

531(075)

ФРЗ4 Міністерство освіти і науки України

Вінницький державний технічний університет

В.О.Федотов

МЕХАНІКА.

Методичні матеріали та розрахунково-графічні завдання

Вінниця ВДТУ 2000

3119-10

Міністерство освіти і науки України

Вінницький державний технічний університет

В.О.Федотов

МЕХАНІКА.

Методичні матеріали та розрахунково-графічні завдання

НТБ ВДТУ



3119-10

531(075)

Ф 34

2000

Федотов В О Механіка

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів бакалаврського напрямку 6.091400 – Комп'ютеризовані системи автоматики та управління.
Протокол № 11 від 29 червня 2000 р.

05

Вінниця ВДТУ 2000

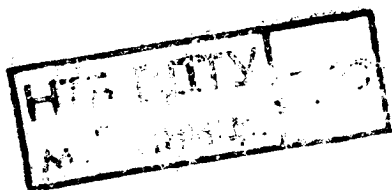
Механіка. Методичні матеріали та розрахунково-графічні завдання.
Навчальний посібник (В.О.Федотов – В: ВДТУ. 2000. – 101 с. Укр. мовою).

Навчальний посібник написаний згідно з діючою програмою вивчення технічної механіки для студентів бакалаврського напрямку 6.091400 – Комп'ютеризовані системи автоматики та управління.

Методично навчальний посібник забезпечує студентів основними теоретичними відомостями з технічної механіки, варіантами завдань до розрахунково-графічних робіт і прикладами їх виконання.

Бібліограф: назв. 11, іл. 69, табл. 12

Рецензенти: П.С.Берник, д. т. н.
С.І.Ткаченко, д. т. н.
В.М.Михалевич, д. т. н.



Зміст

1	ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.....	5
1.1	Основні закони, поняття, означення.....	5
1.1.1	Закони механіки.....	6
1.1.2	Диференційні рівняння руху точки.....	6
1.1.3	Момент інерції тіла відносно осі.....	7
1.1.4	Метод кінетостатики.....	8
1.1.5	Питання до колоквиуму №1.....	11
1.2	Завдання розрахунково-графічної роботи (РГЗ) з теоретичної механіки.....	11
C1	Збіжна система сил.....	11
C.2	Плоска система паралельних сил.....	16
K.1	Кінематика точки.....	26
K.2	Обертальний рух тіла.....	29
K.3	Плоский рух твердого тіла.....	34
D.1	Дослідження руху матеріальної точки.....	41
D.2	Дослідження обертального руху тіла.....	45
2	ОПОР МАТЕРІАЛІВ.....	54
2.1	Основна задача опору матеріалів для спеціальності “Системи управління автоматички”.....	54
2.2	Теорія внутрішніх сил.....	56
2.3	Основні гіпотези і припущення в опорі матеріалів.....	58
2.4	Побудова епюр внутрішніх силових факторів.....	58
2.4.1	Побудова епюри внутрішніх нормальних сил при розтягу.....	59
2.4.2	Побудова епюри крутних моментів.....	61
2.4.3	Побудова епюри внутрішніх силових факторів при плоскому згині.....	61
2.5	Розрахунки на міцність та жорсткість при простому опорі.....	65
2.5.1	Розтяг та стиск.....	65
2.5.2	Зсув.....	65
2.5.3	Кручення.....	66
2.5.4	Плоский згин.....	69
2.5.5	Запитання до колоквиуму №2.....	71
2.6	Завдання РГЗ з опору матеріалів.....	71
ОМ.1	Центр ваги пластини.....	72
ОМ.2	Визначення поперечного перерізу балки при плоскому згині.....	74
ОМ.3	Визначення діаметра бала при крученні.....	75
3	КАБЕЛІ ТА З’СДІАННЯ.....	80
3.1	Оптичні кабелі.....	80

Д.1 Розрахунок клемового з'єднання.....	81
Д.2 Розрахунок закріплення стисків.....	90
Д.3 Розрахунок закріплення фланцевого електродвигуна.....	94
Д.4 Розрахунок шпонки.....	97
3.2 Питання до колоквиуму №3.....	99
Література.....	

1 ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

1.1 Основні закони, поняття, означення

Механіка – наука про загальні закони механічного руху матеріальних точок та тіл. *Механічний рух* – це переміщення точок та тіл у просторі з перебігом часу.

Теоретична механіка спирається на певну сукупність узгоджених законів і фактів, встановлених дослідною механікою, які вважаються істинними. На цій основі засобами математики дедуктивним шляхом встановлюються нові факти і закони руху.

Класична (ньютонівська) має справу з макроскопічними тілами, які рухаються із швидкістю, набагато меншою від швидкості світла ($\approx 3 \cdot 10^8$ м/с). Межі істинності класичної механіки встановлюються, з одного боку, спеціальною та загальною теорією відносності (А.Пуанкаре, Н.Бор, А.Ейнштейн), а з іншого боку – квантовою теорією (М.Планк, Н.Бор, В.Гейзенберг, Л. де Бройль). В подальшому будемо розглядати тільки класичну теоретичну механіку яка є основою теорії інших механічних дисциплін: опору матеріалів, теорії механізмів і машин, деталей машин, гідромеханіки і т. д.

Теоретична механіка і математика з часів Ньютона мають тісний зв'язок. Варто вказати на те, що визначні вчені-механіки були одночасно і математиками; до часів М.Е.Жуковського теоретичну механіку викладали як суто математичну дисципліну. Для розуміння механіки потрібні знання фундаментальних розділів математики – аналітичної геометрії, векторної алгебри і аналізу, теорії тензорів, варіаційного числення, теорії диференціальних рівнянь, методів обчислювальної математики.

Знання теоретичної механіки потрібні інженерам, бакалаврам немеханічних спеціальностей, які розробляють нову техніку, оскільки в більшості випадків кінцеві ланки складних автоматичних систем – це механізми: електричні двигуни, прилади різного призначення, трансмісії, апарати, маніпулятори і т. і. В наш час, коли протягом життя доводиться змінювати характер діяльності, оволодіння фундаментальною наукою – теоретичною механікою може стати важливою складовою частиною успішної інженерної діяльності.

Основні поняття (абстракції) механіки запроваджені як ідеалізовані образи (моделі), що мають певні, означені властивості, запозичені у реальних об'єктів. Це – простір, час, матеріальна точка, абсолютне тверде тіло, сила.

Простір розглядається як абсолютний тривимірний евклідовий, що вміщує рухомі та нерухомі тіла.

Абсолютний же протікає рівномірно і однаково у всіх частинах простору і на нього не впливає рух матерії або спостерігача.

Матеріальна точка – матеріальне тіло, розмірами якого можна знехтувати при вивченні його руху.

Система матеріальних точок – сукупність матеріальних точок, в якій положення і рух однієї з цих точок залежить від положення і руху решти точок.

Абсолютно тверде тіло – система матеріальних точок, відстані між якими у процесі руху залишаються незмінними і які заповнюють простір, що займає тіло.

Сила – міра механічного прояву взаємодії матеріальних тіл. Природа сили в механіці не встановлюється, це задача фізики. Сила не може привести до руйнування абсолютно твердого тіла.

1.1.1 Закони механіки

В основі теоретичної механіки лежать закони І.Ньютона, що викладені ним у книзі “Математичні початки натуральної філософії” (1687р.).

І-й закон Ньютона. Ізольована матеріальна точка знаходиться у спокої або рухається рівномірно по прямолінійній траєкторії.

Ізольованою називається матеріальна точка, яка не взаємодіє з іншими тілами або до якої прикладена врівноважена система сил.

ІІ-й закон Ньютона (основний закон механіки). Прискорення \vec{a} , що набуває точка масою m під дією сили \vec{F} , пропорційне цій силі і має напрямок сили.

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \quad (1.1)$$

ІІІ-й закон Ньютона. Сили взаємодії двох тіл, рівні за величиною, направлені по одній прямій в протилежні сторони.

1.1.2 Диференціальні рівняння руху точки

Розглянемо рух матеріальної точки масою m під дією сили \vec{F} (рис.1.1), що може залежати від часу, швидкості, відстані $\vec{F} = \vec{F}(r, v, t)$.

Прискорення \vec{a} точки запишемо як другу похідну за часом від радіуса-вектора \vec{r}

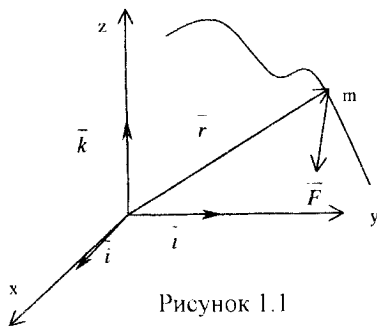


Рисунок 1.1

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} \quad (1.2)$$

Враховуючи (1.2), закон (1.1) запишеться у вигляді:

$$m \cdot \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F} \quad (1.3)$$

Отримали диференційне рівняння руху точки у векторній формі.

1.1.3 Момент інерції тіла відносно осі

У твердому тілі (рис.1.2) виділимо елементарний об'єм масою dm , що знаходиться на відстані ρ від осі z .

Скалярний добуток маси dm на квадрат її відстані від осі називається моментом інерції точки відносно осі

$$dl_z = \rho^2 dm \quad (1.4)$$

Момент інерції тіла відносно осі z .

$$I_z = \int_M \rho^2 dm \quad (1.5)$$

де M – маса тіла.

Нехай вісь z проходить через центр маси C тіла. Тоді, у відповідності з теоремою Гюйгенса-Штейнера, момент інерції тіла відносно осі буде складатися із моменту інерції тіла відносно паралельної осі z , що проходить через центр мас C та добутку маси M тіла на квадрат відстані між осями

$$I_\eta = I_z + M \cdot d^2 \quad (1.6)$$

Момент інерції тонкого стержня (рис.1.3) та круглої пластинки (Рис.1.4) відносно осей симетрії:

$$I_y = \frac{1}{12} M l^2 \quad (1.7)$$

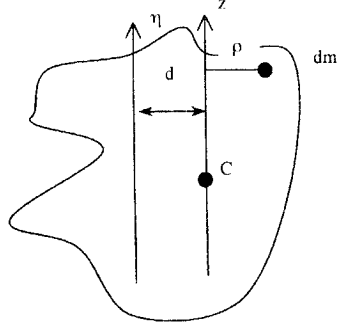


Рисунок 1.2

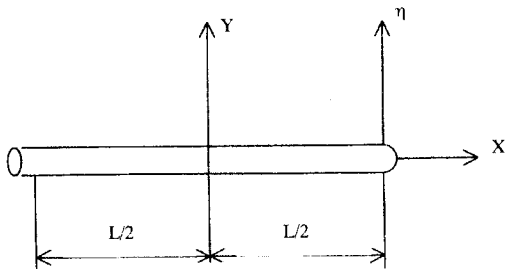


Рисунок 1.3

за виразом (1.6)

$$I_{\eta} = \frac{1}{12} M l^2 + M \frac{l^2}{4} = \frac{M l^2}{3} \quad (1.8)$$

$$I_z = \frac{MR^2}{2} \quad (1.9)$$

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4} \quad (1.10)$$

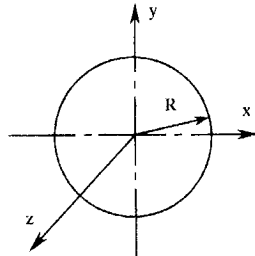


Рисунок 1.4

1.1.4 Метод кінетостатики

Розглянемо рух k -ї точки невідільної матеріальної системи (рис.1.5). Дію тіл в'язей, що обмежують переміщення k -ї точки системи замінюємо силами (реакціями в'язей), головний вектор яких позначаємо \overline{R}_k . Головний вектор активних сил, проведених до k -ї точки, позначимо \overline{F}_k .

Запишемо рівняння (1.3) для k -ї точки:

$$m_k \cdot \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k + \overline{R}_k,$$

$$\text{або } \overline{F}_k + \overline{R}_k + \overline{\Phi}_k = 0 \quad (1.11)$$

Додаток $\overline{\Phi}_k = -m_k \cdot \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = -m_k \overline{a}_k$ називається даламберовою силою інерції.

Метод кінетостатики (принцип Даламбера): для невідільної матеріальної системи в кожний момент часу векторна сума головних векторів та головних моментів активних сил, реакцій в'язей та сил інерції відносно довільної точки для рухомої невідільної матеріальної системи

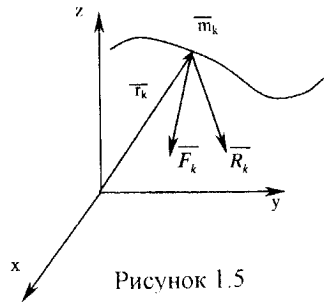


Рисунок 1.5

$$\left. \begin{aligned} \overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} &= 0 \\ \overline{M}_0^F + \overline{M}_0^R + \overline{M}_0^\Phi &= 0 \end{aligned} \right| \quad (1.12)$$

де $\overline{F} = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k$; $\overline{R} = \sum_{k=1}^n \overline{R}_k$; $\overline{\Phi} = \sum_{k=1}^n \overline{\Phi}_k$,

$$\overline{M}_0^F = \sum_{k=1}^n \overline{r}_k \times \overline{F}_k; \quad \overline{M}_0^R = \sum_{k=1}^n \overline{r}_k \times \overline{R}_k; \quad \overline{M}_0^\Phi = \sum_{k=1}^n \overline{r}_k \times \overline{\Phi}_k.$$

Головний вектор сил інерції $\overline{\Phi} = -\frac{d\overline{Q}}{dt}$, або

$$\overline{\Phi} = -\overline{M} \cdot \overline{a}_c \quad (1.13)$$

де \overline{a}_c — прискорення центра мас системи;

$$\overline{Q} — \text{головний вектор кількості руху, } \overline{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \overline{V}_k.$$

Головний момент сил інерції відносно центра O:

$$\overline{M}_0^\Phi = -\frac{d\overline{k}_0}{dt} \quad (1.14)$$

де $\overline{k}_0 = \sum_{k=1}^n \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k$ — головний момент кількості руху матеріальної системи відносно центра O.

Запишемо рівняння (1.12) в проєкціях на осі декартової системи координат:

$$\left. \begin{aligned} F_x + R_x + \Phi_x &= 0 \\ F_x + R_x + \Phi_x &= 0 \\ F_x + R_x + \Phi_x &= 0 \\ M_x^F + M_x^R + M_x^\Phi &= 0, \\ M_y^F + M_y^R + M_y^\Phi &= 0, \\ M_z^F + M_z^R + M_z^\Phi &= 0 \end{aligned} \right| \quad (1.15)$$

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі Z, то:

$$K_Z = I_Z \cdot \omega \quad (1.16)$$

де ω — кутова швидкість тіла.

Тоді на підставі останнього рівняння системи (1.15) та (1.14) отримаємо:

$$I_Z \cdot \dot{\omega} = M_z^F + M_z^R \quad (1.16)$$

де $\ddot{\varphi} = \frac{dw}{dt}$ — кутове прискорення тіла.

У випадку коли система матеріальних точок знаходиться у рівновазі то сили, що прикладені до точок системи, підкоряються умовам:

$$\begin{aligned} \overline{F} + \overline{R} &= 0 \\ \overline{M}_0^F + \overline{M}_0^R &= 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Отримали аксіому рівноваги: для того, щоб система сил була врівноважена необхідно і достатньо рівності нулю головного вектора та головного моменту активних сил та моментів в'язей відносно довільного центра O.

Запишемо умови (1.17) в проєкціях на декартові осі координат для плоскої врівноваженої довільної системи сил (рис. 1.6):

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = F_x + R_x &= 0 \\ \sum F_y = F_y + R_y &= 0 \\ \sum m_0 \overline{F} = M_0^F + M_0^R &= 0 \end{aligned} \right| (1.18)$$

Якщо у врівноваженої системи сил ($\{\overline{F}_k\} \sim 0$) усі сили лежать в одній площині і перетинаються в одній точці (рис. 1.7), то умови (1.18) запишуться у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = F_x + R_x &= 0, \\ \sum F_y = F_y + R_y &= 0. \end{aligned} \right| (1.19)$$

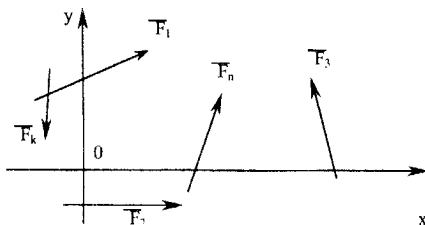


Рисунок 1.6

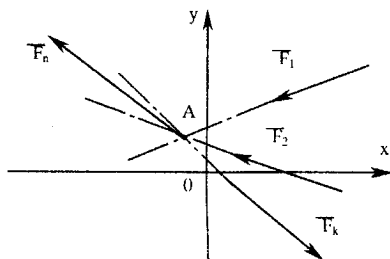


Рисунок 1.7

1. Основні поняття механіки. Історичний шлях розвитку механіки.
2. Сила. Основні означення статички.
3. Момент сили відносно центра.
4. Момент сили відносно осі.
5. Головний вектор та головний момент системи сил.
6. Аксиома рівноваги.
7. Аксиоми статички.
8. В'язі. Класифікація в'язей.
9. Центр паралельних сил.
10. Способи завдання руху точки.
11. Швидкість та прискорення точки.
12. Найпростіші рухи твердого тіла.
13. Швидкість та прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі.
14. Швидкість та прискорення точок тіла, що переміщується плоскопаралельно.
15. Закони механіки. Диференціальні рівняння руху вільної та невільної точки.
16. Поняття про геометрію мас. Приклади.
17. Метод кінестатички.
18. Головний вектор сил інерції.
19. Головний момент сил інерції.
20. Кінетичний момент при обертальному русі тіла.
21. Теорема про зміну головного вектора кількості руху та про рух центра мас матеріальної системи.
22. Теорема про зміну головного моменту кількості руху матеріальної системи.
23. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи.

4.2 Завдання розрахунково-графічної роботи (РГЗ) з теоретичної механіки

C1 Збіжна система сил

На схемах (рис 1.9–1.11) приведені варіанти підвісу ліхтаря вагою Q . Знайти зусилля у просторі ВС та тязі АВ. Дані для розрахунку приведені в таблиці 1.1.

Приклад. Дано: схема підвісу ліхтаря (рис. 1.8);
 $Q=165\text{H}$, $\alpha=60^\circ$; $\beta=45^\circ$; $\gamma=150^\circ$.

Розглянемо рівновагу блока D (рис 1.8). Зусилля в кабелі на якому висить ліхтар дорівнює вазі ліхтаря Q (нехтуємо тертям кабеля по блоку D). Відкидаємо тягу АВ та трос ВС і їх дію замінюємо

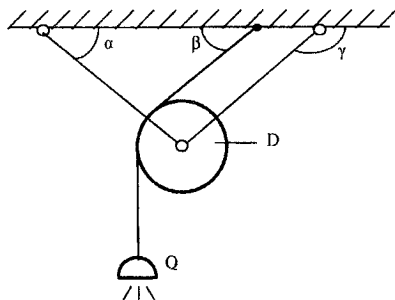


Рисунок 1.8

Таблиця 1.1

Номер варіанта	Q, Н	α , град	β , град	γ , град	Номер варіанта	Q, Н	α , град	β , град	γ , град
1	50	30	45	–	16	150	30	45	75
2	40	30	60	–	17	200	45	60	–
3	60	60	30	–	18	250	60	150	–
4	100	30	120	–	19	50	60	30	60
5	150	30	60	–	20	60	75	60	60
6	60	30	60	–	21	70	45	60	30
7	70	60	30	45	22	80	30	60	45
8	30	60	75	–	23	90	30	45	30
9	80	30	–	–	24	100	60	–	75
10	150	60	30	45	25	150	30	60	30
11	300	30	60	–	26	160	45	60	15
12	400	30	60	–	27	170	60	–	30
13	350	–	60	–	28	180	30	60	15
14	60	60	45	–	29	190	15	45	–
15	400	30	60	–	30	200	60	30	150

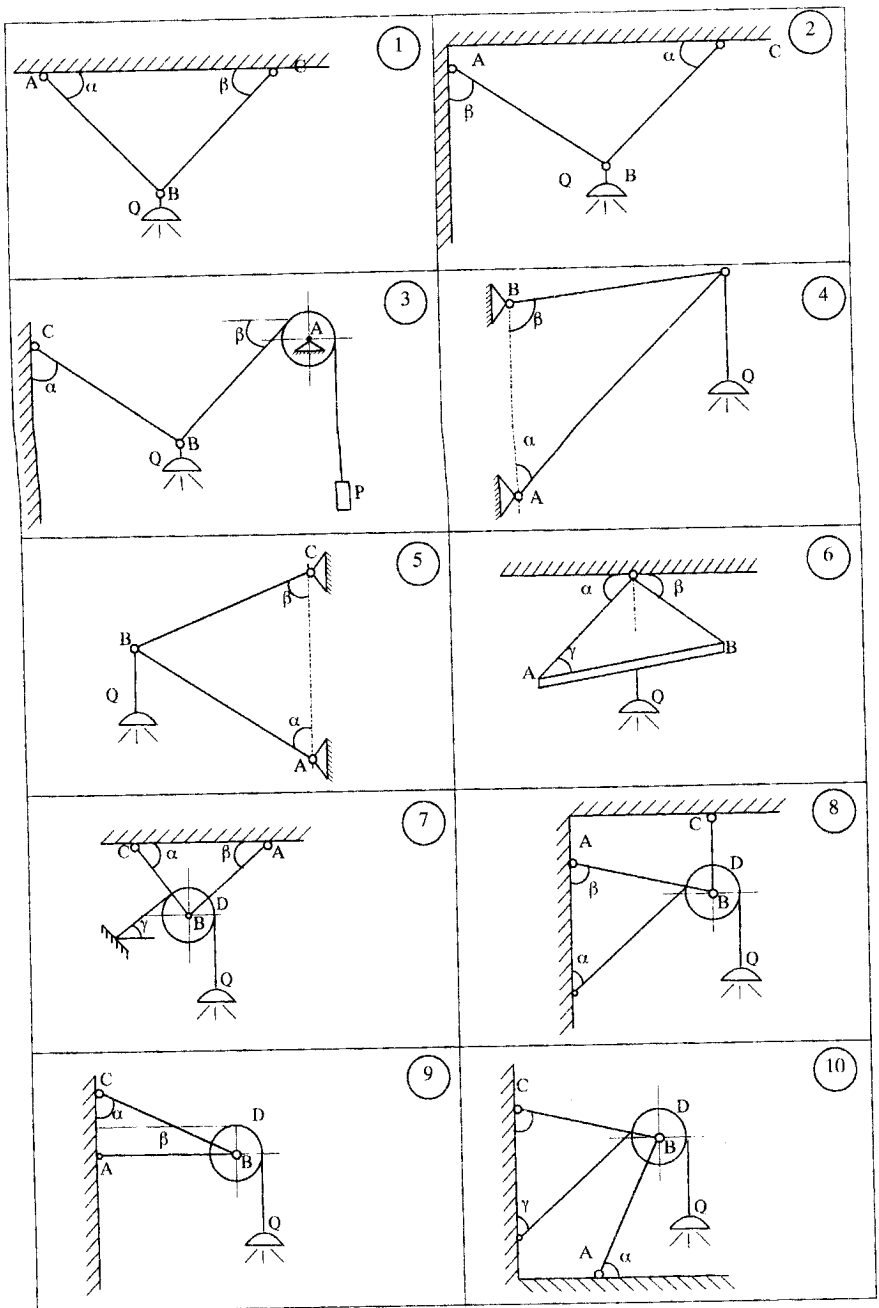


Рисунок 1.9

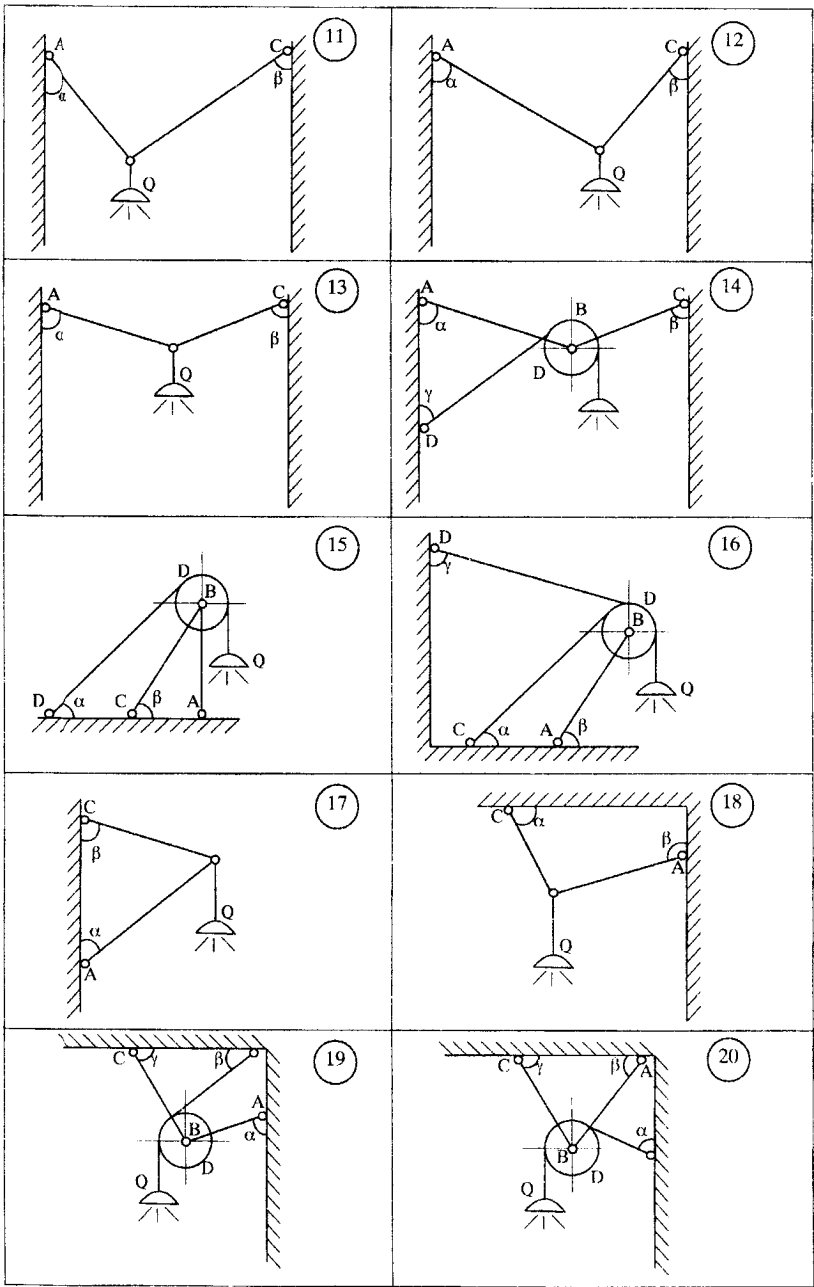


Рисунок 1.10

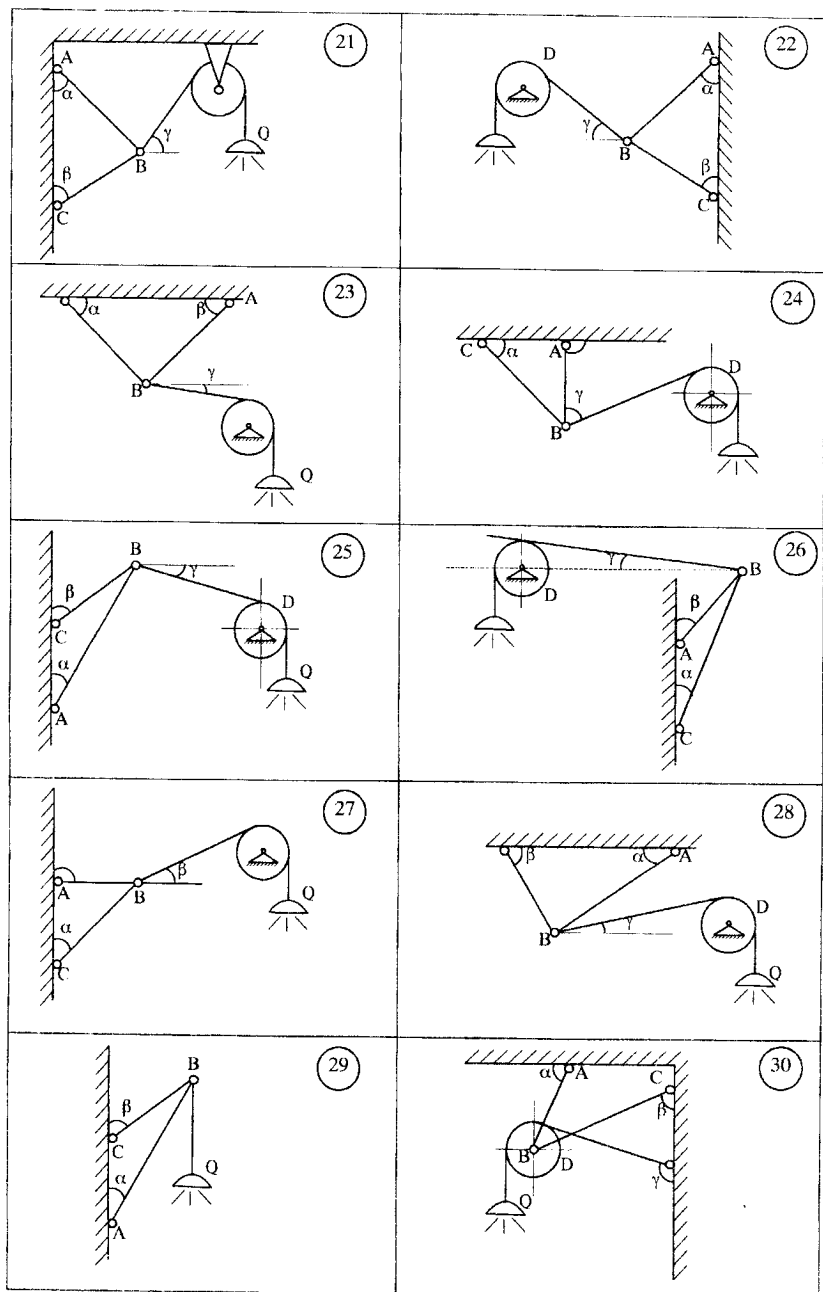


Рисунок 1.11

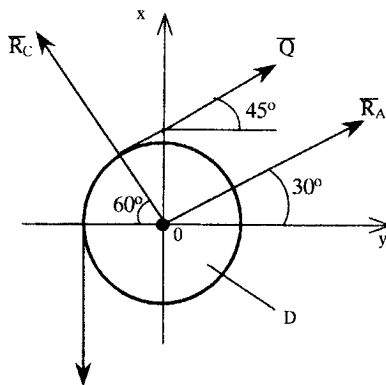


Рисунок 1.12

силами $\overline{R_A}, \overline{R_C}, \overline{Q}$ з якими вони діють на блок D.

При цьому враховуємо, що кабель та трос працюють тільки на розтяг, а тяга АВ (стержень) може як стискатись так і розтягуватись.

Під дією системи сил $\{\overline{Q}, \overline{R_C}, \overline{R_A}\}$ блок D знаходиться у рівновазі ($\{\overline{Q}, \overline{R_C}, \overline{R_A}\} \sim 0$). Запишемо умови (1.19) для сил що прикладені до блока D

$$\sum F_x = 0; \quad Q \cdot \cos 45^\circ + R_A \cdot \cos 30^\circ - R_C \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad -Q + Q \cdot \sin 45^\circ + R_C \cdot \sin 60^\circ + R_A \cdot \sin 30^\circ = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$R_A = Q \frac{1 - \sin 45 - \cos 45 \cdot \operatorname{tg} 60}{\sin 30 + \cos 30 \cdot \operatorname{tg} 60} =$$

$$= -76,40H$$

$$R_C = \frac{Q \cdot \cos 45 + R_A \cdot \cos 30}{\cos 60} = -100,30H$$

Відповідь: $R_A = -76,40H$; $R_C = 100,30H$.

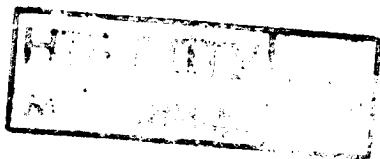
С.2 Плоска система паралельних сил

Балка (рис. 1.15–1.20) завантажена силою F, розподіленим навантаженням інтенсивністю q та парою сил з моментом M. Знайти реакції в'язей. Дані розрахунку приведені в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Номер варіанта	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	a, м	b, м	c, м	d, м
1	5	4	2	2	3	4	—
2	6	3	1	3	2	5	—
3	1	5	2	1	2	4	3
4	4	1	2	2	3	5	1
5	6	8	1	3	2	4	2
6	3	5	2	1	3	5	2
7	4	6	1	2	3	4	1
8	5	7	2	3	2	5	2
9	6	8	1	1	2	4	—
10	5	3	2	2	3	5	3
11	4	6	1	3	2	4	2
12	3	5	2	1	3	5	1
13	10	5	1	2	1	4	2
14	8	5	2	3	2	5	1
15	7	4	1	1	3	4	1
16	6	8	2	2	2	5	—
17	5	3	1	3	2	4	2
18	4	8	2	1	3	5	1
19	3	6	1	2	1	4	2
20	2	5	2	3	4	5	1
21	8	5	1	1	2	4	2
22	6	4	2	2	3	5	2
23	10	3	1	3	2	4	1
24	9	6	2	1	3	5	—
25	8	5	1	2	3	4	2
26	7	4	2	3	2	5	—
27	6	3	1	1	2	4	1
28	5	10	2	2	3	5	—
29	4	8	1	3	2	4	1
30	3	9	2	2	3	5	1

Приклад 1: Для балки (Рис.1.19) знайти опорні реакції якщо $F=3$ кН,
 $q=1$ кН/м.



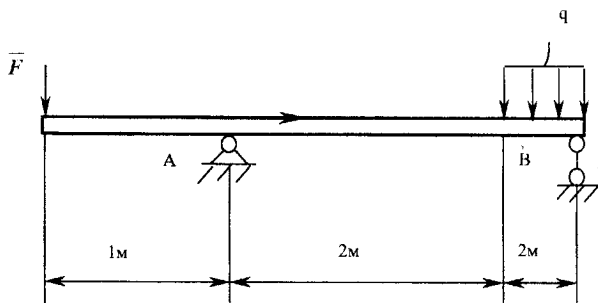


Рисунок 1.13

Розглянемо балку АВ, що знаходиться у рівновазі (спокої).

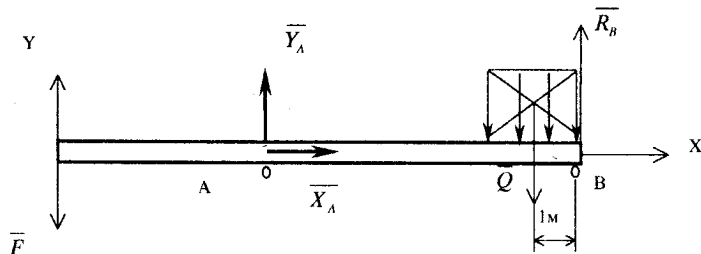


Рисунок 1.14

На балку діють активні сили: зосереджена сила \bar{F} та розподілене навантаження q , яке еквівалентне зосередженій силі \bar{Q}

$$Q = q \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН}$$

Дію циліндричного шарніра А та рухового В замінюємо їх реакціями $\bar{Y}_A, \bar{X}_A, \bar{R}_B$ (рис. 1.14). Для врівноваженої системи сил $\{\bar{F}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Q}, \bar{R}_B\} \approx 0$ запишемо умови рівноваги:

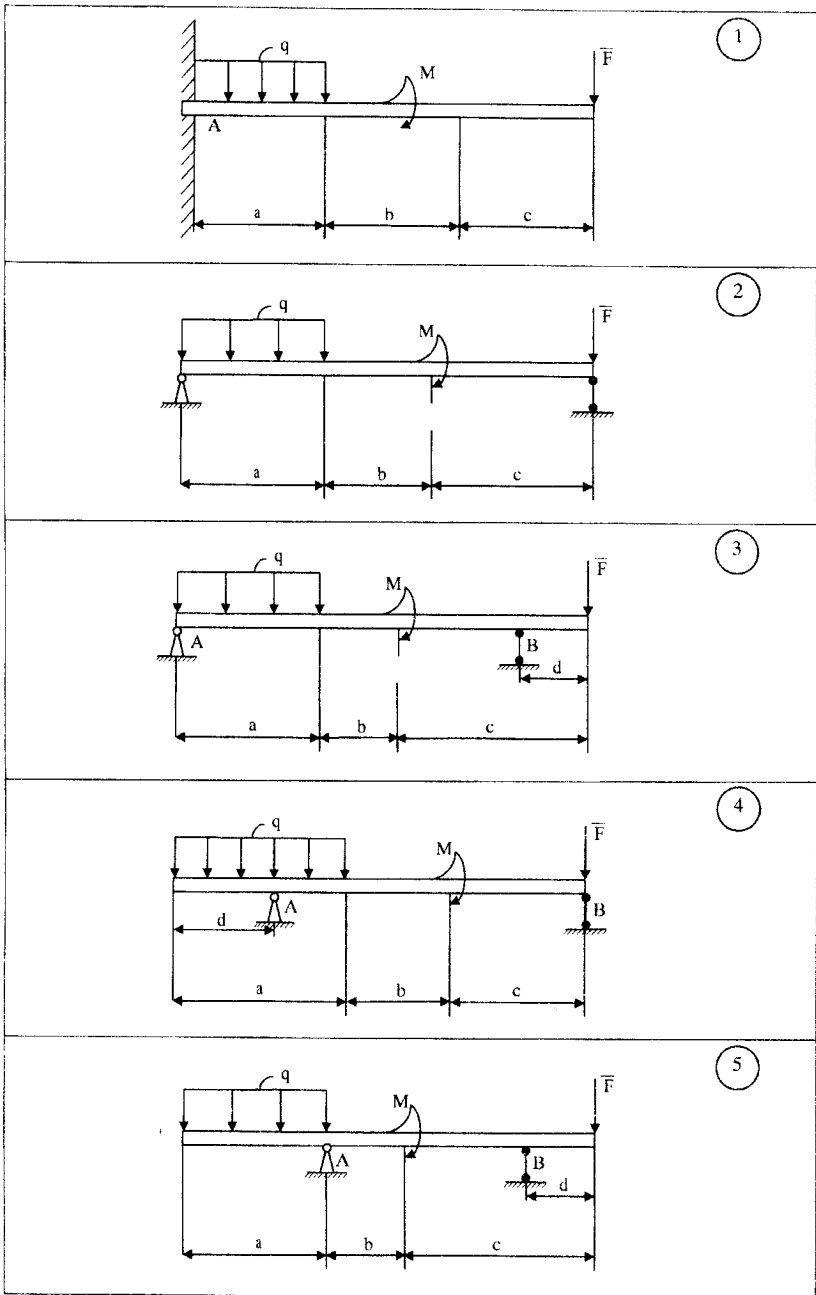
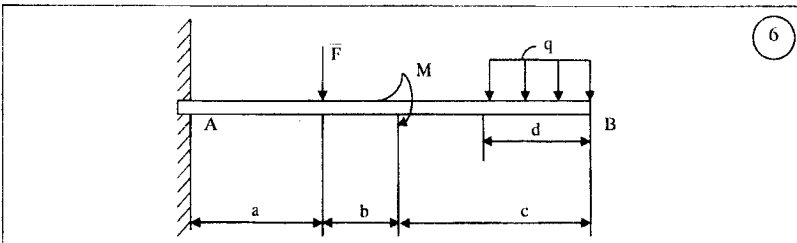
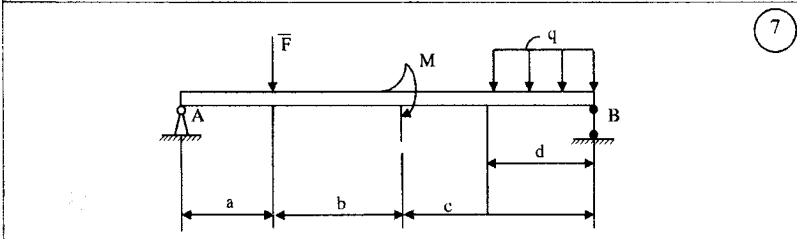


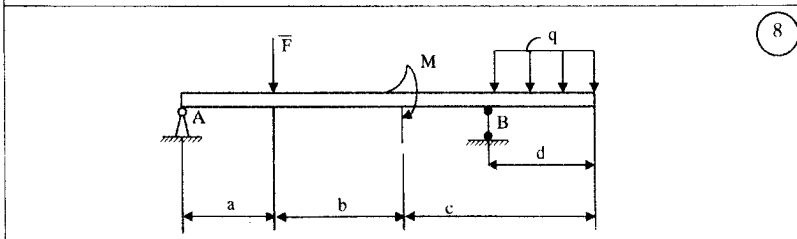
Рисунок 1.15



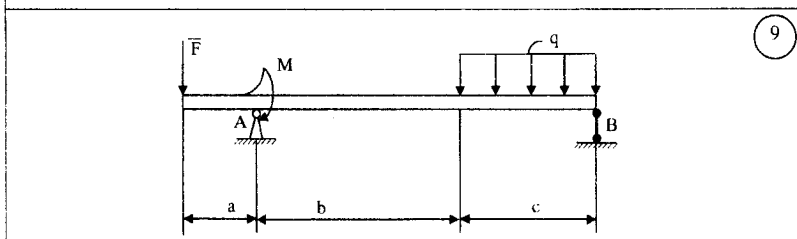
6



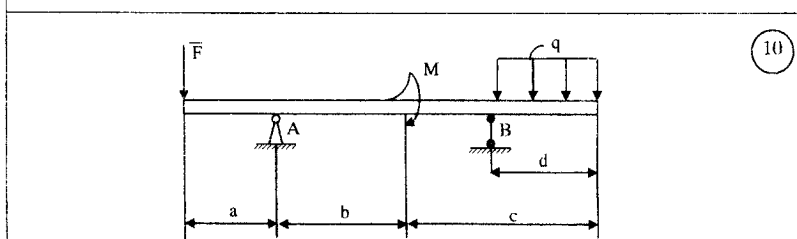
7



8



9



10

Рисунок 1.16

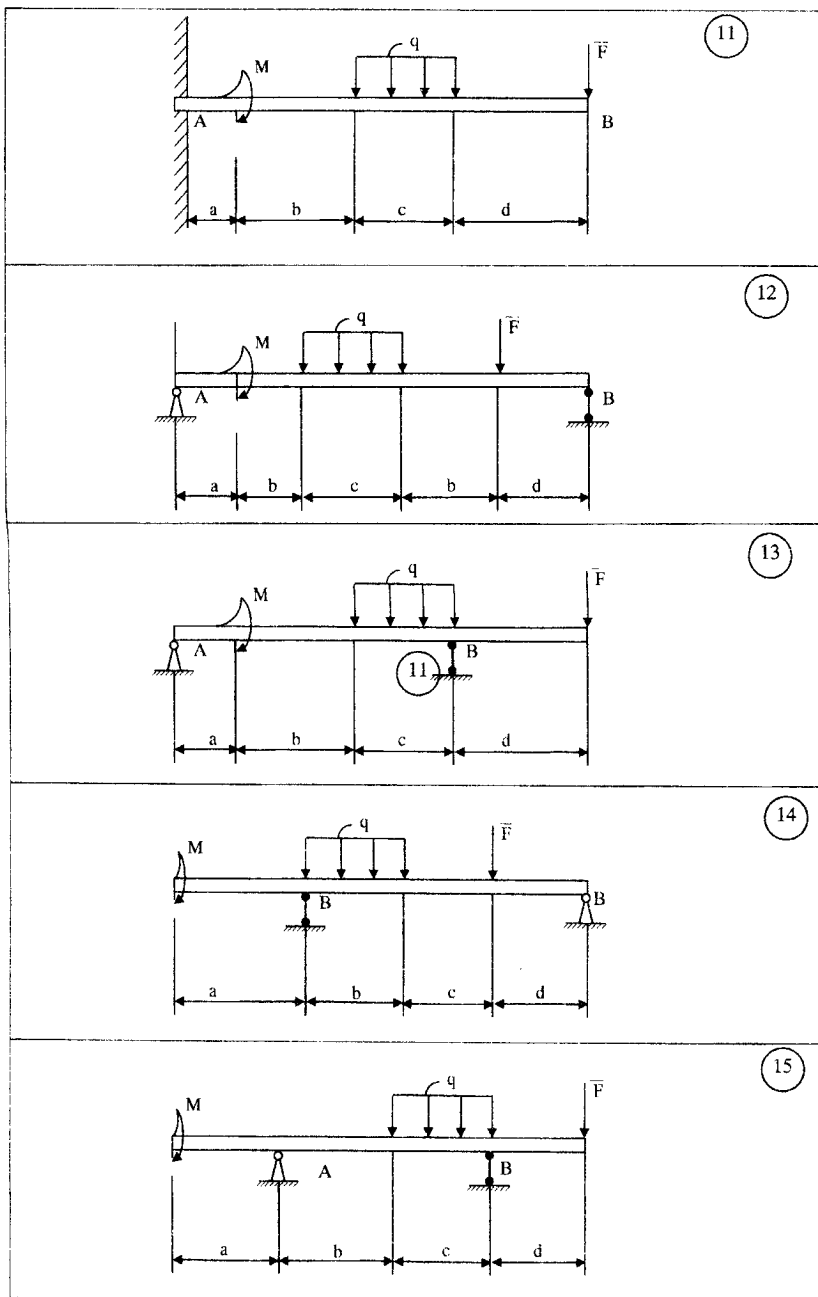


РИСУНОК 1.17

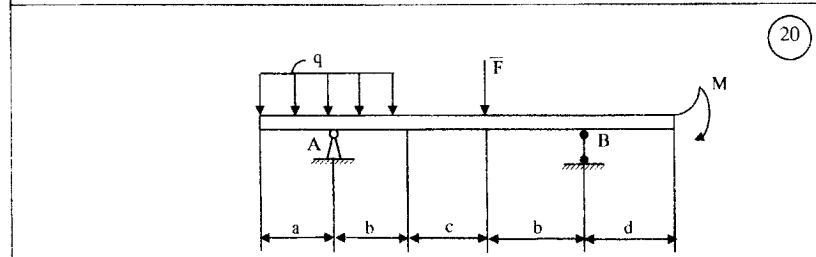
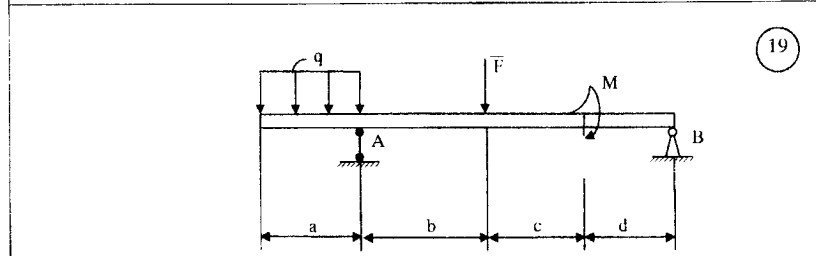
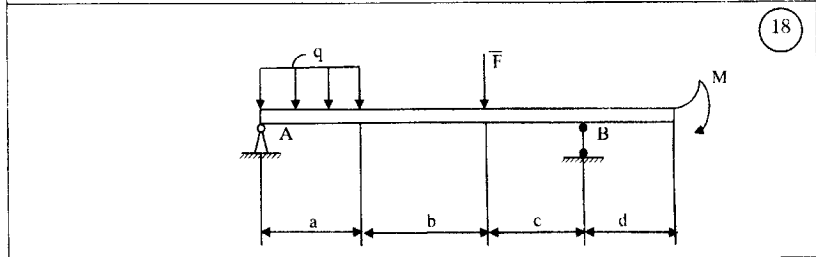
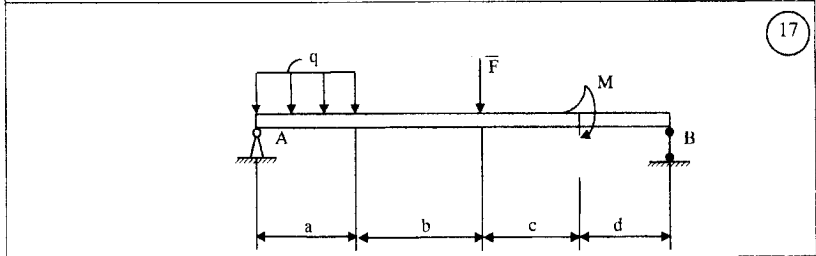
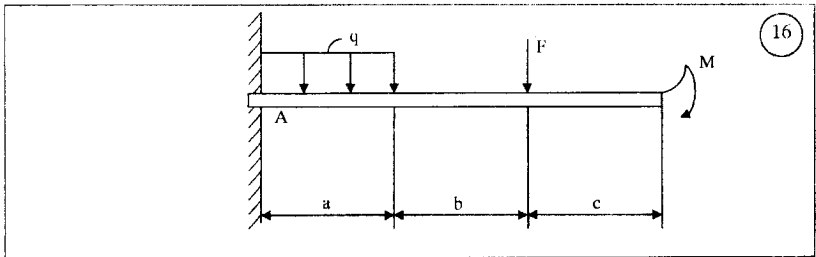


Рисунок 1.18

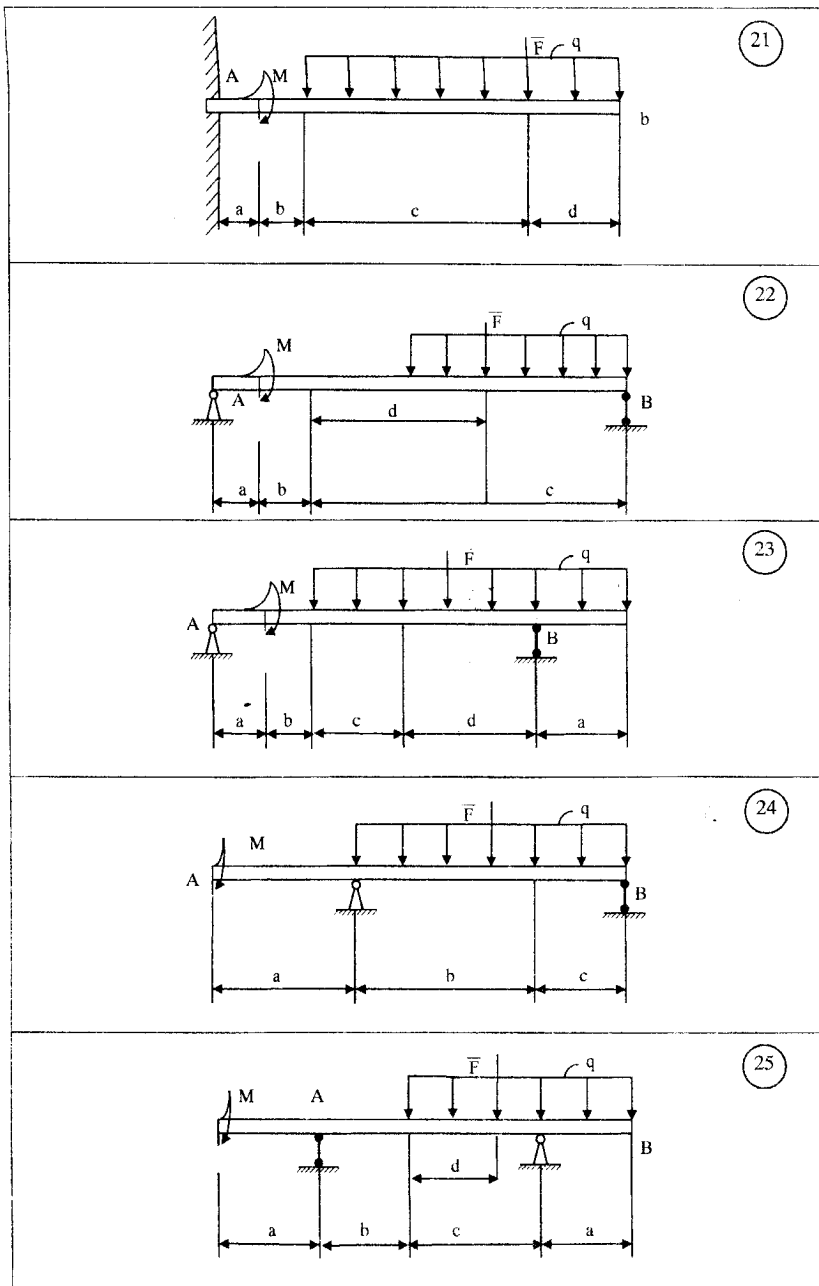


Рисунок 1.19

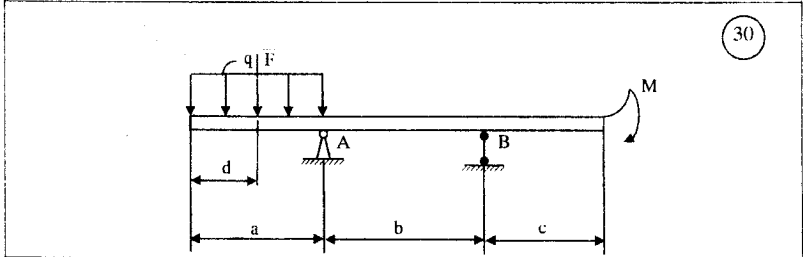
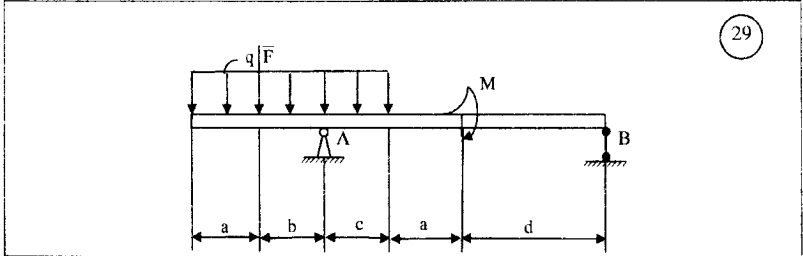
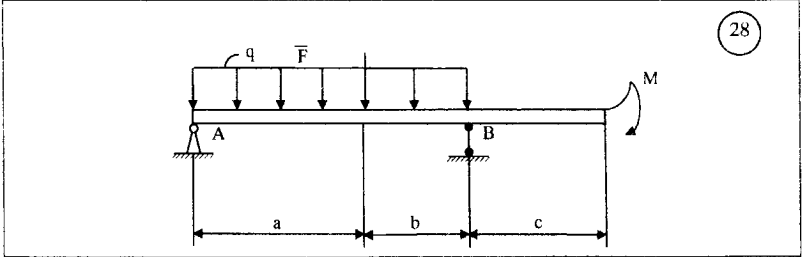
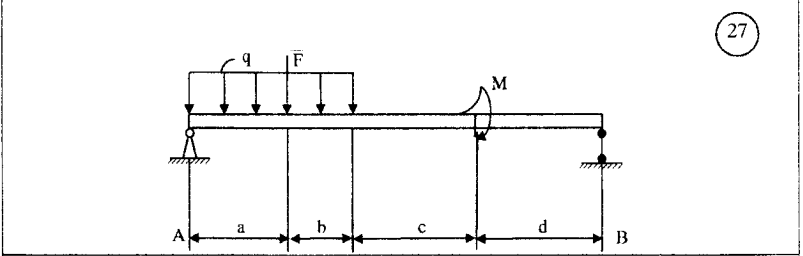
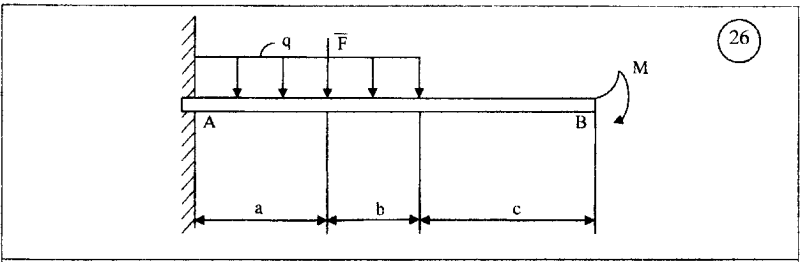


Рисунок 1.20

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; X_A = 0, \\ \sum m_A \bar{F} &= 0; F \cdot 1 - Q \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0, \\ \sum m_B \bar{F} &= 0; F \cdot 5 - Y_A \cdot 4 + Q \cdot 1 = 0,\end{aligned}$$

Тоді: $R_B = 0,75 \text{ кН}$, $Y_A = 4,25 \text{ кН}$, $X_A = 0$.

Достовірність отриманих результатів можна перевірити записавши ще одне рівняння, рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0; -F + Y_A - Q + R_B = 0, \\ -3 + 4,25 - 2 + 0,75 &= 0.\end{aligned}$$

Приклад 2: Для консольної балки (рис. 1.21) знайти реакції жорсткого зашпелення якщо $F = 2 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

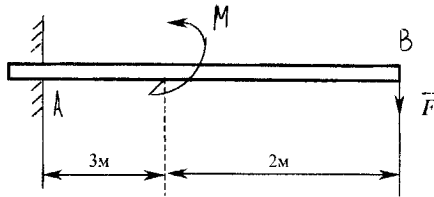


Рисунок 1.21

На балку AB діють: активна сила F , пара сил з моментом M ; її руху перешкоджає в'язь – жорстке зашпелення в точці A . Відкидаємо в'язь в точці A і на підставі аксіоми звільнення від в'язей її дію замінюємо силами \bar{X}_A, \bar{Y}_A та моментом M_A (рис.1.22).

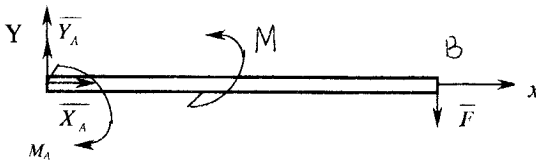


Рисунок 1.22

Запишемо умови рівноваги для системи сил $\{\bar{X}_A, \bar{Y}_A, M_A, M, \bar{F}\} \in 0$.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; X_A = 0; \\ \sum F_y &= 0; Y_A - F = 0; \\ \sum m_A \bar{F} &= 0; -M_A + M - F \cdot 5 = 0.\end{aligned}$$

Звідки знаходимо:

$$Y_A = F = 2кН$$

$$M_A = M - 5 \cdot F = 5 - 5 \cdot 2 = -5кН \cdot м.$$

Відповідь: $X_A = 0; Y_A = 2кН; M_A = -5кН \cdot м.$

К.1 Кінематика точки

Рух точки задається рівняннями $x = f_1(t)$ та $y = f_2(t)$ (табл.1.3).

Знайти рівняння траєкторії в координатній формі $y = f(x)$, визначити при $t_1 = t_1$ (табл.1.3) швидкість V_1 , прискорення a_1 точки і радіус кривизни ρ_1 у відповідній точці траєкторії.

Таблиця 1.3

№ варіанта	$x = f_1(t), м$	$y = f_2(t), м$	$t_1, с$
1	$3 \sin 2\pi$	$6 \cos \pi$	$1/6$
2	$3 \sin (\pi^2/3)$	$2 + \cos (\pi^2/3)$	1
3	$2 - \cos t^2$	$2 \sin t^2$	$\sqrt{\pi}/2$
4	$1 + 3 \cos \pi$	$4 - 3 \sin \pi$	$1/3$
5	$3t$	$-3/t$	3
6	$5 \cos (\pi/2)$	$-3 \sin (\pi/2)$	$0,5$
7	$3 \cos (0,5t^2) - 1$	$-3 \sin (0,5t^2) + 2$	$\sqrt{\pi}/\sqrt{2}$
8	$\sin t$	$1 - \cos^2 t$	$\pi/3$
9	$2 \sin (\pi/3)$	$5 \cos (\pi/3) - 2$	1
10	$2 + \cos t^2$	$3 \sin t^2$	$\sqrt{\pi}/\sqrt{3}$
11	$3 \cos t$	$4 \sin (2t)$	$\pi/3$
12	$1 + 3 \cos 2t$	$6 \sin t$	$\pi/3$
13	$2 \cos^2 t$	$1 + \sin t$	$\pi/3$
14	$4 + 5 \cos \pi$	$3 + 2 \sin \pi$	$\pi/6$
15	$\cos \pi$	$3 \sin (0,5\pi)$	$1/3$
16	$3 \sin \pi$	$4 \cos (2\pi)$	$1/3$
17	$4 \cos 2t$	$2 - 5 \sin 2t$	$\pi/6$
18	$5 \sin^2 \pi$	$4 \cos \pi$	$1/3$
19	$2 + 3 \sin 2\pi$	$1 - 3 \cos 2\pi$	$1/6$
20	$\cos \pi^2$	$4 - \sin \pi^2$	$1/2$
21	$2t + 2$	$2/(1+t)$	1
22	$4 - 3 \sin \pi$	$\cos \pi$	$1/3$
23	$6 - 2 \sin t^2$	$3 \cos t^2 + 1$	$\sqrt{\pi}/\sqrt{3}$
24	$4 \sin (\pi/3)$	$1 + 4 \cos (\pi/3)$	1
25	$5 - 3 \cos t$	$1 + 3 \sin t$	$\pi/3$
26	$4 - 5 \cos \pi$	$5 \sin \pi - 1$	$1/3$
27	$4 \sin (\pi^2)$	$3 \cos (\pi^2)$	$1/2$
28	$1 - 3 \cos \pi$	$3 \sin \pi + 2$	$1/3$

29	$5 \sin \pi t + 1$	$5 \cos \pi t$	$1/4$
30	$3t + 1$	$3/(3t+1)$	1

Приклад: Точка рухається в площині xu за законом:

$$x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) + 2(m),$$

$$y = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) - 3(m).$$

Знайти: $y = f(x), V_1, a_1, \rho_1$ при $t_1 = 1c$.

Параметричні рівняння руху $x = f_1(t)$ та $y = f_2(t)$ запишемо у вигляді:

$$\frac{x-2}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$$

$$\frac{y+3}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$$

Враховуючи, що $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) = 1$, з рівнянь руху отримаємо траєкторію руху точки в координатній формі:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

Будуємо траєкторію руху точки (еліпс) і знаходимо положення точки на траєкторії при $t_1 = 1c$ (рис. 1.23).

$$x_1 = 3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 = 3,5$$

$$y_2 = 4 \cos \frac{\pi}{6} - 3 = 0,46$$

Знаходимо швидкість точки.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pi + \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) m/c$$

$$V_y = \dot{y} = -\frac{4}{3}\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) m/c$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$V_{x1} = \pi \cos \frac{\pi}{6} = 2,72 m/c$$

$$\text{При } t_1 = 1c; \quad V_{y1} = -\frac{4}{3}\pi \sin \frac{\pi}{6} = -2,09 m/c$$

$$V_1 = \sqrt{2,72^2 + 2,09^2} = 3,43 m/c$$

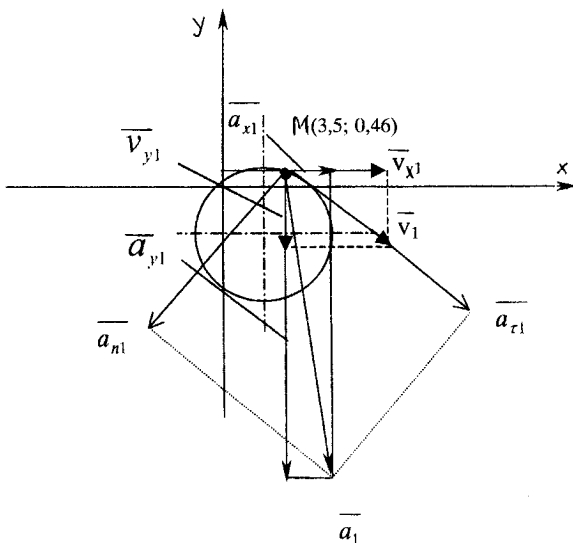


Рисунок 1.23

У масштабі швидкостей $\mu_v = 1\text{см}:1\text{м}/\text{с}$ показуємо V_{x1}, V_{y2}, V_1 (рис. 1.23).

Визначасмо прискорення точки.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x} = \pi \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) - \frac{\pi^2 t^2}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$$

$$a_y = \ddot{y} = -\frac{4}{3}\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) - \frac{4}{9}\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

$$a_{x1} = \pi \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^2}{3} \sin \frac{\pi}{6} = 1,08\text{м}/\text{с}^2$$

$$\text{При } t_1=1\text{с} \quad a_{y1} = -\frac{4}{3}\pi \sin \frac{\pi}{6} - \frac{4}{9}\pi^2 \cos \frac{\pi}{6} = -5,88\text{м}/\text{с}^2$$

$$a_1 = \sqrt{1,08^2 + 5,88^2} = 5,98\text{м}/\text{с}^2$$

У масштабі прискорень $\mu_a = 1\text{см}:1\text{м}/\text{с}^2$ показуємо a_{x1}, a_{y1}, a_1 (рис.1.23).

Радіус кривизни точки при $t_1=1\text{с}$

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}}$$

де a_{n1} - проекція прискорення точки на нормальну вісь.

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{r1}^2}$$

$$a_r = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y}}{V}$$

при $t_1 = 1c$

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{n1}}$$

$$a_{n1} = \sqrt{5,98^2 - 4,44^2} = 4,0 \text{ м/с}^2$$

$$\rho_1 = \frac{V^2}{a_{n1}} = \frac{3,43^2}{4} = 2,94 \text{ м}$$

К.2 Обертальний рух тіла

Механізм складається з ступеневого шківів 2, тіла 1 та шківів 3 (рис. 1.25–1.27). Тіло 1 рухається за законом $x = f(t)$. Визначити при $t_1 = 1c$ швидкість та прискорення точки A та M . Дані для розрахунку в табл. 1.4.

Таблиця 1.4

№ варіанта	$R_2, \text{м}$	$r_2, \text{м}$	$R_3, \text{м}$	$x=f(t), \text{м}$
1	0,1	0,05	0,3	$4t^2 + 3$
2	0,3	0,2	0,15	$5 \sin t^2$
3	0,4	0,3	0,1	$5t^3 + 3t^2$
4	0,3	0,15	0,2	$6 \cos t$
5	0,2	0,1	0,15	$6t^3$
6	0,3	0,15	0,2	$3t^2 - 4$
7	0,2	0,1	0,15	$2 \sin^2 t$
8	0,1	0,05	0,3	$4 \cos t^2$
9	0,2	0,1	0,3	$5 \sin 4t^2$
10	0,3	0,2	0,15	$7t^3 + 1$
11	0,3	0,15	0,2	$8t^2 - 4t$
12	0,2	0,1	0,3	$4 + \sin t$
13	0,1	0,05	0,3	$8 - \cos t^2$
14	0,3	0,2	0,05	$8t^2 - 3t$
15	0,2	0,15	0,3	$3t^3 - t$
16	0,4	0,35	0,05	$16t^3 - 8t^2$
17	0,2	0,1	0,6	$7 - \cos t^2$
18	0,3	0,2	0,05	$5t^4 + 3t$
19	0,2	0,1	0,05	$6t^3 - 3t^2$
20	0,6	0,45	0,1	$7t^2 - 2t$
21	0,6	0,2	0,1	$8t$
22	0,2	0,15	0,3	$3t^3 - 2t$

23	0,1	0,05	0,2	$3 + \sin 2t$
24	0,3	0,2	0,25	$6t + 8$
25	0,2	0,1	0,3	$5t^2 - 7$
26	0,3	0,2	0,1	$7t^3 - 3t$
27	0,2	0,15	0,3	$8t^2 + t$
28	0,1	0,05	0,2	$9t^4 - 7t^3$
29	0,3	0,25	0,15	$10t + 2$
30	0,2	0,1	0,3	$11t^2 - 4t$

Приклад: для механізму (рис.1.24) знайти швидкість і прискорення точок A і M при $t_1 = 1$ с якщо тіло 2 рухається за законом $\varphi_2 = 8t^3 - 3t^2$ ($R_2 = 0,1$ м; $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,15$ м).

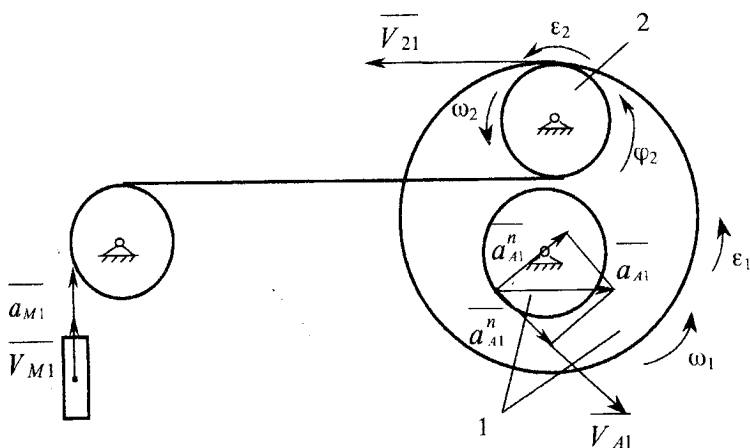


Рисунок 1.24

Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення тіла 2.

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = 24t^2 - 6t$$

$$\epsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = 48t - 6$$

При $t_1 = 1$ с

$$\omega_{21} = 24 - 6 = 18 \frac{1}{\text{с}}$$

$$\epsilon_{21} = 48 - 6 = 42 \frac{1}{\text{с}^2}$$

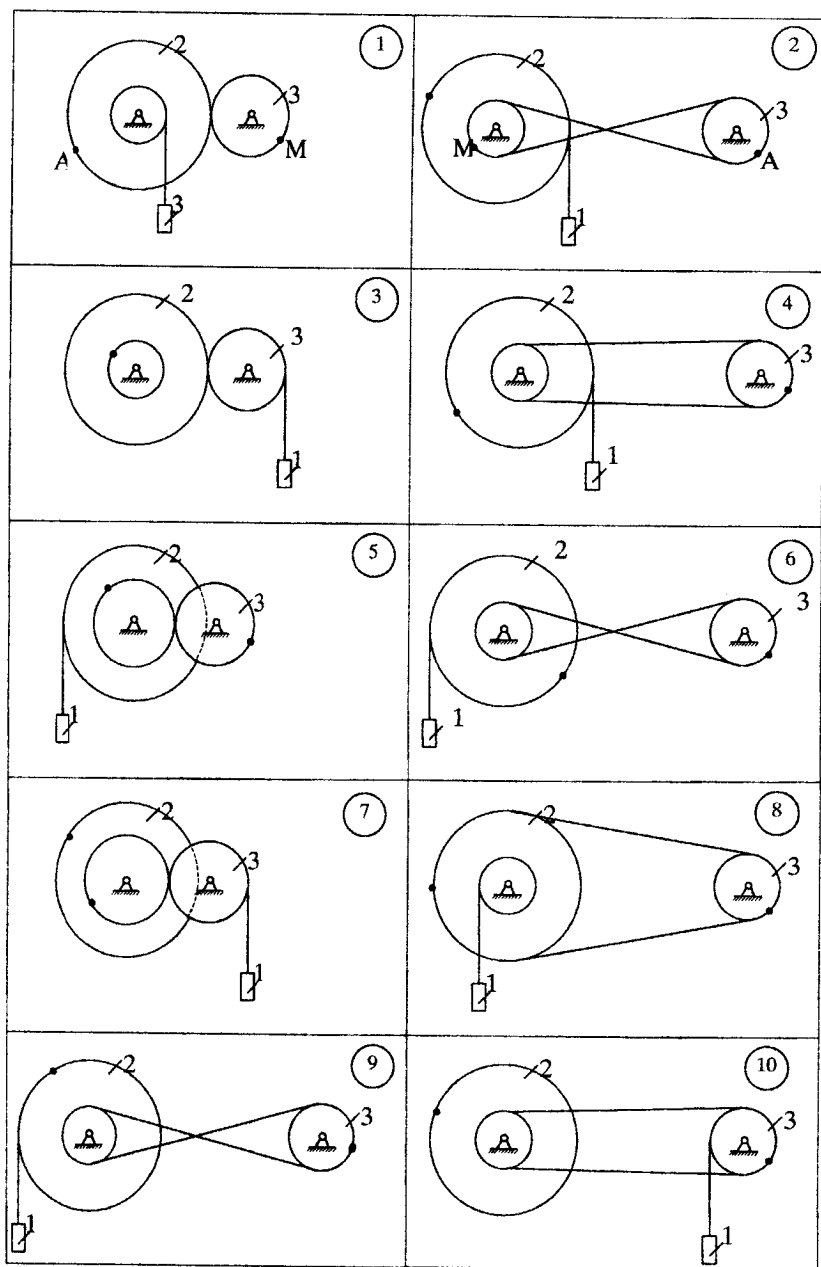


Рисунок 1.25

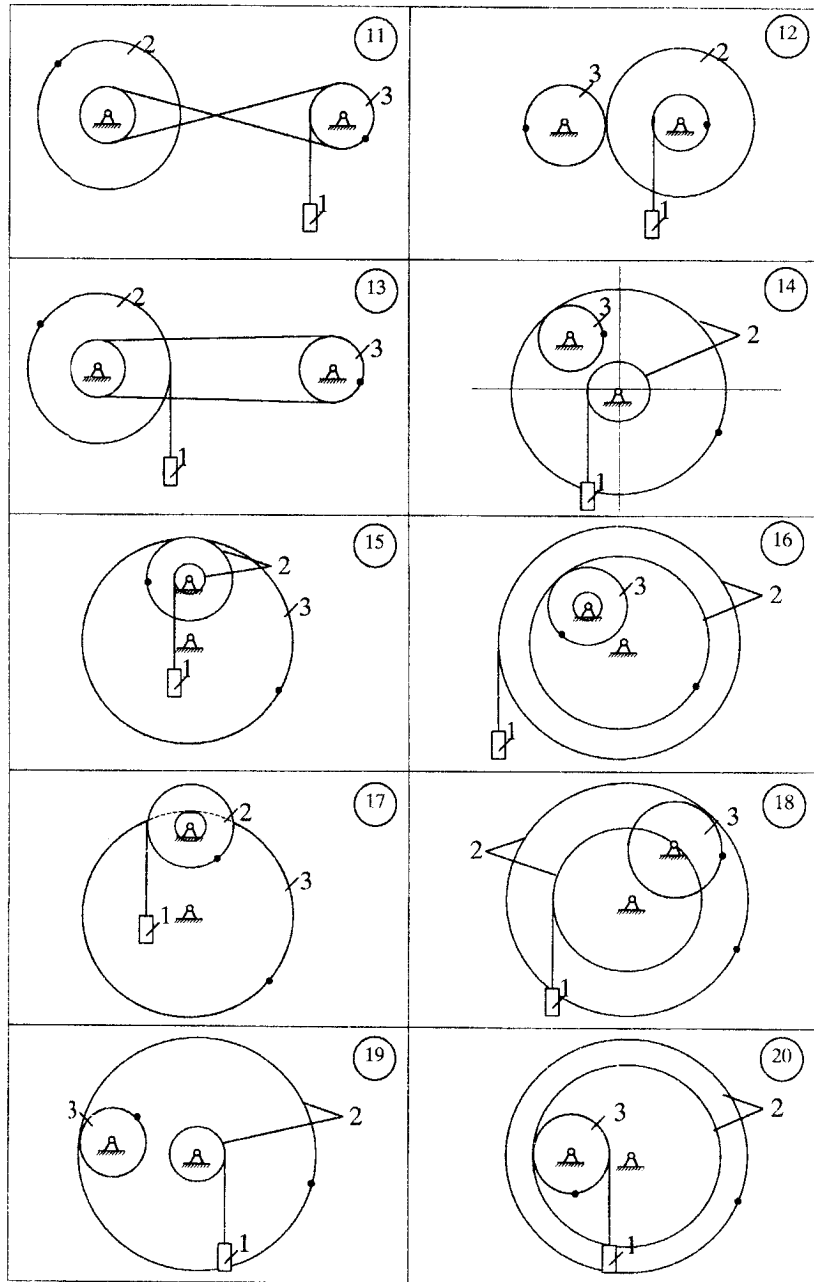


Рисунок 1.26

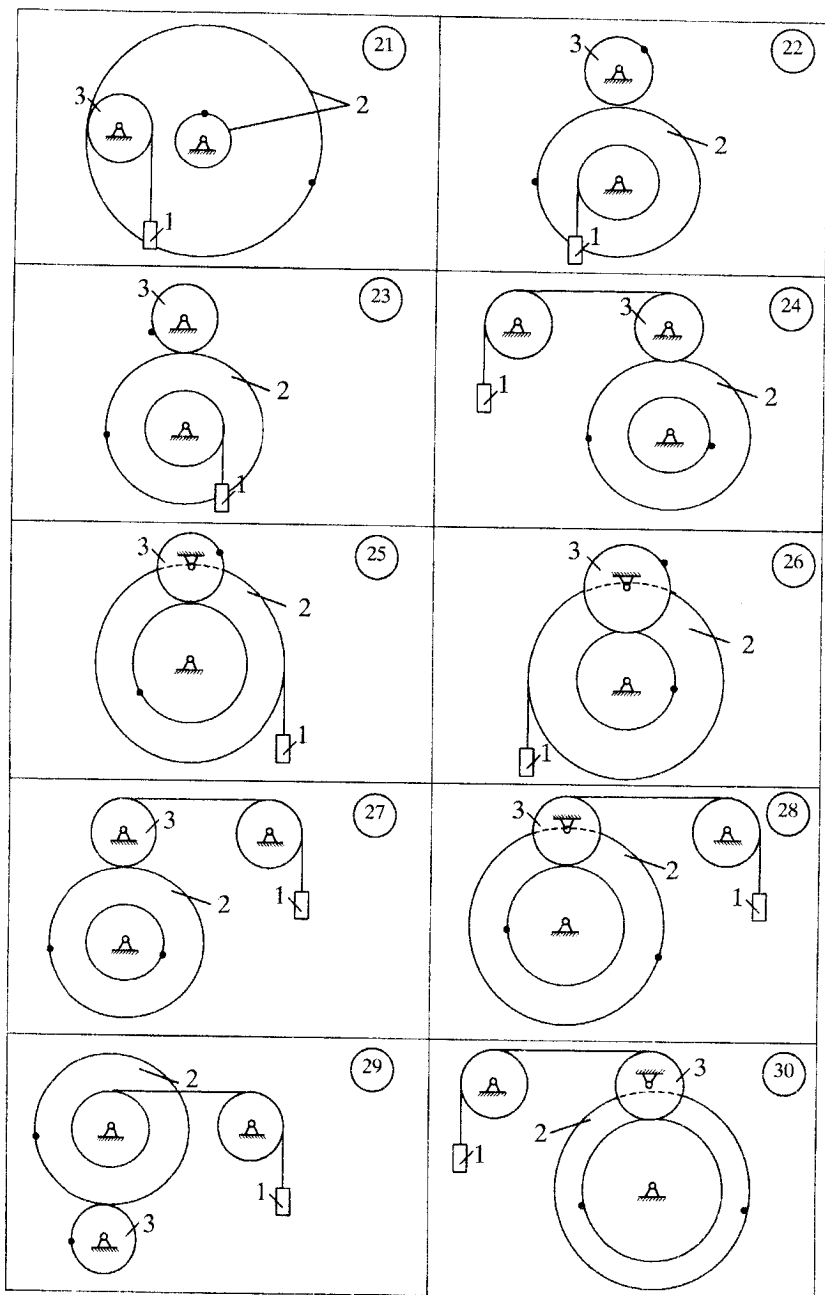


Рисунок 1.27

Знайдемо швидкість V_{21} точок контакту тіл 2 та 1.

$$V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot R_1$$

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = 0,25\omega_2$$

Визначимо швидкість точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = 0,25 \cdot 0,15 \cdot \omega_2 = 0,0375 \cdot \omega_2$$

Прискорення точки A .

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^r}$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_1} = \omega_1^2 r_1 = 9,375 \cdot \omega_2^2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$$

$$a_A^r = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot r_1 = 0,25 \cdot \varepsilon_2 \cdot r_1 = 0,0375 \cdot \varepsilon_2$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0,25 \cdot \varepsilon_2$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^r)^2}$$

При $t_1 = 1 \text{ с}$; $V_{A1} = 0,0375 \cdot \omega_{21} = 0,0375 \cdot 1,8 = 0,675 \text{ м/с}$

$$a_{A1}^n = 9,375 \cdot \omega_{21}^2 \cdot 10^{-3} = 9,375 \cdot 1,8^2 \cdot 10^{-3} = 3,038 \text{ м/с}^2$$

$$a_{A1}^r = 0,0375 \cdot \varepsilon_{21} = 0,0375 \cdot 42 = 1,575 \text{ м/с}^2$$

$$a_{A1} = \sqrt{3,038^2 + 1,575^2} = 3,42 \text{ м/с}^2$$

Визначимо швидкість та прискорення точки M .

$$V_M = V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = 0,1 \cdot \omega_2$$

$$a_M = \frac{dV_M}{dt} = 0,1 \cdot \varepsilon_2$$

При $t_1 = 1 \text{ с}$;

$$V_{M1} = 0,1 \cdot \omega_{21} = 1,8 \text{ м/с}$$

$$a_{M1} = 0,1 \cdot \varepsilon_{21} = 4,2 \text{ м/с}^2$$

Покажуємо на рис. 1.24 вектори $\overline{V_{A1}}, \overline{a_{A1}^n}, \overline{a_{A1}^r}, \overline{a_{A1}}, \overline{V_{M1}}, \overline{a_{M1}}$.

к.3 Плоский рух твердого тіла

Визначити для заданого положення механізму швидкість та прискорення точок A і B , кутову швидкість та кутове прискорення ланки AB . Схеми механізмів приведені на рис.1.29–1.31, а дані для розрахунку приведені в табл. 1.5.

Таблица 1.5

№ вар.	r,м	l,м	ω ,1/с	ξ ,1/с ²	v,м/с
1	0,1	0,6	10	0	-
2	0,3	0,4	12	0	-
3	0,2	0,3	15	0	-
4	0,1	0,3	18	0	-
5	0,3	0,2	10	0	-
6	0,1	0,8	11	0	-
7	0,2	0,3	12	0	-
8	0,3	0,6	13	0	-
9	0,2	0,4	14	0	-
10	0,1	0,6	15	0	-
11	0,3	0,6	16	0	-
12	0,2	0,4	17	0	-
13	0,1	0,2	18	0	-
14	0,2	0,4	-	-	4
15	0,3	0,6	-	-	6
16	0,3	0,45	-	-	8
17	0,2	0,3	6	0	-
18	0,1	0,25	7	2	-
19	0,2	0,3	8	4	-
20	0,3	0,5	9	6	-
21	0,3	0,6	21	8	-
22	0,2	0,7	22	10	-
23	0,1	0,3	23	12	-
24	0,3	0,5	24	-	-
25	0,2	0,9	25	-	-

26	0,1	0,3	11	-	-
27	0,2	0,6	12	2	-
28	0,3	0,9	13	-	-
29	0,2	0,6	14	-	-
30	0,1	0,3	10	-	-

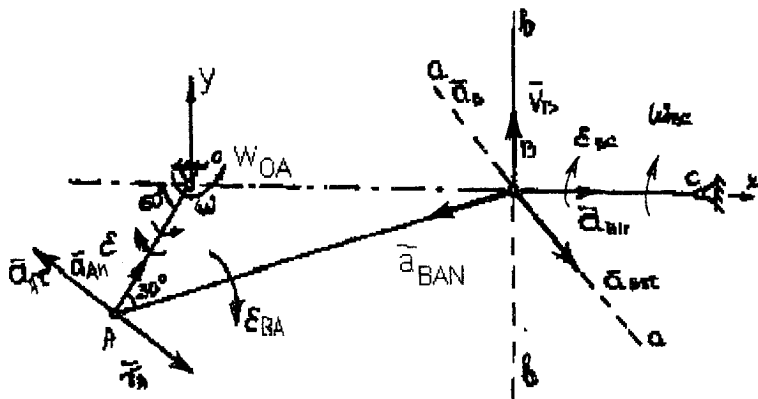


Рисунок 1.28

Приклад: Для механізму, зображеного на рис. 1.28, знайти швидкість і прискорення точок А, В та кутову швидкість, кутове прискорення ланок АВ і ВС. Прийняти: $OA = 0.3$ м; $AB = 0.6$ м; $BC = 0.5$ м; $\omega = 0.5$ 1/с; $\xi = 3$ 1/с².

Визначимо швидкості точок А, В та кутові швидкості ланок АВ і ВС.

$$V_A = \omega \cdot OA = 0.5 \cdot 0.3 = 1.5 \text{ м/с.}$$

Швидкість точки А направлена перпендикулярно до ланки ОА у напрямку кутової швидкості ω . По лінії, що перпендикулярна до ланки ВС, буде направлена швидкість точки В (лінія в-в, рис. 1.28). Тоді миттєвий центр швидкостей ланки АВ буде в точці О.

$$\omega = \frac{VA}{AO} = \frac{VB}{BO};$$

$$OA = OB.$$

$$V_B = V_A = 1.5 \text{ м/с, } \omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = 5 \text{ 1/с}$$

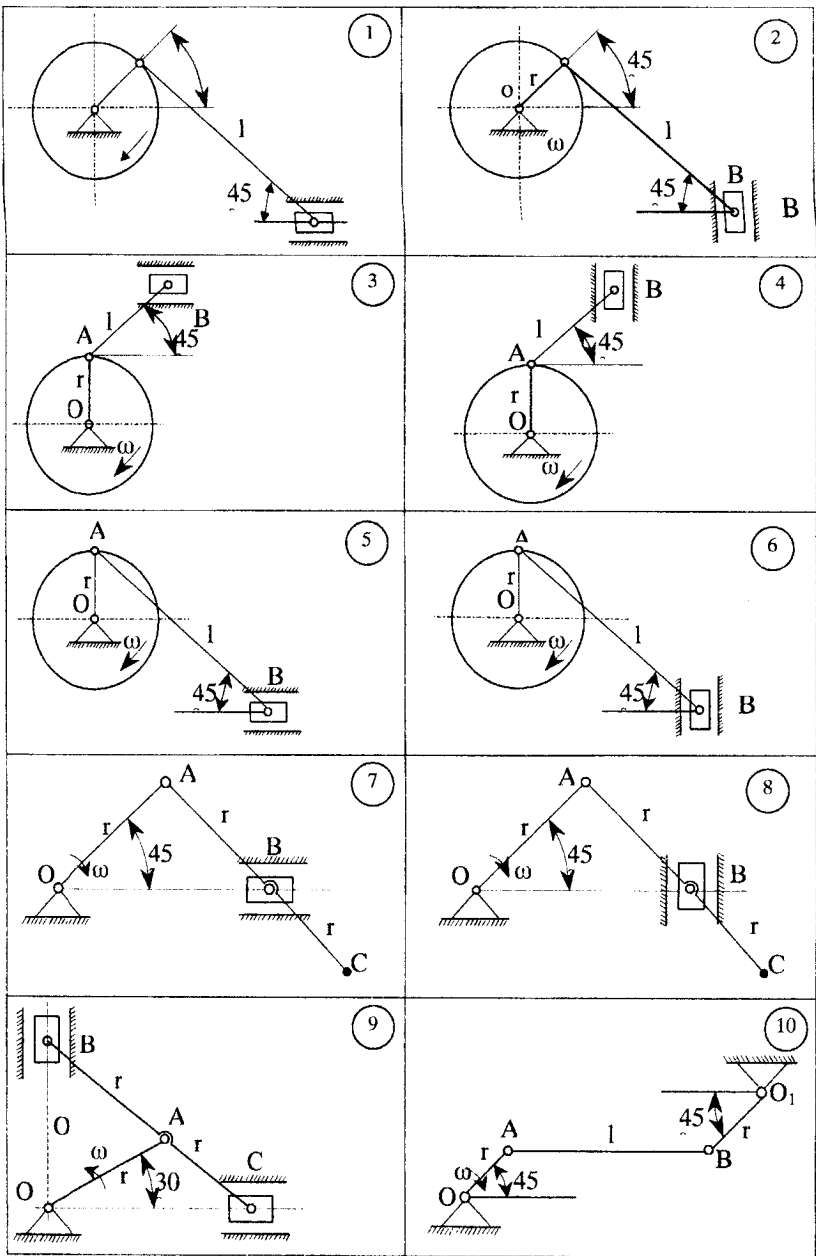


Рисунок 1.29

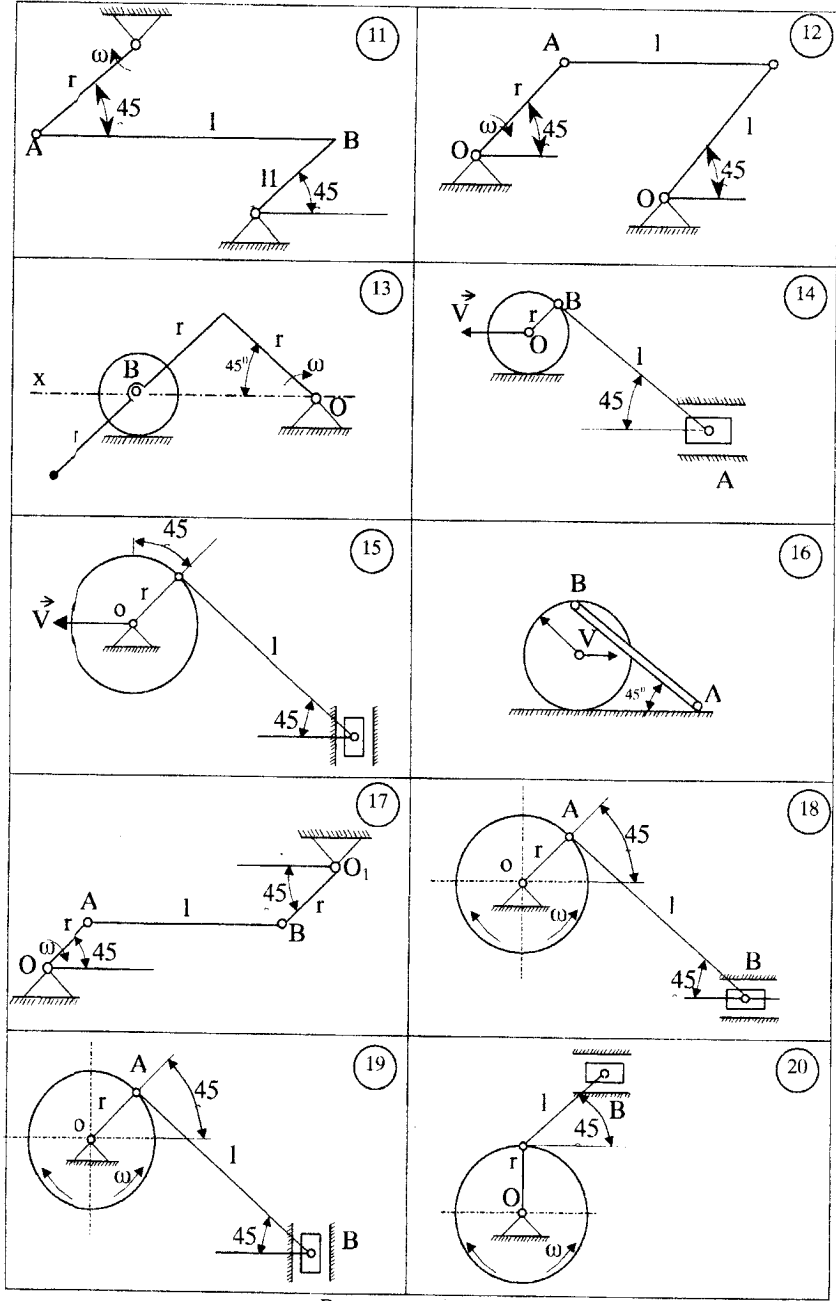


Рисунок 1.30

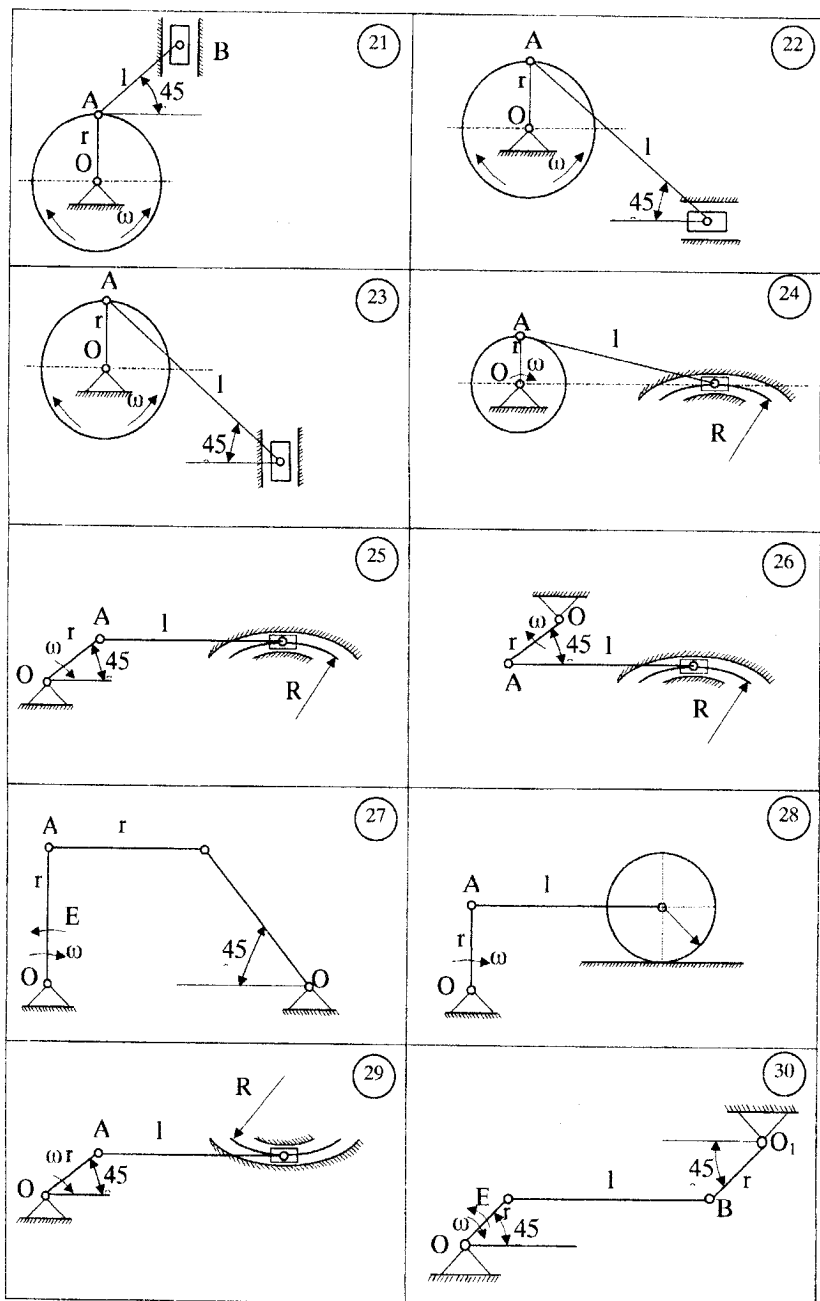


Рисунок 1.31

Напрямок швидкості точки В визначається напрямком кутової швидкості ω_{AB} (рис. 1.31). Тоді :

$$\omega_{CB} = \frac{v_B}{BC} = \frac{1,5}{0,5} = 3 \frac{1}{c}.$$

Прискорення точок А;В та кутові прискорення ланок АВ та ВС.

$$\overline{a_A} = \overline{a_{An}} + \overline{a_{A\tau}}$$

$$a_{An} = \omega^2 \cdot OA = 5^2 \cdot 0,3 = 7,5 \text{ м/с}^2$$

$$a_{A\tau} = \xi \cdot OA = 3 \cdot 0,3 = 0,9 \text{ м/с}^2$$

$$a_A = \sqrt{a_{An}^2 + a_{A\tau}^2} = \sqrt{7,5^2 + 0,9^2} = 7,55 \text{ м/с}^2$$

Прийmemo точку А за полюс. Тоді розглядаючи рух ланки АВ, запишемо:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}} \quad (1.20)$$

де $\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}}$;

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BAN}} + \overline{a_{BA\tau}} \quad (1.21)$$

$$a_{BAN} = \omega_{BA}^2 \cdot AB = 5^2 \cdot 0,6 = 15 \text{ м/с}^2$$

Прискорення $\overline{a_{BAN}}$ направлене по прямій АВ від точки В до полюса, а прискорення $\overline{a_{BA\tau}}$ - перпендикулярно до прямої АВ (лінія а-а, рис. 1.28).

За належністю точки В ланці ВС маємо:

$$\overline{a_B} = \overline{a_{Bn}} + \overline{a_{B\tau}} \quad (1.22)$$

$$a_{Bn} = \omega_{CB}^2 \cdot BC = 3^2 \cdot 0,5 = 4,5 \text{ м/с}^2$$

Прискорення $\overline{a_{B\tau}}$ направлене по прямій В-В.

Вираз (1.20), враховуючи (1.21) та (1.22), запишеться:

$$\overline{a_{Bn}} + \overline{a_{B\tau}} = \overline{a_{An}} + \overline{a_{A\tau}} + \overline{a_{BAN}} + \overline{a_{BA\tau}} \quad (1.23)$$

Спроєкуємо векторне рівняння (1.23) на осі Х та Y.

Вісь Х:

$$a_{Bn} = a_{An} \cdot \cos 60^0 - a_{A\tau} \cdot \sin 60^0 - a_{BAN} \cdot \cos 30^0 + (\overline{a_{BA\tau}})_x \quad (1.24)$$

Вісь Y:

$$(\overline{a_{B\tau}})_y = a_{An} \cdot \sin 60^0 - a_{A\tau} \cdot \cos 60^0 - a_{BAN} \cdot \sin 30^0 + (\overline{a_{BA\tau}})_y \quad (1.25).$$

У виразі (1.24) та (1.25) дві невідомі $\overline{a_{BA\tau}}$ та $\overline{a_{B\tau}}$.

$$(\overline{a_{BA\tau}})_x = a_{Bn} + a_{A\tau} \cdot \sin 60^0 + a_{BAN} \cdot \cos 30^0 - a_{An} \cdot \cos 60^0 = 4,5 + 0,9 \cdot \sqrt{3}/2 + 1,5 \cdot \sqrt{3}/2 - 7,5 \cdot 0,5 = 14,52$$

$$(\overline{a_{BA\tau}})_x = a_{Bn} + a_{A\tau} \cdot \sin 60^0 + a_{BAN} \cdot \cos 30^0 - a_{An} \cdot \cos 60^0 = 4,5 + 0,9 \cdot \sqrt{3}/2 + 1,5 \cdot \sqrt{3}/2 - 7,5 \cdot 0,5 = 14,52$$

$$(\overline{a_{BA\tau}})_x = a_{BA\tau} \cdot \cos 60^0 = 14.52$$

$$a_{BA\tau} = \frac{14.5^2}{\cos 60^0} = 29.04 \text{ м/с}^2$$

$$\begin{aligned} (\overline{a_{B\tau}})_y &= a_{An} \cdot \sin 60^0 + a_{A\tau} \cdot \cos 60^0 - a_{BA\tau} \cdot \sin 30^0 + a_{BA\tau} \cdot \cos 30^0 = \\ &= 7.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0.9 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{2} - 29.04 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24.56 \text{ м/с}^2 \end{aligned}$$

Кутові прискорення ланок АВ та ВС.

$$E_{BA} = \frac{a_{BA\tau}}{AB} = \frac{29.04}{0.6} = 48.4 \frac{1}{c^2}$$

$$E_{BC} = \frac{a_{B\tau}}{BC} = \frac{24.56}{0.5} = 49.12 \frac{1}{c^2}$$

Напрямок прискорень E_{BA} та E_{CB} визначається напрямком векторів $\overline{\alpha_{B\tau}}$ і $\overline{\alpha_{BA\tau}}$.

Д.1 Дослідження руху матеріальної точки

Точка масою m (рис.1.32) рухається від точки А до точки В (парні варіанти) або на ділянці ВД (непарні варіанти).

На початку руху (точки А-парні варіанти; точка В-непарні варіанти) матеріальна точка має швидкість V_0 . Під час руху, на ділянці АВ на точку діє постійна сила P та вага точки, а на ділянці ВД точка рухається під дією ваги точки. Дані для розрахунку та величини, що потрібно знайти приведені в таблиці 1.6.

Таблиця 1.6

N вар	m, кг	V_0 , м/с	α , град	β , град	d, м	AB, м	P, Н	знайти
1	4	2	30	30	-	-	-	V_C
2	3	0.5	105	-	-	4	15	V_B
3	2	4	60	-	4	-	-	β
4	1	13	70	-	-	5	10	V_B

5	1	2	105	60	-	-	-	β
6	2	3	120	-	-	6	15	V _B
7	3	10	60	-	5	-	-	V _C
8	4	19	75	-	-	7	20	V _B
9	5	8	105	30	-	-	-	D
10	1	7	75	-	-	8	15	V _B
11	2	6	60	-	6	-	-	V _C
12	3	5	150	-	-	9	25	V _B
13	4	4	30	90-	-	-	-	V _C
14	5	3	120	-	-	10	15	V _B
15	1	10	30	-	7	-	-	β
16	2	6	105	-	-	11	10	V _B
17	3	7	60	30	-	-	-	V _C
18	4	8	150	-	-	12	25	V _B
19	5	9	30	-	8	-	-	β
20	1	10	75	-	-	13	15	V _B
21	2	2	60	45	-	-	-	V _C
22	3	3	105	-	-	14	10	V _B
23	4	5	30	-	9	-	-	β
24	5	6	120	-	-	15	25	V _B
25	1	7	60	45	-	-	-	V _C
26	2	8	150	-	-	16	10	V _B
27	3	9	30	-	10	-	-	β
28	4	10	135	-	-	17	25	V _B
29	5	11	60	45	-	-	-	V _C
30	6	12	105	-	-	18	15	V _B

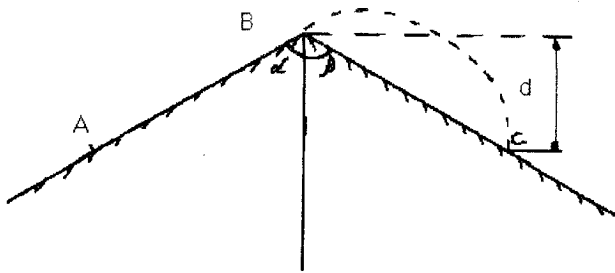


Рисунок 1.32

Приклад . Матеріальна точка m рухається під дією сили \vec{F} на ділянці AB (рис.1.33). Знайти час τ руху точки на відстані DC, якщо:

$m = 5 \text{ кг}$, $V_A = 3 \text{ м/с}$, $F = 30 \text{ Н}$, $d = 4 \text{ м}$, $AB = 11 \text{ м}$.

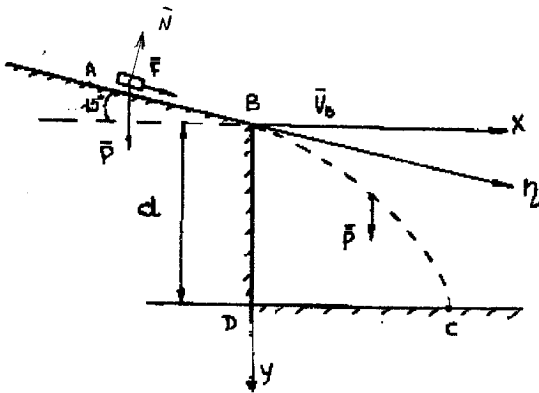


Рисунок 1.33

Точка на ділянці AB рухається під дією сили ваги P та сили F .

Запишемо диференціальне рівняння руху точки в проекціях на вісь η .

$$m\ddot{\eta} = F + P \sin 15^\circ$$

$$\ddot{\eta} = \frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ$$

При $t = 0$; $\dot{\eta} = V_A$; $\eta = 0$

При $t = \tau$; $\dot{\eta} = V_B$; $\eta = AB$.

Інтегруємо диференціальне рівняння руху точки.

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^\circ$$

$$\int_{V_0}^{\dot{\eta}} d\dot{\eta} = \left(\frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^\circ \right) \int_0^t dt$$

$$\dot{\eta} - V_A = \left(\frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^\circ \right) \cdot t$$

$$\dot{\eta} - V_A = \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) \cdot t$$

$$\frac{d\eta}{dt} = V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) \cdot t$$

$$\int_0^{AB} d\eta = \int_0^\tau V_A \cdot dt + \int_0^\tau \left(\frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^\circ \right) t \cdot dt$$

$$AB = V_A \cdot \tau + \left(\frac{F}{m} - g \cdot \sin 15^\circ \right) \frac{\tau^2}{2}$$

Або:

$$4,27 \cdot \tau^2 + 3\tau - 11 = 0$$

Звідки:

$$\tau_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 11 \cdot 4,27}}{2 \cdot 4,27} = \frac{-3 \pm 14}{8,57}$$

Оскільки $\tau \geq 0$, то час руху точки на ділянці АВ $\tau = 1,28$ с.

Визначимо швидкість точки в пункті В.

$$V_B = V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) \cdot \tau = 3 + \left(\frac{30}{6} + 9,81 \cdot 0,2588 \right) \cdot 1,28,$$

$$V_B = 19,93 \text{ м/с.}$$

Розглянемо рух точки на ділянці ВС (рис.1.33).

$$m \ddot{x} = 0;$$

$$\ddot{x} = 0;$$

$$m \ddot{y} = P;$$

$$\ddot{y} = g;$$

При $t=0$;

$$\dot{x} = V_B \cdot \cos 15^\circ,$$

$$\dot{y} = V_B \cdot \sin 15^\circ;$$

$$x = 0, y = 0.$$

При $t=t_1$; $y=d$; $x=DC$.

Інтегруємо диференціальне рівняння

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = g; \quad \int_0^{t_1} \dot{y} \, dt = \int_0^{t_1} g \, dt$$

$$y = V_B \cdot \sin 15^\circ \cdot t + gt;$$

$$\frac{dy}{dt} = V_B \cdot \sin 15^\circ + gt.$$

$$\int_0^d dy = \int_0^{t_1} V_B \cdot \sin 15^\circ \cdot dt + \int_0^{t_1} gt \cdot dt$$

$$d = V_B \cdot \sin 15^\circ \cdot t_1 + g \frac{t_1^2}{2}$$

Підставляючи дані, отримуємо:

$$4,95 t_1^2 + 5,158 t_1 - 4 = 0$$

$$\text{Тоді } t_{1,2} = \frac{-5,158 \pm \sqrt{5,158^2 + 4 \cdot 4,95}}{2 \cdot 4,95};$$

Звідси $t_1=0,52$ с.

З рівняння $\ddot{x} = 0$, та початкових умов маємо: $\dot{x} = V_B \cdot \cos 15^\circ = 19,25$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 19,25$$

$$\int_0^{BC} dx = 19,25 \int_0^{t_1} dt$$

$$BC = 19,25 \cdot t_1 = 19,25 \cdot 0,52 = 10 \text{ м}$$

Д.2 Дослідження обертового руху тіла

Тонкий стержень вагою P (рис.1.35-1.37) жорстко скріплений з круговим диском (парні варіанти) або тонким кільцем (непарні варіанти) вагою Q та

радіусом r . Система обертається навколо горизонтальної осі в вертикальній площині із стану спокою під дією моменту M . Знайти кутове прискорення, кутову швидкість та зусилля в опорах осі при повороті системи на кут α .

Стержень, диск, кільце вважати однорідними тілами; тертям в підшипниках знехтувати. Дані для розрахунку приведені в таблиці 1.7.

Таблиця 1.7

№ варіанта	P, Н	Q, Н	г, м	AB, м	BC, м	M, Н·м	α , градусів
1	5	2	0,1	0,3	-	4	30
2	10	3	0,3	0,9	-	8	120
3	15	4	0,4	1,0	-	5	60
4	20	5	0,1	0,4	-	30	45
5	5	6	0,2	0,6	0,3	20	90
6	6	7	0,3	1,0	0,5	15	30
7	7	1	0,4	1,2	-	2	45
8	8	2	0,1	0,3	-	20	60
9	9	3	0,2	0,5	-	4	90
10	10	4	0,3	0,8	-	2	120
11	11	5	0,4	1,0	-	30	30
12	12	6	0,1	0,6	-	35	45
13	13	7	0,2	0,5	-	25	60
14	14	8	0,3	1,2	-	6	90
15	15	4	0,4	1,5	1,2	40	120
16	16	5	0,1	0,3	0,25	45	30
17	17	6	0,2	0,8	0,4	2	45
18	18	4	0,3	1,0	0,5	4	60
19	19	5	0,4	1,5	-	50	90
20	20	6	0,1	0,4	-	4	120
21	18	4	0,2	0,8	-	15	30
22	16	5	0,3	2,0	-	5	40
23	14	6	0,4	1,5	0,2	20	60

24	12	4	0,1	0,3	0,05	25	90
25	10	5	0,2	0,6	0,1	30	120
26	8	6	0,3	1,0	0,2	10	30
27	6	7	0,4	1,2	1,1	5	45
28	4	8	0,1	0,4	0,3	2	60
29	5	9	0,2	0,8	-	5	90
30	6	10	0,3	1,2	-	8	120

Приклад: Система тіл, що складається з стержня 1 вагою P , однорідного диска 2, кільця 3, що мають відповідно вагу Q_2 та Q_3 та діаметр D , обертається навколо горизонтальної осі O (рис.1.34) під дією пари сил з моментом M . Знайти кутове прискорення, кутову швидкість та зусилля в опорах осі при повороті матеріальної системи на кут α , якщо в початковий момент часу система знаходиться в спокої.

Прийняти: $P = 10$ Н; $Q_2 = 20$ Н; $M = 30$ Н·м; $Q = 10$ Н; $R = 0,2$ м; $AO = 0,8$ м; $\alpha = 60^\circ$.

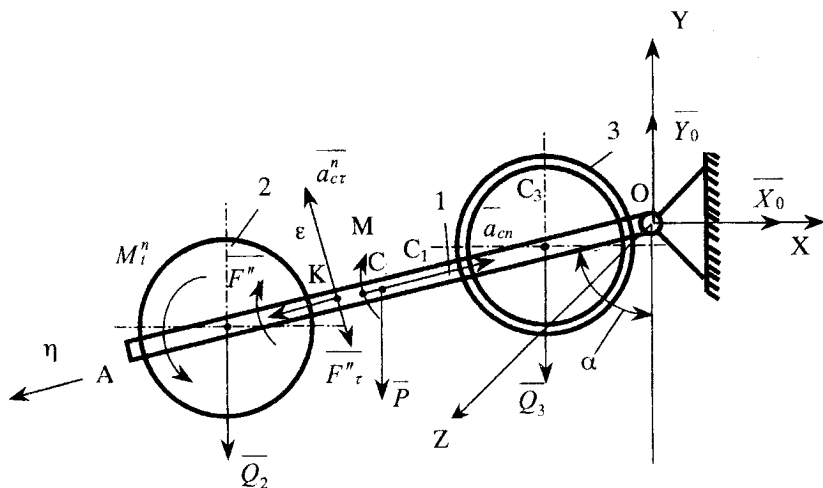


Рисунок 1.34

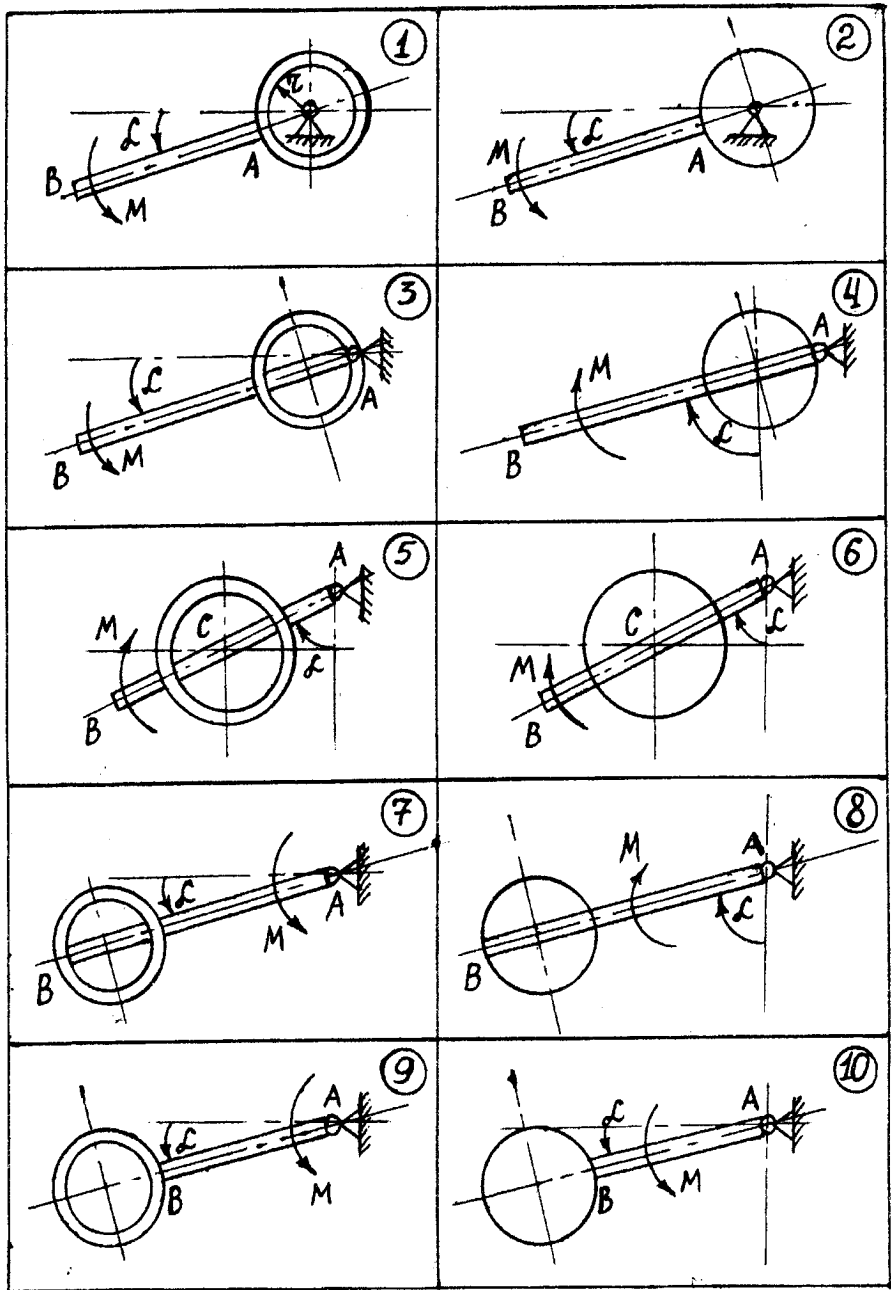


Рисунок 1.35

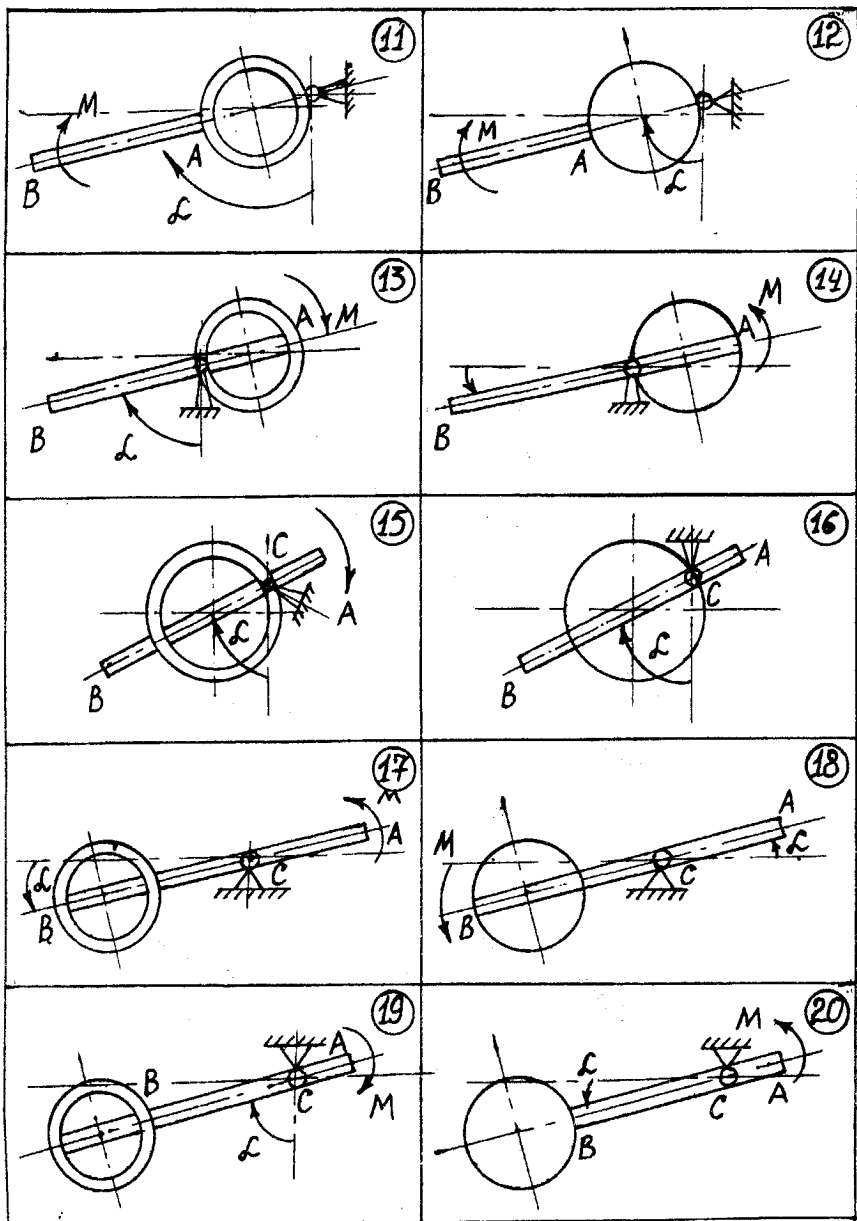


Рисунок 1.36

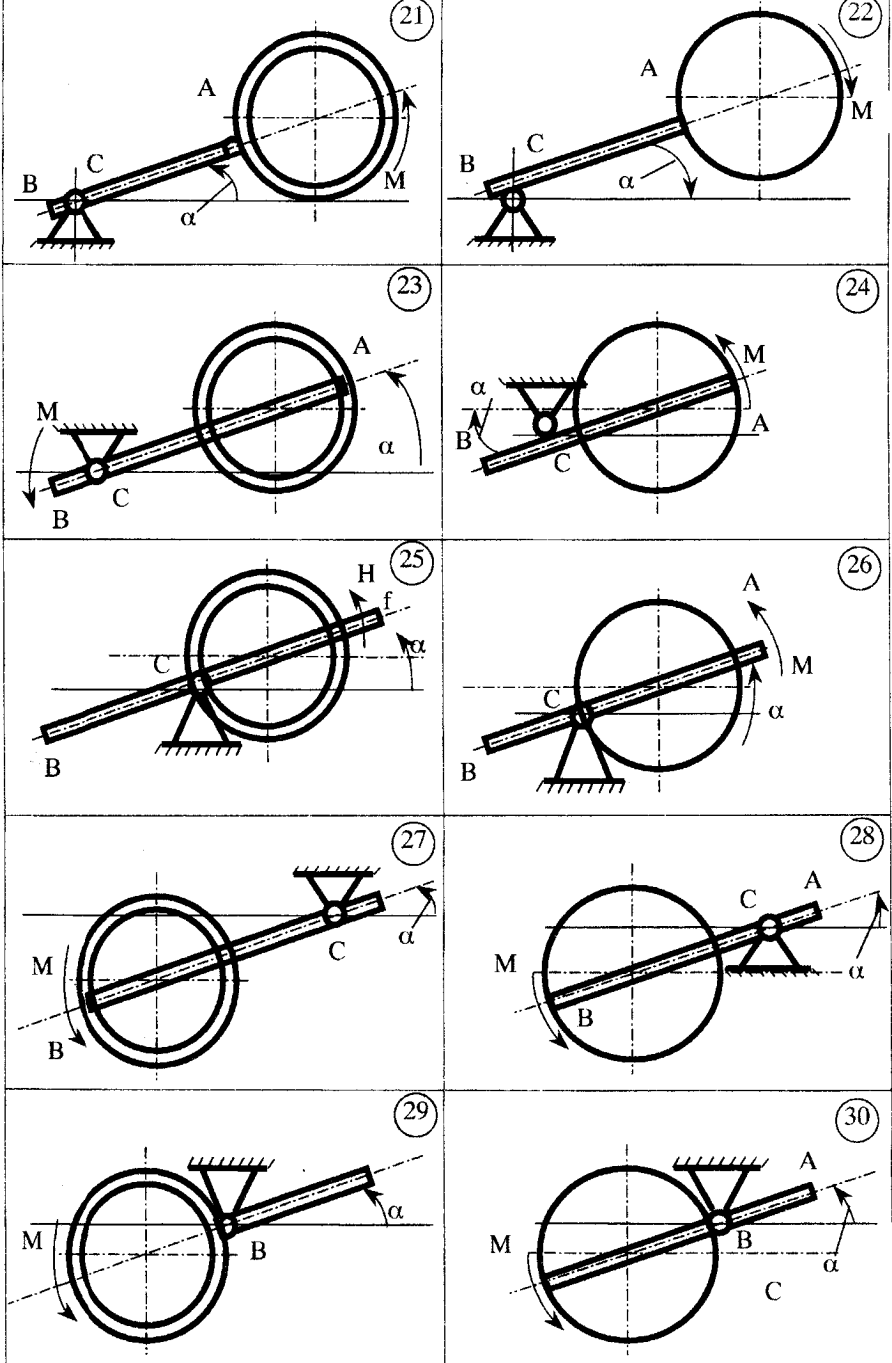


Рисунок 1.37

Для дослідження системи використаємо метод кінестатики в проекціях на осі для плоскої довільної системи сил.

$$\begin{aligned} F_x + R_x + F_x^n &= 0, \\ F_y + R_y + F_y^n &= 0, \\ M_z^R + M_z^F + M_z^n &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Визначення кутового прискорення ε системи тіл.

Кутове прискорення тіл знайдемо на підставі третього рівняння системи (1.20)

$$M_z^R + M_z^F + M_z^n = 0 \quad (1.21)$$

На систему тіл діють активні сили $\overline{Q_2}$, $\overline{Q_3}$, \overline{P} та пара сил M (рис. 1.35) переміщенню тіл перешкоджає в'язь: циліндричний шарнір O , дію якого на тіло, на підставі аксіоми звільнення від в'язів замінюємо реакціями в'язей $\overline{X_0}$, $\overline{Y_0}$.

Знайдемо головний момент сил інерції M_z^n .

$$M_z^n = I_z \cdot \varepsilon \quad (1.22)$$

Момент інерції сил I_z відносно осі суму моментів інерції тіл 1, 2, 3 відносно осі Z .

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$$

Момент інерції диска відносно осі Z :

$$\begin{aligned} I_{z2} &= \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (OA - R)^2 = \frac{Q_2}{g} \left[\frac{1}{2} R^2 + (OA - R)^2 \right] = \\ &= \frac{20}{9681} \left[\frac{1}{2} 0,2^2 + (0,8 - 0,2)^2 \right] = 0,775 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \end{aligned}$$

Момент інерції кільця 3 відносно осі Z :

$$I_{z3} = m_3 R^2 + m_3 R^2 = 2 \frac{Q_3}{g} R^2 = 2 \frac{10}{9,81} \cdot 0,2^2 = 0,082 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Момент інерції стержня 1 відносно осі Z :

$$I_{z1} = \frac{1}{3} m_1 \cdot OA^2 = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 0,8^2 = 0,217 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Тоді: $I_z = 0,775 + 0,02 + 0,217 = 1,07 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Головний момент сил інерції направлений в напрямку протилежному кутовому прискоренню. Запишемо рівняння (1.21) для системи сил, що прикладена до тіл 1, 2, 3 (рис 1.35)

$$\begin{aligned} -M + Q_2 \cdot OC_2 \cdot \sin \alpha + P \cdot OC_1 \sin \alpha - Q_3 \cdot OC_3 \cdot \sin \alpha + M_z^n &= 0 \\ I_z \cdot \varepsilon = M - (Q_2 \cdot OC_2 + P \cdot OC_1 + Q_3 \cdot OC_3) \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Звідки:

$$\varepsilon = \frac{M}{I_z} - \frac{Q_2 \cdot OC_2 + P \cdot OC_1 + Q_3 \cdot OC_3}{I_z} \cdot \sin \alpha$$

$$\varepsilon = \frac{30}{1,074} - \frac{20 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,2}{1,074} \cdot \sin \alpha = 27,93 - 16,76 \cdot \sin \alpha \quad (1.23)$$

При $\alpha = 60^\circ$:

$$\varepsilon = 27,93 - 16,76 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13,4 \quad \left(\frac{1}{c^2}\right)$$

2. Визначення кутової швидкості.

Оскільки $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{d\omega}{d\alpha} = \omega \frac{d\omega}{d\alpha}$, то вираз (1.23) запишеться

$$\omega \frac{d\omega}{d\alpha} = 27,93 - 16,76 \cdot \sin \alpha \quad (1.24)$$

При $t = 0$; $\omega_0 = 0$; $\alpha = 0$

$$\text{При } t = t_1; \omega_1 = \omega_2; \alpha = \frac{\pi}{3} \quad (1.25)$$

Інтегруємо рівняння (1.24)

$$\int_0^{\omega_2} \omega \cdot d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 27,93 \cdot d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 16,76 \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha$$

$$\frac{\omega_2^2}{2} = 27,93 \cdot \frac{\pi}{3} + 16,76 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - 16,76$$

$$\omega_\alpha = \sqrt{2 \cdot 27,93 \cdot \frac{3,14}{3} + 16,76 \cdot \frac{1}{2} - 16,76} = 7,08 \frac{1}{c}$$

$$\omega_\alpha = 7,1 \frac{1}{c}$$

3. Визначення реакцій опор.

Знайдемо координати центра мас системи тіл .

$$\eta_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_i \eta_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot OC_1 + m_2 \cdot OC_2 + m_3 \cdot OC_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\eta_c = \frac{P \cdot 0,4 + Q_2 \cdot 0,6 + Q_3 \cdot 0,2}{P + Q_2 + Q_3} = \frac{10 \cdot 0,4 + 20 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,2}{10 + 20 + 10} = 0,45 \text{ м}$$

Проекції прискорення центра мас при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ на натуральні осі координат.

$$a_{cr} = \varepsilon \cdot \eta_c = \varepsilon \cdot OC = 13,4 \cdot 0,45 = 6,03 \frac{\text{м}}{c^2}$$

$$a_{cn} = \omega_\alpha^2 \cdot \eta_c = \omega_\alpha^2 \cdot OC = 7,1^2 \cdot 0,45 = 22,68 \frac{\text{м}}{c^2}$$

Запишемо перші два рівняння системи (1.20) для сил, що прикладені до тіл 1, 2, 3 (рис. 1.35)

$$x_0 - F''_n \cdot \sin \alpha + F''_\tau \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$y_0 - P - Q_2 - Q_3 - F''_n \cdot \cos \alpha - F''_\tau \cdot \sin \alpha = 0$$

Звідси знаходимо реакції опор x_0 та y_0 .

$$x_0 = F''_n \cdot \sin \alpha - F''_\tau \cdot \cos \alpha = 92,48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 24,59 \cdot \frac{1}{2} = 67,8 \text{ Н}$$

$$y_0 = P + Q_2 + Q_3 + F''_n \cdot \cos \alpha + F''_\tau \cdot \sin \alpha = 10 + 20$$

$$10 + 92,48 \cdot \frac{1}{2} + 24,59 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 107,54 \text{ Н}$$

$$\text{де: } F''_n = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_{cn} = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g} \cdot a_{cn} = 92,48 \text{ Н};$$

$$F''_\tau = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a_{c\tau} = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g} \cdot a_{c\tau} = 24,59 \text{ Н}$$

$$OK = \frac{I_z \cdot \varepsilon}{F''_\tau} = \frac{13,4 \cdot 1,074}{24,59} = 0,59 \text{ м.}$$

2 ОПІР МАТЕРІАЛІВ

2.1 Основна задача опору матеріалів для спеціальності "Системи управління автоматики"

У програмі підготовки бакалавра будь-якої спеціальності передбачено вивчення науки про опір матеріалів, яка є об'єднанням теорії та практики розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів машин, приладів та споруд.

Міцність – це здатність деталей та механізмів виконувати не руйнуючись свої функції під дією зовнішнього навантаження. Під жорсткістю розуміють здатність деталі та механізмів протистояти зміні розмірів та форми при дії зовнішніх сил. При роботі деяких елементів механізмів (тонкі та довгі стержні при стисканні, тонкостінні циліндричні конструкції в процесі закручування та ін.) під навантаженням вони можуть раптово втратити пружну рівновагу (стійкість), при цьому руйнування конструкції відбувається дуже швидко. Таким чином, під стійкістю будемо вважати здатність елементів конструкції зберігати стан пружної рівноваги під дією зовнішніх сил.

Нескінченну різноманітність твердих тіл за їх формою можна розділити на три групи:

1. Тіла, у яких всі три розміри є величинами одного порядку (рис. 2.1а).
До числа таких тіл відносять масивні фундаменти споруд і машин, катки.
Такі тіла називаються масивними.
2. Тіла, у яких два розміри суттєво більші третього (рис. 2.1б). До таких тіл, що називаються пластинами або оболонками, відносяться фундаментні плити, стіни і дно чанів, тонкостінні резервуари, куполи споруд, мембрани тощо.
3. Тіла, у яких один розмір (довжина) значно більший двох інших (рис. 2.1в).
До числа тіл третьої групи відносять вали, осі, балки, ричаги, тяги і т.і. Такі тіла називаються брусом, стержнем, балкою, кабелем.

Основною задачею опору матеріалів для даної спеціальності є вивчення змін, що відбуваються в брусі під дією зовнішніх сил.

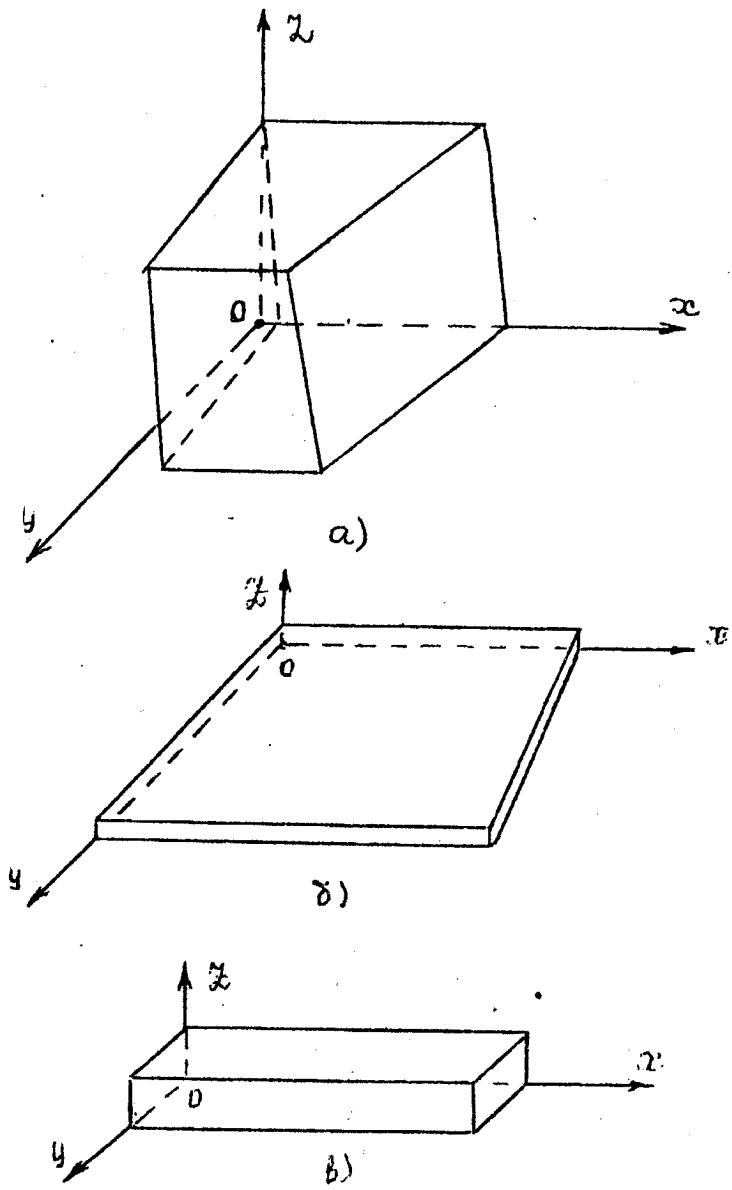


Рисунок 2.1

Що повинно задаватися? Перш за все — зовнішні сили, характер їх прикладання до стержня. Потім матеріал. Що є кінцевою метою розрахунків? Економічні і надійні розміри поперечного перерізу стержня. Довжина стержня, звичайно, відома за його службовим призначенням. Розміри поперечного перерізу стержня будуть економічними в тому випадку, якщо його площа буде мінімальна. Але розміри повинні бути надійними, тобто мати відповідний запас міцності, достатню жорсткість, необхідну гарантію від можливої втрати стійкості.

2.2 ТЕОРІЯ ВНУТРІШНІХ СИЛ

Нехай на стержень змінного перерізу діють одночасно декілька сил: $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 \dots \overline{F}_n$ (рис. 2.2). Необхідно розрахувати цей стержень на міцність. Як врахувати дію кожної сили?

Кожна сила деформує (змінює форму, розміри) не тільки ділянку стержня, що розташована біля точки прикладання цієї сили, але і сусідні, а значить і все тіло. Можна передбачити, що у загальному випадку будь-яка ділянка тіла чинить опір кожній із діючих на тіло сил. Зовнішні сили змінюють взаємодію між частинами тіла. В тілі виникають внутрішні сили. Ось виходячи на внутрішні сили і необхідно вести розрахунок стержня.

Величину внутрішніх сил можна визначити методами теоретичної механіки. Для цього розріжемо стержень площиною перпендикулярною до осі стержня (рис. 2.2), і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини. Якщо тіло знаходилось у рівновазі, то будь-яка його частина також буде знаходитись у рівновазі, враховуючи сили з якими права відрізнана частина буде діяти на ліву. Ці сили, які називаємо внутрішніми, можна звести до головного вектора та головного моменту, які можна показати через їх проекції на координатні осі X , Y , Z (рис. 2.3). Отримали довільну просторову систему сил для якої можна записати шість умов рівноваги для визначення невідомих внутрішніх силових факторів: три сили N , Q_y , Q_z та три моменти M_x , M_y , M_z . Сила N називається

нормальною силою; Q_y, Q_z — поперечними силами. Проекція головного моменту

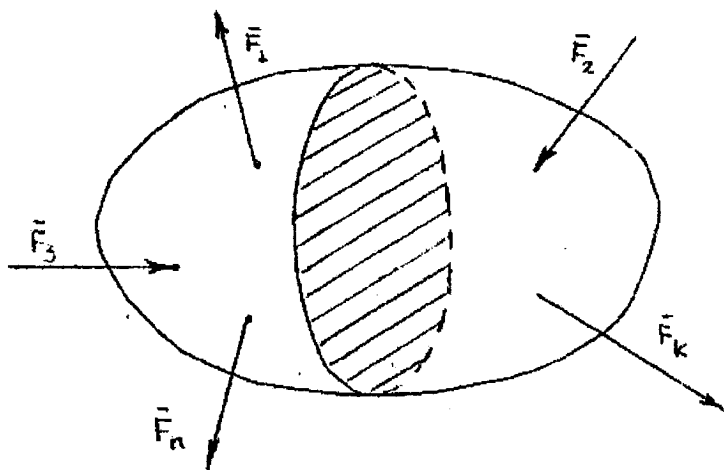


Рисунок 2.2

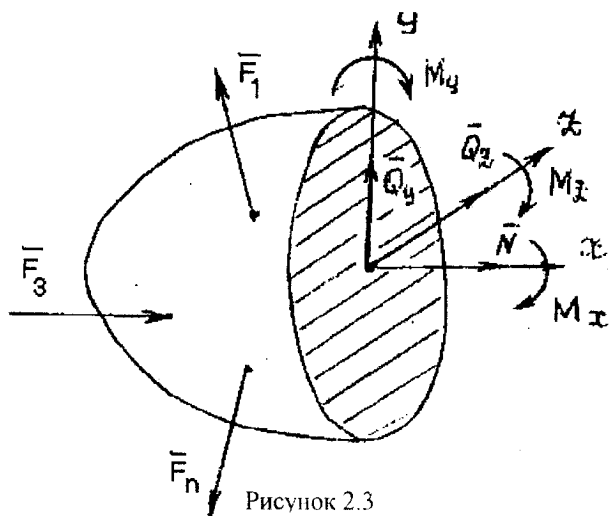


Рисунок 2.3

на вісь x (M_x) називається крутним моментом, а на осі y та z — згинальними моментами і позначаються відповідно M_y і M_z .

Це все — теоретична механіка. Але і перший крок в науку про опір матеріалів. Якщо діє тільки один силовий фактор, деформація буде простою. При

одночасній дії декількох внутрішніх силових факторів деформація буде складною. Для спеціальності “Системи управління автоматики” обмежимося розглядом простих деформацій. Для того, щоб знайти розрахункові значення внутрішнього силового фактора необхідно дослідити зміну його числового значення вздовж осі стержня, скласти рівняння і побудувати графік. Такий графік називається епюрою відповідного внутрішнього силового фактора.

2.3 Основні гіпотези і припущення в опорі матеріалів

Ні одна наука не може обійтися без деяких абстракцій, ідеалізації, умовностей. Численні експериментальні дослідження та практична діяльність підтверджують такі гіпотези і припущення:

1. *Гіпотеза про неперервність матеріалу.* Вважається, що матеріал повністю і рівномірно заповнює зайнятий ним об'єм тіла.
2. *Гіпотеза однорідності і ізотропності матеріалу.* Фізико-математичні властивості матеріалу однакові в будь-якій частині тіла.
3. *Гіпотеза малості та лінійності деформації тіла.* Ця гіпотеза (закон) в найпростішій формі була встановлена Р. Гуком і сформульована ним: яка деформація розтягу — така сила.
4. *Гіпотеза ідеальної пружності.* У відповідності з цією гіпотезою, тіло повністю відновлює свою форму і розміри після припинення дії зовнішніх сил.
5. *Гіпотеза суперпозиції дії сил.* Однорідні фактори (внутрішні сили, напруги, деформації) від декількох зовнішніх сил додаються.

2.4 Побудова епюр внутрішніх силових факторів

Числові значення внутрішніх силових факторів в загальному випадку залежать не тільки від зовнішніх сил, але і від того в якому перерізі вони визначаються.

Графік, що показує зміну внутрішніх силових факторів по довжині стержня називається епюрою відповідного силового фактора.

Побудову епіюр будемо розглядати для балок завантажених зовнішніми силами, що розташовані в площині симетрії балки (плоска система сил).

При визначенні значень внутрішніх сил в балках будемо користуватись такими правилами:

а) нормальна сила N додатна, коли у перерізі на лівій частині балки вона діє зліва направо, а на правій – в зворотному напрямку (рис.2.4).

$$N = -\sum_{\text{лів}} F_x = \sum_{\text{пр}} F_x$$

б) поперечна сила Q додатна, коли у перерізі на лівій відрізаний частині балки вона направлена зверху вниз, а на правій – знизу вверх (рис.2.1).

$$Q = \sum_{\text{лів}} F_y = -\sum_{\text{пр}} F_y$$

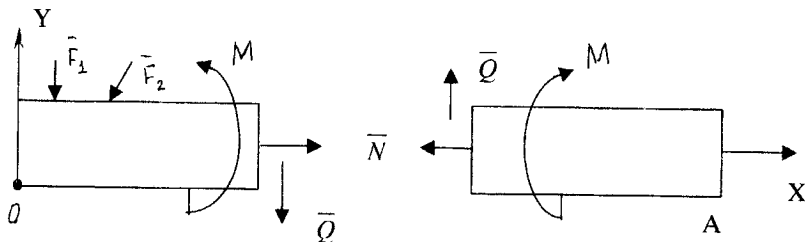


Рисунок 2.4

в) згинальний момент M додатний, коли у перерізі на лівій відрізаний частині балки він направлений проти годинникової стрілки, а на правій – за годинниковою стрілкою (рис.2.4).

$$M = -\sum_{\text{лів}} M_0 = \sum_{\text{пр}} M_A$$

2.4.1 Побудова епіюри внутрішніх нормальних сил при розтягу

Розглянемо стержень, що завантажений силою F (рис. 2.5а). Необхідно побудувати епіюру внутрішніх сил з врахуванням ваги стержня.

Для побудови епіюри нормальних поздовжніх сил складемо рівняння, що зв'яже ці сили з координатами перерізу. Проведемо переріз на відстані X_1 від точки B (рис 2.5а). Розглянемо рівновагу нижньої частини стержня (рис.2.5,б). Запишемо аксіому рівноваги в проекціях на вісь X .

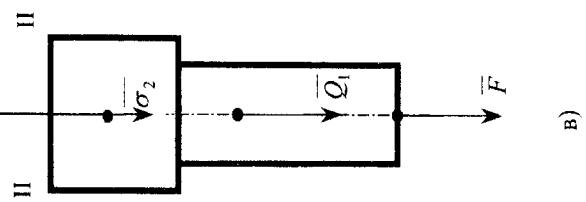
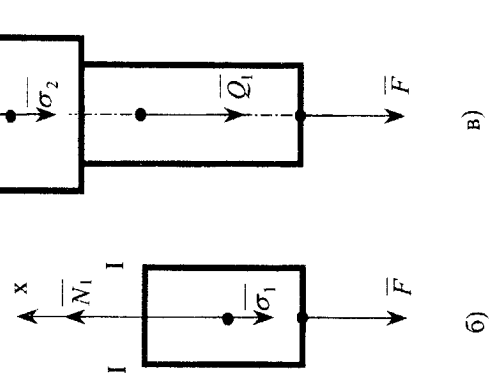
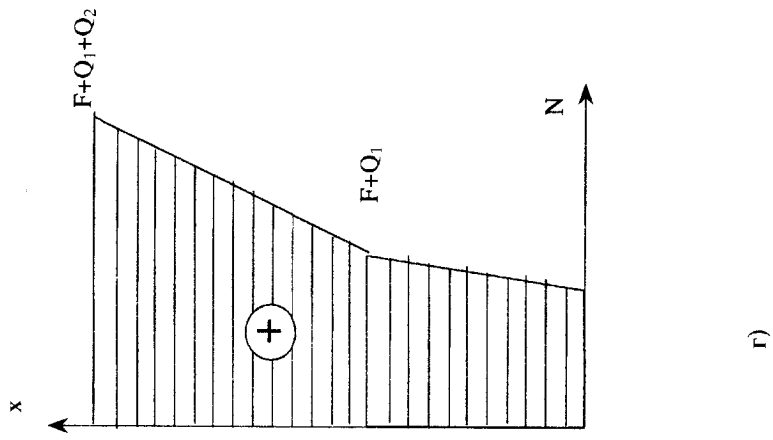
$$N_1 - F - \sigma_1 = 0 \quad (2.1)$$

Власна вага стержня довжиною X_1

$$\sigma_1 = \gamma \cdot x_1 \cdot S_1 \quad (2.2)$$

де: γ - питома вага матеріалу стержня;

S_1 - площа поперечного перерізу стержня.



а)

б)

в)

г)

Рисунок 2.5

Із виразу (2.1) з врахуванням (2.2), знайдемо поздовжню силу

$$N_1 = F + \gamma \delta_1 \cdot x_1 \quad (2.3)$$

де: $0 \leq x_1 \leq l_1$

Сила N_1 буде додатною якщо вона розтягує стержень і від'ємною, якщо стискає.

Рівняння (2.3) показує що величина поздовжньої сили лінійно залежить від координати перерізу x_1 . Тому для побудови епюри N_1 достатньо мати дві точки:

$$\text{при } x_1=0; N_1 = F$$

$$\text{при } x_1=l_1; N_1 = F$$

$Q_1 = \gamma F_1 l_1$ - вага стержня з площею поперечного перерізу S_1 .

Знайдемо внутрішню поздовжню силу N_2 в перерізі II - II як функцію x_2 (Рис.2.5б).

$$N_2 = P + Q_1 + \gamma F_2 x_2, 0 \leq x_2 \leq l_2 \quad (2.4)$$

при $x_2 = 0; N_2 = P + Q_1$

при $x_2 = l_2; N_2 = P + Q_1 + Q_2$

$Q_2 = \gamma F_2 l_2$ - вага стержня з площею поперечного перерізу S_2 .

У вибраному масштабі, відкладаємо величини сил N_1, N_2 перпендикулярно до осі стержня. Отримали епюру N (Рис.2.5г).

2.4.2 Побудова епюри крутних моментів

Вал AB (рис.2.6,а), що може знаходитися у спокої або рівномірно обертатися навколо осі, навантажений крутними моментами M_1, M_2, M_3 ($M_1=700$ кН·м; $M_2=500$ кН·м; $M_3=200$ кН·м).

В розрахунках знак крутного моменту не має значення, але для зручності побудови епюр дотримуються такого правила знаків: внутрішній крутний момент буде додатним, якщо спостерігаючи переріз в напрямі осі він намагається повертати переріз вала за годинниковою стрілкою, і від'ємний – якщо проти годинникової стрілки.

Крутний момент в перерізі I - I (Рис.2.6б):

$$M_{1-1} = \sum m_x \bar{F} = -M_1 = -700 \text{кН} \cdot \text{м}$$

Крутний момент в перерізі II - II (Рис.2.6в):

$$M_{II-II} = \sum m_x \bar{F} = -M_1 + M_2 = -200 \text{кН} \cdot \text{м}$$

Як видно з розрахунків, величини крутних моментів на відповідних ділянках вала від координати перерізу не залежать.

Тепер у вибраному масштабі будемо епюру моментів (Рис.2.6г).

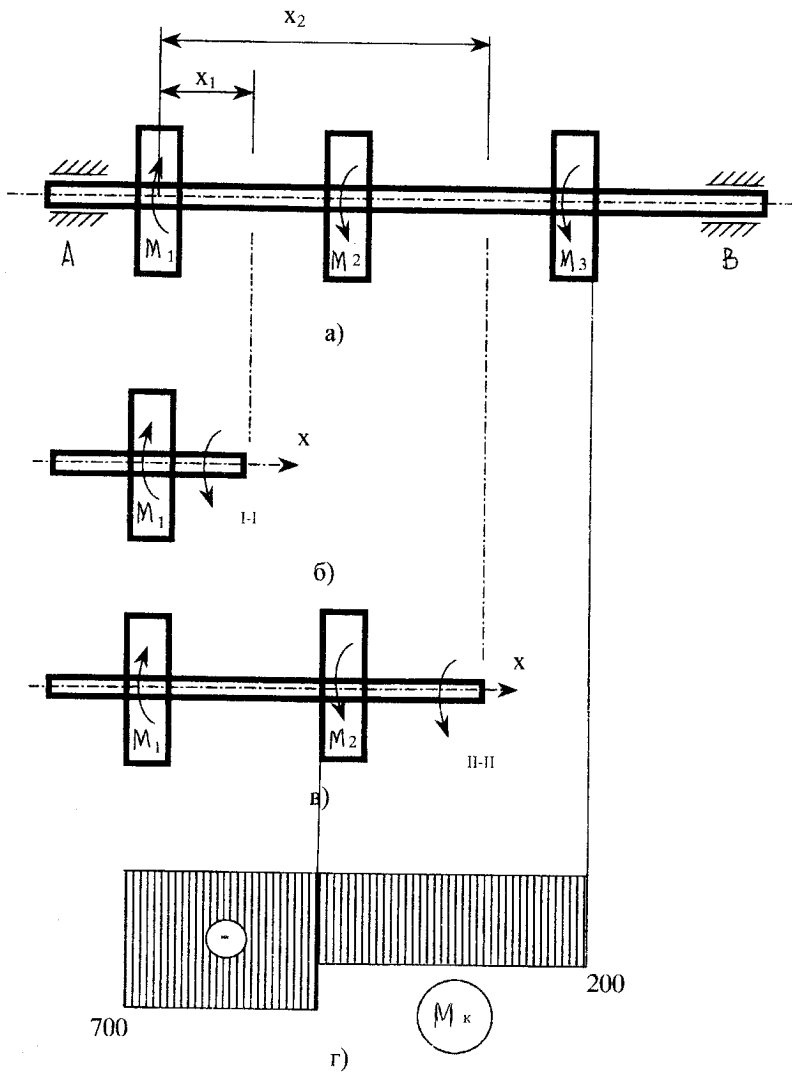


Рисунок 2.6

Розглянемо просту балку на двох опорах (рис.2.7,а): опора A – нерухомий шарнір; опора B – рухомий шарнір. Дію в'язей (шарнірів) на балку замінюємо реакціями в'язей \bar{Y}_A, \bar{Y}_B , які знаходимо з рівнянь рівноваги при $F=3кН$, $q=2кН/м$, $M=30кН\cdot м$.

$$\sum m_A \bar{F} = 0; 1 \cdot F - M - 4 \cdot q \cdot 7 + 9 = 0; Y_B = \frac{83}{9} кН$$

$$\sum m_B \bar{F} = 0; 10 \cdot F - M - Y_A \cdot 9 + 4 \cdot q \cdot 2 = 0; Y_A = \frac{16}{9} кН$$

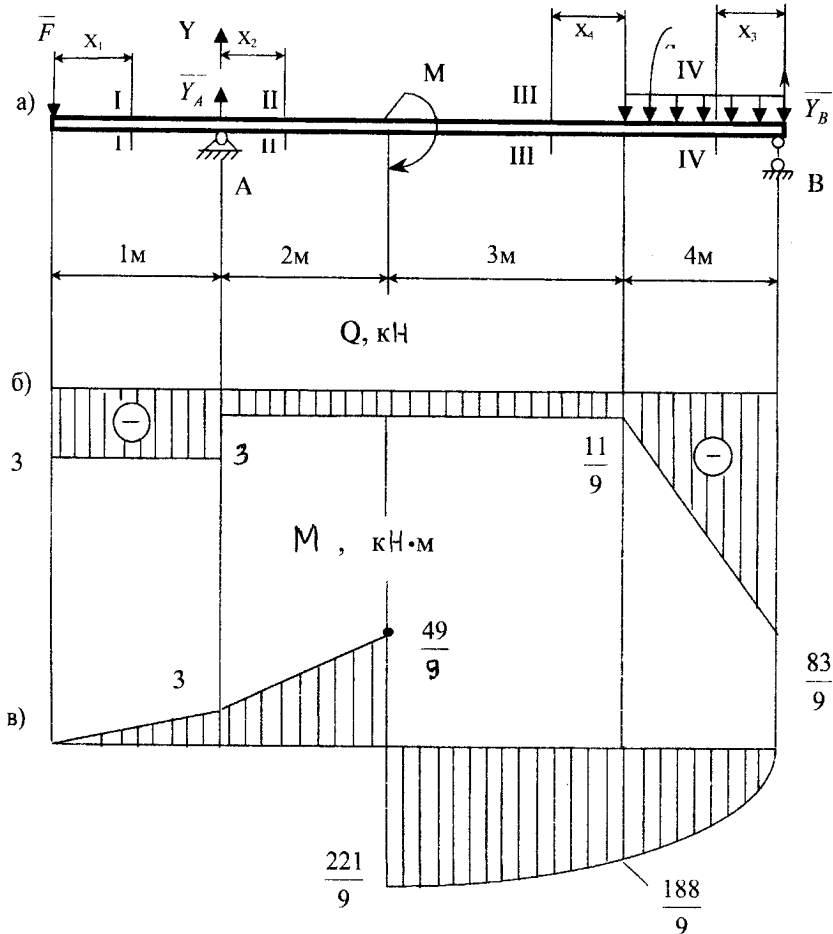


Рисунок 2.7

Перевірка:

$$\sum F_y = 0; -F + Y_A - 4 \cdot q + Y_B = 0$$

$$-3 + \frac{16}{9} - 4 \cdot 2 + \frac{83}{9} = 0: -99 + 99 = 0$$

Балка має чотири ділянки, тому проводимо чотири довільні перерізи (Рис.2.7а) і знаходимо поперечну силу Q_i та згинальний момент M_i у кожному перерізі.

Переріз I-I: $0 \leq x_1 \leq 1\text{ м}$

$$Q_1 = -F = -3\text{ кН};$$

$$M_1 = -F \cdot x_1 = -3 \cdot x_1$$

При $x_1 = 0; Q_1 = -3\text{ кН}; M_1 = 0.$

При $x_1 = 1\text{ м}; Q_1 = -3\text{ кН}; M_1 = -3\text{ кН} \cdot \text{м}$

Переріз II-II: $0 \leq x_2 \leq 2\text{ м}$

$$Q_2 = -F + Y_A = -3 + \frac{16}{9} = -\frac{11}{9} \text{ кН}$$

$$M_2 = -F(1 + x_2) + Y_A \cdot x_2 = -3(1 + x_2) + \frac{16}{9} \cdot x_2$$

При $x_2 = 0; Q_2 = -\frac{11}{9} \text{ кН}; M_2 = -3\text{ кН} \cdot \text{м}$

При $x_2 = 2; Q_2 = -\frac{11}{9} \text{ кН}; M_2 = -\frac{49}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}$

Переріз III-III: $0 \leq x_3 \leq 4\text{ м}$

$$Q_3 = q \cdot x_3 - Y_B = 2 \cdot x_3 - \frac{83}{9}$$

$$M_3 = Y_B \cdot x_3 - q \frac{x_3^2}{2} = \frac{83}{9} \cdot x_3 - x_3^2$$

При $x_3 = 0; Q_3 = -\frac{83}{9} \text{ кН}; M_3 = 0$

При $x_3 = 4; Q_3 = -\frac{11}{9} \text{ кН}; M_3 = \frac{188}{9} \text{ кН}$

Переріз IV-IV: $0 \leq x_4 \leq 3\text{ м}$

$$Q_4 = q \cdot 4 - Y_B = -\frac{11}{9} \text{ кН}$$

$$M_4 = Y_B(4 + x_4) - 4 \cdot q(2 + x_4) = \frac{83}{9}(4 + x_4) - 8(2 + x_4)$$

При $x_4 = 0; Q_4 = -\frac{11}{9} \text{ кН}; M_4 = \frac{188}{9} \text{ кН}$

При $x_4 = 3; Q_4 = -\frac{11}{9} \text{ кН}; M_4 = \frac{221}{9} \text{ кН}$

За отриманими даними Q_i та M_i ($i=1,2,3,4$) будуємо епюри Q (рис. 2.7,б) та M (рис. 2.7,в).

Ординати Q_i та M_i відкладаємо перпендикулярно до осі балки. Для поперечної сили Q_i додатні значення відкладаємо над базовою лінією (відносно балки), а епюру M_i будуємо на розтягнутих волокнах.

2.5 Розрахунки на міцність та жорсткість при простому опорі

2.5.1 Розтяг та стиск

Умови міцності при розтягу (рис.2.8) або стиску встановлюється з порівняння фактичної напруги σ у матеріалі з допустимою $[\sigma]$

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq [\sigma] \quad (2.4)$$

де S – площа поперечного перерізу стержня.

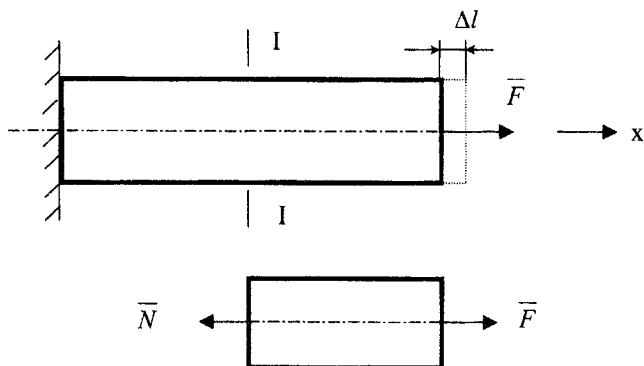


Рисунок 2.8

Якщо у стержня площа поперечного перерізу і сила N залежать від координати x , то умову жорсткості при розтягу та стиску можна записати у вигляді:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int \frac{N \cdot dx}{E \cdot S} \leq [\Delta l] \quad (2.5)$$

де E – модуль пружності I-го роду;

$[\Delta l]$ – допустимі деформації.

2.5.2 Зсув

Умови міцності і жорсткості при зсуві (рис.2.9).

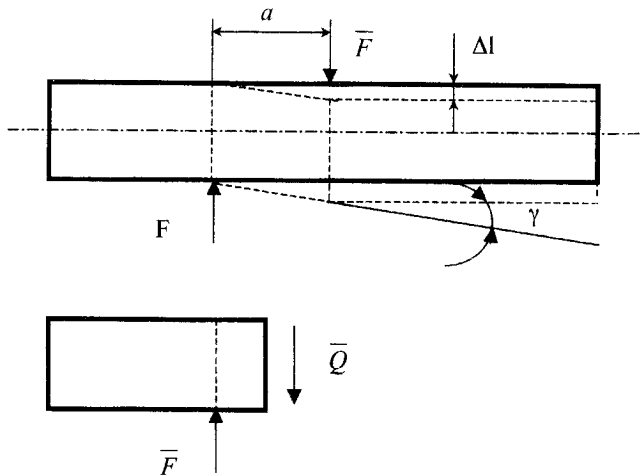


Рисунок 2.9

$$\tau = \frac{Q}{S} \leq [\tau] \quad (2.6)$$

$$\Delta l = \frac{Q \cdot a}{S \cdot \sigma} \leq [\Delta l] \quad (2.7)$$

де σ - модуль пружності II-го роду.

2.5.3 Кручення

При деформаціях кручення і згину необхідно враховувати геометричні характеристики плоских поперечних перерізів.

Добуток площі dS (рис.2.10) на відстань її від деякої осі називається елементарним моментом площі відносно осі. Тоді, складаючи елементарні моменти по всій площі поперечного перерізу, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \int_S y \cdot dS \\ S_y &= \int_S x \cdot dS \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

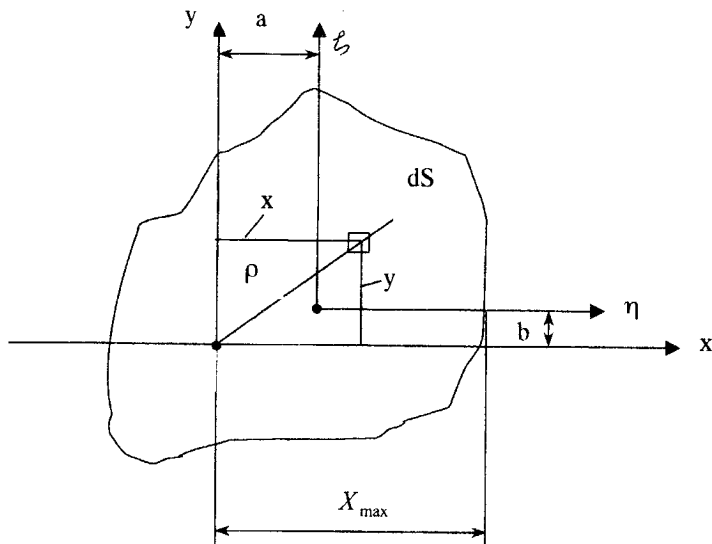


Рисунок 2.10

Статичні моменти площі S_x, S_y використовуються при визначенні центра ваги поперечного перерізу

$$Y_c = \frac{S_x}{S}, X_c = \frac{S_y}{S} \quad (2.9)$$

де S – площа поперечного перерізу.

Момент інерції поперечного перерізу відносно осей x і y знайдемо таким чином:

$$I_x = \int_S y^2 dS, I_y = \int_S x^2 dS \quad (2.10)$$

При розрахунках на кручення використовується полярний момент інерції:

$$I_\rho = \int_S \rho^2 dS \quad (2.11)$$

У розрахунках на міцність зустрічаються з відношенням осьових моментів інерції до відстані точок, найбільш віддалених від відповідної осі (рис.2.10).

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} \quad (2.12)$$

де W_x, W_y осьові моменти опору відносно осей x та y .

Момент інерції поперечного перерізу відносно осі, що не проходить через центр мас C знаходиться за формулою (1.6).

$$I_x = I_\eta + b^2 \cdot S, I_y = I_\xi + a^2 \cdot S \quad (2.13)$$

Геометричні характеристики деяких плоских поперечних перерізів:

а) Прямокутник (рис.2.11).

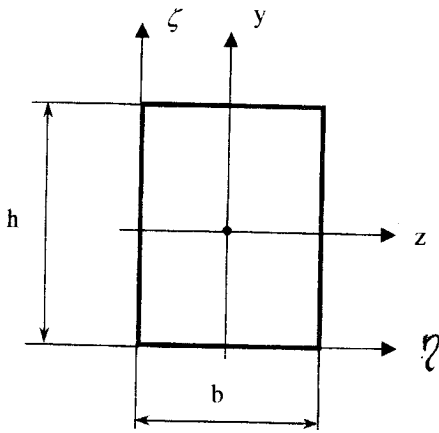


Рисунок 2.11

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad (2.14)$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \quad (2.15)$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$

$$I_\eta = \frac{7}{12}hb^3 \quad (2.16)$$

$$I_\zeta = \frac{7}{12}hb^3$$

б) Коло (рис.2.12).

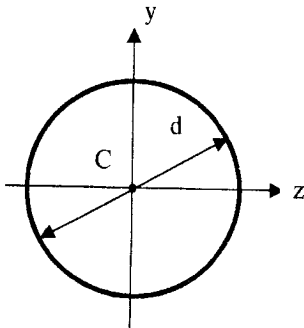


Рисунок 2.12

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64} \quad (2.17)$$

$$I_c = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \quad (2.18)$$

$$W_c = \frac{\pi d^3}{16}$$

Тепер можемо записати умови міцності та жорсткості вала при крученні (рис.2.13).

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_x} \leq [\tau] \quad (2.19)$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{\zeta \cdot I_x} \leq [\varphi] \quad (2.20)$$

де τ - дотичні напруги.

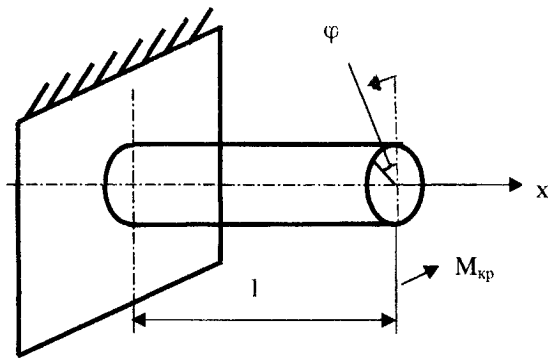


Рисунок 2.13

2.5.4. Плоский згин.

При плоскому згині (рис.2.14) у стержні з'являються дотичні та нормальні напруги. Але неврахування дотичних напруг при розрахунках дає похибку біля 3%. Тому умови міцності при згині можна записати у вигляді:

$$\sigma_{xz} = \frac{M}{W_y} \leq [\sigma]_{xz} \quad (2.21)$$

де $[\sigma]_{xz}$ - допустимі напруги при згині.

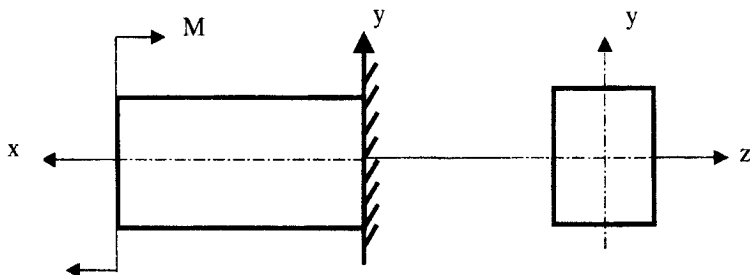


Рисунок 2.14

Прогин (деформацію) балки можна знайти і наближеною із диференціального рівняння зігнутої осі балки.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{E \cdot I_z} \quad (2.22)$$

де M_x - згинальний момент по довжині балки.

Приклад: Знайти максимальний прогин балки (рис.2.15), що знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q .

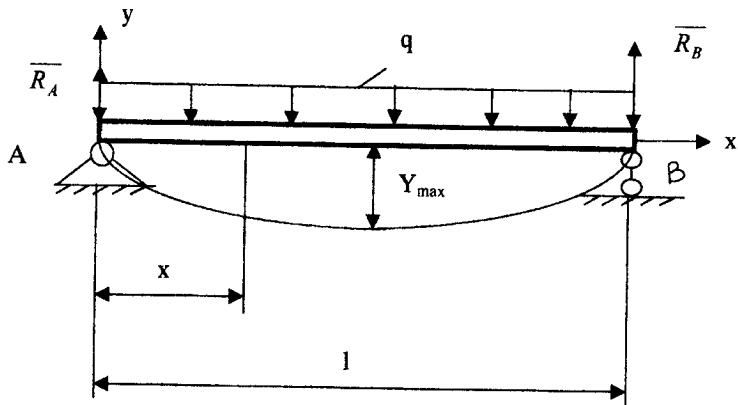


Рисунок 2.15

Балка симетрична, і тому максимальний прогин буде у її середині. Знайдемо згинальний момент для характерного перерізу балки.

$$M_x = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2}$$

якщо $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$, то $M_x = \frac{qx}{2}(l - x)$

Використаємо диференційне рівняння (2.22)

$$EI_z \cdot y'' = \frac{qx}{2}(l - x)$$

Інтегруючи двічі, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} EI_z \cdot y' &= \frac{qx^2}{12}(3l - 2x) + C_1 \\ EI_z \cdot y &= \frac{qx^3}{24}(2l - x) + C_1 + C_2 \end{aligned} \right| \quad (2.23)$$

Граничні умови:

при $x = 0; y = Y_A = 0$

при $x = l; y = Y_B = 0$

Тоді: $C_1 = -\frac{ql^3}{24}, C_2 = 0$

Рівняння (2.23) набуває такого вигляду:

$$EI_z \cdot y = \frac{q}{24}(2lx^3 - x^4 - l^3 \cdot x) \quad (2.24)$$

при $x = l/2, y = y_{\max}$

Із виразу (2.24) при умові (2.25), отримаємо:

$$y_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EI_z}$$

1. Основна задача опору матеріалів. Класифікація твердих тіл.
2. Основні гіпотези і припущення в опорі матеріалів.
3. Побудова епюри N при розтягу та стиску.
4. Побудова епюри крутних моментів.
5. Побудова епюри Q при згині.
6. Побудова епюри M при згині.
7. Поняття про напругу.
8. Поняття про деформації.
9. Механічні властивості матеріалів.
10. Геометричні характеристики плоских перерізів.
11. Напруга та деформації при розтягу та стиску.
12. Напруга та деформації при зсуві.
13. Напруга та деформації при крученні.
14. Визначення геометричних характеристик вала. Раціональна форма перерізу вала.
15. Нормальні напруги при згині.
16. Дотичні напруги при згині.
17. Деформації і переміщення при згині.
18. Універсальне рівняння прогинів.

2.6 Завдання РГР з опору матеріалів

ОМ.1 Центр ваги пластини

Визначити центр ваги пластини (рис.2.17). Дані для розрахунку в табл.2.1 приведені в метрах.

Таблиця 2.1

№ вар.	C	d	C_1	C_2	d_1	d_2	x_k	y_k	X_n	y_n	h	b	R
1	0.2	0.7	-	0.1	-	0.2	0.02	0.04	0.1	0.4	0.2	0.05	0.01
2	0.3	0.2	0.1	-	0.05	-	0.02	0.02	0.15	0.1	0.05	0.1	0.01
3	0.4	0.3	-	0.15	-	0.3	0.3	0.25	0.05	0.05	0.1	0.2	0.02
4	0.5	0.4	0.2	-	0.2	-	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	0.05
5	0.6	0.5	-	0.2	-	0.1	0.3	0.4	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1
6	0.7	0.6	0.3	-	0.4	-	0.5	0.4	0	0	0.3	0.1	0.1
7	0.8	0.7	-	0.3	-	0.4	0.6	0.5	0.1	0.2	0.2	0.2	0.1
8	0.7	0.6	0.2	-	0.1	-	0.3	0.2	0.4	0.4	0.3	0.1	0.2
9	0.6	0.5	-	0.2	-	0.25	0.2	0.2	0.3	0.3	0.2	0.1	0.15
10	0.5	0.4	0.1	-	0.05	-	0.3	0.3	0	0	0.15	0.2	0.05
11	0.4	0.3	-	0.2	-	0.1	0.1	0.1	0.2	0.25	0.1	0.1	0.1
12	0.3	0.5	0.1	-	0.2	-	0.2	0.3	0	0	0.1	0.2	0.1
13	0.2	0.4	-	0.05	-	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.05	0.1	0.05
14	0.8	1.0	0.4	-	0.05	-	0.6	0.7	0.1	0.1	0.2	0.3	0.1
15	0.7	0.9	-	0.3	-	0.2	0.5	0.7	0.5	-	0.4	0.2	0.1
16	0.6	0.8	0.2	-	0.3	-	0.2	0.3	0.5	0.5	0.1	0.1	0.1

Продовження таблиці 2.1

17	0.5	0.7	-	0.2	-	0.4	0.3	0.5	0	0	0.2	0.3	0.1	0.2
18	0.4	0.6	0.1	-	0.2	-	0.2	0.2	0.3	0.1	0.2	0.1	0.2	0.1
19	0.3	0.5	-	0.1	-	0.2	0.2	0	0	0	0.1	0.2	0.1	0.1
20	0.4	0.4	0.05	-	0.1	-	0.1	0.1	0.3	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1
21	0.9	0.7	-	0.3	-	0.1	0.5	0.4	0	0	0.2	0.3	0.1	0.1
22	0.8	0.6	0.3	-	0.1	-	0.1	0.1	0.6	0.5	0.1	0.2	0.1	0.1
23	0.7	0.5	-	0.3	-	0.1	0.5	0.4	0	0	0.2	0.2	0.1	0.1
24	0.6	0.4	0.2	-	0.1	-	0.1	0.1	0.4	0.3	0.1	0.1	0.2	0.1
25	0.5	0.3	-	0.1	-	0.05	0.4	0.2	0	0	0	0	0	0.1
26	0.4	0.2	0.1	-	0.05	-	0.1	0.1	0.3	0.25	0.05	0.1	0.2	0.2
27	0.3	0.5	-	0.05	-	0.1	0.2	0.4	0	0	0.1	0.1	0.2	0.1
28	0.8	0.6	0.3	-	0.2	-	0.1	0.1	0.5	0.4	0.2	0.3	0.1	0.1
29	0.7	0.5	-	0.3	-	0.1	0.5	0.4	0	0	0.3	0.3	0.1	0.1
30	0.6	0.4	0.2	-	0.1	-	0.1	0.1	0.5	0.3	0.1	0.1	0.2	0.2

Приклад: Знайти центр мас поперечного перерізу, що показаний на рис.2.16. Розміри приведені в міліметрах.

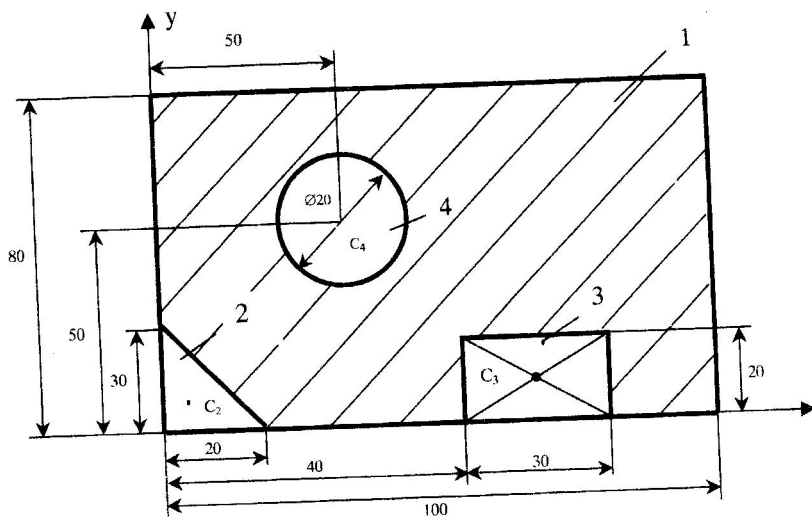


Рисунок 2.16

Центр мас поперечного перерізу знаходимо із виразів:

$$X_c = \frac{\sum_{k=2}^n S_k \cdot X_k}{\sum_{k=1}^n S_k}, Y_c = \frac{\sum_{k=2}^n S_k \cdot Y_k}{\sum_{k=1}^n S_k} \quad (2.26)$$

де: S_k - площа k -ї фігури; X_k, Y_k - координати центра мас k -ї фігури.

Поперечний переріз розглядаємо як прямокутник 1 розмірами 100x80мм з якого вирізали трикутник 2, прямокутник 3 та коло 4.

Визначимо площі та координати центрів мас тіл 1,2,3,4.

Тіло 1:

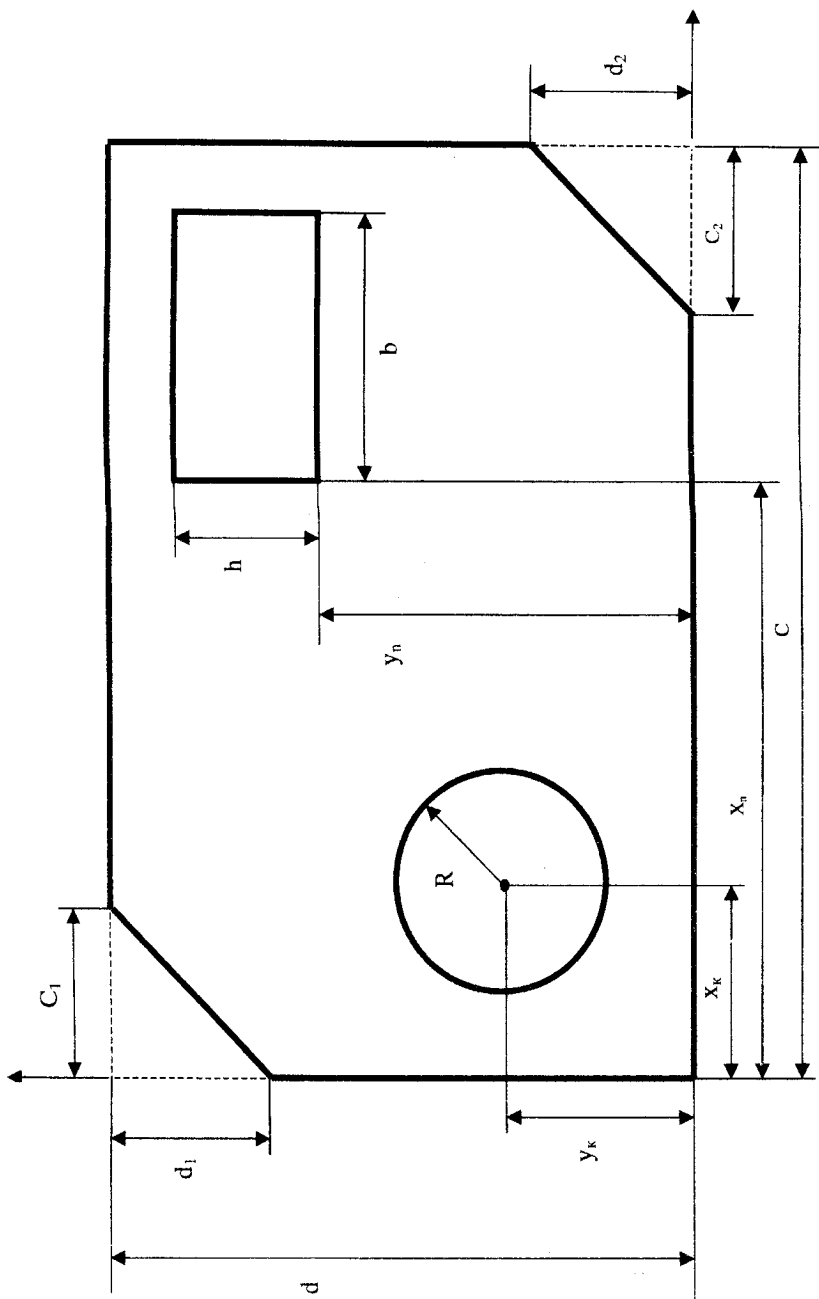


Рисунок 2.17

$$S_1 = 80 \times 100 = 8 \cdot 10^3 \text{ мм}^2$$

$$x_1 = 50 \text{ мм}, y_1 = 40 \text{ мм}$$

Тіло 2:

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 = 300 \text{ мм}^2$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \cdot 20 = \frac{20}{3} \text{ мм}; y_2 = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10 \text{ мм}$$

Тіло 3:

$$S_3 = 30 \cdot 20 = 600 \text{ мм}^2$$

$$x_3 = 55 \text{ мм}; y_3 = 10 \text{ мм}$$

Тіло 4:

$$S_4 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ мм}^2$$

$$x_4 = 50 \text{ мм}; y_4 = 50 \text{ мм}$$

На підставі виразів (2.26) знаходимо центр ваги поперечного перерізу, враховуючи, що тіла 2,3,4 вирізали із прямокутника. Тобто площі тіл 2,3,4 необхідно враховувати з від'ємним знаком.

$$X_c = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2 - S_3 \cdot x_3 - S_4 \cdot x_4}{S_1 - S_2 - S_3 - S_4} =$$

$$= \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 50 - 300 \cdot \frac{20}{3} - 600 \cdot 55 - 314 \cdot 50}{8 \cdot 10^3 - 300 - 600 - 314} = 51,47 \text{ мм}$$

$$Y_c = \frac{S_1 \cdot y_1 - S_2 \cdot y_2 - S_3 \cdot y_3 - S_4 \cdot y_4}{S_1 - S_2 - S_3 - S_4} =$$

$$= \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 40 - 300 \cdot 10 - 600 \cdot 10 - 314 \cdot 50}{8 \cdot 10^3 - 300 - 600 - 314} = 43,52 \text{ мм}$$

Таким чином: $X_c = 51,47 \text{ мм}; Y_c = 43,52 \text{ мм}$.

ОМ.2 Визначення поперечного перерізу балки при плоскому згині

Для балки рис.1.15 – 1.20 побудувати епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M та підібрати сталю балку прямокутного поперечного профілю рис.2.11. ($h=2b$) при $[\sigma]=160 \text{ МН/м}^2$.

Дані для розрахунків взяті з таблиці 1.2.

Приклад: Для балки рис.2.7а епюри поперечних сил Q та згинальних моментів M показані відповідно на рис.2.7б та 2.7в.

Розміри поперечного перерізу балки будемо знаходити із умови міцності (2.21)

$$\sigma_{xz} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]_{xz}$$

де $W_z = \frac{bh^2}{6}$ - момент опору.

Оскільки за умовою $h=2b$, то $W_z = \frac{2}{3}b^3$.

Знайдемо мінімальне значення ширини b поперечного профілю балки

$$\frac{3M_{\max}}{2b^3} = [\sigma]_{\text{зг}}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M_{\max}}{2[\sigma]_{\text{зг}}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 221 \cdot 10^3}{2 \cdot 9 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,059 \text{ м}$$

де $M_{\max} = \frac{221 \text{ кН} \cdot \text{м}}{9 \text{ К}}$ (рис.2.7в)- максимальне значення згинального моменту.

Примітка: $b=60 \text{ мм}$, $h=120 \text{ мм}$.

ОМ.3 Визначення діаметра вала при крученні

Для вала (рис.2.18) із умови міцності при крученні знайти діаметр поперечного перерізу та побудувати епюру кутів закручування. Дані для розрахунку взяті з табл.2.2. Модуль пружності ІІ-го роду $\sigma = 8 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

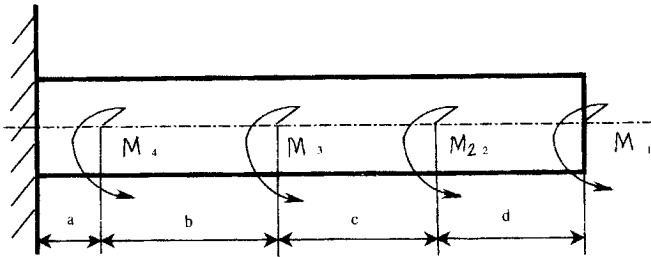


Рисунок 2.18

Таблиця 2.2

№ вар.	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	M_3 , кН·м	M_4 , кН·м	a , м	b , м	c , м	d , м	$[\tau]$, МН/м ²
1	2	-3	4	-5	0,2	0,1	0,3	0,4	35
2	-3	20	-30	15	0,3	0,2	0,4	0,5	40
3	4	-18	28	-10	0,4	0,3	0,5	0,6	45
4	-5	17	-26	15	0,5	0,4	0,2	0,1	50
5	6	-16	24	-10	0,6	0,5	0,4	0,7	55
6	-7	-8	22	5	0,2	0,6	0,3	0,4	60
7	-8	9	-20	10	0,3	0,7	0,4	0,5	65
8	-9	-6	18	8	0,4	0,8	0,5	0,6	70

Продовження таблиці 2.2

9	10	-8	-16	30	0,5	0,9	0,6	0,7	75
10	-11	-10	14	10	0,6	1,0	0,7	0,8	80
11	12	12	-10	-8	0,2	1,0	0,4	0,6	35
12	-13	-18	8	6	0,3	0,9	0,5	0,7	40
13	14	16	-6	7	0,4	0,8	0,5	0,6	45
14	-15	-14	6	8	0,5	0,7	0,6	0,8	50
15	16	-12	10	-13	0,6	0,6	0,7	0,9	55
16	2	-10	8	10	0,2	0,5	0,3	0,4	60
17	-3	8	-6	12	0,3	0,4	0,5	0,6	65
18	4	-6	5	15	0,4	0,3	0,5	0,6	70
19	-5	4	-3	6	0,5	0,2	0,3	0,6	75
20	6	-8	5	-7	0,6	0,1	0,2	0,4	80
21	7	10	-7	-12	0,2	0,1	0,3	0,4	30
22	-8	-12	8	10	0,3	0,2	0,5	0,6	35
23	9	14	-9	-8	0,4	0,3	0,6	0,5	40
24	-10	-16	10	9	0,5	0,4	0,6	0,7	45
25	-11	18	-12	20	0,6	0,5	0,7	0,8	50
26	-12	20	-10	-2	0,2	0,6	0,5	0,6	55
27	13	-13	8	-10	0,3	0,7	0,4	0,5	60
28	-14	18	-6	8	0,4	0,8	0,5	0,6	65
29	-15	-16	8	10	0,5	0,9	0,6	0,8	70
30	16	14	-10	-20	0,6	1,0	0,2	0,7	75

Приклад. До вала рис. 2.18 прикладені крутні моменти $M_1 = -10$ кН·м, $M_2 = 12$ кН·м, $M_3 = -4$ кН·м, $M_4 = 20$ кН·м.

Знайти діаметр поперечного перерізу вала та побудувати епюру кутів закручування, якщо $a = 1,2$ м, $b = 0,3$ м, $c = 0,9$ м, $d = 0,5$ м, $[\tau] = 100$ Мн/м²

На рис. 2.19, а покажемо схематично вал до якого прикладені крутні моменти $M_i (i=1,2,3,4)$ в реальних напрямках.

Знаходимо внутрішні крутні моменти, використовуючи метод перерізів.

$$0 \leq x_1 \leq 0,5 \text{ м.}$$

$$M_I = M_2 = 10 \text{ кН·м}$$

$$0 \leq x_2 \leq 0,9 \text{ м.}$$

$$M_{II} = M_1 - M_2 = 10 - 12 = -2 \text{ кН·м.}$$

$$0 \leq x_3 \leq 0,3 \text{ м.}$$

$$M_{III} = M_1 - M_2 + M_3 = 10 - 12 + 4 = -2 \text{ кН·м.}$$

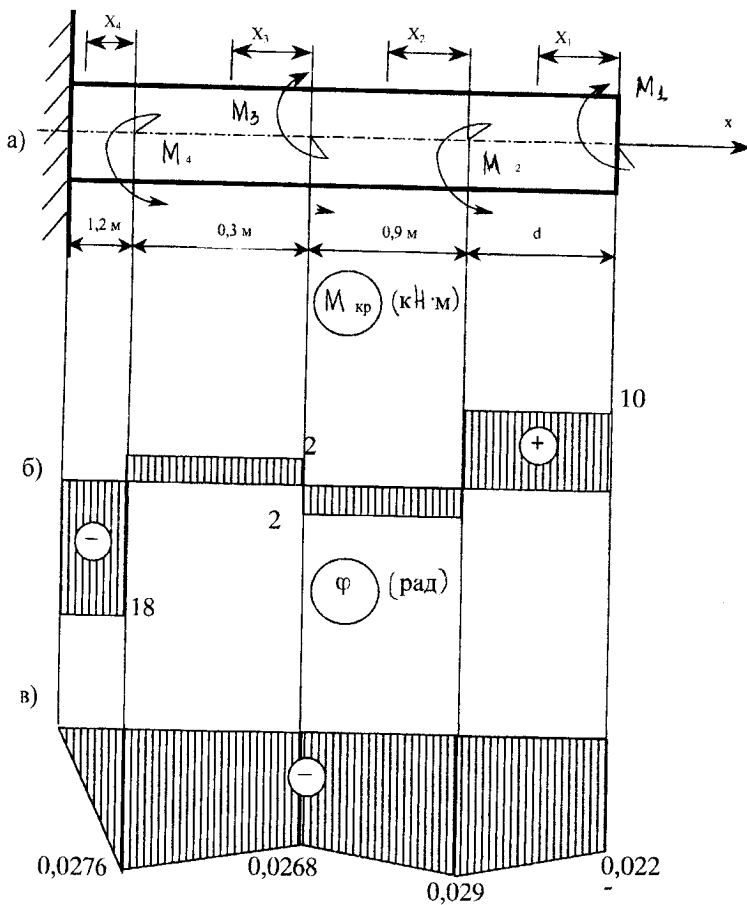


Рисунок 2.19

$$0 \leq x_4 \leq 1,2$$

$$M_{IV} = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 = 10 - 12 + 4 - 20 = -18 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Елюра крутних моментів приведена на рис. 2.19,б.

Із умови міцності при крученні (2.19)

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_x} \leq [\tau]$$

Знаходимо мінімальне значення діаметра вала в небезпечному перерізі $0 \leq x_4 \leq 1,2$ м.

$$\frac{16M_{IV}}{\pi d^3} = [\tau]$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_{IV}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 18 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,097 \text{ м}$$

де $W_x = \frac{\pi d^3}{16}$ – осьовий момент опору відносно осі x.

Приймаємо $d = 100$ мм.

Кут закручування знаходимо із виразу

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{\sigma \cdot I_x}$$

де l – довжина відрізка вала;

$$I_x = \frac{\pi d^4}{32} \text{ – момент інерції відносно осі x.}$$

Визначимо кут закручування на кожній ділянці

$$0 \leq x_4 \leq 1,2$$

$$\varphi_4 = \frac{M_{IV} \cdot 1,2}{\sigma \cdot I_x} = -\frac{18 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 9,8 \cdot 10^{-6}} = -0,0276 \text{ рад.}$$

$$0 \leq x_2 \leq 0,9$$

$$\varphi_3 = \varphi_4 + \frac{M_{III} \cdot 0,3}{\sigma \cdot I_x} = -0,055 + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 9,8 \cdot 10^{-6}} = -0,0268 \text{ рад.}$$

$$0 \leq x_3 \leq 0,3$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 + \frac{M_{II} \cdot 0,9}{\sigma \cdot I_x} = -0,0535 - \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,9}{8 \cdot 10^{10} \cdot 9,8 \cdot 10^{-6}} = -0,029 \text{ рад.}$$

$$0 \leq x_i \leq 0,5$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{M_i \cdot 0,5}{\sigma \cdot I_x} = -0,058 + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 9,8 \cdot 10^{-6}} = -0,0225 \text{ рад.}$$

Виходячи із отриманих значень φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), будусмо епюру кутів закручування вала (рис 2.19,в).

3 Кабелі та з'єднання

3.1 Оптичні кабелі

За останні десятиріччя почали широко застосовуватись оптичні кабелі для міського та міжміського зв'язку протяжністю до 100 км. Але такі переваги оптичних кабелів, як мала маса та захищеність від завад робить їх досить ефективними для передачі інформації і на великі відстані. Так проєктуються підводні кабельні магістралі між Англією та США протяжністю 6500 км на 2 – 6 тисяч каналів, та між Японією та США протяжністю 7200 км на 4000 каналів.

Ефективно використовуються оптичні кабелі на обчислювальних комплексах, літальних апаратах, каналах телекомунікацій та інших пристроях.

Оптичні кабелі перспективні для передачі інформації оптичного діапазону $10^{14} \dots 4 \cdot 10^{14}$ Гц. Це дозволить зекономити мідь, зменшити габарити та вагу кабелів. Необхідно відмітити, що оптичні кабелі можна прокладати по трасах звичайних електричних кабелів.

Оптичні волокна кабелів можна розділити на такі типи: кварцові, кварц-полімерні, багатоконпонентні та полімерні. Кварцові оптичні волокна виготовляються з високоякісного кварцового скла. Кварц-полімерні оптичні волокна виготовляються з кварцовим сердечником та полімерною оболонкою. Багатоконпонентні оптичні волокна виготовлені із скла з добавками різних окислів металів і використовуються для монтажу апаратури. Полімерні оптичні волокна виготовляються із полімерних матеріалів, що мають високі оптичні властивості і використовуються в медицині, в декоративному оформленні.

Для захисту оптичного волокна від фізичної та хімічної дії зовнішнього середовища та від механічних пошкоджень при дії навантаження використовуються захисні покриття із полімерних матеріалів, що повинні відповідати таким вимогам:

а) матеріал покриття повинен бути жорстким, щоб забезпечити механічний захист оптичного волокна;

б) покриття повинно бути еластичним однорідним та міцним, щоб забезпечити захист волокна від мікродеформації;

в) матеріал покриття повинен затримувати розповсюдження механічних коливань в оболонці оптичного волокна;

г) покриття не повинно створювати додаткових напруг та деформації в волокні;

д) матеріал покриття повинен швидко твердіти.

Підібрати полімерний матеріал з такими вимогами практично не можливо і тому захисні покриття виконуються багат шаровими.

Перший шар виконується на основі епоксидних та фенолформальдегідних лаків, водно-дисперсної емульсії полімера (тефлон FEP) або розплава полімера (гексахлорпропілен, полівінілхлорид або епоксіакрилит), а також модифікованої силіконової резини.

Другий (основний) шар виконується із фторопласта, поліпропілена, етиленвінілацетата, нейлона, капрона, поліетилену високого та низького тиску, кремнійорганічної резини. Найчастіше використовуються нейлон-12 так, як він практично не викликає мікрозгинів оптичного волокна.

В останій час між першим та другим шарами покриття почали наносити додатковий шар із м'якого полімерного матеріалу, наприклад поліуретана, модифікованої силіконової резини на основі полідіметилсилоксана та поліметилфенілсилоксана. Цей шар зводить до мінімуму вплив температури, зовнішнього тиску.

Оптичні кабелі повинні забезпечувати стабільність характеристик оптичного волокна при експлуатації та зберіганні, захист волокна від механічних, кліматичних та інших видів зовнішнього впливу, зручності в експлуатації, ремонті та монтажі.

Для ЕОМ використовуються круглі кабелі із зміцнювальними та демпфівними елементами, наприклад: волокно 1 в центрі (рис. 3.1) двохарова захисна оболонка 2 (фторопласт + поліефір), волокна 3 (скловолокно), демпфівна поліуретанова оболонка 4, армувальні елементи 5 (кевлар), поліхлорвінілова захисна оболонка 6, або сталевий трос (рис.3.2) покривається поліуретановою оболонкою 3 на яку накручуються оптичні волокна 1 в двохаровій захисній оболонці 4, що обмотуються полімерними стрічками 5, армуються нитками типу кевлар 6 та покриваються захисною оболонкою з поліуретану.

Оптичні кабелі для ЕОМ характеризуються простотою конструкції

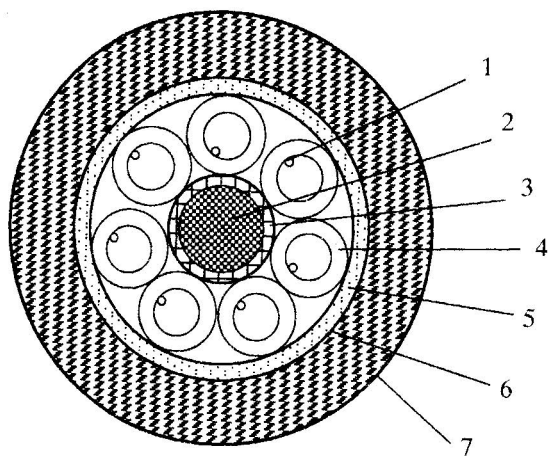


Рисунок 3.1

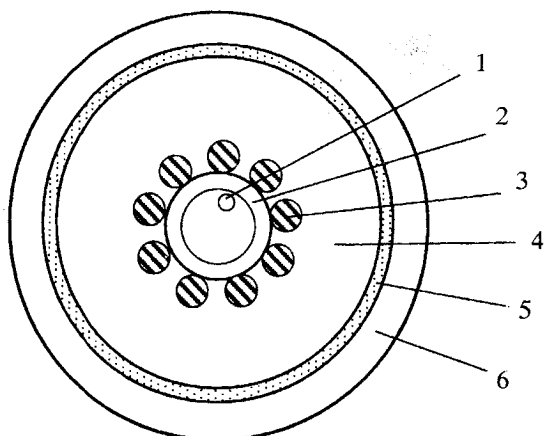


Рисунок 3.2

та мінімальною вартістю. Лінії зв'язку в ЕОМ розподіляються по протяжності (короткі – менше 200 м, середні – до 1000 м і довгі – більше 1000 м), по пропускній можливості (низькі – менше 1 Мбіт/с, середні – менше 10 Мбіт/с та високі – більше 10 Мбіт/с). В сучасних конструкціях оптичних кабелів для ЕОМ використовуються полімерні, багатокомпонентні та кварцеві з полімерною світловідбивальною оболонкою оптичні волокна діаметром 100-600 мкм, з шириною полоси пропускання до 20 МГц. Для з'єднання ЕОМ використовуються оптичні волокна з діаметром сердечника 50-63 мкм, шириною полоси пропускання більше 200 МГц.

Найкращий захист волокон від впливу навколишнього середовища та механічних навантажень забезпечуються в кабелях з желейним заповненням, армованими та виготовленими з негорючих матеріалів (рис.3.1, 3.2).

Оскільки на оптичні волокна не впливають сильні електромагнітні поля, то в розроблені конструкції алюмінієвих провідів 1 (рис.3.3, 3.4) для високовольтних ліній передач в середині яких знаходяться оптичні волокна 3 з захисною оболонкою 2.

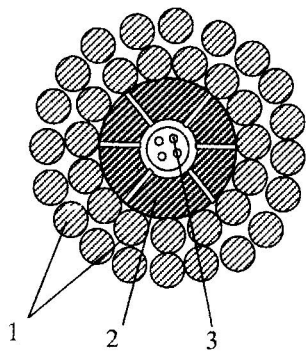


Рисунок 3.3

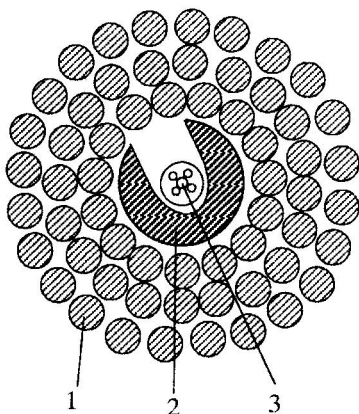


Рисунок 3.4

- де 1 – жили із алюмінієвого сплаву;
 2 – U-подібний елемент із алюмінієвого сплаву;
 3 – оптичне волокно.

Розглянемо спрощену модель (рис.3.5) оптичного кабеля в якому навколо армувального центрального елемента скручені оптичні волокна 2 з кроком h . Волокна знаходяться в полімерній оболонці 3 з демпфером 4 та захисній оболонці 5.

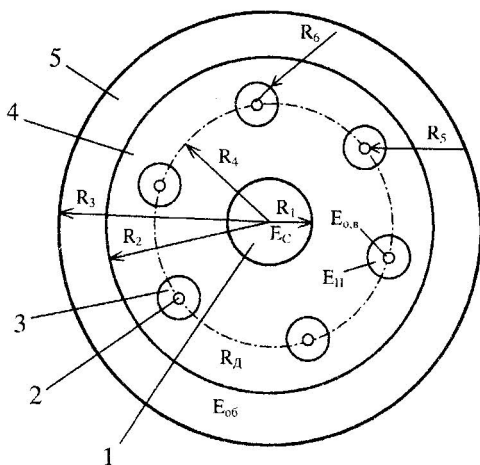


Рисунок 3.5

Якщо на оптичний кабель діє сила F , то із умов рівноваги сил вздовж осі оптичного кабелю, отримасмо:

$$F = \varepsilon_K (E_C \cdot S_C + E_\Delta \cdot S_\Delta + E_{OB} \cdot S_{OB}) + n_0 \cdot F_0 \cdot \cos \Theta \quad (3.1)$$

де $E_C, E_\Delta, E_{OB}, S_C, S_\Delta, S_{OB}$ — модуль пружності та площі армувального центрального волокна 2, демпфера 4, захисної оболонки 5;

ε_K — відносна деформація оптичного кабелю;

n_0 — кількість оптичних волокон;

F_0 — сила натягу оптичного волокна;

$\Theta = \arctg(2\pi R_4 / \pi)$ — кут скрутки оптичних волокон у кабелі;

R_4 — радіус скрутки;

h — довжина кабелю, що відповідає одному витку оптичного волокна у скрутці.

Знайдемо силу F_0 , що розтягує оптичне волокно

$$F_0 = (E_0 \cdot S_0 + E_n \cdot S_n) \cdot \varepsilon_0 \quad (3.2)$$

де E_0, E_n, S_0, S_n — модулі пружності та площі поперечного перерізу оптичного волокна 2 і полімерної оболонки 3;

ε_0 — відносна деформація оптичного волокна в полімерній оболонці.

Радіус кривизни ρ гвинтової лінії по якій укладається оптичне волокно у кабелі знаходиться з виразу:

$$\rho = \frac{R_4}{\sin^2 \Theta} \quad (3.3)$$

При дії на волокно сили F_0 з'являється нормальна поперечна сила $F_n = F_0/\rho$, яка стискає шар демпфера 4 між оптичними волокнами та центральним елементом 1 (рис.3.5) і радіус R_n скрутки зменшується

$$\delta = \varepsilon_4 R_4 \quad (3.4)$$

де ε_4 — відносна деформація матеріалів по радіусу R_4 .

Зв'язок між відносними деформаціями кабеля ε_k , оптичного волокна ε_0 та скрутки ε_4 знайдемо за допомогою трикутника сил (рис.3.6), нехтуючи величинами другого порядку малості .

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_k \cdot \cos^2 \Theta - \varepsilon_k \cdot \sin^2 \Theta \quad (3.5)$$

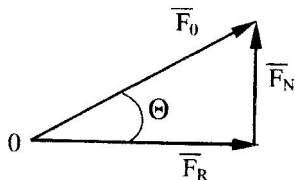


Рисунок 3.6.

Розрахунки показали, що при $E_C = E_O = 60$ ГПа, $E_n = 200$ МПа, $E_{o6} = 300$ МПа, $R_1 = 1$ мм, $R_2 = 3$ мм, $R_3 = 6$ мм, $R_4 = 2$ мм, $R_5 = 75$ мм, $R_6 = 0.5$ мм, $n_0 = 6$, $[\varepsilon_0] = 0.25\%$, найбільша сила F відповідає досить малим модулям пружності демпфера $E_d = 1 \dots 2$ МПа та найменшому кроку скрутки $h/R_4 = 20$. При такому значенні h/R_4 деформація кабеля $\varepsilon_k = (3,7 \dots 5) \varepsilon_0$. Це є перевагою розглянутої конструкції, оскільки при $\varepsilon_k \gg \varepsilon_0$ створюється запас деформації для проходження початкової ділянки розтягу оптичного кабеля коли армувальний елемент із синтетичних волокон має знижений модуль пружності.

При згині кабеля відбувається додатковий розтяг оптичних волокон. Якщо оптичне волокно щільно з'єднане з демпфером, то при $E_d = 3 \dots 10$ МПа допустимі радіуси згину перевищують 200...500 мм. При $E_d = 1$ МПа допустимі радіуси згину $R = 75 \dots 150$ мм. В цьому випадку деформація оптичного волокна від розтягу приблизно дорівнює деформації при згині. Таким чином якщо оптичне волокно щільно з'єднане з демпфером, то необхідно використовувати матеріал з $E_d = 0,1 \dots 1$ МПа. Тільки в такому випадку оптичний кабель можна згинати з достатньо малим

радіусом 20 мм. При $R_4 = 2.5$ мм ($h/R_4 = 20 \dots 40$) або при $R_4 = 5$ мм ($h/R_4 = 20 \dots 30$).

Д.1 Розрахунок клемового з'єднання

На вал 1 (рис.3.7) з допомогою болта 2 та гайки 3 закріплюється важіль 4 на який діє сила F під кутом α . Знайти діаметр болта 2 вважаючи, що важіль нерухомий і коефіцієнт тертя між валом 1 і важелем 4 дорівнює f . Дані для розрахунку взяти з таблиці 3.1.

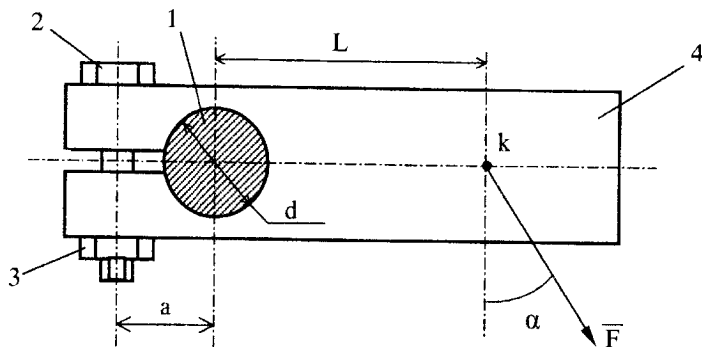


Рисунок 3.7

Таблиця 3.1

№ вар.	F, кН	L, мм	d, мм	f	a, мм	α , град
1	1	300	50	0,4	50	30
2	2	200	60	0,45	60	45
3	3	100	70	0,4	70	60
4	4	100	80	0,45	70	120
5	0,5	600	30	0,15	40	135
6	0,6	500	40	0,16	50	150
7	0,7	400	40	0,17	50	30
8	0,8	300	45	0,18	65	45
9	0,9	350	50	0,19	70	60

Продовження таблиці 3.1

10	1	250	55	0,2	75	120
11	2	300	60	0,21	80	135
12	3	250	65	0,22	85	150
13	4	150	70	0,24	90	30
14	0,9	600	45	0,23	55	45
15	0,8	200	45	0,22	60	60
16	0,7	400	50	0,21	70	120
17	0,6	350	55	0,2	75	135
18	0,5	400	20	0,19	40	150
19	0,4	600	25	0,18	45	30
20	1	350	60	0,4	70	45
21	2	250	65	0,35	75	60
22	3	450	70	0,4	80	120
23	4	250	80	0,6	90	135
24	0,4	800	35	0,15	45	150
25	0,5	700	40	0,16	50	30
26	0,6	600	45	0,17	65	45
27	0,7	500	50	0,18	70	60
28	0,8	400	55	0,19	75	120
29	0,9	300	60	0,20	80	135
30	1	450	65	0,21	85	150

Приклад: Знайти діаметр болта 2 (рис.3.7) якщо: $L=400$ мм, $a=40$ мм,
 $d=35$ мм, $F=600$ Н, $f=0.3$, $\alpha=60^\circ$.

Розглянемо рівновагу важеля, рис. 3.8.

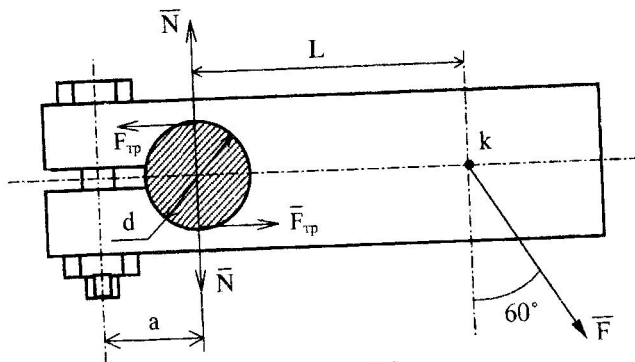


Рисунок 3.8

Дію вала на важіль замінюємо приведеними силами N та $F_{\text{тр}}$. Оскільки важіль перебуває у спокої, то:

$$\sum m_0 \bar{F} = 0; F_{\text{тр}} \cdot d - F \cdot L \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$F_{\text{тр}} = (F \cdot L / d) \cdot \cos 60^\circ.$$

За законом Амонтона-Кулона при критичній рівновазі отримаємо:

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N;$$

Тоді

$$N = \frac{F \cdot L}{f \cdot d} \cdot \cos 60^\circ$$

Введемо коефіцієнт $n=1,2$ і визначимо розрахункове значення нормальної сили N_p :

$$N_p = n \cdot N = \frac{F \cdot L \cdot n}{f \cdot d} \cdot \cos 60^\circ \quad (3.6)$$

Силу затяжки болта знайдемо розглядаючи схематично частину важеля, що знаходиться зліва від точки C та замінюючи жорстке зацеплення на шарнірне (рис.3.9).

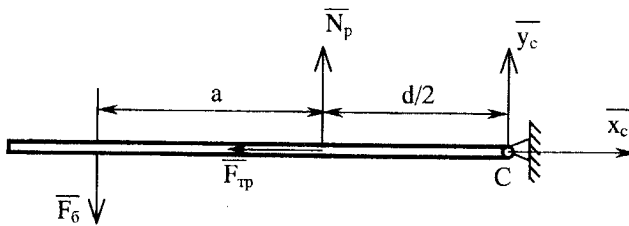


Рисунок 3.9

$$\sum m_C \bar{F} = 0; F_6 \cdot (d/2 + a) - N_p \cdot d/2 = 0$$

$$F_6 = \frac{N_p \cdot d}{2a + d} \quad (3.7)$$

або, враховуючи (3.6),

$$F_6 = \frac{F \cdot L \cdot n}{f \cdot (2a + d)} \cdot \cos 60^\circ.$$

Запишемо умову міцності болта при розтягу:

$$\sigma = \frac{F_6}{A} \leq [\sigma]$$

де $A = \frac{\pi \cdot d^2_B}{4}$ — площа поперечного перерізу болта;

d_6 — внутрішній діаметр різьби болта;

$[\sigma] = 160 \text{ МН/м}^2$ — допустимі нормальні напруги.

Тоді мінімальний діаметр болта

$$d_6 = \sqrt{\frac{4F_6}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot F \cdot L \cdot n \cdot \cos 60^\circ}{\pi \cdot f \cdot [\sigma] \cdot (2a + d)}};$$

$$d_6 = \sqrt{\frac{4 \cdot 600 \cdot 0,4 \cdot 1,2 \cdot 0,5}{3,14 \cdot 0,3 \cdot 160 \cdot 10^6 (2 \cdot 0,04 + 0,035)}} = 5,76 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

За довідником [1] вибираємо різьбу М8 для якої внутрішній діаметр різьби $d_1 = 6,647 > 5,76 \text{ мм}$.

Д.2 Розрахунок закріплення стиків

Кронштейн 1 (рис.3.10) закріплюється на вертикальній стіні з допомогою двох болтів 2. Знайти діаметр болтів якщо чугунний кронштейн навантажуються силою F . Матеріал стіни та інші дані для розрахунку приведені в табл. 3.2.

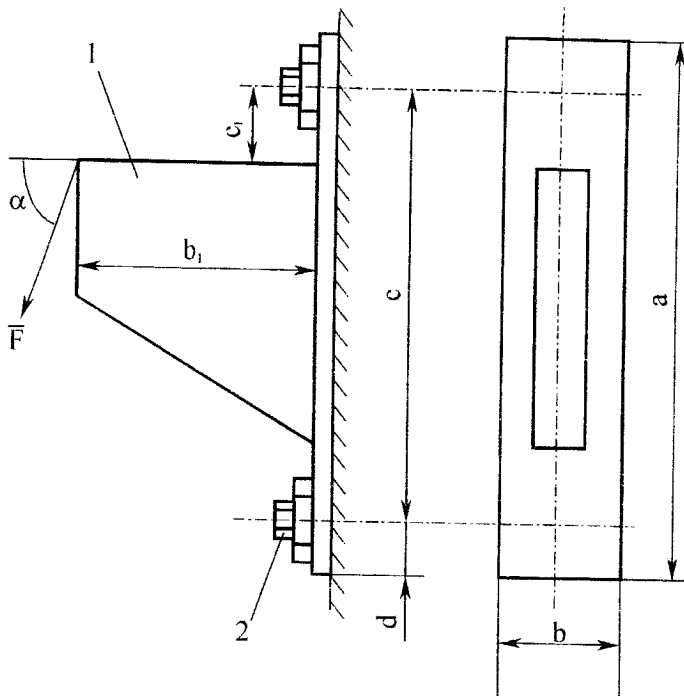


Рисунок 3.10

Таблица 3.2

№ вар.	a, м	b, м	c, м	d, м	c ₁ , м	b ₁ , м	F, кН	α град	мат.	[σ] _м МПа	f	[σ] _н МПа
1	0,1	0,05	0,08	0,01	0,03	0,3	0,2	30	ц	0,8	0,4	160
2	0,2	0,1	0,16	0,02	0,04	0,4	0,3	45	д	1,5	0,41	170
3	0,3	0,15	0,26	0,02	0,06	0,5	0,4	60	ч	120	0,18	180

4	0,4	0,2	0,36	0,02	0,06	0,6	0,5	120	ц	1,0	0,41	160
5	0,5	0,25	0,45	0,02	0,08	0,7	0,6	135	д	1,6	0,42	165
6	0,6	0,2	0,54	0,02	0,1	0,8	0,7	150	ч	1,30	0,19	170
7	0,1	0,03	0,08	0,01	0,01	0,2	0,15	210	ц	0,9	0,42	175
8	0,2	0,06	0,16	0,02	0,03	0,3	0,25	225	д	1,7	0,43	180
9	0,3	0,06	0,26	0,02	0,03	0,8	0,35	140	ч	1,40	0,20	160
10	0,4	0,08	0,36	0,02	0,04	0,9	0,45	300	ц	2,0	0,43	165
11	0,5	0,08	0,45	0,02	0,05	1,0	0,55	315	д	1,8	0,44	170
12	0,6	0,10	0,55	0,02	0,04	0,8	0,65	330	ч	1,50	0,20	175
13	0,1	0,02	0,08	0,01	0,01	0,2	0,1	30	ц	1,2	0,44	180
14	0,2	0,04	0,16	0,02	0,02	0,25	0,2	45	д	1,2	0,45	185
15	0,3	0,04	0,26	0,02	0,04	0,35	0,3	60	ч	1,60	0,18	160
16	0,4	0,04	0,36	0,02	0,06	0,45	0,4	120	ц	0,8	0,45	165
17	0,5	0,04	0,44	0,02	0,08	0,55	0,5	135	д	1,3	0,4	170
18	0,6	0,04	0,54	0,02	0,06	0,65	0,6	150	ч	1,70	0,19	175
19	0,1	0,04	0,08	0,02	0,01	0,3	0,15	210	ц	0,9	0,4	180
20	0,2	0,06	0,07	0,015	0,02	0,4	0,2	225	д	1,4	0,41	160
21	0,3	0,06	0,26	0,02	0,04	0,45	0,25	240	ч	1,60	0,20	165
22	0,4	0,06	0,35	0,025	0,025	0,55	0,3	300	д	1,5	0,42	170
23	0,5	0,08	0,45	0,02	0,04	0,65	0,35	30	ч	1,80	0,21	175
24	0,6	0,08	0,55	0,02	0,08	0,75	0,4	45	ц	1,0	0,41	180
25	0,1	0,06	0,08	0,01	0,02	0,3	0,1	60	ц	1,1	0,42	160
26	0,2	0,05	0,18	0,01	0,04	0,3	0,2	120	ч	1,20	0,22	165
27	0,3	0,05	0,26	0,02	0,06	0,4	0,3	135	д	1,2	0,43	170
28	0,4	0,05	0,36	0,02	0,08	0,5	0,4	150	ч	1,30	0,23	175
29	0,5	0,05	0,44	0,02	0,10	0,6	0,5	210	ц	1,2	0,43	180
30	0,6	0,05	0,54	0,03	0,12	0,7	0,6	225	д	1,0	0,45	160

Умовні позначення: ц – цегла; д – дерево; ч – чугун.

Приклад. Визначити діаметр болтів для закріплення кронштейна (рис. 3.10) до сталевій стінки при $a = 0,25$ м; $b = 0,02$ м; $c = 0,2$ м; $d = 0,02$ м; $c_1 = 0,03$ м; $b_1 = 0,3$ м; $F = 0,4$ кН; $\alpha = 60^\circ$; $[\tau]_{зм} = 135$ МН/м²; $f = 0,2$; $[\tau]_p = 200$ МН/м².

Розглянемо рівновагу кронштейна (рис 3.11) на який діють сили: активна сила F , сила натяжки балки P , реакція стінки R яка визначається з

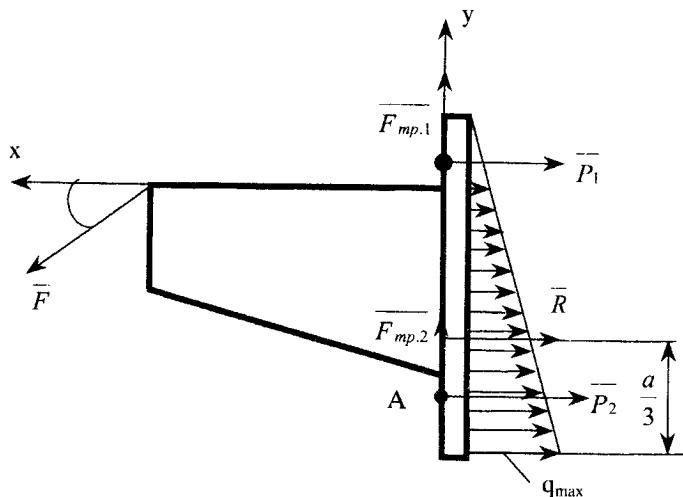


Рисунок 3.11

виразу

$$R = \sigma_{зм} \cdot S \quad (3.7)$$

де S – опорна площа плити; $\sigma_{зм}$ – напруги зминання опори від стягування болтів силою $2P$.

$$S = a \cdot b \quad (3.8)$$

На підставі аксіоми рівноваги:

$$\sum M_a \bar{F} = 0; P_1 c - R(a \cdot \frac{1}{3} - d) - F(c - c_1) \cdot \sin 60^\circ - F \cdot b_1 \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (3.9)$$

$$\sum F_y = 0; F_{mp,1} + F_{mp,2} - F \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (3.10)$$

$$\sum F_x = 0; -P_1 - P_2 + R + F \cdot \sin 60^\circ = 0 \quad (3.11)$$

При критичній рівновазі закон Амонтона-Кулона запишеться:

$$\left. \begin{aligned} F_{mp,1} &= f \cdot P_1 \\ F_{mp,2} &= f \cdot P_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Із рівняння (3.9) – (3.12) знаходимо:

$$R = \frac{F}{f} (\cos 60^\circ - f \sin 60^\circ) = 653,6 \text{ Н}$$

$$P_2 = \frac{1}{c} \left[R \left(\frac{1}{3} a - d \right) + F(c - c_1) \cdot \sin 60^\circ + F \cdot b_1 \cdot \cos 60^\circ \right] = 801,1 \text{ Н}$$

$$P_2 = R + F \cdot \sin 60^\circ - P_1 = 198,5 \text{ Н}$$

Перевіримо опорну стінку на зминання

$$\sigma_{зм} = \frac{R}{S} = \frac{R}{a \cdot b} = 130720 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sigma_{зм} < [\tau]_{зм} = 135 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2.$$

Запишемо умову міцності болта на розтяг

$$\sigma_p = \frac{4P_1}{\pi d_1^2} \leq [\sigma]_p$$

Тоді мінімальний діаметр болта

$$d_1 = \sqrt[2]{\frac{4P_1}{\pi[\sigma]_p}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

За довідником [1] вибираємо різьбу М 3,5 для якої внутрішній діаметр різьби $d_1 = 2,85 \text{ мм}$.

Д.3 Розрахунок закріплення фланцевого електродвигуна

Електродвигун (рис. 3.12) потужністю N кВт, кутовою швидкістю ω та вагою G закріплюється Z болтами до фланця 2. Знайти діаметр болтів, якщо коефіцієнт тертя між конструкційними поверхнями електродвигуна f . Дані для розрахунку взяти з табл 3.3.

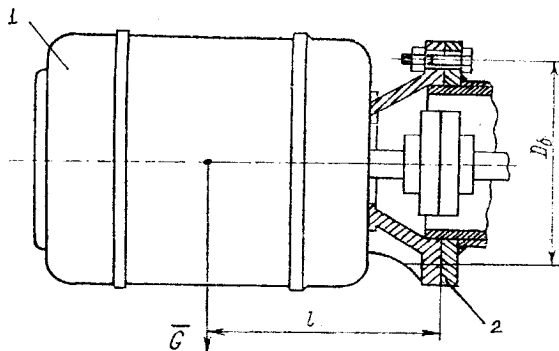


Рисунок 3.12

Таблица 3.3

N, кВа	ω , 1/с	G, кН	l, мм	D ₆ , мм	Z, ШТ	f	$[\sigma]_6$, МН/м ²	$[\sigma]_{33}$, МН/м ²	$[\tau]_{кр2}$, МН/м ²
4	40	1	220	300	4	0,1	160	80	60
4,5	45	1,1	230	310	4	0,11	150	90	70
5	50	1,2	240	320	4	0,12	140	100	80
5,5	55	1,3	250	330	4	0,13	130	80	60
6	60	1,4	260	340	6	0,14	120	90	70
6,5	65	1,5	270	350	6	0,15	130	100	80
7	70	1,6	280	360	6	0,16	140	80	60
7,5	75	1,7	290	370	6	0,17	150	90	70
8	80	1,8	290	380	6	0,18	160	1008	80
8,5	85	1,9	300	390	6	0,19	170	0	60
9	90	2,0	310	400	6	0,20	130	90	70
9,5	95	2,1	320	410	6	0,21	140	100	80
10	100	2,3	330	420	8	0,22	150	80	60
10,5	95	2,4	340	430	8	0,23	160	90	70
11	90	2,5	340	440	8	0,24	170	100	80
11,5	85	2,6	350	450	8	0,25	180	80	60
12	80	2,7	350	460	8	0,26	170	90	70
12,5	75	2,8	360	470	8	0,27	160	100	80
13	70	2,9	370	480	8	0,28	150	80	60
13,5	75	3,0	380	490	8	0,29	140	90	70
14	80	3,1	390	400	8	0,3	130	100	80
14,5	85	3,1	400	420	8	0,31	120	80	60
15	90	3,2	410	440	8	0,32	130	90	70

14	95	3,0	390	380	8	0,3	140	100	80
13	90	2,8	380	360	8	0,28	150	80	60
12	85	2,6	370	340	6	0,26	160	90	70
11	80	2,4	360	320	6	0,24	170	100	80
10	75	2,2	350	300	6	0,22	180	80	60
9	70	2,0	340	280	4	0,2	160	90	70
8	60	1,8	300	260	4	0,18	150	100	80

Приклад. Знайти діаметр болтів для закріплення електродвигуна (рис.3.12) якщо:

$$N = 10 \text{ кВт}; \quad w = 50 \frac{1}{\text{с}}; \quad \sigma = 2,5 \text{ кН}; \quad l = 350 \text{ мм}; \quad D_{\delta} = 400 \text{ мм};$$

$$Z = 6 \text{ шт}; \quad f = 0,2;$$

$$[\sigma]_p = 120 \text{ Мн} / \text{М}^2$$

Нехай P сила затяжки одного болта.

Тоді

$$P = P_{\sigma} + P_N$$

де P_{σ} - сила затяжки болта, що компенсує вагу двигуна;

P_N - сила затяжки болта щоб забезпечити необхідну силу тертя між поверхнею електродвигуна та фланцем.

Із умови рівноваги електродвигуна отримаємо:

$$\sum m_A \bar{F} = 0; \quad \sigma \cdot l - \frac{Z}{2} P_{\sigma} \cdot D \delta = 0$$

$$P_{\sigma} = \frac{2\sigma \cdot l}{Z \cdot D \delta}$$

Знайдемо силу P_N - при критичній рівновазі електродвигуна .

$$M_{кр} = F_{mp} \cdot D \delta$$

$$\text{Оскільки } M_{rh} = \frac{N}{\omega}; \quad F_{mp} = f \cdot Z \cdot P \cdot N, \text{ то } P_N = \frac{N}{\omega \cdot f \cdot Z \cdot D \cdot \delta}$$

Тоді сила затяжки одного болта

$$P = \left(\frac{2 \cdot \sigma \cdot \ell}{Z \cdot D_\phi} + \frac{N}{\omega \cdot f \cdot Z \cdot D} \right) \quad n = \frac{1}{Z \cdot D_\phi} \left(2\sigma \cdot \ell + \frac{N}{f \cdot \omega} \right) \cdot n$$

де $n=1,5\dots 2$ - коефіцієнт запасу; $n=2$

$$P = 2219,6 \text{ Н}$$

Знайдемо діаметр болта із умови міцності при розтягу

$$\sigma = \frac{4P}{\pi \cdot d_1^2} \leq [\sigma]_p$$

Тоді мінімальний діаметр болта

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{4P}{\pi[\tau]_p}} = 4,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Оскільки при розрахунках не враховувались дотичні напруги, то отримане значення d_1 збільшуємо в 2,5...3,5 рази.

$$D_1 = 3 \cdot d_1 = 3 \cdot 4,85 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 14,55 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

За довідником [1] приймасмо болт з різьбою М 18 для якої внутрішній діаметр різьби $D_1 = 15,294 \text{ мм} > 14,55 \text{ мм}$.

При монтажі затяжку болтів виконувати динамометричним ключем.

3.2 Розрахунок шпонки

Для електродвигуна (рис.3.12) потужністю N та кутовою швидкістю ω знайти діаметр ротора та підібрати шпонку із умови міцності її на зріз.

Дані для розрахунку взяти із табл. 3.3.

Приклад: Знайти діаметр вихідного кінця ротора електродвигуна та підібрати призматичну шпонку .

Якщо: $N=10 \text{ кВт}$; $\omega = 50 \frac{1}{\text{с}}$; $[\tau]_s = 100 \frac{\text{Мн}}{\text{м}^2}$; $[\varepsilon]_{\text{ш}} = 80 \frac{\text{Мн}}{\text{м}^2}$;

Крутний момент на валу ротора

$$M_{кр} = \frac{N}{\omega} = \frac{10000}{50} = 200 \text{ н.м.}$$

Із умови міцності на кручення знайдемо діаметр вихідного кінця ротора.

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau]_{кр}$$

де $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$ - момент опору відносно осі вала.

Мінімальний діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi [\tau]_{кр}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 200}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Приймаємо $D=25$ мм

За довідником [1] (ГОСТ 8768-68) для діаметра вала $\varnothing 25$ вибираємо розміри поперечного перерізу призматичної шпонки

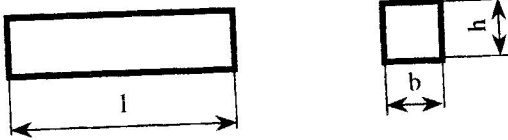


Рисунок 3.13

Довжину шпонки l знайдемо із умови міцності шпонки на зріз.

$$\tau = \frac{F}{b \cdot l} \leq [\tau]_{зр}$$

де $F = \frac{2M_{кр}}{D}$ - що намагається зрізати шпонку

Мінімальна довжина l шпонки буде дорівнювати:

$$l = \frac{2M_{кр}}{D \cdot b \cdot [\tau]_{зр}} = \frac{2 \cdot 200}{0,025 \cdot 0,008 \cdot 100 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

Приймаємо $l = 20$ мм

3.3 Питання до колоквіуму з курсу деталі машин

1. Деталі машин. Основні поняття.
2. Елементи теорії надійності.
3. Критерії працездатності машин.
4. Допуски та посадки. Стандартизація.
5. Зрівноваження механізмів.
6. Статичне та динамічне балансування.
7. Оптичні кабелі.
8. Матеріали.
9. Фрикційні передачі.
10. Зубчасті передачі.
11. Передачі гвинт-гайка.
12. Пасові передачі.
13. Черв'ячні передачі.
14. Ланцюгові передачі.
15. Осі та вали.
16. Підшипники.
17. Муфти.
18. Нарізні з'єднання.
19. Пружини.
20. Зварні, паяні та клеєні з'єднання.

Література

1. Анурьев В.И. Справочник конструктора машиностроителя: В 3-х т. Т1 – 5-е изд., пер. і доп. – М.: Машиностроение, 1978-728 с.,пл.
2. Анурьев В.И. Справочник конструктора машиностроителя: В 3-х т. Т2 – 5-е изд., пер. і доп. – М.: Машиностроение, 1978-539 с.,пл.
3. Бутеник Н.В. и др. Курс теоретической механики. – в 2-х томах Т1: Статика и кинематика. – 4-е изд., исправл. – М.: Наука. 1985. – 240 с.
4. Бутеник Н.В. и др. Курс теоретической механики. – в 2-х томах Т2: Динамика. – 3-е изд., исправл. – М.: Наука. 1985. – 495 с.
5. Гроднев И.И. и др. Оптические кабели: конструкции, характеристики, производство и применение. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 176 с.
6. Теорія споруд. Модуль І. Теоретична механіка. Навчальний посібник /В.О. Приятельчук та ін. – В.: ВДТУ. 1997 – 85 с. Укр. мовою/.
7. Теорія споруд. Модуль ІІ. Елементи опору матеріалів. Навчальний посібник/ В.А. Огородніков та ін. – В.: ВДТУ. 1997. – 92 с. Укр. мовою/.
8. Теоретична механіка. кн.1. Теоретична механіка: Підручник/ Д.В. Чернілевського та ін. За ред. Чернілевського. – К.: НМК ВО, 1992 - с.
9. Технічна механіка. Кн.2. Опір матеріалів: Підручник/ В.Г. Нахайчук та ін. За ред. Д.В. Чернілевського. – К.:НМК ВО, 1992. – 272 с.
10. Чернілевський Д.В. та ін. Технічна механіка. Кн.3.: Основи теорії машин та механізмів: Підручник/ За ред. Д.В. Чернілевського. – К.: НМК ВО, 1992. – 168 с.
11. Чернілевський Д.В. та ін. Технічна механіка. Кн.4.: Деталі машин: Підручник/ За ред. Чернілевського. – К.: НМК ВО, 1992. – 360 с.