0,\\ 5y-7z-12=0.\end{cases}$ **2.198.** а) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; в) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; г) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$; д) $\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{8}=\frac{z+3}{10}$; е) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1/2}$. **2.199.** а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; б) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-3}$. **2.200.** а) $x-2y+z=0$; б) $2x+y-1=0$; в) $\begin{cases}x-2y+z=0,\\ 2x+y-1=0,\end{cases}$ или $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{5}$; г) $18/\sqrt{30}$; д) $M'(3/5, -1/5, -1)$. **2.201.** а) $1/\sqrt{15}$, $M(1, -6, -4)$; б) $3x-y+2z-1=0$; в) $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\ 3x-y+2z-1=0.\end{cases}$ **2.203.** а) $2x-16y-13z+31=0$; б) $6x-20y-11z+1=0$. **2.204.** 3. **2.205.** а) $6/\sqrt{5}$; б) 21. **2.206.** 25. **2.207.** $\frac{x+1}{7}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-5}$. **2.208.** -11. **2.209.** $\frac{x-15}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-23}{7}$. **2.210.** $\arcsin\frac{3}{2\sqrt{7}}$. **2.211.** $\frac{x-7}{67}=\frac{y-1}{-28}=\frac{z}{70}$. **2.212.** $\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z+4}{9}$. **2.214.** б) $4x+$

$+3y+12z-93=0$; в) 13; г) $\begin{cases} 54x-44y-7z+181=0, \\ -45x-76y+34z+497=0. \end{cases}$

2.215. б) $4x+12y+3z+76=0$; в) 127/13; г) $\begin{cases} 53x-7y-44z-429=0, \\ 105x-23y-48z+136=0. \end{cases}$

2.216. б) $6x-3y-2z+2=0$; в) 7; г) $\begin{cases} 17x+16y+27z-90=0, \\ 31x+58y+6z-20=0. \end{cases}$

2.217. б) $2x-3y-4z-74=0$; в) $4\sqrt{26}$; г) $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z}{-4}$.

2.218. а) $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$, $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$; б) $1/\sqrt{6}$; в) $\begin{cases} y+z-1=0, \\ x+y-2z-1=0; \end{cases}$ г) $x+y+3z-2=0$, д) $\arcsin\frac{5}{\sqrt{33}}$.

2.219. См. рис. 78. **2.220.** См. рис. 79. **2.221.** Прямые $x=0$ и $x-y=0$. **2.222.** Прямые $y=0$ и $x+y=0$. **2.223.** Прямые $x-y=0$ и $x+y=0$. **2.224.** Прямые $x=0$ и $y=0$. **2.225.** Прямые $y=\pm 3$.

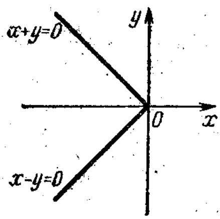


Рис. 78

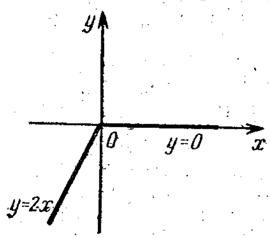


Рис. 79

2.226. Прямые $x=-2$ и $x=3$. **2.227.** Прямые $y=0$, $x=2$ и $x=5$. **2.228.** Окружность радиуса $R=2$ с центром в начале координат. **2.229.** Окружность радиуса $R=1$ с центром в точке $C(0, -3)$. **2.230.** Начало координат. **2.231.** Пустое множество. **2.232.** Точки $(0, \pm 1)$. **2.233.** $x-y=0$. **2.234.** $4ax \pm c=0$. **2.235.** $y=\pm 2x$. **2.236.** $x^2+y^2=16$. **2.237.** $x^2+y^2=8$. **2.238.** $\frac{x^2}{5}+y^2=1$. **2.239.** $xy=2$. **2.240.** $y=\frac{x^2}{4}-x+2$.

2.241. а) $C(2, -3)$, $R=4$; б) $C(4, 0)$, $R=4$; в) $C(0, -2)$, $R=2$. **2.242.** а) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; б) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$; в) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$; г) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; д) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ или $(x-5)^2+(y-5)^2=25$; е) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$; ж) $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

● Написать уравнение искомой окружности в виде $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, подставить в него координаты каждой точки и затем найти D, E и F. **2.243.** $2x-5y+19=0$. **2.244.** а) 7; б) 2. **2.245.** а) Пересекает; б) касается; в) проходит вне окружности. **2.246.** а) $a=5$, $b=3$; б) $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$; в) $e=\frac{4}{5}$; г) D_1: $x=-\frac{25}{4}$, D_2: $x=\frac{25}{4}$.

2.247. а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; г) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; д) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{1}=1$; е) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$. **2.248.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. **2.249.** а) $C(3, -1)$, $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $e=2/3$, D_1: $2x+3=0$; D_2: $2x-15=0$; б) $C(-1, 2)$, $a=5$, $b=4$, $e=3/5$, D_1: $3x+28=0$, D_2: $3x-22=0$; в) $C(1, -2)$,

$a=4$, $b=2\sqrt{3}$, $e=1/2$, D_1: $y+10=0$, D_2: $y-6=0$. **2.252.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $r_{1,2}=4\pm\sqrt{3}$, $\rho_{1,2}=\frac{2}{\sqrt{3}}(4\pm\sqrt{3})$. **2.253.** $(-15/4, \pm\sqrt{63}/4)$. **2.254.** $2x^2-2xy+2y^2-3=0$. **2.255.** $7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0$. **2.256.** а) Прямая пересекает эллипс; б) проходит вне эллипса; в) касается эллипса. **2.258.** $3x+2y-10=0$ и $3x+2y+10=0$. **2.259.** $x+y-5=0$ и $x+y+5=0$. **2.261.** $x+y-5=0$ и $x+4y-10=0$. **2.262.** $M_0(-3, 2)$, $\sqrt{13}$. **2.264.** $2x+11y-10=0$. ● Воспользоваться результатом задачи 2.263. **2.265.** а) $a=3$, $b=4$; б) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; в) $e=\frac{5}{3}$; г) $y=\pm\frac{4}{3}x$; д) $x=\pm\frac{9}{5}$. **2.266.** а) $a=4$, $b=3$; б) $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$; в) $e=\frac{5}{4}$; г) $y=\pm\frac{4}{3}x$; д) $y=\pm\frac{16}{5}$. **2.267.** а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; г) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; д) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$; е) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. **2.268.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. **2.269.** а) $C(2, -3)$, $a=3$, $b=4$, $e=5/3$, уравнения асимптот: $4x-3y-17=0$ и $4x+3y+1=0$, уравнения директрис: $5x-1=0$ и $5x-19=0$; б) $C(-5, 1)$, $a=8$, $b=6$, $e=5/4$, уравнения асимптот: $3x+4y+11=0$ и $3x-4y+19=0$, уравнения директрис: $x=-11{,}4$ и $x=1{,}4$; в) $C(2, -1)$, $a=4$, $b=3$, $e=5/4$, уравнения асимптот: $4x+3y-5=0$ и $4x-3y-11=0$, уравнения директрис: $y=-4{,}2$ и $y=2{,}2$. **2.272.** $r_1=9/4$, $r_2=41/4$, $\rho(M, D_1)=9/5$, $\rho(M, D_2)=41/5$. **2.273.** $(-6, \pm 4\sqrt{3})$. **2.274.** $7y^2+24xy-144=0$. **2.275.** $7x^2-6xy-y^2+26x-18y-17=0$. **2.276.** $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$, $e=\sqrt{2}$, $F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $D_{1,2}$: $x+y\pm\sqrt{2}=0$. **2.277.** $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$. ● См. задачу 2.257. **2.278.** $10x-3y-32=0$, $10x-3y+32=0$. **2.279.** $3x-4y-10=0$, $3x-4y+10=0$. **2.281.** $5x-3y-16=0$, $13x+5y+48=0$. **2.282.** $M_0(-6, 3)$, $\rho=11/\sqrt{13}$. **2.284.** $2x+11y+6=0$. ● Воспользоваться результатом задачи 2.283. **2.285.** а) $p=3$; б) $p=5/2$; в) $p=2$; г) $p=1/2$. **2.286.** а) $y^2=-x$; б) $x^2=-2y$; в) $x^2=-12y$. **2.287.** а) $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$; б) $(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$. **2.288.** а) $A(2, 0)$, $p=2$; б) $A(0, 2)$, $p=1/2$; в) $A(1, 3)$, $p=1/8$; г) $A(6, -1)$, $p=3$; д) $A(1, 2)$, $p=2$; е) $A(-4, 3)$, $p=1/4$. **2.290.** 6. **2.291.** а) $y=\frac{1}{8}x^2-x+3$; б) $x^2+2xy+y^2-6x+2y+9=0$. **2.292.** $y_0y=p(x+x_0)$. **2.293.** $x+y+2=0$. **2.294.** $2x-y-16=0$. **2.295.** $3x-y+3=0$ и $3x-2y+12=0$. **2.296.** $M_0(9, -24)$, $\rho(M_0, L)=10$. **2.298.** $y-18=0$. **2.299.** $\operatorname{tg}\varphi=1$. **2.300.** $r\sin\varphi=1$. **2.301.** $r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **2.302.** $r=a$. **2.303.** $r^2=\frac{a^2}{\cos 2\varphi}$. **2.304.** $r=a\cos\varphi$. **2.305.** Окружность $x^2+y^2=25$. **2.306.** Прямая $y=-x$. **2.307.** Прямая $x=2$. **2.308.** Прямая $y=1$. **2.309.** Прямая $x-y-1=0$. **2.310.** Прямая $x+y-2=0$. **2.311.** Окружность $(x-a)^2+y^2=a^2$. **2.312.** Окружность $x^2+(y-a)^2=a^2$. **2.313.** Пара лучей $x=\pm 2y$, $y\geqslant 0$. **2.314.** Семейство концентрических окружностей радиусов $r_n=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ **2.315.** Гипербола $xy=a^2$. **2.316.** Лемниската Бернулли $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. **2.317.** а) $r\cos\varphi=3$; б) $\varphi=\pi/3$; в) $\operatorname{tg}\varphi=1$. **2.318.** а) $r=10\cos\varphi$; б) $r=\pm6\sin\varphi$. **2.319.** а) $C(2,\ 0)$, $R=2$; б) $C(3/2,\ \pi/2)$, $R=3/2$; в) $C(5/2,\ -\pi/2)$, $R=5/2$; г) $C(3,\ \pi/3)$, $R=3$; д) $C(4,\ 5\pi/6)$, $R=4$; е) $C(4,-\pi/6)$, $R=4$. **2.320.** $r^2-2r_0r\cos(\varphi-\varphi_0)=R^2-r_0^2$. **2.321.** а) $r=\dfrac{16}{5-3\cos\varphi}$; б) $r=\dfrac{16}{5+3\cos\varphi}$. **2.322.** а) $r=-\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$; б) $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$. **2.323.** $r=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$. **2.324.** а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; б) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; в) $y^2=6x$. **2.325.** $r^2=\dfrac{b^2}{1-e^2\cos^2\varphi}$. **2.326.** $r^2=\dfrac{b^2}{e^2\cos^2\varphi-1}$. **2.327.** $r=\dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **2.328.** а) $x=t,\ y=t+1,\ t\in[-1,\ +\infty)$; б) $x=t-1$, $y=t,\ t\in[0,+\infty)$; в) $x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\quad t\in[0,+\infty)$; г) $x=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\cos t}{\cos\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)},\qquad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sin t}{\cos\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)},\qquad t\in\left[-\pi,\ \frac{\pi}{4}\right).$$

2.329. а) $x=1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}t,\ y=1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}t,\ t\in[0,\ \sqrt{5}]$; б) $x=2-\dfrac{1}{\sqrt{5}}t,\ y=3-\dfrac{2}{\sqrt{5}}t,\ t\in[0,\ \sqrt{5}]$. **2.330.** $x=x_0+R\cos t,\ y=y_0+R\sin t,\ t\in[0,\ 2\pi)$. **2.331.** а) $x=R(1+\cos 2t),\ y=R\sin 2t,\ t\in[-\pi/2,\ \pi/2)$; б) $x=R(1+\cos t),\ y=R\sin t,\ t\in[0,\ 2\pi)$. **2.332.** Прямая $x+2y-3=0$. **2.333.** Парабола $y^2=x$. **2.334.** Окружность $(x+1)^2+(y-3)^2=4$. **2.335.** Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **2.336.** Правая ветвь гиперболы $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{1}=1$. **2.337.** Правая ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **2.338.** Окружность $(x-R)^2+y^2=R^2$. **2.339.** Окружность $x^2+(y-R)^2=R^2$. **2.340.** Верхняя ветвь параболы $y^2=2px$. **2.341.**

$$x=\frac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}},\qquad y=\frac{ab\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}},$$

$t\in[0,\ 2\pi)$. **2.342.** $x=\dfrac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}},\quad y=\dfrac{ab\sin t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}}$, где $t\in\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a},\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\right)$ для правой ветви и $t\in\left(\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a},\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}\right)$ для левой ветви. **2.343.** а) $x=\dfrac{t^2}{2p},\ y=t,\ t\in(-\infty,+\infty)$; б) $x=2p\operatorname{ctg}^2 t,\quad y=2p\operatorname{ctg} t$, где $t\in(0,\ \pi/2)$ для верхней ветви и $t\in(3\pi/2,\ 2\pi)$ для нижней ветви; в) $x=\dfrac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{t}{2},\ y=p\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2},\ t\in(0,\ 2\pi)$.

2.344. Плоскость $z=-5$, параллельная плоскости Oxy. **2.345.** Плоскость с нормальным вектором $\boldsymbol{n}(1,\ -2,\ 1)$. **2.346.** Сфера радиуса $R=2$ с центром в начале координат. **2.347.** Сфера радиуса $R=4$ с центром в точке $C(2,\ 0,\ -1)$. **2.348.** Начало координат. **2.349.** Ось Oy. **2.350.** Пустое множество. **2.351.** Пара пересекающихся плоскостей

$x-2z=0$ и $x+2z=0$, параллельных оси Oy. **2.352.** Пара координатных плоскостей Oyz и Oxy. **2.353.** Тройка координатных плоскостей. **2.354.** Пара плоскостей $x=0$ и $x=4$. **2.355.** Пара плоскостей $y=0$ и $y=x$. **2.356.** $20y+53=0$. **2.357.** $x^2+y^2+z^2=a^2$. **2.358.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$.

2.359. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$. **2.360.** а) $C(0, 0, 3)$, $R=3$; б) $C(2, 1, -1)$, $R=5$. **2.361.** а) $(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=4$; б) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=18$; в) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$; г) $(x-3)^2+(y+5)^2+(z+2)^2=56$, д) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$. **2.362.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$. **2.363.** $\left(x-\frac{4}{9}\right)^2+\left(y+\frac{4}{9}\right)^2+\left(z-\frac{4}{9}\right)^2=\frac{64}{729}$. **2.364.** $x=-1+5t$, $y=3-t$, $z=-\frac{1}{2}+2t$.

2.365. $M_0(-2, -2, 7)$, $\rho=3$. **2.366.** а) Пересекает; б) касается; в) проходит вне сферы. **2.367.** а) Прямая, проходящая через точку $(5, 0, -2)$ параллельно оси Oy; б) окружность в плоскости Oxz, имеющая центр в начале координат и радиус $R=7$; в) окружность, лежащая в плоскости $z=2$ с центром в точке $C(0, 0, 2)$ и радиусом $R=4$; г) окружность в плоскости $z=6$ с центром в точке $C(0, 0, 6)$ и радиусом $R=\sqrt{13}$. **2.368.** а) $C(1, 7, 2)$, $R=4$; б) $C(-1, 2, 3)$, $R=8$. **2.369.** Эллипс $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{18}=1$. **2.370.** $\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36,\\ 2x-z-1=0.\end{cases}$

2.371. $\begin{cases}(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=27,\\ x+y-2=0.\end{cases}$ **2.372.** Эллипсоид. **2.373.** Однополостный гиперболоид. **2.374.** Двуполостный гиперболоид вращения. **2.375.** Конус. **2.376.** Параболоид вращения. **2.377.** Гиперболический параболоид. **2.378.** Эллиптический параболоид. **2.379.** Параболический цилиндр. **2.380.** Параболоид вращения с вершиной $(0, 0, 2)$. **2.381.** Гиперболический параболоид. **2.382.** Однополостный гиперболоид вращения. **2.383.** Двуполостный гиперболоид вращения. **2.384.** ● Воспользоваться однородностью уравнения. **2.385.** ● Перейти к новой системе координат поворотом осей Ox и Oy вокруг оси Oz на угол $\pi/4$. **2.386.** а) Конус второго порядка с вершиной в начале координат (см. задачу 2.384); б) гиперболический параболоид см. задачу 2.385). **2.387.** На плоскость Oxy: $x^2+4xy+5y^2-x=0$; на плоскость Oxz: $x^2-2xz+5z^2-4x=0$; на плоскость Oyz: $y^2+z^2+2y-z=0$. **2.388.** а) Эллипс; б) парабола. **2.389.** а) $M_1(3, 4, -2)$ и $M_2(6, -2, 2)$; б) $M(4, -3, 2)$ — прямая касается поверхности; в) прямая и поверхность не имеют общих точек. **2.390.** а) $M(9, 5, -2)$; б) $M(3, 0, -10)$; в) $M(6, -2, 2)$.

2.391. $\begin{cases}2x-12y-z+16=0,\\ x-2y+4=0,\end{cases}$ $\begin{cases}2x-12y-z+16=0,\\ x+2y-8=0.\end{cases}$ **2.392.** $\begin{cases}y+2z=0,\\ x-5=0,\end{cases}$ $\begin{cases}2x-5z=0,\\ y+4=0.\end{cases}$ **2.403.** а) $y^2+z^2=a^2$; б) $x^2+z^2=2ax$; в) $x^2+y^2=2ax$.

2.404. а) $x^2+5y^2-8y-12=0$; б) $4x^2+5z^2+4z-60=0$; в) $2y-z-2=0$. **2.405.** а) $8x^2+4y^2-36x+16y-3=0$, $z=0$; б) $2x-2z-7=0$, $y=0$; в) $4y^2+8z^2+16y+36z-31=0$, $x=0$. **2.406.** $y^2=2ax-x^2$. **2.407.** а) $(3y-2z)^2=12(3x-z)$; б) $(x-z)^2+(y-z)^2=4(x-z)$. **2.408.** Уравнение проектирующего цилиндра: $2x^2+(y-z+2)^2=8$; контур тени — эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{8}=1$. **2.409.** $x=4$, $z\pm y=2$.

2.411. а) $\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{z^2}{h^2}$; б) $9(x^2+z^2)=16y^2$; в) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$;

г). $x^2+y^2-z^2=0$. **2.412.** а) $h^2x^2=2pz(h(y+a)-az)$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(z-c)^2}{c^2}=0$; в) $x^2+z^2=z(y+a)$; г) $3x^2-5y^2+7z^2-6xy+10xz-2yz-4x+4y-4z+4=0$. **2.413.** а) вершина $(0,\ h,\ 0)$, направляющая — окружность $x^2+(y-h)^2=h^2$, $z=h$; б) вершина $(0,\ 0,\ 0)$, направляющая — парабола $x^2=2hy$, $z=h$. **2.414.** $xy+xz+yz=0$, ось конуса проходит в 1-м и 7-м октантах; $xy+xz-yz=0$, ось конуса проходит во 2-м и 8-м октантах; $xy-xz-yz=0$, ось конуса проходит в 3-м и 5-м октантах; $xy-xz+yz=0$, ось конуса проходит в 4-м и 6-м октантах. **2.415.** а) Окружность $x^2+y^2=(a/\sqrt{2})^2$; б) отрезки $z=\pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2}\leqslant x\leqslant a/\sqrt{2}$; в) отрезки $z=\pm a/\sqrt{2}$, $-a/\sqrt{2}\leqslant y\leqslant a/\sqrt{2}$. **2.416.** Уравнение проектирующего конуса: $9x^2-16y^2-16z^2-90x+225=0$, контур тени — окружность $y^2+z^2=(15/4)^2$. **2.417.** а) $z=x^2+y^2$; б) $\sqrt{y^2+z^2}=x^2$. **2.418.** а) $x^2+z^2=y^2$; б) $z^2=x^2+y^2$. **2.419.** а) $z=e^{-(x^2+y^2)}$; б) $z=\frac{4}{x^2+y^2}$.
2.420. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **2.421.** Поверхность образована вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ вокруг оси Oz.

ГЛАВА 3

3.1. 18. **3.2.** $4ab$. **3.3.** 1. **3.4.** $(a-b)^2$. **3.5.** 0. **3.6.** 1. **3.7.** 1. **3.8.** $x_1=-4$, $x_2=-1$. **3.9.** $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. **3.10.** ● Показать, что дискриминант соответствующего квадратного трехчлена неотрицателен. **3.12.** 0. **3.13.** 0. **3.14.** $abc+x(ab+bc+ca)$. **3.15.** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$. **3.16.** $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$. **3.17.** -3. **3.18.** $3\sqrt{3}\,i$. **3.19.** $-4\pm\sqrt{22}$. **3.20.** $(-\infty,\ +\infty)$. **3.21.** $(4,\ +\infty)$. **3.22.** $(-6,\ -4)$. **3.26.** ● Показать, что последний столбец исходного определителя может быть представлен в виде $\begin{pmatrix}a^3\\b^3\\c^3\end{pmatrix}=(a+b+c)\begin{pmatrix}a^2\\b^2\\c^2\end{pmatrix}-(ab+ac+bc)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+abc\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, и воспользоваться этим представлением. **3.27.** 0. **3.28.** 0. **3.29.** 0. **3.30.** 0. **3.33.** Парабола $y=(x-a)(x-b)$. **3.34.** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&2&5&1&4\end{pmatrix}$, нечетная. **3.35.** $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&1&6&2&7&3&8&4\end{pmatrix}$, четная. **3.36.** Нечетная. **3.37.** Нечетная. **3.38.** Четность подстановки совпадает с четностью n. **3.39.** Если n нечетно, то подстановка четная при любом k; если n четно, то четность подстановки совпадает с четностью k. **3.40.** Входит со знаком минус. **3.41.** Входит со знаком плюс. **3.42.** Не входит. **3.43.** Входит со знаком плюс. **3.44.** $i=5$, $k=1$. **3.45.** $i=6$, $k=2$. **3.46.** $10x^4-5x^3$. **3.47.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_{1n}a_{2,\,n-1}\dots a_{n1}$.

3.48. 0. **3.49.** а) Не изменится; б) не изменится; в) обратится в нуль; г) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; д) умножится на $(-1)^{n-1}$. **3.50.** -2. **3.51.** -14. **3.52.** 4. **3.53.** 0. **3.54.** а) $8a+15b+12c-19d$; б) $2a-8b+$ $+c+5d$; в) $2a-b-c-d$. **3.55.** 0. **3.56.** 48. **3.57.** 223. **3.58.** $9\sqrt{10}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. **3.59.** $(be-cd)^2$. **3.60.** $(b-c-d)(b+c+d)\times$ $\times(b-c+d)(b+c-d)$. **3.61.** 394. **3.62.** 665. **3.63.** $x^5-x^4+x^3+$ $+x^2-2x+1$. **3.64.** $2x^4y(y-x)^6$. **3.65.** α^n. ● Доказать, что исходный определитель $\Delta_n(\alpha)$ можно представить в виде: $\Delta_n(\alpha)=\alpha\Delta_{n-1}(\alpha)$. **3.66.** $\alpha^n+\beta^n$. **3.67.** $n!$. **3.68.** $2n+1$. **3.69.** 1. **3.70.** $(-1)^{n-1}\cdot n$.

3.71. $-a_1a_2\,\ldots\,a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$. **3.72.** $n+1$.

3.73. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\prod\limits_{1\leqslant k<i\leqslant n}(a_i-a_k)$.

3.76. $\begin{pmatrix}2&5&-3\\-6&7&-8\end{pmatrix}$. **3.77.** $\begin{pmatrix}2+2i&0\\0&2-2i\end{pmatrix}$. **3.78.** $\begin{pmatrix}5&2\\7&0\end{pmatrix}$.

3.79. $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. **3.80.** $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$. **3.81.** $\begin{pmatrix}1&5&-5\\3&10&0\\2&9&-7\end{pmatrix}$. **3.82.** $\begin{pmatrix}11&-22&29\\9&-27&32\\13&-17&26\end{pmatrix}$.

3.83. $\begin{pmatrix}56\\69\\17\end{pmatrix}$. **3.84.** а) (31); б) $\begin{pmatrix}12&0&-6&9&3\\4&0&-2&3&1\\-4&0&2&-3&-1\\20&0&-10&15&5\\8&0&-4&6&2\end{pmatrix}$. **3.85.** $\begin{pmatrix}5\\15\\25\\35\end{pmatrix}$.

3.86. $\begin{pmatrix}13&-14\\21&-22\end{pmatrix}$. **3.87.** $\begin{pmatrix}1&na\\0&1\end{pmatrix}$. **3.88.** $\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&\lambda^n\end{pmatrix}$.

3.89. $\begin{pmatrix}\cos n\alpha&-\sin n\alpha\\\sin n\alpha&\cos n\alpha\end{pmatrix}$. **3.90.** $\begin{pmatrix}8&15\\0&23\end{pmatrix}$. **3.91.** $\begin{pmatrix}-3&2\\-1&-1\end{pmatrix}$.

3.92. $\begin{pmatrix}21&-23&15\\-13&34&10\\-9&22&25\end{pmatrix}$. **3.93.** $\begin{pmatrix}4&-8\\12&-4\end{pmatrix}$. **3.94.** $\begin{pmatrix}4&1&9\\-2&-6&3\\-8&-9&2\end{pmatrix}$.

3.95. $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. **3.96.** $\begin{pmatrix}a&2b\\3b&a+3b\end{pmatrix}$, где a и b — любые числа.

3.97. $\begin{pmatrix}a&3b\\-5b&a+9b\end{pmatrix}$, где a и b — любые числа. **3.98.** $\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$, где a, b, c — любые числа. **3.99.** $\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$, где a, b, c — произвольные числа, удовлетворяющие соотношению $a^2+bc=0$. **3.100.** $\pm E$; $\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$, где $a^2+bc=1$. **3.101.** а) i-я и j-я строки произведения поменяются местами; б) к i-й строке произведения прибавится j-я строка, умноженная на α; в) i-й и j-й столбцы поменяются местами;

г) к i-му столбцу произведения прибавится j-й столбец, умноженный на α.

3.103. $\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 21 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 21 & -3 & 26 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$. **3.104.** $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ -6 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. **3.106.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. **3.107.** $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

3.108. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. **3.109.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

3.110. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **3.111.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & -1 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$.

3.112. $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. **3.113.** $\begin{pmatrix} 1/4 & 3/20 & 1/4 & 1/20 \\ 1/4 & 1/20 & -1/4 & -3/20 \\ 1/4 & -1/20 & -1/4 & 3/20 \\ 1/4 & -3/20 & 1/4 & -1/20 \end{pmatrix}$.

3.114. $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **3.115.** $\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

3.116. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **3.117.** $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$.

3.118. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

3.119. $\begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & -7/6 & 10/3 \\ -7/6 & -1/2 & 5/6 & -5/3 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$. **3.120.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 & -1/n \\ 0 & 1/2 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1/n \end{pmatrix}$.

3.121. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **3.122.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. **3.123.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **3.124.** $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

3.125. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **3.127.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **3.128.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.129. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 5 \\ 5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

3.131. (1, 4, —7, 7). **3.132.** (4, 6, —35, —1). **3.133.** (70, 40, —20, —16). **3.134.** $\left(51, 26, 18\frac{1}{2}, -11\frac{1}{2}\right)$. **3.135.** (—1/2, 1, 3, 3). **3.136.** (—17, —13, 41, 5). **3.137.** (—8/3, —7/3, —16/3, —11/3). **3.138.** (—23/4, —29/8, 27/8, 9/8). **3.140.** Линейно независима. **3.141.** Линейно зависима. **3.142.** Линейно независима. **3.143.** Линейно зависима. **3.144.** ● Расписав векторное равенство $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0$ покомпонентно, показать, что получающаяся система четырех уравнений (относительно α_1, α_2, α_3, α_4) имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. **3.145.** ◀ Положим $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 = \boldsymbol{x}$ и распишем это равенство покомпонентно: $x_1 = 1$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$. Решая эту систему, находим $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $x_5 = 1$. Итак, $\boldsymbol{x} = e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + e_5$. ▶ **3.146.** $5e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5$. **3.150.** 2. **3.151.** 3. **3.152.** 3. **3.153.** 2. **3.154.** 2. **3.155.** 2. **3.156.** 2, если $\lambda = 0$, и 3, если $\lambda \neq 0$. **3.157.** 3 при любом λ. **3.159.** 3. **3.160.** 2. **3.161.** 3. **3.162.** 2. **3.163.** 2. **3.164.** 2. **3.165.** 2. **3.166.** 3. **3.167.** 5. **3.168.** 4. **3.169.** 3. **3.170.** 6. **3.174.** Линейно независима. **3.175.** Линейно зависима. **3.176.** 3. **3.177.** 3. **3.178.** $\lambda = 15$. **3.179.** $\lambda \neq 12$. **3.180.** Ни при каких λ. **3.181.** $r = 3$; $\mathfrak{B} = (a_2, a_3, a_4)$. **3.182.** $r = 3$; $\mathfrak{B} = (a_1, a_2, a_5)$. **3.183.** $r = 3$; $\mathfrak{B} = (a_1, a_2, a_4)$. **3.184.** $r = 2$; $\mathfrak{B}_1 = (a_1, a_2)$, $\mathfrak{B}_2 = (a_2, a_3)$. **3.185.** $r = 2$; $\mathfrak{B}_1 = (a_1, a_2)$, $\mathfrak{B}_2 = (a_1, a_3)$, $\mathfrak{B}_3 = (a_1, a_4)$. **3.186.** $r = 2$; $\mathfrak{B}_1 = (a_1, a_4)$, $\mathfrak{B}_2 = (a_2, a_4)$, $\mathfrak{B}_3 = (a_3, a_4)$.

3.187. $x = 16$, $y = 7$. **3.188.** $x = 2$, $y = 3$. **3.189.** $x = -b$, $y = -{}^2/_3 a$. **3.190.** $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$. **3.191.** $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$. **3.192.** $x = 3$, $y = 1$, $z = -1$. **3.193.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. **3.194.** $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **3.195.** Степень многочлена меньше двух, если выполняется соотношение $k = (y_3 - y_2)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_3 - x_2)$; если $k \neq 0$, то степень равна единице; если же $k = 0$, то степень равна нулю. ● Доказать, что определитель системы уравнений $y_i = a x_i^2 + b x_i + c$, $i = 1, 2, 3$ (с неизвестными a, b, c), отличен от нуля. **3.196.** $f(x) = x^2 - 5x + 3$. **3.197.** $f_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$; $f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$; $f_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$. **3.198.** $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. **3.199.** $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. **3.200.** $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -1$. **3.201.** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **3.202.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$. **3.203.** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **3.204.** $(1 + \sqrt{3}\, c_1, c_1)^{\mathrm{T}}$. **3.205.** Система несовместна. **3.206.** Система несовместна. **3.207.** $(-1 + 2c_1, 1 + c_1, c_1)^{\mathrm{T}}$. **3.208.** $(-1, 3, -2, 2)^{\mathrm{T}}$. **3.209.** $(0, 2, 1/3, -3/2)^{\mathrm{T}}$. **3.210.** $\left(-\frac{2}{11} + \frac{1}{11}c_1 - \frac{9}{11}c_2, \frac{10}{11} - \frac{5}{11}c_1 + \frac{1}{11}c_2, c_1, c_2\right)^{\mathrm{T}}$. **3.211.** Система несовместна. **3.212.** $(c_1, -13 + 3c_1, -7, 0)^{\mathrm{T}}$. **3.213.** $\left(-\frac{6}{7} + \frac{8}{7}c_1, \frac{1}{7} - \frac{13}{7}c_1,\right.$

$\left.\frac{15}{7}-\frac{6}{7}c_1,\ c_1\right)^{\mathsf{T}}$. **3.214.** Система несовместна. **3.215.** $(c_1, c_2, 5-8c_1+4c_2,$ $-3,\ 1+2c_1-c_2)^{\mathsf{T}}$. **3.216.** $\left(\frac{20}{9}+c_1-\frac{53}{9}c_2,\ -\frac{5}{3}-\frac{5}{2}c_1+\frac{5}{6}c_2,\right.$ $\left.-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}c_2,\ c_1,\ c_2\right)^{\mathsf{T}}$. **3.217.** $\left(-\frac{1}{2}-\frac{7}{12}c_1-\frac{5}{4}c_2-\frac{7}{8}c_3,\ c_1,\ c_2,\right.$ $\left.1-\frac{1}{2}c_3,\ c_3\right)^{\mathsf{T}}$. **3.218.** Если $\lambda\neq 0$, то система несовместна; если $\lambda=0$, то $X=\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}c_1-\frac{13}{2}c_2,\ -\frac{7}{2}-\frac{7}{2}c_1-\frac{19}{2}c_2,\ c_1,\ c_2\right)^{\mathsf{T}}$.

3.219. Если $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0$, то $X=\frac{1}{\lambda+3}(1,1,1,1)^{\mathsf{T}}$; если $\lambda=-3$, то система несовместна; если $\lambda=1$, то $X=(1-c_1-c_2-c_3,$ $c_1,\ c_2,\ c_3)^{\mathsf{T}}$. **3.220.** Если $\lambda=8$, то $X=(c_1,\ 4+2c_1-2c_2,\ 3-2c_2,\ c_2)^{\mathsf{T}}$; если $\lambda\neq 8$, то $X=(0,\ 4-2c_1,\ 3-2c_1,\ c_1)^{\mathsf{T}}$. **3.221.** Если $\lambda(\lambda+3)\neq 0$, то $X=\frac{1}{\lambda+3}(1,1,1)^{\mathsf{T}}$; если $\lambda=-3$, то система несовместна; если $\lambda=0$, то $X=(1-c_1-c_2,\ c_1,\ c_2)^{\mathsf{T}}$. **3.223.** c_1E_1, $E_1=(3,\ 1,\ 5)^{\mathsf{T}}$. **3.224.** $c_1E_1+c_2E_2$, $E_1=(2,\ 1,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(3,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.225.** Система имеет только тривиальное решение. **3.226.** c_1E_1, $E_1=(4,\ 1,\ -5)^{\mathsf{T}}$. **3.227.** $c_1E_1+c_2E_2$, $E_1=(8,\ -6,\ 1,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(-7,\ 5,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.228.** $c_1E_1+c_2E_2$, $E_1=(1,\ 0,\ -5/2,\ 7/2)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(0,\ 1,\ 5,\ -7)^{\mathsf{T}}$. **3.229.** $c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$, $E_1=(1,\ 0,\ 0,\ -9/4,\ 3/4)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(0,\ 1,\ 0,$ $-3/2,\ 1/2)^{\mathsf{T}}$, $E_3=(0,\ 0,\ 1,\ -2,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.230.** $c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$, $E_1=(1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_3=(0,\ -1,$ $0,\ 0,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.231.** $c_1E_1+c_2E_2$, $E_1=(0,\ 1/3,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(0,\ -2/3,$ $0,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.232.** $c_1E_1+c_2E_2$, $E_1=(-3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(-5,\ 3,$ $0,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.233.** Строки матрицы A не образуют, а строки матрицы B образуют. ● Если ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен r, то необходимо проверить, что а) ранг A (соответственно B) равен $5-r$; б) строки матрицы A (соответственно B) являются решениями исходной системы. **3.234.** $a_1=2$, $X=c_1E_1$, $E_1=(1,\ 0,\ -2)^{\mathsf{T}}$; $a_2=-4$, $X=c_1E_1$, $E_1=(1,\ -24/5,\ -4/5)^{\mathsf{T}}$. **3.235.** $a_1=-1$, $X=c_1E_1$, $E_1=(-5/3,\ 1/3,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.236.** $X_0+c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$, $X_0=(1/3,\ 1/3,$ $0,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_1=(0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_3=(1/3,$ $-5/3,\ 0,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.237.** $X_0+c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$, $X_0=(2/3,\ 1/6,\ 0,$ $0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_1=(0,\ 1/2,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(0,\ -1/2,\ 0,\ 1,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_3=(1/3,$ $5/6,\ 0,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.238.** $X_0+c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3+c_4E_4$, $X_0=(1/3,\ -1/3,$ $0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_1=(1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(-1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_3=(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_4=(0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.239.** $X_0+c_1E_1+$ $+c_2E_2+c_3E_3$, $X_0=(1,\ -1/2,\ 0,\ 0,\ 0)$, $E_1=(0,\ -3/2,\ 1,\ 0,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_2=(0,\ -2,\ 0,\ 1,\ 0)^{\mathsf{T}}$, $E_3=(0,\ -5/2,\ 0,\ 0,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.240.** $(1,\ -1,$ $-1,\ 1)^{\mathsf{T}}$. **3.241.** $(6-c,\ -5+c,\ 3,\ -1-c,\ c)^{\mathsf{T}}$. **3.242.** Система несовместна. **3.243.** $\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}c_1,\ c_1,\ 0,\ 0,\ \frac{11}{5}-\frac{6}{5}c_2,\ c_2\right)^{\mathsf{T}}$. **3.244.** $(-1+$ $+c_1+2c_2,\ -3+c_1+2c_2,\ c_1,\ c_2)^{\mathsf{T}}$.

3.245.

```
      SUBROUTINE SUM(A,B,C,M,N)
      DIMENSION A(M,N),B(M,N),C(M,N)
      DO 1 I=1,M
      DO 1 J=1,N
    1 C(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
      RETURN
      END
```

3.246.

```
      SUBROUTINE MUL(A,M,N,ALFA)
      DIMENSION A(M,N)
      DO 1 I=1,M
      DO 1 J=1,N
    1 A(I,J)=ALFA*A(I,J)
      RETURN
      END
```

3.247.

```
      SUBROUTINE MULM(A,B,C,L,M,N)
      DIMENSION A(L,M), B(M,N),C(L,N)
      DO 2 I=1,L
      DO 2 K=1,N
      C=0.
      DO 1 J=1,M
    1 C=C+A(I,J)*B(J,K)
    2 C(I,K)=C
      RETURN
      END
```

3.248.

```
      SUBROUTINE TRANS(A,N)
      DIMENSION A(N)
      N1=N-1
      DO 1 I=1,N1
      I1=I+1
      DO 1 J=I1,N
      B=A(I,J)
      A(I,J)=A(J,I)
    1 A(J,I)=B
      RETURN
      END
```

3.249.

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&11\end{pmatrix},\qquad BA=\begin{pmatrix}6&-8&-5&-15\\2&4&0&10\\-1&6&2&13\\-2&0&1&-1\end{pmatrix},\qquad AC=\begin{pmatrix}0&0&22\\0&11&15\end{pmatrix}.$$

3.250.

$$AB=\begin{pmatrix}5&17&14,25&5,75\\9,35&25,3&22,275&9,625\\10,4&15,6&8,775&6,5\\4,9&1,4&3,15&3,5\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}72,1&-48,1&30,85&-28,25\\52,85&-34,85&28,75&-25,7\\46,875&-31,225&10,25&-10,125\\12,275&-8,225&4,75&-4,925\end{pmatrix},\qquad A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=(BA)^{\mathrm{T}}.$$

3.251. Задание для ЭВМ состоит из главной программы и всех подпрограмм, к которым есть обращения из главной. Ниже приводятся главные программы для задач 3.249, 3.250, 3.92:

Программа к задаче 3.249:

```
      DIMENSION A(2,4),B(4,2),C(4,3),AB(2,2),BA(4,4),AC(2,3)
      DATA A/1.6,—1.6,3.2,3.2,0.,1.6,8.,6.4/,C/0.625,1.25,0.625,—0.625,
     *—3.125,0.,1.25,0.625,0.625,—1.25,0.,3.125/
      EQUIVALENCE (B(1,1),C(1,1))
      CALL MULM(B,A,BA,4,2,4)
      CALL MULM(A,B,AB,2,4,2)
      CALL MULM(A,C,AC,2,4,3)
      WRITE (3,1) ((AB(I,J),J=1,2),I=1,2)
    1 FORMAT (5H  AB ,2(1H ,2F8.2))
      WRITE (3,2) ((BA(I,J),J=1,4),I=1,4)
    2 FORMAT (5H  BA ,4(1H ,4F8.2))
      WRITE (3,3) ((AC(I,J),J=1,3),I=1,2)
    3 FORMAT (5H  AC ,2(1H ,3F8.2))
      STOP
      END
```

Программа к задаче 3.250:

```
      DIMENSION A(4,4),B(4,4),AB(4,4),BA(4,4),ATBT(4,4)
      READ (1,1) ((A(I,J),J=1,4),I=1,4),((B(I,J),J=1,4),I=1,4)
    1 FORMAT (4F8.3)
      CALL MULM(A,B,AB,4,4,4)
      CALL MULM(B,A,BA,4,4,4)
      CALL TRANS(A,4)
      CALL TRANS(B,4)
      CALL MULM(A,B,ATBT,4,4,4)
      WRITE (3,2) ((AB(I,J),J=1,4),I=1,4),((BA(I,J),J=1,4),I=1,4),
     *((ATBT(I,J),J=1,4),I=1,4)
      FORMAT (1H ,4F10.3)
      STOP
      END
```

Программа предусматривает ввод исходных матриц с внешнего устройства. При вводе с перфокарт (п/к) одна п/к должна содержать строку матрицы. Ввод можно осуществить и следующими операторами:

```
      READ (1,1) A, B
    1 FORMAT (4F8.3)
```

В этом случае п/к должна содержать столбец матрицы.

Программа к задаче 3.92:

```
      DIMENSION A(3,3),ASQ(3,3),B(3,3)
      DATA A/1.,2.,3.,—2.,—4.,—5.,3.,1.,2./,B/5.,0.,0.,0.,5.,0.,0.,0.,5./
      CALL MULM(A,A,ASQ,3,3,3)
      CALL MUL(A,3,3,—2.)
      CALL MUL(ASQ,3,3,3)
      CALL SUM(ASQ,A,A,3,3)
      CALL SUM(A,B,A,3,3)
      WRITE (3,1) ((A(I,J),J=1,3),I=1,3)
    1 FORMAT (1H ,3F6.1)
      STOP
      END
```

3.252.

```
      SUBROUTINE INVMAT(A,B,N)
      DIMENSION A(N,N),B(N,N)
      DO 11 I=1,N
      DO 11 J=1,N
      B(I,J)=0
      IF(I.EQ.J) B(I,J)=1
   11 CONTINUE
      K=1
    5 CONTINUE
      DO 10 J=1,N
      IF(J.LE.K) GO TO 7
      AKJ=A(K,J)/A(K.K)
    7 BKJ=B(K,J)/A(K,K)
      DO 9 I=1,N
      IF(I.EQ.K) GO TO 9
      IF(I.LE.K) GO TO 8
      A(I,J)=A(I,J)-AKJ*A(I,K)
    8 B(I,J)=B(I,J)-BKJ*A(I,K)
    9 CONTINUE
      IF(J.LE.K) GO TO 99
      A(K,J)=AKJ
   99 B(K,J)=BKJ
   10 CONTINUE
      K=K+1
      IF(K.LE.N) GO TO 5
      RETURN
      END
```

Программа рассчитана на обработку матриц с ненулевыми элементами на главной диагонали.

3.253.

$$\begin{pmatrix} 0,12 & -0,42 & -0,34 & -0,44 \\ 0,42 & 0,12 & 0,44 & -0,34 \\ 0,34 & -0,44 & 0,12 & 0,42 \\ 0,44 & 0,34 & -0,42 & 0,12 \end{pmatrix}.$$

3.254.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1,5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1,25 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1,125 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1,0625 \end{pmatrix}$$

3.255.

$$\begin{pmatrix} 12,7273 & -7,2727 & -19,0909 & 10,909 \\ -9,0909 & 5,4545 & 13,6364 & -8,1818 \\ -31,8182 & 18,1818 & 50,9091 & 29,0909 \\ 22,7272 & -13,6364 & -36,3636 & 21,8182 \end{pmatrix}$$

3.256.

$$\begin{pmatrix} 20 & 2,5 & -3,3333 & -6,6667 \\ -9,5833 & -0,8333 & 1,6666 & 2,9167 \\ 8,3333 & 0,8333 & -1,6666 & -2,5 \\ -4,1667 & 0 & 0,8333 & 0,8333 \end{pmatrix}.$$

3.257. Программа к задаче 3.254:

```
      DIMENSION A(5,5),B(5,5)
      READ (1,1) A
    1 FORMAT (5F10.5)
      CALL INVMAT(A,B,5)
      WRITE (3,2) ((B(I,J),J=1,5,
     *I=1,5)
    2 FORMAT (1H 5F8.4)
      STOP
      END
```

3.258.

```
      FUNCTION DET(A,N)
      DIMENSION A(N,N)
      K=1
      DET=1
    8 L=K
      AMA=ABS(A(L,K))
      LROW=K
    1 L=L+1
      AMB=ABS(A(L,K))
      IF(AMA.GE.AMB) GO TO 2
      LROW=L
      AMA=AMB
    2 IF(L.LT.N) GO TO 1
      IF(LROW.NE.K) GO TO 3
      SIGN=1
      GO TO 6
    3 SIGN=-1
      DO 5 J=K,N
```

```
  S=A(K,J)
  A(K,J)=A(LROW,J)
5 A(LROW,J)=S
  IF(A(K,K).NE.0) GO TO 6
  DET=0
  RETURN
6 DET=SIGN*A(K,K)*DET
  K1=K+1
  DO 7 I=K1,N
  DO 7 J=K1,N
7 A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,
 *J)/A(K,K)
  K=K1
  IF(K.LT.N) GO TO 8
  DET=DET*A(N,N)
  RETURN
  END
```

3.259. 207,36. **3.260.** 234,375. **3.261.** 2,03. **3.262.** 1,7368. **3.263.** 0,378.

3.264. Программа к задаче 3.260:

```
  DIMENSION A(6,6)
  READ (1,1) A
1 FORMAT (12F5.1)
  DELTA=DET(A,6)
  WRITE (3,2) DELTA
  FORMAT (5H DET=,F10.4)
  STOP
  END
```

3.265.

```
   SUBROUTINE EXCLUS(A,B,N)
   DIMENSION A(N,N),B(N)
   K=1
 1 L=K
   AMA=ABS(A(L,K))
   LROW=L
 2 L=L+1
   AMB=ABS(A(L,K))
   IF(AMA.GE.AMB) GO TO 3
   LROW=L
   AMA=AMB
 3 IF(L.LT.N) GO TO 2
   IF(LROW.NE.K) GO TO 4
   GO TO 6
 4 DO 5 J=K,N
   S=A(K,J)
   A(K,J)=A(LROW,J)
 5 A(LROW,J)=S
   S=B(K)
   B(K)=B(LROW)
   B(LROW)=S
 6 IF(A(K,K).NE.0) GO TO 7
   WRITE (3,60)
60 FORMAT ('  DET=0')
   RETURN
 7 K1=K+1
   DO 8 I=K1,N
   C=A(I,K)/A(K,K)
   B(I)=B(I)-B(K)*C
   DO 8 J=K1,N
 8 A(I,J)=A(I,J)-A(K,J)*C
   K=K1
   IF(K.LT.N) GO TO 1
   B(N)=B(N)/A(N,N)
   N1=N-1
   DO 10 I=1,N1
   S=0
   N1=N-I+1
   DO 9 J=N1,N
 9 S=A(N-I,J)*B(J)+S
10 B(N-I)=B(N-I)-S
   RETURN
   END
```

3.266. $(5, -4, 3, 2)^{\mathsf{T}}$. **3.267.** $(-0{,}46,\ \ 2{,}76,\ \ 1{,}802,\ \ 1{,}85)^{\mathsf{T}}$.

3.268. $(1{,}12,\ \ -2{,}4,\ \ 2{,}25,\ \ 0{,}53,\ \ 1{,}05)^{\mathsf{T}}$.

3.269. Программа к задаче 3.266:

```
  DIMENSION A(4,4),B(4)
  READ (1,1) A,B
1 FORMAT (16F4.1/4F4.1)
  CALL EXCLUS(A,B,4)
  WRITE (3,2) B
2 FORMAT (1H ,4F6.1)
  STOP
  END
```

3.270.

```
  SUBROUTINE ITER(A,B,X,
 *N,EPS)
  DIMENSION A(N,N),B(N),X(N)
  DO 7 I=1,N
  B(I)=B(I)/A(I,I)
7 X(I)=B(I)
  DO 1 J=1,N
1 A(I,J)=-A(I,J)/A(I,I)
5 DO 3 I=1,N
  S=0
  DO 2 J=1,N
  IF(J.EQ.I) GO TO 2
```

```
      S=S+A(I,J)*X(J)
    2 CONTINUE
    3 A(I,I)=B(I)+S
      KIND=0
      DO 4 I=1,N
      S=X(I)
      X(I)=A(I,I)
      A(I,I)=S
      S=ABS(A(I,I)-X(I))
      IF(S.GT.EPS) KIND=1
    4 CONTINUE
      IF(KIND.EQ.1) GO TO 5
      RETURN
      END
```

3.271. $(5{,}2,\ -4{,}2,\ 3,\ -1{,}8)^{\mathsf T}$. **3.272.** $(1{,}5,\ -2{,}7,\ 2{,}5,\ 3{,}1,\ 4{,}3)^{\mathsf T}$.

3.273. Программа к задаче 3.272:

```
      DIMENSION A(5,5),B(5),X(5)
      READ (1.1) A, B
    1 FORMAT (5F7.2/)
      CALL ITER (A,B,X,5,0.0001)
      WRITE (3,2) X
    2 FORMAT (1H ,5F8.2)
      STOP
      END
```

ГЛАВА 4

4.6. Да. **4.7.** Да, если прямая проходит через начало координат. **4.8.** Нет. **4.9.** Да. **4.10.** Нет. **4.11.** Да. **4.12.** Нет. **4.15.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}1/2\\-3/2\\-2\end{pmatrix}$. **4.16.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$. **4.17.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. **4.18.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}1\\-2\cos\varphi+\sin\varphi\\2\sin\varphi+\cos\varphi\end{pmatrix}$. **4.19.** $r=2$; базисом является, например, система (x_1, x_2). **4.20.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&2&3\\-1&0&1&-1\\-2&-1&4&0\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}$. **4.21.** $3x_1+2x_2-x_3=0$, $r=2$, любая пара векторов образует базис этой системы. **4.22.** Координаты матрицы в этом базисе совпадают с ее элементами. **4.23.** а) $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$. **4.25.** $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

4.27. $\begin{pmatrix}1&-t_0&t_0^2&-t_0^3&\dots&(-1)^{n-1}t_0^{n-1}\\0&1&-2t_0&3t_0^2&\dots&(-1)^{n-2}(n-1)\,t_0^{n-2}\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&0&\dots&1\end{pmatrix}$. **4.28.** $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

4.30. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. **4.31.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. **4.32.** $\begin{pmatrix}0\\2\\1\\2\end{pmatrix}$. **4.33.** $\dfrac{1}{2(1+i)}\begin{pmatrix}1+3i\\-1-2i\end{pmatrix}$.

4.34. $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. **4.37.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}-42 & -71 & -41\\ 12 & 20 & 9\\ 7 & 12 & 8\end{pmatrix}$. **4.38.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=$
$=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & -1\\ -3 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. **4.39.** Является. **4.40.** Не является, так как нарушено условие линейности отображения. **4.41.** Не является, так как нарушено условие взаимной однозначности отображения. **4.43.** $T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $-2+3i=-2(1+i)-5(-i)$. **4.45.** а), б) Подпространство размерности 2, базисом является любая пара неколлинеарных векторов из заданного множества; в) не является подпространством. **4.46.** а) Подпространство размерности $n-2$; б) не является подпространством. **4.47.** Множества, указанные в пп. а), б), г),— подпространства, а множество из п. в) подпространством не является. ● Условие, которому удовлетворяют координаты в любой из задач этой серии, можно записать в виде $AX=O$, где A — некоторая матрица, имеющая n столбцов, а X — столбец координат в фиксированном базисе. Поэтому размерность соответствующего подпространства равна $n-\operatorname{rang} A$, а в качестве базиса можно взять любую фундаментальную систему решений системы уравнений $AX=O$. **4.48.** а) Подпространство размерности $n^2-C_n^2=\frac{n(n+1)}{2}$; б) не является подпространством. **4.49.** а) Бесконечномерное подпространство; б) не является подпространством; в) подпространство размерности n. **4.51.** 2. **4.52.** 3; один из базисов есть, например $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4)$. **4.53.** 3; один из базисов есть, например $\mathfrak{B}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$. **4.54.** ● Заданная система многочленов линейно независима. **4.55.** $\mathscr{L}(\boldsymbol{a})$ — прямая $\frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$, $\mathscr{L}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$ — прямая $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. **4.56.** $\mathscr{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ — плоскость $-3x-y-2z=0$, $\mathscr{L}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{b}$ — плоскость $-3x-y-2z+5=0$. **4.57.** Множество решений неоднородной системы есть линейное многообразие, полученное из подпространства размерности $n-\operatorname{rang} A=3$ решений соответствующей однородной системы сдвигом на произвольное частное решение неоднородной системы.

4.62. в) $\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^n x_i^2\sum_{i=1}^n y_i^2$; г) $\left|\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}-\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}\right|\leqslant$
$\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$. **4.63.** а) 0; б) -6.

4.64. а) -1; б) 24. **4.65.** б) $\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$;

в) $\left|\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2}-\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}\right|\leqslant\left(\int_a^b (f(t)+g(t))^2\,dt\right)^{1/2}\leqslant$
$\leqslant\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)^{1/2}+\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)^{1/2}$. **4.67.** $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{f}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2=$

$=(2, 2, -2, -2)$, $e_3=(-1, 1, -1, 1)$. **4.68.** $e_1=f_1=(1, 2, 1, 3)$, $e_2=(10/3, -1/3, 1/3, -1)$. $e_3=(-19/185, 87/185, 61/185, -72/185)$. **4.69.** $e_1=f_1=(1, 2, 2, -1)$, $e_2=(2, 3, -3, 2)$, $e_3=(2, -1, -1, -2)$. **4.70.** $e_1=f_1=(2, 1, 3, -1)$, $e_2=(3, 2, -3, -1)$, $e_3=(1, 5, 1, 10)$. ● Система f_1, f_2, f_3, f_4 не является линейно независимой (вектор f_3 может быть получен как линейная комбинация векторов f_1 и f_2). Поэтому получение вектора e_3 с использованием f_3 дает в результате $e_3=0$. Показав это, следует искать вектор e_3 в виде $e_3=f_4-c_1^{(3)}e_1-c_2^{(3)}e_2$. **4.71.** $\mathfrak{B}=(e_1, e_2, e_3)$, $e_1=(1, 2, 2, -1)$, $e_2=(2, 3, -3, 2)$, $e_3=(2, -1, -1, -2)$. **4.72.** $\mathfrak{B}=(e_1, e_2, e_3)$, $e_1=(2, 1, 3, -1)$, $e_2=(3, 2, -3, -1)$, $e_3=(1, 5, 1, 10)$. **4.73.** $e_3=(-4, 2, -1, 3)$, $e_4=(2, 4, 3, 1)$. ● Для определения вектора $e_3=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ достаточно найти какое-нибудь решение системы относительно неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 двух линейных уравнений $(e_3, e_1)=0$, $(e_3, e_2)=0$. Для определения e_4 аналогичная система состоит из трех уравнений. **4.74.** $e_4=(1, -1, 1, -1, 0)$, $e_5=(0, 5, 1, -4, -2)$. **4.75.** $e_3=(2/3, -2/3, -1/3)$. **4.76.** $e_3=(1, -2, 1, 0)$, $e_4=(25, 4, -17, -6)$. **4.78.** $y=(1, 7, 3, 3)$, $z=(-4, -2, 6, 0)$. **4.79.** $y=(1, -1, -1, 5)$, $z=(3, 0, -2, -1)$. **4.80.** $y=(3, 1, -1, -2)$, $z=(2, 1, -1, 4)$. **4.82.** ● Из равенства $|x-y|^2=|x|^2+|y|^2$ следует, что $(x, y)+(y, x)=(x, y)+\overline{(x, y)}=0$, т. е. (x, y) — мнимое число, не обязательно равное нулю.

4.83. Является; $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$. **4.84.** Не является. **4.85.** Является оператором проектирования на ось, заданную вектором e. Если $e=\cos\alpha\cdot i+\cos\beta\cdot j+\cos\gamma\cdot k$, то $A=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha & \cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\cos\alpha\\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\gamma\cos\beta\\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma\end{pmatrix}$.

4.86. Является; если $a=a_1i+a_2j+a_3k$, то $A=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}$.

4.87. Не является. **4.88.** Является. ▶ Ясно, что

$$y=U(e, \varphi)\,x=y_e+y_\alpha, \tag{1}$$

где y_e — составляющая вектора y вдоль оси e, y_α — составляющая вектора y, компланарная плоскости α. Составляющая y_e равна

$$y_e=x_e=(x, e)\,e. \tag{2}$$

Составляющая y_α получается из вектора x_α поворотом последнего в плоскости α на угол φ. Для нахождения y_α введем вспомогательный вектор $[e, x_\alpha]$, лежащий в плоскости α перпендикулярно вектору x_α, причем тройка x_α, $[e, x_\alpha]$, e — правая. Разложим вектор y_α на составляющие вдоль x_α и $[e, x_\alpha]$:

$$y_\alpha=|x_\alpha|\cos\varphi\frac{x_\alpha}{|x_\alpha|}+|x_\alpha|\sin\varphi\frac{[e, x_\alpha]}{|[e, x_\alpha]|}=$$
$$=\cos\varphi\cdot x_\alpha+\sin\varphi\cdot[e, x_\alpha]. \tag{3}$$

Наконец,

$$x_\alpha=x-x_e=x-(x, e)\,e. \tag{4}$$

Подставляя (2), (3) и (4) в (1), получим

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}+\cos\varphi\,(\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e})+\sin\varphi\,[\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}]=$$
$$=\cos\varphi\cdot\boldsymbol{x}+(1-\cos\varphi)\,(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}+\sin\varphi\,[\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{x}]. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что оператор $U(\boldsymbol{e},\ \varphi)$ представляет собой сумму операторов задач 4.83, 4.85 и 4.86, матрицы которых известны. ▶

4.89. Является; $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$. **4.90.** Является; $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$.

4.91. Не является. **4.92.** Является; $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$. **4.93.** Является; $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-3&1\\2&0&3\end{pmatrix}$. **4.94.** Является; $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-2&-1\\0&3&2\end{pmatrix}$. **4.95.** Не является.

4.97. $C=\begin{pmatrix}22&13&-37\\-39&-16&25\\-1&0&-6\end{pmatrix}$, $C\boldsymbol{x}=(22x_1+13x_2-37x_3,\ -39x_1-16x_2+25x_3,\ -x_1-6x_3)$. **4.98.** $C=\begin{pmatrix}-15&23&-7\\2&8&-4\\-7&1&7\end{pmatrix}$, $C\boldsymbol{x}=(-15x_1+23x_2-7x_3,\ 2x_1+8x_2-4x_3,\ -7x_1+x_2+7x_3)$. **4.99.** $C=O$, $C\boldsymbol{x}=0$. **4.100.** $C=\begin{pmatrix}2&3&-2\\1&0&-4\\5&0&-2\end{pmatrix}$, $C\boldsymbol{x}=(2x_1+3x_2-2x_3,\ \ x_1-4x_3,\ \ 5x_1-2x_3)$.

4.102. $\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$. **4.103.** $(E_1,\ E_2,\ E_3)$,

где $E_1=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha\\ \cos\alpha\,(\cos\beta\cos\varphi-\cos\gamma\sin\varphi)\\ \cos\alpha\,(\cos\beta\sin\varphi+\cos\gamma\cos\varphi)\end{pmatrix}$,

$$E_2=\begin{pmatrix}\cos\alpha\,(\cos\beta\cos\varphi-\cos\gamma\sin\varphi)\\ \cos^2\beta\cos^2\varphi+\cos^2\gamma\sin^2\varphi\\ \dfrac{\cos^2\beta-\cos^2\gamma}{2}\sin2\varphi+\cos\beta\cos\gamma\cos2\varphi\end{pmatrix},$$

$$E_3=\begin{pmatrix}\cos\alpha\,(\cos\beta\sin\varphi+\cos\gamma\cos\varphi)\\ \dfrac{\cos^2\beta-\cos^2\gamma}{2}\sin2\varphi+\cos\beta\cos\gamma\cos2\varphi\\ (\cos\beta\sin\varphi+\cos\gamma\cos\varphi)^2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}.$$

4.104. $\begin{pmatrix}a_1&0&0\\0&a_2\cos^2\varphi+a_3\sin^2\varphi&\dfrac{1}{2}(a_2-a_3)\sin2\varphi\\0&\dfrac{1}{2}(a_2-a_3)\sin2\varphi&a_2\sin^2\varphi+a_3\cos^2\varphi\end{pmatrix}$.

4.105. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -(2\sin\varphi+\cos\varphi) & 2\cos\varphi-\sin\varphi \\ 2\cos\varphi+\sin\varphi & 2-\frac{1}{2}\sin 2\varphi & -(1+\sin^2\varphi) \\ 2\sin\varphi-\cos\varphi & 1+\cos^2\varphi & 2+\frac{1}{2}\sin 2\varphi \end{pmatrix}$.

4.106. а) $A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A'=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

4.107. $A''=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. 4.108. $[A+B]_{\mathfrak{B}''}=\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29{,}5 & -25 \end{pmatrix}$.

4.109. $[p(A)]=3A^2-2A+5E=\begin{pmatrix} -6 & 22 \\ -22 & 49 \end{pmatrix}$.

4.110. а) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & 0 & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & n-1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$. б) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$.

4.111. $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 4.112. $\begin{pmatrix} 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.114. Оператор обратим в том и только в том случае, когда $\lambda \neq 0$; $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$. 4.115. а) Оператор проектирования на ось, заданную вектором $\boldsymbol{e}$, не имеет обратного; б) оператор не имеет обратного. **4.116.** а) Оператор проектирования на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{e}$, не имеет обратного; б) оператор зеркального отражения в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{e}$, обратим, причем $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}$. ● Последнее следует из равенства $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, которое геометрически очевидно, но может быть и проверено следующим образом: $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})\boldsymbol{e})=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}-2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})\times(\boldsymbol{e}-2\boldsymbol{e})=\boldsymbol{x}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}_3$. **4.117.** $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=(-x+2y-z)\boldsymbol{i}+(-x-3y-2z)\boldsymbol{j}+(2x-3y+2z)\boldsymbol{k}$. **4.118.** Оператор не имеет обратного. **4.119.** $\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{e},\varphi)=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{e},-\varphi)=\boldsymbol{U}(-\boldsymbol{e},\varphi)$. **4.120.** $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}$. **4.121.** Оператор не имеет обратного. **4.122.** $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\frac{1}{9}(x_1+2x_2+2x_3,\ 2x_1+x_2-2x_3,\ 2x_1-2x_2+x_3)$.

4.123. а) N_A—двумерное подпространство всех векторов, ортогональных вектору $\boldsymbol{e}$, T_A—одномерное подпространство всех векторов, коллинеарных вектору $\boldsymbol{e}$; б) N_A—одномерное подпространство всех векторов, коллинеарных $\boldsymbol{a}$, T_A—двумерное подпространство всех векторов, ортогональных $\boldsymbol{a}$. **4.124.** $N_D=\mathcal{P}_0=\mathbb{R}$, $T_D=\mathcal{P}_{n-1}$. **4.126.** $r_A=2$, базис T_A: $\boldsymbol{e}_1=(2, 1, 1)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1, -2, 1)$; $n_A=1$, базис N_A: $\boldsymbol{e}=(1, 1, 1)$. **4.127.** $r_A=1$, базис T_A: $\boldsymbol{e}=(1, 1, 1)$; $n_A=2$, базис N_A: $\boldsymbol{e}_1=$

$=(1, -1, 0)$, $e_2=(1, 0, -1)$. **4.129.** $\lambda=a$, $x^{(\lambda)}$ — любой ненулевой вектор. **4.130.** $\lambda_1=1$, $x^{(\lambda_1)}=xi$, $x\neq 0$, $\lambda_2=0$, $x^{(\lambda_2)}=yj+zk$, $x^{(\lambda_2)}\neq 0$. **4.131.** $\lambda=0$, $x^{(\lambda)}=xi$, $x\neq 0$. **4.132.** При $\varphi=2\pi l$, $l=0, \pm 1, \ldots$, оператор $U(e, \varphi)$ совпадает с единичным. Поэтому в этом случае $\lambda=1$, а $x^{(\lambda)}$ — любой ненулевой вектор. При $\varphi=(2l+1)\pi$, $l=0, \pm 1, \ldots, \lambda_1=1$, $x^{(\lambda_1)}=\alpha e$, $\alpha\neq 0$, $\lambda_2=-1$, $x^{(\lambda_2)}$ — любой ненулевой вектор, перпендикулярный вектору e. При $\varphi\neq \pi l$, $l=0, \pm 1, \ldots$, оператор имеет единственное собственное число $\lambda=1$, а $x^{(\lambda)}=\alpha e$, $\alpha\neq 0$. **4.133.** $\lambda_1=1$, $x^{(\lambda_1)}$ — любой ненулевой вектор, компланарный плоскости отражения, $\lambda_2=-1$, $x^{(\lambda_2)}=\alpha e$, $\alpha\neq 0$. **4.134.** $\lambda=-1$, $X^{(\lambda)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha\neq 0$.

4.135. $\lambda=2$, $X^{(\lambda)}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, α_1 и α_2 не равны одновременно нулю. **4.136.** $\lambda_1=1$, $X^{(\lambda_1)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=0$, $X^{(\lambda_2)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\alpha\neq 0$.

4.137. $\lambda=1$, $X^{(\lambda)}=\alpha\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha\neq 0$. **4.138.** $\lambda_1=3$, $X^{(\lambda_1)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-1$, $X^{(\lambda_2)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\alpha\neq 0$. **4.139.** $\lambda_1=1$, $X^{(\lambda_1)}=\alpha_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+$ $+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, α_1, α_2 не равны одновременно нулю; $\lambda_2=-1$, $X^{(\lambda_2)}=$ $=\alpha\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}$, $\alpha\neq 0$. **4.140.** $\lambda_1=2$, $X^{(\lambda_1)}=\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\lambda_2=1$, $X^{(\lambda_2)}=\alpha\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\alpha\neq 0$. **4.141.** $\lambda=-1$, $X^{(\lambda)}=\alpha_1\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$.

4.142. $\lambda_1=-1$, $X^{(\lambda_1)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=2$, $X^{(\lambda_2)}=\alpha\begin{pmatrix}4\\1\\7\end{pmatrix}$; $\lambda_3=-2$, $X^{(\lambda_3)}=\alpha\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$; $\alpha\neq 0$. **4.143.** $\lambda=2$, $X^{(\lambda)}=\alpha\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$, $\alpha\neq 0$. **4.145.** При любом $\varphi\neq 0, \pi$ оператор A имеет два собственных числа $\lambda_1(\varphi)=$ $=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$, $\lambda_2(\varphi)=\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi}$. Соответствующие им собственные векторы: $X^{(\lambda_1)}(\varphi)=\alpha\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$ и $X^{(\lambda_2)}(\varphi)=\beta\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, где α и β — произвольные отличные от нуля комплексные числа. При $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ оператор A имеет по одному собственному числу: $\lambda(\varphi=0)=1$, $\lambda(\varphi=\pi)=-1$. В обоих случаях собственным вектором является любой ненулевой вектор из комплексного пространства $\mathscr{L}_2$. **4.146.** ● К равенству $(A-\lambda E)X^{(\lambda)}=O$ применить операцию комплексного сопряжения. **4.147.** $\lambda_1=1$, $X^{(\lambda_1)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=2+3i$, $X^{(\lambda_2)}=$ $=\alpha\begin{pmatrix}3-3i\\5-3i\\4\end{pmatrix}$; $\lambda_3=2-3i$, $X^{(\lambda_3)}=\alpha\begin{pmatrix}3+3i\\5+3i\\4\end{pmatrix}$; $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 0$. ● Воспользоваться результатом задачи 4.146. **4.149.** б) $\lambda_{A^{-1}}=1/\lambda_A$. **4.151.** $\begin{pmatrix}3&6\\-1&-3\end{pmatrix}$. **4.152.** $\begin{pmatrix}-83&-59&-45\\107&83&67\\14&10&3\end{pmatrix}$. **4.153.** $\begin{pmatrix}17&13&13\\-11&\varepsilon^2-8&\varepsilon-8\\-11&\varepsilon-8&\varepsilon^2-8\end{pmatrix}$.

4.154. $D=\begin{pmatrix}-3/2&-2&-1/2\\1/2&0&-1/2\\1/2&2&3/2\end{pmatrix}$, $D^*=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$. **4.155.** $D=$ $=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$, $D^*=\begin{pmatrix}0&2/3&0\\1&0&-1/2\\0&4/3&0\end{pmatrix}$. **4.156.** Поворот на угол α вокруг начала координат по часовой стрелке. **4.157.** $\begin{pmatrix}1&0\\b/a&0\end{pmatrix}$. **4.158.** $\frac{1}{a^2+b^2}\times$ $\times\begin{pmatrix}b^2-a^2&-2ab\\-2ab&a^2-b^2\end{pmatrix}$, если $ab\neq 0$; $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ при $a=0$; $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ при $b=0$. **4.159.** ◀ Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\in\mathbb{R}^n$ соответствуют вектор-столбцам матрицы A. По теореме Кронекера — Капелли система совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}$, т. е. вектор $\boldsymbol{b}$, соответствующий вектор-столбцу B, принадлежит линейной оболочке векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, которые соответствуют также вектор-строкам сопряженной матрицы A^* (рассматривается действительный случай). Арифметический вектор $\boldsymbol{x}$ является решением сопряженной системы по определению тогда и только тогда, когда $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x})=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, а значит, и $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})=0$. Теорема доказана. В комплексном случае строками матрицы A^* являются не векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, а их комплексно-сопряженные, но доказательство проводится аналогично. ▶ **4.160.** Совместна; общее решение сопряженной системы $c\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}=(-1, -1, 2)$. **4.161.** Несовместна; общее решение сопряженной системы $c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_1=(-1, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1, 0, 1)$. **4.162.** Совместна; сопряженная система имеет только тривиальное решение. **4.163.** Совместна; общее решение сопряженной системы, как в задаче 4.161. **4.164.** ● Воспользоваться теоремой Фредгольма. **4.165.** Только система из задачи 4.162.

4.172. $E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. **4.173.** $E_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}1\\-3\\9\\-27\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$. **4.174.** $E_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,

$E_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. **4.175.** Диагонализировать нельзя.

4.176. $E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

4.177. $E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. **4.178.** $E_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$; $E_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

4.179. $E_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$. **4.180.** а) $\begin{pmatrix}1&2^m-1\\0&2^m\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ при m четном, $\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$ при m нечетном. ● Использовать формулу $A^m=T^{-1}D^mT$.

4.181. $\begin{pmatrix}3197&-1266\\7385&-2922\end{pmatrix}$. **4.182.** $\begin{pmatrix}190&189&-189\\126&127&-126\\252&252&-251\end{pmatrix}$. **4.183.** $E_1=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&-9&0\\0&0&18\end{pmatrix}$. **4.184.** $E_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{18}\\-1/\sqrt{18}\\-4/\sqrt{18}\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&27\end{pmatrix}$. **4.185.** $E_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-i/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\i/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. **4.186.** $E_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

4.187. $U=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\sqrt{6}}&\dfrac{1+i}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1-i}{\sqrt{6}}&\dfrac{-2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5&0\\0&-1\end{pmatrix}$. **4.188.** $U=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2-i&-1\\1&2+i\end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}$. **4.189.** $U=\begin{pmatrix}i/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0\\1/\sqrt{2}&i/\sqrt{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

4.190. $U=\begin{pmatrix}2/3&-2/3&-1/3\\2/3&1/3&2/3\\1/3&2/3&-2/3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix}$.

4.191. $U=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$.

4.203. $A=\begin{pmatrix}6&0&-4\\0&6&2\\-4&2&6\end{pmatrix}$. **4.204.** $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$. **4.205.** $A'=$
$=\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\1&-3&1&1\\1&1&1&-3\\-1&-1&3&-1\end{pmatrix}$. **4.206.** $A'=\begin{pmatrix}2&2\\2&-2\end{pmatrix}$.

4.210. $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2$, $\begin{cases}x_1=x_1'-\frac{1}{2}x_2'+\frac{5}{6}x_3',\\x_2=\frac{1}{2}x_2'-\frac{1}{6}x_3',\\x_3=\frac{1}{3}x_3'.\end{cases}$

4.211. $x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2$, $\begin{cases}x_1=x_1'-x_2'-x_3',\\x_2=x_1'+x_2'-x_3',\\x_3=x_3'.\end{cases}$

4.212. $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2$, $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_1'+x_2',\\x_2=x_2'+x_3',\\x_3=-x_2'+x_3'.\end{cases}$

4.213. $9x_1'^2+18x_2'^2-9x_3'^2$, $\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'-\frac{1}{3}x_3',\\x_2=-\frac{1}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3',\\x_3=\frac{2}{3}x_1'-\frac{1}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3'.\end{cases}$

4.214. $3x_1'^2+6x_2'^2-2x_3'^2$, $\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\frac{1}{\sqrt{6}}x_2'+\frac{1}{\sqrt{2}}x_3',\\x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\frac{1}{\sqrt{6}}x_2'+\frac{1}{\sqrt{2}}x_3',\\x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\frac{2}{\sqrt{6}}x_2'.\end{cases}$

4.215. $5x_1'^2-x_2'^2-x_3'^2$,

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}x_2'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1'+\dfrac{1}{\sqrt{6}}x_2'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3', \\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_1'-\dfrac{2}{\sqrt{6}}x_2'. \end{cases}$$

4.216. $9x_1'^2+18x_2'^2+18x_3'^2$,

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3}x_1'-\dfrac{2}{3}x_2'+\dfrac{2}{3}x_3', \\ x_2=\dfrac{2}{3}x_1'-\dfrac{1}{3}x_2'-\dfrac{2}{3}x_3', \\ x_3=\dfrac{2}{3}x_1'+\dfrac{2}{3}x_2'+\dfrac{1}{3}x_3'. \end{cases}$$

4.218. Положительно определенная. **4.219.** Отрицательно определенная. **4.220.** Общего вида. **4.221.** Отрицательно определенная. **4.222.** Положительно определенная. **4.223.** Общего вида. **4.224.** Положительно определенная. **4.226.** Эллипс $\frac{x'^2}{2}+y'^2=1$, $O'(-4/5,\ 2/5)$, $e_1=(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$, $e_2=(-2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})$. **4.227.** Парабола $y'^2=4\sqrt{2}x'$, $O'(2,1)$, $e_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, $e_2=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$. **4.228.** Гипербола $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{9}=1$, $O'(1,1)$, $e_1=(3/\sqrt{13},\ 2/\sqrt{13})$, $e_2=(-2/\sqrt{13},\ 3/\sqrt{13})$. **4.229.** Параллельные прямые $x'=\pm\sqrt{5}/2$, $O'(-3/5,\ -3/10)$, $e_1=(-2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})$, $e_2=(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$, или, в старых переменных, $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$. **4.230.** Эллипс $\frac{x'^2}{35/6}+\frac{y'^2}{35/36}=1$, $O'(7/6,\ 1/3)$, $e_1=(2/\sqrt{5},\ -1/\sqrt{5})$, $e_2=(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$. **4.231.** Парабола $y'^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'(3,\ 2)$, $e_1=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $e_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **4.232.** а) При $\lambda\in(-\infty,\ -1)$ — гипербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, при $\lambda=-1$ — две пересекающиеся прямые $x-y=0$, $x+y+2=0$, при $\lambda\in(-1,\ 0)$ — гипербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, при $\lambda=0$ — парабола $x^2=2y$, при $\lambda\in(0,+\infty)$ — эллипс $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$; б) при $\lambda\in(-\infty,-1)$ — гипербола $(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2=1$, $O'(0,\ 0)$, $e_1=(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, $e_2=(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$, при $\lambda=-1$ — две параллельные прямые $x-y\pm1=0$, при $\lambda\in(-1,\ 0)$ — эллипс $(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2=1$, $O'(0,\ 0)$, $e_1=(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, $e_2=(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$, при $\lambda=0$ — окружность $x^2+y^2=1$, при $\lambda\in(0,\ 1)$ — эллипс $(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2=1$, $O'(0,\ 0)$, $e_1=(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, $e_2=(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$, при $\lambda=1$ — две параллельные прямые $x+y\pm1=0$, при $\lambda\in(1,\ +\infty)$ — гипербола $(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2=1$, $O'(0,\ 0)$, $e_1=(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, $e_2=(-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$. **4.233.** Эллипсоид $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}+\frac{z'^2}{2/3}=1$, $O'(1,\ 2,\ -1)$, $e_1=(1/3,\ 2/3,\ 2/3)$, $e_2=(2/3,\ 1/3,\ -2/3)$, $e_3=(2/3,\ -2/3,\ 1/3)$. **4.234.** Гиперболический параболоид $\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{1}=-2z'$, $O'(1,\ 2,\ 3)$, $e_1=(-2/3,\ 1/3,\ 2/3)$, $e_2=(1/3,\ -2/3,$

$2/3)$, $e_3=(2/3,\ 2/3,\ 1/3)$. **4.235.** Двуполостный гиперболоид $\frac{x'^2}{4/5}+\frac{y'^2}{4/15}-\frac{z'^2}{4/25}=-1$, $O'\,(0,\ 1,\ -2/5)$, $e_1=(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0)$, $e_2=(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)$, $e_3=(0,\ 0,\ 1)$. **4.236.** Эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{5\sqrt{2}/4}+\frac{y'^2}{\sqrt{2}/2}=2z'$, $O'\,(-1/40,\ -19/40,\ 1/2)$, $e_1=(1/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6},\ -2/\sqrt{6})$, $e_2=(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$, $e_3=(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0)$. **4.237.** Параболический цилиндр $y'^2=\frac{4}{3}x'$, $O'\,(2,\ 1,\ -1)$, $e_1=(2/3,\ 2/3,\ 1/3)$, $e_2=(2/3,\ -1/3,\ -2/3)$, $e_3=(1/3,\ -2/3,\ 2/3)$. **4.238.** Эллиптический цилиндр $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$, $O'\,(0,\ 1,\ 0)$, $e_1=(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ -1/3)$, $e_2=(1/\sqrt{6},\ -2/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6})$, $e_3=(1/\sqrt{2},\ 0,\ 1/\sqrt{2})$. **4.239.** Однополостный гиперболоид $\frac{x'^2}{1/3}+\frac{y'^2}{1/6}-\frac{z'^2}{1/2}=1$, $O'\,(-1/3,\ -2/3,\ 2/3)$, $e_1=(1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$, $e_2=(1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6})$, $e_3=(1/\sqrt{2},\ 0,\ -1/\sqrt{2})$. **4.240.** Гиперболический цилиндр $\frac{x'^2}{1/3}-\frac{y'^2}{1/3}=1$, $O'\,(1/6,\ 1/3,\ -5/6)$, $e_1=(1/\sqrt{2},\ 0,\ -1/\sqrt{2})$, $e_2=(1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$, $e_3=(1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6})$.

ГЛАВА 5

5.1. 0,331. **5.2.** 0,5. **5.3.** —1. **5.5.** $(\Delta x)^2-2\Delta x$. **5.6.** $e\,(e^{\Delta x}-1)$. **5.7.** $\log_2(1+\Delta x)$. **5.9.** $-\frac{2}{x^3}$. **5.10.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **5.11.** $2^x\ln 2$. **5.12.** $\frac{1}{x}\log_2 e$. **5.14.** ● Воспользоваться тождеством: $xf(x_0)-x_0f(x)=(xf(x_0)-x_0f(x_0))-(x_0f(x)-x_0f(x_0))$. **5.15.** $f'_-(-1)=-2$, $f'_+(-1)=f'_-(1)=0$, $f'_+(1)=2$. **5.17.** $f'_-(0)=f'_+(0)=0$. **5.18.** $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **5.19.** $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$. **5.20.** ● Функция $y=\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x\to 0$.

5.21. $-2+\frac{8}{3}x^3$. **5.22.** $-\frac{25x^4}{a^2}$. **5.23.** $-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}$. **5.24.** $\frac{2}{(x+1)^2}$.

5.25. $\frac{1-4x^2-x^4}{(x^3-x)^2}$. **5.26.** $2x(3x^4+12x^2-31)$. **5.27.** $\frac{6}{\sqrt{2\pi}}x$.

5.28. $-\frac{3(x^2+1)}{(x^3+3x-1)^2}$. **5.29.** $-\frac{3}{5}a\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}+\frac{2}{3b\sqrt[3]{x}}$. **5.30.** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$.

5.31. $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$. **5.32.** $\frac{2}{\sqrt{x}\,(2-\sqrt{x})^2}$. **5.33.** $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

5.34. $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$. **5.35.** $2\sqrt[3]{x^2}\,(3\sqrt[3]{x}+5)$. **5.36.** $\frac{1}{x}\times\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}\right)$. **5.37.** $3x^2\operatorname{ctg}x-\frac{x^3}{\sin^2 x}=\frac{x^2(3\sin 2x-2x)}{2\sin^2 x}$.

5.38. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x}-\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt[3]{x^5}}=\frac{x-\sin 2x}{x\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x}$. **5.39.** $-\frac{1}{1+\sin x}$.

5.40. $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x$. 5.41. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}(2\ln x-3^x)+\sqrt[3]{x^5}\times$ $\times\left(\frac{2}{x}-3^x\ln 3\right)$. 5.42. $x^2\left(3\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)+\frac{2x-x^2}{e^x}$. 5.43. $\frac{2\cos^3 x-3}{\cos^2 x}$.

5.44. $\sin^{-2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. 5.45. $\frac{\sqrt{x}\,(19x^5+9a)}{6\sqrt[3]{(x^5+a)^2}}$. 5.46. $-\frac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

5.47. $\frac{3}{2}\cos\frac{3x}{2}$. 5.48. $-4\sin\frac{2x}{3}$. 5.49. $24x(1+4x^2)^2$. 5.50. $\frac{9x}{2\sqrt[4]{1+3x^2}}$.

5.51. $\frac{1}{2}\sin x$. 5.52. $\frac{2\cos 4x}{|\cos 4x|}(\sqrt{1-\sin 4x}+\sqrt{1+\sin 4x})$.

5.53. $\arcsin\ln x+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$. 5.54. $\frac{1}{2}\cos x$. 5.55. $\frac{3\sin 2x}{4\sqrt[4]{1+\sin^2 x}}$.

5.56. $2xe^{-2x}(1+x)$. 5.57. $\frac{1}{3}e^{x/3}\left(\cos^2\frac{x}{3}-\sin\frac{2x}{3}\right)$. 5.58. $\sqrt{x^2+a}$.

5.59. $\frac{1}{\cos x}$. 5.60. $\frac{2x}{1-x^4}$. 5.61. $-\frac{1}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$.

5.62. $\frac{x^2-1}{3x^2\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{\left(1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2}}$. 5.63. $-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\times$ $\times\sin\left(2\sin\frac{x}{3}\right)$. 5.64. $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$. 5.65. $\frac{1}{2(1+x^2)}$.

5.66. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}\operatorname{sgn}(\sin x)$. 5.67. $\frac{e^{x/2}}{2\sqrt{x}}(1+x)$. 5.68. $-e^{-x^2}\frac{1+2x^3}{2x^2}$.

5.69. $2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ln 2$. 5.70. $2^{\sqrt{\sin^2 x}}\ln 2\cdot\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$.

5.71. $3^{2^x}\cdot 2^x\ln 3\cdot\ln 2$. 5.72. $\frac{1}{x}\lg\frac{x^2}{10}$. 5.73. $\frac{1}{x\ln 2\cdot\ln 2x}$.

5.74. $\frac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}(2ax+b)}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}\,(ax^2+bx+c)}$.

5.75. $\frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}$. 5.76. $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$. 5.77. $\operatorname{ch} x$.

5.78. $\operatorname{sh} x$. 5.79. $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. 5.80. $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. 5.81. $\frac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}$.

5.82. $\frac{10-2x-2x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}$. 5.83. $-\frac{2x^2+9x+1}{2\sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x-1)^5(2x+1)^4}}$.

5.84. $\frac{11x^5-7x^4-58x^3+48x^2}{4\sqrt{x-1}\sqrt{(x+2)^3}\sqrt[4]{(x-2)^5}}$. 5.85. $x^x(\ln x-1)$.

5.86. $x^{2^x}2^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\cdot\ln 2\right)$. 5.87. $(\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}\frac{3+\ln x}{6\sqrt[3]{x^2}}$.

5.88. $(\ln x)^{\frac{1}{x}}\dfrac{1-\ln x\cdot\ln\ln x}{x^2\ln x}$. **5.89.** $(\sin x)^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+\right.$ $\left.+\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}x\right)$. **5.90.** $x^{x^x}\cdot x^{x-1}(1+x\ln x(\ln x-1))$.

5.91. $\dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\left(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{2\ln x}{x}\right)$. **5.92.** $x^{x^2+1}(1+\ln x^2)+$ $+x^{2x}\cdot 2^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln 2\cdot\ln x\right)+2^{x^x}\ln 2\cdot x^x(\ln x+1)$, $x>0$. ● Найти производную каждого слагаемого. **5.93.** $-\sin 2x\times$ $\times\dfrac{1+2\sqrt{1+\cos^2 x}}{2\sqrt{1+\cos^2 x}\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)}$. ● В качестве промежуточной переменной взять $u=\cos^2 x$ и далее воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции. **5.94.** $-\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\times$ $\times(2\ln\arccos x+1)$. **5.95.** $-2xe^{-x^2}\dfrac{\arcsin e^{-x^2}+e^{-x^2}(1-e^{-2x^2})^{1/2}}{(1-e^{-2x^2})^{3/2}}$.

5.95. $-\dfrac{a^{-x}\ln a}{(1+a^{-2x})^2}(4a^{-x}\operatorname{arctg}a^{-x}+a^{-2x}-1)$. 5.97. $a=2$, $b=0$. ● Условия непрерывности $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)$ и дифференцируемости $f'_-(0)=f'_+(0)$ составляют в совокупности систему двух уравнений относительно a и b. **5.98.** $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$.

5.99. $\dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{(1-x^6)^2(1-x^3)^2}}$.

5.100. $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

5.101. $\dfrac{1}{m+n}\left(n\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{m+n}}-m\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{n}{m+n}}\right)$.

5.102. $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$. **5.103.** $\dfrac{m\sin mx}{\cos^{n+1}mx}=\dfrac{m\operatorname{tg}mx}{\cos^n mx}$.

5.104. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{a}{x}\right)^b\left(\dfrac{b-a}{x}+\ln\dfrac{a}{b}\right)$, $x>0$. 5.105. $\dfrac{n}{x\ln mx}$.

5.106. $\dfrac{1}{3x^2-2}$, $|x|<\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **5.107.** $2\pi\log_2 e\operatorname{ctg}\left(2\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.108. $\dfrac{2\operatorname{tg}x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^4 x}$. **5.109.** $-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$. **5.110.** $(\sin x)^{\cos x}(\operatorname{ctg}x\cos x-$ $-\sin x\ln\sin x)$. **5.111.** $\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^{\sin^2 x}\left(\sin 2x\ln x+\dfrac{\sin^2 x}{x}\right)$.

5.112. $-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}a^{\sqrt{\cos x}}(1+\sqrt{\cos x}\ln a)$. **5.113.** $\operatorname{th}^3 x\left(1+\dfrac{1}{2\operatorname{sh}x}\right)$.

5.114. $\dfrac{1}{\operatorname{ch}2x}$. **5.115.** $e^{-x}(a\operatorname{ch}ax-\operatorname{sh}ax)$. **5.116.** $\dfrac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x}$.

5.118. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 5.119. $\cos(x-\pi k)$, если $x \in (\pi k, \pi(k+1))$, если же $x=\pi k$, то $y'_-(\pi k)=-1$, $y'_+(\pi k)=1$, $k \in \mathbb{Z}$. 5.120. $\frac{1}{1+x^2}$, $x>0$; $-\frac{1}{1+x^2}$, $x<0$; $y'_-(0)=-1$, $y'_+(0)=+1$. 5.122. -1, $x \leqslant 0$; $-e^{-x}$, $x>0$. 5.123. 1, $x \leqslant 0$; $\frac{1}{1+x}$, $x>0$. 5.124. 0, $|x| \geqslant 1$; $2xe^{-x^2}(1-x^2)$, $|x|<1$. 5.125. $\frac{2x^4+4x^3-36x^2+54}{3(1-x)^2(9-x^2)}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$.

5.126. $y\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$. 5.127. $a^{x^a}\cdot x^{a-1}\cdot a\ln a$. 5.128. $(\log_x a)^x\left(-\frac{1}{\ln x}-\right.$ $\left.-\ln\log_a x\right)$. 5.129. $\cos x\cos(\sin x)\cos(\sin(\sin x))$. 5.130. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\times$ $\times\frac{\ln x-1}{x^2}$. 5.131. $-\frac{\sin x}{3^x}(1+\ln^2 3)$.

5.132. $\frac{a\cos ax\cos bx+b\sin ax\sin bx}{\cos^2 bx}\left(3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}}\ln 3+\frac{\sin^2 ax}{\cos^2 bx}\right)$.

5.135. $\varphi(x_0)$. ● Воспользоваться определением производной.

5.136. $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$. 5.137. $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$.

5.138. $\psi(x)^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln\psi(x)+\frac{\varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)}\right)$. 5.140. $\frac{f'(\ln x)}{x}$.

5.141. $\frac{f'(x)}{f(x)}$. 5.143. $f'(f(x))f'(x)$. 5.144. $\frac{4}{3}$. 5.145. $-\frac{1}{e}$. 5.146. $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

5.147. $\frac{x(y^2-2x^2)}{y(2y^2-x^2)}$. 5.148. $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. 5.149. $\frac{1}{2(1+\ln y)}$.

5.150. $\frac{e^x\sin y+e^y\sin x}{e^y\cos x-e^x\cos y}$. 5.151. $-\frac{y}{x}$. 5.152. $\frac{2^x(2^y-1)}{2^y(1-2^x)}=-2^{y-x}$.

5.153. $\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\cdot\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$. 5.154. $\frac{x+y}{x-y}$. 5.155. $\frac{y}{x}\,\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.

5.156. $\frac{y}{x}\cdot\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$. 5.157. $\frac{y}{x}$. 5.160. $\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. ● Функция $y=\operatorname{ch}x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, не имеет обратной, поэтому следует рассматривать два промежутка $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, на каждом из которых заданная функция монотонна и, следовательно, имеет обратную. 5.161. $\log_2 e\cdot\operatorname{ctg}x$. 5.162. $\frac{1}{\sqrt{1+8x}}$. 5.164. $\frac{1}{1+e^{\alpha(x)}}$.

5.165. $\frac{2}{1+6\alpha^2(x)}$. 5.166. $\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)+\log_2 e}$. 5.167. $\frac{1}{1+\ln\alpha(x)}$.

5.168. $3t-\frac{5}{2}$. 5.169. $\frac{1}{3t}$. 5.170. $-\frac{2t}{t+1}$. 5.171. -2^{3t+1}.

5.172. $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. 5.173. $2\cos^2 t(\cos 2t-2\sin 2t)$. 5.174. 1. 5.175. $\frac{t}{2}$.

5.176. $\frac{2}{3}\ln 2\operatorname{ctg} 2t$. 5.177. $-\frac{\sqrt{2-t^2}}{2\sqrt{4-t^2}}$. 5.178. $\sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t\,(1-\sqrt[3]{t})^3}}$.

5.179. $\frac{b}{a}\operatorname{th} t$. 5.180. 1. 5.181. -1. 5.182. $2+\sqrt{3}$. 5.183. $-\frac{4}{3}$.

5.184. $-2\cos 2x$. 5.185. $\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$. 5.186. $-\frac{2}{3\ln 2}\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.

5.187. $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. 5.188. $\frac{3x}{(1-x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$.

5.189. $x^{\sqrt{x}-1}(2+\ln x)\left(\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}\,(2+\ln x)}\right)$.

● Воспользоваться логарифмической производной. 5.190. $y'(0)=3$, $y''(0)=12$, $y'''(0)=9$. 5.191. 2. 5.192. 6. 5.193. $y(0)=1$, $y'(0)=\ln 2$, $y''(0)=\ln^2 2-1$. 5.194. $y'=-\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $y''=\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x^2}\right)+\frac{4}{x^6}f''\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

5.195. $y'=\frac{e^x f'(e^x)}{f(e^x)}$, $y''=e^{2x}\left(\frac{f'(e^x)}{e^x f(e^x)}+\frac{f''(e^x)}{f(e^x)}-\frac{f'^2(e^x)}{f^2(e^x)}\right)$.

5.197. $y'=\frac{uu'+vv'}{\sqrt{u^2+v^2}}$, $y''=\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$.

5.198. $y'=\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}$, $y''=\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}$. 5.199. $\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$, если $n\leqslant m$; 0, если $n>m$. 5.200. $(k\ln a)^n a^{kx}$.

5.201. $\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$. ● $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y''=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+\pi)$ и т. д. 5.202. $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

5.203. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. ● Воспользоваться формулой: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. 5.204. $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. 5.206. $\frac{(x-1)^{50}-(x-2)^{50}}{(x^2-3x+2)^{51}}$.

5.207. $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 37\,(79-x)}{2^{20}(1-x)^{20}\sqrt{1-x}}$. ● Воспользоваться равенством $1+x=2-(1-x)$. 5.208. $\cos x\,(209-x-x^2)-15\sin x\,(2x+1)$.

5.209. $e^x(x^2+39x+360)$. 5.210. $4\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{-x}$. 5.211. $\frac{8!\log_2 e}{x^9}$.

5.212. $x\operatorname{sh} x+100\operatorname{ch} x$. 5.213. ● Доказательство провести методом математической индукции. 5.216. $-\frac{24c^3(ad-bc)}{d^5}$. 5.217. -48.

5.223. $-\frac{p^2}{y^3}$. 5.224. $e^{2y}\frac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}$. 5.225. $-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$.

5.226. $\frac{y((1+y)^2+(x-1)^2)}{x^2(1+y)^3}$. 5.227. $-\frac{f''_{xx}}{(f'_x)^3}$. 5.230. $-\operatorname{ctg}^3 t$ или $\frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}$, $x\in(1, +\infty)$. 5.231. $-\frac{2}{1-t^2}$ или $-2\sec^2 x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

5.232. $2(1+t^2)$ или $2\sec^2 x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. 5.233. $\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$ или $\frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}}$, $x\in(0, a)$. 5.235. $7x+y-3=0$, $x-7y+71=0$.

5.236. $y-5=0$, $x+2=0$. 5.237. $x-4y+4=0$, $4x+y-18=0$. 5.238. $y-2x=0$, $2y+x=0$. 5.239. $x-y-1=0$, $x+y-1=0$. 5.240. $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$. 5.241. $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. 5.242. $y=0$, $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\pi^2\sqrt{2}/4=0$. 5.243. $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$. 5.244. $x+y-2=0$. 5.245. $\operatorname{arctg}\frac{2}{e}$. 5.246. $M_0(1/8,\ -1/16)$. 5.247. $y=x^2-x+1$. 5.249. $2x-y-1=0$. 5.250. $4x-4y-21=0$. 5.251. 3,75. 5.254. В точке $M_1(0,\ 0)$ угол равен 0 (параболы касаются) и в точке $M_2(1,\ 1)$ угол $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. 5.255. $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$. 5.256. $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$. 5.257. $\pi/4$ и $\pi/2$. 5.260. $2/\sqrt{5}$. 5.262. ◀ Если кривая задана уравнением $r=r(\varphi)$, то декартовы координаты точек M этой кривой, как функции угла φ, даются выражениями

$$x=r(\varphi)\cos\varphi,\quad y=r(\varphi)\sin\varphi.$$

Отсюда $\overline{OM}=r(\varphi)\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+r(\varphi)\sin\varphi\cdot\boldsymbol{j}$, т. е. вектор $\boldsymbol{\rho}(1,\ \operatorname{tg}\varphi)$ коллинеарен $\overline{OM}$. Вектор $\boldsymbol{\tau}(1,\ y'_x)$ является направляющим вектором касательной TT', а так как

$$y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}=\frac{r+r'\operatorname{tg}\varphi}{r'-r\operatorname{tg}\varphi},$$

то вектор $\boldsymbol{e}(r'-r\operatorname{tg}\varphi,\ r+r'\operatorname{tg}\varphi)$ коллинеарен $\boldsymbol{\tau}$. Следовательно,

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{e})}{|\boldsymbol{\rho}|\cdot|\boldsymbol{e}|}=\frac{r'}{\sqrt{r^2+(r')^2}},$$

откуда $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}=\dfrac{r}{r'}$. ▶ 5.263. $\theta=\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$.

5.264. $\theta=\frac{\pi}{2}+2\varphi$. 5.265. а) $t_1=0$, $t_2=8$; б) $t\in(0,\ 4)\cup(8,\ +\infty)$; в) $t_1=\frac{4}{3}(3+\sqrt{3})$, $t_2=\frac{4}{3}(3-\sqrt{3})$. 5.266. $-a\omega\sin\omega t$. 5.267. 242. 5.268. $\frac{7}{18}\pi$. 5.269. $a\omega e^{a\varphi}$. 5.270. $v_x=-2a\omega\sin 2\varphi$, $v_y=-2a\omega\cos 2\varphi$. 5.271. В точках $(3,\ 16/3)$ и $(-3,\ -16/3)$. 5.272. $4\pi r^2 v$ и $8\pi rv$. 5.273. 2π рад/с.

5.277. $(\Delta y)_1=1{,}261$, $(dy)_1=1{,}2$, $(\Delta y)_2=0{,}120601$, $(dy)_2=0{,}12$. 5.278. $\Delta s=2x\,\Delta x+\Delta x^2$, $ds=2x\,\Delta x$. 5.279. $ds=f'(t_1)\,\Delta t$ есть путь, который был бы пройден точкой M за промежуток времени Δt при равномерном движении со скоростью $f'(t_1)$. 5.280. $ds=0{,}1$, $\Delta s=0{,}08$. 5.281. а) 0; б) $\frac{\pi}{2}+k\pi$. 5.282. Равенства а) и в) невозможны; равенство б) возможно в случае линейной функции (см. задачу 5.276). 5.283. 2 см. 5.284. 3 см. 5.285. $2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 5.286. $x\sin x\,dx$. 5.287. $\operatorname{arctg}x\,dx$. 5.288. $\ln x\,dx$. 5.289. $\arcsin x\,dx$. 5.290. $\frac{2x\,dx}{1+5y^2}$. 5.291. $\frac{x(y^2-2x^2)\,dx}{y(2y^2-x^2)}$. 5.292. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}\,dx$. 5.293. $\frac{dx}{e^y-1}$. 5.294. $\frac{y^2-1}{y^2}\,dx$. 5.295. $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}\,dx$. 5.296. $\frac{x+y}{x-y}\,dx$.

5.297. $-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}dx$. 5.298. а) 0,05; б) 0,805; в) 0,2. 5.299. 2,93. 5.300. 1,2. 5.301. $\Delta V\approx 2\pi rh\,\Delta r$. ● Поскольку h постоянна, то v является функцией только одного аргумента r: $v=\pi hr^2$. 5.302. $\Delta V\approx$ $\approx-\frac{RT}{p^2}\Delta p$. ● При постоянном T объем V является функцией только одного аргумента p: $V=RT\frac{1}{p}$. 5.303. $-ab^2\sin(bx+c)\,dx^2=$ $=-b^2y\,dx^2$. 5.304. $3^{-x^2}\ln 9\,(2x^2\ln 3-1)\,dx^2$.

5.305. $\frac{(2-x^2)\sin x-2x\cos x}{x^3}dx^2$. 5.306. $2a\,dx^2$. 5.307. $2\frac{3x^2-9x+7}{(x^2-3x+2)^3}dx^2$.

5.308. $-\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x+\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx^2$. 5.309. $-x(1+x^2)^{-3/2}dx^2$.

5.310. $-\frac{a(1+a^2)\sin x}{(1+a^2\sin^2 x)^{3/2}}dx^2$. 5.312. $\frac{2dx^2}{(x+2y)^3}$. 5.313. $-\frac{R^2\,dx^2}{(y-b)^3}$.

5.314. $6\frac{x(1+3y^2)\,dx^2}{(1-3y^2)^3}$. 5.315. $\frac{(x-y)\,dx^2}{(1-a\cos y)^3}$.

5.316. $f(x)$ разрывна при $x=0\in[-1, 1]$. 5.317. 0. 5.319. ● Провести доказательство методом от противного, предварительно установив, что производная левой части уравнения имеет единственный действительный корень $x=1$. 5.320. ● Провести доказательство методом от противного, предварительно установив, что производная левой части уравнения не имеет действительных корней. 5.321. ● $F(b)=F(a)$. 5.322. $\xi=1/\sqrt{3}$. 5.326. ● Воспользоваться результатом задачи 5.323. 5.328. $\xi_1=1/2$, $\xi_2=5/3$. 5.329. 0. 5.330. 1/3. 5.331. $\frac{m}{n}a^{m-n}$.

5.332. $\frac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}$. 5.333. 1. 5.334. 2/3. 5.335. $\frac{2}{3\sqrt[6]{5}}$. 5.336. a^2/b^2.

5.337. 2. 5.338. 2/3. 5.339. $-1/2$. 5.340. 2. 5.341. 9/50. 5.342. 1/2. 5.343. 1/2. 5.344. 0. 5.345. 1/2. 5.346. $-\infty$. 5.347. $\cos 3$. 5.348. -2. 5.349. 1. 5.350. 0. 5.351. 0. 5.352. 0. 5.353. 2. 5.354. 0. 5.355. $+\infty$. 5.356. $1/\pi$. 5.357. a. 5.358. 0. 5.359. -1. 5.360. 0. 5.361. 1/12. 5.362. -1. 5.363. 2/3. 5.364. 1. 5.365. 1. 5.366. 1. 5.367. e. 5.368. 1. 5.369. 2. 5.370. $1/e$. 5.371. 1. 5.372. $1/e$. 5.373. 1. 5.374. e^{-6}. 5.375. e^2. 5.376. e. 5.377. $1/\sqrt{e}$. 5.378. $1/\sqrt[6]{e}$. 5.379. $-9+17(x+1)-$ $-9(x+1)^2+2(x+1)^3$. 5.380. $7+11(x-1)+10(x-1)^2+$ $+4(1+\theta(x-1))(x-1)^3$; а) $\theta=1/4$; б) θ — любое действительное число; в) $\theta=1/4$. 5.381. $P(-1)=143$, $P'(0)=-60$, $P''(1)=26$.

5.382. $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. 5.383. $\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+$

$$+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}+\frac{\sin\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1},$$ n нечетно;

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{\sin\left(\theta x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

n четно. 5.384. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+$

$+\cos\dfrac{\left(\theta x+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n нечетно; $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots$ $\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{\cos\left(\theta x+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n четно. **5.385.** $x-\dfrac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$, $x>-1$. **5.386.** $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{x^n}{n}+R_{n+1}(x)$, n нечетно; $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{x^{n-1}}{n-1}+R_{n+1}(x)$, n четно. ● Остаточный член записать в общем виде. **5.387.** $1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots$ $\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $x>-1$. **5.388.** $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\dfrac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}$. ● В разложении e^u по формуле Маклорена (см. задачу 5.382) положить $u=-\dfrac{x^2}{2}$. **5.389.** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(2x)^2}{2!}-\dfrac{(2x)^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)$. ● Записать $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ и воспользоваться результатом задачи 5.384. **5.390.** $\dfrac{5x}{2}-\dfrac{(5x)^3}{2^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{(5x)^{2n+1}}{2^{2n+1}\cdot(2n+1)!}$. **5.391.** $2\ln 2+\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x^4}{4^2\cdot 2}+\dfrac{x^6}{4^3\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{4^n\cdot n}$. **5.392.** $2\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{1}{2^2\cdot 2!}\cdot\dfrac{x^4}{8^2}+\dfrac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}\cdot\dfrac{x^6}{8^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}\cdot\dfrac{x^{2n}}{8^n}\right)$.

5.393. $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\dfrac{(x-2)^4}{(1+\theta(x-2))^5}$. **5.394.** $x+\dfrac{x^3}{3}\cdot\dfrac{1+2\sin^3\theta x}{\cos^4\theta x}$. **5.395.** $x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{4!}\dfrac{9\theta x+6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{7/2}}$. **5.396.** $1-\dfrac{(x-1)}{2}+\dfrac{3}{8}(x-1)^2-\dfrac{5}{16}(x-1)^3+\dfrac{35}{128}\dfrac{(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^{9/2}}$. **5.397.** а) 0,842; б) 1,648; в) 0,049, г) 2,012. **5.398.** а) $\dfrac{1}{16}\dfrac{x^3}{(1+\theta x)^{5/2}}$; б) $\dfrac{5}{81}\dfrac{x^3}{(1+\theta x)^{8/3}}$. **5.400.** а) 1; б) 1/2; в) 1/2.

5.401. ● Воспользоваться разложением функции по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 до члена порядка k включительно. **5.402.** $f(x_0)=0$ — минимум, если $\varphi(x_0)>0$ и n четное; $f(x_0)=0$ — максимум, если $\varphi(x_0)<0$ и n четное; экстремума нет, если n нечетное. **5.403.** ● Воспользоваться первым достаточным условием экстремума. **5.404.** На $(-1, -1/\sqrt{2})$ и $(1/\sqrt{2}, 1)$ убывает, на $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ возрастает; $y_{\min}=y(-1/\sqrt{2})=-1/\sqrt{2}$, $y_{\max}=y(1/\sqrt{2})=1/2$. **5.405.** На $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$ возрастает, на $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$ убывает; $y_{\max}=y(-1)=y(1)=1$. **5.406.** На $(0, 1)$ и $(1, e)$ убывает, на

$(e, +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(e)=e$. **5.407.** На $\left(\frac{\pi}{3}(6k-1), \frac{\pi}{3}(6k+1)\right)$ убывает, на $\left(\frac{\pi}{3}(6k+1), \frac{\pi}{3}(6k+5)\right)$ возрастает; $y_{\min}=$ $=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2k\pi+\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\approx 2k\pi-0{,}685$, $y_{\max}=$ $=y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=2(k+1)\pi-\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\approx 2(k+1)\pi+0{,}685$, $k\in\mathbb{Z}$. **5.408.** На $(0, 2)$ убывает, на $(2, +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(2)=$ $=2(1-\ln 2)\approx 0{,}61$. **5.409.** Возрастает во всей области определения. **5.410.** На $\left(\frac{\pi}{4}(8k-3), \frac{\pi}{4}(8k+1)\right)$ возрастает, на $\left(\frac{\pi}{4}(8k+1), \frac{\pi}{4}(8k+5)\right)$ убывает; $y_{\max}=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1{,}55e^{2k\pi}$, $y_{\min}=y\left(2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=-e^{2k\pi}\left(e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx -1{,}55e^{2k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$. **5.411.** На $(0, 1/e)$ убывает, на $(1/e, +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(1/e)=$ $=(1/e)^{1/e}\approx 0{,}69$. **5.412.** На $(-\infty, 0)$ убывает, на $(0, +\infty)$ возрастает; $y_{\min}=y(0)=2$. **5.413.** $M=3$, $m=-24$. **5.414.** $M=8$, $m=0$. **5.415.** $M=0{,}6$, $m=-1$. **5.416.** $M=1$, $m=0{,}6$. **5.417.** $M=2$, $m=\sqrt[3]{2}\approx$ $\approx 1{,}26$. **5.418.** $M=\pi/4$, $m=0$. **5.419.** $M=1$, $m=-1$. **5.420.** $M=1/\sqrt{e}\approx$ $\approx 0{,}61$, $m=-1/\sqrt{e}\approx -0{,}61$. **5.421.** ● Рассмотреть функцию $y=e^x-$ $-(1+x)$ и показать, что у нее существует единственный минимум: $y_{\min}=y(0)=0$. 5.425. $\frac{av_1+bv_2}{v_1^2+v_2^2}$ с. **5.426.** $|AP|=\left(500-\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$ км $\approx$ $\approx 442{,}3$ км. 5.427. $x=\frac{2p}{4+\pi}$, $y=\frac{1}{2}\left(p-x-\frac{\pi x}{2}\right)$. **5.428.** $\alpha=\frac{2\pi}{3}$. **5.429.** $\frac{ah}{4}$. **5.430.** πa^3. **5.431.** $\frac{4}{27}\pi r^2 h$. **5.432.** $\frac{8}{3}\pi r^3$. **5.433.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$. **5.434.** $2r^2$. **5.435.** $N(1, 1)$. **5.436.** $x=R\sqrt{2}, y=R/\sqrt{2}$. **5.437.** Разделить отрезок пополам. 5.438. $r=\frac{RH\sqrt{R^2+H^2}}{(\sqrt{R^2+H^2}-R)(\sqrt{R^2+H^2}+2R)}$. **5.439.** $h=(e^{2/3}-d^{2/3})^{3/2}$. **5.440.** На $(-\infty, 0)$ — выпуклость вверх, на $(0, +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(0, 1)$ — точка перегиба, $k=7$. **5.441.** График всюду выпуклый вниз. **5.442.** На $(-\infty, 2)$ — выпуклость вверх, на $(2, +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(2, 0)$ — точка перегиба, $k=0$. **5.443.** На $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ — выпуклость вниз, на $(-1, 1)$ — выпуклость вверх, $M_1\left(-1, \sqrt[3]{2}\right)$ и $M_2\left(1, \sqrt[3]{2}\right)$ — точки перегиба, $k_1=k_2=\infty$. **5.444.** График всюду выпуклый вверх. **5.445.** На $(-\infty, -1)$ — выпуклость вверх, на $(-1, +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(-1, 1-e^{-2})$ — точка перегиба, $k=-e^{-2}\approx -0{,}14$. **5.446.** На $(-\infty, 0)$ — выпуклость вверх, на $(0, +\infty)$ — выпуклость вниз, $M(0, 0)$ — точка перегиба, $k=\infty$. **5.447.** На $(0, e^{-5/6})$ — выпуклость вверх, на $(e^{-5/6}, +\infty)$ — выпуклость вниз, $M\left(e^{-5/6}, 1-\frac{5}{6}e^{-5/6}\right)$ — точка перегиба, $k=-\frac{3}{2}e^{-5/3}\approx -0{,}28$. **5.448.** $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{2}$. **5.449.** $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **5.451.** ● Если x_0 — абсцисса точки перегиба, то $x_0\operatorname{tg}x_0=2$. Тогда

$y_0^2 = y^2(x_0) = x_0^2 \sin^2 x_0 = \frac{4x_0^2}{4+x_0^2}$. **5.452.** $x=2$, $y=1$. **5.453.** $y=x-\frac{1}{3}$.
5.454. $x=0$, $y=1$ (правая), $y=-1$ (левая). **5.455.** $y=3x+\frac{\pi}{2}$ (правая), $y=3x-\frac{\pi}{2}$ (левая). **5.456.** $x=0$, $y=2x$, $x=-1$ (правая). **5.457.** $y=0$.
5.458. $x=-\frac{1}{e}$, $y=x+\frac{1}{e}$. **5.459.** $y=\frac{\pi}{2}x-1$. **5.461.** $y_{\min}=y(0)=-1$; $\left(\pm 1, -\frac{64}{125}\right)$ и $(\pm\sqrt{5}, 0)$ — точки перегиба. **5.462.** $y_{\max}=y(\pm 1)=1$, $y_{\min}=y(\pm\sqrt{3})=y(0)=0$; $\left(\pm\sqrt{\frac{6-\sqrt{21}}{5}}, \frac{6-\sqrt{21}}{20}\times\right.$ $\left.\times\left(\frac{6-\sqrt{21}}{5}-3\right)^2\right)$ и $\left(\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{21}}{5}}, \frac{6+\sqrt{21}}{20}\times\right.$ $\left.\times\left(\frac{6+\sqrt{21}}{5}-3\right)^2\right)$ — точки перегиба. **5.463.** $y_{\max}=y(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$, $y_{\min}=y(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$; $(0, 0)$ и $\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \mp\frac{7\sqrt{6}}{16}\right)$ — точки перегиба. **5.464.** $y_{\min}=y(3)=\frac{27}{8}$; $(0, 0)$ — точка перегиба; $x=1$ и $y=\frac{x+2}{2}$ асимптоты. **5.465.** $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(\sqrt[3]{4})=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$; $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ — точка перегиба; $x=1$ и $y=x$ — асимптоты.
5.466. $(0, 0)$ — точка перегиба; $x=\pm 1$ и $y=x$ — асимптоты. **5.467.** $y_{\max}= = y(\sqrt[3]{4})=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$, $y_{\min}=y(0)=0$; $\left(\sqrt[3]{2}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$ — точка перегиба; $x=-1$ и $y=x$ — асимптоты. **5.468.** $y_{\max}=y(1)=\frac{1}{3}$, $\left(\sqrt[3]{4}, \frac{1}{6}\sqrt[3]{4}\right)$ — точка перегиба; $x=-\sqrt[3]{2}$ и $y=0$ — асимптоты.
5.469. $(0, 0)$ — точка перегиба; $x=\pm 1$ и $y=0$ — асимптоты. **5.470.** $y_{\max}= = y(0)=0$, $y_{\min}=y(-\sqrt[3]{2})=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$; $\left(-\sqrt[3]{\frac{7+\sqrt{45}}{2}},\right.$ $\left.-\frac{\sqrt[3]{2(7+\sqrt{45})^2}}{9+\sqrt{45}}\right)$ и $\left(-\sqrt[3]{\frac{7-\sqrt{45}}{2}}, -\frac{\sqrt[3]{2(7-\sqrt{45})^2}}{9-\sqrt{45}}\right)$ — точки перегиба; $x=1$ и $y=0$ — асимптоты. **5.471.** $(0, 0)$ — точка перегиба; $x=-2$, $x=2$, $y=0$ — асимптоты. **5.472.** $y_{\max}=y(-3)=-4{,}5$, $y_{\min}=y(3)=4{,}5$; $(0, 0)$ — точка перегиба; $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=x$ — асимптоты. **5.473.** $y_{\min}=y(-1)=-1/3$; $(-\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{4}/6)$ — точка перегиба; $x=\sqrt[3]{2}$ и $y=0$ — асимптоты. **5.474.** $y_{\min}=y(0)=-1$, $(\pm\sqrt{3}/3, -1/2)$ — точки перегиба; $y=1$ — асимптота. **5.475.** $(0, 0)$ и $(\sqrt[3]{4}/2, 1/3)$ — точки перегиба; $x=-1$ и $y=1$ — асимптоты.
5.476. $y_{\max}=y(0)=2$, $(\pm 1, \sqrt[3]{2})$ — точки перегиба; $y=0$ — асимптота. **5.477.** $y_{\min}=y(1)=-1$; $(0, 0)$ и $(2, 0)$ — точки перегиба.

5.478. $y_{\max}=y(0)=2$, $y_{\min}=y(\pm 1)=\sqrt[3]{4}$. 5.479. $(0, 0)$ — точка перегиба; $x=-1$, $x=1$, $y=0$ — асимптоты. 5.480. $(0, 1)$ и $(1, 0)$ — точки перегиба; $y=-x$ — асимптота. 5.481. $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ — точки перегиба. 5.482. $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ — точки перегиба; $y=2x$ — асимптота. 5.483. $(0, 0)$, $(\pm 1, \pm\sqrt[3]{2})$ — точки перегиба; $y=x$ — асимптота. 5.484. $(0, 0)$ — точка перегиба; $y=-1$ — левая асимптота, $y=1$ — правая асимптота. 5.485. $y_{\min}=y(-\sqrt[3]{3})=1$; $(0, 0)$ — точка перегиба; $x=-\sqrt[3]{2}$ — асимптота. 5.486. $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(2)=\sqrt[3]{16}$; $(-\sqrt[3]{4}, -\sqrt[3]{2})$ — точка перегиба; $x=\sqrt[3]{4}$ и $y=x$ — асимптоты. 5.487. $y_{\max}=y(-\sqrt[3]{6})=-3/\sqrt[3]{2}$; $(0, 0)$ и $(\sqrt[3]{3}, 3/\sqrt[3]{25})$ — точки перегиба; $x=-\sqrt[3]{2}$ и $y=x$ — асимптоты. 5.488. $y_{\min}=y(0)=0$, $(\pm\sqrt{2}, 2/\sqrt{3})$ — точки перегиба; $y=x$ — правая асимптота, $y=-x$ — левая асимптота. 5.489. $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ и $(-1, -1)$ — точки перегиба; $x=0$ и $y=1$ — асимптоты. 5.490. $y_{\max}=y(1)=1/\sqrt[3]{4}$, $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{0,16})$ — точка перегиба; $x=-1$, $y=0$ — асимптоты. 5.491. $y_{\max}=y(-\sqrt{3})=0$, $y_{\min}=y(\sqrt{3})=0$; $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ — точки перегиба; $x=0$ — асимптота, $y=1$ — правая асимптота, $y=-1$ — левая асимптота. 5.492. $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(\pm\sqrt{2})=2$; $x=\pm 1$ — асимптоты, $y=x$ — правая асимптота, $y=-x$ — левая асимптота. 5.493. $y_{\max}=y(0)=1$, $y_{\min}=y(\pm 1)=0$. 5.494. $y_{\max}=y(0)=2\sqrt{2}$, $y_{\min}=y(\pm\sqrt{2})=0$, $(\pm 1, 1)$ — точки перегиба. 5.495. $y_{\min}=y\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)=-\sqrt{2}$, $y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\sqrt{2}$, $\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi, 0\right)$ — точки перегиба, $k\in\mathbb{Z}$. 5.496. $y_{\min}=y\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{\max}=y\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ — асимптоты, $k\in\mathbb{Z}$. 5.497. $y_{\min}=y(0)=0$, $y=-\frac{\pi x}{2}-1$ — левая асимптота, $y=\frac{\pi x}{2}-1$ — правая асимптота. 5.498. $y_{\min}=y(1)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$, $y_{\max}=y(-1)=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ — точка перегиба; $y=\frac{x}{2}+\pi$ — левая асимптота, $y=\frac{x}{2}$ — правая асимптота. 5.499. $y_{\max}=y(1)=e$, $\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}, e^{1/2}\right)$ — точки перегиба; $y=0$ — асимптота. 5.500. $y_{\max}=y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$, $y_{\min}=y(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$; $(0, 0)$, $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}\right)$ — точки перегиба; $y=0$ — асимптота. 5.501. $y_{\max}=y(1)=\frac{1}{e}$, $\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, (2\mp\sqrt{2})e^{-(2\mp\sqrt{2})}\right)$ — точки перегиба; $x=0$ — левая асимптота, $y=0$ — асимптота. 5.502. $y_{\max}=y(\pm 1)=\frac{1}{e}$,

$y_{\min}=y(0)=0$; $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ 3e^{-3}\right)$ и $\left(\pm\sqrt{2},\ \frac{1}{2}e^{-1/2}\right)$ — точки перегиба; $y=0$ — асимптота. **5.503.** $y_{\min}=y(1)=e$; $y=x+1$ — асимптота, $x=0$ — правая асимптота. **5.504.** $y_{\max}=y(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2e}}$, $y_{\min}=$ $=y(-\sqrt{2})=-\frac{1}{\sqrt{2e}}$, $\left(\pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{2}},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}e^{-\frac{1}{4}(5+\sqrt{17})}\right)$ и $\left(\pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}e^{-\frac{1}{4}(5-\sqrt{17})}\right)$ — точки перегиба; $y=0$ — асимптота. **5.505.** $y_{\max}=y(-2)=-4\sqrt{e}$, $y_{\min}=y(1)=$ $=-1/e$: $(0{,}4,\ -1{,}6e^{-5/2})$ — точка перегиба; $x=0$ — левая асимптота, $y=x-3$ — асимптота. **5.506.** $(1,\ e^2)$ — точка перегиба, $x=0$ — правая асимптота, $y=2x+3$ — асимптота. **5.507.** $y_{\max}=y(\pm 1)=2/\sqrt{e}$, $y_{\min}=y(0)=1$; $\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}},\ (3-\sqrt{3})e^{-\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)$ и $\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{3}},\right.$ $\left.(3+\sqrt{3})e^{-\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$ — точки перегиба; $y=0$ — асимптота. **5.508.** $y_{\min}=$ $=y(1)=e^2$, $x=0$ — правая асимптота. **5.509.** $y_{\max}=y(\sqrt{3})=$ $=3\sqrt{3}e^{-3/2}$, $y_{\min}=y(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}e^{-3/2}$; $(0,\ 0)$, $(\pm 1,$ $\pm e^{-1/2})$, $(\pm\sqrt{6},\ \pm\sqrt{6}e^{-3})$ — точки перегиба; $y=0$ — асимптота. **5.510.** $(0,\ 0)$ — точка перегиба. **5.511.** $y_{\max}=y(e)=\frac{1}{e}$, $\left(e\sqrt{e},\right.$ $\left.\frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ — точка перегиба; $x=0$ и $y=0$ — правые асимптоты. **5.512.** $y_{\max}=y\left(\frac{1}{e}\right)=-e$; $x=1$ — асимптота, $x=0$ и $y=0$ — правые асимптоты. **5.513.** $y_{\min}=y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$; $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}},\ -\frac{3}{2e^3}\right)$ — точка перегиба. **5.514.** $y_{\max}=y(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$; $\left(\sqrt[6]{e^5},\ \frac{5}{6\sqrt[3]{e^5}}\right)$ — точка перегиба, $x=0$ и $y=0$ — правые асимптоты. **5.515.** $y_{\max}=y(1/e)=1/e^2$, $y_{\min}=x(1)=0$; $\left(e^{-1{,}5-\sqrt{1{,}25}},\ \frac{7+3\sqrt{5}}{2}e^{-3-\sqrt{5}}\right)$ и $\left(e^{-1{,}5+\sqrt{1{,}25}},\right.$ $\left.\frac{7-3\sqrt{5}}{2}e^{-3+\sqrt{5}}\right)$ — точки перегиба. **5.516.** $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=$ $=y(\pm\sqrt{e})=2e$; $x=\pm 1$ — асимптоты. **5.517.** $y_{\max}=y(1/e^2)=4/e^2$, $y_{\max}=y(-1)=0$, $y_{\min}=y(-1/e^2)=-4/e^2$; $(0,\ 0)$, $(\pm 1/\sqrt{e},\ \pm 1/\sqrt{e})$ — точки перегиба. **5.518.** $y_{\max}=y(0)=0$; $x=\pm 1$ — асимптоты. **5.519.** $y_{\max}=y(\pm e)=1/e^2$, $y_{\min}=y(\pm 1)=0$; $\left(\pm e^{\frac{5-\sqrt{13}}{6}},\right.$ $\left.\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\right)$, $\left(\pm e^{\frac{5+\sqrt{13}}{6}},\ \left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)^2 e^{-\frac{5+\sqrt{13}}{2}}\right)$ — точки перегиба; $x=0$ и $y=0$ — асимптоты. **5.520.** $y_{\min}=y(1/e)=$

$=(1/e)^{1/e}\approx 0{,}69$, выпукла вниз, $y\longrightarrow 1$ при $x\longrightarrow +0$, т. е. $M(0,\ 1)$ — точка прекращения. **5.521.** $y_{\max}=y(e)=e^{1/e}\approx 1{,}44$; $(0{,}58,\ 0{,}12)$ и $(4{,}35,\ 1{,}4)$ — точки перегиба; $y\to 0$ при $x\to +0$, т. е. $M(0,0)$ — точка прекращения; $y=1$ — асимптота. ● Точки перегиба удовлетворяют уравнению $\ln^2\dfrac{x}{e}+2x\ln\dfrac{x}{e}-x=0$, их можно не находить. **5.522.** $x=0$ — точка устранимого разрыва $(y_-(0)=y_+(0)=e)$, функция убывающая, выпукла вниз, $x=-1$ — вертикальная асимптота, $y=1$ — асимптота. **5.523.** $x=0$ — точка устранимого разрыва, $y=0$ — асимптота. Точки экстремумов удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} x=x$. Точки перегиба удовлетворяют уравнению $\operatorname{tg} x=\dfrac{2x}{2-x^2}$. ● Точки экстремумов и перегиба можно не находить. **5.525.** $x_{\min}=-1$ при $t=1$ $(y(1)=3)$, $y_{\min}=-1$ при $t=-1$ $(x(-1)=3)$; парабола с вершиной в начале координат, ось которой — прямая $y=x$ $(x>0,\ y>0)$. **5.526.** $x_{\min}=y_{\min}=1$ при $t=0$ (точка возврата); $y=2x$ — асимптота при $t\longrightarrow +\infty$. **5.527.** Астроида (см. § 3 гл. 2, рис. 20). **5.528.** $\left(-1-3\pi,\ -1+\dfrac{3\pi}{2}\right)$ — максимум, $\left(1-3\pi,\ 1-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ — минимум, $(-3\pi,\ 0)$ — точка перегиба, $y=x$ и $y=x+6\pi$ — асимптоты. **5.529.** Трехлепестковая роза; $D=[0,\ \pi/3]\cup[2\pi/3,\ \pi]\cup[4\pi/3,\ 5\pi/3]$; экстремумы при $\varphi=\pi/6$, $\varphi=5\pi/6$, $\varphi=3\pi/2$. **5.530.** Кардиоида, полюс — точка возврата, $r_{\max}=r(0)=2a$, $r_{\min}=r(\pi)=0$. **5.531.** $D=(0,\ +\infty)$; линия спирально завивается вокруг полюса, асимптотически к нему приближаясь; $(\sqrt{2\pi},\ 1/2)$ — точка перегиба; полярная ось $(\varphi=0)$ — горизонтальная асимптота. **5.532.** Лемниската Бернулли (см. § 3 гл. 2, рис. 14).

5.533. Прямая $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{4}$. **5.534.** В плоскости Oxy дуга окружности $x^2+y^2=2$ между точками $(1,\ 1)$ и $(0,\ \sqrt{2})$, пробегаемая против часовой стрелки. **5.535.** Правая ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1$, $y=-1$, пробегаемая снизу вверх, если смотреть от начала координат. **5.536.** В плоскости Oxy парабола $y=\dfrac{1}{9}(6x-x^2)$, пробегаемая слева направо. **5.537.** Винтовая линия $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$. **5.538.** Астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}$, $z=0$. **5.539.** Линия пересечения цилиндров $y=x^2$, $z=x^3$, пробегаемая снизу вверх. **5.540.** *Кривая Вивиани* — линия пересечения сферы и кругового цилиндра: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=x$. **5.541.** Эллипс $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, $z=2$. **5.542.** Дважды пробегаемая парабола $y=x^2+x$, $z=3$. **5.544.** Прямая $4x+3y=0$, $z=0$, $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$. **5.545.** Парабола (в плоскости Oxy) $y=\dfrac{1}{9}(12x-x^2)$; $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}+(4-2t)\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}|_{t=0}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}|_{t=1}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v}|_{t=2}=3\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{v}|_{t=3}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$. **5.546.** Циклоида (в плоскости Oxy) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$; $\boldsymbol{v}=2(1-\cos t)\,\boldsymbol{i}+2\sin t\cdot\boldsymbol{j}$; при $t=\dfrac{\pi}{2}$ $\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$, при $t=\pi$ $\boldsymbol{v}=4\boldsymbol{i}$. **5.547.** $0{,}6\boldsymbol{i}-0{,}8\boldsymbol{j}$. **5.548.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$. **5.549.** а) $\cos t\cdot\boldsymbol{i}-\sin 2t\cdot\boldsymbol{j}+\cos 2t\cdot\boldsymbol{k}$; б) $(\cos t-t\sin t)\,\boldsymbol{i}+(\sin t+t\cos t)\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; в) $(1-\sin t)\,\boldsymbol{i}+$

$+j+\cos t\cdot k$. 5.550. а) i; б) $12i-2j-\frac{2}{\sqrt{5}}k$. 5.551. $1+3t^2+5t^4$. 5.552. $(3t^2-2t)\,i+(3t^2-2t)\,j-2tk$. 5.553. $\cos t\,(i+2uj+3u^2k)$. 5.554. а) $\frac{d^2r}{dt^2}=-\cos t\cdot i+e^tj+2k$, $\left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t=0}=-i+j+2k$; б) $\frac{d^2r}{dt^2}=$ $=-(2\sin t+t\cos t)\,j+(2\cos t-t\sin t)\,k$; $\left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t=0}=2k$. 5.555. $w=$ $=2\sin t\cdot i+2\cos t\cdot j$; $w\,|_{t=\pi/2}=2i$; $w\,|_{t=\pi}=-2j$. 5.556. $w=-2j$, $w_\tau=\frac{4\,(t-2)}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$, $w_n=\frac{6}{\sqrt{4t^2-16t+25}}$; при $t=0$ $w_\tau=-1{,}6$, $w_n=1{,}2$. ● $w_\tau=\frac{dv}{dt}$, $w_n=\sqrt{w^2-w_\tau^2}$. 5.557. $w=i+\frac{1}{\sqrt{2t+1}}j$, $w_\tau=1$, $w_n=\frac{1}{\sqrt{2t+1}}$; при $t=0$ $w=i+j$, $w_n=1$. 5.558. $x+2z=4$, $y=2$ (касательная); $2x-z=3$ (нормальная плоскость). 5.559. $\frac{x-2}{1}=$ $=\frac{y-\frac{8}{3}}{2}=\frac{z-4}{4}$ (касательная); $3x+6y+12z-70=0$ (нормальная плоскость). 5.560. $y=z$, $x=a$ (касательная); $y+z=0$ (нормальная плоскость). 5.561. $\frac{x-1}{12}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-4}{3}$ (касательная); $12x-4y+3z=12$ (нормальная плоскость). 5.562. $\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}$ (касательная); $8x+10y+7z=12$ (нормальная плоскость). 5.563. $K\,|_{x=0}=2$, $K\,|_{x=1}=$ $=\frac{2}{5\sqrt{5}}$. 5.564. $K_A=3$, $K_B=1/9$. 5.565. $3/\sqrt{2}$. 5.566. $1/2$. 5.567. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 5.568. $K=\frac{3}{4a\sin\frac{\varphi}{2}}$, $\left.K\right|_{\varphi=\pi}=\frac{3}{4a}$. 5.569. $\frac{3}{a}$.

5.570. а) $\frac{(9x^{4/3}+1)^{3/2}}{6x^{1/3}}$; б) $\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$. 5.571. а) $\sqrt[3]{|axy|}$; б) $\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}=\frac{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^{3/2}}{ab}$. 5.572. $4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$. 5.573. а) $\frac{a^2}{3r}$; б) $\frac{(a^2+r^2)^{3/2}}{2a^2+r^2}$. 5.574. $\left(\frac{\ln 2}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ● Составить выражение кривизны K и найти ее точку экстремума. 5.575. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{\ln 2}{2}\right)$. 5.576. $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$; $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$. 5.577. $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$; $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. 5.578. $\left(-1,\ e-\frac{1}{e}\right)$; $(x+1)^2+$ $+\left(y-e+\frac{1}{e}\right)^2=e^2$. 5.579. $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$; $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$. 5.580. $(\pi a,\ -2a)$; $(x-\pi a)^2+(y+2a)^2=16a^2$. 5.581. а) $X=\frac{x-9x^5}{2}$, $Y=\frac{15x^4+1}{6x}$; б) $X^{2/3}-Y^{2/3}=(2a)^{2/3}$; в) $(X+Y)^{2/3}+(X-Y)^{2/3}=$

$=2a^{2/3}$. 5.582. $Y=a\operatorname{ch}\dfrac{X}{a}$. 5.583. $X^2=\dfrac{4}{27}Y^3$. 5.584. $\tau=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times$ $\times(i-j+k)$, $\nu=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$, $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-i+j+2k)$; $x-1=$ $=-(y-1)=z$ (касательная); $x=y$, $z=0$ (главная нормаль); $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$ (бинормаль). 5.585. $\tau=i$, $\nu=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(j+k)$, $\beta=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(j-k)$; $y=2$, $z=4$ (касательная); $y-z+2=0$, $x=\pi$ (главная нормаль); $y+z=6$, $x=\pi$ (бинормаль). 5.586. $\tau=\dfrac{1}{3}(2i+j+2k)$, $\nu=\dfrac{1}{3}(-i-2j+2k)$, $\beta=\dfrac{1}{3}(2i-2j-k)$; $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ (касательная); $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$ (главная нормаль); $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$ (бинормаль). 5.587. $\tau=\dfrac{1}{\sqrt{18}}(i+j+4k)$, $\nu=-\dfrac{1}{3}(2i+2j-k)$, $\beta=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$; $x-1=y-1=\dfrac{z-2}{4}$ (касательная); $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ (главная нормаль); $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$ (бинормаль). 5.588. $x+2y=3$ (соприкасающаяся плоскость); $z=1$ (нормальная плоскость); $2x-y=1$ (спрямляющая плоскость). 5.589. $y=x$ (соприкасающаяся плоскость); $x+y=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ (нормальная плоскость); $z=0$ (спрямляющая плоскость). 5.590. $\tau=i$, $\nu=k$, $\beta=-j$, $y=0$, $z=1$ (касательная); $x=1$, $y=0$ (главная нормаль); $x=1$, $z=1$ (бинормаль); $y=0$ (соприкасающаяся плоскость); $x=1$ (нормальная плоскость); $z=1$ (спрямляющая плоскость). 5.591. $\tau=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2i-j)$, $\nu=-\dfrac{1}{\sqrt{30}}(i+$ $+2j+5k)$, $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(i+2j-k)$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{0}$ (касательная); $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{5}$ (главная нормаль); $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=$ $=\dfrac{z-3}{-1}$ (бинормаль); $x+2y-z-2=0$ (соприкасающаяся плоскость); $2x-y=0$ (нормальная плоскость); $x+2y+5z-20=0$ (спрямляющая плоскость). 5.592. $K=\dfrac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$, $\sigma=-\dfrac{\sqrt{2}}{(x+y)^2}$; при $t=0$ $K=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\sigma=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. 5.593. $K=2\sqrt{\dfrac{9t^4+9t^2+1}{(9t^4+4t^2+1)^3}}$, $\sigma=$ $=\dfrac{3}{9t^4+9t^2+1}$; при $t=0$ $K=2$, $\sigma=3$. 5.594. $K=\sigma=\dfrac{1}{3(t^2+1)^2}$; при $t=1$ $K=\sigma=\dfrac{1}{12}$. 5.595. $K=\dfrac{2t}{(2t^2+1)^2}$, $\sigma=-\dfrac{2t}{(2t^2+1)^2}$; при $t=1$ $K=\dfrac{2}{9}$, $\sigma=-\dfrac{2}{9}$. 5.596. $K=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\sigma=\dfrac{1}{3}$. 5.597. $K=$

$= \sqrt{\dfrac{9y^4+4y^6+1}{(y^6+y^2+1)^3}}$, $\sigma = -\dfrac{6y}{9y^4+4y^6+1}$; при $y=1$ $K=\dfrac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$, $\sigma=-\dfrac{3}{7}$. **5.598.** $w=2j+4tk$, $w_\tau=4t$, $w_\nu=2$; $[w_\tau]_{t=1}=4$. ● $w_\tau=\dfrac{dV}{dt}$, $w_\nu=\dfrac{v^2}{R}$. **5.599.** Парабола $y^2=x$; $z'(t)=2t+i$.

5.600. Прямая $x-y=2$; $z'(t)=e^{i\frac{\pi}{4}}$. **5.601.** Верхняя полуокружность $y=\sqrt{4-x^2}$; $z'(t)=2ie^{it}$. **5.602.** Эллипс $x=4\cos t$, $y=2\sin t$; $z'(t)=i(3e^{it}-e^{-it})$. **5.603.** Правая ветвь гиперболы $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$; $z'(t)=(2+i)e^t-(2-i)e^{-t}$. **5.604.** Дважды пробегаемая «правая» ветвь параболы $y=x^2$; $z'(t)=2t+4it^3$. **5.605.** Арка циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$; $z'(t)=1-e^{-it}$. **5.606.** Эвольвента окружности $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$; $z'(t)=ate^{it}$. **5.607.** r', $r\varphi'$; $r''-r\varphi'^2$, $2r'\varphi'+r\varphi''$. ● Представить закон движения в показательной форме $z=re^{i\varphi}$ и найти производные z' и z''. Искомые величины суть коэффициенты при $e^{i\varphi}$ и $ie^{i\varphi}$. **5.608.** Скорость $v=izf'(z)$. ● Воспользоваться показательной формой комплексного числа: $z=Re^{i\varphi}$ и найти производную $\dfrac{dw}{dt}=\dfrac{dw}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dt}$. **5.609.** ● а) Используя результат примера 9, показать, что $D^k(e^{\lambda t})=\lambda^k e^{\lambda t}$ для любого $k\in\mathbb{N}$. б) Предварительно доказать, что $D^k(e^{\lambda t}z(t))=e^{\lambda t}(D+\lambda)^k z(t)$. Действительно, несложной проверкой убеждаемся, что $D(e^{\lambda t}z(t))=e^{\lambda t}(D+\lambda)z(t)$, и далее, используя этот результат, что $D^k(e^{\lambda t}z(t))=D(D^{k-1}(e^{\lambda t}z(t)))=D(e^{\lambda t}(D+\lambda)^{k-1}z(t))=e^{\lambda t}(D+\lambda)^k z(t)$.

5.611. $-9e^{2t}\sin 3t$. **5.612.** 0. ● $e^{t/2}\sin t=\operatorname{Im} e^{\left(\frac{1}{2}+i\right)t}$. **5.613.** $e^t(\cos 2t-8\sin 2t)$. **5.614.** $t(18-t^2)\cos t+(6-9t^2-t^3)\sin t$. **5.615.** $e^t(\sin 2t+4t(1+t^2)\cos 2t)(1+t^2)^{-3/2}$. **5.616.** $e^t(\cos t-2t\sin t)$.

5.622. ◄ По условию $f(a)\cdot f(b)<0$. Определим числа x_n $(n=0, 1, \ldots)$ равенством

$$x_n=(a_n+b_n)/2,$$

где $a_0=a$, $b_0=b$, $p_n=f(a_{n-1})\cdot f(x_{n-1})$, $n=1, 2, \ldots$, и

$$a_n=\begin{cases} a_{n-1}, & \text{если } p_n<0,\\ x_{n-1}, & \text{если } p_n\geqslant 0,\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases} x_{n-1}, & \text{если } p_n\leqslant 0,\\ b_{n-1}, & \text{если } p_n>0.\end{cases}$$

Получим $[a_n, b_n]\subset[a_{n-1}, b_{n-1}]$, $n=1, 2, \ldots$, причем $[a_n, b_n]$ — отрезок изоляции корня, длина которого в 2^n раз меньше длины исходного отрезка. В частности, $a_n=b_n=x_{n-1}$, если $f(x_{n-1})=0$.

Программа имеет следующий вид:

```
  SUBROUTINE FORK(F, A, B, N)
  K=0
  AN=A
  BN=B
1 X=(AN+BN)/2.
  S=F(X)
  IF(S.EQ.0.) GO TO 4
  IF(F(AN)*S.GT.0) GO TO 2
  BN=X
  GO TO 3
2 AN=X
3 K=K+1
  IF(K.LT.N) GO TO 1
  A=AN
  B=BN
  RETURN
4 A=X
  B=X
  RETURN
  END
```

Данную программу можно использовать и для нахождения корня уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[a, b]$, взяв значением корня величину $(a_n+b_n)/2$, при этом предельная абсолютная погрешность равна $(b-a)/2^{n+1}$. ▶

5.624. 1,6702. **5.625.** —0,6823. **5.626.** —2,2340, 0,3276. **5.627.** 2,8931. **5.628.** —1,4305, 1,2963. **5.629.** 2,0946. **5.630.** —2,3300. 0,2016, 2,1284. **5.631.** 0,3684. **5.632.** —2,3247. **5.633.** —0,7976, 1,4945. **5.634.** 0,2510, 1,4934. **5.635.** —0,7549. **5.636.** 1,5160. **5.637.** 3,3532. **5.638.** 1,2970. **5.639.** 1,2672. **5.640.** 1,3713. **5.641.** 1,7556. **5.642.** 0,6529. **5.643.** 0, 0,7469. **5.644.** 4, 0,3099. **5.645.** —1,4916. **5.646.** 0,5110. **5.647.** 0,7391. **5.648.** ±0,8241. **5.649.** ±0,7339, 0. **5.650.** 3,6926. **5.651.** 1,8411. **5.652.** 1,0967.

5.654.

```
  FUNCTION CHORD(F, A,
 *B,S,EPS)
  FA=F(A)
  FB=F(B)
  X=A-(B-A)*FA/(FB-FA)
  X1=X
  FX=F(X)
  IF(FA*FX.GT.0.) GO TO 2
1 X=X-(X-A)*FX/(FX-FA)
  FX=F(X)
  DX=S*ABS(X-X1)
  X1=X
  IF(DX.GT.EPS) GO TO 1
  CHORD=X
  RETURN
2 X=X-(B-X)*FX/(FB-
 *FX)
  FX=F(X)
  DX=S*ABS(X-X1)
  X1=X
  IF(DX.GT.EPS) GO TO 2
  CHORD=X
  RETURN
  END
```

5.655.

```
  FUNCTION TANGEN(F,FD,
 *A,B,S,EPS)
  FA=F(A)
  C=A-(B-A)*FA/(F(B)-
 *FA)
  P=FA*F(C)
  IF(P) 2,1,3
1 TANGEN=C
  RETURN
2 X=A
  GO TO 4
3 X=B
4 X1=X
  X=X-F(X)/FD(X)
  IF(S*(X1-X)**2.GT.EPS)
 *GO TO 4
  TANGEN=X
  RETURN
  END
```

5.656.

```
  FUNCTION COMBI(F,FD,A,B,EPS)
  FA=F(A)
  FB=F(B)
  X=A-(B-A)*FA/(FB-FA)
  FX=F(X)
  IF(FA*FX.GT.0.) GO TO 2
  XT=A
1 X=X-(X-A)*FX/(FX-FA)
  FA=F(X)
  XT=XT-F(XT)/FD(XT)
  IF(ABS(X-XT).GT.EPS) GO TO 1
  COMBI=(X+XT)/2.
  RETURN
2 XT=B
3 X=X-(B-X)*FX/(FB-FX)
  FX=F(X)
```

```
XT=XT-F(XT)/FD(XT)
IF(ABS(X-XT).GT.EPS) GO TO 3
COMBI=(X+XT)/2.
RETURN
END
```

5.657.

Ответ к задаче 5.624:

```
FUNCTION F(X)
F=X**3+2.*X-8.
RETURN
END
```

Ответы к другим задачам отличаются вторыми операторами.

5.658. Задание для ЭВМ состоит из трех программных единиц: подпрограмм-функций FUNCTION F(X), FUNCTION CHORD(F,A,B, S, EPS) и основной программы, которая для задачи 5.633 имеет вид:

```
  EXTERNAL F
  ROOT1=CHORD(F,-1.,-0.5,1.4,0.0001)
  ROOT2=CHORD(F,1.2,1.8,3.4,0.0001)
  WRITE (3,1) ROOT1,ROOT2
1 FORMAT (' КОРНИ УРАВНЕНИЯ ',F8.4,' И ',F8.4)
  STOP
  END
```

5.659. Задание для ЭВМ содержит 4 программных единицы. Ответ к задаче 5.651 имеет вид:

1) подпрограмма-функция вычисления значений функции:

```
FUNCTION F(X)
F=X**2+ALOG(X)-4.
RETURN
END
```

2) подпрограмма-функция вычисления значений производной:

```
FUNCTION FD(X)
FD=2.*X+1./X
RETURN
END
```

3) подпрограмма-функция вычисления корня методом касательных:

```
FUNCTION TANGEN(F,FD,A,B,S,EPS)
```

4) основная программа:

```
  EXTERNAL F,FD
  ROOT=TANGEN(F,FD,1.,2.,0.3,1.E-4)
  WRITE (3,1) ROOT
1 FORMAT (' КОРЕНЬ= ',F6.4)
  STOP
  END
```

5.670. См. ответ к задаче 5.659. Основная программа к задаче 5.651 имеет вид:

```
  EXTERNAL F,FD
  ROOT=COMBI(F,FD,1.,2.,1.E-4)
  WRITE (3,1) ROOT
1 FORMAT (12H    КОРЕНЬ=   ,F6.4 )
  STOP
  END
```

5.671 и **5.672.** ● Воспользоваться методом математической индукции. **5.673.** $f\left(\frac{12}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}=0{,}9511\pm0{,}0001$. **5.674.** $\ln 11=2{,}3979\pm$ $\pm0{,}0003$. ● Для нахождения значений функции в узлах интерполяции использовать равенства $\ln 9=2\ln 3$, $\ln 10=\ln 5+\ln 2$, $\ln 12=$ $=2\ln 2+\ln 3$, $\ln 15=\ln 5+\ln 3$. **5.675.** $f(1{,}26)=1{,}105$, $f(1{,}58)=1{,}261$. **5.676.** $f(1{,}89)=2{,}092$, $f(2{,}43)=3{,}144$. **5.677.** $f(0{,}83)=0{,}817$, $f(0{,}97)=$ $=0{,}942$. **5.678.** $f(1{,}74)=1{,}2148$, $f(1{,}97)=1{,}0007$. **5.679.** $f(2{,}72)=$ $=1{,}5463$, $f(2{,}93)=0{,}9805$. **5.680.** $f(23)=0{,}921$, $f(41)=0{,}755$. **5.681.** $f(1{,}3)=1{,}184$, $f(4{,}0)=1{,}758$. **5.682.** $f(0{,}20)=0{,}1987$, $f(0{,}41)=$ $=0{,}3990$. **5.683.** $f(1{,}25)=0{,}0771$, $f(1{,}76)=0{,}0128$. **5.684.** $f(58)=0{,}275$, $f(79)=-0{,}291$. **5.685.** $\mathrm{Si}\,(0{,}26)=0{,}25903$, $\mathrm{Si}\,(0{,}45)=0{,}44497$. **5.686.** $\Phi\,(0{,}27)=0{,}29742$, $\Phi\,(0{,}58)=0{,}58792$. **5.688.** 1,82. **5.689.** 1,45. **5.690.** 2,3. **5.691.** 60°30′.

5.692.

```
  SUBROUTINE DEL(X,Y,N)
  DIMENSION X(N),Y(N)
  N1=N-1
  DO 2 I=1,N1
  A=Y(I)
  DO 1 K=I,N1
  C=X(K)-X(K+I)
  B=(Y(K)-Y(K+1))/C
  Y(K)=A
1 A=B
2 Y(N)=A
  RETURN
  END
```

5.693.

```
  SURBOUTINE DELTA(Y,N)
  DIMENSION Y(N)
  N1=N-1
  DO 2 I=1,N1
  A=Y(I)
  DO 1 K=I,N1
  B=Y(K+1)-Y(K)
  Y(K)=A
1 A=B
2 Y(N)=A
  RETURN
  END
```

● Программу задачи 5.693 поясняет следующая схема ($N=6$):

$$\begin{array}{llllll}
y_1 & & & & & \\
y_2 & \Delta y_1 & & & & \\
y_3 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_1 & & & \\
y_4 & \Delta y_3 & \Delta^2 y_2 & \Delta^3 y_1 & & \\
y_5 & \Delta y_4 & \Delta^2 y_3 & \Delta^3 y_2 & \Delta^4 y_1 & \Delta^5 y_1 \\
y_6 & \Delta y_5 & \Delta^2 y_4 & \Delta^3 y_3 & \Delta^4 y_2 &
\end{array}$$

После выполнения операторов внешнего цикла при $I=3$ массив Y будет содержать величины y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^3 y_2$, $\Delta^3 y_3$, а после выполнения всей программы — величины y_1, Δy_1, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_1$, $\Delta^4 y_1$, $\Delta^5 y_1$.

5.694.

```
  FUNCTION POLINT(X,Y,N,
 *KEY,ARG)
  DIMENSION X(N),Y(N)
  N1=N-1
  IF(KEY) 4,1,4
1 DO 3 I=1,N1
  A=Y(I)
  DO 2 K=I,N1
  B=(Y(K)-Y(K+1))/(X(K)
 *-X(K+I))
  Y(K)=A
2 A=B
3 Y(N)=A
4 POLINT=Y(N)
  DO 5 K=1,N1
5 POLINT=POLINT*(ARG-
 *X(N-K))+Y(N-K)
  RETURN
  END
```

● Интерполяционный полином вычисляется по схеме:

$$p_{n-1}(x)=(\ldots((Y(N)(x-X(N-1)+Y(N-1))(x-X(N-2))+ +Y(N-2))\ldots)(x-X(1))+Y(1),$$

где все выражения, стоящие в скобках, последовательно вычисляются начиная с внутренних скобок.

5.695.

```
 SUBROUTINE POLYN(X,Y,
*N, KEY,ARG,P,EPS)
 DIMENSION X(N),Y(N)
 N1=N-1
 IF(KEY) 4,1,4
1 DO 3 I=1,N1
 A=Y(I)
 DO 2 K=I,N1
 B=(Y(K)-Y(K+1))/(X(K)
*-X(K+I))
 Y(K)=A
2 A=B
3 Y(N)=A
4 P=Y(1)
 EPS=1
 DO 5 I=1,N1
 EPS=EPS*(ARG-X(I))
5 P=P+EPS*Y(I+1)
 EPS=EPS*Y(N)
 EPS=ABS(EPS)
 RETURN
 END
```

5.696.

```
 FUNCTION POLIN(X,H,Y,N,
*KEY,ARG)
 DIMENSION Y(N)
 M=N-1
 IF(KEY) 5,1,5
1 DO 3 I=1,M
 A=Y(I)
 DO 2 K=I,M
 B=Y(K+1)-Y(K)
 Y(K)=A
2 A=B
3 Y(N)=A
 F=1.
 DO 4 I=3,N
 FI=I-1
 F=F*FI
4 Y(I)=Y(I)/F
5 T=(ARG-X)/H
 POLIN=Y(N)
 DO 6 K=1,M
6 POLIN=POLIN*(T-M+K)
*+Y(N-K)
 RETURN
 END
```

5.697. Задание для ЭВМ должно содержать две программные единицы:

а) подпрограмму-функцию

```
FUNCTION POLIN(X,H,Y,N,KEY,ARG)
```

б) основную программу, которая для задачи 5.676 имеет вид:

```
 DIMENSION Y(8)
 DATA Y/1.958,2.107,2.268,2.443,2.632,2.841,3.071,3.324/
 P1=POLIN(1.8,0.1,Y,8,0,1.89)
 P2=POLIN(1.8,0.1,Y,8,1,2.43)
 WRITE (3,1) P1,P2
1 FORMAT ('  F(1.89)=',F5.3,'  F(2.43)=',F5.3)
 STOP
 END
```

5.698. а) Подпрограмма-функция:

```
FUNCTION POLINT(X,Y,N,KEY,ARG)
```

б) основная программа (к 5.689):

```
 DIMENSION X(6),Y(6)
 DATA X/1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6/,Y/2.431,2.928,3.497,4.144.4.875,
*5.696/
```

```
      X0=POLINT(Y,X,6,0,4.498)
      WRITE (3,1) X0
    1 FORMAT (30X,'F(',F3.2,')=4.498')
      STOP
      END
```

При обращении к подпрограмме-функции POLINT первый параметр при любых обозначениях есть массив узлов интерполяции, а второй — массив соответствующих значений функции.

5.699. а) Подпрограмма:

```
SUBROUTINE POLYN(X,Y,N,KEY,ARG,P,EPS)
```

б) основная программа (к 5.688):

```
      DIMENSION X(8),Y(8)
      DATA X/1.5,1.55,1.6,1.65,1.7,1.75,1.8,1.85/,Y/—1.125,—0.926,
     *—0.704,—0.458,—0.187,0.109,0.432,0.732/
      CALL POLYN(Y,X,8,0,0.569,POLY,EPSI)
      WRITE (3,1) POLY,EPSI
    1 FORMAT('  F(X)=0.569, ГДЕ X=',F4.2,
     *' С ТОЧНОСТЬЮ ДО ',F5.4)
      STOP
      END
```

5.700. $f'(2{,}03)=1{,}42249$, $f'(2{,}22)=1{,}87640$. **5.701.** $f'(1{,}14)=1{,}0704$, $f'(1{,}42)=1{,}1698$. **5.702.** $f'(3{,}02)=5{,}63133$, $f'(3{,}31)=7{,}34833$. **5.703.** $f'(0{,}82)=0{,}8077$, $f'(1{,}03)=0{,}9914$. **5.704.** $f'(1{,}34)=0{,}1873$, $f'(1{,}65)=0{,}0741$. **5.705.** $f'(2)=9$, $f''(2)=12$. **5.706.** $f'(2{,}5)=63{,}5$, $f''(2{,}5)=75$.

5.707.

```
      FUNCTION DW1(T,N)
      TN=N
      S=0.
      DW1=1.
      D=0.
    1 IF(ABS(T—S).LT.1.E—21) GO TO 3
      DW1=DW1*(T—S)
      D=D+1./(T—S)
      S=S+1.
      IF(S.LE.TN) GO TO 1
      DW1=DW1*D
      RETURN
    2 DW1=DW1*(T—S)
    3 S=S+1
      IF(S.LE.TN) GO TO 2
      RETURN
      END
```

● Для $w_n(t)=\prod_{k=0}^{n}(t-k)$, $n=0,\ 1,\ \ldots,$

$$w_n'(t)=\begin{cases} w_n(t)\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{t-k}, & t\neq\nu,\\ \prod\limits_{\substack{k=0\\ k\neq\nu}}^{n}(t-k), & t=\nu,\end{cases}\qquad \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

5.708.

```
      FUNCTION DW2(T,N)
      TN=N
      TK=0.
      S1=0.
      S2=0.
      DW2=1.
      IF(ABS(T).LT.1.E-21) GO TO 4
    1 S1=S1+1./(T-TK)
      DW2=DW2*(T-TK)
      TK=TK+1.
      IF(ABS(T-TK).LT.1.E-21) GO TO 5
      S2=S2+(1./(T-TK))*S1
    2 IF (TK.LT.TN) GO TO 1
      DW2=DW2*(T-TN)
    3 DW2=DW2*S2
      RETURN
    4 TK=TK+1.
      GO TO 1
    5 IF(ABS(T).LT.1.E-
     *21) GO TO 8
      TK=TK+1.
      S2=(1./(T-TK))*S1
      GO TO 2
      END
```

• Для $w_n(t)=\prod_{k=0}^{n}(t-k)$

$$w_n''(t)=\left(w_n(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\right)'=w_n'(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}+w_n(t)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\right)'=$$

$$=w_n(t)\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\right)^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(t-k)^2}\right)=2w_n(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}\sum_{l=k+1}^{n}\frac{1}{t-l}=$$

$$=2w_n(t)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{t-j}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{t-k}\quad\text{при } t\neq\nu,$$

$$w_n''(t)=2\prod_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{n}(t-k)\sum_{\substack{j=1\\j\neq\nu}}^{n}\frac{1}{t-j}\sum_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{j-1}\frac{1}{t-k}\quad\text{при } t=\nu,\ \nu=0,1,\ldots,n.$$

5.709.

```
      FUNCTION POLID1(X,H,Y,
     *N,KEY,ARG)
      DIMENSION Y(N)
      M=N-1
      IF(KEY) 5,1,5
    1 DO 3 I=1,M
      A=Y(I)
      DO 2 K=I,M
      B=Y(K+1)-Y(K)
      Y (K)=A
    2 A=B
    3 Y(N)=B
      F=1.
      DO 4 I=3,N
      FI=I-1
      F=F*FI
    4 Y(I)=Y(I)/F
    5 T=(ARG-X)/H
      POLID1=Y(2)
      DO 6 I=2,M
    6 POLID1=POLID1+DW1(T,
     *I-1)*Y(I+1)
      RETURN
      END
```

5.710. Подпрограмма-функция

FUNCTION POLID2(X,H,Y,N,KEY,ARG)

отличается от подпрограммы задачи 5.709 следующими тремя операторами (пятый, четвертый и третий от конца):

```
      POLID2=Y(3)
      DO 6 I=3,M
    6 POLID2=POLID2+DW2(T,I-1)*Y(I+1)
```

5.711. Задание для ЭВМ должно содержать три программных единицы:

а) программу-функцию FUNCTION DW1(T,N)

б) подпрограмму-функцию

FUNCTION POLID1(X,H,Y,N,KEY,ARG)

в) основную программу, которая для задачи 5.701 имеет вид:

```
  DIMENSION Y(8)
  DATA Y/1.0083,1.1134,1.2208,1.331,1.4449,1.5634,1.6876,1.8186/
  DX1=POLID1(1.,0.1,Y,8,0,1.14)
  DX2=POLID1(1.,0.1,Y,8,1,1.42)
  WRITE (3,1) DX1,DX2
1 FORMAT (' ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ',F7.4,
 *' ПРИ X=1.14 И ',F7.4,' ПРИ X=1.42')
  STOP
  END
```

5.712. Задание для ЭВМ должно содержать пять программных единиц:

подпрограммы-функции:

а) FUNCTION DW1(T,N)

б) FUNCTION DW2(T,N)

в) FUNCTION POLID1(X,H,Y,N,KEY,ARG)

г) FUNCTION POLID2(X,H,Y,N,KEY,ARG)

д) основную программу, которая для задачи 5.705 имеет вид:

```
  DIMENSION Y(6)
  DATA Y/1.,5.,21.,55.,113.,201./
  D1=POLID1(1.,1.,Y,6,0,2.)
  D2=POLID2(1.,1.,Y,6,1,2.)
  WRITE (3,1) D1,D2
1 FORMAT (' ПРИ X=2  1-Я ПРОИЗВОДНАЯ =',F4.1,
 *' 2-Я =',F4.1)
   STOP
   END
```

ГЛАВА 6

6.1. $\frac{x^8}{4}+C$. **6.2.** $3x\sqrt[3]{x}+C$. **6.3.** $3\ln|x|-\frac{5}{x}+C$. **6.4.** $\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-\ln|x|+C$. **6.5.** $x+6\sqrt{x}+3\ln x-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. **6.6.** $\sin x+C$. **6.7.** $\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}+C$. **6.8.** $-\frac{1}{3}e^{2-3x}+C$. **6.9.** $-\frac{3}{\ln 5}\cdot 5^{-x/3}+C$. **6.10.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}4x+C$. **6.11.** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x-1|+C$. **6.12.** $\frac{1}{8}\sin 8x+C$. **6.13.** $x-\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **6.14.** $\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **6.15.** $x^3+x^2+\ln|x|+C$. **6.16.** $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+C$. **6.17.** $\frac{2}{3}x\sqrt{mx}+C$. **6.18.** $\frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}+C$. **6.19.** $3\sqrt[3]{x}-\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-4\sqrt[4]{x}+C$. **6.20.** $2\sqrt{ax}+2x+\frac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C$. **6.21.** $\frac{x^3}{3}+2\ln|x|+C$. **6.22.** $\frac{2^xe^x}{\ln 2+1}+C$. **6.23.** $\frac{1}{\ln 2}2^x+$

$+x^3+C$. **6.24.** $x^2+3\sin x+C$. **6.25.** $-2\operatorname{ctg} x-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.
6.26. $3\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} x+C$. **6.27.** $-\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x+C$. **6.28.** $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$.
6.29. а) $-x+\operatorname{tg} x+C$; б) $x-\operatorname{th} x+C$. ● Использовать тождества: а) $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1$; б) $1-\operatorname{th}^2 x=\operatorname{sch}^2 x$. **6.30.** $\operatorname{tg} x+C$. **6.31.** $\frac{\pi}{2}x+C$.
6.32. $x+\cos x+C$. **6.33.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **6.34.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right|+C$.
6.35. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **6.36.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|-\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+C$.
6.37. $\ln|x|+2\operatorname{arctg} x+C$. **6.38.** $\frac{x^3}{3}+(a+b)\frac{x^2}{2}+abx+C$. **6.39.** $ax+\frac{9}{4}a^{2/3}x^{4/3}+\frac{9}{5}a^{1/3}x^{5/3}+\frac{x^2}{2}+C$. **6.40.** $x+3\ln|\operatorname{tg} x+\sec x|-2\operatorname{tg} x+C$. **6.41.** а) $-\operatorname{ctg} x-x+C$; б) $x-\operatorname{cth} x+C$. **6.42.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|+C$. **6.43.** $x-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C$. **6.44.** $\frac{2}{3}\times\sqrt{(3+x)^3}+C$. **6.45.** $-\frac{3}{16}(3-4\sin x)^{4/3}+C$. **6.46.** $\frac{\operatorname{ch}^2 x}{2}+C$.
6.47. $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x}+C$. **6.48.** $-\frac{1}{\ln x}+C$. **6.49.** $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$.
6.50. $-\frac{1}{b}\ln|a-b\operatorname{tg} x|+C$. **6.51.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|2-3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C$.
6.52. $\ln|\sin x|+C$. **6.53.** $\frac{3^{4x}}{4\ln 3}+C$. **6.54.** $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$.
6.55. $-\cos(\ln x)+C$. **6.56.** $-2\cos\sqrt{x}+C$. **6.57.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$.
6.58. $-\frac{1}{3}\operatorname{cth} 3x+C$. **6.59.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+C$. **6.60.** $-\frac{1}{2\ln 5}\cdot 5^{-x^2}+C$.
6.61. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|+C$. **6.62.** $-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}(e^{-ax})+C$. **6.63.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\times\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+C$. **6.64.** $\frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-1}\right|+C$. **6.65.** $-\ln(\cos x+\sqrt{\cos^2 x+4})+C$. **6.66.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)+C$. **6.67.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})+C$.
6.68. $\frac{1}{b^2}\ln|a^2+b^2x|+C$. **6.69.** $\frac{1}{2a\cos^2 ax}+C$. **6.70.** $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3}+C$.
6.71. $\frac{1}{7-e^x}+C$. **6.72.** $-\ln|\cos x|+C$. **6.73.** $\frac{1}{4}\ln|\operatorname{sh} 4x|+C$.
6.74. $-\frac{a^{1/x}}{\ln a}+C$. **6.75.** $\frac{1}{2}\operatorname{th}(x^2+1)+C$. **6.76.** $\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\times\ln\left|\frac{\sqrt{a-b}\,x-\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}\,x+\sqrt{a+b}}\right|+C$. **6.77.** $\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{7}}+C$.
6.78. $\frac{1}{8}\ln(4x^2+7)+C$. **6.79.** $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{x^6+1}\right|+C$. **6.80.** $\frac{1}{\ln a}\times$

$\times \ln(a^x+\sqrt{a^{2x}-1})+C$. **6.81.** $\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+C$. ● $\frac{x-1}{(x+2)^2}=$ $=\frac{(x+2)-3}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$. **6.82.** $x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **6.83.** $x-\ln|x^2-4|+\frac{7}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$. **6.84.** $\frac{1}{4ab}\ln\left|\frac{ax^2-b}{ax^2+b}\right|+C$. **6.85.** $\frac{1}{48}\ln\left|\frac{3+2x^4}{3-2x^4}\right|+C$. **6.86.** $\frac{1}{5}\ln|x^5+5x-8|+C$. **6.87.** $\frac{1}{25}\times$ $\times\sqrt[4]{(5x^4-3)^5}+C$. **6.88.** $3\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **6.89.** $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(2x)+C$. **6.90.** $\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+\frac{1}{b}\times$ $\times\ln(bx+\sqrt{a^2+b^2x^2})+C$. **6.91.** $-\frac{5}{\sqrt[5]{a^x}\ln a}+C$. **6.92.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(4+e^x)^4}+C$. **6.93.** $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}+4})+C$. **6.94.** $x-\frac{1}{\ln 2}\ln(2^x+1)+C$. ● $\frac{1}{2^x+1}=$ $=\frac{(1+2^x)-2^x}{2^x+1}=1-\frac{2^x}{2^x+1}$. **6.95.** $e^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$. **6.96.** $e^{\sqrt{x^2-1}}+C$. **6.97.** $-\frac{2}{3}\sqrt{(3-\operatorname{ch}x)^3}+C$. **6.98.** $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\ln x}+C$. **6.99.** $\frac{1}{2}\arcsin(2\ln x)+C$. **6.100.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$. ● $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. **6.101.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$. ● $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. **6.102.** $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|+C$. **6.103.** $x+\frac{1}{a}\sin^2 ax+C$. **6.104.** $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. **6.105.** $\frac{7}{2}x+$ $+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}+C$. **6.106.** $2\sqrt{3-\cos^2 x}+C$. **6.107.** $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{\cos^4 x+3})+C$. **6.108.** $\ln|\operatorname{tg}x|+C$. ● $\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$. **6.109.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\cos\sqrt{3}x|+C$. **6.110.** $\frac{1}{a}\times$ $\times\ln\operatorname{ch}ax+C$. **6.111.** $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)-x+C$. **6.112.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}(x^3-3)-$ $-\frac{x^3}{3}+C$. **6.113.** $e^{\sec x}+C$. **6.114.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|+C$. **6.115.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+C$. **6.116.** $2\ln(\sqrt{x}+1)+C$. **6.117.** e^x- $-\ln(e^x+1)+C$. **6.118.** $\frac{1}{25}\left(\frac{(5x-1)^{21}}{21}+\frac{(5x-1)^{20}}{20}\right)+C$. **6.119.** $-2\sqrt{1-e^x}+\frac{4}{3}\sqrt{(1-e^x)^3}-\frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5}+C$. **6.120.** $2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}-\frac{x+1}{2}+2\sqrt{x+1}-2\ln(\sqrt{x+1}+1)\right)+C$. **6.121.** $\frac{1}{2(3-x)^6}-\frac{1}{5(3-x)^5}+C$, **6.122.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}}+C$.

6.123. $\ln\left|\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$. 6.124. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

6.125. $x\sin x+\cos x+C$. 6.126. $\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$. 6.127. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x-$ $-\dfrac{9}{4}\sqrt[3]{x^2}+C$. 6.128. $\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{x^2}{4}-x+C$.
6.129. $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$. 6.130. $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$.
6.131. $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$. 6.132. $-\dfrac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)+C$. ● Положить $u=x^2$, $dv=xe^{-x^2}dx$. 6.133. $-\dfrac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$.

6.134. $\dfrac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{2}+C$. 6.135. $\dfrac{x}{2\cos^2 x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x+C$.
6.136. $\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C$. 6.137. $\dfrac{\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arccos x}}{2}+C$.
6.138. $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$. 6.139. $\dfrac{x^4}{4}\ln x-\dfrac{x^4}{16}+C$.
6.140. $\dfrac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$. 6.141. $(x^2-2x+1)\sin x+2(x-1)\cos x+C$.

6.142. $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$. 6.143. $\dfrac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C$.

6.144. $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$. ● Сделать подстановку $x=t^2$ и проинтегрировать по частям. 6.145. $\dfrac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-x\operatorname{arctg} x+$ $+\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 6.146. $-\dfrac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C$.
6.147. $-x\operatorname{ctg} x+\ln|\sin x|-\dfrac{x^2}{2}+C$. 6.148. $e^{-x}\dfrac{2\sin 2x-\cos 2x-5}{10}+C$.
6.149. $-\dfrac{x}{2(x^2+1)}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C$. ● Положить $u=x$, $dv=\dfrac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.
6.150. ◀ $I_n=\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-$ $-\displaystyle\frac{1}{a^2}\int x\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}\right)=$ $=\dfrac{1}{2(n-1)a^2}\left(\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right)$. Отсюда $I_2=\dfrac{1}{2a^2}\times$ $\times\left(\dfrac{x}{x^2+a^2}+\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right)+C$, $I_3=\dfrac{1}{4a^2}\left(\dfrac{x}{(x^2+a^2)^2}+\dfrac{3x}{2a^2(x^2+a^2)}+\right.$ $\left.+\dfrac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right)+C$. ▶ 6.151. ◀ Полагаем $u=\sqrt{x^2+a}$, $dv=dx$.
Тогда $du=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}$, $v=x$, $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a}}=$
$=x\sqrt{x^2+a}-\displaystyle\int\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+$
$+a\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. Отсюда $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\times$

$\times \ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$ ▶ **6.152.** ◀ Полагаем $u=x$, $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Тогда $du=dx$, $v=-\sqrt{a^2-x^2}$. Имеем $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-x\sqrt{a^2-x^2}+$ $+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-x\sqrt{a^2-x^2}+$ $+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$ Отсюда $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{x}{2}\times$ $\times\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$ ▶ **6.153.** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\arcsin x+$ $+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C.$ **6.154.** $(\ln(\ln x)-1)\ln x+C.$ **6.155.** $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-$ $-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C.$ **6.156.** $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$ **6.157.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$ ● См. решение задачи 6.151.

6.158. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C.$ **6.159.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{6}}+C.$ **6.160.** $\frac{1}{2}\ln|x^2-5x+4|+\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C.$ **6.161.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-3x+3)+$ $+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$ **6.162.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-6}{x}\right|+C.$ **6.163.** $2\ln(x^2-2x+6)+$ $+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C.$ **6.164.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{2}+C.$ **6.165.** $\frac{1}{2\ln 3}\times$ $\ln\left|\frac{3^x-3}{3^x-1}\right|+C.$ **6.166.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C.$ **6.167.** $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|$ $+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C.$ **6.168.** $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C.$ **6.169.** $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C.$ **6.170.** $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+$ $+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C.$ **6.171.** $-\frac{1}{2(x^2-5x+4)^2}+C.$ **6.172.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C.$ **6.173.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$ **6.174.** $-\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{3x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x\right)+C.$ ● $\int\frac{x-1}{(x^2+1)^3}dx=$ $=\int\frac{x}{(x^2+1)^3}dx-\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=-\frac{1}{4(x^2+1)^2}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$ Далее $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$ вычислить по рекуррентной формуле, выведенной в задаче 6.150. **6.175.** $\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{18}\ln(x^2+x+1)+\frac{x+1}{3(x^2+x+1)}+$ $+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$ ● $\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2}+$ $+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$. Применяя метод неопределенных коэффициентов, получаем

$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{9(x-1)}-\frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{9}\frac{x+2}{x^2+x+1}$. Для нахождения $\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}$ рекомендуется подстановка $x+\frac{1}{2}=t$ и затем использование рекуррентной формулы, выведенной в задаче 6.150. **6.176.** $\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$. **6.177.** $\frac{1}{2}\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C$. **6.178.** $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\times\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. **6.179.** $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}+\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **6.180.** $x+\frac{1}{2}\times\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+C$. **6.181.** $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+C$. **6.182.** $-\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. ● $\frac{1}{x^2(x^2+a^2)}=\frac{1}{a^2}\frac{(a^2+x^2)-x^2}{x^2(x^2+a^2)}$. **6.183.** $\frac{1}{4a^3}\times\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. ● $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}=\frac{1}{2a^2}\times\frac{(x^2+a^2)-(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}$. **6.184.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **6.185.** $\ln|x|-\frac{1}{6}\ln(x^6+1)+\frac{1}{6(x^6+1)}+C$. ● $\frac{1}{x(x^6+1)^2}=\frac{(1+x^6)-x^6}{x(x^6+1)^2}$. **6.186.** $-\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{2x^2}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **6.187.** $\frac{1}{12}\ln((x^4+1)\times(x^4-2)^2)+C$. ● Положить $x^4=t$. **6.188.** $-\frac{1}{6(x+1)^6}+\frac{3}{7(x+1)^7}-\frac{1}{4(x+1)^8}+C$. **6.189.** $\frac{1}{6}\ln|x^3-1|-\frac{1}{12}\ln(x^6+x^3+2)+\frac{1}{6\sqrt{7}}\times\operatorname{arctg}\frac{2x^3+1}{\sqrt{7}}+C$. **6.190.** $-\cos x+\frac{\cos^3x}{3}+C$. **6.191.** $\frac{1}{7\cos^7x}-\frac{1}{5\cos^5x}+C$. **6.192.** $\sin x-\sin^3x+\frac{3}{5}\sin^5x-\frac{1}{7}\sin^7x+C$. **6.193.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{16}+C$. **6.194.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$. **6.195.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **6.196.** $-\operatorname{ctg}x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5x+C$. **6.197.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C$. **6.198.** $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4x+C$. **6.199.** $-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3x}-\frac{2}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x+C$. **6.200.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)+C$. **6.201.** $\frac{\sin x}{4\cos^4x}+\frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2x}+\frac{3}{8}\ln|\operatorname{tg}x+\sec x|+C$. **6.202.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln|\cos x|+C$. **6.203.** $x+2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2}-2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|+C$. **6.204.** $-2\sqrt{\operatorname{ctg}x}+C$.

6.205. $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+C$. 6.206. $-2\sqrt{\cos x}+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x}+C$.
6.207. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{96}\sin^3 4x+\frac{3}{128}\sin 8x+C$. 6.208. $\operatorname{tg} x+$ $+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$. 6.209. $3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right|-\frac{3}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}+C$. 6.210. $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-$ $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C$. 6.211. $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{1}{20}\sin 5x+C$. 6.212. $-\frac{\cos 8x}{16}+$ $+\frac{\cos 2x}{4}+C$. 6.213. $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}+C$. 6.214. $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+$ $+C$. 6.215. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$. 6.216. $\frac{\sin\frac{x}{2}}{2}+\frac{\sin 5x}{20}+\frac{\sin 7x}{28}+C$.
6.217. $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$. 6.218. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+$ $+C$. 6.219. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C$. 6.220. $\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x+x+C$. ● Числитель и знаменатель подынтегральной функции умножить на $(1-\sin x)$.
6.221. $\frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x-\sqrt{7}}{2\operatorname{tg} x+\sqrt{7}}\right|+C$. 6.222. $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x-1}{2}\right)+C$.
6.223. $-\frac{1}{4}\ln(1+4\cos^2 x)+C$. 6.224. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right)+C$.
6.225. $\frac{2}{5\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}-\frac{2}{5\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{15}}+C$. ● $\frac{1}{(\sin x+4)(\sin x-1)}=$ $=\frac{(\sin x+4)-(\sin x-1)}{5(\sin x+4)(\sin x-1)}$. 6.226. $\ln|\sin x-\cos x|+C$.
6.227. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x+2}{\operatorname{tg} x+6}\right|+C$. 6.228. $\frac{\operatorname{sh} 6x}{12}+\frac{x}{2}+C$. 6.229. $\frac{\operatorname{ch}^3 2x}{6}-$ $-\frac{\operatorname{ch} 2x}{2}+C$. 6.230. $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}-\frac{x}{8}+C$. 6.231. $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh} 2x}{4}+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32}+C$.
6.232. $-2\operatorname{cth} 2x+C$. 6.233. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{th} x-2}{\operatorname{th} x+2}\right|+C$. ● Разделить числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $\operatorname{ch}^2 x$. 6.234. $-\frac{1}{\operatorname{sh} x}-$ $-\operatorname{cth} x+C$. ● Числитель и знаменатель подынтегральной дроби умножить на $\operatorname{ch} x+1$. 6.235. $2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{x}{2}+C$. 6.236. $\ln|\operatorname{sh} x|-\frac{\operatorname{cth}^2 x}{2}+C$.
6.237. $x-\operatorname{th} x-\frac{\operatorname{th}^3 x}{3}+C$. 6.238. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x}}{2}+C$. 6.239. $\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+$ $+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C$. 6.240. $2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$.
6.241. $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+a}-6\ln\sqrt[6]{x+a}+3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+a}\right|+C$.

6.242. $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$. 6.243. $\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}+C$. 6.244. $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$.
6.245. $\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+C$.
6.246. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x+\sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}\right|+C$. 6.247. $\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+C$.
6.248. $\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}+C$. 6.249. $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}-a^2\sqrt{a^2-x^2}+C$.
6.250. $\arcsin\frac{x-4}{4}+C$. 6.251. $\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|+C$.
6.252. $\frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+C$. 6.253. $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C$. 6.254. $\sqrt{x^2-6x+1}+C$. 6.255. $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$. 6.256. $\ln\left|\frac{x}{1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}}\right|+C$.
6.257. $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}+C$. 6.258. $-\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{2-x+\sqrt{2x^2-x+1}}{|x|}+C$. 6.259. $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)}-\frac{2}{27}\ln\frac{5-2x+3\sqrt{x^2+5}}{|x+2|}+C$. 6.260. $\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.
6.261. $6\arcsin\frac{x+1}{2}-\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{4}(x^3+3x^2-7x-9)+C$.
6.262. $\frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}+C$. 6.263. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$.
6.264. $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+10}+\frac{9}{2}\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+10}\right)+C$.
6.265. $\frac{x-2}{2}\sqrt{4x-x^2}+2\arcsin\frac{x-2}{2}+C$. 6.266. $-\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)+C$. 6.267. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.
6.268. $\frac{x}{9\sqrt{x^2+9}}+C$. 6.269. $\frac{1}{8}(2x^3-5x)\sqrt{x^2-1}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$.

6.270. $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$. 6.271. $\frac{x^2}{2}+x+\ln|x^2-x-1|+\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$. 6.272. $-\frac{1}{5(x-2)}+$

$+\frac{1}{25}\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right|+C$. **6.273.** $-\frac{2}{9}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+$ $+\frac{1}{3}\frac{x}{1-x^3}+C$. **6.274.** $\frac{1}{4}\left(2\ln\frac{x^4+1}{x^4}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4+1}\right)+C$.

6.275. $\sqrt{x^2+x+2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right)+C$.

6.276. $-\sqrt{6+4\ln x-\ln^2 x}+2\arcsin\frac{\ln x-2}{\sqrt{10}}+C$.

6.277. $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x+2+\sqrt{x^2+8x+4}}{x}\right|+C$. **6.278.** $\frac{\sqrt{(x^2-4)^3}}{3}+C$.

6.279. $\frac{\sqrt{(x^2+4x-5)^3}}{3}-(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}+9\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x-5})+$ $+C$. **6.280.** $\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{1}{2}\ln(x+2+\sqrt{x^2+4x+5})+C$.

6.281. $\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{5x}{3\sqrt{16-x^2}}+C$. **6.282.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+16})+C$.

6.283. $\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}+C$. **6.284.** $2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-\frac{8}{\sqrt{3}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{3}}+C$. **6.285.** $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$. **6.286.** $-x+\operatorname{tg}x+$ $+\sec x+C$. **6.287.** $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+C$. **6.288.** $\frac{1}{3(1-\sin x)^3}+C$.

6.289. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+C$. **6.290.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}\right|+C$.

6.291. $2\operatorname{tg}x-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x}+C$. **6.292.** $\arcsin\left(\frac{\sec x}{\sqrt{5}}\right)+C$.

6.293. $-\frac{\sin^2 x}{2}+5\sin x-24\ln(\sin x+5)+C$. **6.294.** $\ln|\operatorname{tg}x|+\operatorname{tg}^2 x+$ $+\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+C$. **6.295.** $\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$. **6.296.** $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-$ $-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **6.297.** $-\frac{x\cos 3x}{6}+\frac{\sin 3x}{18}+\frac{x\cos x}{2}-$ $-\frac{\sin x}{2}+C$. **6.298.** $\ln|\operatorname{th}x|+C$. **6.299.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)+C$. **6.300.** $\ln(\operatorname{ch}x)-$ $-\frac{\operatorname{th}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{th}^4 x}{4}+C$. **6.301.** $2\operatorname{sh}\sqrt{1+x}+C$. **6.302.** $x\operatorname{th}x-\ln(\operatorname{ch}x)+$ $+C$. **6.303.** $\frac{x}{2}-\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin 2(\ln x)}{10}+C$. **6.304.** $\frac{e^{2x}}{4}\times$ $\times(2x-1)+C$. **6.305.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. **6.306.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+5}\right|+C$.

6.307. $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x+C$. **6.308.** $\frac{1}{2}e^{\arcsin x}(x+$

$+\sqrt{1-x^2})+C$. **6.309.** $2\sqrt{e^x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C$. **6.310.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+\ln|x|+C$. **6.311.** $x-e^{-x}\arcsin(e^x)-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C$, $x\leqslant 0$. **6.312.** $-\frac{x^2}{6}-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C$. **6.313.** $-\frac{x}{4}-\frac{x^3}{12}+\frac{1}{4}(1+x^2)\operatorname{arctg}x+C$. **6.314.** $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\ln\frac{|1+x|}{\sqrt{1+x+x^2}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+C$. **6.315.** $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+2\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C$.

6.316. $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}+\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{\sqrt{2}}{3}\times\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}+C$, $|x|>1$. **6.317.** $-\sqrt{1-x^2}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C$, $0<x<1$. **6.318.** x^x+C, $x>0$. **6.319.** $x-\ln(1+e^x)-2e^{-x/2}\operatorname{arctg}e^{x/2}-(\operatorname{arctg}e^{x/2})^2+C$.

6.320. $\frac{35}{2}$. ● Отрезок $[0,\ 5]$ разделить на n равных частей. **6.321.** 1. ● Отрезок $[0,\ \pi/2]$ разделить на n равных частей. Применить формулу: $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

6.322. $e^{10}-1$. ● Отрезок $[0,\ 10]$ разделить на n равных частей. **6.323.** 2/3. ● Отрезок $[1,\ 3]$ разделить на n частей так, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию. **6.324.** 15/4. **6.325.** 9/2. **6.326.** 5. **6.327.** 19/15. **6.328.** $3\frac{57}{64}$. **6.329.** 45/4. **6.330.** 1. **6.331.** 1. **6.332.** e^2-e. **6.333.** $7/\ln 2$. **6.334.** $\ln 2{,}5$. **6.335.** $(\ln 3)/2$. **6.336.** $\pi/12$. **6.337.** $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. **6.338.** $\frac{\pi}{6}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$. **6.339.** $\frac{1}{3}(2-3\operatorname{ch}2+\operatorname{ch}^3 2)$. **6.340.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. **6.341.** $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. **6.342.** $\frac{11}{2}+7\ln 2$. **6.343.** $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. **6.344.** $\frac{1}{2}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$. **6.345.** $\sin 1$. **6.346.** $\frac{\pi}{4}$. **6.347.** $\frac{2}{3}$. **6.348.** $\frac{1}{12}\operatorname{sh}2+\frac{1}{6}$. **6.349.** $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}$. **6.350.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **6.351.** $2-\ln 5$. **6.352.** $\frac{\pi}{4}$. **6.353.** $\frac{\pi}{4}$. ◄ Сумму $S_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$

можно рассматривать как интегральную для функции $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на отрезке [0, 1]. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$. ►

6.354. 1. **6.355.** $\frac{2}{3}(2^{3/2}-1)$. **6.356.** $\frac{19}{6}$. **6.357.** $\frac{45}{4}$. **6.358.** 7. **6.359.** $\frac{16}{3}$. **6.360.** $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.361.** $\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}$. **6.362.** $2\ln\frac{3}{2}$. **6.363.** $4-3\ln 3$. **6.364.** а) Минус. ● Разбить отрезок интегрирования на отрезки $[-2, -1]$ и $[-1, 1]$ и воспользоваться свойствами 1) и 9). б) Плюс; в) минус. **6.365.** а) Второй; б) первый; в) второй. **6.366.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{2}{\pi}$; г) $\frac{4}{3\pi}$. **6.367.** $\frac{2}{\pi}I_0\cos\varphi$. **6.368.** $2\sqrt{7}<I<6$. **6.369.** $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}<I<\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **6.370.** а) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)<I<\frac{2\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2}-1)$; б) $|I|<\frac{\sqrt{30}}{4}$. **6.371.** а) $\frac{4}{3}<I<\frac{2}{3}\sqrt{5}$; б) $I<\sqrt{2{,}125}$. **6.372.** а) $\frac{dI}{d\beta}=\frac{e^\beta}{\beta}$; б) $\frac{dI}{d\alpha}=-\frac{e^\alpha}{\alpha}$. **6.373.** $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0, 1, 2, \ldots$ **6.374.** $\frac{\sin x}{x}$. **6.375.** $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$. **6.376.** $-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$. **6.377.** $\frac{x^2-x}{\ln x}$. **6.379.** Нет. **6.380.** $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$. **6.381.** $\ln\frac{3}{2}$. **6.382.** $\frac{1}{4}(2+\operatorname{sh} 2)$. **6.383.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **6.384.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **6.385.** π. **6.386.** $\frac{\pi}{6}$. **6.387.** $\frac{\pi}{6}$. **6.388.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$. **6.389.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **6.390.** $\frac{1}{32}(\pi+2)$. **6.391.** $2\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)$. **6.392.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. **6.393.** $\frac{1}{6}$. **6.394.** $4-\pi$. **6.395.** $\frac{81}{16}\pi$. **6.399.** 1. **6.400.** $\pi\sqrt{2}-4$. **6.401.** $\frac{1}{18}(5\pi\times\times\sqrt{3}-9\ln 3)$. **6.402.** $e-2$. **6.403.** $\frac{4}{25}(e^{3\pi/4}+1)$. **6.404.** $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. **6.405.** $\frac{e^2+1}{4}$. **6.406.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **6.407.** $\frac{\pi^2-8}{32}$. **6.408.** $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}-1)$. **6.409.** $I_{2k}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2k}\cdot\frac{\pi}{2}$ $(n=2k)$; $I_{2k+1}=\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2k}{3\cdot5\cdot7\ldots(2k+1)}$ $(n=2k+1)$; $I_7=\frac{16}{35}$; $I_8=\frac{35}{256}\pi$. **6.410.** $I_4=24-\frac{65}{e}$.

6.411. $\frac{1}{2}$. 6.412. Расходится. 6.413. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 6.414. $\frac{2}{5}$. 6.415. Расходится. 6.416. $1+\ln 2$. 6.417. $\frac{1}{3}$. 6.418. $\frac{1}{2}$. 6.419. Расходится. 6.420. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 6.421. Расходится. 6.422. Расходится. 6.423. Расходится. 6.424. 1. 6.425. Сходится. 6.426. Сходится. 6.427. Расходится. 6.428. Расходится. 6.429. Сходится. 6.430. Сходится. 6.431. Расходится. 6.432. Расходится. 6.433. Расходится. 6.434. $\frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{3}+1\right)$. 6.435. Расходится. 6.436. π. 6.437. $\pi/3$. 6.438. 16/3. 6.439. $2\sqrt{2}$. 6.440. Расходится. 6.441. π. 6.442. Сходится. 6.443. Сходится. 6.444. Расходится. 6.445. Сходится. 6.446. Расходится. 6.447. Сходится. 6.448. Расходится. 6.449. Сходится. 6.450. Расходится. 6.451. Расходится.

6.453. e^2. 6.454. πab. 6.455. 16/3. 6.456. 9/2. 6.457. $\frac{3}{2}(3\pi-2)$. 6.458. $\frac{56}{15}p^2$. 6.459. a^2. 6.460. $\frac{a^2}{4}(\pi-2\ln 2)$. 6.461. $\frac{c^3}{6p}$. 6.462. $2\ln 2-\frac{1}{2}$. 6.463. 32/3. 6.464. 1. 6.465. a^2. 6.466. $1{,}5-2\ln 2$. 6.467. $\frac{e}{2}-1$. 6.468. $4\ln 2-1$. 6.469. $\frac{\pi a^2}{2}-\frac{2}{3}a^2$ и $\frac{\pi a^2}{2}+\frac{2}{3}a^2$. 6.470. $a^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln(2+\sqrt{3})\right)$. 6.471. $r(a+h)-\frac{a^2r}{\sqrt{2ah+h^2}}\times$ $\times\ln\frac{a+h+\sqrt{2ah+h^2}}{a}$. 6.472. $5\pi a^2$. 6.473. $\frac{a^2}{2}(3\sqrt{2}-2-\ln(1+\sqrt{2}))$. 6.474. $\frac{\pi a^2}{2}+a^2-\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ и $\frac{\pi a^2}{2}-a^2+\frac{a^2}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$. 6.475. $\frac{a^2r}{\sqrt{2ah-h^2}}\arccos\left(1-\frac{h}{a}\right)-(a-h)r$. 6.476. $\frac{a^2}{4}(\pi+2\ln 2)$. 6.477. πa^2. 6.478. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 6.479. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$. 6.480. 12π. 6.481. $\frac{24}{5}ab\sqrt{3}$. 6.482. $\frac{8}{15}$. 6.483. $\frac{3}{2}\pi a^2$. 6.484. $\frac{\pi a^2}{8}$. 6.485. $\frac{\pi a^2}{4}$. 6.486. $\frac{a^2}{4}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$. 6.487. $\frac{\pi a^2}{4}$. 6.488. $\frac{1}{4}(e^{4\pi}-1)^2$. 6.489. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$. 6.490. $\frac{\pi a^2}{4}$. 6.491. a^2. 6.492. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. 6.493. $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$. 6.494. $2\sqrt{3}$. 6.495. $2p(3\sqrt{3}-1)$. 6.496. $4a\ln(a+\sqrt{a^2-1})-2\sqrt{a^2-1}$. 6.497. $\pi a\sqrt{2}$. 6.498. $\pi a-2(a-b)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. ● Перейти к полярным координатам. 6.499. $\frac{1}{2}\operatorname{sh}6$. 6.500. $\frac{4}{\pi}\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$. 6.501. $\frac{134}{27}p$. 6.502. $6a$. 6.503. $\sqrt{2}(e-1)$. 6.504. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. 6.505. $\frac{13}{3}$. 6.506. $4a\sqrt{3}$. 6.507. $x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=\frac{3}{2}a$. 6.508. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$.

6.509. $8(2-\sqrt{3})$. 6.510. $\frac{3}{2}\pi a$. ● $0<\varphi<3\pi$. 6.511. $5\pi\sqrt{1+4\pi^2}+$ $+\frac{5}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 6.512. $\frac{16}{3}a$. 6.513. $2a\sqrt{6}$. 6.514. $a\sqrt{3}$. 6.515. 8. 6.516. $\frac{1}{3}a\sqrt{7}(3+2t)$. 6.517. $8\sqrt{2}$. 6.518. $\frac{\pi}{8}(\operatorname{sh}12+12)$. 6.519. а) $8\pi+$ $+\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$; б) $2\pi+\frac{8\pi^2}{3\sqrt{3}}$. 6.520. $\frac{2\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$. 6.521. 48π. 6.522. $\frac{16}{15}\pi a^2(\sqrt{2}+1)$. 6.523. а) $3\pi a^2$; б) $\frac{56}{5}\pi a^2\sqrt{3}$. 6.524. $\pi\left(\sqrt{5}+4\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. 6.525. а) $9\pi^2a^2$; б) $24\pi a^2$. 6.526. $3\pi a^2$. 6.527. $\frac{8}{3}\pi a^2(3\pi-4)$. 6.528. $6\pi^2a^2$. 6.529. $4\pi^2a^2$. 6.530. $\frac{96}{5}\pi a^2$. 6.532. $\frac{8}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$ 6.533. $\frac{128}{105}a^3$. 6.534. $\frac{2}{3}a^3\operatorname{tg}\alpha$. 6.535. $\frac{272}{15}\pi$. 6.536. $\frac{11}{4}\pi$. 6.537. $\frac{\pi^3}{2}$. 6.538. $\frac{64}{3}\pi$. 6.539. $\frac{\pi a^2h}{2}$. 6.540. а) $\frac{\pi a^3}{2}$; б) $\frac{\pi a^3}{4}$. 6.541. $\frac{8}{15}\pi a^3$. 6.542. $\frac{3}{4}\pi^2a^3$. 6.543. $\frac{64}{105}\pi a^3$. 6.544. $\frac{\pi a^3}{12}(3\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-2)$. 6.545. π^2. ● $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

6.546. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. 6.547. $M_x=\frac{1}{2}(e\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+$ $+\ln(\sqrt{2}-1)(e+\sqrt{1+e^2}))$, $I_x=\frac{1}{3}((1+e^2)^{3/2}-\sqrt{8})$. 6.548. $M_x=\frac{32}{3}a^2$, $I_x=\frac{256}{15}a^3$. 6.549. $M_x=2a^2$, $I_x=\frac{\pi a^3}{2}$. 6.550. $M_x=2a^2$, $M_y=\pi a^2$. 6.551. $\bar{x}=\frac{a(\operatorname{sh}1-\operatorname{ch}1+1)}{\operatorname{sh}1}=a\left(1-\operatorname{th}\frac{1}{2}\right)$, $\bar{y}=\frac{a(2+\operatorname{sh}2)}{4\operatorname{sh}1}=$ $=\frac{a}{2}(\operatorname{csch}1+\operatorname{ch}1)$. 6.552. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{2}{5}a$. 6.553. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{4}{5}a$. 6.554. $\bar{x}=\bar{y}=$ $=\frac{2}{5}a$. 6.555. $\frac{v_0^2}{2g}$. 6.556. $x=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$; $v_{\text{ср}}=\frac{2}{\pi}v_0$. 6.557. $t=6$ с, $s=144$ м. 6.558. 250 м. 6.559. 0,125 Дж. ● По закону Гука сила пропорциональна растяжению пружины. 6.560. $\frac{1}{12}g\gamma\pi R^2H^2$. 6.561. $\frac{1}{3}g\gamma\pi R^2H^2$. 6.562. $\frac{1}{12}g\gamma a^2H^2$. 6.563. $\frac{1}{4}g\gamma\pi H^2R^2$. 6.564. $\frac{16}{15}\sqrt{2}g\gamma ap^3$. 6.565. $e_0e\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$; $\frac{e_0e}{a}$. ● По закону Кулона сила взаимодействия зарядов в пустоте равна $F=\frac{e_0e}{x^2}$, где x — расстояние между зарядами. 6.566. $2066\ln 2$. ● При изотермическом процессе $pv=p_0v_0$. Работа равна $A=\int\limits_{v_1}^{v_2}p\,dv$, где v_1 и v_2 — начальное и конечное значения объема. **6.567.** $\frac{p_0v_0}{k-1}\left(\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{k-1}-1\right)$. ● При адиабатическом процессе $pv^k=p_0v_0^k$, где $k\approx 1{,}4$ (закон Пуассона). Работа равна $A=\int\limits_{v_0}^{v_1}\frac{p_0v_0^k}{v^k}\,dv$. **6.568.** $\frac{4}{15}\pi\gamma\omega^2R^5$. **6.569.** $\frac{1}{60}\omega^2\gamma\,dha^3$.

6.570. $\frac{1}{24}\gamma alh^3\omega^2$. **6.571.** $\frac{1}{4}\pi\omega^2\gamma R^4H$. **6.572.** $\frac{g\gamma ah^2}{3}$.

6.573. $g\gamma\pi R^2H$. **6.574.** $\frac{2}{3}g\gamma ab^2$. **6.575.** $g\gamma\pi RH^2$. **6.576.** 20,625 кг.

6.577. $\frac{0{,}24I_0^2R\pi}{\omega}$. ● По закону Джоуля — Ленца количество теплоты, выделяемой постоянным током за время t, равно $Q=0{,}24I^2Rt$. **6.578.** $\frac{S}{\mu S_0}\sqrt{\frac{2H}{g}}\approx 5{,}6$ мин. ● По закону Торичелли скорость истечения воды из отверстия на расстоянии x от свободной поверхности равна $v=\mu\sqrt{2gx}$, где $\mu\approx 0{,}6$.

6.579. $\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$. ◀ $Q=\int\limits_0^a v\cdot 2\pi r\,dr=\frac{2\pi p}{4\mu l}\int\limits_0^a(a^2-r^2)\,r\,dr=$ $=\frac{\pi p}{2\mu l}\left(-\frac{(a^2-r^2)^2}{4}\right)\Big|_0^a=\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$. ▶ **6.580.** $\frac{2GmM}{\pi R^2}$, где G — гравитационная постоянная. ● Применить закон всемирного тяготения.

6.581. $\frac{R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}\approx 11$ мин. **6.582.** $\frac{2}{3}\mu ah\sqrt{2gh}$.

6.583. 0,5236. **6.584.** 0,1963. **6.585.** 0,1178. **6.586.** 0,3926. **6.587.** 1,7500. **6.588.** 3,2413. **6.589.** 4,2218. **6.590.** 0,4969. **6.591.** 0,6082. **6.592.** 2,6291. **6.593.** 0,3927. **6.594.** 0,2500. **6.595.** 1,4627. **6.596.** 1,3419. **6.597.** 0,8120. **6.598.** 1,1184. **6.599.** 0,1728. **6.600.** 4,3555. **6.601.** 0,6205. **6.602.** 0,6076. **6.603.** 1,5708. **6.604.** 0,9160. **6.605.** 0,6651. **6.606.** 0,7721.

6.607.

```
      FUNCTION R(A,B,F,N)
      H=(B-A)/N
      R=0.
      X=A-H/2.
      DO 1 I=1,N
      X=X+H
    1 R=R+F(X)
      R=R*H
      RETURN
      END
```

6.608.

```
      FUNCTION TR(A,B,F,N)
      H=(B-A)/N
      TR=(F(A)-F(B))/2.
      X=A
      DO 1 I=1,N
      X=X+H
    1 TR=TR+F(X)
      TR=TR*H
      RETURN
      END
```

6.609.

```
      FUNCTION T(A,B,F,EPS)
      T1=(F(A)+F(B))/2.
      T=T1
      H=B-A
      N=1
    1 X=A-H/2.
      DO 2 I=1,N
      X=X+H
    2 T=T+F(X)
      T2=T
      N=N*2
      H=H/2.
      T=T*H
      EPS1=ABS(T-T1)/3.
      IF(EPS.GT.EPS1) GO TO 3
      RETURN
    3 T1=T
      T=T2
      GO TO 1
      END
```

6.610.

```
      FUNCTION P(A,B,F,N)
      H=(B-A)/(2*N)
      P1=0.
      P2=0.
      X=A
      DO 1 I=1,N
      X=X+H
      P1=P1+F(X)
      X=X+H
    1 P2=P2+F(X)
      P=(F(A)-F(B)+2.*P2+4.*P1)*H/3.
      RETURN
      END
```

6.611. Для задачи 6.583 ответ записывается следующим образом:

```
      FUNCTION F(X)
      F=1./SQRT(5.+4.*X-X*X)
      RETURN
      END
```

Для остальных задач оператор, определяющий значение F, имеет следующий вид:

`F=(X**3)/(X**8+1.)`	(к 6.584)
`F=X/(X*X+3.*X+2.)`	(к 6.585)
`F=1/(4.+X**2)`	(к 6.586)
`F=(1+SQRT(X))/X**2`	(к 6.587)
`F=SQRT(1.+X**3)`	(к 6.588)
`F=SQRT(1.+X**5)`	(к 6.589)
`F=1./SQRT(1.+X**4)`	(к 6.590)
`F=1./SQRT(1.-X**4)`	(к 6.591)
`F=1./(1.+X**2)**0.333333`	(к 6.592)
`F=SQRT(X*(1.-X))`	(к 6.593)
`F=X*ALOG(1.+X)`	(к 6.594)
`F=EXP(X**2)`	(к 6.595)
`F=EXP(X**3)`	(к 6.596)
`F=EXP(SQRT(X))`	(к 6.597)
`F=1./ALOG(X)`	(к 6.598)
`Y=1.+X**2` `F=ALOG(Y)/Y`	(к 6.599)
`F=ALOG(5.+4.*COS(X))`	(к 6.600)
`F=(SIN(X)-X)/SQRT(X)+SQRT(X)`	(к 6.601)
`F=(X**0.333333)*COS(X)`	(к 6.602)
`F=SQRT(SIN(X))*SIN(X/2.)`	(к 6.603)
`F=(ATAN(X)-X)/X+1.`	(к 6.604)
`F=EXP(X)/X`	(к 6.605)
`F=(SIN(X)-X)/X+1.`	(к 6.606)

6.612. б) Ответ приводится для задачи 6.597.

```
      EXTERNAL F
      N=16
      Y=R(0.0,0.5,F,N)
    1 Y1=Y
      N=N*2
      Y=R(0.0,0.5,F,N)
      EPS=ABS((Y1-Y)/3.)
```

```
 IF(EPS—0.0001)2,2,1
2 WRITE (3,3) Y
3 FORMAT (' ИНТЕГРАЛ =',F8.4)
 STOP
 END
```

● Задание для ЭВМ должно содержать три программы — указанную здесь и две другие, полученные при решении задач 6.607 и 6.611.

Программа решения любой другой задачи отличается от приведенной операторами, содержащими обращение к подпрограмме-функции R, например для задачи 6.598 Y = R (0.0,3.1416,F,N).

в) Отличие от приведенной выше программы в указанных операторах:

```
Y=P(0.0,0.5,F,N)
EPS=ABS((Y1—Y)/15.)
```

6.613. Ответ для задачи 6.600.

```
 EXTERNAL F
 Y=T(2.,3.,F,0.0001)
 WRITE (3,1) Y
1 FORMAT ('.',F20.4)
 STOP
 END
```

● См. указание к задаче 6.612 б).

ГЛАВА 7

7.1. $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$; $0<x<p$, $0<y<p$, $x+y>p$. **7.2.** $V=\frac{S^2}{3\pi^2l^3}\sqrt{\pi^2l^4-S^2}$; $0<S<\pi l^2$. **7.3.** $S=\frac{x+y}{4}\sqrt{4z^2-(x-y)^2}$; $z>\frac{x-y}{2}$. **7.4.** $x^2+y^2\leqslant R^2$. **7.5.** $x^2+y^2\geqslant R^2$. **7.6.** $x^2+y^2<R^2$. **7.7.** $x^2+y^2>R^2$. **7.8.** $x\neq y$. **7.9.** $-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$. **7.10.** $x+y<0$. **7.11.** $x\leqslant x^2+y^2<2x$. **7.12.** Полосы $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (k — целое число). **7.13.** $0<x^2+y^2\leqslant 1$ при $0<a<1$, $x^2+y^2\geqslant 1$ при $a>1$. **7.14.** Два тупых вертикальных угла, образованных прямыми $y=0$ и $y=-2x$, включая границу без общей вершины $(0, 0)$. **7.15.** $4\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$. **7.16.** Криволинейный треугольник, образованный прямой $y=2$ и параболами $y^2=\pm x$, исключая вершину $(0, 0)$. **7.17.** $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. **7.18.** Часть плоскости, заключенная между лучами $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ и $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$ и $\varphi=\frac{5\pi}{4}$. **7.19.** $x^2+y^2+z^2\geqslant R^2$. **7.20.** $0\leqslant x^2+y^2\leqslant z^2$, $z\neq 0$. **7.21.** $x^2+y^2-z^2<1$. **7.22.** n-мерный куб $-1\leqslant x_k\leqslant 1$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. **7.23.** n-мерный эллипсоид $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots$ $\ldots+\frac{x_n^2}{a_n^2}\leqslant 1$. **7.24.** $f(2, 1)=1/4$; $f(1, 2)=4$; $f(3, 2)=0$; $f(a, a)=-1$; $f(a, -a)=1$. **7.25.** $f(-3, 4)=-24/25$; $f(1, y/x)=f(x, y)$. **7.26.** $\sqrt{1+x^2}$. **7.27.** $f(x)=x^2-x$; $z=2y+(x-y)^2$. **7.28.** $\frac{x^2(1-y)}{1+y}$.

◀ Обозначим $u=x+y$, $v=\frac{y}{x}$. Тогда $x=\frac{u}{1+v}$, $y=\frac{uv}{1+v}$, $f(u, v)=$

$=\frac{u^2}{(1+v)^2}-\frac{u^2v^2}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$. Остается переименовать переменные u и v в x и y. ▶ **7.29.** а) $x^4-2x^2y^2+2y^4$; б) $4x^2y^2$. **7.31.** а) $\cos 2x$; б) $\cos(x^2-y^2)$. **7.32.** -6. **7.33.** 1. **7.34.** 0. **7.35.** e. **7.36.** 1. **7.37.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z=\frac{1}{k-1}$ вдоль прямой $y=kx$; $\lim z=3$ при $k=4/3$; $\lim z=2$ при $k=3/2$; $\lim z=1$ при $k=2$; $\lim z=-2$ при $k=1/2$. **7.40.** Не имеет. **7.41.** Не имеет. **7.42.** ● Рассмотреть изменение x и y по параболе $y=x^2$. **7.44.** $(1, -1)$. **7.45.** (m, n), где $m, n\in\mathbb{Z}$. **7.46.** Линии разрыва — прямые $x=k\pi$ и $y=m\pi$, где $k, m\in\mathbb{Z}$. **7.47.** Линия разрыва — окружность $x^2+y^2=1$. **7.48.** Линии разрыва — прямая $x+y=0$ и парабола $y^2=x$. **7.49.** Линии разрыва — окружность $x^2+y^2=1$ и гипербола $x^2-y^2=1$. **7.50.** Поверхности разрыва — координатные плоскости $x=0$, $y=0$, $z=0$. **7.51.** Поверхность разрыва — эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **7.52.** Поверхность разрыва — конус $x^2+y^2-z^2=0$. **7.53.** Поверхность разрыва — однополостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$. **7.54.** Поверхность разрыва — двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$. **7.55.** $\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4-15x^2y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y}=5y^4-15x^3y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=20x^3-30xy^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-45x^2y^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=20y^3-30x^3y$. **7.56.** $\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x+\frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1-\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **7.57.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **7.58.** $\frac{\partial z}{\partial x}=(1-xy)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y\,(xy-2)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x\,(xy-2)\,e^{-xy}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{-xy}$. **7.59.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos y^2}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y\sin y^2}{x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\cos y^2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2y\sin y^2}{x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2\sin y^2+4y^2\cos y^2}{x}$. **7.60.** $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\,(x-1)\,y^{x-2}$ $(y>0)$. **7.61.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\,(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. **7.62.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\,\operatorname{sgn} x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{|x|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\,|x|\,y}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{(y^2-x^2)\operatorname{sgn} x}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2\,|x|\,y}{(x^2+y^2)^2}$. **7.63.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **7.64.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{y}{x}\right)^z\ln\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{z\,(z+1)}{x^2}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z\,(z-1)}{y^2}\left(\frac{y}{z}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$

$= \left(\frac{y}{x}\right)^z \ln^2 \frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{z^2}{xy}\left(\frac{y}{x}\right)^z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = -\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{1}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z\left(1+z\ln\frac{y}{x}\right)$. **7.65.** $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3t^4+3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3t^4-4$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2t^4+2$, $\frac{\partial u}{\partial t}=4xy^2z^3t^3-1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2xz^3t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6xy^2zt^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=12xy^2z^3t^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=2yz^3t^4$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial z}=3y^2z^2t^4$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}=4y^2z^3t^3$, $\frac{\partial^2u}{\partial y\,\partial z}=6xyz^2t^4$, $\frac{\partial^2u}{\partial y\,\partial t}=8xyz^3t^3$, $\frac{\partial^2u}{\partial z\,\partial t}=12xy^2z^2t^3$.

7.66. $f'_x(3,\ 2)=56$, $f'_y(3,\ 2)=42$, $f''_{xx}(3,\ 2)=36$, $f''_{xy}(3,\ 2)=31$, $f''_{yy}(3,\ 2)=6$. **7.67.** $f'_x(1,\ 2)=e(2e^4-1)$, $f'_y(1,\ 2)=4e^5$, $f''_{xx}(1,\ 2)=e(6e^4-1)$, $f''_{xy}(1,\ 2)=8e^5$, $f''_{yy}(1,\ 2)=18e^5$. **7.70.** $f'''_{xxx}(0,\ 1)=0$, $f'''_{xxy}(0,\ 1)=2$, $f'''_{xyy}(0,\ 1)=0$, $f'''_{yyy}(0,\ 1)=0$. **7.71.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial\xi\,\partial\eta} = -\frac{6}{r^4}+\frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, где $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

7.72. $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3} = -6(\cos x+\cos y)$. **7.73.** $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial y^q}=p!q!$ **7.78.** $r^2\cos\theta$.

7.85. $f'_x(0,\ 0)=f'_y(0,\ 0)=0$. ● Проверить, что функция равна нулю во всех точках осей Ox и Oy, и использовать определение частных производных. **7.86.** ● Проверить, пользуясь правилами дифференцирования и определением частной производной, что $f'_x(x,\ y)= y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$ при $x^2+y^2\neq 0$, $f'_x(0,\ 0)=0$, и, следовательно, $f'_x(0,\ y)=-y$. Отсюда $f''_{xy}(0,\ y)=f''_{xy}(0,\ 0)=-1$. Аналогично находим, что $f''_{yx}(0,\ 0)=1$. **7.87.** $\Delta z=0{,}33$, $dz=0{,}3$. **7.88.** $\Delta z=0{,}0187$, $dz=0{,}0174$. **7.89.** $dz=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}\,(y+\sqrt{x^2+y^2})}+\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

7.90. $dz=\frac{y}{x^2\cos^2\frac{y^2}{x}}(2x\,dy-y\,dx)$. **7.91.** $dz=\frac{1}{y^2}\operatorname{tg}\frac{x}{y}\,(x\,dy-y\,dx)$.

7.92. $du=(xy)^z\left(\frac{z}{x}\,dx+\frac{z}{y}\,dy+\ln(xy)\,dz\right)$. **7.93.** $df=(x_2-x_3)\times x_1^{x_2-x_3-1}\ln x_4\,dx_1 + x_1^{x_2-x_3}\ln x_1\ln x_4\,dx_2 - x_1^{x_2-x_3}\ln x_1\ln x_4\,dx_3 + x_1^{x_2-x_3}\frac{dx_4}{x_4}$. **7.94.** $df(1,\ 2,\ 1)=\frac{5dz-2(dx+2dy)}{25}$. **7.95.** 8,29. **7.96.** 2,95. **7.97.** 0,227. **7.98.** 8,2 м^3. **7.99.** Уменьшится на 1,57 см. **7.100.** Увеличится на 617,5 см^3. **7.101.** $dz=3x(x+2y)\,dx+3(x^2-y^2)\,dy$, $d^2z=6((x+y)\,dx^2+2x\,dx\,dy-y\,dy^2)$. **7.102.** $dz=(x\,dy-y\,dx)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$, $d^2z=2\left(\frac{y}{x^3}\,dx^2+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx\,dy-\frac{x}{y^3}\,dy^2\right)$. **7.103.** $dz=\frac{(x+y)\,dx+x\,dy}{\sqrt{x^2+2xy}}$, $d^2z=\frac{-y^2\,dx^2+2xy\,dx\,dy-x^2\,dy^2}{(x^2+2xy)^{3/2}}$. **7.104.** $dz=\frac{x^2\,dy-xy\,dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $d^2z=\frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,(y(2x^2-y^2)\,dx^2+2x(2y^2-x^2)\,dx\,dy\,-$

$-3x^2y\,dy^2)$. **7.105.** $dz = e^{xy}((y^2+xy+1)\,dx+(x^2+xy+1)\,dy)$, $d^2z = e^{xy}(y(y^2+xy+2)\,dx^2+2(x+y)(xy+2)\,dx\,dy+x(x^2+xy+2)\,dy^2)$. **7.106.** $dz=\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)dx+\frac{x}{y}\,dy$; $d^2z=-\frac{1}{x}\,dx^2+\frac{2}{y}\,dx\,dy-\frac{x}{y^2}\,dy^2$. **7.107.** $dz=\frac{1}{2x^2+2xy+y^2}(y\,dx-x\,dy)$, $d^2z=-\frac{1}{(2x^2+2xy+y^2)^2}\times$ $\times(2y(2x+y)\,dx^2+2(y^2-2x^2)\,dx\,dy-2x(x+y)\,dy^2)$. **7.108.** $du=(y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, $d^2u=2(dx\,dy+dy\,dz+dz\,dx)$. **7.109.** $du=e^{xyz}(yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz)$, $d^2u=e^{xyz}((yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz)^2+2(z\,dx\,dy+x\,dy\,dz+y\,dz\,dx))$. **7.110.** $d^3z=e^y(-\cos x\,dx^3-3\sin x\,dx^2\,dy+3\cos x\,dx\,dy^2+\sin x\,dy^3)$. **7.111.** $d^3u=6(dx^3+dy^3+dz^3-3\,dx\,dy\,dz)$. **7.112.** $d^6u=-\frac{5!\,(dx+dy+dz)^6}{(x+y+z)^6}$. **7.113.** $d^mu=e^{ax+by+cz}(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^m$.

7.114. $\frac{dz}{dt}=e^{2x-3y}(2\sec^2t-3(2t-1))$. **7.115.** $\frac{dz}{dt}=x^y\left(\frac{y}{xt}+\ln x\cos t\right)$. **7.116.** $\frac{dz}{dt}=\frac{2e^{2t}(x-y)}{x^2+y^2}$. **7.117.** $\frac{du}{dt}=\frac{x(z+2yt^2)-yzte^t}{tx^2}$. **7.118.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x+e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}$. **7.119.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{y^2+(x+1)^2}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{y(1-2(x+1)^2)}{y^2+(x+1)^2}$. **7.120.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2u\left(\frac{ux}{v}-\frac{y\ln v}{x^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2u\left(\frac{\ln v}{x}+\frac{uy}{v}\right)$. **7.121.** $dz=((2uv-v^2)\sin y-(u^2-2uv)\,y\sin x)\,dx+((2uv-v^2)\,x\cos y+(u^2-2uv)\cos x)\,dy$. **7.122.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'_v(u,\ v)-\frac{2y}{(x+y)^2}f'_u(u,\ v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{(x+y)^2}f'_u(u,\ v)-3f'_v(u,\ v)$. **7.123.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}f'_u(u,\ v)+y^2f'_v(u,\ v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2xyf'_v(u,\ v)-\frac{2y}{x^2-y^2}f'_u(u,\ v)$. **7.124.** $dz=(5x^4f'_v(u,\ v)-yf'_u(u,\ v)\sin(xy))\,dx-(x\sin(xy)\,f'_u(u,\ v)+7f'_v(u,\ v))\,dy$. **7.125.** $dz=\frac{1}{y^2}\left(\cos\frac{x}{y}f'_u(u,\ v)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}f'_v(u,\ v)\right)(y\,dx-x\,dy)$. **7.126.** $du=(2sf'_x(x,\ y,\ z)+2sf'_y(x,\ y,\ z)+2tf'_z(x,\ y,\ z))\,ds+(2tf'_x(x,\ y,\ z)-2tf'_y(x,\ y,\ z)+2sf'_z(x,\ y,\ z))\,dt$. **7.127.** $\frac{\partial u}{\partial x_1}=f'_{x_1}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)+f'_{x_3}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\,g'_{x_1}(x_1,\ x_2)+f'_{x_4}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\left(h'_{x_1}(x_1,\ x_2,\ x_3)+h'_{x_3}(x_1,\ x_2,\ x_3)\,g'_{x_1}(x_1,\ x_2)\right)$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}=f'_{x_2}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)+f'_{x_3}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\,g'_{x_2}(x_1,\ x_2)+f'_{x_4}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\left(h'_{x_2}(x_1,x_2,x_3)+h'_{x_3}(x_1,x_2,x_3)\,g'_{x_2}(x_1,x_2)\right)$. **7.132.** $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=y^2f''_{uu}(u,\ v)+2f''_{uv}(u,\ v)+\frac{1}{y^2}f''_{vv}(u,\ v)$, $\frac{\partial^2z}{\partial x\,\partial y}=xyf''_{uu}(u,\ v)-\frac{x}{y^3}f''_{vv}(u,\ v)+f'_u(u,\ v)-\frac{1}{y^2}f'_v(u,\ v)$, $\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=x^2f''_{uu}(u,\ v)-\frac{2x^2}{y^2}f''_{uv}(u,\ v)+\frac{x^2}{y^4}f''_{vv}(u,\ v)+\frac{2x}{y^3}f'_v(u,\ v)$. **7.133.** $\frac{\partial^2u}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}+f''_{xz}\varphi'_y+f''_{yz}\varphi'_x+f''_{zz}\varphi'_x\varphi'_y+f'_z\varphi''_{xy}$.

7.134. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$ $=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+$ $+xf''_{12}+xzf''_{13}+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+$ $+xy^2zf''_{33}+yf'_3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3$ [1]). 7.137. $d^2u=$ $=4f''(t)\cdot(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2+2f'(t)\cdot(dx^2+dy^2+dz^2)$. 7.138. $d^2u=$ $=a^2f''_{11}\,dx^2+b^2f''_{22}\,dy^2+c^2f''_{33}\,dz^2+2abf''_{12}\,dx\,dy+2acf''_{13}\,dx\,dz+$ $+2bcf''_{23}\,dy\,dz$. 7.139. $d^2z=\left(\sin^2 y\cdot f''_{uu}-2y\sin x\sin y\cdot f''_{uv}+y^2\sin^2 x\times\right.$ $\left.\times f''_{vv}-y\cos x\cdot f'_v\right)dx^2+\left(x\sin 2y\cdot f''_{uu}+2(\sin y\cos x-xy\sin x\cos y)f''_{uv}-\right.$ $\left.-y\sin 2x\cdot f''_{vv}+2(\cos y\cdot f'_u-\sin x\cdot f'_v)\right)dx\,dy+\left(x^2\cos^2 y\cdot f''_{uu}+\right.$ $\left.+2x\cos x\cos y\cdot f''_{uv}+\cos^2 x\cdot f''_{vv}-x\sin y\cdot f'_u\right)dy^2$. 7.140. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2e^{2x}-xe^{2y}}{x^2e^{2y}-ye^{2x}}$.

7.141. $\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$. 7.142. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-1}{x+y+1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=$ $=\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. 7.143. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{y^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. 7.144. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=0$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=-\frac{1}{3}$, $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{1}{3}$. 7.145. $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$. 7.146. $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=\frac{yz(x+z)-z^3}{z^3+2xy(x+z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz(x+z)}{z^3+2xy(x+z)}$. 7.147. $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=-\frac{F'_u(u,v)+2xF'_v(u,v)}{F'_u(u,v)+2zF'_v(u,v)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_u(u,v)+2yF'_v(u,v)}{F'_u(u,v)+2zF'_v(u,v)}$, где $u=x+y+z$, $v=x^2+y^2+z^2$. 7.148. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ze^{xz}f'_v(u,v)}{yf'_u(u,v)+xe^{xz}f'_v(u,v)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{zf'_u(u,v)}{yf'_u(u,v)+xe^{xz}f'_v(u,v)}$, где $u=yz$, $v=e^{xz}$. 7.149. $dz=$ $=\frac{z\,dx-z(1+x^2z^2)\,dy}{y(1+x^2z^2)-x}$. 7.150. $dz=\frac{y^2(z+3x^2)\,dx+(3y^4+ze^{z/y})\,dy}{y(e^{z/y}-xy)}$.

7.151. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-x}{1+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2y(x-2)}{(1+z)^3}$. 7.152. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=$ $=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. 7.153. $d^2z=\frac{c^4}{a^2b^2z^3}\left((y^2-b^2)\,dx^2-2xy\,dx\,dy+\right.$ $\left.+(x^2-a^2)\,dy^2\right)$. 7.157. $\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{5}{3}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{3}{8}$, $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{5}{18}$.

7.158. $dy=-\frac{4x}{5y}dx$, $dz=\frac{x}{5z}dx$, $d^2y=-\frac{4}{25y^3}(4x^2+5y^2)\,dx^2$, $d^2z=$ $=\frac{1}{25z^3}(5z^2-x^2)\,dx^2$. 7.159. $du=\frac{(y-u)\,dx+(y-v)\,dy}{x-y}$,

[1]) В ответах к задачам 7.134 и 7.138 через f'_i и f''_{ij} обозначены частные производные функции $f(\varphi_1(x,y,z),\ \varphi_2(x,y,z),\ \varphi_3(x,y,z))$ по переменным φ_i или φ_i и φ_j.

$dv=\frac{(x-u)\,dx+(x-v)\,dy}{y-x}$, $\quad d^2v=-d^2u=\frac{2}{(x-y)^2}((y-u)\,dx^2+(y-$ $-v+u-x)\,dx\,dy+(v-x)\,dy^2)$. **7.161.** $\frac{\partial z}{\partial x}=uv^2+u^2v$, $\frac{\partial z}{\partial y}=uv^2-u^2v$. **7.162.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c}{a}\cos u\,\operatorname{cth} v$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{c}{b}\sin u\,\operatorname{cth} v$. **7.163.** $dz=$ $=e^{-u}((v\cos v-u\sin v)\,dx+(u\cos v+v\sin v)\,dy)$. **7.164.** $dz=-3uv\,dx+$ $+\frac{3}{2}(u+v)\,dy$. **7.165.** $\frac{d^2y}{dt^2}-y=0$. **7.166.** $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$. **7.167.** $\frac{d^3x}{dy^3}+$ $+\frac{d^2x}{dy^2}=0$. **7.168.** $r'^2=\frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$. **7.169.** $w=r\frac{\partial u}{\partial r}$. **7.170.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$. **7.171.** $\frac{\partial z}{\partial v}=u\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$. **7.172.** $w=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$. **7.173.** $w=$ $=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$. **7.174.** $\frac{\partial w}{\partial v}=0$. **7.175.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$. **7.176.** $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=2w$.

7.177. $f(x+h,y+k)=xy^2+y^2h+2xyk+2yhk+xk^2+hk^2$. **7.178.** $\Delta f(x,y)=-h^2+2hk+3k^2$. **7.179.** $f(x,y)=12+15(x-2)+6(x-2)^2+$ $+3(x-2)(y-1)-6(y-1)^2+(x-2)^3-2(y-1)^3$. **7.180.** $f(x+h,$ $y+k,\ z+l)=f(x,\ y,\ z)+h(2x+y+3)+k(x+4y-2z-1)+l(6z-$ $-2y-4)+h^2+2k^2+3l^2+hk-2kl$. **7.181.** $f(x,\ y,\ z)=8-8(y+1)+$ $+4(z-2)+(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2-2(x-1)(y+1)-2(x-1)\times$ $\times(z-2)-2(y+1)(z-2)$. **7.182.** $f(x,\ y)=1+y+\frac{1}{2!}(y^2-x^2)+$ $+\frac{1}{3!}(y^3-3x^2y)+o(\rho^3)$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. **7.183.** $f(x,\ y)=xy+$ $+\frac{1}{3!}(xy^3-x^3y)+o(\rho^4)$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. **7.184.** $f(x,y)=1-(x-1)+$ $+(y-1)+(x-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)^3+(x-1)^2(y-1)+o(\rho^3)$, где $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. **7.185.** $f(x,\ y,\ z)=(x-1)+(y-1)-$ $-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}(y-1)^2+z^2+o(\rho^2)$, где $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$.

7.186. $z=1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{2}{9}(x-1)^2-\frac{1}{8}(y-1)^2+o(\rho^2)$, где $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. **7.187.** $z_{\min}=-9$ при $x=0$, $y=3$. **7.188.** $z_{\max}=1/64$ при $x=1/4$, $y=1/2$. **7.189.** $z_{\min}=-4/3$ при $x=0$, $y=-2/3$. В стационарной точке $(2,\ -2/3)$ экстремума нет. **7.190.** $z_{\min}=30$ при $x=5$, $y=2$. **7.191.** $z_{\min}=10-18\ln 3$ при $x=1$, $y=3$. **7.192.** $z_{\min}=-28$ при $x=2$, $y=1$; $z_{\max}=28$ при $x=-2$, $y=-1$. В стационарных точках $(1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$ экстремумов нет. **7.193.** $z_{\min}=0$ при $x=y=0$. В стационарных точках $(-5/3,\ 0)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ -4)$ экстремумов нет. **7.194.** $z_{\min}=0$ при $x=y=0$; $z_{\max}=2e^{-1}$ при $x=\pm 1$, $y=0$. В стационарных точках $(0,\ \pm 1)$ экстремумов нет. **7.195.** $z_{\max}=2$ при $x=y=0$. **7.196.** $u_{\min}=-14$ при $x=2$, $y=-3$, $z=1$. **7.197.** $u_{\max}=1/7^7$ при $x=y=z=1/7$. **7.198.** $u_{\min}=2^{9/4}$ при $x=2^{1/4}$, $y=2^{1/2}$, $z=2^{3/4}$. **7.199.** Уравнение определяет две функции, из которых одна имеет максимум ($z_{\max}=6$) при $x=-2$, $y=1$, другая — минимум ($z_{\min}=-2$) при $x=-2$, $y=1$; в точках окружности $(x+2)^2+(y-1)^2=16$ каждая из этих функций имеет краевой экстремум $z=2$. ● Указанные функции определяются явно равенством $z=2\pm\sqrt{16-(x+2)^2-(y-1)^2}$ и определены только внутри и на окружности $(x+2)^2+(y-1)^2=16$, в точках которой обе функции принимают значение $z=2$. Это значение является наименьшим для одной функции и наибольшим для другой. **7.200.** Уравнение определяет две функции, из которых одна имеет минимум ($z_{\min}=1$) при $x=0$, $y=-2$, а другая—максимум ($z_{\max}=-8/7$) при $x=0$, $y=16/7$. **7.201.** $z_{\min}=-19/4$ при $x=y=-3/2$. **7.202.** $z_{\min}=2$ при $x=y=1$. **7.203.** $z_{\min}=-1-2\sqrt{2}$ при $x=-1/\sqrt{2}$, $y=1/\sqrt{2}$; $z_{\max}=1-2\sqrt{2}$ при $x=1/\sqrt{2}$, $y=-1/\sqrt{2}$. **7.204.** $z_{\min}=0$ при $x=1$, $y=0$; $z_{\max}=1/27$ при $x=y=1/3$. **7.205.** $z_{\min}=-\sqrt{5}$ при $x=-2/\sqrt{5}$, $y=-1/\sqrt{5}$; $z_{\max}=\sqrt{5}$ при $x=2/\sqrt{5}$, $y=1/\sqrt{5}$. **7.206.** $u_{\min}=-18$ при $x=-4$, $y=-2$, $z=4$; $u_{\max}=18$ при $x=4$, $y=2$, $z=-4$. **7.207.** $u_{\min}=4$ при $x=y=0$, $z=\pm 2$; $u_{\max}=16$ при $x=\pm 4$, $y=z=0$; при $x=z=0$, $y=\pm 3$ экстремума нет. **7.208.** $u_{\max}=2^6$ при $x=y=z=2$. **7.209.** $u_{\max}=2$ в точках $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$; $u_{\min}=50/27$ в точках $(2/3, 5/3, 5/3)$, $(5/3, 2/3, 5/3)$, $(5/3, 5/3, 2/3)$. **7.210.** ● Искать минимум функции $u=(x^3+y^3+z^3)/3$ при $x+y+z=s$. **7.211.** а) $z_{\text{наиб}}=6$ при $x=1$, $y=0$; б) $z_{\text{наиб}}=5$ при $x=y=0$. **7.212.** $z_{\text{наиб}}=6$ при $x=3$, $y=0$ и при $x=0$, $y=3$; $z_{\text{наим}}=-1$ при $x=y=1$. **7.213.** $z_{\text{наиб}}=1/2$ при $x=y=\pm 1/\sqrt{2}$; $z_{\text{наим}}=-1/2$ при $x=-y=\pm 1/\sqrt{2}$. **7.214.** $z_{\text{наиб}}=2/(3\sqrt{3})$ при $x=1/\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{2/3}$; $z_{\text{наим}}=-2/(3\sqrt{3})$ при $x=-1/\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{2/3}$. **7.215.** $a=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$. **7.216.** Куб с длиной ребра a. **7.217.** Куб с длиной ребра $d/\sqrt{3}$. **7.218.** Координаты искомой точки равны средним арифметическим координат вершин. **7.219.** Длины сторон параллелепипеда: $2R/\sqrt{3}$, $2R/\sqrt{3}$, $R/\sqrt{3}$. **7.220.** Длины сторон параллелепипеда $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $\frac{H}{3}$. **7.221.** Равнобедренный треугольник с длиной боковой стороны $a/(2\sin\alpha/2)$. **7.222.** $(-12/5, -3/5)$, $(12/5, 3/5)$. ● Достаточные условия экстремума заменить геометрическими соображениями. **7.223.** $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$. ● Воспользоваться выражением площади треугольника через координаты его вершин. **7.224.** $x=y=z=\sqrt[3]{V}+2\delta$. **7.225.** $x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$, $y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$. **7.226.** $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}$. ● Очевидно, точка M, в которой луч переходит из одной среды в другую, должна находиться между A_1 и B_1, причем $AM=\frac{a}{\cos\alpha}$, $BM=\frac{b}{\cos\beta}$, $A_1M=a\operatorname{tg}\alpha$, $B_1M=b\operatorname{tg}\beta$. Продолжительность движения луча равна $\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$. Задача сводится к отысканию минимума функции $f(\alpha, \beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$ при условии, что $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=c$. **7.227.** $\alpha=\beta$. **7.228.** $I_1:I_2:\ldots:I_n=\frac{1}{R_1}:\frac{1}{R_2}:\ldots:\frac{1}{R_n}$. ● Найти минимум функции $f(I_1, I_2, \ldots, I_n)=I_1^2R_1+I_2^2R_2+\ldots+I_n^2R_n$ при

$l_1+l_2+\ldots+l_n=l$. **7.229.** а) $x-y-2z+1=0$, $\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\dfrac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=$ $=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-2}$; б) $x+ez-2=0$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-\pi}{0}=\dfrac{z-\frac{1}{e}}{e}$. **7.230.** $\dfrac{\pi a}{2\sqrt{6}}$. **7.231.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma=-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$. **7.232.** $4x+y+$ $+2z-78=0$. **7.233.** а) $2x+7y-5z+4=0$, $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{-5}$; б) $x+y-4z=0$, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$; в) $z=0$, $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}$ (в точке $(0,\ 0,\ 0)$); $z=-4$, $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+4}{1}$ (в точке $(0,\ 0,\ -4)$). **7.234.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-\frac{10}{3}}{3}=\dfrac{z+4}{4}$. **7.235.** В точках $(0,\ \pm2\sqrt{2},\ \mp2\sqrt{2})$ касательные плоскости параллельны плоскости Oxy, в точках $(\pm2,\ \mp4,\ \pm2)$ — плоскости Oxz, в точках $(\pm4,\ \mp2,\ 0)$ — плоскости Oyz. **7.237.** а) $x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0-z\operatorname{tg}\alpha=0$, $\dfrac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=$ $=\dfrac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0}=\dfrac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$; б) $ax\sin v_0-ay\cos v_0+u_0z=au_0v_0$, $\dfrac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0}=\dfrac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0}=\dfrac{z-av_0}{u_0}$. **7.238.** $\cos\varphi=\dfrac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$.

● Углом между двумя поверхностями в точке их пересечения называется угол между касательными плоскостями, проведенными к этим поверхностям в данной точке. **7.239.** ● Поверхности называются ортогональными, если они пересекаются под прямым углом в каждой точке линии их пересечения. **7.240.** Изолированная точка (0, 0). **7.241.** Узел (0, 0). **7.242.** Изолированная точка (0, 0). **7.243.** Точка возврата 1-го рода (1, 0). **7.244.** Точка возврата 2-го рода (0, 0). **7.245.** Точка самоприкосновения (0, 0). **7.246.** (0, 0) — изолированная точка, если $a<0$; узел, если $a>0$; точка возврата 1-го рода, если $a=0$. **7.247.** Узел (0, 0). **7.248.** Точка возврата 1-го рода (0, 0). **7.249.** Угловая точка (0, 0). ● Показать, что $\lim\limits_{x\to+0}y'=0$, $\lim\limits_{x\to-0}y'=1$. **7.250.** Точка прекращения (0, 1) ● Показать, что $\lim\limits_{x\to+0}y=1$. **7.251.** $y=-x^2/4$. **7.252.** $x^2+y^2=p^2$. **7.253.** $x=\pm R$. **7.254.** Огибающей нет. **7.255.** $y=-\dfrac{4}{3}x^3$. **7.256.** $x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}$. **7.257.** $y^2=-\dfrac{x^3}{x+2a}$. **7.258.** а) Дискриминантная кривая $y=1$ является огибающей и множеством точек перегиба данного семейства; б) дискриминантная кривая распадается на прямые: $y=x-\dfrac{4}{27}$ (огибающая) и $y=x$ (множество точек возврата 1-го рода); в) дискриминантная кривая $y=1$ есть множество точек возврата 1-го рода и не является огибающей; г) дискриминантная кривая распадается на прямые: $x=-a$ (огибающая) и $x=0$ (множество узлов).

7.259. а) 1 г, 0,0043%; б) 1 мм, 0,12%; в) 1′, 0,066%. **7.260.** 1) $\Delta=$ $=0{,}002$ км, $\delta=0{,}008\%$; 2) $\Delta=30$ м², $\delta=2\%$. **7.261.** Первое. **7.262.** а) 0,05, 0,14%; б) 0,005, 6,25%. **7.263.** 29,2 и 3,2. **7.264.** 1) 5,373, 0,0004, 0,0074%; 2) 5,73, 0,0026, 0,048%; 3) 5,4, 0,027[illegible], 0,51%. **7.265.** $202\cdot 10^{-4}$, [illegible]$8\cdot 10^4$, $600\cdot 10^3$. **7.266.** а) Два, $41\cdot 10^4$; б) один, $8\cdot 10^{-2}$. **7.267.** Не меньше чем с двумя знаками. **7.268.** Не меньше чем с тремя знаками. **7.269—7.273.** ● Воспользоваться формулой (1) § 4. **7.274.** 185,7. **7.275.** $1{,}3\cdot 10^2$. **7.276.** 71,88. **7.277.** Вычитание произвести нельзя. **7.278.** 61,6. **7.279.** $512\cdot 10$. **7.280.** 3,3. **7.281.** $3\cdot 10$. **7.282.** $66\cdot 10^3$. **7.283.** 7,397. **7.284.** $\leqslant 12\pi$ см^2, $\leqslant 8{,}3\%$. **7.285.** $\approx 0{,}43\delta$. **7.287.** $\leqslant 0{,}17$ мм. **7.288.** $2{,}7 \pm 0{,}1$ г/см^3. **7.289.** По принципу равных влияний R измерить с относительной погрешностью 0,25%, а высоту H с относительной погрешностью 0,5%. **7.290.** 12″. **7.291.** 4. **7.292.** 4. **7.293.** По принципу равных влияний π можно взять с тремя верными знаками в узком смысле, радиусы измерить с точностью до 0,8 см, а образующую с точностью до 1,25 см.

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВТУЗОВ**

**Линейная алгебра
и основы математического анализа**

Под редакцией **А. В. ЕФИМОВА, Б. П. ДЕМИДОВИЧА**

Редактор **Ф. И. Кизнер**
Художественный редактор **Г. М. Коровина**
Технический редактор **В. Н. Кондакова**
Корректор **Т. С. Вайсберг**

ИБ № 12974

Сдано в набор 11.06.85. Подписано к печати 28.02.86. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 24,36. Усл. кр.-отт. 24,57. Уч.-изд. л. 29,23. Тираж 140 000 экз. Заказ № 4758. Цена 1 р. 20 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071. Москва В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054. Москва, Валовая, 28.

Отпечатано с матриц в типографии издательства «Коммуна».
г. Воронеж, пр. Революции, 39.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВТУЗОВ. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича — 2-е изд., испр. и доп.

(Аннотир. план на 1986 г., п. 63.)

Содержит задачи по интегральному исчислению функций нескольких переменных, дифференциальным уравнениям, векторному анализу, основам теории функций комплексной переменной, рядам и их применениям, включая ряды Фурье, и операционному исчислению. Краткие теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров, позволяют использовать сборник для всех видов обучения.

Для студентов второго и третьего курсов высших технических учебных заведений.

Заказы на данную книгу принимаются без ограничения всеми магазинами Книготорга и Академкниги, распространяющими научно-техническую литературу.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15