Б. В. Гриньов, І. К. Кириченко

# ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

ПІДРУЧНИК ДЛЯ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

ГІМНАЗІЯ

Б. В. Гриньов
І. К. Кириченко

# ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

*Підручник для вищих технічних навчальних закладів*

*За редакцією доктора фізико-математичних наук, професора О. М. Литвина*

*Затверджено Міністерством освіти і науки України*



Харків
«Гімназія»
2008

УДК 378:512.942
ББК 22.151.51я73
Г 85

**Видано за рахунок державних коштів**
**Продаж заборонено**

*Затверджено*
*Міністерством освіти і науки України*
*(Лист № 1.4/18–Г–1764.1 від 22.10.07 р.)*



**Гриньов Б. В., Кириченко І. К.**
Г 85 Векторна алгебра: Підруч. для вищих техн. навч. закладів / За ред. О. М. Литвина.— Харків: Гімназія, 2008.— 164 с.
ISBN 978-966-8319-90-7.

Підручник є другою частиною першого тому загального курсу вищої математики. У другій книзі розглядаються загальні розділи векторної алгебри: лінійні операції з векторами, добуток векторів, лінійний простір. Підручник містить теоретичні відомості, доведення теорем, короткі історичні довідки щодо виникнення основних понять, термінології та символіки. Викладання теоретичного матеріалу ілюструється великою кількістю прикладів, значна частина яких є його продовженням. Наприкінці кожної глави наведено вправи для самостійного закріплення пройденого матеріалу.

Пропонується студентам інженерно-технічних та інженерно-педагогічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**УДК 378:942**
**ББК 22.151.51я73**



ISBN 978-966-8319-90-7

# ЗМІСТ

## Лінійні операції з векторами



## Добуток векторів

## Лінійний простір



## Відповіді до вправ



## Предметний покажчик

*Хіба у світі нескінченному напрям є?*
*Хіба далям нескінченним вимір є?*

*Гянджеві Нізамі*

Поняття вектора з'явилося в середині XIX століття в працях декількох учених майже одночасно. Перше векторне числення було створене італійським математиком Д. Беллавітісом (1803–1880). У своїй праці «Метод еквіполенцій» (1854) він розглянув своєрідну аналітичну геометрію на площині, об'єктами дослідження якої були напрямлені відрізки. Термін "вектор" був запроваджений у 1845 році англійським математиком У. Гамільтоном (1805–1865) і походить від латинського vehere — "нести", а vector — "той, що несе". Загальноприйняте зараз позначення в математиці вектора стрілкою над буквою запровадив на початку XIX століття швейцарський математик Ж. Р. Арган (1768–1822), а "жирними" літерами в друкованому тексті майже через 100 років — англійський учений Олівер Гевісайд (1850–1925).

# Глава 1
# Лінійні операції з векторами

## 1.1 ВЕКТОРНІ ВЕЛИЧИНИ

Усі величини, що характеризують різноманітні явища та процеси в природі, можна розділити на два типи. До першого належать, наприклад, маса, температура, довжина відрізка, кількість робітників на підприємстві, вартість продукції тощо, тобто такі величини, які можна визначити за допомогою лише одного числа. Величини, які повністю характеризуються своїм числовим значенням, називаються *скалярними*, або *скалярами*. Усі величини, якими ми користувалися до сих пір, були скалярними, тому термін скаляр нами не вживався. Надалі ми будемо користуватися таким терміном з метою підкреслення типу даних величин у тому випадку, коли в цьому буде потреба.

До другого типу величин належать, наприклад, швидкість, сила, прискорення, переміщення тощо, тобто такі величини, які не можна визначити за допомогою лише одного числа. Величини, які, крім свого числового значення, характеризуються також певним напрямом, називаються *векторними*, або *векторами*.

Геометрично векторну величину зручно зображати у вигляді напрямленого відрізка, довжина якого характеризує її числове значення, а орієнтація — її напрям (рис. 1.1).

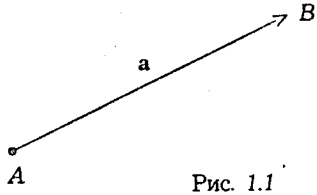



Рис. *1.1*

Вектори позначаються або двома буквами зі стрілочкою зверху, наприклад $\overrightarrow{AB}$, де $A$ — початок, а $B$ — кінець вектора, або однією буквою зі стрілочкою в рукописному тексті, наприклад, $\vec{a}$, чи однією буквою жирного шрифту в друкованому тексті, наприклад, $\mathbf{a}$. Довжина відповідного напрямленого відрізка називається довжиною вектора, або *модулем* вектора, і позначається $|\overrightarrow{AB}|$, $|\mathbf{a}|$ або $mod\,\mathbf{a}$. Модуль вектора — це скаляр, він завжди додатний (крім нуль-вектора). Якщо розглядати вектор як абстрактну математичну величину, то модуль вектора буде величиною безрозмірною; якщо ж розглядати конкретний вектор, то його модуль є числова величина відповідної розмірності, наприклад, модуль вектора швидкості є числова величина з розмірністю швидкості.

Таким чином, *вектор уважається заданим, якщо відомі його модуль та напрям.*

У випадку, коли початок і кінець вектора збігаються, вектор називається *нульовим*, або *нуль-вектором*, і позначається $\mathbf{0}$. Модуль нуль-вектора дорівнює нулю, а його напрям не визначений. У разі необхідності нуль-вектору можна приписати будь-який напрям. Нуль-вектор відіграє у векторній алгебрі роль, аналогічну до звичайного нуля в алгебрі чисел.

Якщо поміняти місцями початок і кінець вектора, то одержимо другий вектор, який стосовно першого називається *протилежним* (рис. 1.2).

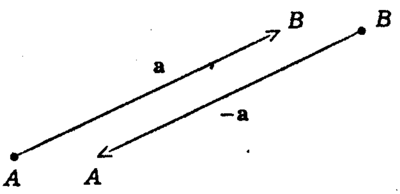


Рис. 1.2

При позначенні вектора двома буквами, наприклад, $\overrightarrow{AB}$, протилежним вектором буде $\overrightarrow{BA}$; тим часом при позначенні вектора однією буквою, наприклад, $\mathbf{a}$, протилежний вектор позначається $-\mathbf{a}$, при цьому знак "–" несе інформацію про його протилежний напрям відносно вектора $\mathbf{a}$.

Два вектори вважаються рівними, якщо вони мають однакову довжину й однаковий напрям. Рівність векторів позначається так:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} .$$

З означення рівності векторів випливає, що при паралельному перенесенні вектора одержуємо рівний йому вектор. Це означає, що початок вектора може бути обраний довільно. У цьому розумінні вектори називаються *вільними*. Таким чином, *два вільних вектори вважаються рівними, якщо вони мають однаковий модуль, паралельні та напрямлені в один бік.* До вільних векторів належать, наприклад, вектори швидкості, прискорення, моменту пари сил тощо.

У деяких випадках свобода переміщення вектора може бути обмежена. Вектори, які можна переміщати тільки вздовж їхньої лінії дії, не змінюючи при цьому величину й напрям, називаються *ковзними*, наприклад, вектори сили, напруги статичного поля, кутової швидкості обертового руху тощо. Вектори, в яких задана точка їх прикладання, переміщувати неможливо зовсім. Такі вектори називаються *зв'язаними*, наприклад, радіус-вектор.

Поняття нерівності, наприклад, $\mathbf{a} > \mathbf{b}$, у звичайному для нас розумінні, прийнятому в числовій алгебрі, для векторів не існує.

# 1.2 СУМА ВЕКТОРІВ

Якщо взяти два вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, сумістити їхні початки та побудувати на них паралелограм (рис. 1.3.), то діагональ паралелограма $\mathbf{c}$, яка виходить з того самого початку, буде *сумою векторів* $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, тобто:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \ . \qquad (1.1)$$

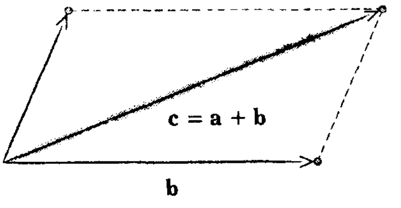


Рис. *1.3*

Це правило називається *правилом паралелограма*. Ураховуючи відому теорему, яка стверджує, що протилежні сторони паралелограма паралельні та рівні, можна отримати ще одне правило для знаходження суми двох векторів, яке називається *правилом трикутника*: сумою двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається такий вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, початок якого збігається з початком вектора $\mathbf{a}$, а кінець із кінцем вектора $\mathbf{b}$ (рис. 1.4.).

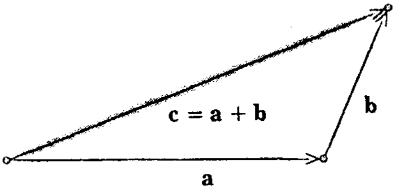


Рис. *1.4*

Зрозуміло, що обидва правила еквівалентні.

З означень суми випливають очевидні **властивості:**

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (комутативність); (1.2)
2. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, де $\mathbf{0}$ — нуль-вектор; (1.3)
3. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, де $-\mathbf{a}$ — вектор, протилежний $\mathbf{a}$. (1.4)

Якщо розглянути суму трьох векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, то з правила трикутника (рис. 1.5) випливає ще одна властивість:

4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (асоціативність). (1.5)

Остання властивість показує, що оскільки у виразі для суми трьох векторів порядок дужок не є істотним, то суму трьох векторів можна записувати не тільки без дужок, а й у будь-якому порядку їх розташування, тобто:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{c} = \mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{a} =$$

$$= \mathbf{c}+\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{c}+\mathbf{b}+\mathbf{a} .$$

Якщо послідовно застосувати правило трикутника до суми $n$ векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$, то одержимо *правило многокутника* (рис. 1.6): сума векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ є вектор, напрямлений з початку вектора $\mathbf{a}_1$ у кінець вектора $\mathbf{a}_n$.

Із цього правила випливає, що сума векторів, які утворюють замкнену ламану лінію, дорівнює нулю.

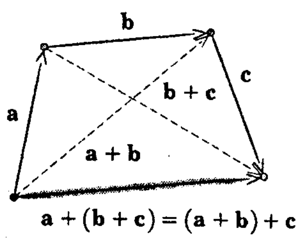



Рис. 1.5

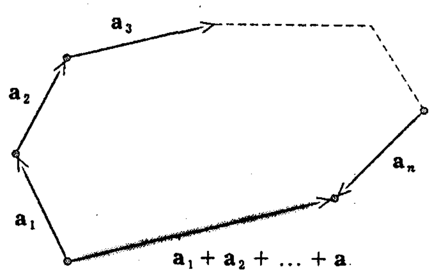



Рис. 1.6

# 1.3 ДОБУТОК ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

*Добутком вектора* $\mathbf{a}$ *на число* $\lambda$ є такий вектор $\mathbf{b}$, який паралельний вектору $\mathbf{a}$, а довжина якого дорівнює довжині вектора $\mathbf{a}$, помножений на абсолютну величину числа $\lambda$, тобто:

$$|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \ . \qquad (1.6)$$

При цьому, якщо $\lambda > 0$, то вектор $\mathbf{b}$ буде напрямленим у той самий бік, що й вектор $\mathbf{a}$, якщо $\lambda < 0$, — то в протилежний бік. Множення вектора на $|\lambda| > 1$ призводить до його розтягання, при $|\lambda| < 1$ — до стиснення (рис. 1.7), а якщо $\lambda = 0$, то $\mathbf{b} = 0$.

Із цього означення випливає, що протилежний до вектора $\mathbf{a}$ вектор $-\mathbf{a}$ є добутком числа $-1$ на вектор $\mathbf{a}$, тобто:

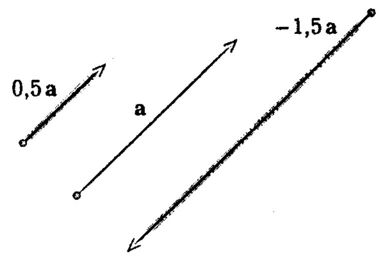


Рис. 1.7

$$-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a} \ . \qquad (1.7)$$

Операція множення вектора на число задовольняє такі **властивості:**

1. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ *(дистрибутивність відносно вектора)*;
2. $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a}$ *(дистрибутивність відносно числа)*;
3. $\lambda_1(\lambda_2\mathbf{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{a}$ *(асоціативність)*. (1.8)

У справедливості першої рівності легко переконатися, якщо зауважити, що при множенні на число $\lambda$ змінюються тільки розміри векторів. Дійсно, оскільки вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ утворюють сторони й діагональ паралелограма, то помноживши всі вектори одночасно на $\lambda$, ми знову отримаємо паралелограм (рис. 1.8), а значить, рівність $\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \lambda\mathbf{c}$ зберігається.

Справедливість другої та третьої рівностей випливає безпосередньо з означення множення вектора на число.

Слід також відзначити, що операція ділення вектора на число $\mathbf{a}/\lambda$, є операцією множення вектора $\mathbf{a}$ на число $1/\lambda$, тобто:

$$\frac{\mathbf{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\cdot\mathbf{a}\ . \qquad (1.9)$$

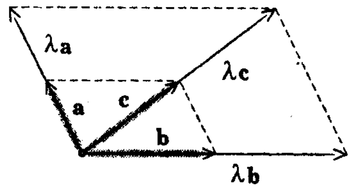



Рис. *1.8*

## 1.4 РІЗНИЦЯ ВЕКТОРІВ

*Різницею двох векторів* $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається такий вектор $\mathbf{c}$, який у сумі з вектором $\mathbf{b}$ дає вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{a} \ ,$$

звідки

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \ . \quad (1.10)$$

З означення різниці випливає, що коли сумістити початки векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, то вектором $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ буде вектор, який має початок у кінці вектора $\mathbf{b}$, а кінець — у кінці вектора $\mathbf{a}$ (рис. 1.9).

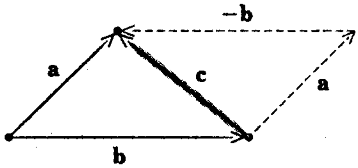


Рис. *1.9*

З рис. 1.9 також видно, що різницю векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ можна знайти, якщо додати до вектора $\mathbf{a}$ вектор, протилежний вектору $\mathbf{b}$, тобто відняти будь-який вектор — це означає додати протилежний:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \ . \quad (1.11)$$

З означення різниці також випливає, що коли вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ рівні, то їхня різниця буде дорівнювати нуль-вектору:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \ . \quad (1.12)$$

Підсумовуючи розглянуті вище операції над векторами, можна сказати, що лінійні операції множення вектора на число, суми та різниці векторів мають ті самі властивості, які мають дійсні числа.

**Приклади.**

1. Знайти суму та різницю векторів $2\mathbf{a}$ і $3\mathbf{b}$, якщо $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n} - \frac{1}{2}\mathbf{l}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 5\mathbf{n} + \mathbf{l}$.

Згідно з властивостями лінійних операцій з векторами маємо:

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2\left(\mathbf{m} + 4\mathbf{n} - \frac{1}{2}\mathbf{l}\right) + 3(-2\mathbf{m} + 5\mathbf{n} + \mathbf{l}) = 2\mathbf{m} + 8\mathbf{n} -$$
$$- \mathbf{l} - 6\mathbf{m} + 15\mathbf{n} + 3\mathbf{l} = -4\mathbf{m} + 23\mathbf{n} + 2\mathbf{l} \ .$$

$$2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\left(\mathbf{m} + 4\mathbf{n} - \frac{1}{2}\mathbf{l}\right) - 3(-2\mathbf{m} + 5\mathbf{n} + \mathbf{l}) = 2\mathbf{m} + 8\mathbf{n} -$$
$$- \mathbf{l} + 6\mathbf{m} - 15\mathbf{n} - 3\mathbf{l} = 8\mathbf{m} - 7\mathbf{n} - 4\mathbf{l} \ .$$

**2.** У трикутнику $ABC$ (рис. 1.10) вектори $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$ і $\overrightarrow{BC} = \mathbf{q}$. Виразити через вектори $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ медіани трикутника $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BN}$.

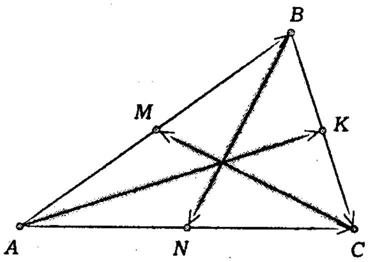


Рис. *1.10*

Згідно з означенням медіан, точки $M$, $K$, $N$ — середини сторін $AB$, $BC$, $AC$ відповідно. Вектор $\overrightarrow{BK}$ напрямлений у той самий бік, що й $\overrightarrow{BC}$, але довжина його вдвічі менша, тому $\overrightarrow{BK} = (1/2)\overrightarrow{BC} = (1/2)\mathbf{q}$. Тоді за правилом суми векторів (правило трикутника) маємо:

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} .$$

Аналогічно $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{p}$, а отже:

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{q} .$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{MC}$ протилежний вектору $\overrightarrow{CM}$, то $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{CM}$, отже:

$$\overrightarrow{CM} = -\left(\frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{q}\right) = -\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{p} .$$

З трикутника $ABN$ за правилом суми векторів (правило трикутника) маємо $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN}$, звідки $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}$. Оскільки $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, то:

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AB} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{p}) .$$

**3.** Довести теорему про середню лінію трикутника.

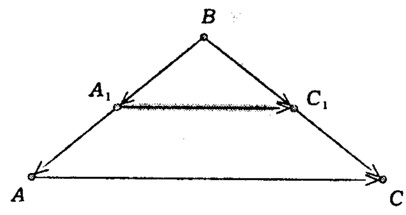


Рис. *1.11*

Потрібно довести, що середня лінія $A_1C_1$ (рис. 1.11) трикутника $ABC$ дорівнює половині основи $AB$ і паралельна їй.

Згідно з означенням середньої лінії трикутника точки $A_1$ і $C_1$ ділять сторони трикутника $BA$ і $BC$ пополам, тому $\overrightarrow{BA_1} = (1/2)\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC_1} = (1/2)\overrightarrow{BC}$. Тоді за правилом віднімання векторів маємо $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{BA_1}$, або

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} .$$

Оскільки $\overrightarrow{A_1C_1} = (1/2)\overrightarrow{AC}$, то вектори $\overrightarrow{A_1C_1}$ і $\overrightarrow{AC}$ паралельні, а отже, лінія $A_1C_1$ паралельна лінії $AC$ і $|\overrightarrow{A_1C_1}| = (1/2)|\overrightarrow{AC}|$, звідки $A_1C_1 = (1/2)AC$, що й треба було довести.

## 1.5 ОДИНИЧНИЙ ВЕКТОР

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним*. Одиничний вектор позначається $\mathbf{e}$. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\mathbf{a}$, позначається $\mathbf{a}_0$ і називається *ортом* вектора $\mathbf{a}$. В силу означення $|\mathbf{a}_0| = 1$.

Будь-який вектор $\mathbf{a}$ за допомогою відповідного одиничного вектора за правилом множення вектора на число може бути записаним у вигляді:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,\mathbf{a}_0 . \qquad (1.13)$$

З вище сказаного випливає, що з довільного вектора можна одержати одиничний, поділивши його на його власний модуль, тобто:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} . \qquad (1.14)$$

# 1.6 КОЛІНЕАРНІСТЬ ВЕКТОРІВ

Два вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*.

Математичний запис цього означення має вигляд:

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \ , \quad (1.15)$$

або в загальному вигляді:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0 \ , \quad (1.16)$$

якщо покласти $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$.

Дійсно, з означення добутку вектора на число випливає, що вектори $\mathbf{b}$ і $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ знаходяться на одній або на паралельних прямих, і навпаки, якщо вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ не є нульовими, то завжди можна знайти таке число $|\lambda| = |\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$, що буде виконуватися рівність $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Тобто рівність (1.15) є *необхідною й достатньою умовою колінеарності векторів*. З рівності (1.15) випливає також, що коли один із двох векторів є нуль-вектором, то такі два вектори також можна вважати колінеарними, або іншими словами нуль-вектор колінеарний будь-якому вектору.

**Приклади.**

1. У паралелограмі $ABCD$ (рис. 1.12) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{q}$. Виразити вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ через $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$.

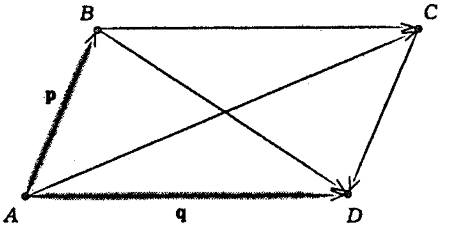



Рис. *1.12*

Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні й паралельні, то вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ колінеарні й мають однакові модулі, тому, згідно з означенням рівності двох векторів, маємо $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Оскільки $\overrightarrow{AD} = \mathbf{q}$, то і $\overrightarrow{BC} = \mathbf{q}$.

Вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AB}$ протилежно напрямлені й мають однакові модулі. Згідно з означенням протилежних векторів маємо $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$, а $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, отже, $\overrightarrow{CD} = -\mathbf{p}$.

Вектор $\overrightarrow{AC}$ — діагональ паралелограма, тому за правилом суми векторів (правило паралелограма) маємо:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \ .$$

Вектор $\overrightarrow{BD}$ — друга діагональ паралелограма, і за правилом віднімання векторів маємо:

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{q} - \mathbf{p} \ .$$

З даної задачі можна зробити висновок: *сумою та різницею двох неколінеарних векторів* $\mathbf{p}$ *і* $\mathbf{q}$ *є діагоналі паралелограма, побудованого на цих векторах.*

2. У рівнобічній трапеції $ABCD$ (рис. 1.13) нижня основа $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, бічна сторона $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ і кут $\alpha$ між ними дорівнює $\pi/3$. Розкласти за векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ сторони $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{CB}$ та діагоналі трапеції $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

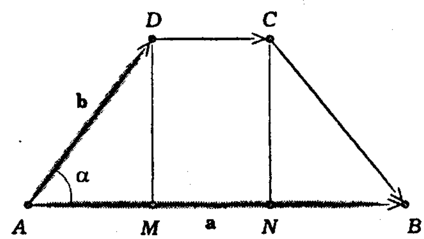


Рис. 1.13

З трикутника $ADB$ очевидно, що:

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \ .$$

Оскільки $AB$ і $DC$ основи трапеції, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ колінеарні, тому $\overrightarrow{DC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, звідки:

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}| - 2|\overrightarrow{AM}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|\mathbf{a}| - 2|\overrightarrow{AM}|}{|\mathbf{a}|} \ .$$

Ураховуючи, що в прямокутному трикутнику катет, який знаходиться проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи, то $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2}|\mathbf{b}|$ і тоді $\lambda = \frac{|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$.

Таким чином:

$$\overrightarrow{DC} = \frac{|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \ .$$

З трикутників $ADC$ і $ACB$ знаходимо:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \mathbf{b} + \frac{|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \ ,$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} - \left(\mathbf{b} + \frac{|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right) = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} - \mathbf{b} \ .$$

3. За яких умов вектори $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ і $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ будуть колінеарними.

З висновку задачі 1 маємо, що коли вектори $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ не колінеарні, то на них можна побудувати паралелограм, діагоналі якого $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ і $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ не можуть бути колінеарними. Значить колінеарність векторів $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ і $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ може мати місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ колінеарні.

# 1.7 КОМПЛАНАРНІСТЬ ВЕКТОРІВ

Три вектори, які знаходяться в одній площині або паралельні одній і тій самій площині, називаються *компланарними.*

*Необхідною й достатньою умовою компланарності векторів* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *і* $\mathbf{c}$ *є лінійна залежність між ними,* тобто:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = 0 \quad , \qquad (1.17)$$

де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — скалярні множники, з яких хоча б один не дорівнює нулю (порівняйте з виразом (1.16)).

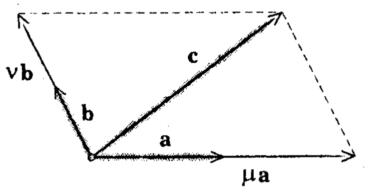


Рис. *1.14*

Дійсно, нехай три довільних вектори компланарні, тоді після суміщення початків усіх трьох векторів в одній точці (рис. 1.14) переконуємося, що вектор $\mathbf{c}$ може бути представлений у вигляді суми двох векторів, колінеарних векторам $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, тобто

$$\mathbf{c} = \mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b} \quad ,$$

звідки, поклавши $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$, $-1 = \gamma$, випливає рівність (1.17). І, навпаки, якщо рівність (1.17) виконується, то це означає, що сума трьох векторів $\alpha\mathbf{a}$, $\beta\mathbf{b}$, $\gamma\mathbf{c}$ дорівнює нуль-вектору. Якщо побудувати цю суму за правилом многокутника, то кінець вектора $\gamma\mathbf{c}$ збігається з початком вектора $\alpha\mathbf{a}$, тобто ці три вектори утворюють трикутник, а отже, лежать в одній площині.

З означення компланарності трьох векторів випливає такий наслідок: *якщо з трьох векторів хоча б два колінеарні, то такі три вектори будуть компланарні.*

Дійсно, з колінеарності векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ випливає, що $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, тому при довільному $\alpha \neq 0$, $\beta = -\lambda\alpha$ і $\gamma = 0$ виконується рівність (1.16). І, навпаки, з рівності (1.17) при $\gamma = 0$ випливає, що $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 0$, або $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ (де $\lambda = -\beta/\alpha$), тобто вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні, а отже, всі три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і довільний $\mathbf{c}$ — компланарні.

Насамкінець можна сказати, що коли в рівності (1.17) покласти $\alpha = \beta = 0$ і припустити, що довільне число $\gamma \neq 0$, тоді вектор $\mathbf{c}$ може бути нуль-вектором. Таким чином, нуль-вектор з будь-якою парою векторів або два нуль-вектори з будь-яким вектором завжди утворюють трійку компланарних векторів.

**Приклади.**

1. Відомо три вектори $\mathbf{l} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{m} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$ і $\mathbf{n} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$, де $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — некомпланарні вектори. Показати, що вектори $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ компланарні.

Згідно з (1.17) необхідною й достатньою умовою компланарності буде:

$$\alpha\mathbf{l} + \beta\mathbf{m} + \gamma\mathbf{n} = 0 \ .$$

Звідки:

$$(2\alpha - \beta - \gamma)\mathbf{a} + (-\alpha + 2\beta - \gamma)\mathbf{b} + (-\alpha - \beta + 2\gamma)\mathbf{c} = 0 \ ,$$

а оскільки $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ некомпланарні вектори, то така рівність виконується тільки тоді, коли

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta - \gamma = 0, \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0, \\ -\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma \ .$$

Тоді $\mathbf{l} + \mathbf{m} + \mathbf{n} = 0$, отже, вектори $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — компланарні.

2. Розкласти вектор $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ за трьома некомпланарними векторами $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ і $\mathbf{p} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

Представимо вектор $\mathbf{s}$ як лінійну комбінацію векторів $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{s} = \lambda\mathbf{m} + \mu\mathbf{n} + \nu\mathbf{p} = \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}) + \mu(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \nu(2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) =$$
$$= (\lambda + \mu)\mathbf{a} + (\lambda - \mu + 2\nu)\mathbf{b} + (-2\lambda + 3\nu)\mathbf{c} \ .$$

Оскільки $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, то:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\lambda + \mu)\mathbf{a} + (\lambda - \mu + 2\nu)\mathbf{b} + (-2\lambda + 3\nu)\mathbf{c} \ .$$

Порівнюючи коефіцієнти в даній рівності при однакових векторах, отримаємо систему рівнянь для визначення $\lambda$, $\mu$, $\nu$:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1, \\ \lambda - \mu + 2\nu = 1, \\ -2\lambda + 3\nu = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, знаходимо $\mu = \frac{3}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$, $\nu = \frac{3}{5}$. Таким чином:

$$\mathbf{s} = \frac{2}{5}\mathbf{m} + \frac{3}{5}\mathbf{n} + \frac{3}{5}\mathbf{p} \ .$$

## 1.8 ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВЕКТОРІВ

Розглянемо сукупність $n$ векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тоді будь-який вектор, який має вигляд

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_n\ , \qquad (1.18)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — деякі числа, називається *лінійною комбінацією* векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Кажуть ще так, що вектор $\mathbf{b}$ лінійно виражається через вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_n = 0\ , \qquad (1.19)$$

де хоча б один з коефіцієнтів $\lambda_i$ (при $i = 1, 2, \dots, n$) не дорівнює нулю.

Якщо (1.19) виконується лише тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то вектори називаються *лінійно незалежними*.

**Теорема 1.1** *Вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли будь-який з них є лінійною комбінацією решти векторів.*

Дійсно, нехай $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ лінійно залежні. Тоді з означення випливає, що існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, серед яких є хоча б одне, відмінне від нуля, і при яких буде виконуватися рівність $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{a}_n = 0$. Припустимо, що $\alpha_k \neq 0$. Тоді, перенісши всі доданки, які не містять $\alpha_k$, отримаємо:

$$\mathbf{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\mathbf{a}_1 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\mathbf{a}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\mathbf{a}_{k+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\mathbf{a}_n\ ,$$

або переозначивши

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k},\quad \lambda_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_k},\quad \dots,\quad \lambda_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_k}\ ,$$

$$\mathbf{a}_k = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + \lambda_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_n\ .$$

Це означає, що вектор $\mathbf{a}_k$ є лінійною комбінацією решти векторів.

Доведемо обернене твердження. Нехай будь-який вектор, наприклад, $\mathbf{a}_k$, лінійно виражається через решту векторів. Це означає, що знайдуться такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$, що:

$$\mathbf{a}_k = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + \lambda_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \dots + \lambda_n\mathbf{a}_n\ ,$$

але тоді:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + \lambda_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_k = 0 .$$

Оскільки коефіцієнт при $\mathbf{a}_k$ відмінний від нуля (він дорівнює $-1$), то значить вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ лінійно залежні.

Теорема доведена.

Лінійна залежність векторів має дві важливі **властивості.**

1. *Якщо хоча б один з векторів* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *є нуль-вектором, то вектори* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *лінійно залежні.*

Дійсно, нехай, наприклад, $\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Тоді $\mathbf{a}_k$ є лінійною комбінацією решти векторів з нульовими коефіцієнтами:

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_{k-1} + 0 \cdot \mathbf{a}_{k+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_n ,$$

отже, вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ лінійно залежні.

2. *Якщо серед $n$ векторів* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *будь-які $m$ $(m < n)$ є лінійно залежні, то лінійно залежними будуть і вектори* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Дійсно, перенумерувавши вектори, завжди можна зробити так, що перші $m$ векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ будуть лінійно залежними. Тоді будь-який із цих векторів, наприклад, $\mathbf{a}_k$, буде лінійною комбінацією решти:

$$\mathbf{a}_k = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + \beta_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \ldots + \beta_m \mathbf{a}_m .$$

Додамо до цієї лінійної комбінації вектори $\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, \ldots, \mathbf{a}_n$ з нульовими коефіцієнтами. Тоді одержимо:

$$\mathbf{a}_k = \beta_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + \beta_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \ldots + \beta_m \mathbf{a}_m + $$
$$+ 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_m ,$$

тобто один із цих векторів $\mathbf{a}_k$ є лінійною комбінацією решти, то згідно з теоремою 1.1 вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ лінійно залежні.

**Теорема 1.2 (Теорема про лінійну залежність двох векторів).**
*Два вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні і навпаки.*

Дійсно, припустимо, що вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ лінійно залежні, тоді:

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = 0 , \quad (1.20)$$

де хоча б один з коефіцієнтів не дорівнює нулю. Наприклад, нехай $\alpha_1 \neq 0$, тоді:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{a}_2 \quad \text{або} \quad \mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2 , \qquad (1.21)$$

де число $\lambda = -\alpha_2 / \alpha_1$. Однак рівність (1.21) означає, що вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ колінеарні, отже, необхідність доведено.

Доведемо достатність. Нехай вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ колінеарні, тобто $\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2$, тоді:

$$\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_2 = 1 \cdot \mathbf{a}_1 + (-\lambda) \cdot \mathbf{a}_2 = 0 .$$

Таким чином, вектори $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_2$ утворюють нульову лінійну комбінацію, де принаймні один з коефіцієнтів $(\alpha_1 = 1)$ не дорівнює нулю, отже, вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ лінійно залежні.

Теорема доведена.

З теореми 1.2 випливають такі висновки.

Висновок 1. *Два неколінеарні вектори лінійно незалежні.*

Висновок 2. *Серед двох неколінеарних векторів не може бути нульового вектора.*

Висновок 3. *Якщо серед векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ будь-які два колінеарні, то такі вектори лінійно залежні.*

**Теорема 1.3 (Теорема про лінійну залежність трьох векторів).**

*Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні і навпаки.*

Дійсно, припустимо, що вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$ лінійно залежні, тобто $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = 0$, де хоча б один з коефіцієнтів не дорівнює нулю. Нехай, наприклад, $\alpha_1 \neq 0$, тоді

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\mathbf{a}_3 \quad \text{або} \quad \mathbf{a}_1 = \lambda_1\mathbf{a}_2 + \lambda_2\mathbf{a}_3 , \qquad (1.22)$$

де $\lambda_1 = -\alpha_2 / \alpha_1$, $\lambda_2 = -\alpha_3 / \alpha_1$. Рівність (1.22) означає, що вектор $\mathbf{a}_1$ є сумою векторів $\lambda_1\mathbf{a}_2$ і $\lambda_2\mathbf{a}_3$, тобто діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\lambda_1\mathbf{a}_2$ та $\lambda_2\mathbf{a}_3$. Отже, вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$ належать до однієї площини (площини, на якій міститься паралелограм), тобто компланарні. Необхідність доведена.

Доведемо достатність. Нехай вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ компланарні. Доведемо, що ці вектори лінійно залежні. Якщо будь-яка пара з даних трьох векторів колінеарна або будь-який з них є нуль-вектором, то згідно з властивостями 1 і 2 теореми 1.2 дані три вектори будуть лінійно залежними. Тому будемо вважати, що серед трьох компланарних векторів $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$ немає нуль-вектора й жодна пара векторів не є колінеарною.

Перенесемо три даних компланарних вектори на одну площину та приведемо їх до спільного початку $O$ (рис. 1.15). Проведемо через точку $A_3$, яка є кінцем вектора $\mathbf{a}_3$, прямі, паралельні векторам $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$. Позначимо $A_1$ точку перетину прямої, паралельної вектору $\mathbf{a}_2$, з прямою, на якій знаходиться вектор $\mathbf{a}_1$, а $A_2$ — точку перетину прямої, паралельної вектору $\mathbf{a}_1$, з прямою, на якій знаходиться вектор $\mathbf{a}_2$. Тоді згідно з правилом паралелограма вектор $\mathbf{a}_3$ дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OA_2}$:

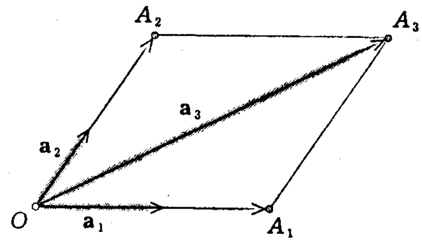



Рис. 1.15

$$\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} . \quad (1.23)$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{OA_1}$ колінеарний вектору $\mathbf{a}_1$, то знайдеться таке число $\lambda_1$, що $\overrightarrow{OA_1} = \lambda_1\mathbf{a}_1$. Аналогічно з колінеарності векторів $\overrightarrow{OA_2}$ і $\mathbf{a}_2$ випливає, що існує таке число $\lambda_2$, коли $\overrightarrow{OA_2} = \lambda_2\mathbf{a}_2$. Тоді з рівності (1.23) одержимо $\mathbf{a}_3 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2$, тобто $\mathbf{a}_3$ є лінійна комбінація $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$. Звідки випливає, що вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$ лінійно залежні.

Теорема доведена.

З теореми 1.3 випливають такі висновки.

Висновок 1. *Будь-який вектор* $\mathbf{a}$*, який знаходиться в одній площині з двома неколінеарними між собою векторами* $\mathbf{a}_1$ *і* $\mathbf{a}_2$*, можна записати у вигляді їхньої лінійної комбінації, тобто:*

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 .$$

Висновок 2. *Три некомпланарні вектори лінійно незалежні.*

Висновок 3. *Серед трьох некомпланарних векторів не може бути двох колінеарних векторів і не може бути жодного нуль-вектора.*

**Теорема 1.4 (Теорема про лінійну залежність чотирьох векторів).**
*Будь-які чотири вектори лінійно залежні.*

Вилучимо з розгляду випадок, коли будь-яка трійка зі згаданих чотирьох векторів компланарна, оскільки тоді згідно з попередньою теоремою, дана трійка векторів лінійно залежна, і внаслідок властивості 2 теореми 1.3 всі чотири вектори будуть лінійно залежні. З аналогічних причин не будемо розглядати випадки, коли серед чотирьох векторів є пара колінеарних векторів або є хоча б один нуль-вектор, тому що згідно з тими самими властивостями 1, 2, 3 всі чотири вектори й у цих випадках будуть лінійно залежні.

Зведемо всі чотири довільних вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ і $\mathbf{a}_4$ до спільного початку $O$ (рис. 1.16).

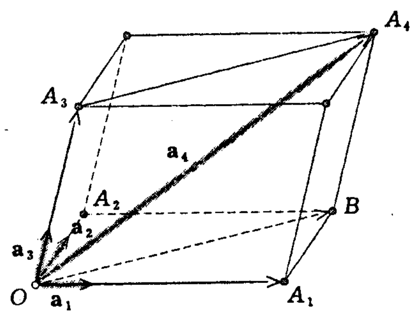



Рис. 1.16

Проведемо через точку $A_4$, яка є кінцем вектора $\mathbf{a}_4$ три площини, паралельні площинам, на яких розташовані пари векторів $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ і $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Точки перетину цих площин із прямими, на яких розташовані вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$, позначимо буквами $A_1$, $A_2$ і $A_3$ відповідно. Отримаємо паралелепіпед. З паралелограма $OA_3A_4B$ видно, що його діагональ $\mathbf{a}_4 = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OB}$, а з паралелограма $OA_2BA_1$ знаходимо, що $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$. Звідки випливає, що:

$$\mathbf{a}_4 = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} . \quad (1.24)$$

Оскільки вектор $\overrightarrow{OA_1}$ колінеарний вектору $\mathbf{a}_1$, то $\overrightarrow{OA_1} = \lambda_1\mathbf{a}_1$. З аналогічних міркувань маємо $\overrightarrow{OA_2} = \lambda_2\mathbf{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \lambda_3\mathbf{a}_3$. Підставляючи отримані рівності у вираз (1.24), одержимо:

$$\mathbf{a}_4 = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 , \quad (1.25)$$

тобто вектор $\mathbf{a}_4$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Отже, вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ і $\mathbf{a}_4$ лінійно залежні.

Теорема доведена.

З теореми 1.4 випливає дуже важливий висновок: будь-який вектор можна подати у вигляді лінійної комбінації трьох некомпланарних векторів, тобто якщо є довільний вектор $\mathbf{a}$, то його можна розкласти за трьома довільними некомпланарними векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 . \quad (1.26)$$

Сукупність будь-яких трьох лінійно незалежних векторів у просторі називається *базисом* у просторі.

Ураховуючи це означення, теорему 1.3 можна перефразувати таким чином: *будь-які три некомпланарні вектори є базисом у тривимірному просторі.*

Вектори в просторі, які утворюють базис, називаються *базисними векторами.* Тоді висновок з теореми 1.4 з точки зору базисних векторів матиме таку інтерпретацію: будь-який вектор $\mathbf{a}$ можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$ (1.26). Числові коефіцієнти $\lambda_1$, $\lambda_2$ і $\lambda_3$ називаються *координатами вектора* $\mathbf{a}$ *у базисі* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

Одночасно із записом (1.26) для координат вектора використовується таке позначення:

$$\mathbf{a} = (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3) \ . \tag{1.27}$$

Легко переконатися, що розклад будь-якого вектора за базисними векторами єдиний і має вигляд (1.26).

Дійсно, нехай для вектора $\mathbf{a}$ існує два різних розклади в базисі $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$, тобто:

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 \ ,$$

$$\mathbf{a} = \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + \mu_3\mathbf{a}_3 \ .$$

Віднімаючи одну рівність від другої, одержимо:

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{a}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\mathbf{a}_2 + (\lambda_3 - \mu_3)\mathbf{a}_3 \ .$$

Та оскільки вектори $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ і $\mathbf{a}_3$ лінійно незалежні, то:

$$\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \lambda_3 - \mu_3 = 0$$

або

$$\lambda_1 = \mu_1 , \qquad \lambda_2 = \mu_2 , \qquad \lambda_3 = \mu_3 \ ,$$

що суперечить початковому припущенню.

Зрозуміло, що вектор у різних базисах матиме різні координати.

Аналогічно до поняття базису в просторі базисом на площині є будь-які два неколінеарні вектори цієї площини.

Абсолютно очевидно, що вибір базису в просторі або на площині не є однозначним. Базисів, як у просторі, так і на площині, нескінченна множина. При розв'язуванні конкретної задачі, вибирають той базис, який зручніший.

# 1.9 ПРОЕКЦІЯ ВЕКТОРА НА ВІСЬ

Нехай є вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ і вісь $l$.

Проекцією вектора $\mathbf{a}$ на вісь $l$ називається довжина відрізка $A'B'$, який знаходиться між основами перпендикулярів $A'$ і $B'$, опущених з точок $A$ і $B$ на вісь $l$, причому ця довжина береться зі знаком "+", якщо відрізок $A'B'$ має таку саму орієнтацію (від точки $A'$ до точки $B'$), як і вісь $l$, і знак "–" у протилежному випадку.

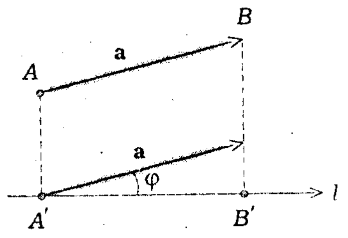



Рис. *1.17*

Вісь $l$ при цьому називають *віссю проекції.*

Аналогічно визначається проекція одного вектора на другий або на його продовження.

Для позначення проекції використовується символ $\text{пр}_l\,\mathbf{a}$ або $\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}$.

Кутом між вектором $\mathbf{a}$ та віссю $l$ (на рис. 1.17 це кут $\varphi$) називається найменший кут, на який необхідно повернути вісь $l$ для того, щоб її додатний напрям збігся з напрямом вектора $\mathbf{a}$.

Якщо сумістити початок вектора $\mathbf{a}$ з будь-якою точкою осі за допомогою його паралельного перенесення (наприклад, з точкою $A'$, рис. 1.17), то можна переконатися, що проекція вектора на вісь дорівнює добутку його довжини на косинус кута між вектором і додатним напрямом осі:

$$\text{пр}_l\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi\ . \quad (1.28)$$

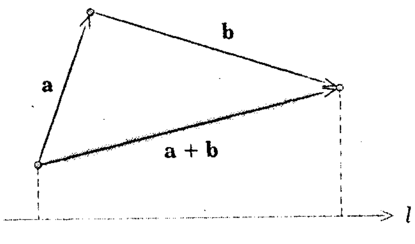



Рис. *1.18*

Знак проекції, як видно з (1.28), залежить від знака косинуса: якщо кут гострий, то знак проекції додатний, якщо тупий — від'ємний.

З формули (1.28) безпосередньо випливає, що:

1) при паралельному перенесенні вектора його проекція не змінюється;
2) проекція вектора, перпендикулярного до осі, дорівнює нулю.

Проекції вектора мають такі
**властивості:**

1. При будь-якому взаємному розташуванні векторів та осі *проекція суми двох векторів* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *дорівнює сумі їх проекцій:*

$$\text{пр}_l(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \text{пр}_l\,\mathbf{a} + \text{пр}_l\,\mathbf{b} \ . \qquad (1.29)$$

Ця властивість очевидна, якщо спроектувати на вісь $l$ кожний з векторів $\mathbf{a}$ , $\mathbf{b}$ та їх суму (рис. 1.18).

Властивість (1.29), буде справедлива й для випадку суми будь-якої кількості векторів, тобто:

$$\text{пр}_l(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n) = \text{пр}_l\,\mathbf{a}_1 + \text{пр}_l\,\mathbf{a}_2 + \ldots + \text{пр}_l\,\mathbf{a}_n \ . \qquad (1.30)$$

2. *Скалярний множник виноситься за знак проекції:*

$$\text{пр}_l(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\,\text{пр}_l\,\mathbf{a} \ . \qquad (1.31)$$

Цю властивість можна довести, користуючись формулою (1.28). Оскільки при $\lambda > 0$ вектори $\mathbf{a}$ і $\lambda\mathbf{a}$ мають однаковий напрям, а, отже, мають один і той же кут $\varphi$ з віссю проекцій, то:

$$\text{пр}_l\lambda\mathbf{a} = |\lambda\mathbf{a}|\cos\varphi = \lambda|\mathbf{a}|\cos\varphi = \lambda\,\text{пр}_l\,\mathbf{a} \ .$$

При $\lambda < 0$ вектори $\mathbf{a}$ і $\lambda\mathbf{a}$ протилежно напрямлені, а тому утворюють із віссю проекцій відповідно кути $\varphi$ та $\varphi + \pi$ . Тоді:

$$\text{пр}_l\lambda\mathbf{a} = |\lambda\mathbf{a}|\cos(\varphi+\pi) = |\lambda||\mathbf{a}|(-\cos\varphi) =$$

$$= -|\lambda||\mathbf{a}|\cos\varphi = \lambda\,\text{пр}_l\,\mathbf{a} \ .$$

**Приклади.**

1. Три одиничні вектори $\mathbf{a}$ , $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ утворюють із віссю $l$ кути $\pi/3$ , $2\pi/3$ і $\pi$ відповідно. Знайти проекцію на вісь $l$ вектора $3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}$ .

Згідно з властивостями проекцій векторів, маємо:

$$\text{пр}_l(3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}) = 3\,\text{пр}_l\,\mathbf{a} + 2\,\text{пр}_l\,\mathbf{b} + \text{пр}_l\,\mathbf{c} =$$

$$= 3|\mathbf{a}|\cos\frac{\pi}{3} + 2|\mathbf{b}|\cos\frac{2\pi}{3} + |\mathbf{c}|\cos\pi \ .$$

Ураховуючи, що вектори одиничні, тобто $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$ , остаточно отримуємо:

$$\text{пр}_l(3\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c}) = 3\frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} \ .$$

2. Вектор $\mathbf{a}$ утворює з віссю $l$ кут $\varphi_1 = 60°$, а вектор $\mathbf{b}$ утворює з тією самою віссю кут $\varphi_2 = 120°$. Знайти проекцію суми $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, де $\mathbf{c} = 3\mathbf{a}$ на вісь $l$, якщо відомо, що $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 4$.

Оскільки проекція суми векторів дорівнює сумі їх проекцій (1.30), необхідно знайти проекцію кожного доданка на вісь $l$. Згідно з формулою (1.28), маємо:

$$\text{пр}_l\,\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\varphi_1 = 6\cdot\frac{1}{2} = 3 ,$$

$$\text{пр}_l\,\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\varphi_2 = 4\cos 120° = 4\cos(90° + 30°) =$$

$$= 4(-\sin 30°) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 .$$

Користуючись властивістю 2, знаходимо:

$$\text{пр}_l\,\mathbf{c} = \text{пр}_l\,3\mathbf{a} = 3\,\text{пр}_l\,\mathbf{a} = 3\cdot 3 = 9 .$$

Тоді:

$$\text{пр}_l(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \text{пр}_l\,\mathbf{a} + \text{пр}_l\,\mathbf{b} + \text{пр}_l\,\mathbf{c} = 3 + (-2) + 9 = 10 .$$

# 1.10 КООРДИНАТНА ФОРМА ВЕКТОРА

Візьмемо в просторі три взаємно перпендикулярні осі зі спільним початком $O$: $OX$, $OY$, $OZ$. Розглянемо три взаємно перпендикулярні одиничні вектори $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, напрями яких збігаються з додатними напрямами осей $OX$, $OY$, $OZ$ (рис. 1.19).

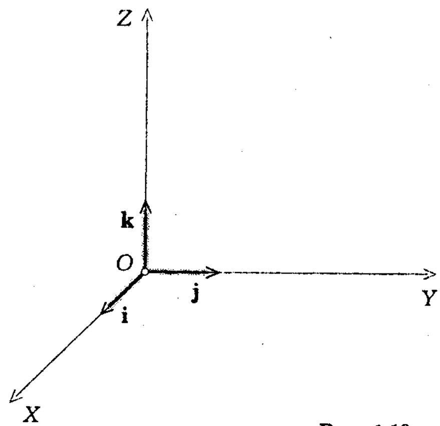



Рис. *1.19*

Система координат, за основу якої прийнято одиничні взаємно перпендикулярні вектори, називається *декартовою*. Одиничні, взаємно перпендикулярні вектори $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ називаються *координатними ортами*. Точка $O$ називається *початком* координат. Осі $OX$, $OY$, $OZ$ називаються координатними осями, зокрема, вісь $OX$ — віссю *абсцис*, вісь $OY$ — віссю *ординат*, вісь $OZ$ — віссю *аплікат*. Самі декартові координати позначають буквами $x$, $y$, $z$.

Користуючись тим, що будь-який вектор можна розкласти за трьома некомпланарними векторами (див. попередній параграф), за які можна взяти орти $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, ми одержимо:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \ . \quad (1.32)$$

Вираз (1.32) називається розкладом вектора за координатними ортами.

Якщо взяти довільний вектор $\mathbf{a}$ та сумістити його початок з початком декартової системи координат (рис. 1.20), то видно, що $a_x$, $a_y$, $a_z$ є проекціями вектора $\mathbf{a}$ на координатні осі. Одночасно числа $a_x$, $a_y$, $a_z$, як це видно з рисунка 1.20, є координатами точки $M$ — кінця вектора $\mathbf{a}$, а за умови сполучення початку вектора з початком системи координат — координатами вектора $\mathbf{a}$. Тому вираз (1.32) для вектора $\mathbf{a}$ називається *координатною формою запису вектора* $\mathbf{a}$.

За допомогою координат вектор записують ще й так

$$\mathbf{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z) \ , \quad (1.33)$$

що по суті є еквівалентною формою запису (1.32) для розкладу вектора за координатними ортами. Слід відзначити, що базисні орти $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ у координатній формі мають такий запис:

$$\mathbf{i} = (1;\ 0;\ 0), \qquad \mathbf{j} = (0;\ 1;\ 0), \qquad \mathbf{k} = (0;\ 0;\ 1)\ . \tag{1.34}$$

Вектори $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$, $a_z\mathbf{k}$ називаються *компонентами* вектора $\mathbf{a}$ за осями координат і позначаються $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$.

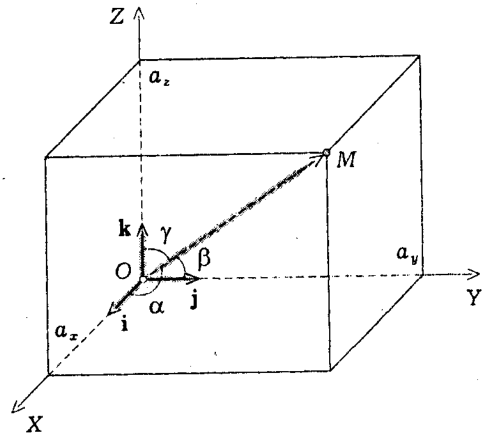



Рис. 1.20

Кути, які утворює вектор $\mathbf{a}$ з додатними напрямами координатних осей $OX$, $OY$, $OZ$, позначаються $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ відповідно; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються *напрямними косинусами* вектора $\mathbf{a}$. Оскільки $a_x$, $a_y$, $a_z$ є проекціями вектора $\mathbf{a}$ на координатні осі, то згідно з формулою (1.28) маємо:

$$a_x = |\mathbf{a}|\cos\alpha, \qquad a_y = |\mathbf{a}|\cos\beta, \qquad a_z = |\mathbf{a}|\cos\gamma\ , \tag{1.35}$$

звідки:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}\ . \tag{1.36}$$

В окремому випадку одиничного вектора, тобто, якщо $\mathbf{a} \equiv \mathbf{e}$, де $|\mathbf{e}| = 1$, одержимо:

$$e_x = \cos\alpha, \qquad e_y = \cos\beta, \qquad e_z = \cos\gamma\ . \tag{1.37}$$

Тоді розклад одиничного вектора за координатними ортами матиме вигляд:

$$\mathbf{e} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k} \tag{1.38}$$

або

$$\mathbf{e} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)\ . \tag{1.39}$$

Таким чином, напрямні косинуси є координатами одиничного вектора.

За теоремою про довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда (рис. 1.20) одержуємо формулу для довжини вектора $\mathbf{a}$ :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \tag{1.40}$$

Підносячи до квадрата рівність (1.40) і користуючись формулами (1.35)–(1.36), знаходимо тотожність, яку задовольняють напрямні косинуси будь-якого вектора:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad . \qquad (1.41)$$

**Приклади.**

**1.** Маємо вектор $\mathbf{a} = (3;\ -4;\ 5)$. Написати розклад вектора за координатними ортами. Знайти компоненти вектора.

Згідно з (1.32) розклад вектора за координатними ортами матиме вигляд:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad .$$

Компоненти вектора дорівнюють:

$$\mathbf{a}_x = 3\mathbf{i}\,, \qquad \mathbf{a}_y = -4\mathbf{j}\,, \qquad \mathbf{a}_z = 5\mathbf{k} \quad .$$

**2.** Знайти модуль вектора $\mathbf{a} = 20\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 60\mathbf{k}$ і його напрямні косинуси.

Згідно з формулою (1.40) маємо:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2} = 70 \quad .$$

Тоді:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k} \quad ,$$

а отже, згідно з (1.39) маємо:

$$\cos\alpha = \frac{2}{7}\,; \qquad \cos\beta = \frac{3}{7}\,; \qquad \cos\gamma = -\frac{6}{7} \quad .$$

**3.** Вектор $\mathbf{a}$ має довжину $|\mathbf{a}| = 6$ та утворює з осями прямокутної системи координат $OX$, $OY$, $OZ$ кути, які відповідно дорівнюють $60°$, $120°$ і $45°$. Знайти проекції вектора на осі координат. Розкласти вектор $\mathbf{a}$ за координатними ортами.

Користуючись формулами (1.35), маємо:

$$a_x = |\mathbf{a}|\cos\alpha = 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \quad ;$$

$$a_y = |\mathbf{a}|\cos\beta = 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3 \quad ;$$

$$a_z = |\mathbf{a}|\cos\gamma = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \quad .$$

Тоді за формулою (1.32) одержимо:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\sqrt{2}\mathbf{k} \quad ,$$

або

$$\mathbf{a} = (3;\ -3;\ 3\sqrt{2}) \quad .$$

**4.** Маємо вектори $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ і $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, прикладені до однієї точки. Знайти орт $\mathbf{c}_0$ бісектриси кута між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Вектор $\mathbf{c}$, напрямлений по бісектрисі кута між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ (рис. 1.21).

Знаходимо довжини векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ за формулою (1.40):

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7 ,$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3 .$$

Тоді, згідно з означенням орта, маємо:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k} = \left(\frac{2}{7};\ -\frac{3}{7};\ \frac{6}{7}\right) ,$$

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} = \left(-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}\right) .$$

Знаходимо вектор $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 = \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{3}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{3}{7} + \frac{2}{3}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{6}{7} - \frac{2}{3}\right)\mathbf{k} =$$

$$= -\frac{1}{21}\mathbf{i} + \frac{5}{21}\mathbf{j} + \frac{4}{21}\mathbf{k} .$$

Довжина вектора $\mathbf{c}$ дорівнює:

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{21}\right)^2 + \left(\frac{5}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{42}}{21} .$$

Таким чином, орт $\mathbf{c}_0$ має вигляд:

$$\mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = -\frac{1}{\sqrt{42}}\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{42}}\mathbf{j} + \frac{4}{\sqrt{42}}\mathbf{k} .$$

**5.** Вектор $\mathbf{a}$ утворює з осями ординат та аплікат кути $60°$. Знайти кут між вектором $\mathbf{a}$ та віссю абсцис.

Скористуємося формулою (1.41). У даному випадку $\beta = \gamma = 60°$, тому $\cos\beta = \cos\gamma = 1/2$. Підставляючи ці значення у формулу (1.41), отримаємо:

$$\cos^2\alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2} ,$$

звідки

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} ; \qquad \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

$$\cos\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Остаточно маємо $\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 = 135°$.

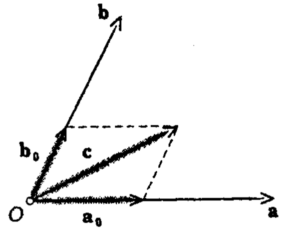



Рис. 1.21

# 1.11 ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ З ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНІЙ ФОРМІ

Розглянемо два вектори $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ і $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$.

1. **Рівність векторів.** Якщо два вектори рівні, то рівні також і їхні проекції на будь-яку вісь, а отже, рівні їхні відповідні координати. Тому з рівності $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ випливає:

$$a_x = b_x, \qquad a_y = b_y, \qquad a_z = b_z \ . \tag{1.42}$$

З рис. 1.20 легко переконатися й у зворотному твердженні.

Таким чином, *будь-яка векторна рівність рівнозначна трьом скалярним рівностям між відповідними координатами векторів і навпаки.*

2. **Колінеарність векторів.** Умовою колінеарності двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ є рівність $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Користуючись формулами (1.31) і (1.42), маємо:

$$a_x = \lambda b_x, \qquad a_y = \lambda b_y, \qquad a_z = \lambda b_z \tag{1.43}$$

або

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \ . \tag{1.44}$$

Таким чином, *умовою колінеарності двох векторів є пропорціональність їхніх відповідних координат.*

Слід мати на увазі, що (1.44) є лише наслідок (1.43), оскільки дріб не існує, коли знаменник дорівнює нулю. Проте, в математичній літературі можна зустріти вираз, наприклад,

$$\frac{a_x}{0} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \ ,$$

який слід розглядати лише як скорочену форму такого запису:

$$a_x = \lambda \cdot 0 = 0, \qquad a_y = \lambda b_y, \qquad a_z = \lambda b_z \ .$$

3. **Сума та різниця двох векторів.** Користуючись формулами (1.29) та (1.31), одержимо:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k} =$$

$$= (a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z) \ , \tag{1.45}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x)\mathbf{i} + (a_y - b_y)\mathbf{j} + (a_z - b_z)\mathbf{k} =$$
$$= (a_x - b_x;\ a_y - b_y;\ a_z - b_z)\ . \quad (1.46)$$

Тобто, *сума або різниця двох векторів дорівнює сумі або різниці відповідних координат.*

Слід відзначити, що формула (1.45) поширюється на будь-яку кількість векторів.

4. **Добуток вектора на число.** Користуючись формулою (1.31), маємо:

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda a_x\mathbf{i} + \lambda a_y\mathbf{j} + \lambda a_z\mathbf{k} = (\lambda a_x;\ \lambda a_y;\ \lambda a_z)\ . \quad (1.47)$$

Тобто, *щоб помножити вектор на число, необхідно помножити на це число його координати.*

**Приклади.**

1. Маємо вектори $\mathbf{a} = (3;\ -2;\ 6)$ і $\mathbf{b} = (-2;\ 1;\ 0)$. Знайти проекції вектора $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ на координатні осі. Записати отриманий вектор у координатній формі.

Користуючись правилами дії з векторами, заданими в координатній формі (1.46)–(1.47), одержуємо:

$$3\mathbf{a} = (9;\ -6;\ 18)\ , \qquad 2\mathbf{b} = (-4;\ 2;\ 0)\ ,$$
$$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (9 - (-4);\ -6 - 2;\ 18 - 0) = (13;\ -8;\ 18)\ .$$

Таким чином,

$$3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = 13\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 18\mathbf{k}\ , \qquad 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (13;\ -8;\ 18)\ .$$

2. Маємо вектори

$$\mathbf{a}_1 = (2;\ 4;\ -6)\ , \quad \mathbf{a}_2 = (-1;\ -2;\ 3)\ , \quad \mathbf{a}_3 = (4;\ 8;\ -12)\ ,$$
$$\mathbf{a}_4 = (6;\ 0;\ 0)\ , \quad \mathbf{a}_5 = (0;\ -5;\ 0)\ , \quad \mathbf{a}_6 = (0;\ 0;\ 2)\ ,$$
$$\mathbf{a}_7 = (0;\ 1;\ 3)\ , \quad \mathbf{a}_8 = (2;\ 0;\ -1)\ , \quad \mathbf{a}_9 = (3;\ -4;\ 0)\ .$$

Які з даних векторів колінеарні, паралельні координатним осям, паралельні координатним площинам?

Оскільки координати векторів $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ пропорціональні, тобто

$$-1 = \left(-\frac{1}{2}\cdot 2\right), \qquad -2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4\ , \qquad 3 = \left(-\frac{1}{2}\right)(-6)\ ,$$

то вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ колінеарні. Оскільки $\mathbf{a}_2 = -(1/2)\mathbf{a}_1$, то вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_2$ протилежно напрямлені.

Вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_3$ також колінеарні, оскільки

$$4 = 2\cdot 2\ , \qquad 8 = 2\cdot 4\ , \qquad -12 = 2\cdot(-6)\ .$$

Вектори $\mathbf{a}_1$ і $\mathbf{a}_3$ одного напрямку, оскільки $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1$.

Порівнюючи координати векторів $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$, $\mathbf{a}_6$ з координатами векторів $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (1.34), приходимо до висновку, що вектор $\mathbf{a}_4$ паралельний осі $OX$, тобто вектори $\mathbf{a}_4$ та $\mathbf{i}$ колінеарні, оскільки $\mathbf{a}_4 = 6\mathbf{i}$; вектор $\mathbf{a}_5$ антипаралельний осі $OY$, а вектори $\mathbf{a}_5$ і $\mathbf{j}$ колінеарні, оскільки $\mathbf{a}_5 = -5\mathbf{j}$; вектор $\mathbf{a}_6$ паралельний осі $OZ$, а вектори $\mathbf{a}_6$ і $\mathbf{k}$ колінеарні, оскільки $\mathbf{a}_6 = 2\mathbf{k}$. Звідси можна зробити висновок, що *коли вектор має тільки одну відмінну від нуля координату, то він паралельний (або антипаралельний) відповідній координатній осі.*

Оскільки у вектора $\mathbf{a}_7$ координата $a_x = 0$, тобто його проекція на вісь $OX$ дорівнює нулю, то вектор $\mathbf{a}_7$ перпендикулярний до осі $OX$, а отже, паралельний площині $YOZ$. Аналогічно робимо висновок, що вектор $\mathbf{a}_8$ паралельний площині $XOZ$, а вектор $\mathbf{a}_9$ — площині $XOY$. Звідси можна зробити висновок, *якщо одна з координат вектора дорівнює нулю, то вектор перпендикулярний відповідній координатній осі.*

**3.** Виразити вектор $\mathbf{d} = (0;\ 7;\ 23)$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\mathbf{a} = (5;\ 2;\ 1)$, $\mathbf{b} = (-1;\ 4;\ 2)$, $\mathbf{c} = (-1;\ -1;\ 6)$.

Вектор $\mathbf{d}$ є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, оскільки будь-які чотири вектори в тривимірному просторі лінійно залежні. Тоді, згідно з (1.26) маємо:

$$\mathbf{d} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{c}\ . \tag{1.48}$$

Користуючись (1.47) та (1.45), запишемо рівність (1.48) у координатній формі:

$$7\mathbf{j} + 23\mathbf{k} = \lambda_1(5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \lambda_2(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + \lambda_3(-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k})\ .$$

Звідки знаходимо:

$$\begin{cases} 5\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = 7, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 = 23. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему, одержимо: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$. Таким чином

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}\ .$$

# 1.12 РАДІУС-ВЕКТОР ТОЧКИ

Візьмемо довільну точку $M$ у просторі, яка має координатами $x$, $y$, $z$. Положення точки можна визначити вектором $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ (рис. 1.22), проведеним з початку координат точки $O$ в точку $M$.

Вектор $\mathbf{r}$ називається *радіус-вектором* точки. Оскільки координати радіус-вектора $\mathbf{r}$ збігаються з декартовими координатами кінця вектора точки $M(x;\ y;\ z)$, то

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1.49}$$

або

$$\mathbf{r} = (x;\ y;\ z)\ . \tag{1.50}$$

Розглянемо тепер у просторі дві довільні точки: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, які описуються своїми радіус-векторами $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ (рис. 1.23).

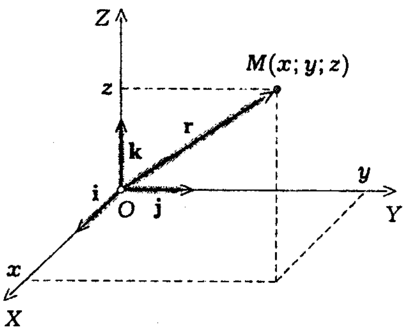



Рис. *1.22*

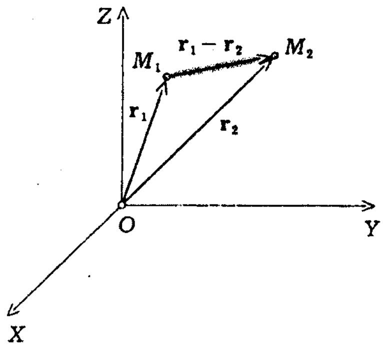



Рис. *1.23*

Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ буде дорівнювати:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\ .$$

Ураховуючи формули (1.46), одержимо:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} =$$

$$= (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)\ . \tag{1.51}$$

Тобто, *координати будь-якого вектора є різницею відповідних координат його кінця та початку.*

Ураховуючи (1.40), одержимо формулу для довжини вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, тобто для відстані між двома точками:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ , \tag{1.52}$$

а за допомогою (1.36) — формули для напрямних косинусів вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\ ,$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\ ,$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\ . \tag{1.53}$$

**Приклади.**

1. Вектор **a** заданий координатами початку $A(2;\ 1;\ -4)$ і кінця $B(1;\ 3;\ 2)$. *Знайти модуль вектора* **a** *та його напрямні косинуси.*

   Знаючи початок вектора, точку $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і кінець вектора — точку $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, знаходимо вектор **a** згідно з записом(1.51):

   $$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1) =$$
   $$= (1 - 2;\ 3 - 1;\ 2 - (-4)) = (-1;\ 2;\ 6)\ .$$

   Тоді за формулою (1.52) довжина вектора **a** буде дорівнювати:

   $$|\mathbf{a}| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$
   $$= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{41}\ .$$

   Користуючись формулами (1.53), знаходимо напрямні косинуси:

   $$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\mathbf{a}|} = -\frac{1}{\sqrt{41}}\ ; \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\mathbf{a}|} = \frac{2}{\sqrt{41}}\ ;$$

   $$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\mathbf{a}|} = \frac{6}{\sqrt{41}}\ .$$

2. Обчислити периметр трикутника $ABC$ з вершинами $A(8;\ 0;\ 7)$, $B(10;\ 2;\ 8)$, $C(10;\ -2;\ 8)$.

За формулою (1.52) знаходимо довжини сторін трикутника $ABC$:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(10-8)^2 + (2-0)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3 \;;$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} =$$

$$= \sqrt{(10-10)^2 + (-2-2)^2 + (8-8)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4 \;;$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(10-8)^2 + (-2-0)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3 \;.$$

Отже, периметр трикутника $ABC$ буде дорівнювати

$$p = 4 + 3 + 3 = 10 \text{ (од. довжини)} \;.$$

**3.** Маємо точки $A(-3;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 4;\ 1)$, $C(5;\ 3;\ 2)$, $D(10;\ 7;\ 2)$. Довести колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

За формулою (1.51) знаходимо координати векторів:

$$\overrightarrow{AB} = (2+3;\ 4-0;\ 1-1) = (5;\ 4;\ 0) \;,$$

$$\overrightarrow{CD} = (10-5;\ 7-3;\ 2-2) = (5;\ 4;\ 0) \;,$$

звідки

$$\frac{5}{5} = \frac{4}{4} = \frac{0}{0} \;.$$

Отже, згідно з твердження (1.44) вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні.

**4.** Маємо трикутник $ABC$ з радіус-векторами вершин $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ відповідно (рис. 1.24). Знайти радіус-вектор точки перетину медіан трикутника.

З рисунка маємо $\overrightarrow{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$, й оскільки точка $D$ є серединою сторони $BC$, то $\overrightarrow{BD} = \dfrac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{2}$; $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Тоді:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{2} = \frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1}{2} \;.$$

Користуючись відомою теоремою про точку перетину медіан трикутника, маємо:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1}{3} \;.$$

Знаходимо тепер радіус-вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ точки перетину медіан трикутника:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \mathbf{r}_1 + \overrightarrow{AM} = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1}{3}$$

або остаточно:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} \;. \qquad (1.54)$$

Таким чином, *радіус-вектор точки перетину медіан трикутника дорівнює середньому арифметичному радіус-векторів його вершин.*

Ураховуючи формулу (1.49), радіус-вектори вершин трикутника в координатній формі матимуть вигляд:

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} ,$$

$$\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k} .$$

Користуючись (1.45), одержимо формули для координат точки перетину медіан трикутника через координати його вершин:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} ; \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} ; \qquad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} , \tag{1.55}$$

тобто *координати точки перетину медіан трикутника дорівнюють середньому арифметичному відповідних координат його вершин.*

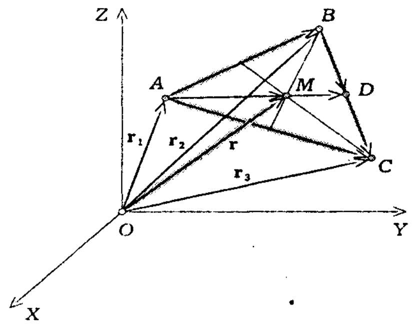



Рис. *1.24*

# 1.13 ДІЛЕННЯ ВІДРІЗКА ЗА ДАНИМ ВІДНОШЕННЯМ

За допомогою радіус-векторів можна розв'язувати задачу про ділення в даному відношенні $\lambda = (M_1M)/(MM_2)$ відрізка $M_1M_2$ між точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ та $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ (рис. 1.25).

Нехай точка $M(x;\ y;\ z)$ розташована на відрізку $M_1M_2$ і ділить його на два відрізки $M_1M$ та $MM_2$ у відношенні $\lambda$. З огляду на колінеарність векторів $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{MM_2}$ маємо $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$, а оскільки $\overrightarrow{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, а $\overrightarrow{MM_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, то $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Розв'язуючи дану рівність відносно $\mathbf{r}$, одержуємо:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1 + \lambda}. \quad (1.56)$$

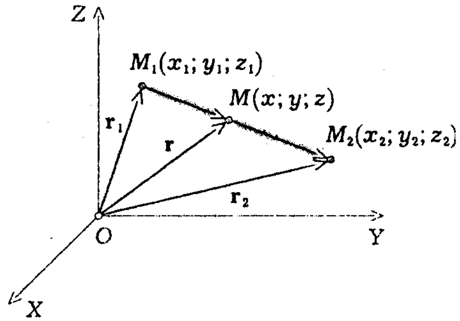



Рис. 1.25

Ураховуючи, що радіус-вектори $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$ дорівнюють:

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

одержимо формули для координат точки $M$ через координати точок, які обмежують поділений у відношенні $\lambda$ відрізок:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1.57)$$

В окремому випадку, коли точка $M$ ділить відрізок $M_1M_2$ навпіл, тобто $\lambda = (M_1M)/(MM_2) = 1$, для координат середини відрізка $M_1M_2$ матимемо:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (1.58)$$

**Приклади.**

1. Маємо вершини $A(2;\ 2;\ 2)$, $B(6;\ 5;\ 0)$, $C(0;\ 3;\ 8)$ паралелограма $ABCD$. Знайти вершину $D$.

Нехай точка $O$ — точка перетину діагоналей паралелограма. Діагоналі паралелограма, як відомо, в точці їх перетину діляться навпіл.

Тоді, оскільки точка $O$ є серединою відрізка $AC$, то згідно з формулами (1.58) маємо:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \quad ,$$

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \quad ,$$

$$z_O = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2+8}{2} = 5 \quad ,$$

тобто координати точки перетину діагоналей будуть $O(1;\ 5/2;\ 5)$.

З іншого боку, $O$ є також серединою відрізка $BD$. Оскільки координати точок $B$ і $O$ відомі, знаходимо координати точки $D$:

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2}, \qquad y_O = \frac{y_B + y_D}{2}, \qquad z_O = \frac{z_B + z_D}{2} \quad ,$$

або

$$1 = \frac{6 + x_D}{2}, \qquad \frac{5}{2} = \frac{5 + y_D}{2}, \qquad 5 = \frac{0 + z_D}{2} \quad ,$$

звідки $x_D = -4$, $y_D = 0$, $z_D = 10$, тобто $D(-4;\ 0;\ 10)$.

**2.** Відрізок $AB$, де $A(3;\ -5;\ 2)$, $B(5;\ -3;\ 1)$, точками $C$ і $D$ ділиться на три рівні частини. Знайти координати точок $C$ і $D$.

За умовою $\lambda_1 = (AC)/(CB) = 1/2$ і $\lambda_2 = (AD)/(DB) = 2/1 = 2$. Користуючись формулами (1.57), одержимо:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda_1 x_B}{1 + \lambda_1} = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{11}{3} \quad ,$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda_1 y_B}{1 + \lambda_1} = \frac{-5 + \frac{1}{2}\cdot(-3)}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{13}{3} \quad ,$$

$$z_C = \frac{z_A + \lambda_1 z_B}{1 + \lambda_1} = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3} \quad ,$$

тобто $C\left(\frac{11}{3};\ -\frac{13}{3};\ \frac{5}{3}\right)$. Аналогічно знаходимо:

$$x_D = \frac{x_A + \lambda_2 x_B}{1 + \lambda_2} = \frac{3 + 2\cdot 5}{1 + 2} = \frac{13}{3} \quad ,$$

$$y_D = \frac{y_A + \lambda_2 y_B}{1 + \lambda_2} = \frac{-5 + 2\cdot(-3)}{1 + 2} = -\frac{11}{3} \quad ,$$

$$z_D = \frac{z_A + \lambda_2 z_B}{1 + \lambda_2} = \frac{2 + 2\cdot 1}{1 + 2} = \frac{4}{3} \quad ,$$

тобто $D\left(\frac{13}{3};\ -\frac{11}{3};\ \frac{4}{3}\right)$.

3. Знайти відношення, в якому координатна площина $XOY$ ділить відрізок між точками $A(2;\ -1;\ 7)$ і $B(4;\ 5;\ -2)$ та координати їх точки перетину $M$.

Нехай пряма $AB$ перетинає площину $XOY$ у точці $M(x;\ y;\ 0)$. Тоді з виразу (1.58) для координати $z$ знаходимо $\lambda$:

$$z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{7 + \lambda(-2)}{1+\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{7}{2}\ .$$

Знаючи $\lambda$, з тих самих формул знаходимо координати точки перетину прямої $AB$ з площиною $XOY$:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{7}{2}\cdot 4}{1 + \frac{7}{2}} = \frac{32}{9}\ ,$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{7}{2}\cdot 5}{1+\lambda} = \frac{33}{9}\ ,$$

тобто $M\left(\frac{32}{9};\ \frac{33}{9};\ 0\right)$.

# 1.14 ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ ПОЧАТКУ КООРДИНАТ

Перейдемо від системи координат $x$, $y$, $z$ до системи координат $x'$, $y'$, $z'$ за допомогою паралельного перенесення від точки $O$ до точки $O'$ на вектор $\mathbf{a}$ (рис. 1.26).

Зв'язок між "старими" координатами $x$, $y$, $z$ і "новими" $x'$, $y'$, $z'$ із трикутника $OO'M$ має вигляд:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a} \ , \qquad (1.59)$$

де $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$ радіус-вектори точки $M$ у "новій" і "старій" системах координат відповідно.

Оскільки напрями координатних осей залишилися незмінними, то координатні орти осей "нової" системи дорівнюють відповідним координатним ортам осей "старої" системи. Тоді, згідно з формулами (1.49) і (1.32):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} , \qquad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \ ,$$

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \ .$$

Звідки завдяки рівності (1.45) зв'язок між "старими" та "новими" координатами у векторній формі (1.59) перепишеться у вигляді співвідношень між відповідними координатами:

$$x = x' + a_x , \qquad y = y' + a_y , \qquad z = z' + a_z \ . \qquad (1.60)$$

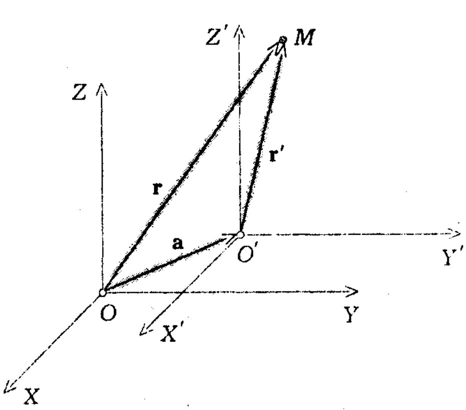



Рис. 1.26

# ВПРАВИ

1. Сторонами паралелограма є вектори $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$. Знайти дві інші сторони та діагоналі паралелограма.

2. Сторонами трикутника $ABC$ є вектори $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB}$ і $\mathbf{q} = \overrightarrow{BC}$. Знайти медіани трикутника $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BN}$.

3. У рівнобічній трапеції $ABCD$ відомі нижня основа $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, бічна сторона $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ і кут між ними $\alpha = \pi/3$. Розкласти за векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ всі інші сторони та діагоналі трапеції, вважаючи їх векторами.

4. У трикутнику $ABC$ сторона $AB$ точками $M$ і $N$ ділиться на три рівні частини: $AM = MN = NB$. Знайти вектори $\overrightarrow{CM}$ і $\overrightarrow{CN}$, якщо $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b}$.

5. У трикутнику $ABC$ пряма $AK$ є бісектрисою кута $BAC$. Знайти вектор $\overrightarrow{AK}$, якщо $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}_1$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}_2$.

6. Розкласти за трьома некомпланарними векторами $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{p} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ вектор $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

7. У правильному шестикутнику $ABCDEF$, $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{b}$. Розкласти вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$ за векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

8. У трикутнику $ABC$ сторона $BC$ ділиться точкою $K$ у відношенні $m{:}n$, тобто $(BK)/(KC) = m/n$. Розкласти вектор $\overrightarrow{AK}$ за векторами $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ і $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$.

9. Дано вектори $\mathbf{p} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c}$ і $\mathbf{q} = \mu_1\mathbf{a} + \mu_2\mathbf{b} + \mu_3\mathbf{c}$. Знайти співвідношення між коефіцієнтами, якщо вектори $\mathbf{p}$ і $\mathbf{q}$ колінеарні.

10. Відомо вектори $\mathbf{a} = (1;\ -2;\ 0)$, $\mathbf{b} = (3;\ 4;\ 1)$, $\mathbf{c} = (2;\ 5;\ 1)$ і $\mathbf{d} = (11;\ 7;\ 3)$. Знайти вектор $\mathbf{d}$ в базисі векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

11. Визначити, при яких значеннях $\alpha$ і $\beta$ вектори $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \mathbf{k}$ і $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ будуть колінеарні.

12. Відомо одиничні вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, які утворюють із віссю $l$ кути $\pi/3$, $2\pi/3$ і $\pi$ відповідно. Знайти проекцію на вісь $l$ вектора $\mathbf{m} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

13. Вектор $\mathbf{a}$ має довжину $|\mathbf{a}| = 6$ та утворює з осями прямокутної системи координат $OX$, $OY$, $OZ$ кути $\pi/3$, $2\pi/3$ і $\pi/4$ відповідно. Знайти проекції вектора на осі координат. Побудувати вектор, уважаючи, що початок вектора збігається з початком координат.

14. Відомо вектори $\mathbf{a} = (3;\ -2;\ 6)$ і $\mathbf{b} = (1;\ 3;\ -7)$. Визначити проекції вектора $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ на координатні осі.

15. Відомо координати початку $M(2;\ 1;\ -4)$ і кінця $N(1;\ 3;\ 2)$ вектора $\mathbf{m} = \overrightarrow{MN}$. Знайти довжину вектора $\mathbf{m}$ і його напрямні косинуси.

16. Вектори $\mathbf{m} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ і $\mathbf{n} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ прикладені до однієї точки. Знайти орт $\mathbf{c}_0$ бісектриси кута між $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$.

17. Відомо вектори $\mathbf{a} = (2;\ -5;\ 3)$, $\mathbf{b} = (1;\ 3;\ -7)$. Знайти вектори $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ і $\mathbf{d} = 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

18. Дано паралелограм $ABCD$ з точками

$$A(1;\ -3;\ -2),\quad B(8;\ 0;\ -4) \quad \text{і} \quad C(4;\ 8;\ -3)\ .$$

Знайти точку $D$.

19. Дано трикутник $ABC$ з вершинами $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 2;\ 1)$ і $C(1;\ 4;\ 1)$. Показати, що трикутник рівнобічний.

20. Вершини чотирикутника знаходяться в точках

$$A(2;\ 0;\ 4),\quad B(7;\ -15;\ 16),\quad C(-1;\ -1;\ 11)\ ,$$
$$D(-14;\ 28;\ -6)\ .$$

Показати, що $ABCD$ трапеція.

21. Знайти координати кінців відрізка $AB$, який точками $M(7;\ 0;\ 3)$ і $N(-5;\ 0;\ 0)$ ділиться на три рівні частини.

# Глава 2
# Добуток векторів

## § 2.1 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Розглянемо два вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, приведені до одного початку (рис. 2.1).

*Кутом між векторами* називається найменший кут, на який необхідно повернути будь-який з них до суміщення їх напрямків. Будемо позначати його $\varphi$. Інколи кут між векторами позначається $\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$. Згідно зі сказаним, $\varphi \in [0, \pi]$.

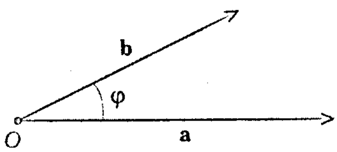



Рис. *2.1*

*Скалярним добутком двох векторів називається добуток їх модулів і косинуса кута між ними.* Скалярний добуток позначається $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ або $\mathbf{a}\mathbf{b}$ і інколи $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Тоді, згідно з означенням, маємо:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi \ . \qquad (2.1)$$

Скалярний добуток двох векторів є скаляр, звідки й походить його назва.

Поняття скалярного добутку природньо виникає в багатьох задачах геометрії та фізики. Класичним прикладом скалярного добутку є робота сили $\mathbf{F}$ при прямолінійному переміщенні будь-якого тіла на відстань $|\mathbf{S}|$. Як відомо з курсу механіки, робота $A$ це скаляр і

$$A = |\mathbf{F}||\mathbf{S}| \cos\varphi \ , \qquad (2.2)$$

де $\varphi$ — це кут між векторами сили $\mathbf{F}$ і переміщення $\mathbf{S}$.

Наявність $\cos\varphi$ означає, що робота пропорційна складовій сили вздовж переміщення

$$|\mathbf{F}_{\mathbf{S}}| = \text{пр}_{\mathbf{S}}\mathbf{F} = |\mathbf{F}| \cos\varphi \qquad (2.3)$$

і дорівнює нулю, коли сила $\mathbf{F}$ перпендикулярна переміщенню $\mathbf{S}$ (оскільки $\cos 90^\circ = 0$).

В окремому випадку, коли співмножниками скалярного добутку є одиничні вектори, наприклад, $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$, то через те, що $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, формула (2.1) матиме вигляд:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos\varphi \quad , \tag{2.4}$$

де $\varphi$ — кут між ортами $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$. Тобто, *скалярний добуток двох одиничних векторів дорівнює косинусу кута між ними.*

Ураховуючи формулу (1.28), означення скалярного добутку можна переписати у вигляді

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot (|\mathbf{b}| \cos\varphi) = |\mathbf{a}| \cdot \text{пр}_\mathbf{a}\mathbf{b} \tag{2.5}$$

або

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot (|\mathbf{a}| \cos\varphi) = |\mathbf{b}| \cdot \text{пр}_\mathbf{b}\mathbf{a} \quad . \tag{2.6}$$

Тобто, *скалярний добуток двох векторів є добуток довжини одного з векторів і проекції іншого на його напрям.*

З формули (2.1), оскільки $\cos\varphi$ є величиною безрозмірною, очевидно, що розмірність скалярного добутку дорівнює добутку розмірностей його співмножників.

Розглянемо **властивості** скалярного добутку.

1. *Скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, коли вектори взаємно перпендикулярні або хоча б один зі співмножників є нуль-вектором.*

Дійсно, коли вектори перпендикулярні, то кут між ними становить $90°$, а оскільки $\cos 90° = 0$, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos 90° = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot 0 = 0 \quad .$$

Якщо принаймні один зі співмножників дорівнює нуль-вектору, то це твердження випливає безпосередньо з (2.1), оскільки $|\mathbf{0}| = 0$. Слід також відзначити, що оскільки напрям нуль-вектора невизначений, то його також можна вважати перпендикулярним будь-якому вектору, і ця властивість стає знову очевидною через те, що $\cos 90° = 0$.

Ураховуючи це, дану властивість можна записати так:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \quad . \tag{2.7}$$

2. *Скалярний добуток вектора самого на себе дорівнює квадрату його модуля*, тобто:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \quad . \tag{2.8}$$

Дійсно, оскільки кут $\varphi$ дорівнює куту $\widehat{\mathbf{a}\mathbf{a}} = 0°$, то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cos 0° = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2 \quad .$$

Скалярний добуток вектора самого на себе називається *скалярним квадратом* і позначається $\mathbf{a}^2$. Згідно з цим (2.8) матиме вигляд:

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 \ , \tag{2.9}$$

звідки можна записати

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} \ . \tag{2.10}$$

Якщо вектор $\mathbf{a}$ не є нульовим вектором, то з (2.8) можна зробити висновок, що скалярний добуток будь-якого вектора самого на себе є величиною завжди додатною, тобто

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} > 0 \ . \tag{2.11}$$

3. *Скалярний добуток не залежить від порядку співмножників (комутативність)*:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \ , \tag{2.12}$$

що випливає безпосередньо з означення (2.1).

4. *Числовий множник можна виносити за знак скалярного добутку (асоціативність)*:

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \ . \tag{2.13}$$

Дійсно, користуючись відповідною властивістю проекцій вектора (1.31), маємо:

$$(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\lambda\mathbf{a} = |\mathbf{b}|\lambda\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \lambda|\mathbf{b}|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \ .$$

Дана властивість має й обернену інтерпретацію: *щоб помножити скалярний добуток на числовий множник, достатньо помножити на цей множник будь-який з перемножуваних векторів*. Очевидно, що обидва формулювання даної властивості еквівалентні.

Наслідком даної властивості є також можливість винесення числового множника з обох векторів співмножників за знак скалярного добутку одночасно, тобто:

$$\lambda_1\mathbf{a}\cdot\lambda_2\mathbf{b} = \lambda_1\lambda_2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \ .$$

5. *Скалярний добуток будь-якого вектора на суму двох векторів дорівнює сумі скалярних добутків цього вектора на кожний з векторів доданків (дистрибутивність)*:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \ . \tag{2.14}$$

Дійсно, користуючись відповідною властивістю проекцій вектора (1.29), маємо:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = |\mathbf{c}|\,\text{пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\cdot(\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a}+\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b}) =$$

$$= |\mathbf{c}|\,\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + |\mathbf{c}|\,\text{пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \ ,$$

що доводить дану властивість.

**Приклади.**

**1.** Знайти скалярний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, для яких $|\mathbf{a}| = 8$, $|\mathbf{b}| = 5$, і кут між ними дорівнює: 1) $\varphi_1 = 60°$; 2) $\varphi_2 = 120°$.

$$1)\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi_1 = 8\cdot 5\cdot\cos 60° = 8\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = 20 \;;$$

$$2)\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi_2 = 8\cdot 5\cdot\cos 120° = 40\cos(90° + 30°) =$$

$$= 40\cdot(-\sin 30°) = 40\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -20 \;.$$

**2.** Вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ утворюють кут $\pi/3$. Відомо, що $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$. Знайти модуль вектора $\mathbf{c} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$.

Згідно з (2.10) маємо $|\mathbf{c}| = \sqrt{\mathbf{c}^2}$. Користуючись властивостями скалярного добутку, знаходимо:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})\cdot(3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = 9\mathbf{a}^2 + 12\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 4\mathbf{b}^2 \;,$$

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 = 3^2 = 9\,, \qquad \mathbf{b}^2 = |\mathbf{b}|^2 = 4^2 = 16 \;.$$

Згідно з означенням скалярного добутку:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 6 \;.$$

Остаточно:

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{9\mathbf{a}^2 + 12\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 4\mathbf{b}^2} = \sqrt{9\cdot 9 + 12\cdot 6 + 4\cdot 16} = \sqrt{217} \;.$$

**3.** Знайти скалярний добуток векторів $\mathbf{m} = 5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ і $\mathbf{n} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, якщо $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$ і $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

Користуючись означенням і властивостями скалярного добутку, маємо:

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = (5\mathbf{a} + 3\mathbf{b})(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 10\mathbf{a}^2 - 5\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 6\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 3\mathbf{b}^2 =$$

$$= 10|\mathbf{a}|^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 3|\mathbf{b}|^2 = 10\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot\cos 90° - 3\cdot 9 =$$

$$= 40 + 2\cdot 3\cdot 0 - 27 = 13 \;.$$

**4.** Знайти кут між векторами $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ і $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$, де $\mathbf{m}$ і $\mathbf{n}$ — одиничні вектори, а кут $\widehat{\mathbf{m}\mathbf{n}} = 120°$.

З означення скалярного добутку (2.1) маємо:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} \;. \tag{2.15}$$

Тоді:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (2\mathbf{m} + 4\mathbf{n})(\mathbf{m} - \mathbf{n}) = 2\mathbf{m}^2 + 2\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} - 4\mathbf{n}^2 = 2|\mathbf{m}|^2 +$$

$$+ 2|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos 120° - 4|\mathbf{n}|^2 = 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\cdot 1 =$$

$$= 2 - 1 - 4 = -3 \;,$$

$$|\mathbf{a}| = |2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}| = \sqrt{(2\mathbf{m} + 4\mathbf{n})^2} = \sqrt{4\mathbf{m}^2 + 16\mathbf{m}\mathbf{n} + 16\mathbf{n}^2} =$$

$$= \sqrt{4|\mathbf{m}|^2 + 16|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}| \cdot \cos 120^\circ + 16|\mathbf{n}|^2} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 1 + 16 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 16 \cdot 1} =$$

$$= \sqrt{41 - 8 + 16} = \sqrt{12} \ ,$$

$$|\mathbf{b}| = |\mathbf{m} - \mathbf{n}| = \sqrt{(\mathbf{m} - \mathbf{n})^2} = \sqrt{\mathbf{m}^2 - 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n}^2} =$$

$$= \sqrt{|\mathbf{m}|^2 - 2|\mathbf{m}||\mathbf{n}| \cos 120^\circ + |\mathbf{n}|^2} = \sqrt{1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1} =$$

$$= \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \ .$$

Таким чином,

$$\cos(\mathbf{a}\hat{\ }\mathbf{b}) = -\frac{3}{\sqrt{12}\,\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \angle(\mathbf{a}\hat{\ }\mathbf{b}) = 120^\circ \ .$$

**5.** Довести теорему Піфагора.

Нехай є прямокутний трикутник, катетами якого є вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ (рис. 2.2).

За правилом віднімання векторів, гіпотенуза $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Тоді згідно з (2.9) маємо:

$$c^2 = |\mathbf{c}|^2 = \mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 =$$

$$= \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 =$$

$$= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = a^2 + b^2 \ ,$$

отже

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot 0 = 0 \ .$$

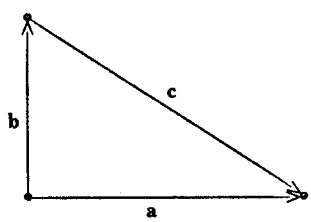



Рис. 2.2

Тобто ми довели, що *в прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів.*

**6.** За якої умови вектори $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ і $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ будуть взаємно перпендикулярні?

Якщо $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \perp (\mathbf{p} - \mathbf{q})$, то $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = 0$, згідно з першою властивістю скалярного добутку, тоді, користуючись (2.12), одержимо:

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q})(\mathbf{p} - \mathbf{q}) = \mathbf{p}^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{q}^2 = \mathbf{p}^2 - \mathbf{q}^2 = 0 \ .$$

Звідки

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| \ .$$

Слід відзначити, що зворотне твердження теж буде правильним, тобто, якщо $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}|$, то $(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \perp (\mathbf{p} - \mathbf{q})$. Геометричний зміст цього твердження можна побачити в першому прикладі § 1.6, якщо розглянути граничний випадок паралелограма ромб, діагоналі якого, як відомо, взаємно перпендикулярні.

# § 2.2 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ У КООРДИНАТНІЙ ФОРМІ

Нехай вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ задані своїми координатами (1.32)

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} \ .$$

Оскільки вектори $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ одиничні та взаємно перпендикулярні, то згідно з означенням скалярного добутку (2.1):

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1\cdot 1\cdot\cos 0^\circ = 1 \ , \quad (2.16)$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ = 0 \ . \quad (2.17)$$

Тоді, враховуючи (2.16), (2.17) і користуючись (2.12) та (2.13), маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_xb_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + \\ &+ a_xb_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + a_xb_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) + a_yb_x(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + a_yb_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + \\ &+ a_yb_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) + a_zb_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + a_zb_y(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + a_zb_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = \\ &= a_xb_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + a_yb_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + a_zb_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) = \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \ ,\end{aligned}$$

тобто

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \ . \quad (2.18)$$

Таким чином, *скалярний добуток двох векторів у координатній формі дорівнює сумі добутків їхніх відповідних координат.*

Якщо розглянути скалярний добуток вектора самого на себе, то формула (2.18) матиме вигляд:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \ . \quad (2.19)$$

Оскільки згідно з (2.10) $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$, то ми одержимо формулу для знаходження довжини вектора, яка збігається з формулою (1.40):

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ . \quad (2.20)$$

Тобто, *довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат.*

В окремому випадку скалярного добутку одиничного вектора самого на себе, який у координатній формі має вигляд (1.38) $\mathbf{e} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$, з формули (2.18) одержимо:

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \ ,$$

що збігається з формулою (1.41).

Оскільки скалярний добуток двох взаємно перпендикулярних векторів дорівнює нулю, то з (2.18) для $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ одержимо:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \ . \quad (2.21)$$

Формула (2.21) є *умовою перпендикулярності двох векторів, заданих своїми координатами.*

З означення скалярного добутку (2.1) випливає вираз (2.15) для знаходження кута між двома векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} \ . \quad (2.22)$$

У координатній формі ця формула, враховуючи (2.18) та (2.20), матиме вигляд:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \ . \quad (2.23)$$

**Приклади.**

1. Відомо два вектори: $\mathbf{a} = (1;\ -2;\ 2)$, $\mathbf{b} = (2;\ -2;\ -1)$. Обчислити кут між ними.

Користуючись формулами (2.18) і (2.20), знаходимо:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) + 2\cdot(-1) = 2 + 4 - 2 = 4 \ ;$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3 \ ;$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 \ .$$

Тоді згідно з формулою (2.22) маємо:

$$\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{4}{9} \ .$$

Звідки

$$\angle(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \arccos\frac{4}{9} \approx 63°\,36' \ .$$

2. Маємо трикутник з вершинами $A_1 = (-3;\ 5;\ 6)$, $A_2 = (1;\ -5;\ 7)$, $A_3 = (8;\ -3;\ 1)$. Знайти внутрішній кут при вершині $A_1$ та зовнішній кут при вершині $A_3$.

Внутрішній кут $\varphi_1$ при вершині $A_1$ дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ (рис. 2.3), а зовнішній кут $\varphi_2$ при вершині $A_3$ дорівнює куту між векторами $\overrightarrow{A_3A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$.

За формулою (1.51) знаходимо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_2}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1) = (4;\ -10;\ 1) \ ,$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1) = (11;\ -8;\ -7)\ ,$$

$$\overrightarrow{A_3A_2} = (x_2 - x_3;\ y_2 - y_3;\ z_2 - z_3) = (-7;\ -2;\ 8)\ .$$

Користуючись формулою (2.23), знаходимо:

$$\cos\varphi_1 = \cos(\overrightarrow{A_1A_2}, \widehat{\ }\overrightarrow{A_1A_3}) =$$

$$= \frac{4\cdot 11 + (-10)\cdot(-8) + 1\cdot(-7)}{\sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2}\ \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} =$$

$$= \frac{117}{\sqrt{117}\ \sqrt{234}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 45^\circ\ ,$$

$$\cos\varphi_2 = \cos(\overrightarrow{A_3A_2}, \widehat{\ }\overrightarrow{A_1A_3}) =$$

$$= \frac{(-7)\cdot 11 + (-2)\cdot(-8) + 8\cdot(-7)}{\sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 8^2}\ \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2}} =$$

$$= \frac{-117}{\sqrt{117}\ \sqrt{234}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 135^\circ\ .$$

**3.** Показати, що чотирикутник з вершинами $A_1 = (-5;\ 3;\ 4)$, $A_2 = (-1;\ -7;\ 5)$, $A_3 = (6;\ -5;\ -3)$, $A_4 = (2;\ 5;\ -4)$ є квадрат.

Знаходимо за формулою (1.51) координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_4A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$ (рис. 2.4).

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (-1 + 5;\ -7 - 3;\ 5 - 4) = (4;\ -10;\ 1)\ ;$$

$$\overrightarrow{A_2A_3} = (6 + 1;\ -5 + 7;\ -3 - 5) = (7;\ 2;\ -8)\ ;$$

$$\overrightarrow{A_4A_3} = (2 - 6;\ 5 + 5;\ -4 + 3) = (-4;\ 10;\ -1)\ ;$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (2 + 5;\ 5 - 3;\ -4 - 4) = (7;\ 2;\ -8)\ .$$

Порівнюючи координати векторів, бачимо, що:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_4A_3}\ , \qquad \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_4}\ ,$$

а оскільки

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117}\ ,$$

$$\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{117}\ ,$$

то

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| = \left|\overrightarrow{A_4A_3}\right| = \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|\ .$$

Оскільки

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_2A_3} = 4\cdot 7 + (-10)\cdot 2 + 1\cdot(-8) = 0\ ,$$

то $\overrightarrow{A_1A_2} \perp \overrightarrow{A_2A_3}$ .

Отже, чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ є квадрат.

**4.** При якому значенні $\lambda$ вектори $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ і $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{i} - \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ взаємно перпендикулярні?

Враховуючи умову перпендикулярності двох векторів, записану в координатній формі (2.21), маємо:

$$4\lambda - \lambda - 30 = 0 ,$$

звідки $\lambda = 10$.

**5.** Відомо три вектори:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \qquad \mathbf{c} = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Знайти $\text{пр}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

Знайдемо вектор $\mathbf{b} + \mathbf{c}$:

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + (10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j} .$$

Оскільки, згідно з формулою (2.5),

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \cdot \text{пр}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) ,$$

то

$$\text{пр}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c})}{|\mathbf{a}|} = \frac{1 \cdot 12 + (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{12 - 10}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} .$$

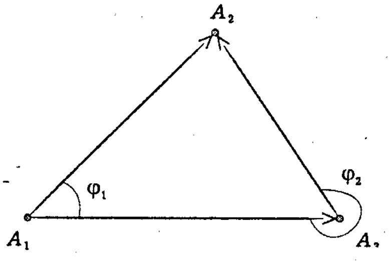



Рис. 2.3

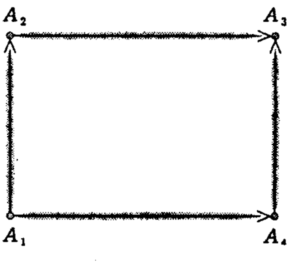



Рис. 2.4

# § 2.3 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Векторним добутком двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ називається вектор, який:

*а) перпендикулярний до обох векторів* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$;

*б) напрямлений таким чином, що найкоротший поворот від вектора* $\mathbf{a}$ *до вектора* $\mathbf{b}$ *(після суміщення їх початків) навколо даного вектора відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з його кінця;*

*в) модуль якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *(рис. 2.5).*

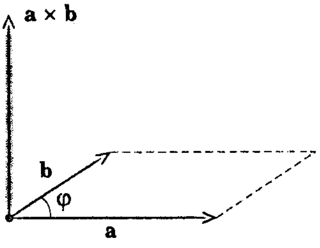



Рис. 2.5

Векторний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ позначається $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, а інколи $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Слід ще раз підкреслити, що векторний добуток двох векторів є вектор, звідки походить і назва операції множення. Якщо цей вектор позначити через $\mathbf{c}$, тобто $\mathbf{c} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, то з означення векторного добутку випливає, що:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi\ , \tag{2.24}$$

де кут $\varphi$, це кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Таким чином, *модуль векторного добутку двох векторів дорівнює добутку їх модулів, помноженому на синус кута між ними.*

Оскільки формула (2.24) визначає площу паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, то, користуючись означенням векторного добутку, маємо можливість розв'язувати різноманітні геометричні задачі, пов'язані з обчисленням площі паралелограма

$$S_{\text{паралелограма}} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \tag{2.25}$$

або відповідного трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\ . \tag{2.26}$$

Формули (2.25) та (2.26) відображають геометричний зміст векторного добутку. Якщо сумістити початки трійки векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і вектора $\mathbf{c}$, який є векторним добутком векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, за умови, прийнятої в його означенні, що найкоротший поворот від вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора $\mathbf{c}$, то така трійка векторів називається *правою*. Якщо ж найкоротший поворот від вектора $\mathbf{a}$ до вектора $\mathbf{b}$ за тієї самої умови буде відбуватися за годинниковою стрілкою, то вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ будуть утворювати *ліву* трійку векторів. Якщо ми умовно позначимо вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ відповідно перший, другий, третій, то при перестановці будь-яких двох векторів, які знаходяться поруч, наприклад, $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ або $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, ліва трійка векторів переходить у праву, і навпаки. При циклічній перестановці векторів, наприклад, якщо другий вектор замінити першим, третій другим, а перший третім, трійка векторів залишається незмінною.

Слід зауважити, що трійка координатних ортів $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, яку ми розташували так, як показано на рис. 1.19, є *правою*, тобто утворює праву систему координат. Якщо ж поміняти місцями, наприклад, $\mathbf{j}$ і $\mathbf{i}$ або $\mathbf{j}$ і $\mathbf{k}$, то ми одержимо ліву систему координат. Таким чином, слід мати на увазі, що існують ліві та праві декартові системи координат. Ми і надалі будемо користуватися правою системою координат, тому вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ та їхній векторний добуток $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ мають бути розташовані в просторі так, як і вектори $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

У зв'язку зі сказаним, означення векторного добутку можна перефразувати так: *векторним добутком двох векторів* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *називається такий вектор* $\mathbf{c}$, *модуль якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах, і який разом з векторами* $\mathbf{a}$ *і* $\mathbf{b}$ *утворює праву трійку векторів.*

Класичним прикладом векторного добутку в механіці є поняття моменту будь-якого фізичного вектора: моменту сили, моменту швидкості, моменту імпульсу тощо. Наприклад, якщо в деякій довільній точці $A$ прикладена сила $\mathbf{F}$, то момент цієї сили відносно деякої фіксованої точки $O$ буде вектор, який є векторним добутком радіус-вектора точки $A$ $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ і прикладеної сили $\mathbf{F}$, тобто:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \ . \qquad (2.27)$$

Формула (2.27) відображає механічний зміст векторного добутку. Розглянемо **властивості** векторного добутку.

1. *Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю, коли вектори колінеарні або хоча б один зі співмножників дорівнює нулю (є нуль-вектор).*

Дійсно, якщо вектори колінеарні, тобто паралельні, або антипаралельні, то кут між ними буде дорівнювати $0°$ або $180°$, а $\sin 0°$ і $\sin 180° = 0$, звідки модуль векторного добутку (2.24), а отже, і сам векторний добуток буде дорівнювати нулю.

Зовсім очевидно, що коли $|\mathbf{a}| = 0$ або $|\mathbf{b}| = 0$, або і $|\mathbf{a}| = 0$, і $|\mathbf{b}| = 0$ одночасно, то $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ теж буде дорівнювати нулю.

Якщо розглянути обернене твердження $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ і припустити, що вектори-множники не є нуль-векторами, то з умови $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = 0$ випливає, що вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ колінеарні. А оскільки нуль-вектор можна вважати колінеарним будь-якому вектору через невизначеність його напряму, то дану властивість можна сформулювати так: *векторний добуток дорівнює нуль-вектору тоді і тільки тоді, коли вектори-множники колінеарні.*

Беручи до уваги цю властивість, з умови

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \qquad (2.28)$$

маємо умову колінеарності двох векторів (1.15):

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \ . \qquad (2.29)$$

В окремому випадку колінеарності

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0 \ , \qquad (2.30)$$

що випливає безпосередньо з (2.24) або з (2.29), якщо покласти $\lambda = 1$.

2. *Якщо вектори взаємно перпендикулярні, то модуль їх векторного добутку дорівнює добутку їх модулів, і навпаки.* Тобто:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \ . \qquad (2.31)$$

Ця властивість є очевидним наслідком (2.24), оскільки $\sin 90^\circ = 1$.

3. *При перестановці місцями векторів-співмножників векторний добуток двох векторів змінює знак на протилежний (антикомутативність):*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \ . \qquad (2.32)$$

Дійсно, з огляду на означення векторного добутку $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b} \times \mathbf{a}|$, але вектори $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ і $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ направлені в протилежні боки, тобто є протилежними векторами.

У випадку колінеарності векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ рівність (2.32) є очевидною, оскільки $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ і $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ будуть нуль-векторами.

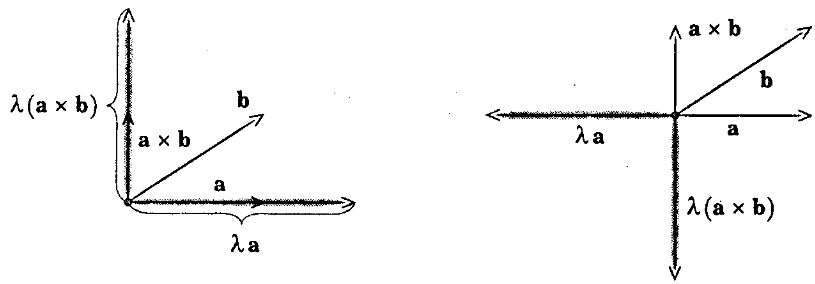
4. *Скалярний множник виноситься за знак векторного добутку (асоціативність):*

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \ . \qquad (2.33)$$

Доведемо рівність $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Дійсно, якщо $\lambda > 0$, то обидва вектори в цій рівності мають один і той же напрям (рис. 2.6 а)) та один і той же модуль $\lambda|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, де $\varphi$ — кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Якщо ж $\lambda < 0$

(рис. 2.6 б)), то вектор $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}$ матиме модуль $|\lambda||\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, але буде напрямлений протилежно вектору $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, хоча такий самий напрям і такий самий модуль матиме й вектор $\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, отриманий з вектора $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ множенням на від'ємне число $\lambda$.




а) б)

Рис. 2.6

Аналогічно доводиться й рівність $\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

Дана властивість має й обернену інтерпретацію: *щоб помножити векторний добуток на числовий множник, достатньо помножити на цей множник будь-який з перемножуваних векторів.*

Наслідком даної властивості є можливість одночасного винесення скалярних множників у обох векторів-співмножників за знак векторного добутку:

$$(\lambda_1\mathbf{a})\times(\lambda_2\mathbf{b}) = \lambda_1\lambda_2(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \quad . \qquad (2.34)$$

5. *Векторний добуток вектора на суму двох інших векторів дорівнює сумі векторних добутків даного вектора на кожний з векторів доданків (дистрибутивність):*

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} \quad . \qquad (2.35)$$

Перш ніж довести цю властивість, відзначимо, що вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ можна побудувати так: спроектуємо другий з перемножуваних векторів $\mathbf{b}$ на площину $P$, перпендикулярну до першого вектора $\mathbf{a}$, після чого, розглядаючи цю проекцію як вектор $\mathbf{b}_1$, повернемо його в площині $P$ на кут $90°$ проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора $\mathbf{a}$, і помножимо на модуль $|\mathbf{a}|$ (рис. 2.7). Отриманий вектор буде дорівнювати $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, оскільки відповідає його означенню.

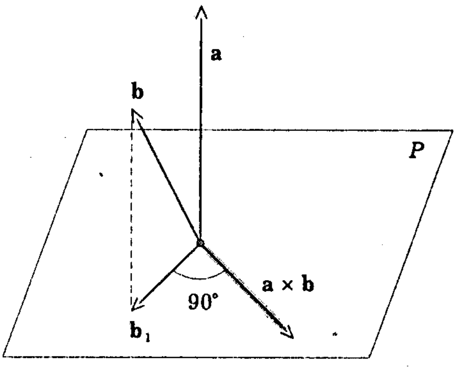



Рис. 2.7

Розглянемо рис. 2.8. На ньому фігура II є проекцією фігури I на площину $P$, яка перпендикулярна до вектора $\mathbf{a}$, а фігура III отримана поворотом фігури II в площині $P$ навколо вектора $\mathbf{a}$ на $90°$ проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора $\mathbf{a}$ і розтягом її в $|\mathbf{a}|$ разів. Фігура I — це паралелограм, побудований на векторах $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, діагональ якого є вектор $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

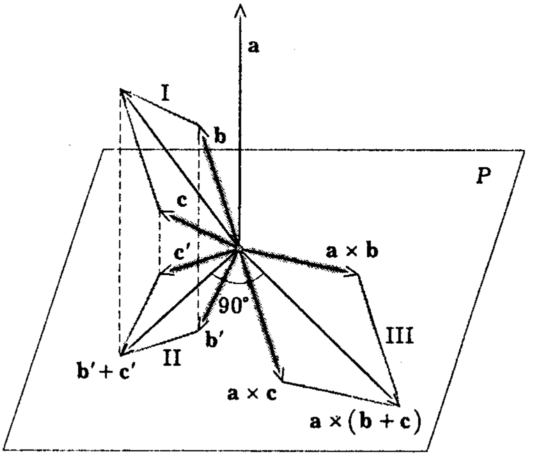



Рис. 2.8

Виходячи з властивостей проекцій, можемо твердити, що фігура II також буде паралелограмом, діагональ якого $\mathbf{b}' + \mathbf{c}'$ є проекцією діагоналі $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ паралелограма I. А оскільки фігура III отримана з фігури II поворотом на кут $90°$, то фігура III також буде паралелограмом, тому її діагональ $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ буде (за правилом паралелограма) сумою векторів $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ і $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$, тобто $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, що й необхідно було довести.

Ця властивість дає можливість розкривати дужки у виразах, які включають векторні добутки, але при цьому слід пам'ятати, що множники векторного добутку не комутують між собою (властивість 3).

**Приклади.**

**1.** Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ і $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$, якщо $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$, а кут $\varphi$ між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ дорівнює $30°$.

Користуючись властивостями векторного добутку, маємо:

$$(\mathbf{a}+2\mathbf{b})\times(3\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 3(\mathbf{a}\times\mathbf{a})+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+6(\mathbf{b}\times\mathbf{a})+2(\mathbf{b}\times\mathbf{b}) =$$
$$= 3\cdot 0+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-6(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+2\cdot 0 = -5(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) .$$

Тоді

$$S_{\text{паралелограма}} = 5|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = 5\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 30° = \frac{5}{2} \text{ (од. площі)} .$$

**2.** Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\mathbf{a}=\mathbf{m}-2\mathbf{n}$ і $\mathbf{b}=3\mathbf{m}+\mathbf{n}$, де $|\mathbf{m}|=1$, $|\mathbf{n}|=2$, $\angle(\mathbf{m},\hat{}\mathbf{n})=\pi/6$.

Оскільки $S=(1/2)|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, знайдемо $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\mathbf{m}-2\mathbf{n})\times(3\mathbf{m}+\mathbf{n}) = 3(\mathbf{m}\times\mathbf{m})+(\mathbf{m}\times\mathbf{n})-6(\mathbf{n}\times\mathbf{m})-$$
$$-2(\mathbf{n}\times\mathbf{n}) = -6(\mathbf{n}\times\mathbf{m})+(\mathbf{m}\times\mathbf{n}) =$$
$$= 6(\mathbf{m}\times\mathbf{n})+(\mathbf{m}\times\mathbf{n}) = 7(\mathbf{m}\times\mathbf{n}) .$$

Тоді:

$$|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})| = 7|(\mathbf{m}\times\mathbf{n})| = 7|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 7\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 7 .$$

$$S_{\Delta} = \frac{7}{2} \text{ (од. площі)} .$$

**3.** Вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ відповідають умові $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$. Довести, що $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

Візьмемо рівність $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ і помножимо її векторно на $\mathbf{a}$. Тоді:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{a})+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = 0 ,$$

звідки:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\times\mathbf{a} .$$

Аналогічно помножимо векторно рівність $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ на вектор $\mathbf{b}$. Тоді:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{b}\times\mathbf{b})+(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = 0 ,$$

звідки

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\times\mathbf{c} .$$

З двох рівностей $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ і $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ випливає, що $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

4. Довести, що $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Дійсно, користуючись властивостями векторного добутку, маємо:

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) =$$
$$= -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \ .$$

Доведена тотожність має геометричну інтерпретацію. Оскільки вектори $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ і $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ є діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, то це означає, що *подвійна площа будь-якого паралелограма дорівнює площі паралелограма, побудованого на його діагоналях.*

# § 2.4 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ У КООРДИНАТНІЙ ФОРМІ

**Нехай є два вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ в координатній формі (1.32):**

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} \ .$$

Тоді, користуючись властивостями векторного добутку (2.34) і (2.35), маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = \\ &= a_x b_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_x b_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_x b_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\ &+ a_y b_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_y b_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_y b_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ &+ a_z b_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_z b_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_z b_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \ .\end{aligned}$$

Виходячи з означення векторного добутку та користуючись властивістю (2.32), одержимо:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}\,, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}\ ,$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}\,, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}\ . \qquad (2.36)$$

**Останні три добутки векторів самих на себе, згідно з формулою (2.30), будуть дорівнювати нулю:**

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0\,, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0\,, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0\ . \qquad (3.37)$$

**Ураховуючи вирази (2.36) і (2.37) і групуючи відповідні члени рівності, знаходимо:**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}\ . \qquad (2.38)$$

Ураховуючи означення визначника другого порядку (див. курс «Вища алгебра»), цю рівність можна переписати у вигляді:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\mathbf{k}\ .$$

Тобто координати векторного добутку двох векторів виражаються через координати перемножуваних векторів так:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left( \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)\ . \qquad (2.39)$$

Легко побачити, що права частина виразу (2.38) є розклад визначника третього порядку за першим рядком, елементами якого є відповідні координатні орти, тобто:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2.40)$$

Таким чином, *векторний добуток двох векторів у координатній формі є визначник, елементами першого рядка якого є координатні орти, а елементи другого та третього рядків — координати відповідно першого та другого перемножуваних векторів.*

Для випадку, коли вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ розташовані на площині, наприклад, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ і $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$, векторний добуток двох векторів матиме вигляд:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\mathbf{k}. \qquad (2.41)$$

**Тобто, *векторний добуток двох векторів, розташованих в одній з координатних площин, колінеарний координатній осі, яка перпендикулярна даній площині.***

Формули (2.40) та (2.41) дають можливість обчислення площ паралелограма й трикутника, коли відомі координати їх вершин. Розглянемо довільні три точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, розташовані в просторі. Побудуємо два вектори:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$$

та

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1).$$

**Тоді згідно з формулою (2.26), формула для площі трикутника $M_1M_2M_3$, заданого координатами своїх вершин, матиме вигляд:**

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\,mod\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}. \qquad (2.42)$$

**Символ *mod* у виразі (2.42) означає модуль детермінанта для зручності запису правої частини формули. Формулу для площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$, одержимо з формули (2.42), враховуючи, що $S_{\text{паралелограма}} = 2S_\Delta$.**

Для випадку, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ та $\overrightarrow{M_1M_3}$ розташовані на площині, нехай для загальності викладу це буде площина $XOY$, формула (2.42) матиме вигляд:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} . \quad (2.43)$$

Визначник, розташований під знаком модуля, в правій частині (2.43) матиме знак плюс, якщо найкоротший поворот від вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ до вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$ збігатиметься з напрямом найкоротшого повороту від вектора **i** до вектора **j** і навпаки. Тобто, якщо орієнтація векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ та векторів $i$, **j** відповідно збігатиметься, то знак модуля у формулі (2.43) буде зайвий.

Якщо скористатися властивостями визначників , то формула (2.43) після елементарних перетворень може бути записана ще в більш зручному для запам'ятовування вигляді:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} . \quad (2.44)$$

**Приклади.**

1. Знайти векторний добуток **c** векторів $\mathbf{a} = (3;\ -1;\ 5)$ та $\mathbf{b} = (1;\ 2;\ 2)$.

   Згідно з формулою (2.40):

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(-2 - 10) - \mathbf{j}(6 - 5) + \mathbf{k}(6 + 1) = -12\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

або

$$\mathbf{c} = (-12;\ -1;\ 7) .$$

2. Знайти площу трикутника $ABC$ і висоту, опущену з вершини $A$, якщо $A = (1;\ 0;\ -1)$, $B = (0;\ 2;\ -3)$ і $C = (2;\ 2;\ 1)$.

   Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A) = (0-1;\ 2-0;\ -3-(-1)) =$$
$$= (-1;\ 2;\ -2)\ ,$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A;\ y_C - y_A;\ z_C - z_A) = (2-1;\ 2-0;\ 1+1) =$$
$$= (1;\ 2;\ 2)\ .$$

Тоді:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \mathbf{i}(4+4) - \mathbf{j}(-2+2) + \mathbf{k}(-2-2) = 8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}\ ;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{8^2 + 0^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}\ \text{(од. площі)}\ .$$

Для обчислення висоти скористаємося формулою:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h_A\ ,$$

де $BC$ — довжина основи трикутника, а $h_A$ — висота трикутника, опущена з вершини $A$. Тоді,так як

$$BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(2-0)^2 + (2-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Одержимо:

$$h_A = \frac{2\,S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2\ \text{(од. довжини)}\ .$$

3. Відомо вектори $\mathbf{a} = (1;\ -2;\ 2)$ і $\mathbf{b} = (3;\ 0;\ -4)$. Знайти кут між ними та площу паралелограма, побудованого на цих векторах.

Згідно з формулою (2.40) маємо:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) =$$
$$= (8;\ 10;\ 6)\ .$$

Тоді:

$$S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{8^2 + 10^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 100 + 36} = 10\sqrt{2}\ \text{(од. площі)}\ .$$

З формули (2.24) знаходимо:

$$\sin(\widehat{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}) = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\ \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \angle(\widehat{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}) = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}\ .$$

**4.** Вектор $\mathbf{a}$ перпендикулярний до векторів $\mathbf{b} = (2;\ -2;\ -3)$, $\mathbf{c} = (0;\ 1;\ 3)$ та утворює з віссю ординат тупий кут. Знайти координати вектора $\mathbf{a}$, якщо $|\mathbf{a}| = 14$.

Оскільки вектор $\mathbf{a}$ перпендикулярний до векторів $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, то він колінеарний вектору $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, тобто $\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Знаходимо:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\ .$$

Якщо врахувати, що вектор $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ також утворює, як і вектор $\mathbf{a}$, тупий кут з віссю $OY$, то $\alpha > 0$ і $\mathbf{a} = (-3\alpha;\ -6\alpha;\ 2\alpha)$ з умови колінеарності, і отже,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{9\alpha^2 + 36\alpha^2 + 4\alpha^2} = 7\alpha\ ,$$

звідки:

$$7\alpha = 14 \qquad \text{або} \qquad \alpha = 2\ .$$

Таким чином,

$$\mathbf{a} = (-6;\ -12;\ 4)\ .$$

Ми розглянули два існуючих векторних добутки двох векторів: скалярний та векторний. Якщо взяти два довільних вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b}$ і скласти піднесені до квадрата їхні скалярний та векторний добутки, то, як легко побачити, ми отримаємо таку цікаву формулу:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2\ . \qquad (2.45)$$

# § 2.5 ІСТИННІ ВЕКТОРИ ТА ПСЕВДОВЕКТОРИ

Розглянувши докладно поняття добутку двох векторів, слід відзначити, що в математиці існують вектори, знак яких пов'язаний з вибором головної трійки координатних ортів, тобто правої чи лівої. Вектори, які змінюють свій знак на протилежний після заміни правої трійки координатних ортів на ліву та навпаки, називаються *псевдовекторами* або *аксіальними* векторами. Таким, наприклад, є вектор $\omega$ кутової швидкості, який має напрям уздовж осі обертання при обертовому русі певного тіла. Очевидно, що при виборі правої трійки координатних ортів, якщо припустити, що обертання відбувається в площині $XOY$ (тобто від вектора $\mathbf{i}$ до вектора $\mathbf{j}$), то вектор $\omega$ буде напрямлений угору (тобто вздовж осі $\mathbf{k}$). При виборі лівої трійки координатних ортів вектор кутової швидкості буде напрямлений униз.

*Вектори, напрям яких не залежить від вибору трійки координатних ортів, називаються істинними векторами.* Прикладом такого типу векторів є вектор швидкості $\mathbf{v}$ прямолінійного руху, який за своїм фізичним змістом не може залежати від вибору трійки координатних ортів.

Тепер можна сказати, що безпосередньо з означення векторного добутку випливає, що векторний добуток двох істинних векторів є псевдовектор, істинного вектора на псевдовектор є істинний вектор, а двох псевдовекторів — псевдовектор.

Якщо ми тепер повернемося до скалярного добутку двох векторів, результатом якого є, як ми вже знаємо, скаляр, і розглянемо скалярний добуток істинного вектора та псевдовектора, то очевидно, що ми отримаємо скаляр, який при заміні трійки координатних ортів буде змінювати свій знак. У зв'язку з цим, за аналогією до векторів, існують також істинні скаляри й псевдоскаляри. Істинні скаляри — це звичайні скаляри, тобто числа, а скаляри, які після заміни правої трійки координатних ортів на ліву й навпаки множаться на $-1$, називаються псевдоскалярами. Скалярний добуток двох псевдовекторів або двох істинних векторів, звичайно, буде істинним скаляром.

# § 2.6 МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ

До сих пір ми розглядали лише добутки двох векторів: скалярний та векторний. Очевидно, що кожен з них може бути знову помноженим на деякий третій вектор. Один з таких випадків буде тривіальним. Якщо ми візьмемо два вектори й помножимо їх скалярно, то результатом такого добутку, як відомо, буде скаляр. Тому при множенні цього скаляра на новий вектор отримаємо вектор, колінеарний даному.

Принципово нові добутки виникнуть, якщо перші два вектори, наприклад $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, перемножити векторно $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, а потім цей результат знову множити на деякий третій вектор, наприклад, $\mathbf{c}$. В одному випадку ми будемо мати векторно-скалярний, або, як його ще називають, мішаний добуток трьох векторів $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, а в іншому випадку матимемо векторно-векторний, або подвійний векторний добуток трьох векторів $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

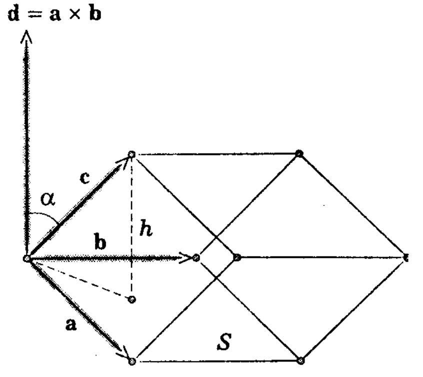



Рис. 2.9

*Мішаним або векторно-скалярним добутком трьох векторів* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *і* $\mathbf{c}$ *називається добуток вигляду* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, *де перші два вектори перемножуються векторно, а їх добуток множиться скалярно на третій вектор.*

Мішаний добуток трьох векторів є величина скалярна, оскільки остання виконувана дія є скалярний добуток. Позначається мішаний добуток так:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \qquad \text{або} \qquad \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}\ .$$

Геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів такий: *абсолютна величина мішаного добутку трьох некомпланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах*, тобто

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = |\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}|\ . \qquad (2.46)$$

Дійсно, розглянемо вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, які утворюють праву трійку векторів (рис. 2.9).

Оскільки вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ є правою трійкою векторів, то, згідно з означенням векторного добутку, вектор $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ утворює з вектором $\mathbf{c}$ гострий кут $\alpha$.

Площа $S$ основи паралелепіпеда дорівнює модулю векторного добутку векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$: $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Висота паралелепіпеда $h$ дорівнює проекції вектора $\mathbf{c}$ на напрям вектора $\mathbf{d}$: $h = |\mathbf{c}| \cos\alpha$. Тому $V = S \cdot h = |\mathbf{d}||\mathbf{c}|\cos\alpha$.

З іншого боку, мішаний добуток, згідно з його означенням, має те саме значення:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{d}||\mathbf{c}|\cos\alpha \ .$$

Таким чином, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = V$.

Розглянемо тепер ліву трійку векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (рис. 2.10).

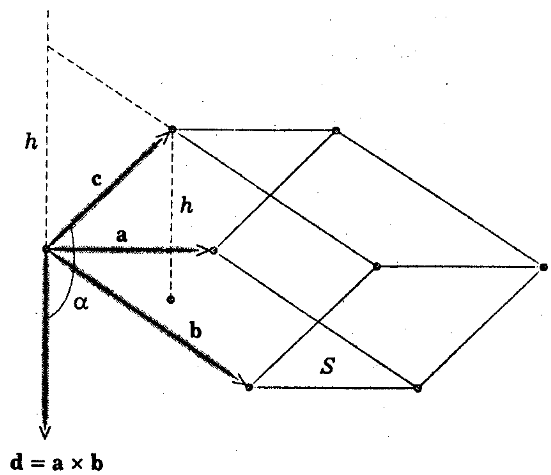



Рис. *2.10*

Відмінність від попереднього випадку буде в тому, що кут $\alpha$ — тупий, унаслідок чого для висоти паралелепіпеда $h$ отримаємо: $h = |\mathbf{c}|\cos(\pi - \alpha) = -|\mathbf{c}|\cos\alpha$. Тому $\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = -V$. Таким чином,

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = \pm V_{\text{паралелепіпеда}} \ , \qquad (2.47)$$

де знак "+" відповідає тому випадку, коли вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ в порядку їх слідування в мішаному добутку утворюють праву трійку векторів, а знак "−" відповідає лівій трійці векторів.

Користуючись мішаним добутком векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ можна обчислити об'єм чотиригранної піраміди (тетраедра), побудованої на тих же векторах. Об'єм такої піраміди дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на ребрах, що збігаються в одній вершині, тобто:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}|\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}| \ . \qquad (2.48)$$

Розглянемо **властивості** мішаного добутку трьох векторів.

1. *Мішаний добуток не змінюється після циклічної перестановки векторів-співмножників*, тобто:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \ . \qquad (2.49)$$

Дійсно, після такої перестановки не змінюється ні об'єм побудованого на цих векторах паралелепіпеда, ні їхня взаємна орієнтація, через що їх мішаний добуток матиме ту саму величину й той самий знак.

2. *Мішаний добуток не змінюється, якщо поміняти місцями знаки векторного та скалярного добутків*, тобто:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \ . \qquad (2.50)$$

Дійсно, якщо розглянути скалярний добуток двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, то, згідно з його властивістю (2.12), матимемо:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \ ,$$

тоді, користуючись першою властивістю мішаного добутку (2.49), одержимо співвідношення (2.50).

Слід відзначити, що виконання умови (2.50) стало причиною для введення позначення мішаного добутку трьох векторів у вигляді $\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}$.

3. *Після перестановки будь-яких двох векторів-співмножників мішаний добуток змінює знак на протилежний*, тобто:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \ ,$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} \ ,$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \ . \qquad (2.51)$$

Дійсно, така перестановка рівнозначна перестановці векторів співмножників у векторному добутку, що змінює його знак. Користуючись властивостями (2.49) і (2.50), маємо:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c},$$
$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = -(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c},$$
$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}.$$

4. *Мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, якщо*:
   *а) хоча б один з перемножуваних векторів є нуль-вектор;*
   *б) два з перемножуваних векторів колінеарні;*
   *в) три перемножувані вектори компланарні.*

Виконання всіх трьох пунктів цієї властивості випливає безпосередньо з умов перетворення на нуль скалярного й векторного добутків двох векторів та використання попередніх властивостей мішаного добутку. Через невизначеність напряму нуль-вектора всі пункти четвертої властивості мішаного добутку можна об'єднати та сформулювати так: мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, якщо ці вектори компланарні.

Можна довести також й обернене твердження.

Нехай $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 0$. Тоді, якщо жоден з векторів не є нульовим і жодні два вектори не є колінеарні, то вектори $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ мають бути перпендикулярні, оскільки їхній скалярний добуток дорівнює нулю. А оскільки, крім того, вектор $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ перпендикулярний до векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, то три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарні.

Таким чином, можна твердити, що рівність

$$\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c} = 0 \tag{2.52}$$

є *необхідною й достатньою умовою компланарності трьох векторів* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$.

Звідси, зокрема, випливає, що всі попередні властивості мішаного добутку, доведені для некомпланарних векторів, залишаються справедливими й для випадку їх компланарності.

Геометрично остання властивість мішаного добутку означає, що паралелепіпед, побудований на трьох векторах, у разі її виконання, вироджується в частину площини, тобто має нульовий об'єм.

Крім наведених вище чотирьох властивостей, мішаному добутку притаманні ще дві, які є безпосереднім наслідком відповідних властивостей скалярного й векторного добутків.

5. *Мішаний добуток трьох векторів задовольняє закон дистрибутивності*, тобто:

$$(\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{d}))\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} + (\mathbf{a}\times\mathbf{d})\cdot\mathbf{c},$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} + (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}. \tag{2.53}$$

Ця властивість виконується й у тому випадку, коли будь-який зі співмножників складається з будь-якої кількості векторів.

6. *Мішаний добуток трьох векторів задовольняє закон асоціативності*, тобто:

$$(\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\lambda \mathbf{c}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \ . \qquad (2.54)$$

Дану властивість можна перефразувати й так: сталий множник будь-якого з векторів-співмножників можна виносити за знак мішаного добутку.

Узагальнивши формулу (2.54), одержимо:

$$((\lambda_1 \mathbf{a}) \times (\lambda_2 \mathbf{b})) \cdot (\lambda_3 \mathbf{c}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \ . \qquad (2.55)$$

Насамкінець слід відзначити, що мішаний добуток трьох істинних векторів є псевдоскаляр, оскільки векторний добуток двох істинних векторів це псевдовектор, який потім скалярно множиться на істинний вектор.

**Приклади.**

1. Вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ задовольняють умову:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0 \ .$$

Довести, що ці вектори компланарні.

Помножимо скалярно вектор $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0$ на вектор $\mathbf{a}$. Тоді одержимо:

$$\mathbf{a}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0 \ .$$

Оскільки вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ і $\mathbf{a}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$ компланарні, то, за умови (2.52), маємо:

$$\mathbf{a}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 , \qquad \mathbf{a}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0 \ .$$

Таким чином, $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, тобто вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ компланарні.

2. Обчислити мішаний добуток

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Оскільки сума перемножуваних векторів $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$, у чому легко переконатися, розкривши дужки в лівій частині рівності, то ці вектори компланарні, а отже,

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} - \mathbf{c})(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0 \ .$$

3. Довести тотожність

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \ ,$$

де $\alpha$ і $\beta$ — довільні числа.

Користуючись властивостями 4-6 мішаного добутку, маємо:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + \alpha (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + \beta (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} =$$

$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \ .$$

# § 2.7 МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ У КООРДИНАТНІЙ ФОРМІ

Нехай є три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, задані своїми координатами(1.32), тобто:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \ ,$$

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k} \ ,$$

$$\mathbf{c} = c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k} \ .$$

Тоді, враховуючи формули (2.38) і (2.18), одержимо:

$$\mathbf{abc} = \left[(a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}\right] \cdot$$
$$\cdot\,(c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k}) = (a_y b_z - a_z b_y)c_x - (a_x b_z - a_z b_x)c_y +$$
$$+ (a_x b_y - a_y b_x)c_z \ .$$

Легко переконатися, що права частина цього виразу є визначник, розкритий за елементами останнього рядка, тобто:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \ . \tag{2.56}$$

Таким чином, *мішаний добуток трьох векторів, записаний у координатній формі, є визначник, елементами якого є координати перемножуваних векторів*. При цьому перший, другий і третій рядки визначника є координати стосовно першого, другого й третього перемножуваних векторів.

Формула (2.56) дає можливість обчислити об'єм паралелепіпеда, а також об'єм чотиригранної піраміди, заданих координатами своїх вершин. Наприклад, є чотири точки: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $M_4(x_4;\ y_4;\ z_4)$. Нехай:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1) \ ,$$

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1) \ ,$$

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{M_1M_4} = (x_4 - x_1;\ y_4 - y_1;\ z_4 - z_1) \ . \tag{2.57}$$

Якщо на цих векторах, як на ребрах, що збігаються в одній вершині, побудувати паралелепіпед, то його об'єм буде дорівнювати абсолютній величині мішаного добутку даних векторів, тобто:

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = mod\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} . \quad (2.58)$$

Об'єм піраміди відповідно буде дорівнювати:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} mod\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} . \quad (2.59)$$

**Якщо врахувати рівність (2.52), то умова компланарності трьох векторів a, b і c в координатній формі матиме такий вигляд:**

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 . \quad (2.60)$$

Якщо ж вектори **a**, **b**, **c** складені з чотирьох точок $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ згідно з (2.57), то формула (2.60) запишеться у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 . \quad (2.61)$$

Оскільки рівність (2.61) рівнозначна умові компланарності векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$, то вона також є *необхідною умовою знаходження чотирьох точок на одній площині.*

Як відомо, за умови рівності визначника нулю, згідно з його властивостями, один з його рядків можна виразити у вигляді лінійної комбінації через два інші. Тоді з рівності (2.60) можна отримати умову компланарності векторів, записану нами у вигляді (1.17).

**Приклади.**

1. Довести, що вектори $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ компланарні.

Обчислимо мішаний добуток заданих своїми координатами векторів $\mathbf{a} = (2; -1; 2)$, $\mathbf{b} = (1; 2; -3)$ і $\mathbf{c} = (3; -4; 7)$. Користуючись формулою (2.56), маємо:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} .$$

Помноживши перший рядок на $2$, а потім на $-4$, і додавши його спочатку до другого, а потім до третього рядка відповідно, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} .$$

Оскільки другий і третій рядки пропорційні між собою, то даний визначник дорівнює нулю, тобто:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 .$$

Таким чином, згідно з (2.52), вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ компланарні.

2. Показати, що точки $A(5;\ 7;\ -2)$, $B(3;\ 1;\ -1)$, $C(9;\ 4;\ -4)$ і $D(1;\ 5;\ 0)$ розташовані на одній площині.

Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A) = (-2;\ -6;\ 1) ,$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A;\ y_C - y_A;\ z_C - z_A) = (4;\ -3;\ -2) ,$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A;\ y_D - y_A;\ z_D - z_A) = (-4;\ -2;\ 2) .$$

Щоб показати, що точки $A$, $B$, $C$ і $D$ знаходяться на одній площині, достатньо перевірити, що побудовані вектори компланарні.

Дійсно, користуючись формулою (2.61), маємо:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -15 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 0 .$$

Отже, точки $A$, $B$, $C$ і $D$ знаходяться на одній площині.

3. Відомо координати вершин трикутної піраміди:

$$A_1(5;\ 1;\ -4), \quad A_2(1;\ 2;\ -1), \quad A_3(3;\ 3;\ -4) \quad \text{і} \quad A_4(2;\ 2;\ 2) .$$

Визначити її об'єм.

Піраміда побудована на векторах

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1) = (-4;\ 1;\ 3) ,$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1) = (-2;\ 2;\ 0) ,$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (x_4 - x_1;\ y_4 - y_1;\ z_4 - z_1) = (-3;\ 1;\ 6) ,$$

які виходять з однієї спільної точки $A_1$.

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $1/6$ об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах, як на ребрах, тобто:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}\right| ,$$

то

$$\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -6\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6(-6+2) = -24 ,$$

звідки

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}|-24| = 4 \quad (\text{од. об'єму}) .$$

**4.** Відомо вершини тетраедра $O(-5;\ -4;\ 8)$, $M_1(2;\ 3;\ 1)$, $M_2(4;\ 1;\ -2)$, $M_3(6;\ 3;\ 7)$. Знайти довжину $h$ висоти, опущеної з вершини $O$ на грань $M_1M_2M_3$ (рис. 2.11).

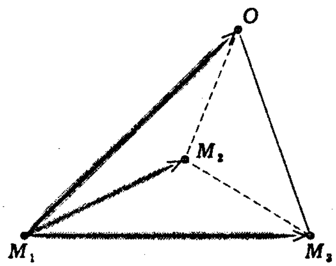



Рис. *2.11*

Об'єм піраміди, як відомо зі шкільного курсу математики, дорівнює добутку площі основи на третину висоти, тобто $V = (1/3)S \cdot h$, звідки $h = 3V/S$. Грань $M_1M_2M_3$ побудована на векторах

$\overrightarrow{M_1M_3} = (4;\ 0;\ 6)$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = (2;\ -2;\ -3)$ .

Отже, $S = (1/2)\left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\right|$. Оскільки

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = (-12;\ -24;\ 8) ,$$

то

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14 \quad (\text{од. площі}) .$$

З іншого боку, об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ і $\overrightarrow{M_1O} = (-7;\ -7;\ 7)$, дорівнює:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\ \overrightarrow{M_1M_3}\ \overrightarrow{M_1O}\right| = \frac{1}{6}|-12 \cdot (-7) + (-24) \cdot (-7) + 8 \cdot 7| =$$

$$= \frac{1}{6}|84 + 168 + 56| = \frac{154}{3} \quad (\text{од. об'єму}) .$$

Таким чином,

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 154}{3 \cdot 14} = 11 \quad (\text{од. довжини}) .$$

**5.** Вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярний до векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$. Кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ становить $45°$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c}$, якщо $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 5$.

Об'єм паралелепіпеда, як відомо, дорівнює модулю мішаного добутку векторів, на яких він побудований (2.46):

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = |(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{a}+\mathbf{c})| .$$

Знайдемо спочатку векторний добуток:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \ .$$

Тоді:

$$[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{c}) = [(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{c}) =$$

$$= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{a}+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{a}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{a}+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\mathbf{c}+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\mathbf{c} =$$

$$= 2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c} \equiv 2\mathbf{abc} \ ,$$

оскільки мішаний добуток, в якому двічі присутній будь-який вектор, дорівнює нулю. Але $\mathbf{abc} = \pm V_1$, де $V_1$ — об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. А оскільки об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту, то:

$$V_1 = S_{\text{осн.}}\cdot|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin 45^\circ\cdot|\mathbf{c}| =$$

$$= 15\sqrt{2} \ \ (\text{од. об'єму}) \ .$$

Звідки:

$$\mathbf{abc} = \pm 15\sqrt{2} \ ,$$

а отже, шуканий об'єм дорівнює:

$$V = 2|\mathbf{abc}| = 30\sqrt{2} \ \ (\text{од. об'єму}) \ .$$

# § 2.8 ПОДВІЙНИЙ ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ

Розглянемо тепер той випадок, коли результат векторного добутку двох векторів знову множиться векторно на деякий третій вектор. Наприклад, векторний добуток двох векторів $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ множиться векторно на третій вектор $\mathbf{c}$, тобто $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, або, навпаки, вектор $\mathbf{a}$ множиться векторно на векторний добуток двох векторів, тобто $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

*Добуток трьох векторів вигляду* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ *або* $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ *називається подвійним векторним добутком або векторно-векторним добутком.*

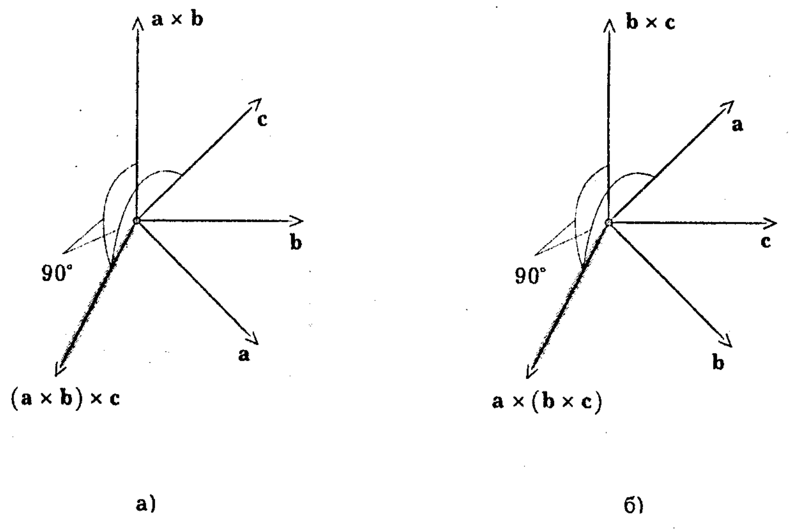



Рис. 2.12

Зрозуміло, що подвійний векторний добуток трьох векторів є вектор, й оскільки векторний добуток не підлягає комутативному закону (див. (2.32)), то очевидно, що добутки $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ і $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ є різними векторами. Спільним для них є те, що вектор подвійного векторного добутку компланарний з тими двома векторами, що в подвійному векторному добутку перемножуються між собою векторно (рис. 2.12).

Особливого геометричного змісту подвійний векторний добуток не має, але з метою його обчислення він зводиться до більш простого виразу. Для його виведення розглянемо подвійний векторний добуток $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (рис. 2.12 а)). Оскільки вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ неколінеарні, то, згідно з висновком 1 теореми 1.3, маємо

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} \ . \tag{2.62}$$

Визначимо скалярні множники $\lambda_1$ і $\lambda_2$. Для цього позначимо

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \qquad \mathbf{e} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \equiv \mathbf{d}\times\mathbf{c} \tag{2.63}$$

й обчислимо проекції вектора $\mathbf{e}$ на осі довільної декартової системи координат. Згідно з формулою (2.38), маємо:

$$e_x = d_y c_z - d_z c_y \ .$$

У свою чергу:

$$d_y = -(a_x b_z - a_z b_x), \qquad d_z = -(a_x b_y - a_y b_x) \ .$$

Таким чином,

$$e_x = -(a_x b_z - a_z b_x)c_z - (a_x b_y - a_y b_x)c_y =$$

$$= (a_y c_y + a_z c_z)b_x - (b_y c_y + b_z c_z)a_x \ .$$

Додамо й віднімемо справа величину $a_x b_x c_x$. Тоді, враховуючи рівнвсть (2.18), одержимо:

$$e_x = (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)b_x - (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z)a_x =$$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})b_x - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})a_x \ .$$

Аналогічно знайдемо:

$$e_y = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})b_y - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})a_y \ ,$$

$$e_z = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})b_z - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})a_z \ .$$

Отже:

$$\lambda_1 = -(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}), \qquad \lambda_2 = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}).$$

Таким чином,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a} \ . \tag{2.64}$$

Аналогічно можна отримати формулу для подвійного векторного добутку $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \ . \tag{2.65}$$

Останню формулу легко запам'ятати, якщо записати її у вигляді:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{2.66}$$

та прочитати латинські літери відповідними їм українськими: "бац" мінус "цаб".

Формули (2.64) і (2.65) можна отримати одну із другої, користуючись властивостями векторного добутку й перепозначивши відповідні вектори-множники. Порівнюючи їх, можна зробити висновок, що *подвійний векторний добуток трьох векторів дорівнює середньому за розташуванням вектору, помноженому на скалярний добуток двох крайніх, мінус другий вектор у дужках, помножений на скалярний добуток двох останніх.*

Розглянувши всі види множення векторів, слід відзначити насамкінець даної глави, що операція ділення як дія, обернена до операції множення, у векторній алгебрі не розглядається зовсім. Це пов'язано з тим, що навіть у найпростішому випадку скалярного добутку знаходження невідомого вектора-множника $\mathbf{x}$ не здається можливим, оскільки рівняння

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = m$$

при $\mathbf{a} \neq 0$ має нескінченну множину розв'язків. Геометрично це означає, що безліч векторів $\mathbf{x}$ мають одну й ту саму проекцію на заданий вектор $\mathbf{a}$.

**Приклади.**

1. Довести тотожність:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix} . \quad (2.67)$$

Скалярний добуток векторних добутків $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ і $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ можна розглядати як мішаний добуток трьох векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$. Користуючись формулою (2.49), отримаємо:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) ,$$

а оскільки

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) ,$$

то

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix} ,$$

що й треба було довести.

2. Показати, що

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 . \quad (2.68)$$

Дійсно, користуючись алгоритмом розкриття подвійного векторного добутку, матимемо:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) ,$$

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) ,$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) .$$

Додаючи відповідно ліві й праві частини цих рівностей і користуючись властивістю (2.12) скалярного добутку, отримуємо (2.68).

# ВПРАВИ

1. Знайти скалярний добуток і кут між векторами

$$\mathbf{a} = (2;\ 1;\ 1) \quad \text{і} \quad \mathbf{b} = (0;\ 3;\ -4)\ .$$

2. Знайти модуль вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$, якщо $|\mathbf{b}| = 5$, $|\mathbf{c}| = 2$, $(\mathbf{b}\hat{,}\mathbf{c}) = \pi/3$.

3. Відомо три вектори: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 12\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Обчислити $5\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 + 7\mathbf{c}^2$.

4. Знайти число $\alpha$, при якому вектори $\mathbf{a} = (\alpha;\ 1;\ 2)$ і $\mathbf{b} = (\alpha;\ \alpha;\ -3)$ ортогональні.

5. Обчислити $\lambda$, при якому вектори $3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ і $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ перпендикулярні. Відомо, що $|\mathbf{m}| = 3$, $|\mathbf{n}| = 2$, $(\mathbf{m}\hat{,}\mathbf{n}) = \pi/3$.

6. Дано вектори $\mathbf{a} = (3;\ -2;\ 1)$, $\mathbf{b} = (0;\ 4;\ 1)$ і $\mathbf{c} = (-1;\ 0;\ 1)$. Обчислити $\text{пр}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}\mathbf{c}$.

7. Маємо трикутник з вершинами $M_1(4;\ 1;\ 0)$, $M_2(2;\ 2;\ 1)$, $M_3(6;\ 3;\ 1)$. Знайти проекцію сторони $M_1M_2$ на сторону $M_1M_3$.

8. Знайти проекцію вектора $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ на вектор $\mathbf{b} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$, якщо $|\mathbf{p}| = 1$, $|\mathbf{q}| = 4$, $(\mathbf{p}\hat{,}\mathbf{q}) = \pi/4$.

9. Знайти $\text{пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, якщо $\mathbf{a} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ і $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, де $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — взаємно перпендикулярні орти.

10. Знайти кут між векторами $\mathbf{a}$ і $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}^2}(\mathbf{a};\ \mathbf{b})$.

11. Знайти проекцію вектора $\mathbf{a} = (2;\ -1;\ 3)$ на вісь $u$, яка утворює з координатними осями $OX$ і $OY$ кути, рівні $120°$ та $60°$ відповідно, а з віссю $OZ$ — гострий кут.

12. Вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ задовольняють умову $\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c} = 0$. Обчислити величину $\gamma = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$, якщо $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{c}| = 1$.

13. Довести, що при будь-якому розташуванні точок $A$, $B$, $C$, $D$ має місце рівність

$$(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) = 0 \quad .$$

14. Знайти гострий кут між сторонами паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$ і $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$, якщо $|\mathbf{m}| = 2$, $|\mathbf{n}| = 3$ і $(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}}) = 60°$.

15. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$ і $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$, де $|\mathbf{m}| = 1$, $|\mathbf{n}| = 1/2$, $(\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}}) = \pi/3$.

16. Довести, що вектор $\mathbf{p} = \mathbf{a} - \dfrac{(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}$ перпендикулярний вектору $\mathbf{b}$.

17. Знайти вектор $\mathbf{x}$, який колінеарний вектору $\mathbf{a} = (1;\ 2;\ -3)$ й відповідає умові $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 28$.

18. Довести тотожність $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$.

19. Знайти векторний добуток векторів $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ і $\mathbf{b} = 5\mathbf{m} + \mathbf{n}$.

**20.** Відомо вектори $\mathbf{a} = (3;\ -1;\ -2)$ і $\mathbf{b} = (1;\ 2;\ -1)$. Знайти координати вектора $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

**21.** Знайти векторний добуток векторів $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ і $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$.

**22.** Спростити вираз $(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + 5\mathbf{b})$.

**23.** Знайти площу трикутника з вершинами

$$A(2;\ -3;\ 1), \quad B(4;\ -1;\ 2) \quad \text{і} \quad C(-1;\ -4;\ 2)\ .$$

**24.** Довести, що $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, якщо $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$.

**25.** Довести колінеарність векторів $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ і $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, якщо

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d} \quad \text{і} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}\ .$$

**26.** Довести, що вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ колінеарні, якщо

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = 0\ .$$

**27.** Довести, що трикутник з вершинами $A(7;\ 4;\ -2)$, $B(3;\ -1;\ 7)$ і $C(1;\ 2;\ 1)$ рівнобічний.

**28.** Обчислити мішаний добуток векторів

$$\mathbf{a} = (0;\ 1;\ 2), \quad \mathbf{b} = (-1;\ 0;\ 1) \quad \text{і} \quad \mathbf{c} = (3;\ 1;\ 0)\ .$$

**29.** Перевірити належність точок $A(1;\ 1;\ 2)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$ і $D(2;\ 0;\ 1)$ до однієї площини.

**30.** Знайти висоту $h$ піраміди з вершинами $A(3;\ 1;\ -2)$, $B(0;\ 2;\ 0)$, $C(1;\ 1;\ -1)$ і $D(1;\ 3;\ -1)$.

**31.** Дано координати вершин трикутної піраміди

$$M_1(5;\ 1;\ -4),\quad M_2(1;\ 2;\ -1)\ ,$$

$$M_3(3;\ 3;\ -4)\quad \text{і}\quad M_4(2;\ 2;\ 2)\ .$$

Визначити її об'єм.

**32.** Довести, що вектори $\mathbf{a} = (1;\ 2;\ -2)$, $\mathbf{b} = (1;\ -2;\ 1)$ і $\mathbf{c} = (5;\ -2;\ -1)$ компланарні.

**33.** За яких умов буде виконуватися рівність

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\ ?$$

**34.** Довести тотожність

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{d})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0\ .$$

# Глава 3
# Лінійний простір

## § 3.1 ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Лінійні операції додавання векторів і множення вектора на число, означені нами в першій главі, властиві не тільки векторам. Такі дії можливі й з іншими математичними об'єктами, наприклад, із многочленами, з функціями тощо. Це дає підстави для розгляду сукупностей деяких математичних об'єктів, характерною рисою яких є одні й ті самі лінійні операції в межах даної сукупності. Домовимося надалі будь-який об'єкт даної сукупності називати її *елементом*, а саму сукупність їх — *множиною*. Оскільки мова йде про лінійні операції над сукупністю будь-яких елементів, звідси й походить назва "лінійний простір".

Розглянемо аксіоматику лінійного простору.

*Множина $R$ будь-яких елементів називається лінійним простором, якщо*:

*1)* будь-якій парі елементів $\mathbf{x} \in R$ і $\mathbf{y} \in R$ ставиться у відповідність елемент $\mathbf{z} \in R$, який називається сумою елементів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ й означається:
$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \ ; \qquad (3.1)$$

*2)* будь-якому елементу $\mathbf{x} \in R$ і будь-якому дійсному числу $\lambda$ ставиться у відповідність елемент $\mathbf{y} \in R$, який називається добутком елемента $\mathbf{x}$ на число $\lambda$ й означається:
$$\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} \ . \qquad (3.2)$$

Дія суми відповідає таким аксіомам:

1. *Комутативність*:
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R \ ; \qquad (3.3)$$

2. *Асоціативність*:
$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in R \ ; \qquad (3.4)$$

3. Існує *нульовий елемент* $\mathbf{0}$, такий, що:
$$\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in R \ ; \qquad (3.5)$$

4. Існує *протилежний елемент* $-\mathbf{x} \in R$, для кожного $\mathbf{x} \in R$ такий, що:
$$(-\mathbf{x})+\mathbf{x} = \mathbf{0} \ . \qquad (3.6)$$

Очевидно, що в просторі $R$ існує тільки один нульовий елемент і для кожного елемента простору $R$ може бути тільки один протилежний елемент.

Дія множення елемента на число відповідає таким аксіомам:

1. *Асоціативність*:
$$\lambda_1(\lambda_2\mathbf{x}) = (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in R \ ; \qquad (3.7)$$

2. Існує число *одиниця*, таке, що:
$$1\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in R \ ; \qquad (3.8)$$

3. Існує число *мінус одиниця*, таке, що:
$$(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in R \ ; \qquad (3.9)$$

4. Існує число *нуль*, таке, що:
$$0\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in R \ ; \qquad (3.10)$$

5. Існує *нульовий елемент* $\mathbf{0}$, такий, що:
$$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \forall \lambda \ . \qquad (3.11)$$

Окремим випадком дії множення (3.2) є ділення елемента на число, тобто:
$$\frac{\mathbf{x}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in R(\lambda \neq 0) \ . \qquad (3.12)$$

Обидві лінійні дії (3.1) і (3.2) відповідають аксіомам дистрибутивності:

1. $$(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}+\lambda_2\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in R \ ; \qquad (3.13)$$

2. $$\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in R \ . \qquad (3.14)$$

Якщо порівняти аксіоми (3.7)–(3.14) із властивостями лінійних операцій над "звичайними" векторами, то видно, що множина векторів у просторі є лінійний простір, який позначається $R^3$. Якщо розглядати "звичайні" вектори на площині, наприклад $XOY$, то ми матимемо окремий випадок лінійного простору $R^2$.

Слід зауважити, що в означенні дії (3.2) число $\lambda$ дійсне, але в лінійному просторі є можливість виконувати множення й на будь-які комплексні числа. У такому випадку розглядуваний простір називається лінійним простором над полем комплексних чисел. При цьому числовим полем називається будь-яка сукупність чисел, в якій можна виконувати чотири арифметичні дії, за винятком ділення на нуль.

Дуже важливо усвідомити, що походження елементів лінійного простору ніяк не обговорюється в його означенні. Як уже згадувалося вище, це можуть бути множини чисел, поліномів, матриць, певні класи функцій і взагалі будь-які сукупності тих чи інших математичних об'єктів.

**Приклади.**

1. Матриці розміру $m \cdot n$ утворюють лінійний простір, якщо сума та добуток на число визначені так, як у даному параграфі. Зокрема, сукупність матриць рядків (розмір $1 \cdot n$) або матриць стовпців (розмір $m \cdot 1$) є лінійними просторами.

2. Множина векторів у тривимірному просторі утворює лінійний простір, якщо сума та добуток на число означені вище вказаним способом. Нульовим елементом цього лінійного простору є вектор $\mathbf{0}$ із нульовою довжиною.

# § 3.2 $n$-ВИМІРНИЙ ВЕКТОРНИЙ ПРОСТІР

Далі нас буде цікавити лінійний простір $R^n$, який утворюється множиною $n$-вимірних векторів.

Очевидно, що для узагальнення поняття вектора на площині ми повинні відмовитися від тлумачення вектора як напрямленого відрізка, оскільки навіть при $n = 4$ терміни довжина та напрямок утрачають наочність.

Для узагальнення ми скористаємося тим, що будь-який вектор однозначно визначається своїми координатами: на площині $\mathbf{a} = (a_x;\ a_y)$, у просторі $\mathbf{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$. Саме на цьому шляху можна за аналогією до векторів на площині й у просторі запровадити операції над $n$-вимірними векторами.

***$n$-вимірним вектором*** $\mathbf{x}$ називається упорядкована сукупність $n$ чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ і позначається:

$$\mathbf{x} = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)\ .$$

Числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ називаються *координатами* вектора. Упорядкованість означає, що сукупності, які відрізняються перестановкою координат, визначають різні вектори.

Два вектори $\mathbf{x} = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ та $\mathbf{y} = (y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n)$ називаються *рівними*, якщо їхні відповідні координати збігаються, тобто:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots, \quad x_n = y_n\ .$$

*Добутком вектора* $\mathbf{x}$ *на число* $\lambda$ називається вектор з координатами:

$$\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots,\ \lambda x_n\ ,$$

тобто

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = (\lambda x_1;\ \lambda x_2;\ \ldots;\ \lambda x_n)\ . \qquad (3.15)$$

Вектори $\mathbf{x}$ і $\lambda\mathbf{x}$, тобто такі, які відрізняються числовим множником, а отже, мають однаковий (паралельні) або протилежний (антипаралельні) напрями в просторі, називаються *колінеарними*.

*Сумою* двох векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ називається вектор $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ з координатами

$$x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n\ ,$$

тобто:

$$\mathbf{z} = (x_1 + y_1;\ x_2 + y_2;\ \ldots;\ x_n + y_n)\ . \qquad (3.16)$$

*Нульовим вектором* називається вектор:

$$\mathbf{0} = (0;\ 0;\ \dots;\ 0)\ .$$

Вектором, *протилежним* вектору $\mathbf{x}$, називається вектор $\mathbf{x}'$, такий, що:

$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0}\ . \quad (3.17)$$

З рівності (3.17) випливає, що $\mathbf{x}' = (-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

*Різниця* векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ є вектор:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = (x_1 - y_1;\ x_2 - y_2;\ \dots;\ x_n - y_n)\ . \quad (3.18)$$

Легко переконатися, що $n$-вимірні вектори, для яких визначені лінійні операції множення (3.15) і додавання (3.16), відповідають аксіомам (3.4)–(3.11), отже, їх можна вважати елементами лінійного векторного простору $R^n$.

Слід зауважити, що замість $n$-вимірних векторів можна елементами лінійного простору вважати $n$-вимірні точки з координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$. У цьому випадку кажуть про $n$-вимірний *точковий простір*.

У деяких випадках ми будемо вважати (що буде застережено окремо) елементами простору $R^n$ матриці-рядки або матриці-стовпці:

$$\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)\,, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

# § 3.3 ПІДПРОСТІР

Нехай $R$ — множина, елементи якої утворюють лінійний простір. Розглянемо підмножину $L$ множини $R$. Якщо елементи $L$ задовольняють умови:

$$1)\quad \mathbf{x}+\mathbf{y}\in L,\quad \text{де}\quad \mathbf{x}\in L\ \text{ і }\ \mathbf{y}\in L,$$

$$2)\quad \lambda\mathbf{x}\in L,\quad \text{де}\quad \mathbf{x}\in L,\ \forall\lambda,$$

то $L$ називається *лінійним підпростором* простору $R$.

Належність до підпростору $L$ означає, що лінійні операції 1) і 2) не виводять елементи за його межі.

**Приклади.**

1. 3-вимірні вектори, які належать до будь-якої площини, утворюють підпростір простору $R^3$ (сума векторів визначена "звичайно").

2. Непарні числа не утворюють лінійний підпростір множини дійсних чисел, оскільки підсумовування двох непарних чисел приводить до парного числа, тобто виводить суму за межі множини непарних чисел.

# § 3.4 ЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ

Ми вже зустрічалися з лінійною залежністю для 3-вимірних векторів, а також рядків або стовпців матриць. Тепер ми докладно розглянемо узагальнення цього поняття стосовно лінійного простору $R^n$.

Нехай $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ — $n$-вимірні вектори, які належать до $R^n$.

*Лінійною комбінацією* векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ називається вектор:

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_m\mathbf{x}_m = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \ . \qquad (3.19)$$

Кажуть також, що вектор $\mathbf{x}$ лінійно виражається через вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0} \qquad (3.20)$$

виконується лише тоді, коли всі коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0 \ .$$

Якщо рівність (3.20) можлива, коли хоча б один з $c_i \neq 0$, то вектори називаються *лінійно залежними.*

Легко переконатися, що $n$-вимірні вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ лінійно залежні, якщо хоча б один з них є лінійною комбінацією інших (доведення аналогічне до того, що подано в курсі «Вища алгебра» для рядків матриць).

**Приклади.**

1. Дослідити лінійну залежність векторів:

$$\mathbf{x}_1 = (1;\ 2)\,, \qquad \mathbf{x}_2 = (-3;\ 4)\,, \qquad \mathbf{x}_3 = (0;\ -2) \ .$$

Розглянемо лінійну комбінацію цих векторів:

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + c_3\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \ .$$

Якщо підставити координати векторів і виконати перетворення, дістанемо:

$$(c_1 - 3c_2;\ 2c_1 + 4c_2 - 2c_3) = (0;\ 0)$$

або

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 = 0, \\ 2c_1 + 4c_2 - 2c_3 = 0. \end{cases}$$

Якщо вектори лінійно незалежні, то існує лише тривіальний розв'язок системи $(c_1 = c_2 = c_3 = 0)$. Легко переконатися, що ця система невизначена. Її загальний розв'язок:

$$\begin{cases} c_1 = 3c_2, \\ c_3 = 5c_2. \end{cases}$$

Нехай $c_2 = 1$, тоді $c_1 = 3,\ c_2 = 1,\ c_3 = 5$ — нетривіальний розв'язок системи, отже, вектори лінійно залежні:

$$3\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 5\mathbf{x}_3 = 0 .$$

Відповідь можна сформулювати й так: система векторів $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ і $\mathbf{x}_3$ лінійно залежна.

2. Довести лінійну незалежність векторів:

$$\begin{cases} \mathbf{l}_1 = (1;\ 0;\ \ldots;\ 0), \\ \mathbf{l}_2 = (0;\ 1;\ \ldots;\ 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{l}_n = (0;\ 0;\ \ldots;\ 1). \end{cases} \qquad (3.21)$$

Утворюємо лінійну комбінацію:

$$c_1\mathbf{l}_1 + c_2\mathbf{l}_2 + \ldots + c_n\mathbf{l}_n = (c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_n) .$$

Згідно з (3.20) вектор $(c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_n)$ дорівнює нулю, тобто:

$$(c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_n) = (0;\ 0;\ \ldots;\ 0) ,$$

звідки одержимо

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0 .$$

Отже, система $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_n$ лінійно незалежна. Очевидно, що й будь-яка їх підсистема теж лінійно незалежна.

Вектори $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \ldots, \mathbf{l}_n$ (3.21) мають спеціальну назву — $n$-вимірні орти.

**Теорема 3.1** *Будь-який вектор* $\mathbf{x}$ *є лінійною комбінацією ортів.*

Дійсно, нехай $\mathbf{x} = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ — будь-який вектор. З (3.15) і (3.21) випливає, що добуток орта $\mathbf{l}_i$ на число $x_i$ є вектор

$$x_i \cdot \mathbf{l}_i = (0;\ 0;\ \ldots;\ x_i;\ \ldots;\ 0) ,$$

а сума таких добутків є вектор

$$x_1\mathbf{l}_1 + x_2\mathbf{l}_2 + \ldots + x_n\mathbf{l}_n = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n) .$$

Тобто:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{l}_1 + x_2\mathbf{l}_2 + \ldots + x_n\mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{l}_i . \qquad (3.22)$$

Таким чином, будь-який $n$-вимірний вектор є лінійною комбінацією ортів (3.21).

Теорема доведена.

Властивості лінійно залежних (незалежних) систем векторів можна сформулювати у вигляді кількох теорем.

**Теорема 3.2** *Якщо кожний з будь-якої системи векторів лінійно виражається через вектори іншої системи, то перша система лінійно залежна.*

Нехай задано дві системи ненульових векторів:

$$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_m \tag{3.23}$$

і

$$\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \ldots,\ \mathbf{y}_{m+1}\ . \tag{3.24}$$

Тоді згідно з припущенням:

$$\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{m} c_{in}\mathbf{x}_n, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, m+1$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = c_{11}\mathbf{x}_1 + c_{12}\mathbf{x}_2 + \ldots + c_{1m}\mathbf{x}_m, \\ \mathbf{y}_2 = c_{21}\mathbf{x}_1 + c_{22}\mathbf{x}_2 + \ldots + c_{2m}\mathbf{x}_m, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{y}_{m+1} = c_{(m+1)1}\mathbf{x}_1 + c_{(m+1)2}\mathbf{x}_2 + \ldots + c_{(m+1)m}\mathbf{x}_m. \end{cases}$$

Ранг матриці $C$ даної системи

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(m+1)1} & c_{(m+1)2} & \ldots & c_{(m+1)m} \end{pmatrix}$$

не може бути більше $m$ (тобто $rang C \le m$). Крім того, за умовою теореми вектори (3.23) і (3.24) ненульові, тобто матриця $C$ не має нульових рядків. Оскільки в матриці $C$ є не більше $m$ лінійно незалежних рядків, то хоча б один рядок є лінійною комбінацією решти. Це означає, що принаймні один з векторів системи (3.24) є лінійною комбінацією решти її векторів, тобто система векторів (3.23) лінійно залежна.

Теорема доведена.

**Теорема 3.3** *Будь-яка система з $(n+1)$-го $n$-вимірного вектора лінійно залежна.*

Розглянемо довільну систему з $(n+1)$-го вектора:

$$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n,\ \mathbf{x}_{n+1}\ . \tag{3.25}$$

Як було доведено вище, будь-який вектор $\mathbf{x}$ є лінійною комбінацією ортів, тобто система (3.25) згідно з теоремою 3.1 лінійно залежна.

Теорема доведена.

**Теорема 3.4** *Довільна система векторів, що містить у собі нульовий вектор, є лінійно залежною.*

Доведення безпосередньо випливає з рівності:

$$0 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_m + 1 \cdot 0 = 0\ .$$

**Теорема 3.5** *Довільна система, що містить у собі кілька лінійно залежних векторів* $\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+2}, \ldots, \mathbf{x}_{k+l}$, *є лінійно залежною.*

Доведення безпосередньо випливає з рівності:

$$0 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{x}_k + c_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \ldots + c_{k+l}\mathbf{x}_{k+l} = 0\ ,$$

де принаймні один з $c_{k+i} \neq 0$.

З теореми 3.4 випливає важливий наслідок, а саме: *якщо система векторів лінійно незалежна, то й будь-яка її підсистема теж лінійно незалежна.*

# § 3.5 РАНГ СИСТЕМИ ВЕКТОРІВ

Розглянемо довільну систему ненульових векторів. Якщо вона лінійно незалежна, то незалежні й усі її підсистеми. Якщо вона лінійно залежна, то в ній можна виділити лінійно незалежну підсистему.

Рангом системи векторів називається найбільше число лінійно незалежних векторів системи. Позначається ранг системи векторів *rang* або *r*.

**Приклад.**

1. Розглянемо тривимірні вектори **a**, **b**, **c** і **d**. Якщо між ними є неколінеарні, наприклад, **a** і **b**, то, очевидно, підсистема **a** і **b** лінійно незалежна. Припустимо, є трійка некомпланарних векторів, наприклад, **a**, **b** і **c**. Тоді вони утворюють підсистему трьох лінійно незалежних векторів.
   Зрозуміло, що сама система **a**, **b**, **c** і **d** завжди лінійно незалежна. Отже, ранг цієї системи дорівнює трьом ($r = 3$).
   Підкреслимо, що в системи **a**, **b**, **c** і **d** може бути не одна лінійно незалежна підсистема двох або трьох векторів. Наприклад, **a**, **b** і **d** можуть бути теж некомпланарними.

Сформулюємо без доведення основні теореми про ранг системи векторів.

**Теорема 3.6** *Система векторів лінійно незалежна, якщо кількість векторів дорівнює рангу системи.*

**Теорема 3.7** *Ранг системи векторів дорівнює рангу матриці, побудованої з координат цих векторів.*

З теореми 3.7 випливає існування цілого класу перетворень (елементарних або еквівалентних), які не змінюють ранг системи векторів, а саме:

*1)* множення будь-якого вектора системи на число, не рівне нулю;

*2)* додавання до будь-якого вектора системи лінійної комбінації решти векторів;

*3)* вилучення нульового вектора;

*4)* вилучення вектора, який є лінійною комбінацією частини векторів системи;

*5)* перенумерація векторів системи.

**Приклад.**

**2.** Знайти ранг системи векторів:

$$\mathbf{x}_1 = (1;\ 2;\ 1;\ 0),\qquad \mathbf{x}_2 = (1;\ 0;\ -1;\ 1),$$
$$\mathbf{x}_3 = (0;\ 2;\ 2;\ -1),\qquad \mathbf{x}_4 = (3;\ 4;\ 1;\ 1).$$

Побудуємо матрицю $A$ з координат векторів й обчислимо її ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто $rang A = 2$.

Отже, ранг системи векторів $rang = 2$ та вектори $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$ утворюють лінійно незалежну підсистему. Очевидно, що замість $\mathbf{x}_2$ можна було б узяти $\mathbf{x}_3$ (викреслити перший, а не третій рядок).

З поняттям лінійної залежності та рангу системи векторів пов'язане ще одне важливе поняття.

Число $n$ називається *вимірністю* лінійного простору $R$, якщо в просторі $R$ є система $n$ лінійно незалежних векторів, а будь-яка система з $(n+1)$-го вектора лінійно залежна.

Очевидно, що вимірність простору $R^n$ є $n$ і збігається з рангом системи векторів простору $R^n$.

# § 3.6 БАЗИС ЛІНІЙНОГО ПРОСТОРУ

У прикладі 2 попереднього параграфа ми бачили, що в системі векторів $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ і $\mathbf{x}_4$ можна було вибрати два вектори ($\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ або $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3$), які утворюють лінійно незалежну підсистему.

*Базисом* системи векторів називається будь-яка сукупність $r$, де $r$ — ранг системи лінійно незалежних векторів.

Отже, базисом системи векторів $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ і $\mathbf{x}_4$ є вектори $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ або $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$.

Якщо розглянути множину всіх $n$-вимірних векторів, які утворюють простір $R^n$, то можна вибрати підсистему $n$ лінійно незалежних векторів.

*Базисом* лінійного простору $R^n$ називається будь-яка система лінійно незалежних векторів.

Вище була доведена лінійна незалежність системи ортів (3.21), які таким чином утворюють базис $R^n$. Було також доведено, що будь-який вектор $\mathbf{x}$ є лінійною комбінацією ортів.

Існує, очевидно, безліч базисів у просторі $R^n$ і (3.21) — лише один з них.

Однак усі базиси мають одну важливу властивість.

**Теорема 3.8** *Будь-який вектор можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів базису.*

Нехай вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ утворюють базис лінійного простору $R^n$. Отже,

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

лише тоді, коли

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0 \quad . \qquad (3.26)$$

Будь-яка система з $n+1$ вектора лінійно залежна, тобто:

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n + c\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad ,$$

причому не всі коефіцієнти дорівнюють нулю. Очевидно, $c \neq 0$, оскільки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно незалежні (3.26). Після ділення на с одержимо:

$$\mathbf{x} = -\frac{c_1}{c}\mathbf{x}_1 - \frac{c_2}{c}\mathbf{x}_2 - \ldots - \frac{c_n}{c}\mathbf{x}_n$$

або $\left(\tilde{c}_i = -\frac{c_i}{c}\right)$

$$\mathbf{x} = \tilde{c}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \tilde{c}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \ldots + \tilde{c}_n \cdot \mathbf{x}_n \ . \quad (3.27)$$

Подання вектора у вигляді лінійної комбінації базисних векторів (3.27) називається *розкладом вектора за базисом.*

Коефіцієнти $c_i$ у (3.27) називаються координатами вектора в базисі $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Легко переконатися, що розклад (3.27) єдиний. Дійсно, якщо припустити протилежне, тобто, що, крім (3.27), виконується рівність

$$\mathbf{x} = d_1\mathbf{x}_1 + d_2\mathbf{x}_2 + \ldots + d_n\mathbf{x}_n \ ,$$

то після віднімання одержимо:

$$(c_1 - d_1)\mathbf{x}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{x}_2 + \ldots + (c_n - d_n)\mathbf{x}_n = 0 \ . \quad (3.28)$$

Але вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ утворюють базис, тобто лінійно незалежні, отже, з (3.28) випливає:

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \ldots = c_n - d_n = 0$$

або

$$c_1 = d_1, \quad c_2 = d_2, \quad \ldots, \quad c_n = d_n \ ,$$

що суперечить початковому припущенню.

Теорема доведена.

**Приклад.**

Маємо вектори $\mathbf{x}_1 = (3;\ 1;\ 1)$, $\mathbf{x}_2 = (-2;\ -1;\ 2)$, $\mathbf{x}_3 = (1;\ 1;\ 0)$ і $\mathbf{x}_4 = (0;\ 1;\ 2)$. Знайти базис цієї системи та координати будь-якого вектора в цьому базисі.

Чотири 3-вимірні вектори, очевидно, завжди лінійно залежні, і ранг системи не може бути більше за три. Складаємо матрицю з координат векторів та обчислюємо її ранг.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ранг системи $r = 3$, і вектори $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ і $\mathbf{x}_3$ (стовпці 1, 2 і 3) можна вибрати як базис.

Отже, вектор $x_4$ розкладається за базисними векторами:

$$x_4 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3$$

або

$$\begin{cases} 0 = 3 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3, \\ 1 = 1 \cdot c_1 - 1 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3, \\ 2 = 1 \cdot c_1 - 2 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему,одержимо координати вектора $x_4$ в базисі векторів $x_1$, $x_2$ і $x_3$ :

$$x_4 = -\frac{4}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$$

# § 3.7 ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ

Нехай у лінійному просторі $R^n$ є два базиси:

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = \{\mathbf{e}_i\} \qquad \text{і} \qquad \mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n = \{\mathbf{e}'_i\} \ .$$

Назвемо їх умовно “старий” базис і “новий” базис відповідно.

Кожен з векторів $\mathbf{e}'_i$ можна розкласти за базисом $\{\mathbf{e}_i\}$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}'_1 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}'_n = a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n \end{cases} \tag{3.29}$$

або

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{e}_j, \qquad i = 1, \ldots, n \ .$$

Коефіцієнти $a_{ij}$ утворюють матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

яка називається *матрицею перетворення* координат при переході від базису $\{\mathbf{e}_i\}$ до $\{\mathbf{e}'_i\}$, тобто від “старого” базису до “нового”.

Матриця $A$ невироджена $(\det A \neq 0)$, оскільки рядки системи (3.29) (стовпці матриці $A$) лінійно незалежні.

Введемо позначення:

$$e = (\mathbf{e}_1\ \ \mathbf{e}_2\ \ldots\ \mathbf{e}_n) \qquad \text{і} \qquad e' = (\mathbf{e}'_1\ \ \mathbf{e}'_2\ \ldots\ \mathbf{e}'_n) \ ,$$

тобто $e$ і $e'$ — матриці-рядки з векторів двох базисів. За їх допомогою формули (3.29) можна переписати в матричній формі

$$e' = e \cdot A \ , \tag{3.31}$$

звідки після множення на $A^{-1}$ справа одержимо:

$$e = e' A^{-1} \ . \tag{3.32}$$

Таким чином, перехід від базису $\{\mathbf{e}'_i\}$ до $\{\mathbf{e}_i\}$ здійснюється за допомогою оберненої матриці.

Знайдемо тепер формули перетворення координат довільного вектора при переході до нового базису. Для цього довільний вектор $\mathbf{x}$ розкладемо за базисом $\{\mathbf{e}_i\}$ і за базисом $\{\mathbf{e}'_i\}$. Маємо:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{e}'_i .$$

Користуючись системою (3.29), одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} x'_i a_{ji} \right) \mathbf{e}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) \mathbf{e}_i ,$$

звідки

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j , \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.33}$$

або у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11} x'_1 + a_{21} x'_2 + \ldots + a_{n1} x'_n , \\ x_2 = a_{12} x'_1 + a_{22} x'_2 + \ldots + a_{n2} x'_n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{1n} x'_1 + a_{2n} x'_2 + \ldots + a_{nn} x'_n . \end{cases}$$

Порівнюючи з формулами (3.30), виводимо, що матриця перетворення (3.33) також невироджена, оскільки $\det A^T = \det A \neq 0$.

Формули перетворення координат можна подати в матричній формі

$$X = A \cdot X' , \tag{3.34}$$

де позначено:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} .$$

Після множення (3.34) на $A^{-1}$ зліва одержимо формулу для оберненого переходу:

$$X' = A^{-1} \cdot X . \tag{3.35}$$

Розглянемо тепер послідовність двох переходів: спочатку від базису $\{\mathbf{e}_i\}$ до $\{\mathbf{e}'_i\}$, а потім від $\{\mathbf{e}'_i\}$ до $\{\mathbf{e}''_i\}$. Згідно з формулами (3.34) маємо:

$$X = A \cdot X' \qquad \text{і} \qquad X' = B \cdot X'' ,$$

звідки

$$X = A \cdot X' = A(BX'') = (AB)X'' . \tag{3.36}$$

Розглянемо тепер ще один перехід — від базису $\{\mathbf{e}_i\}$ до $\{\mathbf{e}''_i\}$, який здійснюється за допомогою матриці $C$, тобто:

$$X = C \cdot X'' .$$

Порівнюючи з формулою (3.26), виводимо, що

$$C = A \cdot B ,$$

тобто *послідовність двох перетворень координат здійснюється за допомогою матриці, яка є добутком матриць кожного перетворення.*

У зв'язку з цим у математиці вживається термін *добуток перетворень.*

**Приклади.**

**1.** Знайти координати вектора $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$ в базисі

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 , \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 , \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 .$$

Матриця переходу від базису $\{\mathbf{e}_i\}$ до базису $\{\mathbf{e}'_i\}$, згідно з (3.30), має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Тоді згідно з (3.35) маємо:

$$X' = A^{-1} \cdot X ,$$

де

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Після підстановки одержимо:

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Тобто в новому базисі:

$$\mathbf{x} = -6\mathbf{e}'_1 - 7\mathbf{e}'_2 - 4\mathbf{e}'_3 \quad \text{або} \quad \mathbf{x} = (-6; -7; -4) .$$

**2.** Дано два базиси:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Знайти матрицю перетворення від $\mathbf{e}_i$ до $\mathbf{e}'_i$, матрицю оберненого перетворення, координати вектора $\mathbf{x}$, якщо $X' = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

*1).* Згідно з рівності (3.31) одержимо:
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A ,$$

звідки:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} .$$

Таким чином,
$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 , \qquad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{5}{3}\mathbf{e}_2 .$$

*2).* Формули оберненого перетворення (3.32) визначаються за допомогою матриці
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ,$$

тобто
$$\mathbf{e}_1 = \frac{5}{2}\mathbf{e}'_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}'_2 , \qquad \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}'_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}'_2 .$$

*3).* Координати вектора $\mathbf{x}$ у "старому" базисі знайдемо за допомогою рівності (3.34):
$$x = A \cdot x' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{31}{3} \end{pmatrix} .$$

**3.** Формули перетворення координат (як буде показано далі), при повороті базисних векторів на кут $\alpha$ мають вигляд:
$$x'_1 = \cos\alpha \cdot x_1 + \sin\alpha \cdot x_2 , \qquad x'_2 = -\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 .$$

Знайти обернене перетворення.

Формули можна переписати у вигляді
$$X' = A \cdot X$$

або
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Звідки
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} ,$$

отже:
$$x_1 = x'_1\cos\alpha - x'_2\sin\alpha , \qquad x_2 = x'_1\sin\alpha - x'_2\cos\alpha ,$$

тобто, як легко побачити, обернене перетворення є також поворот на кут $\alpha$.

**4.** Знайти матрицю $A$ перетворення координат при повороті базисних векторів спочатку на кут $\alpha_1$, а потім на кут $\alpha_2$.

Згідно з формулою (3.36), це перетворення здійснюється за допомогою добутку матриць:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix},$$

отже:

$$A = A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 & -\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_1\cos\alpha_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1+\alpha_2) & -\sin(\alpha_1+\alpha_2) \\ \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cos(\alpha_1+\alpha_2) \end{pmatrix}.$$

З отриманого результату для матриці перетворення видно, що:

по-перше, результати двох поворотів базисних векторів на кути $\alpha_1$ і $\alpha_2$ є поворот на кут $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$;

по-друге, послідовність поворотів (спочатку $\alpha_1$, потім $\alpha_2$ або навпаки) не змінює результат, оскільки матриці $A_1$ і $A_2$ комутують.

# § 3.8 ЕВКЛІДОВИЙ ПРОСТІР

У попередній главі був визначений скалярний добуток 3-вимірних векторів, розглянуті його властивості. Було доведено, що поняття скалярного добутку векторів тісно пов'язане з такими поняттями, як довжина вектора, кут між векторами.

За аналогією до 2- і 3-вимірних просторів можна визначити скалярний добуток у будь-якому лінійному просторі. Далі нас буде цікавити, насамперед, лінійний простір $R^n$.

Лінійний простір $R^n$ називається *евклідовим*, якщо:

*1).* Існує правило, згідно з яким будь-якій парі елементів $x \in R$ і $y \in R$ ставиться у відповідність число $(x, y)$, яке називається її скалярним добутком.

*2).* Це правило відповідає таким аксіомам:

1. *Комутативність*:
$$(x, y) = (y, x) \; ; \tag{3.37}$$

2. *Дистрибутивність*:
$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \; ; \tag{3.38}$$

3. *Однорідність*:
$$(\lambda x, y) = \lambda (x, y) \; ; \tag{3.39}$$

4. *Невід'ємність*:
$$(x, x) > 0 , \quad \text{якщо} \quad x \neq 0$$
і
$$(x, x) = 0 , \quad \text{якщо} \quad x = 0 . \tag{3.40}$$

Евклідовий простір будемо позначати $E^n$.

Якщо порівняти аксіоми (3.37)–(3.40) і властивості скалярного добутку в $R^3$, то, очевидно, 3-вимірні вектори утворюють евклідовий простір.

У главі 2 для скалярного добутку 3-вимірних векторів було доведено формулу (2.18): $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$ .

У лінійному просторі $E^n$ скалярний добуток визначається як

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i . \tag{3.41}$$

Легко переконатися, що це означення відповідає аксіомам (3.37)–(3.40).

Для будь-яких векторів евклідового простору $E^n$ справедлива нерівність

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x},\ \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y},\ \mathbf{y}) \quad , \qquad (3.42)$$

яка називається *нерівністю Коші – Буняковського.*

Дійсно, з аксіоми (3.40) випливає, що

$$(\lambda \mathbf{x} - \mathbf{y},\ \lambda \mathbf{x} - \mathbf{y}) \ge 0$$

для будь-якого числа $\lambda$. Звідси:

$$\lambda^2(\mathbf{x},\ \mathbf{x}) - 2\lambda(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) + (\mathbf{y},\ \mathbf{y}) \ge 0 \ .$$

Квадратний тричлен відносно $\lambda$ буде невід'ємним, якщо

$$\begin{cases} (\mathbf{x},\ \mathbf{x}) > 0, \\ D \le 0. \end{cases}$$

Перша нерівність виконується, оскільки має місце аксіома (3.40), а з другої одержимо:

$$D = 4(\mathbf{x},\ \mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{x},\ \mathbf{x})(\mathbf{y},\ \mathbf{y}) \le 0$$

або

$$(\mathbf{x},\ \mathbf{y})^2 \le (\mathbf{x},\ \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y},\ \mathbf{y}) \ .$$

*Довжиною*, або *нормою* вектора $\mathbf{x}$, називається число $|\mathbf{x}|$, яке відповідає таким аксіомам:

1. $|\mathbf{x}| > 0$, якщо $|\mathbf{x}| \ne 0$, $|\mathbf{0}| = 0$ ; (3.43)
2. $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{x}|$, де $\lambda$ — дійсне число ; (3.44)
3. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \le |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ *(нерівність трикутника)* . (3.45)

Можна довести, що даним аксіомам відповідає таке означення:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x},\ \mathbf{x})} \ . \qquad (3.46)$$

Кутом між векторами $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ називається число $\varphi$, таке, що:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} = \frac{(\mathbf{x},\ \mathbf{y})}{\sqrt{(\mathbf{x},\ \mathbf{x})} \cdot \sqrt{(\mathbf{y},\ \mathbf{y})}} \ . \qquad (3.47)$$

Очевидно, що з нерівності (3.42) випливає:

$$\cos^2\varphi \le 1 \ . \qquad (3.48)$$

Ураховуючи (3.41), формули для норми вектора та кута між векторами можуть бути записані у вигляді:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \qquad (3.49)$$

та

$$\cos\varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\ \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}} \ . \qquad (3.50)$$

За аналогією до 2- і 3-вимірних векторів будемо називати вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ *ортогональними*, якщо

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \ .$$

Очевидно, що при ортогональності векторів косинус кута між ними дорівнює одиниці, тобто $\cos\varphi = 1$.

Нехай у довільному евклідовому просторі $E^n$ є базис $\mathbf{e}_i$. Тоді, згідно з теоремою 3.8, будь-які вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ є лінійними комбінаціями базисних векторів. Отже:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \qquad \text{і} \qquad y = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j \ .$$

Обчислимо скалярний добуток:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

або

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j \ , \qquad (3.51)$$

де позначено $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

З аксіоми (3.37) випливає, що матриця $G = (g_{ij})$ повинна бути симетричною, тобто $G = G^T$.

Система ненульових векторів $\{\mathbf{e}_i\} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ у евклідовому просторі $E^n$ називається *ортогональною*, якщо всі вектори попарно ортогональні, тобто $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ для всіх $i \neq j$.

Система векторів $\{\mathbf{e}_i\} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ називається *ортонормованою*, якщо:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \ ,$$

де $\delta_{ij} = 0$, при $i \neq j$ і $\delta_{ij} = 1$, при $i = j$ (символ Кронекера).

Розглянемо тепер ортонормовану систему з $n$ векторів. Легко переконатися, що така система векторів лінійно незалежна, отже, вектори такої системи утворюють ортонормований базис.

Таким чином, ортонормований базис складається з векторів, які попарно ортогональні та мають одиничну норму.

**Приклад.**

Система ортів

$$\mathbf{e}_1 = (1;\ 0;\ \ldots;\ 0)\ ,$$
$$\mathbf{e}_2 = (0;\ 1;\ \ldots;\ 0)\ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{e}_n = (0;\ 0;\ \ldots;\ 1)$$

є, очевидно, ортонормований базис у просторі $E^n$. Дійсно,

$$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = \ldots = |\mathbf{e}_n| = 1\ ,$$
$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0 \quad \forall i \neq j\ ,$$

отже:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}\ .$$

Зокрема, декартів базис у 3-вимірному просторі ортонормований, оскільки

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1\,, \qquad (\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = 0\ .$$

Широке застосування ортонормованих базисів ґрунтується на двох властивостях, які формулюються у вигляді таких теорем.

**Теорема 3.9** *У довільному евклідовому просторі існує ортонормований базис.*

**Теорема 3.10** *Для того, щоб скалярний добуток будь-яких векторів визначався формулою (3.41), достатньо, щоб базис був ортонормований.*

Доведення достатності безпосередньо випливає з формули (3.51) при

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}\ .$$

Дійсно,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_i y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

або

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n\ .$$

Теорема доведена.

Насамкінець подамо ще одну важливу теорему.

**Теорема 3.11** *Координатами довільного вектора евклідового простору є його скалярні добутки на відповідні орти.*

Дійсно, нехай $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормований базис. Тоді для будь-якого вектора $\mathbf{x}$ можна написати:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \ .$$

Обчислимо скалярний добуток вектора $\mathbf{x}$ на орт $\mathbf{e}_j$:

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} = x_j \ ,$$

тобто координати вектора $\mathbf{x}$ є його скалярні добутки на відповідні орти.

Таким чином, можна записати:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \ . \qquad (3.52)$$

Зокрема, у просторі $E^3$:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} = (\mathbf{x},\, \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{x},\, \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{x},\, \mathbf{k})\mathbf{k} \ .$$

Теорема доведена.

Розглянемо, наприклад, скалярний добуток:

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{i}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \cos(\mathbf{x}, \hat{\ } \mathbf{i}) = |\mathbf{x}| \cdot \cos(\mathbf{x}, \hat{\ } \mathbf{i}) \ ,$$

тобто $x_i = (\mathbf{x},\, \mathbf{i})$, згідно з (1.28), є проекція вектора $\mathbf{x}$ на орт $\mathbf{i}$.

За аналогією до тривимірно векторної алгебри координати $n$-вимірного вектора $\mathbf{x}$ називаються *проекціями вектора* на відповідні орти.

# § 3.9 ЛІНІЙНИЙ ОПЕРАТОР

Нехай $R_1$ і $R_2$ два лінійні простори.

*Оператором* $\hat{A}$ називається правило, яке будь-якому вектору $\mathbf{x} \in R_1$ ставить у відповідність єдиний вектор $\mathbf{y} \in R_2$. Пишуть:

$$\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x} \quad . \qquad (3.53)$$

Вектор $\mathbf{x}$ називається *прообразом* вектора $\mathbf{y}$, а вектор $\mathbf{y}$ — *образом* вектора $\mathbf{x}$.

Оператор $\hat{A}$ називається *лінійним*, якщо для будь-яких $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2 \in R$ мають місце:

1. $\hat{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \hat{A}\mathbf{x}_1 + \hat{A}\mathbf{x}_2$ (*дистрибутивність*),
2. $\hat{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\hat{A}\mathbf{x}$ (*однорідність*).

Розглянемо далі випадок, коли простори $R_1$ і $R_2$ збігаються $(R_1 = R_2 = R)$, тобто і образ, і прообраз належать до одного простору $R$. У цьому випадку для терміна лінійний оператор використовується еквівалентний термін лінійне перетворення.

Очевидно, що поняття оператора є узагальнення поняття функції. Дійсно, якщо множини векторів простору $R_1$ і простору $R_2$ замінити на множину дійсних чисел, то замість визначення оператора $\hat{A}$ (3.53) дістанемо визначення звичайної функції.

**Сумою лінійних операторів** $\hat{A}$ і $\hat{B}$ називається оператор $\hat{A} + \hat{B}$, такий, що:

$$(\hat{A} + \hat{B})\mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x} + \hat{B}\mathbf{x}\,, \qquad \forall\mathbf{x} \in R \quad . \qquad (3.54)$$

**Добутком лінійного оператора на дійсне число** $\lambda$ називається оператор $\lambda\hat{A}$, такий, що:

$$(\lambda\hat{A})\mathbf{x} = \lambda(\hat{A}\mathbf{x})\,, \qquad \forall\mathbf{x} \in R \quad . \qquad (3.55)$$

**Протилежний** оператор визначається так:

$$-\hat{A} = (-1)\hat{A} \quad .$$

**Нульовий** оператор є такий, що $\hat{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\forall\mathbf{x} \in R$.

**Одиничний** оператор є такий, що $\hat{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, тобто прообраз та образ збігаються.

**Добутком лінійних операторів** називається оператор $\hat{A} \cdot \hat{B}$ такий, що

$$(\hat{A}\hat{B})\mathbf{x} = \hat{A}(\hat{B}\mathbf{x}) \quad . \qquad (3.56)$$

З визначень (3.54–3.56) випливають такі властивості:

1. *Однорідність*:
$$\hat{C}(\hat{A}\hat{B}) = (\hat{C}\hat{A})\hat{B} \ ; \quad (3.57)$$

2. *Дистрибутивність*:
$$(\hat{A} + \hat{B})\hat{C} = \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C} \ , \quad (3.58)$$
$$\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C} \ ; \quad (3.59)$$

3. *Асоціативність*:
$$(\hat{A}\hat{B})\hat{C} = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) \ . \quad (3.60)$$

Відзначимо, що взагалі $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$, тобто в загальному випадку оператори не комутують.

Оператор $\hat{A}^{-1}$ називається *оберненим* стосовно оператора $\hat{A}$, якщо:
$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I} \ . \quad (3.61)$$

Означення та властивості лінійних операторів, розглянуті вище, дуже схожі на означення та властивості матриць. Зрозуміло, що це не випадково. Можна довести, що будь-якому лінійному оператору відповідає певна квадратна матриця і, навпаки, будь-якій квадратній матриці відповідає лінійний оператор.

Нехай $\{\mathbf{e}_k\}$ — базис $n$-вимірного простору $R$. Тоді для будь-яких $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R$:
$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k, \qquad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i \ .$$

Нехай також $\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x}$, тоді:
$$\sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i = \hat{A}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k(\hat{A}\mathbf{e}_k) \ . \quad (3.62)$$

Для подальших перетворень правої частини (3.62) необхідно з'ясувати, як оператор $\hat{A}$ діє на базисні вектори $\mathbf{e}_k$.

Вектор $\hat{A}\mathbf{e}_k$ можна також розкласти за векторами базису:
$$\hat{A}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_i \quad (3.63)$$

або
$$\begin{aligned}
\hat{A}\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n \ , \\
\hat{A}\mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n \ , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ , \\
\hat{A}\mathbf{e}_n &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n \ ,
\end{aligned}$$

тобто $a_{ik}$ є $i$-тою координатою вектора $\hat{A}\mathbf{e}_k$ у даному базисі.

Матриця $A = (a_{ji})_{nn}$ називається матрицею лінійного оператора в базисі $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Стовпці матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.64)$$

є, очевидно, координати векторів $\hat{A}\mathbf{e}_1, \hat{A}\mathbf{e}_2, \ldots, \hat{A}\mathbf{e}_n$, тобто $(\hat{A}\mathbf{e}_k)_i = a_{ik}$.

Якщо підставити (3.63) у рівність (3.62), то одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n} x_k \left( \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right) \mathbf{e}_i ,$$

отже:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (3.65)$$

або

$$Y = A \cdot X ,$$

де $Y$ і $X$ — $n$-вимірні стовпці.

Аналогом поняття рангу матриці є ранг оператора. Образом, або областю значень лінійного оператора $\hat{A}$, називається сукупність усіх векторів $\mathbf{y}$, таких, що $\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x}$. Образ є лінійний простір, вимірність якого називається *рангом* оператора $\hat{A}$ і позначається $rang\hat{A}$.

Можна довести, що ранг лінійного оператора збігається з рангом матриці $A$ оператора $\hat{A}$ і не залежить від вибору базису, тобто:

$$rang\hat{A} = rangA .$$

Можна також довести, що для існування оберненого оператора $\hat{A}^{-1}$ необхідно й достатньо, щоб ранг матриці $A$ дорівнював $n$, отже, її визначник $detA \neq 0$.

Насамкінець укажемо, що поняття оператора пов'язане також із системами лінійних рівнянь. Дійсно, матриця $A$ оператора $\hat{A}$, який перетворює вектор $\mathbf{x}$ на вектор $\mathbf{y}$, є матриця системи $Y = AX$, якщо координати прообразу розглядати як невідомі.

Розглянемо перетворення матриці оператора при зміні базису. Нехай $\{\mathbf{e}_k\}$ і $\{\mathbf{e}'_k\}$ — відповідно "старий" і "новий" базиси, а $U$ — матриця переходу, тобто:

$$\mathbf{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} u_{ik} \mathbf{e}_i , \qquad k = 1, 2, \ldots, n .$$

Координати вектора $\mathbf{x}$ у цих базисах пов'язані з матрицею $U$, як відомо, співвідношенням:

$$X = UX' \quad \text{і} \quad X' = U^{-1}X \ .$$

Нехай $\mathbf{y} = \hat{A}\mathbf{x}$, тоді $Y = AX$, де $A$ — матриця оператора в базисі $\{\mathbf{e}_k\}$.

У базисі $\{\mathbf{e}'_k\}$ матрицю оператора $\hat{A}$ позначимо $A'$, тоді:

$$Y' = A'X' \ .$$

Отже:

$$\left.\begin{array}{l} X = UY' \\ Y = UY' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y' = U^{-1}Y = U^{-1}AUX' \ .$$

З іншого боку, $Y' = A'X'$, отже:

$$A' = U^{-1}AU \ . \qquad (3.66)$$

Ця формула встановлює зв'язок між матрицями оператора $\hat{A}$ в різних базисах.

Користуючись теоремою 1.2, легко переконатися, що визначник матриці оператора не залежить від базису. Дійсно,

$$det A' = det(U^{-1}AU) = det U^{-1} det A \, det U \ ,$$

але

$$det U^{-1} det U = det(U^{-1}U) = det E = 1 \ .$$

Отже:

$$det A' = det A \ . \qquad (3.67)$$

Інваріантність $det A$ відносно вибору базису свідчить про те, що визначник матриці $A$ є важливою характеристикою лінійного оператора $A$. Для з'ясування геометричного змісту $det A$ розглянемо спочатку 2-вимірний простір $\underset{\sim}{R}^2$. Нехай $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$ є будь-які неколінеарні вектори, які оператор $A$ переводить у неколінеарні вектори $A\mathbf{e}_1$ і $A\mathbf{e}_2$.

Площа $\tilde{S}$ паралелограма, побудованого на векторах $\hat{A}\mathbf{e}_1$ і $\hat{A}\mathbf{e}_2$, є модуль їх векторного добутку, тобто модуль вектора

$$(\hat{A}\mathbf{e}_1) \times (\hat{A}\mathbf{e}_2) \ .$$

Згідно з формули (3.63), одержимо:

$$\begin{aligned} (\hat{A}\mathbf{e}_1) \times (\hat{A}\mathbf{e}_2) &= (a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2) \times (a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) = \\ &= a_{11}a_{22}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + a_{12}a_{21}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \\ &= det A(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \ . \end{aligned}$$

Остаточно маємо: $$\tilde{S} = \left|(\hat{A}\mathbf{e}_1) \times (\hat{A}\mathbf{e}_2)\right| = \det A \cdot S$$

або

$$\det A = \frac{\tilde{S}}{S},$$

де $S$ — площа паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$.

Розглянемо тепер 3-вимірний простір $R^3$. Нехай $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{e}_3$ будь-які некомпланарні вектори, які оператор $\hat{A}$ переводить у некомпланарні вектори $\hat{A}\mathbf{e}_1$, $\hat{A}\mathbf{e}_2$ і $\hat{A}\mathbf{e}_3$. Об'єм паралелепіпеда $\tilde{V}$, побудованого на векторах $\hat{A}\mathbf{e}_1$, $\hat{A}\mathbf{e}_2$ і $\hat{A}\mathbf{e}_3$, дорівнює їх мішаному добутку:

$$\tilde{V} = (\hat{A}\mathbf{e}_1)(\hat{A}\mathbf{e}_2)(\hat{A}\mathbf{e}_3) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3,$$

тобто: $$\tilde{V} = \det A V$$

або

$$\det A = \frac{\tilde{V}}{V},$$

де $V$ — об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{e}_3$ ($\det A > 0$, якщо вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ і $\hat{A}\mathbf{e}_1$, $\hat{A}\mathbf{e}_2$, $\hat{A}\mathbf{e}_3$ мають однакову орієнтацію).

Таким чином, у двовимірному просторі $R^2$ $\det A$ є коефіцієнтом спотворення площі, у тривимірному просторі $R^3$ — коефіцієнтом спотворення об'єму. У загальному ж випадку $R^n$-простору визначник $\det A$ матриці лінійного оператора $\hat{A}$ є коефіцієнтом спотворення $n$-мірного об'єму лінійного перетворення простору.

**Приклади.**

1. Лінійний оператор $\hat{A}$ перетворює вектори

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

на вектори

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю лінійного оператора.

Матрицю $A$ знайдемо з рівняння: $$Y = A \cdot X,$$

де

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді:

$$A = Y \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

**2.** Матриця лінійного оператора $\hat{A}$ в базисі $\{\mathbf{e}_i\}$ має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Знайти матрицю оператора $\hat{A}$ в базисі $\{\mathbf{e}'_i\}$, якщо:

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ ,$$

$$\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \ ,$$

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ .$$

Матриця переходу до нового базису є:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Обернена матриця має такий вигляд:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Згідно з формулою (3.66) маємо:

$$A' = U'AU = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

# § 3.10 ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай оператор $\hat{A}$ перетворює вектор $\mathbf{x}$ на колінеарний вектор $\lambda\mathbf{x}$, тобто:

$$\hat{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad . \tag{3.68}$$

Якщо існує ненульовий вектор $\mathbf{x}$, який відповідає (3.68), то він називається *власним вектором*, а число $\lambda$ — *власним значенням* оператора $A$, що відповідає власному вектору $\mathbf{x}$.

Для знаходження власного значення перепишемо (3.68) у вигляді:

$$\hat{A}\mathbf{x} = \lambda\hat{I}\mathbf{x} \qquad \text{або} \qquad (\hat{A} - \lambda\hat{I})\mathbf{x} = 0 \ .$$

Нехай $A$ — матриця оператора $\hat{A}$ в деякому базисі. Матриця одиничного оператора $I$ є, очевидно, одинична матриця $E$. Тоді рівність можна переписати так:

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = 0$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0\,, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0\,. \end{cases} \tag{3.69}$$

Як відомо, однорідна система має нетривіальний розв'язок, якщо визначник матриці системи дорівнює нулю. Для системи (3.69) це означає, що:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{3.70}$$

Це рівняння називається *характеристичним*, а $det(A - \lambda E)$ — *характеристичним многочленом.*

Легко переконатися, що характеристичний многочлен не залежить від вибору базису. Дійсно, згідно з (3.66):

$$det(A' - \lambda E) = det(U^{-1}AU - \lambda E) = det(U^{-1}(A - \lambda E)U) =$$

$$= det U^{-1} \cdot det(A - \lambda E) \cdot det U = det(A - \lambda E) \ .$$

Це означає, що коефіцієнти характеристичного многочлена

$$det(A - \lambda E) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 \qquad (3.71)$$

не залежать від вибору базису.

Якщо в рівності (3.71) покласти $\lambda = 0$, то одержимо:

$$det(A - 0 \cdot E) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 0 + a_0 \; ,$$

звідки $$det A = a_0 \; ,$$

тобто коефіцієнт характеристичного многочлена $a_0$ є визначник матриці оператора $A$ і, як було доведено вище, не залежить від вибору базису. Очевидно, що матриця $A$ буде невиродженою, якщо в оператора $\hat{A}$ не буде нульових власних значень.

Максимальний степінь $\lambda^n$ входить тільки в добуток діагональних елементів визначника (3.70), отже: $$a_n = (-1)^n \; .$$

Коефіцієнт $a_{n-1}$ виражається через суму діагональних елементів — слід матриці $A$, а саме: $$a_{n-1} = (-1)^{n-1} SpA \; ,$$

де $$SpA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \; .$$

Таким чином, для визначення власних значень необхідно розв'язати характеристичне рівняння.

**Теорема 3.12** *Будь-якому власному вектору відповідає єдине власне значення.*

Дійсно, якщо припустити, що:

$$\hat{A}\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x} \, , \qquad \hat{A}\mathbf{x} = \lambda_2 \mathbf{x} \qquad \text{і} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \; ,$$

то

$$\lambda_1 \mathbf{x} - \lambda_2 \mathbf{x} = \hat{A}\mathbf{x} - \hat{A}\mathbf{x} = 0$$

або $$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x} = 0 \; ,$$

звідки $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\mathbf{x}$ — ненульовий вектор), що суперечить початковому припущенню.

Теорема доведена.

Можна також довести таке твердження.

**Теорема 3.13** *Власні вектори, які відповідають різним власним значенням, лінійно незалежні.*

З теореми 3.13 випливає, що з $n$ власних векторів оператора $\hat{A}$, що відповідають різним власним значенням, можна побудувати базис $n$-вимірного простору $R$.

**Теорема 3.14** *Для того, щоб матриця лінійного оператора в деякому базисі мала діагональний вигляд, необхідно й достатньо, щоб базисні вектори були власними векторами цього оператора.*

Дійсно, якщо базисні вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ є власні вектори оператора $\hat{A}$, то:

$$\hat{A}\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k \quad ,$$

звідки згідно з рівністю (3.63) одержимо:

$$a_{ik} = \delta_{ik} \cdot \lambda_k \quad ,$$

отже, матриця $A$ має діагональний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} . \quad (3.72)$$

З іншого боку, з діагональності матриці $A$ випливає, що:

$$\hat{A}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (\delta_{ik}\lambda_k)\mathbf{e}_i = \lambda_k \mathbf{e}_k \quad ,$$

тобто $\mathbf{e}_k$ — власний вектор оператора $\hat{A}$.

Теорема доведена.

Обчислимо визначник матриці (3.72). Розкладаючи його за елементами 1-го стовпця, одержимо:

$$\det A = \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix} .$$

Розкладаючи визначник $(n-1)$-го порядку за елементами 1-го стовпця, дістанемо:

$$det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \begin{vmatrix} \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} .$$

Повторюючи цю операцію необхідну кількість разів, остаточно одержимо:

$$det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i ,$$

тобто *визначник матриці лінійного оператора дорівнює добутку його власних значень.*

Очевидно, що *слід діагональної матриці лінійного оператора (3.72) дорівнює сумі його власних значень*:

$$SpA = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

**Приклади.**

1. Знайти власні значення та власні вектори оператора, матриця якого в деякому базисі має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Власні значення знаходимо з характеристичного рівняння:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 ,$$

звідки

$$\lambda_1 = -1 , \qquad \lambda_2 = 4 .$$

Для перевірки безпосередньо обчислюємо:

$$det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 .$$

З іншого боку,

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -4 .$$

Крім того,

$$SpA = 0 + 3 = 3 \qquad \text{і} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = -1 + 4 = 3 .$$

Власні вектори знаходимо за допомогою системи

$$\begin{cases} -\lambda u_1 + \quad 2u_2 = 0, \\ 2u_1 + (3-\lambda)u_2 = 0. \end{cases}$$

Обчислюємо власний вектор, який відповідає $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 = 0, \\ 2u_1 + 4u_2 = 0, \end{cases}$$

звідки одержуємо $u_1 = -2u_2$, тобто система не є визначена. Нехай $u_2 = c$, тоді:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

є власний вектор оператора $\hat{A}$ ($c$ — довільне число).

Для $\lambda_2 = 4$ маємо:

$$\begin{cases} -4u_1 + 2u_2 = 0, \\ 2u_1 - \quad u_2 = 0, \end{cases}$$

звідки одержуємо $u_2 = 2u_1$, тобто система також не є визначена. Якщо $u_1 = c$, тоді:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} c \\ 2c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

є власний вектор оператора $\hat{A}$.

Легко переконатися, що власні вектори $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$ лінійно незалежні. Дійсно, рівність

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 = 0$$

або

$$\begin{cases} \alpha_1\cdot(-2c) + \alpha_2\cdot c = 0, \\ \alpha_1\cdot c \quad + \alpha_2\cdot 2c = 0, \end{cases}$$

означає лінійну залежність, якщо $\alpha_1$ або $\alpha_2$ не дорівнюють нулю, тобто система має нетривіальний розв'язок. Для цього, як відомо, необхідно, щоб визначник системи дорівнював нулю.

У даному випадку:

$$\begin{vmatrix} -2c & c \\ c & 2c \end{vmatrix} = -5c^2 ,$$

отже, $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$ лінійно незалежні, якщо $c \neq 0$.

Вектор $\mathbf{x}_1$ можна нормувати, тобто підібрати таке значення сталої $c$, щоб довжина вектора дорівнювала одиниці:

$$|\mathbf{x}_1| = 1 ,$$

звідки:

$$\sqrt{4c^2 + c^2} = c\sqrt{5} = 1 ,$$

і

$$c = \frac{1}{\sqrt{5}} .$$

Отже:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Для $\mathbf{x}_2$ аналогічно одержимо:

$$|\mathbf{x}_2| = 1 \qquad \text{або} \qquad \sqrt{c^2 + 4c^2} = c\sqrt{5} ,$$

звідки:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Скалярний добуток власних векторів:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 ,$$

отже, вектори $x_1$ і $x_2$ ортогональні.

2. Знайти власні значення та власні вектори оператора $\hat{A}$, матриця якого в деякому базисі має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0 .$$

Легко переконатися, що $\lambda = -2$ є корінь характеристичного рівняння.

Після ділення характеристичного многочлена на $\lambda + 2$ одержимо:

$$(\lambda + 2)(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) = 0 ,$$

звідки знаходимо ще два корені: $\lambda = 3$ і $\lambda = 6$.

Таким чином, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ і $\lambda_3 = 6$ є власні значення оператора $A$.

Легко переконатися, що:

$$a_3 = (-1)^3 = -1 ,$$

$$a_2 = (-1)^2 \cdot SpA = 1 + 5 + 1 = 7 ,$$

$$a_0 = det A = -36 .$$

З іншого боку:

$$det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = (-2) \cdot 3 \cdot 6 = -36$$

і

$$SpA = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -2 + 3 + 6 = 7 .$$

Для $\lambda_1 = -2$ маємо:

$$\begin{cases} 3u_1 + u_2 + 3u_3 = 0, \\ u_1 + 7u_2 + u_3 = 0, \\ 3u_1 + u_2 + 3u_3 = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння збігається з третім, отже, його можна відкинути. Тоді одержимо:

$$\begin{cases} u_1 + 7u_2 + u_3 = 0, \\ 3u_1 + u_2 + 3u_3 = 0, \end{cases}$$

звідки:

$$u_2 = 0 \quad \text{і} \quad u_1 = -u_3 \ .$$

Нехай $u_1 = c$, тоді $u_3 = -c$, отже:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} .$$

Після нормування одержимо $c = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, тобто:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Для $\lambda_2 = 3$ маємо:

$$\begin{cases} -2u_1 + \ u_2 + 3u_3 = 0, \\ \ u_1 + 2u_2 + \ u_3 = 0, \\ 3u_1 + \ u_2 - 2u_3 = 0, \end{cases}$$

звідки $u_2 = -u_1$ і $u_3 = u_1$. Якщо покласти $u_1 = c$, то одержимо власний вектор

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ c \end{pmatrix}$$

або, знайшовши $c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Для $\lambda = 6$ маємо:

$$\begin{cases} -5u_1 + u_2 + 3u_3 = 0, \\ \ u_1 - u_2 + \ u_3 = 0, \\ 3u_1 + u_2 - 5u_3 = 0, \end{cases}$$

звідки $u_2 = 2u_1$ і $u_3 = u_1$. Відповідний нормований власний вектор є

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Легко переконатися, що власні вектори ортогональні. Дійсно:

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \ ,$$

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \ ,$$

$$\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \ .$$

Оператори, розглянуті в даних прикладах, мали спільні властивості, а саме: всі їх власні значення були дійсними числами, а власні вектори, що відповідають різним власним значенням, були ортогональними. Це не випадково, оскільки і перший, і другий є так звані *симетричні* лінійні оператори, для яких:

$$(\hat{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y}), \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n .$$

Симетричні оператори мають цілий ряд цікавих властивостей. Сформулюємо деякі з них у вигляді теорем без доведення.

**Теорема 3.15** *Власні значення симетричного оператора дійсні.*

**Теорема 3.16** *Власні вектори симетричного оператора, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.*

**Теорема 3.17** *У будь-якого симетричного оператора $\hat{A}$, який діє у евклідовому просторі $E^n$, існує $n$ лінійно незалежних попарно ортогональних одиничних власних векторів.*

**Теорема 3.18** *Симетричний оператор у будь-якому ортонормованому базисі має симетричну матрицю.*

Відзначимо, що з теореми 3.17 випливає можливість побудування базису простору $E^n$ з власних векторів оператора $\hat{A}$, так званого *власного базису* оператора $\hat{A}$.

Насамкінець розглянемо випадок кратних коренів характеристичного рівняння.

**Приклад.**

3. Знайти власні значення та власні вектори оператора $\hat{A}$, матриця якого в деякому базисі:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Побудувати ортонормований власний базис оператора $\hat{A}$.

Характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$det(A - \lambda E) = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2-3\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-3\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$-9\lambda^3 + 9\lambda^2 + 9\lambda - 9 = 0 .$$

Після ділення на $-9$ одержимо:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

або

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = 0 .$$

Отже, $\lambda_1 = -1$ і $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ є корені характеристичного рівняння.

Для $\lambda_1 = -1$ маємо:

$$\begin{cases} 5u_1 + 2u_2 - u_3 = 0, \\ 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 0, \\ -u_1 + 2u_2 + 5u_3 = 0. \end{cases}$$

Після ділення другого рівняння на 2 та виключення невідомої $u_1$ з першого та третього рівнянь одержимо:

$$\begin{cases} -3u_2 - 6u_3 = 0, \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0, \\ 3u_2 + 6u_3 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, перше та третє рівняння лінійно залежні, а отже, одне з них, наприклад, перше, можна відкинути. Маємо:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 0, \\ u_2 + 2u_3 = 0, \end{cases}$$

звідки:

$$\begin{cases} u_1 - u_3 = 0, \\ u_2 + 2u_3 = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок має такий вигляд:

$$u_1 = u_3, \qquad u_2 = -2u_3 .$$

Нехай $u_3 = c$, тоді $u_1 = c$ і $u_2 = -2c$, отже:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} c \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Після нормування $\left(c = \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ одержимо:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Для $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ маємо:

$$\begin{cases} -u_1 + 2u_2 - u_3 = 0, \\ 2u_1 - 4u_2 + 2u_3 = 0, \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння можна відкинути, оскільки воно збігається з третім. Після ділення другого рівняння на 2 одержимо:

$$\begin{cases} u_1 - 2u_2 + u_3 = 0, \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u_1 - 2u_2 + u_3 = 0, \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 0. \end{cases}$$

Видно, що ці рівняння лінійно залежні, отже, початкова система зводиться до одного рівняння:

$$u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \ .$$

Це рівняння, очевидно, має безліч розв'язків. Виберемо один з них. Нехай, наприклад, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, тоді $u_1 = 2$, отже, вектор

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

є власний вектор оператора $\hat{A}$, що відповідає $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Після нормування остаточно одержимо:

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатися, що $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$.

Для побудування ортонормованого базису необхідно вибрати ще один власний вектор ($\mathbf{x}_3$), що відповідає власному значенню $\lambda_3 = \lambda_2 = 1$.

Оскільки $\mathbf{x}_3$ повинен бути ортогональним до власних векторів $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$, його можна знайти за допомогою векторного добутку $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$. Отже, вектор

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

є ортонормований власний вектор оператора $\hat{A}$.

Таким чином, вектори:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

утворюють ортонормований власний базис оператора $\hat{A}$.

Відзначимо, що власні вектори $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$, котрі відповідають власним значенням $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, лежать в одній площині ($u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$), яка ортогональна до власного вектора $\mathbf{x}_1$.

Обчислимо матрицю оператора $A$ у власному базисі. Матриця переходу є:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулою (3.66) одержимо:

$$A' = U'AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто у власному базисі матриця оператора $\hat{A}$ має діагональний вигляд.

# § 3.11 КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

У попередньому параграфі було розглянуто одне з можливих узагальнень поняття функції — поняття оператора. Оператор діяв на вектори лінійного простору (прообрази) і перетворював їх на певні вектори (образи) іншого лінійного простору.

Існують, однак, й інші можливості узагальнень. Наприклад, векторам лінійного простору можна ставити у відповідність певні числа.

Будемо вважати, що в лінійному просторі $R^n$ визначена лінійна функція, якщо будь-якому вектору $\mathbf{x} \in R^n$ ставиться у відповідність дійсне число $A(\mathbf{x})$ і виконуються рівності:

$$\begin{aligned} &1)\quad A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}) && \textit{(лінійність)},\\ &2)\quad A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A(\mathbf{x}) && \textit{(однорідність)}, \end{aligned} \tag{3.73}$$

де $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — будь-які вектори з $R^n$, $\lambda \in R$.

Нехай $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис у просторі $R^n$. Тоді для будь-якого вектора $\mathbf{x}$ можна написати:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i .$$

Лінійна функція $A(\mathbf{x})$ може бути подана в такому вигляді:

$$A(\mathbf{x}) = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i ,$$

де $a_i = A(\mathbf{e}_i)$ — числові коефіцієнти.

Отже, лінійна функція в будь-якому базисі є однорідний многочлен першого степеня $n$ змінних:

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \tag{3.74}$$

або *лінійна форма* $n$ змінних.

*Білінійною формою* називається числова функція $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будь-яких двох векторів лінійного простору, якщо:

$$\begin{aligned} &1)\quad \begin{aligned} A(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + A(\mathbf{y}, \mathbf{z}),\\ A(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) &= A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + A(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \end{aligned} && \textit{(лінійність)}\\ &2)\quad \begin{aligned} A(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \lambda A(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \lambda \in R\\ A(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) &= \lambda A(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \lambda \in R. \end{aligned} && \textit{(однорідність)} \end{aligned} \tag{3.75}$$

Нехай $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис у просторі $R^n$. Тоді будь-які вектори $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ можна розкласти за базисними векторами:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j ,$$

а білінійну форму переписати у вигляді:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \sum_{i=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i,\,j=1}^{n} x_i y_j A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) .$$

Якщо позначити $a_{ij} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, то:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j . \tag{3.76}$$

Матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею білінійної форми.*

**Приклади.**

1. Функція $A(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$

   є, очевидно, лінійна форма, оскільки для скалярного добутку властива і лінійність, і однорідність.

2. Функція $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})$

   є білінійна форма, оскільки для неї виконуються всі співвідношення (3.75).

3. Скалярний добуток двох векторів $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$

   є білінійна форма, оскільки для неї теж виконуються всі співвідношення (3.75).

В ортонормованому базисі матриця білінійної форми має діагональний вигляд, оскільки:

$$a_{ij} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} ,$$

тобто

$$A = E \equiv diag(1, 1, \ldots, 1) .$$

Білінійна форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ є приклад симетричної білінійної форми, для якої:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{y}, \mathbf{x}) .$$

Очевидно, що матриця такої форми відповідає співвідношенню:

$$A = A^T, \qquad \text{або} \qquad a_{ij} = a_{ji} ,$$

тобто симетрична.

Відзначимо насамкінець, що ранг матриці білінійної форми не залежить від вибору базису.

Розглянемо симетричну білінійну форму $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Якщо припустити $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, то одержимо числову функцію, яка називається *квадратичною формою*.

Якщо $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис лінійного простору, то згідно з (3.76)

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,\, j = 1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ , \qquad (3.77)$$

де $a_{ij} = a_{ji}$, тобто квадратична форма є однорідний многочлен другого степеня змінних $x_1,\ x_2,\ \ldots x_n$.

**Приклад.**

**4.** Вирази

$$A_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2 \ ,$$

$$A_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2$$

є квадратичні форми змінних $x_1$, $x_2$ і $x_1$, $x_2$, $x_3$ відповідно. Дійсно,

$$A_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 3x_1x_1 + \frac{5}{2}x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2x_1 + x_2x_2 \ ,$$

тобто $a_{11} = 3$, $a_{12} = a_{21} = 5/2$, $a_{22} = 1$.

$$A_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1x_1 + x_2x_2 + 3x_3x_3 + 3x_1x_2 +$$

$$+ 3x_2x_1 + x_1x_3 + x_3x_1 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 \ ,$$

тобто $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 3$, $a_{13} = a_{31} = 1$, $a_{23} = a_{32} = 2$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 3$.

Симетрична матриця $A = (a_{ij})$ називається *матрицею квадратичної форми*.

**Приклад.**

**5.** Знайти матриці квадратичних форм із попереднього прикладу.

Для $A_1(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ маємо:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = A_1^T \ .$$

Для $A_2(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ маємо:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = A_2^T .$$

За допомогою цих матриць квадратичні форми можна переписати у вигляді:

$$A_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = X^T A_1 X ,$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad X^T = (\ x_1\ x_2\ ) .$$

Аналогічно для $A_2(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ маємо:

$$A_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = X^T A_2 X ,$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad X^T = (\ x_1\ x_2\ x_3\ ) .$$

У загальному випадку $\mathbf{x} \in R^n$:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,\, j = 1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^T A X , \qquad (3.78)$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X^T = (\ x_1\ x_2\ \dots\ x_n\ ) ,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Таким чином, *будь-якій квадратичній формі відповідає певна симетрична матриця і, навпаки, будь-якій симетричній матриці відповідає певна квадратична форма.*

Формули (3.76) і (3.78) були одержані за допомогою розкладу вектора $\mathbf{x}$ за базисними векторами $\{\mathbf{e}_i\}$. Виникає питання, що трапиться з квадратичною формою при переході до нового базису?

Нехай $U$ — матриця переходу до нового базису $\{\mathbf{e}'_i\}$, тоді:

$$X = UX', \qquad X^T = X'^T U^T = (UX')^T .$$

Замість співвідношення (3.78) одержимо:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = X^T AX = (UX')^T A(UX') = X'^T (U^T AU) X' .$$

Якщо позначити $B = U^T AU$, то

$$A(\mathbf{x}', \mathbf{x}') = X'^T BX' . \quad (3.79)$$

Легко переконатися, що матриця $B$ симетрична. Дійсно,

$$B^T = (U^T AU)^T = U^T A^T (U^T)^T = U^T AU = B .$$

Таким чином, лінійне перетворення $U$ переводить квадратичну форму

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = X^T AX$$

в іншу квадратичну форму

$$A(\mathbf{x}', \mathbf{x}') = X'^T AX' ,$$

тобто форму з новими змінними $\mathbf{x}'$ і новою матрицею $B$.

Може так статися, що в деякому базисі квадратична форма буде мати канонічний вигляд:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \ldots + \lambda_n x'^2_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'^2_i . \quad (3.80)$$

У цьому випадку кажуть також, що форма зведена до суми квадратів (доданки вигляду $x_i x_j$ відсутні) або до діагонального вигляду. Останній термін пов'язаний з тим, що в такому базисі матриця форми має діагональний вигляд.

Можна довести, що будь-яка квадратична форма в просторі $R^n$ може бути зведена до канонічного вигляду за допомогою невиродженого лінійного перетворення.

Ми далі розглянемо зведення квадратичної форми до канонічного вигляду в евклідовому просторі $E^n$. Нагадаємо, що саме в $E^n$ можна побудувати ортонормований базис.

**Теорема 3.19** *Для будь-якої квадратичної форми в просторі $E^n$ існує ортонормований базис, в якому форма має канонічний вигляд.*

Виникає питання, як знайти саме такий базис або як перейти від базису, в якому форма недіагональна, до необхідного базису.

Щоб дати відповідь на це запитання, необхідно розглянути поняття ортогонального оператора (ортогонального перетворення).

Лінійний оператор $\hat{A}$, що діє в просторі $E^n$, називається ортогональним оператором, якщо:

$$(\hat{A}\mathbf{x}, \hat{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad (3.81)$$

для будь-яких $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$.

Рівність (3.81) означає, що скалярний добуток не змінюється при ортогональному перетворенні.

Матриця $A = (a_{ij})$ називається ортогональною, якщо:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = E \ . \qquad (3.82)$$

З означення (3.82) випливає, що:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik} \ , \qquad (3.83)$$

а також, що:

$$A^T = A^{-1} \ . \qquad (3.84)$$

Легко переконатися, що:

$$det A = det A^T = \pm 1 \ . \qquad (3.85)$$

Дійсно,

$$det(A \cdot A^T) = det E = 1 \ ,$$

з іншого боку,

$$det(A \cdot A^T) = det A \cdot det A^T = 1 \ .$$

Але $det A^T = det A$, отже, $(det A)^2 = 1$.

**Приклад.**

**6.** Як ми вже помічали, перетворення

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \\ x_2' = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, \end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

є поворот системи координат на кут $\alpha$. Переконаємося, що це перетворення ортогональне. Дійсно:

$$(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = x_1' \cdot y_1' + x_2' \cdot y_2' = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha)(y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha) +$$
$$+ (x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha) \cdot (y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha) = x_1 y_1 \cos^2\alpha + x_2 y_2 \sin^2\alpha -$$
$$- x_1 y_2 \cos\alpha \sin\alpha - x_2 y_1 \sin\alpha \cos\alpha + x_1 y_1 \sin^2\alpha + x_2 y_2 \cos^2\alpha +$$
$$+ x_1 y_2 \sin\alpha \cos\alpha + x_2 y_1 \cos\alpha \sin\alpha = x_1 y_1 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) +$$
$$+ x_2 y_2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ .$$

Легко переконатися, що обернене перетворення $X = A^{-1}X'$:

$$\begin{cases} x_1 = \quad x_1'\cos\alpha + x_2'\sin\alpha, \\ x_2 = -x_1'\sin\alpha + x_2'\cos\alpha, \end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

теж ортогональне, тобто $(A^{-1}\mathbf{x}', A^{-1}\mathbf{y}') = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$.

Матриця $A$ — ортогональна. Дійсно,

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \quad .$$

Очевидно, що $A^T = A^{-1}$, $\det A = 1$.

В ортогональності матриці $A^{-1}$ переконаємося аналогічно:

$$A^{-1} \cdot (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \quad .$$

Отже, матриця ортогонального оператора повороту системи координат на площині ортогональна.

Можна довести, що матриця ортогонального оператора в будь-якому ортонормованому базисі ортогональна.

Очевидно, що інваріантність скалярного добутку при ортогональних перетвореннях означає, що довжини векторів і кути між ними теж не змінюються. Отже, будь-який ортонормований базис перейде в ортонормований.

Можна довести й більш загальне твердження.

**Теорема 3.20** *Матриця переходу від ортонормованого базису $\{\mathbf{e}_i\}$ до іншого ортонормованого базису $\{\mathbf{e}_i'\}$ ортогональна.*

Таким чином, перейти до ортонормованого базису, в якому квадратична форма має канонічний вигляд, можна за допомогою ортогонального перетворення.

Квадратична форма перетворюється при переході до нового базису згідно з умовою (3.79):
$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = X^T A X = X'^T B X' \quad ,$$

де $B = U^T A U$. Якщо це перетворення ортогональне $(U^T = U^{-1})$, то

$$B = U^T A U = U^{-1} A U \quad , \qquad (3.86)$$

тобто матриця $B$ подібна до матриці $A$.

Формула (3.86) перетворення матриці квадратичної форми збігається з формулою (3.66) перетворення матриці оператора при переході до нового базису. Отже, *квадратична форма буде мати канонічний вигляд, тобто матриця квадратичної форми буде діагональною, якщо базисними векторами будуть власні вектори матриці квадратичної форми.*

У такому ортонормованому базисі:

$$B = U^{-1}AU = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n)\ , \qquad (3.87)$$

де $\lambda_i$ — власні значення матриці $A$.

**Приклади.**

7. Написати квадратичну форму $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$ в канонічному вигляді.

Знаходимо матрицю форми та обчислюємо її власні значення:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = X^TAX = (\,x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\ .$$

Розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 11 = 0\ .$$

Звідси $\lambda_{1,\,2} = 3 \pm 2\sqrt{5}$, отже:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (3 + 2\sqrt{5})x'^2_1 + (3 - 2\sqrt{5})x'^2_2\ .$$

8. Записати в канонічному вигляді квадратичну форму:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 3x_3^2\ .$$

Знаходимо матрицю форми:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\,x_1\ x_2\ x_3\,)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\ .$$

Розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-6) = 0\ .$$

Отже:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 3x'^2_1 + 2x'^2_2 + 6x'^2_3\ .$$

Покажемо тепер, як будується ортонормований базис із власних векторів матриці квадратичної форми $A$. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — власні значення, а $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ — ортонормовані власні вектори матриці $A$. Ці вектори можна розкласти за векторами базису $\{\mathbf{e}_i\}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= t_{11}\mathbf{e}_1 + t_{12}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{1n}\mathbf{e}_n \ , \\
\mathbf{f}_2 &= t_{21}\mathbf{e}_1 + t_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{2n}\mathbf{e}_n \ , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{f}_n &= t_{n1}\mathbf{e}_1 + t_{n2}\mathbf{e}_2 + \ldots + t_{nn}\mathbf{e}_n \ ,
\end{aligned}$$

або

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} .$$

Матриця $T = (t_{ij})$, очевидно, ортогональна.

Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ квадратичної форми в базисі $\{\mathbf{e}_i\}$ пов'язані з новими змінними $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ у базисі $\{\mathbf{f}_i\}$ формулою:

$$A = XUX' \ , \qquad \text{де} \quad U = U^T \ .$$

Тоді для матриці квадратичної форми в новому базисі одержимо:

$$B = U^T A U = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \ .$$

**Приклади.**

**9.** Звести квадратичну форму $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 9x_2^2$ до канонічного вигляду.

Перепишемо форму у вигляді:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1 \ x_2)\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{тобто} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} .$$

Обчислюємо власні значення:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \ .$$

Отже, $\lambda_1 = 5$ і $\lambda_2 = 10$ — власні значення матриці форми.

Для визначення власного вектора, який відповідає $\lambda_1 = 5$, розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} (6-\lambda)\xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 + (9-\lambda)\xi_2 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Друге рівняння можна відкинути, оскільки воно пропорційне першому. Отже, $\xi_1 = -2\xi_2$. Нехай $\xi_2 = -c$, тоді $\mathbf{f}_1 = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} = c(2\mathbf{i}-\mathbf{j})$. Константу $c$ можна вибрати так, щоб вектор $\mathbf{f}_1$ був нормованим, тобто:

$$|\mathbf{f}_1| = 1 \quad \text{або} \quad c\cdot\sqrt{2^2+1^2} = c\sqrt{5} = 1 .$$

Отже:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{c\sqrt{5}}c(2\mathbf{i}-\mathbf{j}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} .$$

Обчислимо другий власний вектор $\lambda_2 = 10$.

$$\begin{cases} (6-\lambda_2)\eta_1 + 2\eta_2 = 0, \\ 2\eta_1 + (9-\lambda_2)\eta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -4\eta_1 + 2\eta_2 = 0, \\ 2\eta_1 - \eta_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система теж не є визначена (рівняння пропорційні), і з другого рівняння одержуємо $\eta_2 = 2\eta_1$. Нехай $\eta_1 = c$, тоді:

$$\mathbf{f}_2 = \eta_1\mathbf{i} + \eta_2\mathbf{j} = c\mathbf{i} + 2c\mathbf{j} = c(\mathbf{i}+2\mathbf{j}) .$$

Після нормування одержимо:

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{c\sqrt{5}}c(\mathbf{i}+2\mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} .$$

Перевіряємо ортогональність:

$$\mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2 = \frac{(2\mathbf{i}-\mathbf{j})}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(1+2\mathbf{j})}{\sqrt{5}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0 .$$

Отже, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ — ортонормований базис, який пов'язаний з базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ співвідношенням:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\end{pmatrix} .$$

Тепер перейдемо до змінних:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\end{pmatrix}$$

або

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}x'_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}x'_2 ,$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x'_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}x'_2 .$$

Легко переконатися, що це лінійне перетворення зводить форму до канонічного вигляду:

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 6\cdot\left(\frac{2x'_1+x'_2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{2x'_1+x'_2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-x'_1+2x'_2}{\sqrt{5}}\right) +$$

$$+ 9\cdot\left(\frac{-x'_1+2x'_2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}[6\cdot(4x'^2_1 + 4x'_1x'_2 + x'^2_2) + 4\cdot(-2x'^2_1 +$$

$$+ x'_2 x'_1 + 4x'_1 x'_2 + 2x'^2_2) + 9(x'^2_1 - 4x'_1 x'_2 + 4x'^2_2)] =$$

$$= \frac{1}{5}(25x'^2_1 + 50x'^2_2) = 5x'^2_1 + 10x'^2_2 \quad ,$$

тобто

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 \quad ,$$

де $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$.

Те саме можна було одержати за допомогою формули (3.87):

$$B = U^T A U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad .$$

Отже:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = X'^T B X' = (x'_1 \ x'_2) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = 5(x'_1)^2 + 10(x'_2)^2 \quad .$$

**10.** Звести квадратичну форму

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3$$

до канонічного вигляду.

Перепишемо квадратичну форму у вигляді:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Власні значення матриці форми знаходимо з характеристичного рівняння:

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \quad .$$

Отже, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Для власного вектора, який відповідає $\lambda_1 = 0$, одержуємо систему:

$$\begin{cases} 2\xi_1 - \xi_2 = 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0, \\ -\xi_2 + 2\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Система невизначена. Якщо покласти $\xi_1 = c$, тоді $\xi_2 = 2c$, $\xi_3 = c$, отже:

$$\mathbf{f}_1 = c(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad ,$$

а після нормування:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{6}} + \frac{2\mathbf{j}}{\sqrt{6}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{6}} \quad .$$

Для $\lambda_2 = 2$ одержуємо систему:

$$\begin{cases} -\xi_2 = 0\,, \\ -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0\,, \\ -\xi_2 = 0\,, \end{cases}$$

звідки

$$\mathbf{f}_2 = -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\ .$$

Для $\lambda_3 = 3$ одержуємо систему:

$$\begin{cases} -\xi_1 - \xi_2 = 0\,, \\ -\xi_1 - 2\xi_2 - \xi_3 = 0\,, \\ -\xi_2 - \xi_3 = 0\,, \end{cases}$$

звідки

$$\mathbf{f}_3 = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}\ .$$

Перевіряємо ортогональність власних векторів:

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_3 = 0\ .$$

Отже, *власні вектори утворюють ортонормований базис.*

Матриця квадратичної форми в цьому базисі має діагональний вигляд. Дійсно,

$$B = U^T A U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\ .$$

Отже:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1' \ x_2' \ x_3') \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = 2(x_2')^2 + 3(x_3')^2\,.$$

Метод ортогонального перетворювання змінних квадратичної форми не єдиний, що зводить форму до канонічного вигляду.

У наступних прикладах ми розглянемо *метод виділення повних квадратів*, або *метод Лагранжа.*

**Приклади.**

**11.** Звести до канонічного вигляду форму з прикладу 9.

Коефіцієнт $a_{11} = 6 \neq 0$. Розглянемо доданки, в яких міститься $x_1$:

$$6x_1^2 + 4x_1x_2 \quad .$$

Доповнюємо до повного квадрата:

$$6 \cdot \left(x_1^2 + \frac{2}{3}x_1x_2\right) = 6\left[\left(x_1 + \frac{1}{3}x_2\right)^2 - \frac{1}{9}x_2^2\right] = 6\left(x_1 + \frac{1}{3}x_2\right)^2 - \frac{2}{3}x_2^2 \quad .$$

Позначимо $x_1' = x_1 + \frac{1}{3}x_2$, тоді:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 6(x_1')^2 - \frac{2}{3}x_2^2 + 9x_2^2 = 6(x_1')^2 + \frac{25}{3}x_2^2 \quad ,$$

тобто, позначивши $x_2' = x_2$, одержимо:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 6(x_1')^2 + \frac{25}{3}(x_2')^2 \quad ,$$

де:

$$x_1' = x_1 + \frac{1}{3}x_2 \,, \qquad x_2' = x_2 \quad .$$

Отже, ми бачимо, що канонічний вигляд, як і відповідне лінійне перетворення, визначається неоднозначно.

**12.** Звести до канонічного вигляду квадратичну форму:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + x_2x_3 \quad .$$

Доданки, які містять $x_1 (a_{11} = 1 \neq 0)$, доповнюємо до повного квадрата:

$$x_1 - 6x_1x_2 = (x_1 - 3x_2)^2 - 9x_2^2 \quad .$$

Позначаємо $x_1' = x_1 - 3x_2$, тоді:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1')^2 - 6x_2^2 + 5x_3^2 + x_2x_3 \quad .$$

Доповнюємо до повного квадрата останні два доданки $(a_{33} = 5 \neq 0)$

$$5x_3^2 + x_2x_3 = 5\left(x_3^2 + \frac{1}{5}x_2x_3\right) = 5 \cdot \left[\left(x_3 + \frac{1}{10}x_2\right)^2 - \frac{1}{100}x_2^2\right] =$$

$$= 5 \cdot \left(x_3 + \frac{1}{10}x_2\right)^2 - \frac{1}{10}x_2^2 \quad .$$

Позначаємо $x_3' = x_3 + \frac{1}{10}x_2$, звідки походить:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (x_1')^2 + 5(x_3')^2 - \frac{121}{120}(x_2')^2 \quad ,$$

де $x_2' = x_2$, отже, лінійне перетворення:

$$x_1' = x_1 - 3x_2 \,, \qquad x_2' = x_2 \,, \qquad x_3' = x_3 + \frac{1}{10}x_2$$

зводить квадратичну форму до канонічного вигляду.

Квадратичні форми застосовуються для дослідження ліній другого порядку. Розглянемо загальне рівняння другого степеня:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0 \ . \qquad (3.88)$$

Очевидно, що властивості лінії, яка визначається рівнянням (3.88), не можуть залежати від вибору системи координат. Отже, у певній системі координат рівняння лінії може мати вигляд достатньо простий для дослідження.

Перші три доданки можна розглядати як квадратичну форму, зведення якої до канонічного вигляду ми щойно розглянули.

Таким чином, дослідження рівняння (3.88) можна поділити на етапи:

1) здійснення ортогонального перетворення, яке зведе квадратичну форму в лівій частині рівняння до канонічного вигляду;

2) виділення повних квадратів, яке включить лінійні доданки.

**Приклад.**

**13.** Дослідити рівняння лінії другого порядку:

$$6x_1^2 + 4x_1x_2 + 9x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \ .$$

Перші три доданки були розглянуті в прикладі 9, отже, лінійне перетворення

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{5}}x_2' \ , \qquad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x_1' + \frac{2}{\sqrt{5}}x_2' \ ,$$

зводить початкове рівняння до такого вигляду:

$$5(x_1')^2 + 10(x_2')^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x_1' - \frac{3}{\sqrt{5}}x_2' + 1 = 0 \ .$$

Виділяючи повні квадрати, одержимо:

$$5\cdot\left(x_1' + \frac{2}{5\sqrt{5}}\right)^2 + 10\cdot\left(x_2' - \frac{3}{20\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{241}{200} = 0 \ .$$

Позначивши $\tilde{x}_1 = x_1' + \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$, $\tilde{x}_2 = x_2' - \dfrac{3}{20\sqrt{5}}$, остаточно одержимо:

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{\left(\dfrac{10\sqrt{10}}{\sqrt{241}}\right)^2} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\left(\dfrac{10\sqrt{10}}{\sqrt{241}}\right)^2} = 1 \ . \qquad (3.89)$$

Отже, одержане рівняння, яке еквівалентне початковому, є рівняння еліпса (див. курс «Аналітична геометрія»).

З'ясуємо геометричний зміст перетворень, які ми виконали на другому етапі, тобто:

$$\tilde{x}_1 = x_1' + \frac{2}{5\sqrt{5}} \qquad \text{і} \qquad \tilde{x}_2 = x_2' - \frac{3}{20\sqrt{5}} \ .$$

Очевидно, що це перетворення означає перенесення початку координат у точку $O'(-2/(5\sqrt{5}),\ 3/(20\sqrt{5}))$ за допомогою паралельного перенесення координатних осей.

Таким чином, перехід від початкового рівняння до рівняння (3.89) складався з повороту координатних осей на певний кут ($\sin\varphi = -1/\sqrt{5}$, $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$), а потім паралельного перенесення початку координат.

Як буде показано нижче (див. курс «Аналітична геометрія»), рівняння (3.88) завжди визначає одну з таких кривих: еліпс (коло), гіпербола або парабола. Винятком є випадки, коли це рівняння визначає прямі лінії або зовсім не має розв'язків.

Насамкінець відзначимо, що за допомогою квадратичних форм можна досліджувати також і поверхні другого порядку.

Розглянемо ще одне означення — визначені форми. Квадратична форма називається *додатно* або *від'ємно визначеною*, якщо нерівність

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \qquad \text{або} \qquad A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) < 0$$

виконується для будь-яких ненульових векторів.

Додатно й від'ємно визначені квадратичні форми називаються *знаковизначеними*.

**Приклад.**

**14.** Квадратична форма

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 > 0$$

є додатно визначеною при будь-яких $x_1$, $x_2$ і $x_3$.

Квадратична форма

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -2 \cdot \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - 3x_2^2 < 0$$

є від'ємно визначеною при будь-яких $x_1$ і $x_2$.

Наведемо без доведення таку теорему.

**Теорема 3.21** *Для того, щоб квадратична форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ була додатно (від'ємно) визначеною, необхідно й достатньо, щоб власні значення матриці квадратичної форми були додатні (від'ємні).*

∎

Отже, квадратичні форми, наведені в прикладах 8–11, є додатно визначеними.

Зрозуміло, що застосування цієї теореми потребує обчислення власних значень матриці форми, тобто розв'язання характеристичного рівняння. Але останнє при $n > 2$ є в загальному випадку далеко нетривіальною проблемою.

Перед тим, як сформулювати ще один метод дослідження квадратичних форм, розглянемо ще одне поняття.

Нехай $A$ — матриця квадратичної форми в деякому базисі:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Будемо називати *головними діагональними (кутовими) мінорами* матриці $A$ такі мінори:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \dots,\ \Delta_n = det A\ .$$

**Теорема 3.22 (теорема Сільвестра або критерій Сільвестра)** *Для того, щоб квадратична форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ була додатно визначеною, необхідно й достатньо, щоб усі кутові мінори $\Delta_i$ матриці $A$ були додатні, тобто:*

$$\Delta_1 > 0\,,\quad \Delta_2 > 0\,,\quad \dots,\quad \Delta_n > 0\,.$$

*Для того, щоб квадратична форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ була від'ємно визначеною, необхідно й достатньо, щоб знаки кутових мінорів чергувалися, починаючи зі знака мінус $(\Delta_1 < 0)$.*

**Приклади.**

**15.** Дослідити квадратичну форму:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 5x_3^2\ .$$

Розглянемо матрицю квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо кутові мінори:

$$\Delta_1 = -1 < 0\ ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0\ ,$$

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 < 0 ,$$

отже, згідно з теоремою Сільвестра, квадратична форма є від'ємно визначеною.

**16.** Дослідити квадратичну форму:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 .$$

Матриця квадратичної форми має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Обчислюємо кутові мінори:

$$\Delta_1 = 2 > 0 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 ,$$

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 ,$$

отже, згідно з теоремою Сільвестра, квадратична форма є додатно визначеною.

# ВПРАВИ

1. Визначити ранг і знайти будь-який базис системи векторів:

$$\mathbf{a}_1 = (1;\ 0;\ -1;\ 2)\quad,$$
$$\mathbf{a}_2 = (-2;\ 1;\ 1;\ 0)\quad,$$
$$\mathbf{a}_3 = (0;\ 1;\ -1;\ 4)\quad.$$

2. Знайти координати вектора $\mathbf{x}$ у базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, якщо в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ він має координати $\mathbf{x} = (3;\ -8;\ 8)$.

Базисні вектори пов'язані співвідношеннями:

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\ ,\quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\ ,\quad \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\quad.$$

3. Лінійний оператор $\hat{A}$ перетворює вектори $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$ на вектори $\mathbf{y}_1$ і $\mathbf{y}_2$. Знайти матрицю оператора, якщо

$$\mathbf{x}_1 = (3;\ 4)\ ,\qquad \mathbf{x}_2 = (0;\ 1)\quad,$$
$$\mathbf{y}_1 = (1;\ 3)\ ,\qquad \mathbf{y}_2 = (4;\ 5)\quad.$$

4. Знайти матрицю оператора $\hat{A}$ в базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$:

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\quad,$$
$$\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3\quad,$$
$$\mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\quad.$$

Матриця оператора $\hat{A}$ в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\quad.$$

5. Знайти власні значення та ортонормовані власні вектори матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\quad.$$

**6.** Написати в канонічному вигляді квадратичні форми:

1) $5x^2 - 6xy + 5y^2$; 2) $17x^2 - 12xy + 8y^2$.

**7.** Подати рівняння ліній другого порядку в канонічному вигляді:

1) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 20x - 10y = 0$;

2) $4xy + 3y^2 - 4 = 0$.

# ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

## ГЛАВА 1

1. $\mathbf{q}$, $-\mathbf{p}$, $\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\mathbf{p}-\mathbf{q}$.

2. $\overrightarrow{AK} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}$, $\overrightarrow{CM} = -\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{p}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\mathbf{q}-\mathbf{p})$.

3. $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CB} = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DC} = \frac{|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$,

$\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \frac{|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$.

4. $\overrightarrow{CM} = \frac{2\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{3}$.

5. $\overrightarrow{AK} = \frac{|\mathbf{a}_2|\mathbf{a}_1 + |\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|}$.

6. $\mathbf{s} = \frac{2}{5}\mathbf{m} + \frac{3}{5}\mathbf{n} + \frac{3}{5}\mathbf{p}$.

7. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(3\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$,

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

8. $\overrightarrow{AK} = \frac{n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{m+n}$.

9. $\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$.

10. $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

11. $\alpha = -4$, $\beta = \frac{3}{2}$.

12. $-\frac{1}{2}$.

13. $a_x = 3$, $a_y = -3$, $a_z = 3\sqrt{2}$.

14. $(13;\ -18;\ 8)$.

15. $|\mathbf{m}| = \sqrt{41}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{41}}$,

$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{41}}$, $\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{41}}$.

16. $\mathbf{c}_0 = \frac{1}{\sqrt{42}}(-\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$.

17. $\mathbf{c} = (11;\ -11;\ -9)$, $\mathbf{d} = (8;\ -31;\ 29)$.

18. $D(-3;\ 5;\ -1)$.

21. $A(19;\ 0;\ 6)$, $B(-17;\ 0;\ -3)$.

# ГЛАВА 2

**1.** $-2$; $\arccos\left(-\frac{2}{5\sqrt{6}}\right)$.

**2.** $\sqrt{76}$.

**3.** $28$.

**4.** $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = -3$.

**5.** $-\frac{5}{21}$.

**6.** $-\frac{1}{\sqrt{17}}$.

**7.** $-\frac{1}{3}$.

**8.** $-5$.

**9.** $32\sqrt{5}$.

**10.** $0°$.

**11.** $\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$.

**12.** $-10$.

**13.** $\arccos\frac{5}{2\sqrt{43}}$.

**15.** $\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{91}}\right)$.

**18.** $\mathbf{x} = (2;\ 4;\ -6)$.

**19.** $9(\mathbf{m} \times \mathbf{n})$.

**20.** $(20;\ 4;\ 28)$.

**21.** $8\mathbf{i} + 32\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$.

**22.** $19(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

**23.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

**28.** $1$.

**30.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (од. довжини).

**31.** $4$ (од. об'єму).

**33.** 1) вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{c}$ колінеарні;

2) вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярний векторам $\mathbf{a}$ і $\mathbf{c}$.

# ГЛАВА 3

**1.** $r = 2$; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$.

**2.** $(-13;\ 11;\ 5)$.

**3.** $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -\dfrac{17}{3} & 5 \end{pmatrix}$.

**4.** $A' = \begin{pmatrix} -8 & 10 & 17 \\ -5 & 6 & 11 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

**5.** $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 5$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

**6.** 1) $2x_1^2 + 8y_1^2$; 2) $5x_1^2 + 20y_1^2$.

**7.** 1) $y_1^2 = 2\sqrt{5}\,x_1$ (парабола);

2) $x_1^2 - \dfrac{y_1^2}{4} = 1$ (гіпербола).

# ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

## В

## Г



## Д

## Е



## З

## К

## Л



## М

## Н



## О

## П

## Р



## С

## Т

## У



## Ф

**Видано за рахунок державних коштів**
**Продаж заборонено**

*Навчальне видання*

ГРИНЬОВ Борис Вікторович
КИРИЧЕНКО Ігор Костянтинович

**ВЕКТОРНА АЛГЕБРА**

**Підручник**
**для вищих технічних навчальних закладів**


Відповідальний за випуск *В. Л. Маркіанов*
Редактор *М. В. Москаленко*
Комп'ютерна верстка *І. Л. Маркіанової*
Коректор *І. Л. Безсонова*

Підписано до друку 04.01.2008. Формат 70×100/16. Гарнітура Journal.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 13,32. Обл.-вид. арк. 12,86.
Наклад 5000 прим.
Замовл. № 156.
Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»
Україна 61103, м. Харків, вул.. Дерев'янка, 16а.
Тел. (057) 758-83-93, 719-46-80, 719-17-26

Віддруковано з готових позитивів
у друкарні ПП «Модем», м. Харків.
Тел. (057) 758-15-80, 758-15-90