Б. В. Гриньов, І. К. Кириченко

ВИЩА АЛГЕБРА

ПІДРУЧНИК
ДЛЯ ВИЩИХ
НАВЧАЛЬНИХ
ЗАКЛАДІВ

ГІМНАЗІЯ

Б. В. Гриньов
І. К. Кириченко

ВИЩА АЛГЕБРА

Підручник для вищих технічних навчальних закладів

Затверджено Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2008

УДК 378:512.8
ББК 22.143я73 + 22.144.7я73
Г 85

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Затверджено
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1.4/18–Г–1735.1 від 19.10.07 р.)

Гриньов Б. В., Кириченко І. К.
Г 85 Вища алгебра: Підруч. для вищих техн. навч. закладів.— Харків: Гімназія, 2008.— 182 с.
ISBN 978-966-8319-91-4.

Підручник є першою частиною першого тому загального курсу вищої математики. У першій книзі розглядаються загальні розділи вищої алгебри: теорія матриць та визначників, системи лінійних рівнянь та методи їх розв'язування, комплексні числа, многочлени. Підручник містить теоретичні відомості, доведення теорем, короткі історичні довідки щодо виникнення основних понять, термінології та символіки. Викладання теоретичного матеріалу ілюструється великою кількістю прикладів, значна частина яких є його продовженням. Наприкінці кожної глави наведено вправи для самостійного закріплення пройденого матеріалу.

Пропонується студентам інженерно-технічних та інженерно-педагогічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 378:512.8
ББК 22.143я73 + 22.144.7я73

ISBN 978-966-8319-91-4

ЗМІСТ

Многочлени

Відповіді до вправ

Додатки

ПЕРЕДМОВА

Важко назвати такий розділ сучасної науки, який би не користувався послугами математики ...

Розвиток математики, завдяки розширенню меж її застосування, впливає на суміжні галузі науки, тому, цілком певно можна сказати, що вивчення математики є необхідною умовою отримання вищої освіти.

Підручники, що пропонуються увазі читачів, є першим томом курсу вищої математики, зміст якого відповідає програмі загального курсу вищої математики для інженерно-технічних та інженерно-педагогічних спеціальностей вищих навчальних закладів України.

При вивченні курсу вищої математики деякі розділи, як правило, викремлюються в самостійні дисципліни. Ми також дотримуємося цієї форми подання матеріалу, тому перший том виходить у трьох частинах:

Частина 1. Вища алгебра.
Частина 2. Векторна алгебра.
Частина 3. Аналітична геометрія.

Матеріал поділяється на невеличкі параграфи задля того, аби ним можна було користуватися в більшому чи меншому обсязі, залежно від спеціальності.

Наведено чимало прикладів, багато з яких ілюструє зв'язок математики з різними розділами технічних дисциплін.

Приклади дібрані майже до кожного параграфа, що дає можливість не тільки зацікавити читача застосуванням математичних знань, але й дати змогу практично закріпити відповідні розділи вищої математики. Певна частина з них містить теоретичний матеріал і є продовженням того чи іншого параграфа, що вивчається. Їх розгляд є безумовно необхідним для подальшого оволодіння математичним апаратом.

Наприкінці кожної глави подано вправи для самостійного закріплення пройденого матеріалу.

Нумерація параграфів, теорем, формул і рисунків у кожній главі самостійна, що дозволяє швидко орієнтуватися в матеріалі.

Автори зробили все можливе, щоб, викладаючи основи вищої математики, якомога ближче підійти до безпосереднього її застосування в спеціальних дисциплінах. З огляду на це "чисто" математичне формулювання деяких означень, доведення деяких теорем і властивостей свідомо не взято під увагу. Усі такі місця в тексті обумовлюються.

Тим часом автори зробили спробу якомога глибше з'ясувати зміст основних математичних понять, пояснити причини виникнення математичних фактів, окреслити характер фізичних явищ, розкрити фізичну картину природних процесів, що зумовлюють появу того чи іншого типу математичних задач.

У цьому курсі подано низку питань, які виходять за межі програми, але безпосередньо пов'язані з нею. Це дає змогу ліпше продемонструвати застосування математичного апарату.

Автори мали на меті не тільки дати студенту необхідні йому математичні знання, але й сприяти розвитку його логічного та математичного мислення.

Для розширення математичного кругозору студента математичні символи, терміни, означення, виникнення основних математичних понять супроводжуються короткими історичними довідками.

Наприкінці кожної частини подається предметний покажчик, яким варто скористатися при потребі знайти означення або пояснення того чи іншого математичного терміна чи поняття.

Автори будуть вдячні читачам за будь-які зауваження та побажання щодо змісту й форми викладу матеріалу з цього курсу.

Автори висловлюють щиру подяку колективам кафедри вищої математики та кафедри прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії за критичні зауваження щодо рукопису підручника; д.ф.-м.н., проф. О. М. Литвину, к.ф.-м.н., проф. О. П. Коржу, к.ф.-м.н., доц. Ю. О. Касаткіну, Д. Ю. Косьянову та А. І. Кириченко за допомогу в підготовці рукопису а також рецензентам член-кореспонденту НАН України, д.ф.-м.н., проф. О. Я. Савченку та академіку НАН України, д.ф.-м.н., проф. Є. Я. Хруслову.

Алгебра щедра, вона часто дає більше, ніж у неї просять.

Жан Лерон Д'Аламбер

Перші алгебраїчні дослідження з'явилися в III столітті до н. е. й пов'язані з ім'ям грецького математика Діофанта. Вони стосуються розв'язку найпростіших рівнянь. Із цього часу цими питаннями займалися математики в стародавній Греції, Вавилоні, Китаї (Цзин Чоу-ча — I ст., Чжан Цан — II ст., Цинь Цзю-шао — III ст.), Індії (Брамагупта — VII ст., Бхаскара — XII ст.), Середній Азії (Омар Хайям — XI–XII ст.). Значний вклад у розвиток алгебри вніс узбецький математик, астроном і географ Мухаммед ал-Хорезмі (IX ст.), зокрема, сам термін "алгебра" виник у зв'язку з назвою його праці «Кітаб ал-джебр ал-мукабала» («Книга про відновлення і протиставлення»), в якій алгебра вперше розглядається як самостійна галузь математики.

Подальший розвиток алгебра отримала в епоху середньовіччя завдяки працям італійських математиків Тарталья (1499–1557), Кардано (1501–1576), Феррарі (1522–1565) та ін. Були знайдені методи розв'язування рівнянь третього та четвертого степенів. Особливо великий внесок був зроблений "батьком алгебри", засновником сучасної алгебраїчної символіки, Вієтом (1540–1603).

З XVIII століття завдяки працям відомих французьких учених Декарта (1596–1650), Даламбера (1717–1783), Лаґранжа (1736–1813), Лапласа (1749–1827), геніального англійського вченого Ньютона (1643–1727), швейцарського математика Крамера (1704–1752), німецького математика Ґаусса (1777–1855), видатного математика Ейлера (1707–1783) отримали розвиток сучасні розділи алгебри: теорія многочленів, теорія визначників у зв'язку з дослідженням систем лінійних алгебраїчних рівнянь, теорія матриць і пов'язана з нею теорія лінійних перетворень векторних просторів, теорія комплексних чисел. Ці розділи вищої алгебри посідають провідне місце за різноманітністю їх застосувань, як у математиці в цілому, так і в механіці, фізиці й різних напрямках технічних наук. Ми розглянемо їх у рамках, необхідних при вивченні вищої математики.

Глава 1
Матриці та визначники

§ 1.1 МАТРИЦІ

Матрицею називається сукупність $m \cdot n$ чисел a_{ij}, де $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ або інших математичних об'єктів, розташованих у вигляді прямокутної таблиці, яка має m рядків та n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Термін матриця походить від латинського matrix — "матка тварини" та пояснюється тим, що перші матриці, розглянуті англійськими математиками Д. Сільвестром (1814–1897) та А. Келі (1821–1895), породжували лінійні перетворення. Сучасне позначення матриці круглими дужками запровадив англійський математик Каліс у 1913 р.

Горизонтальні ряди називаються *рядками* матриці, а вертикальні стовпці — *стовпцями* матриці. Символи a_{ij}, які входять у матрицю, називаються її *елементами*. Перший індекс указує номер рядка, другий — номер стовпця. Таким чином, елемент a_{ij} знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця. У загальному випадку елементами матриці можуть бути будь-які математичні об'єкти: дійсні та комплексні числа, вектори, многочлени, функції, оператори тощо. Ми, головним чином, будемо вивчати такі матриці, елементами яких є дійсні числа. Слід зазначити, що матрицю, яка має один рядок та один стовпець, тобто матрицю (a) ототожнюють із самим її елементом a. З метою скороченого запису для матриць використовується позначення $A = (a_{ij})_{mn}$, де $i = 1,$

$2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (або іншими латинськими літерами, наприклад B, C, D тощо).

Кількість рядків m та стовпців n у матриці може бути довільною, причому число рядків може бути і менше, і дорівнювати, і більше від числа стовпців. Числа m і n визначають розмір матриці. Якщо матриця має m рядків та n стовпців, то кажуть, що її розміри $m \cdot n$.

Матриця, в якої $m = n$, називається *квадратною*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

а число n — її *порядком*. Елементи $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці.

Сума елементів матриці, які знаходяться на головній діагоналі, називається *слідом* матриці й позначається $\mathrm{Sp}A$, або $\mathrm{tr}A$ (від німецького die Spur та англійського trace).

Квадратна матриця, в якої відмінні від нуля тільки елементи (або частина елементів), що розташовані на головній діагоналі, називається *діагональною*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Якщо припустити $a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \text{ —}$$

так званий *символ Кронекера*, то в розгорнутій формі діагональна матриця набуває вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

При цьому для діагональної матриці (1.4) застосовується інколи й таке позначення $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Діагональна матриця, в якої всі елементи головної діагоналі — одиниці, — називається *одиничною* та позначається E або I:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Інколи, щоб указати число рядків і стовпців у відповідних одиничних матрицях, їх позначають символами E_n або E_{nn}. Як видно, в одиничної матриці $a_{ij} = \delta_{ij}$, тобто $E = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$, а $\mathrm{Sp}E$ дорівнює порядку матриці n. Одинична матриця відіграє в матричній алгебрі таку саму роль, як звичайна одиниця в числовій алгебрі.

Квадратна матриця, в якої всі елементи дорівнюють нулю, називається *нульовою* матрицею, або *нуль-матрицею*, та позначається O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Нульова матриця, подібно до одиничної, є аналогом звичайного нуля в матричній алгебрі.

Матриця, яка має лише один рядок або один стовпець, називається відповідно *матрицею-рядком*, або *матрицею-стовпцем*. Наприклад, B — матриця-рядок:

$$B = (b_1 b_2 \ldots b_n), \tag{1.7}$$

при цьому $m = 1$, n — довільне;

C — матриця-стовпець:

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

де $n = 1$, m — довільне.

§ 1.2 ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Рівність матриць. Дві матриці $A = (a_{ij})_{mn}$ та $B = (b_{ij})_{pq}$ вважаються *рівними*, коли вони одного розміру, тобто $m = p$, $n = q$, і коли рівні їхні відповідні елементи, тобто:

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i, j \in [0, N] . \qquad (1.9)$$

Сумою двох матриць $A = (a_{ij})_{mn}$ і $B = (b_{ij})_{mn}$ одного й того самого розміру $m \cdot n$ називається матриця $C = (c_{ij})_{mn}$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних доданків елементів матриць, тобто:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j \in [0, N] . \qquad (1.10)$$

Аналогічно означається сума будь-якого визначеного числа матриць.

З означення (1.10) випливають **властивості** цієї операції, а саме:

$$\begin{array}{lll} 1.\ A + B = B + A & (\textit{комутативність}), & \\ 2.\ (A + B) + C = A + (B + C) & (\textit{асоціативність}), & (1.11) \\ 3.\ A + O = O + A = A & (\textit{наявність нуля}). & \end{array}$$

Різниця двох матриць $C = A - B$ означається аналогічно:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad \forall i, j \in [0, N] , \qquad (1.12)$$

де A і B — ті самі матриці, що і в означенні суми двох матриць.

Для будь-якої матриці A існує так звана *протилежна* матриця, яка позначається $-A$, тобто така, що:

$$A + (-A) = O . \qquad (1.13)$$

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{mn}$ **на число** k називається матриця B того ж розміру $m \cdot n$, усі елементи якої дорівнюють добутку відповідних елементів матриці A на число k, тобто:

$$b_{ij} = ka_{ij}, \quad \forall i, j \in [0, N] . \qquad (1.14)$$

З означення (1.14) випливають **властивості** множення матриці на число, а саме:

1. $kA = Ak$ (*комутативність*),
2. $l(kA) = (lk)A = k(lA)$ (*асоціативність відносно множення на число*),

3. $k(A + B) = kA + kB$ (*дистрибутивність відносно числа*), (1.15)

4. $(k + l)A = kA + lA$ (*дистрибутивність відносно матриці*),

де k і l — числа, A і B — матриці.

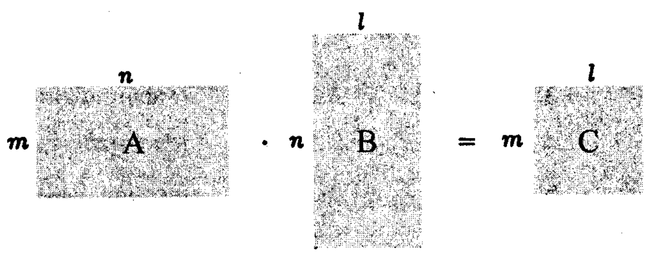
Очевидно, що *протилежну* матрицю $-A$ можна отримати за допомогою множення матриці A на число -1, тобто $-A = (-1) \cdot A$, а різницю матриць $A - B$ можна представити як суму матриць $A + (-1) \cdot B$. Очевидно, що $1 \cdot A = A$, а $0 \cdot A = O$ (нуль-матриця).

Добутком двох матриць $A = (a_{ij})_{mn}$ і $B = (b_{ij})_{nl}$ називається матриця $C = AB = (c_{ij})_{ml}$, елементи якої знаходяться за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} . \qquad (1.16)$$

З означення (1.16) випливає, *що добуток двох матриць існує тільки в тому разі, коли кількість стовпців матриці* A, *що є першим множником, дорівнює кількості рядків матриці* B, *що є другим множником.*

Операцію множення матриць A і B можна пояснити за допомогою такої схеми



Будь-який елемент c_{ij}, згідно з (1.16), дорівнює сумі попарних добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B. *Матриця-добуток* має стільки рядків, скільки їх у першого множника, і стільки стовпців, скільки їх у другого множника. З означення добутку двох матриць випливає, що *множення матриць* у загальному випадку, *не задовольняє комутативний закон*, тобто:

$$AB \neq BA \quad \text{(антикомутативність)} . \qquad (1.17)$$

Дійсно, по-перше, може трапитися, що добуток AB існує, а добуток BA обчислити неможливо (кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, а кількість стовпців матриці B та рядків матриці A не буде рівною), або навпаки, і по-друге, якщо навіть існують обидва ці добутки, то в загальному випадку вони не будуть дорівнювати один одному.

Через некомутативність множення матриць потрібно ретельно слідкувати за порядком множників. У зв'язку з цим існують терміни: "помножимо A справа на B", що означає добуток AB і, навпаки, "помножимо A зліва на B", що означає добуток BA.

У будь-якому випадку, якщо A і B квадратні матриці одного порядку, їх завжди можна перемножити одна на одну, тобто добутки AB і BA для квадратних матриць одного порядку існують будь-коли, але їхній результат буде залежати від порядку співмножників. У тих виняткових випадках, коли $AB = BA$, матриці A і B називають *комутативними* або *переставними*. Різниця добутків AB та BA позначається $[AB]$ і називається *комутатором матриць*, тобто:

$$[AB] = AB - BA . \qquad (1.18)$$

У загальному випадку операція множення матриць не задовольняє комутативний закон, але два останніх закони алгебри — асоціативний та дистрибутивний, залишаються в силі й при множенні матриць, тобто основні **властивості** операції множення (при умові існування наведених нище добутків матриць) мають вигляд:

$$
\begin{array}{lll}
1. & EA = AE = A & (\textit{комутативність}), \\
2. & (\lambda A)B = \lambda(AB) & (\textit{асоціативність відносно числа}), \\
3. & (A + B)C = AC + BC & (\textit{дистрибутивність}), \\
4. & C(A + B) = CA + CB & (\textit{дистрибутивність}), \\
5. & (AB)C = A(BC) & (\textit{асоціативність відносно матриці}).
\end{array}
\qquad (1.19)
$$

Властивості 1–4 легко перевірити, якщо скористатися означеннями (1.10), (1.14), (1.16).

Для доведення властивості 5 припустимо, що A, B і C є матриці розміру $m \cdot n$, $n \cdot l$ і $l \cdot k$ відповідно.

Згідно з (1.16) маємо:

$$D = (AB)C = (d_{ij})_{mk} , \qquad F = A(BC) = (f_{ij})_{mk} ,$$

де (див. додаток 1.)

$$d_{ij} = \sum_{p=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rp}\right)c_{pj} = \sum_{p=1}^{l}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rp}c_{pj} \ ,$$

$$f_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{p=1}^{l} b_{rp}c_{pj}\right) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{p=1}^{l} a_{ir}b_{rp}c_{pj} \ .$$

Вирази для d_{ij} і f_{ij} відрізняються тільки порядком підсумування, отже, $d_{ij} = f_{ij}$.

Таким чином, операція множення матриць має ряд властивостей (1–5), які має також множення звичайних дійсних чисел, але відрізняється відсутністю комутативності. Однак є ще одна цікава відмінність, а саме: існують ненульові матриці, добуток яких дорівнює нулю. Для дійсних чисел, як відомо, рівність $ab = 0$ означає, що або a, або b, або і a і b одночасно дорівнюють нулю.

Приклад.

1. Розглянемо ненульові матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Їх добуток

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \ .$$

Легко переконатися, що A і B не комутують і добуток

$$BA = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \neq O \ .$$

Розглянуті операції над матрицями (додавання, множення), можна також виконувати не тільки з дійсними числами, але й з іншими математичними об'єктами.

Транспонування матриць. Для матриць існує ще одна своєрідна операція, за допомогою якої можна здобути так звану *транспоновану матрицю* A^T. Ця операція міняє місцями рядки і стовпці матриці, а саме, якщо

$$A = (a_{ij})_{mn}, \quad \text{то} \quad A^T = (a_{ji})_{nm} \ , \qquad (1.20)$$

тобто $a_{ij}^T = a_{ji}$. Операцію транспонування інколи називають *операцією перестановки індексів*.

Цілком природно, що: $$\left(A^T\right)^T = A\ . \qquad (1.21)$$

Відзначимо, що елементи головної діагоналі квадратної матриці при транспонуванні не змінюються $a_{ii} \to a_{ii}$, а решту її елементів можна отримати дзеркальним відображенням відносно головної діагоналі $a_{ij} \to a_{ji}$.

Легко переконатися в тому, що операція транспонування має такі **властивості**:

$$\begin{array}{lll} 1.\ (A+B)^T = A^T + B^T & (\textit{комутативність}), & \\ 2.\ (kA)^T = kA^T & (\textit{асоціативність}), & (1.22) \\ 3.\ (AB)^T = B^T A^T & (\textit{антикомутативність}). & \end{array}$$

Доведемо, наприклад, властивість (3). Нехай $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{nl}$; тоді

$$(AB)^T = \left(\sum_{p=i}^{n} a_{ip} b_{pj}\right)^T = \sum_{p=i}^{n} a_{jp} b_{pi}\ ,$$

$$B^T A^T = \sum_{p=i}^{n} b_{ip}^T a_{pj}^T = \sum_{p=i}^{n} b_{pi} a_{jp} = \sum_{p=i}^{n} a_{jp} b_{pi}\ ,$$

тобто $(AB)^T = B^T A^T$.

Квадратна матриця A називається *симетричною*, якщо $$A^T = A\ . \qquad (1.23)$$

З означення (1.23) випливає, що для симетричної матриці A $a_{ij} = a_{ji}$, тобто *елементи симетричної матриці, симетричні відносно головної діагоналі, рівні.*

Приклад.

2. Матриця $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T .$$

Згідно з означенням (1.23) матриця A симетрична.

Квадратна матриця B називається *антисиметричною*, якщо: $$B^T = -B\ . \qquad (1.24)$$

Очевидно, що з (1.24) випливає, що для антисиметричної матриці B $b_{ij} = -b_{ji}$, звідки $b_{ii} = -b_{ii} = 0$, тобто *діагональні елементи антисиметричної матриці дорівнюють нулю.*

Приклад.

3. Матриця
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Згідно з означенням (1.23) матриця B антисиметрична.

Відзначимо, що будь-яка квадратна матриця C може бути подана у вигляді суми симетричної (A) та антисиметричної (B) матриць, а саме:
$$C = A + B , \qquad (1.25)$$

де $$A = \frac{1}{2}(C + C^T) = A^T, \qquad B = \frac{1}{2}(C - C^T) = -B^T .$$

Насамкінець розглянемо *степінь квадратної матриці* A, який визначається так:
$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ співмножників}}, \quad n \in N, \quad A^0 = E . \qquad (1.26)$$

Беручи до уваги асоціативність множення матриць, отримуємо:

1. $A^n \cdot A^m = A^{n+m}$,
2. $(A^n)^m = A^{n \cdot m}$.

Приклади.

4. Знайти суму матриць:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Нехай $A + B = C$, тоді:
$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1+3 & 0+4 & 3-2 \\ 4-5 & -2+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

5. Знайти суму матриць:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -5 \\ -1 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -7 & -5 & 5 \\ 1 & -8 & -8 \end{pmatrix} .$$

Обидві матриці мають однакову кількість рядків (три) й однакову кількість стовпців (три). За формулою (1.10) знаходимо:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+(-1) & -3+3 & 4+(-4) \\ 7+(-7) & 6+(-5) & -5+5 \\ -1+1 & 8+(-8) & 9+(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сума матриць виявилась одиничною матрицею.

6. Дано три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $D = 3A + 4B - 2C$.

За означенням добутку матриці на число, одержимо:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 9 & -12 & 15 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}, \quad 4B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 8 & 12 & 16 \\ 4 & -20 & 24 \end{pmatrix}, \quad 2C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 8 & 12 & -14 \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулами (1.10) і (1,12) знаходимо:

$$D = 3A + 4B - 2C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 9 & -12 & 15 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 8 & 12 & 16 \\ 4 & -20 & 24 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 8 & 12 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 4 \\ 15 & 6 & 26 \\ 2 & -29 & 29 \end{pmatrix}.$$

7. Знайти матрицю $C = AB$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця A має два стовпці, а матриця B — два рядки, отже, добуток AB існує. Очевидно також, що матриця C має розмір $2 \cdot 3$, тобто має $2 \cdot 3 = 6$ елементів.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

де $$c_{11} = (1 \; -2)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 6,$$

$$c_{12} = (1 \; -2)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 = -6,$$

$$c_{13} = (1 \; -2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 1,$$

$$c_{21} = (0 \; 3)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = -3,$$

$$c_{22} = (0\ 3)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9 \ ,$$

$$c_{23} = (0\ 3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0 \ .$$

Остаточно маємо: $C = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Або в загальному вигляді: $C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4+2 & 0-6 & 1+0 \\ 0-3 & 0+9 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 1 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} .$$

Відзначимо, що добуток BA не існує.

8. Знайти добутки AB та BA, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Згідно з (1.16) маємо:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} .$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Отже, матриці-добутки AB та BA не тільки не рівні, але навіть різної розмірності.

9. Знайти AB і BA, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Згідно з (1.16) маємо:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тобто матриці AB та BA однакової розмірності, але $AB \neq BA$.

10. Перевірити комутативність матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки можна обчислити комутатор матриць A і B:

$$[AB] = AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+0 & 0-3 \\ 0+0 & 0+6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3+0 & -3+0 \\ 0+0 & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = O.$$

Отже, матриці A та B комутують.

11. Транспонувати матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Згідно з (1.20) маємо:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

12. Обчислити значення $P(A)$, де

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 5, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Маємо: $P(A) = 2A^2 - 3A + 5E$, де E — одинична матриця третього порядку.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}; \qquad 2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix};$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \qquad 5E = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$P(A) = 2A^2 - 3A + 5E = \begin{pmatrix} 22 & 9 & 4 \\ 13 & 18 & 9 \\ 6 & 13 & 22 \end{pmatrix}.$$

13. Обчислити A^2, A^3, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 1.3 ВИЗНАЧНИКИ

Будь-якій квадратній матриці можна поставити у відповідність дуже важливу її характеристику, яка називається *визначник* або *детермінант* матриці. Визначник матриці A позначають $\det A$ або $|A|$. Поняття визначника може існувати також незалежно від поняття матриці, як цілком самостійне математичне поняття. У цьому випадку визначники позначаються, як правило, грецькими літерами Δ або δ. Усю викладену нами нижче теорію визначників можна розглядати незалежно від теорії матриць.

Поняття визначника бере свій початок від німецького математика Ґ. В. Ляйбніца (1646–1716), яке прийшло до нього при розв'язуванні систем лінійних рівнянь. Ця ідея була повідомлена в листі французькому математику Г. Лопіталю (1661–1704) у 1693 р., але лист був надрукований лише в 1850 р. У 1750 р. визначники були заново винайдені швейцарським математиком Г. Крамером (1704–1752).

Слово детермінант походить від латинського determino — "обмежувати", "визначати" й буквальний його зміст — "визначник". Термін уперше зустрічається в К. Ґаусса (1777–1855) у 1801 р. У сучасному його значенні цей термін запровадив французький математик О. Коші (1789–1857) у 1815 р.

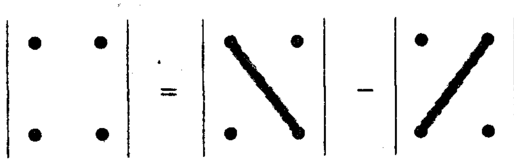
Якщо матриця A — матриця першого порядку, тобто $A = (a_{11})$, то ***визначником 1-го порядку*** цієї матриці називається число:

$$\det A = |a_{11}| = a_{11} . \qquad (1.27)$$

Визначником 2-го порядку (для матриці A другого порядку) називається число:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} . \qquad (1.28)$$

Відзначимо, що добуток елементів головної діагоналі входить у вираз зі знаком плюс, а добуток елементів другої діагоналі — зі знаком мінус. Це правило можна пояснити такою схемою:

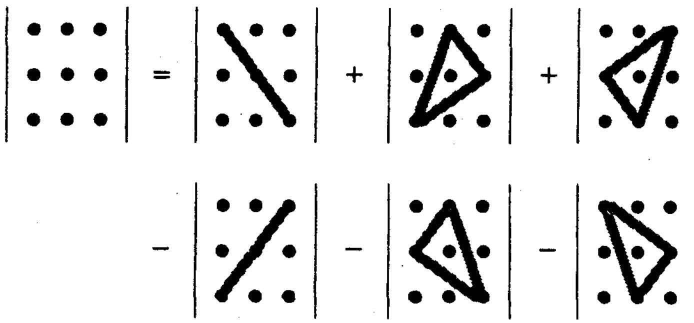


Визначником 3-го порядку (для матриці A третього порядку) називається число:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} +$$

$$+ a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \ . \quad (1.29)$$

Цю формулу легко запам'ятати за допомогою мнемонічного правила (*правила трикутника*):



Перед тим, як дати означення для довільного визначника n-го порядку, зробимо деякі висновки відносно визначників 1-го, 2-го та 3-го порядків. Кожен з них є алгебраїчною сумою всіляких добутків елементів матриці, взятих поодинці з кожного рядка й стовпця. Крім того, половина членів цієї суми береться зі знаком плюс, половина — зі знаком мінус.

Формулу (1.28) можна переписати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (\pm) a_{1S_1} a_{2S_2} \ ,$$

де знаку плюс відповідає пара (S_1, S_2), рівна $(1, 2)$, а знаку мінус — $(2, 1)$.

Аналогічно можна переписати й формулу (1.29):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (\pm) a_{1S_1} a_{2S_2} a_{3S_3} \ ,$$

де знаку плюс відповідає трійка (S_1, S_2, S_3), рівна відповідно

$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$; а знаку мінус — $(3, 2, 1)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$.

Природно назвати *визначником n-го порядку* число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (\pm) a_{1S_1} a_{2S_2} \dots a_{nS_n} . \quad (1.30)$$

Для встановлення правила вибору знака необхідно ввести поняття *перестановки.*

Розглянемо n різних натуральних чисел $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Перестановками називаються всілякі комбінації $(S_1, S_2, \dots, S_n)$, які відрізняються одна від одної тільки порядком розміщення цих чисел. Наприклад, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ і $(3, 2, 1)$ — перестановки чисел 1, 2 і 3. Відзначимо, що число перестановок n чисел дорівнює $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (див. додаток 2).

Розглянемо всілякі впорядковані пари (S_i, S_j). Якщо $S_i > S_j$ при $i < j$, ці числа утворюють *інверсію.* Загальне число таких пар позначимо $N(S_1, S_2, \dots, S_n)$.

Перестановка називається парною (непарною), якщо число її інверсій парне (непарне). Наприклад, перестановка (3,2,1) — непарна, оскільки $N(3, 2, 1) = 3$. Дійсно, пари (3,2), (3,1) і (2,1) утворюють інверсії.

Якщо поміняти місцями будь-які 2 числа перестановки (зробити *транспозицію*), парність перестановки зміниться на протилежну. Можна також довести, що будь-яку перестановку можна добути з іншої за допомогою декількох транспозицій.

Тепер (1.28) і (1.29) можна переписати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(S_1, S_2)} (-1)^{N(S_1, S_2)} a_{1S_1} a_{2S_2} ,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(S_1, S_2, S_3)} (-1)^{N(S_1, S_2, S_3)} a_{1S_1} a_{2S_2} a_{3S_3} ,$$

де підсумування ведеться по всіх перестановках (S_1, S_2) і (S_1, S_2, S_3) відповідно.

Замість (1.30) отримуємо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(s_1, s_2, \ldots s_n)} (-1)^{N(s_1, s_2, \ldots, s_n)} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n} , \quad (1.31)$$

тобто *визначник n-го порядку є алгебраїчна сума всіляких добутків елементів матриці, взятих поодинці з кожного рядка та стовпця.* Знак кожного добутку визначається парністю перестановки з номерів стовпців.

Однак використовувати це означення для безпосереднього обчислення не завжди зручно, оскільки (1.31) потребує обчислення суми з $n!$ доданків. Наприклад, для визначника 5-го порядку ця сума буде складатися аж із $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ доданків.

Перед тим як сформулювати теорему, що дає можливість ефективно обчислювати визначник, а також дуже корисна для доведення деяких властивостей визначників, необхідно залучити декілька нових термінів.

Нехай $\det A$ визначник n-го порядку. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$-го порядку, який утворюється з $\det A$ після викреслювання i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} . \quad (1.32)$$

Очевидно, що A_{ij}, як і M_{ij}, не залежать від елемента a_{ij} та можуть відрізнятися лише знаком.

Наприклад, для елементів матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

маємо:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 a_{22} = a_{22} ,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 a_{21} = -a_{21} ,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 a_{12} = -a_{12} ,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 a_{11} = a_{11} .$$

За допомогою знайдених алгебраїчних доповнень визначник матриці A можна записати у вигляді:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

або

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} ,$$

тобто визначник є сума попарних добутків елементів 1-го (2-го) рядка на їх алгебраїчні доповнення.

Очевидно, що те саме справедливе і для стовпців.

Неважко переконатися, що аналогічні формули існують і для визначника 3-го порядку. Наприклад:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

або

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \,,$$

тобто визначник $\det A$ розкладається за елементами 1-го рядка або 2-стовпця.

Наведені приклади, зрозуміло, є окремими проявами певної властивості визначників.

Теорема 1.1 *Визначник довільного порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення*, тобто:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

або

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \,, \quad j = 1, 2, \ldots, n \,. \qquad (1.33)$$

Таким чином, обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення A_{ij} при фіксованому i або j, тобто n визначників $(n-1)$-го порядку, а їх обчислення — до обчислення визначників $(n-2)$-го порядку тощо.

Приклад.

1. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}$.

Згідно з (1.33) маємо:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-10 + 56) -$$

$$- 3(15 + 35) + (-24 + 10) = 92 \ .$$

Слід зазначити, що все значно спрощується, якщо у визначнику є рядок (стовпець), у якому, наприклад, l нулів.

Тоді, розкладаючи визначник саме по цьому рядку (стовпцю), ми одержимо суму не n, а тільки $(n - l)$ членів.

Приклади.

2. Спростити вираз $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$.

Розкладаючи визначник за елементами першого рядка, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta =$$

$$= \cos(\alpha + \beta) \ .$$

3. Визначити x з рівняння $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

Користуючись правилом трикутника для обчислення визначників, маємо:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 1 + 1 - x - x - x = x^3 - 3x + 2 = 0 \ .$$

Розв'язуємо це кубічне рівняння. Розкладаючи на множники ліву частину рівняння, знаходимо:

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) =$$

$$= (x - 1)[x(x + 1) - 2] = (x - 1)(x^2 + x - 2) \ .$$

Отже:

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \ .$$

Звідки $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

§ 1.4 ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

Розглянемо тепер основні **властивості** визначників.

1. *Визначник інваріантний відносно транспонування матриці,*

$$\text{тобто} \quad \det A = \det A^T .$$

Для доведення зауважимо, що відповідні вирази (1.31) для $\det A$ і $\det A^T$ складаються з однакових доданків:

$$a_{\beta_1 s_1} a_{\beta_2 s_2} \cdots a_{\beta_n s_n} ,$$

оскільки рядки (стовпці) матриці A збігаються зі стовпцями (рядками) матриці A^T, і кожний доданок містить у собі по одному елементу з рядка та стовпця. Очевидно, що номери рядків (стовпців) матриці A збігаються з номерами стовпців (рядків) матриці A^T. Якщо ми за допомогою транспозицій будемо перетворювати

$$a_{\beta_1 s_1} a_{\beta_2 s_2} \cdots a_{\beta_n s_n} \quad \text{у} \quad a_{1 s_1} a_{2 s_2} \cdots a_{n s_n} ,$$

виникне додатковий множник $(-1)^{N(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)}$, тобто знак кожного доданка і в розкладі $\det A$, і в розкладі $\det A^T$ буде однаковий, а саме:

$$(-1)^{N(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \cdot (-1)^{N(s_1, s_2, \ldots, s_n)} =$$

$$= (-1)^{N(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) + N(s_1, s_2, \ldots, s_n)} .$$

Отже, $\det A = \det A^T$.

Враховуючи означення транспонування, дану властивість можна сформулювати ще й так: *визначник не змінює свого значення, якщо рядки відповідної матриці стають стовпцями з тими ж номерами.*

Ця властивість має принципове значення, бо дозволяє всі властивості, доведені для рядків, автоматично поширити й на стовпці.

2. *Спільний множник елементів будь-якого рядка або стовпця можна виносити за знак визначника.*

Дійсно, нехай, наприклад, $a_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$, тобто λ — спільний множник елементів i-го рядка. Елементи a_{ij} входять поодинці в кожний член суми (1.31), отже, λ можна винести за знак суми, тобто:

$$\sum (-1)^{N(\ldots)} a_{1S_1} \ldots a_{1k}\lambda \ldots a_{nS_n} =$$

$$= \lambda \cdot \left(\sum (-1)^{N(\ldots)} a_{1S_1} \ldots a_{nS_n}\right)$$

або

$$\det A = \lambda \cdot \det A.$$

Остаточно маємо:

$$\det(\lambda A) = \lambda \det A.$$

Із цієї властивості випливає: *щоб помножити визначник на довільний числовий множник, достатньо помножити на нього елементи одного будь-якого рядка або одного будь-якого стовпця.*

3. *Якщо кожний елемент будь-якого рядка або стовпця є сума двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких елементами відповідного рядка або стовпця є перші доданки, у другому — другі доданки.*

Припустимо, що $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, де, наприклад, індекс i фіксований. Тоді з (1.33) випливає, що:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (b_{ij} + c_{ij}) A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} A_{ij} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} A_{ij} = \det A_1 + \det A_2 .$$

4. *Якщо поміняти місцями два будь-яких рядки або стовпці, то визначник змінить знак на протилежний.*

Для доведення цієї властивості досить звернути увагу на те, що, по-перше, сума (1.31) буде складатися з тих самих доданків:

$$a_{1S_1} a_{2S_2} \ldots a_{nS_n},$$

а, по-друге, замість перестановки $N(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ буде стояти перестановка, яка відрізняється від неї тільки однією транспозицією, тобто парністю.

5. *Визначник, в якого два однакових рядки або стовпці, дорівнює нулю.*

Дійсно, нехай $\det A$ саме такий визначник. Тоді, згідно з попередньою властивістю, після того як поміняємо місцями рівні рядки, одержимо: $\det A = -\det A$, звідки $\det A = 0$.

6. *Визначник дорівнює нулю, якщо елементи будь-якого рядка або стовпця дорівнюють нулю.*

Це твердження безпосередньо випливає з (1.33), якщо розкласти визначник саме за нульовим рядком або стовпцем.

7. *Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого його рядка або стовпця додати числа, які пропорційні елементам будь-якого іншого рядка або стовпця.*

Використовуючи властивість 3, можна розкласти визначник на суму двох, один з яких дорівнює нулю (властивості 2 і 5), оскільки має два пропорційних рядки або стовпці.

8. *Сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення елементів будь-якого іншого рядка або стовпця дорівнює нулю.*

Згідно з (1.33) для $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}\ .$$

Якщо замінити A_{ij} на A_{kj}, тобто на алгебраїчні доповнення елементів k-го рядка, то одержимо суму:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}\ .$$

Її можна розглядати як визначник $\det A$, в якого замість k-го рядка стоїть i-й рядок, тобто визначник із двома рівними рядками $(k \neq i)$. Отже, згідно з властивістю 5, $\det A = 0$.

Твердження 8 доведено. Неважко побачити, що воно правильне й відносно стовпців.

Насамкінець подамо ще одну теорему про множення визначників.

Теорема 1.2 *Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць,* тобто:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B\ .$$

Візьмемо для простоти обчислень у загальному вигляді дві матриці другого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\ .$$

Тоді:
$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11}b_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{21}b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= b_{11}b_{22}\det A - b_{21}b_{12}\det A =$$

$$= (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})\det A = \det A \cdot \det B .$$

Теорема доведена.

Слід зазначити, що на відміну від добутку, *визначник суми двох матриць в загальному випадку не дорівнює сумі двох визначників цих матриць*, тобто:
$$\det(A + B) \neq \det A + \det B .$$

Розглянемо тепер декілька прикладів обчислення визначників. Поряд з формулою (1.33) ми, зрозуміло, будемо використовувати властивості 1–8.

Раніше вже підкреслювалося, що формула (1.33) дуже ефективна, коли є рядок, в якому, скажімо, $l\ (1 \le l \le n)$ нулів. Якщо $l = n$, то результат тривіальний (властивість 5): $\det A = 0$.

Якщо $n - l = 1$ або 2, то в (1.31) залишиться тільки 1 або 2 доданки.

Якщо у визначнику взагалі немає нульових елементів, то, використовуючи властивість 7, їх можна утворити штучно.

Приклади.

1. Обчислити визначник: $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 6 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

$\det A$ не зміниться, якщо другий рядок ми додамо до першого й віднімемо від третього та четвертого, тобто:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Використовуючи той факт, що в третьому стовпці даного визначника знаходяться три нулі, розкладемо визначник за елементами третього стовпця. Тоді одержимо:

$$\det A = \sum_{j=1}^{4} a_{3j}A_{3j} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Якщо від третього стовпця віднімемо подвоєний перший, то матимемо:

$$\det A = -\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Знову ж таки, використовуючи те, що в другому рядку є два нулі, розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$$\det\text{A} = \sum_{i=1}^{4} a_{i3}A_{i3} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} =$$

$$0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = (-1)^{2+3} M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 23 .$$

2. Обчислити визначник: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 7 & 3 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Як видно, тут виникає проблема вибору так званого *розв'язувального елемента*, тобто елемента, за допомогою якого, користуючись властивістю 7, можна утворити нулі, замість усіх ненульових елементів тієї строки або того стовпця, де він знаходиться. Її, однак, можна вирішити дуже просто, а саме: перший рядок поділити на 2, щоб замість $a_{12} = 2$ одержати $a_{12} = 2/2 = 1$. Отже:

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3/2 & 1 & -2 \\ 7 & 3 & -6 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Тепер $a_{12} = 1$ можна вибрати як розв'язувальний елемент. Далі, помноживши перший рядок спочатку на 3, потім на 2 і віднімаючи його спочатку від другого рядка, а потім від третього, відповідно одержимо:

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3/2 & 1 & -2 \\ 5/2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Розкладаючи $\det A$ за елементами другого стовпця, одержимо:

$$\det A = 2 \cdot (a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}) = 2 \cdot (1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32}) =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+2} M_{12} = -2 \begin{vmatrix} 5/2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 .$$

3. Обчислити визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z^2-x^2) - (y^2-x^2)(z-x) = (y-x)(z-x) \times$$

$$\times ((z+x)-(y+x)) = (y-x)(z-x)(z-y) .$$

Якщо в даному визначнику покласти рівність двох будь-яких величин, наприклад $x = y$, то, як видно з відповіді він перетворюється в нуль, що підтверджує п'яту властивість визначників. Цей визначник має власну назву — визначник Вандермонда, на честь французького математика XVIII століття, одного з основоположників вищої алгебри, який уперше обчислив його. Слід зазначити, що А. Вандермонд (1735–1796) запропонував спеціальний символ визначника, близький до нині прийнятого.

§ 1.5 РАНГ МАТРИЦІ

Перед тим, як дати визначення рангу матриці, необхідно залучити деякі допоміжні терміни.

Нагадаємо, що матриця-рядок A є матриця розміру $1 \cdot n$, тобто:

$$A = (a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n}) \,, \quad (1.34)$$

а матриця-стовпець B — матриця порядку $m \cdot 1$, тобто:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} . \quad (1.35)$$

Матриці (1.34), (1.35) далі будемо називати просто рядком і стовпцем. Підкреслимо, що на A і B поширюються розглянуті вище правила додавання та множення матриць на число.

Нехай дано m рядків:

$$A_1 = (a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n}) \,,$$

$$A_2 = (a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n}) \,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_m = (a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn}) \quad (1.36)$$

і m чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Лінійною комбінацією рядків (1.36) називається сума:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_m A_m = \sum_{i=1}^{m} a_i A_i \,. \quad (1.37)$$

Лінійна комбінація стовпців визначається аналогічно.

Рядки (стовпці) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ називаються *лінійно незалежними*, якщо з рівності

$$\sum_{i=1}^{m} a_i A_i = 0 \quad (1.38)$$

випливає, що $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$.

Якщо в рівності (1.38) хоча б один з $a_i \neq 0$, то рядки (стовпці) називаються *лінійно залежними*.

Відмітимо, що рядки (стовпці) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ будуть також лінійно залежними, якщо хоча б один з рядків (стовпців) нульових (або їх комбінація нульова).

Приклади.

1. Установити лінійну залежність (незалежність) рядків:

$$A_1 = (\ 1\ 2\ -3\ ), \qquad A_2 = (\ -1\ 1\ 2\ ),$$

$$A_3 = (\ 0\ -2\ 2\ ), \qquad A_4 = (\ -5\ 2\ 3\ ).$$

Якщо припустити залежність даних рядків, то повинна виконуватися рівність (1.38):

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 = 0$$

або

$$\begin{cases} a_1 - a_2 - 5a_4 = 0, \\ 2a_1 + a_2 - 2a_3 + 2a_4 = 0, \\ -3a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 = 0, \end{cases}$$

звідки, якщо покласти, наприклад, $a_4 = 1$ одержимо $a_1 = 5$, $a_2 = 0$, $a_3 = 6$.

Таким чином, рядки A_1, A_2, A_3, A_4 лінійно залежні, оскільки останню рівність можна переписати у вигляді:

$$A_4 = -5A_1 - 6A_3 .$$

2. Установити лінійну залежність (незалежність) стовпців:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Припущення про їх залежність:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 = 0$$

приводить до системи

$$\begin{cases} 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = 0, \\ 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = 0, \\ 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4 = 0, \\ 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 + 1 \cdot a_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Отже, A_1, A_2, A_3, A_4 лінійно незалежні.

Теорема 1.3 *Для лінійної залежності рядків (стовпців) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ необхідно й достатньо, щоб будь-який з них був лінійною комбінацією інших.*

Припустимо, що рядки лінійно залежні.

Тоді маємо (1.38):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i A_i = 0 ,$$

де хоча б один з коефіцієнтів, наприклад, a_1, відмінний від нуля.

Після ділення на a_1 одержимо:

$$A_1 = -\frac{a_2}{a_1}A_2 - \frac{a_3}{a_1}A_3 - \ldots - \frac{a_m}{a_1}A_m ,$$

тобто A_1 є лінійною комбінацією інших рядків. Таким чином необхідність доведена.

Щоб довести достатність, припустимо, що один з рядків, наприклад A_1, є лінійною комбінацією інших рядків, тобто:

$$A_1 = \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 + \ldots + \beta_m A_m$$

або

$$(-1)\cdot A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 + \ldots + \beta_m A_m = 0 .$$

Ліва частина рівності є лінійною комбінацією рядків, де принаймні один з коефіцієнтів (-1) відмінний від нуля, отже, рядки $A_1, A_2, \ldots, A_m$ лінійно залежні.

Очевидно, що $A_1, A_2, \ldots, A_m$ будуть лінійно залежні, якщо серед них є декілька лінійно залежних.

Вище було дано означення мінору M_{ij} елемента матриці a_{ij}. Розглянемо тепер споріднене поняття.

Нехай A прямокутна матриця розміру $m \cdot n$. Виділимо в ній будь-які k рядків і k стовпців $(1 \le k \le min(m, n))$. Визначник матриці, елементи якої стоять на перетині вибраних рядків і стовпців, називається *мінором k-го порядку* M_k матриці A.

Узагалі з елементів матриці A можна утворити мінори різних порядків, серед яких буде $M_{k_{max}}$, де $k_{max} = min(m, n)$.

Рангом матриці A називається найвищий порядок мінору матриці A не рівного нулю.

Оскільки мінор — це визначник, то це означення формулюється ще й так: *рангом матриці A називається найвищий порядок відмінного від нуля визначника, який можна побудувати з елементів даної матриці.*

Ранг матриці — це число, і позначають його $\text{rang}A$ або $r(A)$. Очевидно, що $\text{rang}A \le min(m, n)$.

Поняття ранг матриці запровадив англійський математик Д. Сільвестр (1814–1897) близько 1850 р. Термін ранг пізніше запровадив німецький математик Ф. Фробеніус (1849–1917) від німецького "rang" — "степінь", "розряд". Означення рангу детермінанта й позначення rang було запроваджено німецьким математиком Л. Кронекером (1823–1891) у 1880 р.

Якщо ранг прямокутної матриці $m \cdot n$ має найбільше можливе значення (тобто $min(m, n)$), то дана матриця називається *невиродженою* або *неособливою*; у протилежному випадку матриця називається *виродженою* або *особливою*.

В окремому випадку для квадратної матриці порядку n можна побудувати тільки один визначник n-порядку, тобто $\det A$. Таким чином, якщо для квадратної матриці $\det A = 0$, то матриця A — вироджена (особлива), якщо ж $\det A \neq 0$, то вона невироджена (неособлива).

Приклади.

3. Матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ має найвищий можливий ранг, оскільки

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\cdot(5-11) = 30 \neq 0 .$$

Це невироджена матриця.

4. Розглянемо матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 5 & 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

З її елементів указаним вище способом можна скласти чотири визначники третього порядку, викреслюючи почергово один з її стовпців. Видно, що всі вони дорівнюють нулю:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & -2 & -4 \\ 8 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Серед визначників другого порядку є відмінні від нуля, наприклад: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Таким чином ранг даної матриці дорівнює двом. Це вироджена матриця.

5. Розглянемо матрицю: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що $\operatorname{rang} A \geq 1$, оскільки серед 9 мінорів 1-го порядку є мінори, наприклад, $M_1 = a_{11} = 1$, що не рівні нулю.

З елементів матриці A можна утворити 9 мінорів 2-го порядку:

$$M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$M_2^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_2^{(5)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_2^{(6)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_2^{(7)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_2^{(8)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad M_2^{(9)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що $\operatorname{rang} A \geq 2$, оскільки є не нульові мінори 2-го порядку, наприклад, $M_2^{(1)} = 1 \neq 0$.

Мінор 3-го порядку

$$M_3 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто $\operatorname{rang} A = 2$. Матриця вироджена.

З усіх наведених прикладів, незалежно від напрямку відшукання рангу матриці, видно, що кількість мінорів, які треба розглядати, може бути великою. Відзначимо, що для матриці порядку $m \cdot n$ кількість мінорів 1-го, 2-го, ..., k-го порядків дорівнює:

$$\sum_{i=1}^{k} C_m^i C_n^i = C_m^1 \cdot C_n^1 + C_m^2 \cdot C_n^2 + \ldots + C_m^k \cdot C_n^k,$$

де $C_\alpha^\beta = \alpha!/(\beta!(\alpha-\beta)!)$ кількість комбінацій з α по β (див. додаток 2).

Наприклад, для $A = (a_{ij})_{34}$ число мінорів 1-го, 2-го і 3-го порядків дорівнює:

$$C_3^1 \cdot C_4^1 + C_3^2 \cdot C_4^2 + C_3^3 \cdot C_4^3 = 34.$$

Однак існує метод, який інколи значно спрощує обчислення рангу. Цей метод заснований на використанні так званих *елементарних перетворень* матриці.

До них належать:

1) транспонування;

2) перестановка місцями двох будь-яких рядків або стовпців;

3) множення рядка або стовпця на будь-яке число, не рівне нулю;

4) додавання до рядка або стовпця будь-якого іншого рядка або стовпця, помноженого на певне число;

5) викреслення рядка або стовпця, який складається з нулів.

Теорема 1.4 *Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці.*

Доведення безпосередньо випливає з властивостей визначників. Ідея методу полягає в тому, щоб за допомогою перетворень 1–5 привести вихідну матрицю до більш зручного вигляду.

Можна, наприклад, звести матрицю A до *ступінчастої (трапецієподібної)* матриці:

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1r} & a'_{1\,r+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2r} & a'_{2\,r+1} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3r} & a'_{3\,r+1} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{r\,r+1} & \dots & a'_{rn} \end{pmatrix},$$

в якої всі елементи, що стоять нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. Легко переконатися, що $\operatorname{rang} A' = r$. Для цього зауважимо, що перші r стовпців матриці A' утворюють квадратну матрицю порядку r, визначник якої:

$$M_r = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1r} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2r} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Дійсно, розкриваючи цей визначник за елементами 1-го стовпця, дістанемо:

$$M_r = a'_{11} \cdot \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2r} \\ 0 & a'_{33} & \dots & a'_{3r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} \end{vmatrix} .$$

Повторюючи цю операцію ще $(r-1)$ разів, остаточно одержимо:

$$M_r = a'_{11}\, a'_{22}\, a'_{33} \dots a'_{rr} \neq 0 .$$

Отже, $\operatorname{rang} A' = r$. Згідно з теоремою 1.4 маємо, що $\operatorname{rang} A$ теж дорівнює r.

Приклад.

6. Обчислити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Віднімаємо від 3-го рядка 1-й, а від 2-го віднімаємо 1-й, помножений на 2:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Віднімаємо 3-й рядок від 4-го, а результат — нульовий рядок викреслюємо:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ділимо 2-й рядок на -2 й віднімаємо від 3-го:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $M_3 = \det A' = 1 \cdot 1 \cdot (-5/2) \neq 0$, отже, $\operatorname{rang} A' = 3$. Згідно з теоремою 1.4 $\operatorname{rang} A$ також дорівнює трьом.

Метод елементарних перетворень можна використовувати дещо інакше. А саме: перетворити матрицю A так, щоб нулю дорівнювали не тільки елементи, які стоять нижче діагоналі з елементами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr} \neq 0$ (ступінчастий вигляд), але й ті, що знаходяться вище цієї діагоналі.

Приклад.

7. Обчислити ранг матриці. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Додамо 2-й рядок до 4-го:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ділимо 4-й стовпець на 2, додаємо його до 1-го і 5-го й віднімаємо від 3-го стовпця:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ділимо 3-й стовпець на -2 і додаємо 2-й, помножений на 2:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Віднімаємо з 3-го рядка 1-й, помножений на 3, і міняємо місцями 2-й і 4-й стовпці:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третій рядок ділимо на 6, додаємо до 1-го, потім ще ділимо на 3. Четвертий рядок додаємо до 1-го, множимо на 7 і віднімаємо від 3-го:

$$A \sim \left(\begin{array}{|cccc|c} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\right).$$

Таким чином, за допомогою елементарних перетворень ми одержали послідовність так званих *еквівалентних матриць*, в останньої з яких $\operatorname{rang} A = 4$, оскільки $M_4 = \det E_4 = 1 \neq 0$.

§ 1.6 БАЗИСНИЙ МІНОР

Розглянемо матрицю $A = (a_{ij})_{mn}$, ранг якої r. Мінор r-го порядку M_r, не рівний нулю, називається *базисним мінором*. Відповідні r рядків і r стовпців називаються *базисними рядками й стовпцями*.

Теорема 1.5 *Базисні рядки (стовпці) лінійно незалежні. Будь-який інший рядок (стовпець) є лінійна комбінація базисних рядків (стовпців).*

Припустимо, що базисні рядки лінійно залежні. У цьому випадку з теореми 1.4 випливає, що один з рядків є лінійною комбінацією інших. Тоді, користуючись властивостями 5–7 визначників, виводимо, що базисний мінор дорівнює нулю. Отже, вихідне припущення неправильне, оскільки приводить до суперечності, тобто базисні рядки лінійно незалежні.

Доведемо тепер, що будь-який рядок (для стовпців доведення аналогічне) є лінійною комбінацією базисних рядків.

Припустимо, для зручності, що базисний мінор міститься в лівому верхньому куті. Це припущення не зменшує загальності доведення, оскільки переставлення місцями (перенумерація) рядків може змінити тільки знак визначника, тобто не змінює ранг мінора.

Нехай базисним мінором є:

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} .$$

Згідно з вихідним припущенням, будь-який мінор $(r+1)$-го порядку дорівнює нулю. Зокрема:

$$M_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix} = 0 . \quad (1.39)$$

Припустимо, що рядки (стовпці) мінора M_{r+1} (1.39) лінійно незалежні, тоді мінор $M_{r+1} \neq 0$ і він буде базисним. Установлена суперечність доводить теорему.

Теорема доведена.

З теореми випливає важливе твердження: *максимальне число лінійно незалежних рядків будь-якої матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних стовпців і дорівнює рангу цієї матриці.*

У цьому ракурсі розглянемо матрицю A з прикладу 7 попереднього параграфа. Ми встановили вище, що:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \ \ldots \ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця, що еквівалентна вихідній, складається з таких стовпців:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Однак, як було доведено в прикладі 2 того ж параграфа, стовпці A_1, A_2, A_3, A_4 — лінійно незалежні, отже, $\operatorname{rang} A = 4$.

Відзначимо, що стовпець A_5 є лінійною комбінацією базисних стовпців A_1, A_2, A_3, A_4:

$$A_5 = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 - 2 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 = A_1 - 2A_3 .$$

Теорема 1.6 *Для того, щоб визначник квадратної матриці n-го порядку дорівнював нулю, необхідно й достатньо, щоб його рядки (стовпці) були лінійно залежними.*

Нехай визначник дорівнює нулю: $\det A = 0$,

тоді, очевидно, $r = \operatorname{rang} A < n$, отже, в матриці A існує $(n-r)$ небазисних рядків. З теореми 1.5 випливає, що будь-який з цих рядків є лінійною комбінацією базисних рядків. Тоді з теореми 1.3 виводиться, що рядки матриці лінійно залежні.

Для доведення достатності зауважимо, що з лінійної залежності рядків випливає (теорема 1.3), що один з них є лінійною комбінацією інших. Тоді, користуючись властивостями 5–7 визначників, виводимо, що $\det A = 0$.

Теорема доведена.

§ 1.7 ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Нехай $A = (a_{ij})$ невироджена квадратна матриця довільного порядку n. Тоді *матриця* A^{-1} *називається оберненою стосовно матриці* A, якщо:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \quad , \qquad (1.40)$$

де E — одинична матриця.

Подвоєна рівність в означенні оберненої матриці вказує на те, що ліва $A_Л^{-1}$ (тобто та, що помножена на A зліва) і права $A_П^{-1}$ (тобто та, що помножена на A справа) рівні між собою. Це твердження легко доводиться, якщо, наприклад, узяти рівність, яка визначає матрицю $A_П^{-1}$:

$$AA_П^{-1} = E \quad ,$$

і помножити її зліва на $A_Л^{-1}$. Тоді:

$$A_Л^{-1}(AA_П^{-1}) = A_Л^{-1}E \quad .$$

Однак $A_Л^{-1}E = A_Л^{-1}$, а оскільки добуток матриць має асоціативні властивості, то:

$$A_Л^{-1}(AA_П^{-1}) = (A_Л^{-1}A)A_П^{-1} = EA_П^{-1} = A_П^{-1} \quad .$$

Таким чином:

$$A_П^{-1} = A_Л^{-1} \quad .$$

Тобто, *якщо квадратна матриця має обернену, то ця матриця єдина.* Цю обернену матрицю позначають A^{-1}. Слід відзначити, що означення оберненої матриці (1.40) одночасно показує, що матриця, обернена до A^{-1}, є матриця A, тобто:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad . \qquad (1.41)$$

Інакше кажучи, матриці A^{-1} і A *є взаємно обернені.*

Теорема 1.7 *Для існування оберненої матриці* A^{-1} *для квадратної матриці* A *необхідно й достатньо, щоб визначник матриці* A *не дорівнював нулю*, тобто:

$$\det A \neq 0 \quad .$$

Для доведення скористаємося теоремою 1.2, тоді якщо A^{-1} існує:

$$AA^{-1} = E \quad ,$$

$$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1}) \quad .$$

Звідки $\det(A^{-1}) = 1/\det A$, а отже, $\det A \neq 0$.
І навпаки, якщо $\det A \neq 0$ існує A^{-1}. Дійсно

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1 \qquad \text{при } \det A \neq 0 \quad .$$

Тоді

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \neq 0 \ .$$

Звідки, якщо $\det A^{-1} \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}.

Теорема доведена.

Для побудови оберненої матриці візьмемо для простоти довільну невироджену квадратну матрицю третього порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0 \ .$$

Користуючись теоремою 1.1 для першого рядка матриці, матимемо:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \det A \ .$$

Звідки

$$(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix} = \det A \ ,$$

$$(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})(A_{11}\ A_{12}\ A_{13})^T = \det A \ ,$$

$$(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{11}\ A_{12}\ A_{13})^T \ .$$

Діючи аналогічно до решти рядків, одержимо:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T \ .$$

Якщо узагальнити цю формулу на випадок матриці довільного порядку n, то одержимо:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \ . \quad (1.42)$$

Матриця, що знаходиться у правій частині виразу (1.42), називається *приєднаною* і позначається A^* (інколи $\tilde{A}$), тобто:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \qquad (1.43)$$

або
$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.44)$$

Перевіримо означення оберненої матриці A^{-1}. Якщо обчислити добуток:

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum a_{1i}A_{i1} & \sum a_{1i}A_{i2} & \dots & \sum a_{1i}A_{in} \\ \sum a_{2i}A_{i1} & \sum a_{2i}A_{i2} & \dots & \sum a_{2i}A_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{ni}A_{i1} & \sum a_{ni}A_{i2} & \dots & \sum a_{ni}A_{in} \end{pmatrix}$$

та скористатися восьмою властивістю визначників, а також формулою (1.33),
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \det A \cdot \delta_{ij},$$
то для добутку одержимо:

$$AA^* = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E.$$

Остаточно:

$$AA^{-1} = A \cdot \frac{A^*}{\det A} = \frac{1}{\det A} \cdot AA^* = \frac{1}{\det A} \det A \cdot E = E.$$

Таким чином, матриця $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^*$ задовольняє її означення (1.40).

Процес обчислення A^{-1} зручно розділити на такі етапи:

1. Обчислення $\det A$.
2. Обчислення алгебраїчних доповнень A_{ij}, для всіх $i, j = 1, 2, \dots, n$.
3. Заміна $a_{ij} \to A_{ij}$.
4. Транспонування.
5. Множення на $1/\det A$.

Приклади.

1. Дана матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Обчислити обернену матрицю A^{-1}.

1-й етап:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 ,$$

тобто обернена матриця A^{-1} існує.

2-й етап:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 ,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 ,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 ,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 ,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

3, 4-й етапи:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

5-й етап:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^{*} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E.$$

2. Дано дві матриці: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язати рівняння $AX = B$, $YA = B$.

Матриця A невироджена і

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді рішенням рівнянь будуть матриці:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7 \\ 10 & 11 \end{pmatrix},$$

$$Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -14 & 11 \end{pmatrix}.$$

Насамкінець відзначимо дві **властивості** оберненої матриці:

1. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Їх доведення побудовано на **властивостях множення** і транспонування:

(1) $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A^T) = E^T = E$,

тобто $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;

(2) $(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$,

тобто $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$.

Дуже просто можна довести єдиність оберненої матриці. Справді, припустимо протилежне, тобто існування A_1^{-1} і $A_2^{-1} \neq A_1^{-1}$, таких, що $AA_1^{-1} = A_1^{-1}A = E$ і $AA_2^{-1} = A_2^{-1}A = E$.

Обчислимо добуток:

$$A_1^{-1}AA_2^{-1} = (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = EA_2^{-1} = A_2^{-1} ,$$

але, з іншого боку:

$$A_1^{-1}AA_2^{-1} = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = A_1^{-1}E = A_1^{-1} ,$$

тобто $A_2^{-1} = A_1^{-1}$, що заперечує вихідному припущенню. Отже, обернена матриця єдина.

ВПРАВИ

1. Відомо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $C = 2A + 3B$.

2. Знайти матрицю $C = AB$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Відомо матриці A і B. Обчислити AB і BA.

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Транспонувати матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Відомо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переконатися, що $B^T A^T = (AB)^T$.

6. Довести, що, коли матриці A і B комутують, то:

1) $(AB)^n = A^n B^n$;

2) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$;

3) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

7. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

8. Довести лінійну незалежність рядків:

$$a_1 = (\ 1\ -1\ \ 2\ \ 0\ \ 1\ ), \quad a_2 = (\ 1\ \ 1\ \ 3\ -2\ \ 1\ ),$$

$$a_3 = (\ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ -1\ ), \quad a_4 = (\ 3\ \ 4\ -2\ \ 0\ \ 1\ ).$$

9. Обчислити ранг матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти матриці, обернені до матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Глава 2
Системи лінійних рівнянь

§ 2.1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.1)$$

де a_{ik}, b_i $(i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, n)$ — числові коефіцієнти, і n необов'язково збігається з m.

Розв'язком системи (2.1) називається сукупність n чисел c_1, $c_2, c_3, \ldots, c_n$, яка після підстановки замість невідомих x_1, $x_2, \ldots, x_n$ перетворює кожне рівняння системи на тотожність.

Система (2.1) називається *сумісною*, якщо існує хоча б один розв'язок, і несумісною в протилежному випадку.

Система називається *визначеною*, якщо вона має один розв'язок, і невизначеною, якщо вона має безліч розв'язків.

Система називається *однорідною*, якщо $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Очевидно така система завжди сумісна, оскільки сукупність $0, 0, \ldots, 0$ є її розв'язком. Такий розв'язок називається *тривіальним*.

Поряд з розгорнутим (2.1) користуються й іншими записами систем лінійних рівнянь.

Дуже лаконічною й зручною є матрична форма запису:

$$AX = B, \qquad (2.2)$$

де A — *матриця системи*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а X, B — матриці-стовпці:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Уведемо позначення

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

й назвемо величину x n-вимірним *вектором-стовпцем*, а y — n-вимірним *вектором-рядком*.

Тоді матриці-стовпці:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ . \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

можна розглядати як m-вимірні вектори-стовпці A_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n)$, і замість (2.1) ми одержимо так звану векторну форму запису рівнянь:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = B \tag{2.3}$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = B.$$

У деяких випадках, наприклад, при дослідженні геометричного змісту розв'язку системи, будемо використовувати скалярно-векторну форму запису:

$$\begin{cases} a_1 x = b_1, \\ a_2 x = b_2, \\ \dots\dots \\ a_m x = b_m \end{cases} \quad \text{або} \quad a_i \cdot x = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{2.4}$$

де $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ і

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — } n\text{-вимірні вектори.}$$

Дві системи рівнянь: $A_1 X = B_1$ і $A_2 X = B_2$,

де матриці A_1 і A_2 однієї розмірності, називаються *еквівалентними*, якщо вони мають однакові розв'язки й ніяких інших. Для позначення еквівалентності будемо використовувати запис:

$$A_1 X = B_1 \iff A_2 X = B_2 . \qquad (2.5)$$

Зрозуміло, що системи (2.1), (2.2), (2.3) і (2.4) еквівалентні.

Виникає питання: які перетворення вихідної системи (2.1) можна виконувати в процесі розв'язування? Очевидно, лише ті, що не порушують еквівалентності системи лінійних рівнянь. До них належать:

1. Множення рівняння на будь-яке число не рівне 0;
2. Додавання якогось рівняння системи до іншого;
3. Переставлення місцями рівнянь.

Таким чином можна зробити висновки:

Висновок 1. ***Додавання до якогось рівняння системи лінійної комбінації інших рівнянь не порушує його еквівалентність.***

Висновок 2. ***Викреслення рівняння, яке є лінійною комбінацією інших рівнянь, не порушує його еквівалентність.***

У процесі розв'язування проявом лінійної залежності рівнянь може бути поява рівняння вигляду:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0 .$$

Отже, до елементарних перетворень 1, 2 і 3 можна додати ще одне:

4. Викреслення рівняння виду $0 = 0$.

§ 2.2 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ СИСТЕМ

Якщо в системі (2.1) покласти $m = n$, то така система лінійних рівнянь називається *квадратною*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Розглянемо два методи розв'язування систем лінійних рівнянь, які властиві квадратним системам.

1. **Метод Крамера.** Припустимо, що визначник матриці системи (2.2) не дорівнює нулю, тобто $\Delta \equiv \det A \neq 0$.

Розглянемо визначник:

$$\Delta_k \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (2.7)$$

який отримується з Δ заміною k-го стовпця A_k на стовпець B.

Теорема 2.1 (теорема Крамера). *Якщо визначник матриці системи (2.6) не дорівнює нулю, то вона сумісна і має єдиний розв'язок:*

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (2.8)$$

де $\Delta \equiv \det A \neq 0$.

Запишемо систему (2.6) у матричній формі: $A \cdot X = B$.

Після множення на A^{-1} зліва одержимо:

$$A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A)X = X = A^{-1}B = \frac{A^* \cdot B}{\Delta}$$

або

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (2.9)$$

Перепишемо рівність (2.9) у розгорнутому вигляді:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n) ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n) .$$

Сума

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n = \sum_{i=1}^{n} A_{i1}b_i$$

є, очевидно, розклад Δ_1 за елементами 1-го стовпця, тобто

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} .$$

Аналогічно дістанемо:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} . \qquad (2.10)$$

Теорема доведена.

Доведемо тепер, що система (2.6) визначена. Дійсно, з умови $det\, A \neq 0$ випливає, що $rang\, A = n$, тобто всі рядки (стовпці) незалежні.

Припустимо, що в системі (2.6) є два різних розв'язки:

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad \text{і} \quad (v_1, v_2, \ldots, v_n) ,$$

тобто

$$A \cdot U = B \quad \text{і} \quad A \cdot V = B .$$

Віднімаючи перше матричне рівняння від другого, дістанемо $A(V - U) = 0$ або у векторній формі:

$$(v_1 - u_1)A_1 + (v_2 - u_2)A_2 + \ldots + (v_n - u_n)A_n = 0 .$$

Однак стовпці A_i лінійно незалежні, звідки $v_1 - u_1 = v_2 - u_2 = \ldots = v_n - u_n = 0$ або $v_i = u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, що суперечить вихідному припущенню.

Приклад.

1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 , \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 , \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 . \end{cases}$$

Знаходимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 ,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 14 .$$

Отже, згідно з (2.10) дістанемо: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0 , \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1 ,$
$x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 2 .$

Перевірка: $\begin{cases} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 , \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 , \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1 . \end{cases}$

Отже, дана система рівнянь розв'язана вірно.

2. **Матричний метод.** Розглянемо квадратну систему (2.6) у матричній формі:

$$A \cdot X = B .$$

Якщо визначник матриці системи не дорівнює нулю, то існує обернена матриця A^{-1}. Згідно з (2.9) маємо:

$$X = A^{-1} \cdot B .$$

Ця формула дуже зручна при одночасному розв'язуванні кількох систем, які мають однакові матриці системи (A), але різні стовпці правих частин (B).

Приклад.

2. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь із попереднього прикладу матричним методом.

Систему перепишемо в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

або

$$A \cdot X = B, \quad \text{де} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю: $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$

Отже, згідно з (2.9), дістанемо:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

звідки $x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$

§ 2.3 ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА – КАПЕЛЛІ

Формули Крамера й використання оберненої матриці дають можливість розв'язувати тільки квадратні системи.

При розв'язуванні систем рівнянь, в яких $m \neq n$, перш за все виникає питання про сумісність системи.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матриця системи (2.1).

Матриця

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називається *розширеною матрицею системи рівнянь.* Нехай $r = rang A$, а $\bar{r} = rang \overline{A}$. Оскільки матриця $\overline{A}$ містить у собі всі стовпці матриці A, r яких лінійно незалежні, то $\bar{r}$ не може бути меншим за r. Стовпець B може бути лінійно залежним від стовпців матриці A, тоді $r = \bar{r}$, а якщо незалежним, тоді $\bar{r} = r + 1$.

Теорема 2.2 (Теорема Кронекера — Капеллі). *Для сумісності системи лінійних рівнянь з n невідомими необхідно й достатньо, щоб ранг r матриці системи дорівнював рангу $\bar{r}$ розширеної матриці. Система є визначеною, якщо $\bar{r} = r = n$, і невизначеною, якщо $r = \bar{r} < n$.*

Нехай система сумісна, тобто існує розв'язок системи:

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

який перетворює вихідну систему рівнянь на тотожність:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n \equiv b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n \equiv b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n \equiv b_m \end{cases}$$

або
$$c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_nA_n \equiv B \ .$$

Останнє означає, що вектор-стовпець B є лінійною комбінацією стовпців матриці A і число лінійно незалежних стовпців матриць A і $\overline{A}$ однакове, тобто $r = \bar{r}$. Необхідність доведена.

Доведемо достатність. Нехай $r = \bar{r}$. З теореми про базисний мінор випливає, що $n - r$ стовпців матриці виражаються через r базисних. Оскільки $r = \bar{r}$, то мінор M_r буде базисним і для матриці $\overline{A}$, тобто $n + 1 - r$ його небазисних стовпців теж виражаються через ті самі базисні стовпці. Зокрема, стовпець B є лінійною комбінацією базисних, а отже, і всіх стовпців матриці системи, тобто існують такі $c_1, c_2, \ldots, c_n$, що
$$c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_nA_n \equiv B$$
або
$$\begin{cases} c_1a_{11} + c_2a_{12} + \ \ldots \ + c_ra_{1n} \equiv b_1, \\ c_1a_{21} + c_2a_{22} + \ \ldots \ + c_ra_{2n} \equiv b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1a_{m1} + c_2a_{m2} + \ \ldots \ + c_ra_{mn} \equiv b_m. \end{cases}$$

Останнє означає, що вихідна система має розв'язок:
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$
тобто сумісна.

Теорема доведена.

Приклади.

1. Дослідити систему рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad = -4. \end{cases}$$

Обчислюємо ранг матриці:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & -8 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

звідки $r = 4$.

Аналогічно дістаємо, що ранг розширеної матриці $r = 4$, тобто система сумісна.

2. Дослідити систему рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 = -4. \end{cases}$$

У даній системі три рівняння та дві невідомі величини. А оскільки в системі з $n+1$ рівнянь відносно n невідомих розширена матриця $\bar{A}$ буде квадратною порядку $n+1$, то тоді, щоб наша система була сумісна, за теоремою Кронекера – Капеллі, визначник матриці $\bar{A}$ мусить дорівнювати нулю. Однак визначник

$$\det \bar{A} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 77 \neq 0,$$

тому наша система несумісна.

3. Дослідити систему рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Обчислюємо визначник матриці A:
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Утім серед його мінорів є відмінний від нуля, наприклад:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

тобто, ранг матриці A дорівнює двом.

Серед визначників третього порядку матриці
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

є визначник, відмінний від нуля, наприклад:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

тобто ранг розширеної матриці $\bar{A}$ дорівнює трьом.

Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі дана система несумісна.

Насамкінець дослідимо довільну однорідну систему рівнянь

$$A \cdot X = 0 \ . \qquad (2.11)$$

Вище відзначалося, що ця система завжди сумісна. Це безпосередньо випливає з теореми Кронекера – Капеллі, оскільки стовпець B нульовий і $r = \bar{r}$.

Якщо $r = \bar{r} = n$, то з теореми випливає також, що система визначена, тобто існує тільки тривіальний розв'язок.

Отже, нетривіальний розв'язок існує, якщо $r = \bar{r} < n$.

У тому випадку, коли система (2.11) квадратна, то, очевидно, для існування нетривіального розв'язку необхідно й достатньо, щоб $\det A = 0$.

Приклад.

4. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник матриці системи:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \ .$$

Отже, існує лише тривіальний розв'язок.

§ 2.4 ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Теорема Кронекера – Капеллі лише встановлює сумісність або несумісність системи й не відповідає на запитання, як знайти розв'язок, якщо він існує.

Нехай система (2.1) сумісна, тобто $r = \bar{r}$. Припустимо також, що вона має два різних розв'язки $x \neq x$. Доведемо, що система має безліч розв'язків.

Дійсно, X і X — розв'язки, тобто:

$$AX = B \quad \text{і} \quad AX = B .$$

Тоді

$$\lambda AX = A(\lambda X)\lambda B ,$$

$$(1-\lambda)AX = A[(1-\lambda)X] = (1-\lambda)B ,$$

де λ — довільне число.

Після додавання дістанемо:

$$\lambda AX + (1-\lambda)AX = A[\lambda X + (1-\lambda)X] =$$

$$= \lambda B + (1-\lambda)B = B ,$$

$$A[\lambda X + (1-\lambda)X] = B . \tag{2.12}$$

Рівність (2.12) означає, що $\lambda X + (1-\lambda)X$ також є розв'язок системи (2.1) при будь-яких λ, тобто система має безліч розв'язків.

Оскільки $rang\, A = r$, то в матриці A є r лінійно незалежних рядків. Усі інші $m-r$ є лінійні комбінації r базисних рядків. Те саме буде справедливо й стосовно $\bar{A}$.

Лінійна залежність $m-r$ рядків матриці $\bar{A}$ означає лінійну залежність $m-r$ рівнянь від r базисних рівнянь (рівнянь, що відповідають r базисним рядкам $\bar{A}$).

Припустимо, для зручності, що базисними є перші r рівнянь. Тоді можна відкинути решту $m-r$ рівнянь і дістати вивідну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{2.13}$$

яка еквівалентна початковій системі.

Таким чином, для того щоб розв'язати початкову систему, достатньо розв'язати систему, яка складається тільки з лінійно незалежних рівнянь.

Якщо система (2.13) квадратна, тобто $r = n$, то, очевидно, визначник матриці системи не дорівнює нулю (усі рядки лінійно незалежні) і єдиний розв'язок можна дістати, наприклад, за допомогою формул Крамера або оберненої матриці.

Розглянемо тепер випадок, коли $r = \bar{r} < n$, тобто система рівнянь невизначена.

Не зменшуючи загальності дослідження, будемо вважати, що базисним є мінор M_r, розташований у лівому верхньому куті, тобто базисними будуть перші r рядків і стовпців матриці $\bar{A}$.

У кожному рівнянні системи (2.13) залишаємо тільки перші r невідомих, а решту переносимо в праву частину:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{2.14}$$

Таким чином, ми дістали систему r лінійно незалежних рівнянь, в яких праві частини містять $n - r$ невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n.

Невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_r$ будемо називати *базисними*, а невідомі x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n — *вільними*.

Надаючи вільним невідомим x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n довільних числових значень c_{r+1}, c_{r+2}, ..., c_n, ми замість (2.14) дістанемо квадратну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = \tilde{b}_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = \tilde{b}_r, \end{cases} \tag{2.15}$$

де $\tilde{b}_i = b_i - a_{ir+1}c_{r+1} - \ldots - a_{in}c_n$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Система (2.15) має, очевидно, тільки один розв'язок, який можна дістати, наприклад, методом Крамера.

Отже, будь-якому довільному набору вільних невідомих x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n відповідає єдиний розв'язок системи (2.14), тобто при $r = \bar{r} < n$ система рівнянь має безліч розв'язків.

Кожний із цих розв'язків будемо називати *окремим* або *частинним* розв'язком.

Загальним розв'язком системи (2.1) називається розв'язок, в якому всі базисні невідомі виражаються через вільні.

Очевидно, що загальний розв'язок системи (2.1) можна одержати, розв'язавши еквівалентну їй систему (2.14).

Розв'язок системи (2.14)

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn}x_n \end{cases} \tag{2.16}$$

де α_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \ldots, r, j = 1, 2, \ldots, n)$ — числові коефіцієнти є таким чином загальним розв'язком вихідної системи (2.1).

Зрозуміло, що за допомогою загального розв'язку можна дістати будь-який частинний розв'язок.

Частинний розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних змінних, називається *базисним розв'язком*.

Приклади.

1. Знайти загальний та базисний розв'язки системи:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ -x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 12, \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

Для скорочення запишемо початкову систему у вигляді розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 6 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 5 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & 6 & -2 & 12 \\ -2 & 4 & -4 & 4 & -2 \end{array}\right),$$

де стовпець B для зручності відокремлено рискою. Відзначимо, що це є не що інше як розширена матриця системи.

Обчислюємо $rang\,\overline{A}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 6 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 42 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 42 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -42 \end{array}\right).$$

Очевидно, що $rang\,A = rang\,A' = 3$, оскільки три останніх рядки (рівняння) пропорційні й два з них можна викреслити. Отже, дістанемо систему, яка еквівалентна початковій:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 42 \end{array}\right) \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_3 + 4x_4 = 21. \end{cases}$$

Невідомі x_1, x_2, x_3 можна вибрати як базисні, оскільки:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

Переносячи вільну невідому x_4 у правий бік рівнянь і розв'язуючи утворену систему, дістаємо загальний розв'язок вихідної системи:

$$\begin{cases} x_1 = -9 + 4x_4, \\ x_2 = \dfrac{11}{2} - x_4, \\ x_3 = \dfrac{21}{2} - 2x_4 \end{cases} \quad \text{або} \quad x_{заг.} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 + 4x_4 \\ \dfrac{11}{2} - x_4 \\ \dfrac{21}{2} - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

При значенні $x_4 = 0$ дістанемо базисний розв'язок: $x_1 = -9$, $x_2 = 11/2$, $x_3 = 21/2$, $x_4 = 0$ або:

$$X_{баз} = \begin{pmatrix} -9 \\ \dfrac{11}{2} \\ \dfrac{21}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що $X_{баз}$ є розв'язок вихідної системи.

Дійсно:

$$A \cdot X_{баз} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 & -1 \\ -1 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 5 & -3 \\ 2 & -6 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ \dfrac{11}{2} \\ \dfrac{21}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} = B .$$

2. Знайти загальний розв'язок попередньої системи з іншим базисом.

З'ясуємо, чи існують (крім $M_3^{(1)}$) мінори 3-го порядку не рівні нулю. Так,

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \qquad M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0,$$

тобто як базисні можна вибрати невідомі x_1, x_3, x_4 або x_2, x_3, x_4. Нехай, наприклад, x_1, x_3, x_4 — новий базис. Переносячи x_2 у праву частину рівнянь, дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 - x_4 = 5 + 7x_2, \\ x_3 + x_4 = 5 + x_2, \\ 2x_3 + x_4 = 21. \end{cases}$$

Вилучаючи x_4 з 1-го і 3-го рівнянь, дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \qquad = 13, \\ \qquad x_2 + x_4 = \frac{11}{2}, \\ -x_2 + x_3 \quad = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = 13 - 4x_2, \\ x_3 = -\frac{1}{2} + x_2, \\ x_4 = \frac{11}{2} - x_2, \end{cases}$$

що є новим загальним розв'язком початкової системи.

§ 2.5 МЕТОДИ ВИКЛЮЧЕННЯ

Виведені вище формули розв'язування системи лінійних рівнянь мають дуже простий вигляд:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad \text{(метод Крамера)} ,$$
$$X = A^{-1} \cdot B \quad \text{(матричний метод)} , \tag{2.17}$$

але вони інколи малопридатні для розв'язування систем з немалою кількістю невідомих. Наприклад, для розв'язування квадратної системи з 5 невідомими необхідно обчислити 6 визначників 5-го порядку, кожний з яких є сумою 5! доданків, а кожний доданок — добутком 5 множників. Тільки кількість необхідних операцій множення є

$$6 \cdot 5! \cdot 4 = 2880 .$$

Зрозуміло, що для ще більших n труднощі числових обчислень стають практично непереборними.

У цьому параграфі ми розглянемо так звані методи виключення, які ґрунтуються на елементарних перетвореннях (див. § 1.5).

Як відомо, елементарні перетворення дають можливість дістати систему, яка еквівалентна початковій.

1. Метод Ґаусса. Нехай задано систему лінійних рівнянь (2.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases}$$

Для зручності припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Поділивши почленно перше рівняння на a_{11}, дістанемо:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}} .$$

Помноживши це рівняння на a_{21} і віднімаючи від другого рівняння, дістанемо

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3 + \ldots +$$
$$+ \left(a_{2n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}}a_{21}\right)x_n = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}$$

або скорочено

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 .$$

Після аналогічних перетворень решти рівнянь дістанемо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{2.18}$$

Таким чином, ми виключили невідому x_1 з усіх рівнянь, крім 1-го. Перше рівняння на цьому кроці було вибране як *ведуче рівняння*, а відмінний від нуля коефіцієнт як *ведучий коефіцієнт* (або *ведучий елемент*).

Виберемо тепер нове ведуче рівняння. Якщо $a'_{22} \neq 0$, то за ведуче можна вибрати друге рівняння, а елемент a'_{22} вважати ведучим елементом.

Поділивши друге рівняння на a'_{22}, дістанемо:

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \ldots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}x_n = \frac{b'_2}{a'_{22}}.$$

Помноживши це рівняння на a'_{32}, потім на a'_{42}, …, потім на a'_{n2} і віднімаючи відповідно від 3-го, 4-го, …, n-го рівняння, дістанемо еквівалентну систему:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{2.19}$$

Отже, після другого кроку ми виключили ще одну невідому — з усіх рівнянь, крім 1-го і 2-го.

Продовжуючи й далі цей процес, ми можемо дістати таке рівняння:

$$0 \cdot x_s + 0 \cdot x_{s+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = b_s \neq 0 \;, \tag{2.20}$$

наявність якого свідчить про те, що система несумісна ($r \neq \bar{r}$).

Якщо з'явиться рівняння:

$$0 \cdot x_s + 0 \cdot x_{s+1} + \ldots + 0 \cdot x_n = 0 \;, \tag{2.21}$$

то його треба відкинути (при цьому буде вже $r = \bar{r} < n$) і продовжити процес елементарних перетворень.

Якщо $r = \bar{r} = n$, то не більше аніж через r кроків ми дістанемо таку систему:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = b'_m. \end{cases} \qquad (2.22)$$

З останнього рівняння дістаємо x_n, потім з $(n-1)$-го — x_{n-1} тощо, тобто знаходимо єдиний розв'язок.

Якщо $r = \bar{r} < n$, то замість верхньотрикутної системи (2.22) ми дістанемо трапецієподібну систему:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r. \end{cases} \qquad (2.23)$$

Переносячи невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ у праву частину рівнянь, тобто вибираючи їх як вільні, а невідомі $x_1, x_2, \ldots x_r$ як базисні, дістаємо загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1n}x_n, \\ x_2 = b'_2 - a'_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b'_r - a'_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a'_{rn}x_n. \end{cases}$$

Розглянутий метод називається методом Ґаусса.

Відзначимо, що перехід від (2.1) до (2.22) або (2.23) є *прямий хід* методу Ґаусса, а процес розв'язування систем (2.22) і (2.23) — *зворотний хід* методу Ґаусса.

Приклади.

1. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Віднімаючи перше рівняння від другого та додаючи до третього й четвертого дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 4, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

Наявність рівняння типу (2.20) (третє рівняння) доводить несумісність системи.

2. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Виключаємо x_1 із другого та третього рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

і переставляємо місцями друге та третє рівняння:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

Тепер зворотний хід: $x_3 = -1 + x_4$.

З другого рівняння дістаємо $x_2 = 3 - x_4$, а з першого: $x_1 = 5 - 2x_4$.

Отже,

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_4, \\ x_2 = 3 - x_4, \\ x_3 = -1 + x_4 \end{cases}$$

є загальний розв'язок системи.

3. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 3x_2 = -3. \end{cases}$$

Як видно, ця система дещо складніша щодо розв'язування, тому перейдемо до скороченої форми запису:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 8 & -10 & 14 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -5 & 7 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -5 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -5 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Зворотним ходом дістанемо розв'язок: $x_1 = 27/4$, $x_2 = 13/4$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$.

2. Метод Жордана – Ґаусса. Цей метод відрізняється від методу Ґаусса тим, що ведуча невідома x_k вилучається не тільки з $(k+1)$-го, $(k+2)$-го, …, n-го рівнянь, але й з усіх попередніх рівнянь.

Таким чином, сумісну систему можна перетворити на таку (порівняйте з (2.23)):

$$\begin{cases} x_1 + \ldots\ldots\ldots + x_r + a'_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad x_2 + \ldots\ldots + x_r + a'_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad x_3 + \ldots + x_r + a'_{3r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r. \end{cases} \tag{2.24}$$

Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Жордана – Ґаусса виконується за такою схемою:

1) обирається ведуче рівняння та ведуча невідома;
2) ведуче рівняння ділиться на ведучий коефіцієнт;
3) ведуче рівняння множать по черзі на коефіцієнти при ведучій невідомій в інших рівняннях і віднімають від відповідних рівнянь.

У результаті через r кроків одержимо систему (2.24), для знаходження загального розв'язку достатньо лише перенести вільні невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ у праву частину рівнянь.

Приклад.

4. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$$

Записавши розширену матрицю системи, виконаємо перетворення:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{10} \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{79}{8} \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

або
$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{11}{10}, \\ x_2 = -\dfrac{79}{30} + \dfrac{2}{5}x_5, \\ x_3 = -\dfrac{7}{2} + x_5, \\ x_4 = -\dfrac{7}{3} + \dfrac{2}{3}x_5, \end{cases}$$

тобто система невизначена.

Відзначимо також, що перевагою методів виключення є те, що процес розв'язування є водночас і процесом дослідження системи рівнянь.

У § 2.2 відзначалося, що матричний метод зручний при розв'язуванні кількох систем з однаковими матрицями системи при $\det A \neq 0$, оскільки формула (2.9) для розв'язків буде відрізнятися лише стовпцями B.

Розглянемо, наприклад, три системи лінійних рівнянь, які відрізняються лише стовпцями вільних членів:

$$AX = B_1, \quad AX = B_2 \quad \text{і} \quad AX = B_3 .$$

Легко переконатися, що методи виключення, наприклад, метод Жордана – Ґаусса, дає можливість одночасного розв'язування всіх трьох систем.

Дійсно, замість $(A\,|\,B_1)$, $(A\,|\,B_2)$, $(A\,|\,B_3)$

можна утворити матрицю

$$(A\,|\,B_1\,|\,B_2\,|\,B_3)\,, \tag{2.25}$$

елементарні перетворювання якої дадуть розв'язки всіх трьох систем, одночасно.

Приклад.

5. Розв'язати системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = -7. \end{cases}$$

Виписуємо матрицю аналогічну (2.25) $(A\,|\,B_1\,|\,B_2)$ і застосовуємо метод Жордана –Ґаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 1 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

тобто розв'язком початкових систем будуть

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

§ 2.6 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ВИКЛЮЧЕННЯ

Методи виключення можна застосовувати також для обчислення визначників та знаходження оберненої матриці.

1. Обчислення визначників. Як відомо, визначник квадратної матриці A можна розкласти за елементами будь-якого рядка (стовпця) згідно з формулою (1.33):

$$det\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \qquad \text{або} \qquad det\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} .$$

Цю суму можна звести до одного доданка, якщо спочатку перетворити визначник таким чином, щоб утворився рядок (стовпець), в якому є тільки один елемент, що не дорівнює нулю (порівняйте з методом Жордана – Ґаусса при розв'язуванні систем рівнянь).

Якщо те саме зробити з визначником ($n-1$)-го порядку, то дістанемо визначник ($n-2$)-го порядку тощо.

Приклад.

1. Обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} .$$

Найпростіше утворити необхідний стовпець на місці першого, оскільки там уже є три нулі.

Обчислюємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^{5} a_{ij} A_{j1} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} +$$

$$+ 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} + 0 \cdot A_{51} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 & 4 \\ -4 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 & 13 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & 13 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-9) = 36 \; .$$

2. Обчислення оберненої матриці. Нагадаємо, що матриця A називається оберненою до матриці A^{-1}, якщо:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \; .$$

Нехай $A = (a_{ij})_{nn}$, $A^{-1} = (a_{ji}^{-1})_{nn}$, тоді з цієї рівності випливає:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} a_{j1}^{-1} = \delta_{i1} , \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} a_{jn}^{-1} = \delta_{in} . \end{cases} \tag{2.26}$$

Запишемо в розгорнутому вигляді, наприклад, першу суму:

$$\begin{cases} a_{11} a_{11}^{-1} + a_{12} a_{21}^{-1} + \dots + a_{1n} a_{n1}^{-1} = 1 , \\ a_{21} a_{12}^{-1} + a_{22} a_{22}^{-1} + \dots + a_{2n} a_{n2}^{-1} = 0 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{1n}^{-1} + a_{n2} a_{2n}^{-1} + \dots + a_{nn} a_{nn}^{-1} = 0 . \end{cases}$$

Очевидно, що цю систему можна розглядати як систему лінійних рівнянь відносно невідомих a_{11}^{-1}, a_{21}^{-1}, …, a_{n1}^{-1}, тобто елементів першого стовпця матриці A^{-1}. Аналогічний висновок дає розгляд 2-ї, 3-ї, …, n-ої суми у (2.26). Таким чином, для визначення елементів стовпців матриці A^{-1} треба розв'язати n систем рівнянь:

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right), \quad \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right), \quad \dots, \quad \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right) .$$

Як було показано вище, ці системи можна розв'язувати одночасно. Із цією метою утворюємо матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \quad \text{або} \quad (A \,|\, E) .$$

Розв'язуючи ці системи методом Жордана – Ґаусса, дістанемо:

$$(A\,|\,E) \sim \ldots \sim (E\,|\,A^{-1}) .$$

Приклад.

2. Є матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Знайти обернену матрицю A^{-1}.

Утворюємо матрицю $(A\,|\,E)$ і виконуємо перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right) ,$$

тобто

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

ВПРАВИ

1. Розв'язати систему матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 = 7. \end{cases}$$

3. Розв'язати рівняння:

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Розв'язати рівняння:

$$XA = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 15 & 7 & -6 \\ 7 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати системи методом Жордана – Ґаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

6. Розв'язати систему (знайти загальний і базисний розв'язки)

$$AX = B:$$

$$1)\ A = \left(\begin{array}{rrrrrrrr|r} -2 & 3 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A = \left(\begin{array}{rrrrrrrr|r} 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. Розв'язати системи:

$$1)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} y_1 - y_2 + y_3 - y_4 + y_5 = -1, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_4 - y_5 = 3, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 = 2. \end{cases}$$

Рекомендація: використати метод одночасного розв'язування систем з однаковою матрицею.

8. Користуючись методом виключення, обчислити визначники:

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Користуючись методом виключення, обчислити матриці, обернені до матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти загальний розв'язок систем у базисі (x_1, x_4, x_5):

$$1)\ \begin{cases} 7x_1 - 12x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 22, \\ 17x_1 - 29x_2 + 3x_3 + 9x_4 + x_5 = -18, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_4 - x_5 = 14, \\ 2x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 20; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 2x_2 - 5x_3 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 19, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 10x_4 - 2x_5 = 5, \\ x_2 - 3x_3 - x_5 = -1. \end{cases}$$

Глава 3
Комплексні числа

§ 3.1 СИСТЕМА ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Учні середніх шкіл починають знайомитися з математикою з арифметики, де першим об'єктом вивчення є цілі додатні числа. Такі числа називаються *натуральними*. Множина натуральних чисел позначається N, тобто $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Надалі вводяться від'ємні числа, а також нуль. Таким чином з'являється перша серед найважливіших числових систем — *система цілих чисел*, до якої входять цілі додатні та від'ємні числа, а також число нуль. Множина цілих чисел позначається Z, тобто

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \qquad (N \subset Z) .$$

Більш широкою системою чисел є *система раціональних чисел*, до якої входять усі цілі числа та всі дробові числа як додатні, так і від'ємні. Множина раціональних чисел позначається Q і може бути записана у вигляді $\pm p/q$, де p і q — натуральні числа 1, 2, …, n (у множину Q включають також число 0), тобто

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in Z, \quad q \in N \right\} \quad (N \subset Z \subset Q) .$$

Якщо записати дійсне число у вигляді десяткового дробу, то десятковий дріб раціонального числа $\pm p/q$ буде кінцевим, якщо знаменник q нескоротного дробу p/q ділиться без остачі на числа 1, 2, 5, і нескінченно періодичним у решті випадків.

Числа $\pm p/q$, де дріб $\pm p/q$ нескінченний і неперіодичний, називається *ірраціональними* числами. Така множина чисел позначається I. До неї входять такі відомі широковживані числа, як $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$, $\pi = 3,14159\ldots$, $e = 2,71828\ldots$ тощо.

Раціональні та ірраціональні числа разом утворюють *систему дійсних чисел*. Множина всіх дійсних чисел позначається R, тобто

$$R = Q \cup I (N \subset Z \subset Q \subset R,\ I \subset R) .$$

Множина R усіх дійсних чисел має такі **властивості**:

1. *Упорядкованість*, тобто поміж будь-якими двома числами a і b має місце одне й тільки одне з трьох відношень: $a < b$, $a = b$, $a > b$;
2. *Щільність*, тобто поміж будь-якими двома дійсними числами, якою б малою не була різниця між ними, знаходиться нескінченна множина проміжних дійсних чисел x (як раціональних, так і ірраціональних), тобто чисел, що задовольняють нерівності $a < x < b$;
3. *Неперервність*, тобто при будь-якому розбитті дійсного числа завжди знайдеться таке число x, яке буде єдиним на межі цього розбиття (*теорема Дедекінда*).

У всіх розділах математики користуються зображенням дійсних чисел у вигляді точок числової осі, тобто між множиною дійсних чисел з одного боку та множиною всіх точок прямої існує взаємно однозначна відповідність: при заданому початку координат й одиниці масштабу кожній точці прямої ставиться у відповідність її абсциса. Це зображення настільки звичне, що, як правило, не робиться різниці між дійсним числом і точкою, і ми надалі замість слів "число x_0" часто будемо вживати "точка x_0".

Усяка скінченна або нескінченна сукупність дійсних чисел називається *числовою множиною*. Числові множини позначаються великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z, ..., а числа, які їм належать — тими самими маленькими літерами x, y, z, ... Належність числа x множині X позначається за допомогою символу $x \in X$.

Окреми види числових множин.

1. Множина X містить у собі всі числа x, розташовані між a і b, включаючи їх самих: $a \le x \le b$. Така множина називається *відрізком* (оскільки вона зображається відрізком на числовій осі) або *замкненим інтервалом* і позначається $X = [a, b]$.

2. Множина X містить у собі всі числа x, розташовані між двома числами a і b, за винятком їх самих: $a < x < b$. Така множина називається *проміжком* або *незамкненим інтервалом* і позначається $X = (a, b)$.

3. Множина X містить у собі всі числа x, які відповідають нерівностям $a \le x < b$ або $a < x \le b$. Такі множини називаються *напіввідрізками* і позначаються відповідно $[a, b)$, $(a, b]$. Квадратна дужка ставиться з боку того кінця напіввідрізка, який входить у множину, а кругла — з боку того кінця, який не входить у множину.

4. Множина X містить у собі всі числа x, які відповідають нерівностям $x < b$, $x \le b$, $x > a$, $x \ge a$. Такі множини нескінченно довгі. Обмежені з одного кінця проміжки й напіввідрізки позначаються відповідно $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$. На числовій осі ці множини зображаються всіма точками нескінченної напівпрямої.

5. Множина X містить у собі всі дійсні числа, тобто відповідає нерівності $-\infty < x < +\infty$. Вона позначається $(-\infty, +\infty)$.

§ 3.2 СИСТЕМА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

За математичними джерелами, що дійшли до нашого часу, першим, хто зіткнувся з коренем квадратним з від'ємного числа, був відомий грецький математик Герон Александрійський (I ст. н. е.) при обчисленні висоти правильної чотирикутної зрізаної піраміди. Однак від'ємні числа в Стародавній Греції на той час не існували, тому й коренів з від'ємних чисел ніхто не розглядав. Індійські математики, хоча й визнавали від'ємні числа, але вважали, що квадратні корені з від'ємних чисел не існують.

Уперше комплексні числа зустрічаються в праці італійського математика Д. Кардано (1501–1576) «Велике мистецтво або про алгебраїчні правила», яка в основному присвячена викладу загальних способів розв'язування рівнянь 3-го та 4-го степенів. Кардано розв'язував задачу, яка зводиться до розв'язування квадратного рівняння (в сучасних позначеннях):

$$x^2 - 10x + 40 = 0 \quad .$$

Утім способу поширити розв'язування квадратних рівнянь на випадок, коли підкореневий вираз є від'ємним числом, Кардано до кінця не розвинув, уважаючи, що знайдені ним корені "хибні". Комплексні числа він назвав "софістичними".

Згадка про комплексні числа є також у «Геометрії» французького математика Р. Декарта (1596–1650), але він не вважав їх справжніми й тому назвав "уявними". Ця назва закріпилася за ними назавжди.

У 1794 році була надрукована книга видатного математика Л. Ейлера (1707–1783), в якій уперше замість $\sqrt{-1}$ уживається загальноприйняте зараз позначення i. До цього часу буква i вживалася в математиці для позначення нескінченності (тепер ми пишемо ∞) та для позначення приросту змінної величини (тепер уживаються позначення Δx, Δy тощо). Ейлеру належить також пропозиція записувати комплексні числа $a + b\sqrt{-1}$ у вигляді $a + bi$. Після того, як німецький математик К. Ґаусс (1777–1855) у 1831 році почав широко вживати такий запис, він став загальноприйнятим. Ґауссу належить також термін "комплексне число".

Таким чином, якщо поняття натурального числа формувалося безпосередньо на базі уявлень, набутих у результаті сприймання реального світу, то поняття комплексного числа виникло на основі раніше сформованих понять за допомогою раніше створених теорій. Комплексні числа, з'явившись спочатку в самій математиці як корені рівнянь виду $x^2 + a = 0$ (де $a > 0$), після набуття ними геометричного тлумачення (датський землемір Г. Вессель (1745–1818)), почали широко застосовуватись у різних галузях математики.

Історично комплексні числа з'явилися у зв'язку з розв'язуванням квадратних рівнянь із дійсними коефіцієнтами. Найпростіше з них, яке не має коренів серед дійсних чисел, це:

$$x^2 + 1 = 0 \quad . \qquad (3.1)$$

Таким чином, виникла проблема розширення системи дійсних чисел до такої системи чисел, в якій рівняння (3.1) мало б корінь.

За аналогією до того, як дійсні числа зображаються точками на лінії, комплексні числа будемо зображати точками на площині.

Нехай на площині є прямокутна система координат. Умовимося позначати точку площини через z, а записувати точку z з абсцисою x і ординатою y через (x, y), тобто:

$$z = (x, y) \; . \tag{3.2}$$

Сумою двох чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ і $z_2 = (x_2, y_2)$ будемо називати точку з абсцисою $x_1 + x_2$ і ординатою $y_1 + y_2$, тобто:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2) \; . \tag{3.3}$$

Добутком двох чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ і $z_2 = (x_2, y_2)$ будемо називати точку з абсцисою $x_1 x_2 - y_1 y_2$ і ординатою $x_1 y_2 + y_1 x_2$, тобто:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, \; x_1 y_2 + y_1 x_2) \; . \tag{3.4}$$

Система чисел, яка зображається точками площини, і операції над якими виконуються за формулами (3.3) і (3.4) називається *системою комплексних чисел*.

Легко переконатися, користуючись формулами (3.3)–(3.4), що ці операції мають усі основні властивості, які притаманні операціям системи дійсних чисел:

1. *Комутативність суми*:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \; ; \tag{3.5}$$

2. *Асоціативність суми*:

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) &= \\ = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) &= \\ = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + (x_3, y_3) \; ; \end{aligned} \tag{3.6}$$

3. *Комутативність добутку*:

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_2, y_2)(x_1, y_1) \; ; \tag{3.7}$$

4. *Асоціативність добутку*:

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1)(x_2, y_2))(x_3, y_3) &= \\ = (x_1, y_1)((x_2, y_2)(x_3, y_3)) \; ; \end{aligned} \tag{3.8}$$

5. *Дистрибутивність*:

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2))(x_3, y_3) &= \\ = (x_1, y_1)(x_3, y_3) + (x_2, y_2)(x_3, y_3) \; . \end{aligned} \tag{3.9}$$

З операцій (3.3)−(3.4) випливає решта загальноприйнятих у математиці понять.

Різницею двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ та $z_2 = (x_2, y_2)$ є число:

$$(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \quad (3.10)$$

Нулем у системі комплексних чисел є початок координат:

$$0 = (0, 0) \quad (3.11)$$

Протилежним комплексним числом стосовно даного комплексного числа $z = (x, y)$ є:

$$-z = -(x, y) = (-x, -y) \quad (3.12)$$

Часткою двох комплексних чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ та $z_2 = (x_2, y_2)$ (за умови, що $z_2 \neq 0$) є комплексне число:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \quad (3.13)$$

Слід зауважити, якщо в (3.13) покласти $z_1 = z_2$, то одержимо одиницю в системі комплексних чисел (1,0). Тобто *одиницею* в системі комплексних чисел є точка (1,0), яка розташована на осі абсцис на відстані 1 праворуч від початку координат:

$$1 = (1, 0) \quad (3.14)$$

З формули (3.13) випливає також поняття *оберненого* комплексного числа. Якщо в (3.13) покласти $z_1 = 1 = (1, 0)$ (за умови, що $z_2 \neq 0$), то:

$$z_2^{-1} = \frac{1}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \quad (3.15)$$

Означивши основні операції в системі комплексних чисел, а також основні властивості та всі інші операції і поняття, які є наслідками цих формул, можна легко прийти до висновку, що система комплексних чисел є розширенням системи дійсних чисел. Розглянувши точки, які розташовані на осі абсцис,тобто вигляду $(x, 0)$, і поставивши у відповідність їм дійсні числа x, ми, очевидно, одержимо взаємно однозначну відповідність між розглянутою множиною комплексних точок і множиною всіх дійсних чисел. Застосовуючи до цих точок формули (3.3)−(3.4), одержимо:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

тобто точки $(x, 0)$ додаються й перемножуються між собою як відповідні їм дійсні числа. Таким чином, якщо розглядати множину точок, які розташовані на осі абсцис, як частину системи комплексних чисел, то за своїми властивостями комплексні числа нічим не відрізняються від системи дійсних чисел. Звідси можна зробити висновок, що дійсне число x і комплексне число $(x, 0)$ між собою не відрізняються:

$$(x, 0) = x \quad . \tag{3.16}$$

Окремим випадком цієї рівності є нуль (0,0) і одиниця (1,0) в системі комплексних чисел, які є звичайними 0 і 1 в системі дійсних чисел.

Покажемо тепер, що серед комплексних чисел перебуває корінь рівняння (3.1), тобто таке число, квадрат якого дорівнює дійсному числу -1. Візьмемо точку (0,1), тобто точку, яка лежить на осі ординат на відстані 1 угору від початку координат. Дійсно, користуючись правилом множення (3.4), одержимо:

$$(0, 1)\cdot(0, 1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1, 0) = -1 \quad .$$

Ця точка позначається в математиці літерою i:

$$(0, 1) = i \quad , \tag{3.17}$$

отже:

$$i^2 = -1 \quad .$$

Звідки знаходимо $i = \sqrt{-1}$. Комплексне число i називається *уявною одиницею*. Комплексні числа, які дорівнюють добутку дійсного числа на i, наприклад, $2i$, $3i$ тощо, називаються чисто уявними числами.

Слід відзначити, що позначення уявної одиниці латинською літерою i, тобто $i \equiv \sqrt{-1}$, запроваджене Л. Ейлером (1707–1783) у 1777 році, завдяки широкому вживанню його в наукових працях видатного німецького вченого К. Ґаусса (1777–1855) з початку XIX століття є загальноприйнятим у математиці. Однак інколи, наприклад, в електротехніці, де літера i використовується для позначення фундаментальної величини даного розділу науки, а саме — сили електричного струму, для позначення уявної одиниці вживається латинська літера j, тобто $j \equiv \sqrt{-1}$.

Запроваджений нами запис комплексного числа $z = (x, y)$ згідно з його означенням (3.2) може набувати іншої форми. Дійсно, знайдемо спочатку добуток дійсного числа y на число i. Дійсне число y це згідно з (3.16) $(y, 0)$, а i це згідно з (3.17) (0,1). Тоді згідно з (3.4) маємо:

$$y \cdot i = (y, 0)\cdot(0, 1) = (0, y) \quad .$$

Ця точка знаходиться на осі ординат і має ординату y (можна сказати в уявних одиницях). Тоді, оскільки згідно з (3.3) довільна точка (x, y) може бути записана:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) \quad ,$$

то одержимо:

$$(x, y) = x + iy \quad . \tag{3.18}$$

Цей запис комплексних чисел відомий усім ще із середньої школи і називається *алгебраїчною формою комплексного числа.* При цьому x та y — дійсні числа; x називається *дійсною частиною комплексного числа* z і позначається так: $x = Re\,z$, а оскільки y є коефіцієнтом при уявній одиниці, то y називається *уявною частиною комплексного числа* z і позначається так: $y = Im\,z$. Таким чином:

$$z = Re\,z + i\,Im\,z \ . \qquad (3.19)$$

При цьому слід пам'ятати, що суму та добуток комплексних чисел, записаних в алгебраїчній формі (3.18) (або (3.19)), слід розуміти на основі означених нами операцій при побудові системи комплексних чисел.

Насамкінець необхідно зазначити, що за умови збереження запровадженої нами аксіоматики операцій додавання та добутку, побудова комплексних чисел на площині, тобто у двовимірному просторі x та y, не переноситься на жодний із випадків простору більшої вимірності. Принципово неможливо побудувати аналогічну систему чисел у тривимірному просторі. Якщо ж відмовитися від комутативності множення, то така побудова стає можливою в чотиривимірному просторі. Ця система називається *системою кватерніонів.* Якщо ж далі відмовитися від асоціативності добутку, то з'являється можливість побудувати аналогічну систему у восьмивимірному просторі. Вона називається *системою чисел Келі.*

§ 3.3 АЛГЕБРАЇЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Форма запису комплексного числа:
$$z = x + iy \quad , \qquad (3.20)$$
називається *алгебраїчною*, де, як уже було сказано вище, $x = \operatorname{Re} z$ — дійсна частина комплексного числа, а $y = \operatorname{Im} z$ — уявна частина комплексного числа, $i = Im(0, 1)$ — уявна одиниця. Інколи з метою конкретизування (тобто фіксованості) комплексного числа в алгебраїчній формі його записують ще й так:
$$z = a + ib \ . \qquad (3.21)$$

Операції над комплексними числами, записаними в алгебраїчній формі, випливають безпосередньо з формул (3.3)–(3.4).

1. **Рівність** комплексних чисел. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними, тоді й тільки тоді, коли рівні їх дійсні й уявні частини:
$$\begin{cases} x_1 = x_2 , \\ y_1 = y_2 . \end{cases} \qquad (3.22)$$

Таким чином рівність $z_1 = z_2$ і рівності (3.22) рівносильні, тобто одна "комплексна рівність" еквівалентна двом "дійсним рівностям".

Слід зауважити, що поняття більше або менше для комплексних чисел не існує.

2. **Алгебраїчною сумою** двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число:
$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \ . \qquad (3.23)$$

Таким чином, можна сказати, що при додаванні або відніманні комплексних чисел додаються або віднімаються окремо їхні дійсні частини й окремо їхні уявні частини.

3. **Добутком** двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число:
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \ . \qquad (3.24)$$

Приклади.

1. При яких значеннях x та y виконується рівність
$$x(2 - i) + y(2i - 1) = 4 - 5i \ ?$$

Користуючись формулою (3.22), знаходимо:

$$(2x - y) + i(-x + 2y) = 4 - 5i \ ,$$

$$2x - y = 4 \ , \qquad -x + 2y = -5 \ .$$

Звідки $x = 1 \ , \quad y = -2 \ .$

2. Знайти суму та добуток комплексних чисел $z_1 = 2 - 7i$ та $z_2 = 3 + 5i$.

Використовуючи формули (3.23) та (3.24), знаходимо:

$$z_1 + z_2 = (2 - 7i) + (3 + 5i) = (2 + 3) + i(-7 + 5) = 5 - 2i \ ,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 7i) \cdot (3 + 5i) = (2 \cdot 3 - (-7) \cdot 5) + \\ + i(2 \cdot 5 + (-7) \cdot 3) = 41 - 11i \ .$$

Формули для суми, різниці та добутку комплексних чисел можна одержати автоматично, якщо формально виконати відповідні дії над двочленами $x_1 + iy_1$ та $x_2 + iy_2$ із заміною при цьому i^2 на -1.

Піднесення комплексного числа до степеня утворюється за формулами піднесення до степеня двочлена за умови, що:

$$i^1 = i \ , \qquad i^2 = -1 \ , \qquad i^3 = -i \ , \qquad i^4 = 1 \ . \qquad (3.25)$$

Формули (3.25) можна легко узагальнити на випадок цілих додатних показників степеня:

$$\begin{aligned} i^5 &= i^{4+1} = i^4 \cdot i = i \\ i^6 &= i^{4+2} = i^4 \cdot i^2 = -1 \\ i^7 &= i^{4+3} = i^4 \cdot i^3 = -i \\ i^8 &= i^{4+4} = i^4 \cdot i^4 = 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i^{4n} &= 1 \\ i^{4n+1} &= i^1 = i \\ i^{4n+2} &= i^2 = -1 \\ i^{4n+3} &= i^3 = -i \end{aligned} \ ; \qquad (3.26)$$

Приклади.

3. Піднести комплексне число $z = 4 - i$ до третього степеня.

Виконуючи всі перетворення та враховуючи, що $i^2 = -1$, одержимо:

$$z^3 = (4 - i)^3 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 \cdot i + 3 \cdot 4 \cdot i^2 - i^3 = 52 - 47i \ .$$

4. Знайти i^{24}, i^{59}, i^{42}.

Користуючись формулами (3.26), одержимо: $i^{24} = i^{6 \cdot 4} = 1$;

$$i^{59} = i^{4 \cdot 14 + 3} = i^3 = -i \ ; \qquad i^{42} = i^{4 \cdot 10 + 2} = i^2 = -1 \ .$$

§ 3.4 СПРЯЖЕНІ ЧИСЛА

Нехай є комплексне число $z = x + iy$. Число $x - iy$, яке відрізняється від комплексного числа z тільки знаком уявної частини, називається *спряженим* відносно z і позначається z^*. Наприклад, комплексні числа $z = a + ib$ і $z^* = a - ib$ є спряженими відносно одне одного. Зі шкільного курсу математики відома формула в системі дійсних чисел:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) .$$

Неважко переконатися, що аналогом до неї в системі комплексних чисел буде:

$$a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib) , \quad (3.27)$$

де права частина є добуток двох взаємно спряжених чисел.

Розглянемо основні **властивості** спряжених чисел.

1. *Комплексне число спряжене до спряженого є дане комплексне число*

$$(z^*)^* = z . \quad (3.28)$$

Дійсно:

$$(z^*)^* = (x - iy)^* = [x + i(-y)]^* =$$
$$= x - i(-y) = x + iy = z .$$

2. *Сума двох взаємноспряжених чисел є дійсне число, а їх різниця — чисто уявне число*:

$$z + z^* = 2\,Re\,z , \qquad z - z^* = 2i\,Im\,z . \quad (3.29)$$

У цьому легко переконатися, якщо почленно додати, а потім відняти спряжені комплексні числа $z = Re\,z + i\,Im\,z$ та $z^* = Re\,z - i\,Im\,z$.

3. *Спряжене комплексне число, яке складається з алгебраїчної суми двох інших комплексних чисел, дорівнює алгебраїчній сумі спряжених доданків*:

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^* . \quad (3.30)$$

Дійсно, якщо:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad і \qquad z_2 = x_2 + iy_2 ,$$

то

$$(z_1 + z_2)^* = ((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2))^* =$$

$$= \left((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\right)^* = (x_1 + x_2) -$$

$$- i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = z_1^* + z_2^* \; .$$

Аналогічно з'ясовується, що: $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^* \; .$

4. *Спряжене комплексне число, яке є добутком двох інших комплексних чисел, дорівнює добутку спряжених співмножників:*

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \; . \qquad (3.31)$$

Дійсно, якщо $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$(z_1 \cdot z_2)^* = \left((x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)\right)^* =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) =$$

$$= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = z_1^* \cdot z_2^* \; .$$

Запровадження спряжених чисел дає можливість доповнити дії комплексних чисел в алгебраїчній формі діленням. Дійсно, якщо є два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$, то:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)} =$$

$$= \frac{1}{x_1^2 + y_1^2}(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1) \; .$$

Далі, враховуючи (3.24), одержимо:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\,\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} \; . \qquad (3.32)$$

Тобто операція ділення двох комплексних чисел замінюється множенням знаменника на спряжене число з наступним виділенням дійсної та уявної частин частки.

Формулою (3.32) користуються, зокрема, при виділенні дійсної та уявної частин дробу.

Із властивості 4 випливає ще одна **властивість** спряжених чисел.

5. *Спряжене комплексне число, яке є часткою двох комплексних чисел, дорівнює частці цих спряжених чисел:*

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \; . \qquad (3.33)$$

Дійсно, якщо в (3.31) замість z_1 узяти z_1/z_2, то одержимо

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right)^* = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* \cdot (z_2^*) \ ,$$

звідки маємо:

$$z_1^* = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* \cdot z_2^* \qquad \text{або} \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \ .$$

Слід зазначити, що властивості 3 та 4 автоматично поширюються на випадок будь-якої кількості доданків або співмножників, звідки можна отримати ще формули:

$$(z^n)^* = (z^*)^n \ . \qquad (3.34)$$

та

$$(z^n + i z^m)^* = (z^*)^n - i(z^*)^m \ . \qquad (3.35)$$

Підсумовуючи властивості спряжених чисел, можна твердити: якщо будь-яке комплексне число z деяким чином виражається через інші комплексні числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$ за допомогою операцій додавання, віднімання, множення та ділення, то, змінюючи в цьому разі всі числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$ на спряжені, ми одержимо число спряжене із z.

Звідси випливає, що будь-яка рівність між комплексними виразами буде залишатися правильною, якщо в цій рівності всюди покласти $-i$ замість i, оскільки при цьому ми перейдемо від рівності комплексних чисел до рівності спряжених комплексних чисел. Тому числа $-i$ та i алгебраїчно не відрізняються. Зокрема, хибним є уявлення, що $i = \sqrt{-1}$, а $-i = -\sqrt{-1}$. Насправді ж $\sqrt{-1}$ має два значення: $\pm i$. Ось чому абсолютно правильним є зауваження деяких авторів підручників відносно означення уявної одиниці i не як $\sqrt{-1}$, а як $i^2 = -1$.

Приклади.

1. Дано $z_1 = 10+5i$ та $z_2 = 3-4i$.

   Обчислити z_1/z_2.

   Домножуючи знаменник і чисельник дробу на спряжене число відносно знаменника й користуючись формулою (3.27), маємо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10+5i}{3-4i} = \frac{(10+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{30+15i+40i+20i^2}{9+16} =$$

$$= \frac{10+55i}{25} = \frac{2}{5}+\frac{11}{5}i \ .$$

2. Записати комплексне число $z = \dfrac{12+5i}{(2+3i)^2}$ в алгебраїчній формі.

Маємо:

$$z = \frac{12+5i}{(2+3i)^2} = \frac{12+5i}{4+12i+9i^2} = \frac{12+5i}{-5+12i} = \frac{(12+5i)(-5-12i)}{(-5+12i)(-5-12i)} =$$

$$= -\frac{(12+5i)(5+12i)}{25+144} = -\frac{60+144i+25i+60i^2}{169} = -\frac{169i}{169} = -i \ .$$

3. Виконати дії: $\dfrac{2+i}{2-i} + (6+3i)(2+3i)$.

Маємо:

$$\frac{2+i}{2-i} + (6+3i)(2+3i) = \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + (6+3i)(2+i) =$$

$$= \frac{4+4i+i^2}{4+1} + 12+6i+6i+3i^2 = \frac{3+4i}{5} + 9 + 12i = \frac{48}{5} + \frac{64}{5}i \ .$$

4. Дано $z = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}}$.

Знайти $Re\, z$ та $Im\, z$.

Маємо:

$$z = \frac{\sqrt{3}+i}{2-i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+i)(2+i\sqrt{3})}{(2-i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+3i+2i+i^2\sqrt{3}}{4+3} = \frac{\sqrt{3}+5i}{7} \ ,$$

звідки знаходимо:

$$Re\, z = \frac{\sqrt{3}}{7}; \qquad Im\, z = \frac{5}{7} \ .$$

5. Знайти комплексні числа, спряжені своїм кубам.

Нехай є комплексне число $z = x + iy$. Тоді:

$$z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) \ .$$

Згідно з умовою

$$z^3 = z^* = x - iy \ ,$$

звідки знаходимо:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x, \\ 3x^2y - y^3 = -y. \end{cases}$$

Система має такі розв'язки:

$$(x, y) = (0,0), (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1) \ .$$

Таким чином своїм кубам спряжені такі комплексні числа:

$$z_1 = 0; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = -1; \quad z_4 = i; \quad z_5 = -i \ .$$

§ 3.5 ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Оскільки комплексне число зображається точкою площини $M(x,\ y)$, то комплексні числа, а також усі операції над ними мають геометричну інтерпретацію. Площина, точки якої ототожнюються з комплексними числами, умовно називається *комплексною площиною*. Вісь абсцис цієї площини називається *дійсною віссю*, оскільки її точки зображають дійсні числа; відповідно вісь ординат комплексної площини називається *уявною віссю*. Якщо точку $M(x,\ y)$, що є прототипом числа $z = x + iy$, з'єднати з початком координат, то одержаний відрізок OM (рис. 3.1) називається *вектором комплексної площини*, який має початок у точці $O(0,\ 0)$ і кінець у точці $M(x,\ y)$. Відстань OM називається *модулем комплексного числа* z і позначається $|z|$ або $|x + iy|$. З прямокутного трикутника KOM випливає, що

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \quad (3.36)$$

Величина кута між додатним напрямком дійсної осі OX і вектором комплексної площини, що відповідає цьому числу, називається *аргументом комплексного числа* z і позначається $arg\, z$ або $arg(x + iy)$. Кут $arg\, z$ може набувати будь-яких дійсних значень, як додатних, так і від'ємних, причому додатними кутами вважаються ті, які відраховуються проти руху годинникової стрілки. З рис. 3.1 видно, що коли кути відрізняються один від одного на $\pm 2\pi$ або на число, кратне 2π, то відповідні їм точки площини збігаються. Тобто аргумент комплексного числа на відміну від його модуля визначається неоднозначно.

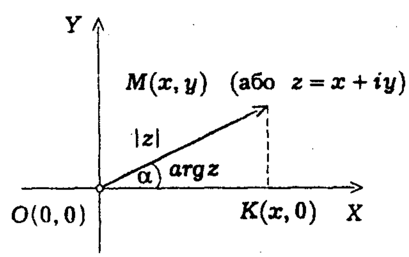


Рис. 3.1

Приклад.

1. Аргументами числа 5 (рис. 3.2) є кути

$$(arg\,z)_1 = 0\,, \qquad (arg\,z)_2 = 2\pi\,,$$
$$(arg\,z)_3 = -2\pi$$

тощо, тобто аргумент числа 5 визначається з точністю до цілого числа повних обертів:

$$(arg\,z)_k = 2\pi k\,, \quad k \in Z\,.$$

Аргументами числа $3i$ (рис. 3.2) будуть кути $(arg\,z)_1 = \pi/2$,

$$(arg\,z)_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi\,, \quad (arg\,z)_3 = \frac{\pi}{2} - 2\pi\,,$$

і взагалі кожен з кутів

$$(arg\,z)_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\,, \quad k \in Z\,.$$

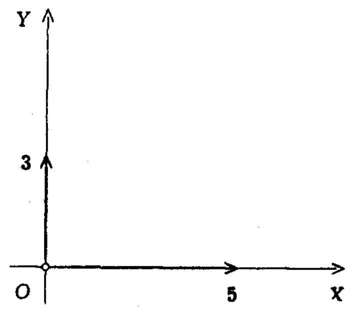


Рис. 3.2

Множина всіх кутів вектора комплексного числа z позначається $Arg\,z$. Величина кута, який знаходиться в інтервалі від $-180°$ до $180°$, називається головним значенням аргументу комплексного числа z, тобто:

$$-180° < arg\,z \le 180°\,. \qquad (3.37)$$

З рис. 3.1 видно, що гострий кут α дорівнює $arctg\,|y/x|$, тому для знаходження аргументу комплексного числа z можна навести таке правило:

1) знаходиться гострий кут $\alpha = arctg\,|y/x|$;

2) знаходиться аргумент z залежно від того, в якій координатній чверті розташований вектор комплексного числа z, що відповідає цьому числу:

$$\begin{array}{ll} \text{у I чверті} & arg\,z = \alpha\,, \\ \text{у II чверті} & arg\,z = \pi - \alpha\,, \\ \text{у III чверті} & arg\,z = \alpha - \pi\,, \\ \text{у IV чверті} & arg\,z = -\alpha\,. \end{array} \qquad (3.38)$$

Аргументи дійсних та чисто уявних чисел знаходяться безпосередньо, виходячи з їх геометричної інтерпретації, тим більше, що для чисто уявних чисел наведене вище правило (3.38) непридатне.

Приклад.

2. Знайти аргумент комплексного числа $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Оскільки $\alpha = arctg|(-\sqrt{3})/1| = arctg\sqrt{3} = \pi/3$, а вектор, що відповідає даному комплексному числу знаходиться в IV чверті ($x = 1$, $y = -\sqrt{3}$), то аргументом комплексного числа z буде кожен з кутів:

$$Arg z = (arg z)_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z .$$

Якщо на комплексній площині побудувати комплексні числа $z = x + iy$ та $-z = -x - iy$ (рис. 3.3), то легко побачити, що число, протилежне числу $z = x + iy$, буде точкою комплексної площини, симетричною точці z відносно початку координат. Звідси випливає, що:

$$|z| = |-z| . \quad (3.39)$$

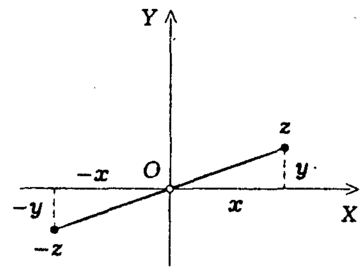


Рис. 3.3

Розглянемо два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$. З'єднаємо відповідні їм точки комплексної площини відрізками з початком координат і побудуємо на цих відрізках, як на сторонах, паралелограм (рис. 3.4).

Четвертою вершиною цього паралелограма буде, очевидно, точка $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$. Таким чином, додавання комплексних чисел здійснюється за *правилом паралелограма*. Оскільки $z_2 + (z_1 - z_2) = z_1$, то за правилом паралелограма будується також різниця двох комплексних чисел.

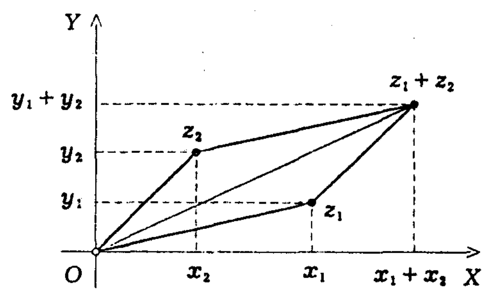


Рис. 3.4

Звідси, беручи до уваги відому теорему елементарної геометрії про сторони трикутника, одержимо такі важливі нерівності:

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| , \quad (3.40)$$

тобто *модуль суми двох комплексних чисел менше або дорівнює сумі модулів доданків, але більше або дорівнює різниці цих модулів.*

Оскільки $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, то з (3.40), користуючись (3.39), можна також одержати аналогічні нерівності для модуля різниці двох комплексних чисел:

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2| \ , \quad (3.41)$$

тобто для модуля різниці мають місце такі самі нерівності, як і для модуля суми.

Легко побачити, що взаємно спряжені комплексні числа $z = x + iy$ та $z^* = x - iy$ є точками на комплексній площині, симетричними відносно дійсної осі (рис. 3.5).

Такі точки називають ще *геометрично спряженими*. Звідси випливає ще одна властивість спряжених комплексних чисел.

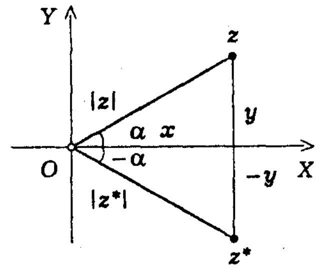


Рис. 3.5

6. *Модулі двох взаємно спряжених чисел рівні, а аргументи відрізняються знаком:*

$$|z^*| = |z|, \qquad arg\, z^* = -arg\, z \ . \quad (3.42)$$

З геометричної інтерпретації комплексних чисел випливає, що *сума* (як було вже показано (3.29)) *та добуток двох взаємно спряжених чисел є дійсне число*, тобто:

$$\left.\begin{aligned} z + z^* &= 2x\,, \\ z \cdot z^* &= x^2 + y^2 = |z|^2\,. \end{aligned}\right\} \quad (3.43)$$

З останньої рівності також випливає, що при $z \ne 0$ число zz^* є не тільки дійсним, а ще й додатним.

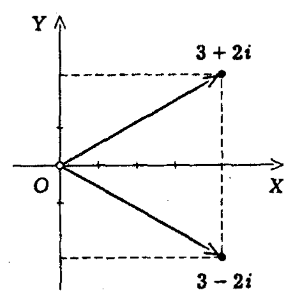


Рис. 3.6

Приклади.

3. Зобразити на комплексній площині числа $z = 3 + 2i$ та $z^* = 3 - 2i$. Знайти їх модулі та аргументи.

Зображення даних спряжених чисел має вигляд (рис. 3.6).

Знаходимо модулі комплексних чисел:

$$|z| = |z^*| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\ .$$

Оскільки $arg\, z = -arg\, z^*$, то головні значення аргументів будуть $arg\, z = arctg(2/3)$, а $arg\, z^* = -arctg(2/3)$.

4. Який геометричний зміст має модуль різниці двох комплексних чисел?

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, тоді

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} .$$

Як відомо зі шкільного курсу математики, ця формула виражає відстань між двома точками. Таким чином, *модуль різниці двох комплексних чисел є відстань між ними на комплексній площині.*

5. Визначити й накреслити в комплексній площині лінії, задані рівняннями:

а) $|z| = 1$;

Модуль комплексного числа z згідно з означенням є відстанню від початку координат до точки z. Для даної множини точок ця відстань одна й та ж і дорівнює одиниці, тому дана лінія є коло із центром на початку координат і радіусом, що дорівнює одиниці.

б) $|z - 3 + i| = 5$;

Оскільки $|z_1 - z_2|$ дорівнює відстані між точками z_1 і z_2, то з рівності $|z - 3 + i| = |z - (3 - i)| = 5$ випливає, що точки даної лінії віддалені від точки $3 - i$ на відстань 5, тобто дана лінія є коло із центром у точці $3 - i$ радіуса 5 (рис. 3.7).

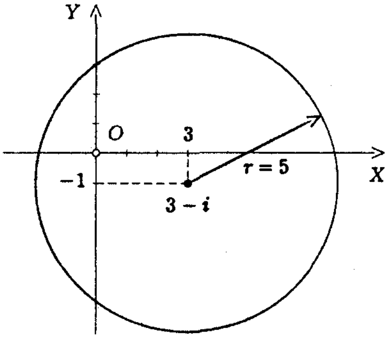


Рис. 3.7

6. Визначити множину точок, що відповідають нерівностям:

а) $|z + 1| \geq 2$;

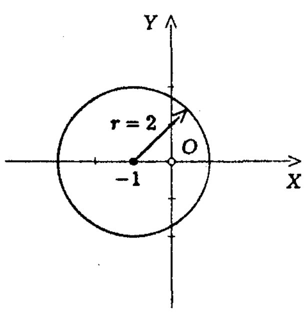


Рис. 3.8

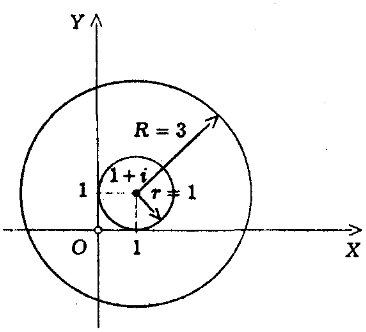


Рис. 3.9

Із цієї нерівності випливає, що відстань від точки -1 до z мусить бути не менше двох, тому шукана множина точок лінії знаходиться зовні кола із центром у точці -1 радіуса 2 (рис. 3.8).

б) $1 \le |z - 1 - i| < 3$;

Шукана множина точок одночасно відповідає двом умовам:

$$1 \le |z - (1 + i)| \quad \text{та} \quad |z - (1 + i)| < 3 \quad .$$

Перша нерівність — це зовнішність кола із центром у точці $1 + i$ і радіусом $r = 1$.

Друга нерівність — це коло радіуса $R = 3$ із центром у тій же точці $1 + i$ (рис. 3.9).

Тому дана множина точок — це кільце, обмежене концентричними колами радіусів $r = 1$ та $R = 3$ із центром у точці $1 + i$.

§ 3.6 ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

До цих пір ми розглядали комплексне число $z = x + i\,y$ на комплексній площині, для побудови якого користувалися відомою ще зі школи, так званою, декартовою системою координат. Положення точки на площині цілком визначається, якщо замість значень абсциси та ординати задати відстань ρ від початку координат до точки та кут φ, який утворюється додатним напрямом (проти годинникової стрілки) осі абсцис та напрямком з початку координат на цю точку (рис. 3.10). Така система координат називається полярною (див. курс «Аналітична геометрія»). Розглянемо комплексне число $z = x + i\,y$ у полярній системі координат, сумістивши її початок з початком декартової системи координат.

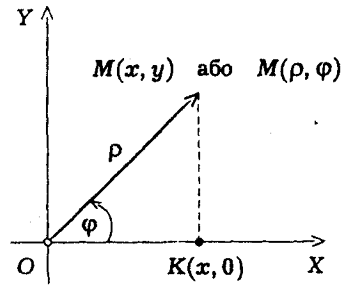


Рис. 3.10

Очевидно, що величина ρ є модулем комплексного числа z, а кут φ є його аргументом, тобто:
$$\rho = |z|\,, \qquad \varphi = arg\,z \;.$$

Як видно з трикутника KOM
$$x = \rho\cos\varphi\,, \quad y = \rho\sin\varphi\;, \qquad (3.44)$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\;. \qquad (3.45)$$

Тоді комплексне число $z = x + i\,y$ може бути записане так:
$$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\;. \qquad (3.46)$$

Ця форма запису називається *тригонометричною формою комплексного числа* z. Розглянемо дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Нехай є два комплексних числа:
$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{та} \quad z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\;.$$

1. Добуток комплексних чисел $z_1 \cdot z_2$.
$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 -$$
$$- \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]\;,$$

тобто
$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right] . \quad (3.47)$$

Оскільки комплексне число $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то, користуючись системою (3.22), одержимо

$$\rho = \rho_1 \rho_2 , \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (3.48)$$

або інакше:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| , \quad (3.49)$$

$$arg(z_1 \cdot z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2 , \quad (3.50)$$

тобто, *при множенні комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються.* Очевидно, що це правило поширюється на будь-яку скінченну кількість множників. Якщо розглянути окремий випадок дійсних чисел, то формула (3.49) дає відому властивість абсолютних величин цих чисел, а формула (3.50) перетворюється на правило знаків при множенні дійсних чисел.

2. Частка комплексних чисел z_1/z_2, причому $z_2 \neq 0$, тобто $\rho_2 \neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) ,$$

тобто:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] . \quad (3.51)$$

Звідки одержимо:

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} , \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (3.52)$$

або

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} , \quad (3.53)$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg\, z_1 - arg\, z_2 . \quad (3.54)$$

Таким чином, *модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці їх модулів, а аргумент — різниці їх аргументів.*

Розглянувши добуток та частку двох комплексних чисел у тригонометричній формі, можна легко дати геометричну інтерпретацію цим діям. Дійсно, наприклад, для $z_1 \cdot z_2$, з формул (3.49) та (3.50) ми одержимо точку, яка зображує добуток числа z_1 на число z_2, якщо вектор, що йде від 0 до z_1 (рис. 3.11) повернемо проти годинникової стрілки на кут $\varphi_2 = arg\, z_2$, а потім розтягнемо цей вектор у $\rho_2 = |z_2|$ разів (при $0 \le \rho_2 < 1$ — це буде стиснення).

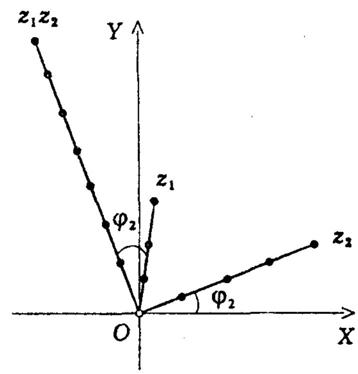


Рис. 3.1

3. **Комплексне число z^{-1}, обернене до z.** Припустимо, що $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Тоді з формули (3.51), поклавши в ній $z_1 = 1$ (тобто $\rho_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$) і $z_2 = z$, одержимо

$$z^{-1} = \rho^{-1}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] \ , \quad (3.55)$$

звідки випливає, що:

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \ , \quad (3.56)$$

$$arg(z^{-1}) = -arg\, z \ . \quad (3.57)$$

Тобто *модуль оберненого комплексного числа дорівнює його оберненому модулю, а аргумент — його протилежному аргументу.*

Геометрична інтерпретація числа z^{-1} означає, що від точки z потрібно перейти до такої точки z', яка знаходиться на відстані ρ^{-1} від нуля на тій же напівпрямій, що й точка z, а потім перейти до точки, симетричної з z' відносно дійсної осі (рис. 3.12).

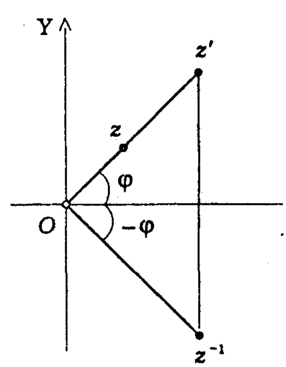


Рис. 3.

4. **Піднесення комплексного числа z до цілого додатнього степеня n.** Як було вже зазначено в першому пункті параграфа, правило множення комплексних чисел (3.47) автоматично поширюється на будь-яку кількість співмножників. Якщо, зокрема, всі співмножники взяти рівними, то одержимо формулу:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad n = 2, 3, \ldots \ . \quad (3.58)$$

Таким чином, *при піднесенні комплексного числа до степеня, модуль його підноситься до того ж степеня, а аргумент множиться на показник степеня.*

Якщо формулу (3.58) переписати у вигляді

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (3.59)$$

і покласти в ній $\rho = 1$, то одержимо:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \ . \qquad (3.60)$$

Ця формула називається *формулою Муавра*, на честь англійського математика А. Муавра (1667–1754), який відкрив її в 1707 році, але традиційно формулою Муавра називають також формулу (3.59).

Формула (3.59) придатна також і для цілих від'ємних показників. Дійсно, оскільки $z^{-n} = (z^{-1})^n$, то достатньо застосувати формулу Муавра до числа z^{-1}, тригонометричну форму якого визначено в попередньому пункті, і ми одержимо:

$$z^{-n} = \rho^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) \ . \qquad (3.61)$$

Формула (3.60) дає можливість одержати формули для синуса й косинуса кратного кута. Дійсно, розкриваючи ліву частину цієї рівності за відомою формулою бінома Ньютона (див. додаток 2) і порівнюючи окремо дійсні та уявні частини обох частин рівності, та користуючись (3.26), одержимо:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots \ , \qquad (3.62)$$

$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi +$$
$$+ C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots \ , \qquad (3.63)$$

де

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} \ —$$

біноміальні коефіцієнти (див. додаток 2).

При $n = 2$ та $n = 3$ одержуємо відомі формули:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \ ,$$
$$\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi \ , \qquad (3.64)$$

і

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi \ ,$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi \qquad (3.65)$$

або
$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \qquad (3.66)$$
і
$$\cos^3\varphi = \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{4}, \quad \sin^3\varphi = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}. \qquad (3.67)$$

5. Добування кореня з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Позначимо шукану величину $w = r(\cos\psi + i\sin\psi)$, тоді:
$$\sqrt[n]{z} = w = r(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Згідно з означенням кореня:
$$z = w^n = r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Порівнюючи з виразом для z, одержимо:
$$r^n = \rho, \qquad n\psi = \varphi + 2k\pi, \qquad k \in Z.$$

Оскільки r і ρ — додатні числа, то $r = (\sqrt[n]{\rho})_{арифм}$, $\psi = (\varphi + 2k\pi)/n$, де $(\sqrt[n]{\rho})_{арифм}$ за означенням "звичайний" додатний арифметичний корінь із дійсного числа. Остаточно одержуємо:
$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{\rho})_{арифм}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (3.68)$$
$$\text{де} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким чином, *корінь n-го степеня з комплексного числа z має n різних значень і всі вони розташовані на колі радіуса $\sqrt[n]{\rho}$ із центром у точці нуль і ділять це коло на n рівних частин.* Єдиним винятком є число $z = 0$, усі корені якого дорівнюють нулю.

Різні значення кореня одержуються з (3.68) наданням числу k значень від 0 до $n-1$.

Приклади.

1. Записати в тригонометричній формі комплексне число $z = 1 + i$.

Знайдемо модуль та головний аргумент цього числа:
$$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Оскільки число $1+i$ знаходиться в першій чверті комплексної площини, то
$$\varphi = \alpha = arctg\left|\frac{1}{1}\right| = \frac{\pi}{4}.$$

Тоді
$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Записати в тригонометричній формі комплексне число 7.

Оскільки число 7 розташоване в комплексній площині на осі абсцис, то $\varphi = 0$. Тоді $7 = 7(\cos 0° + i\sin 0°)$.

3. Записати комплексне число $z = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$ в алгебраїчній формі.

Знайдемо $\cos 315°$ та $\sin 315°$.

$$\cos 315° = \cos(360° - 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 315° = \sin(360° - 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді:

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i.$$

4. Відомо комплексні числа $z_1 = 4(\cos 120° + i\sin 120°)$ та $z_2 = \frac{1}{2}(\cos 30° + i\sin 30°)$. Знайти їх добуток.

Згідно з формулою (3.47) маємо:

$$z_1 z_2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(\cos(120° + 30°) + i\sin(120° + 30°)) =$$
$$= 2(\cos 150° + i\sin 150°).$$

Або враховуючи, що

$$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = \cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = 1/2,$$

в алгебраїчній формі:

$$z_1 z_2 = 2 \cdot (\cos 150° + i\sin 150°) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i.$$

5. Обчислити $(\sqrt{3} - i)^{10}$.

Перейдемо від алгебраїчної форми комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$ до тригонометричної. Згідно з (3.36) та (3.38) маємо:

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\alpha = arctg\left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

Оскільки число z знаходиться в четвертій чверті (рис. 3.13), то $\varphi = -\alpha = -\pi/6$ або $-30°$.

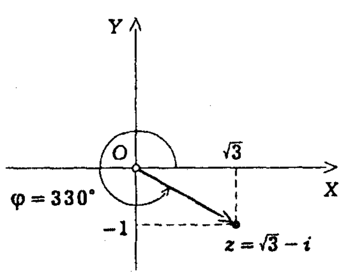


Рис. 3.13

Тоді:

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 2(\cos 30° - i\sin 30°),$$

$$(\sqrt{3} - i)^{10} = 2^{10}(\cos 300° - i\sin 300°) = 2^{10}(\cos(360° - 60°) -$$
$$- i\sin(360° - 60°)) = 2^{10}(\cos 60° + i\sin 60°) =$$
$$= 1024\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512(1 + i\sqrt{3}).$$

6. *Обчислити частку двох комплексних чисел:* $\dfrac{\cos 30° - i\sin 30°}{\sin 15° - i\cos 15°}$.

Домножуючи дріб на спряжене до знаменника число, отримаємо:

$$\frac{\cos 30° - i\sin 30°}{\sin 15° - i\cos 15°} = \frac{(\cos 30° - i\sin 30°)(\sin 15° + i\cos 15°)}{(\sin 15° - i\cos 15°)(\sin 15° + i\cos 15°)} =$$

$$= \frac{\cos 30°\sin 15° + i\cos 30°\cos 15° - i\sin 30°\sin 15° - i^2\sin 30°\cos 15°}{\sin^2 15° + \cos^2 15°} =$$

$$= (\cos 30°\sin 15° + \sin 30°\cos 15°) + i(\cos 30°\cos 15° - \sin 30°\sin 15°) =$$

$$= \sin 45° + i\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) .$$

7. Знайти $\sqrt[3]{1+i}$.

Комплексне число $1+i$ в тригонометричній формі (приклад 1) має вигляд:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) .$$

Тоді згідно з (3.68) знаходимо:

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right), \qquad k = 0,\ 1,\ 2 .$$

Таким чином одержимо три корені комплексного числа $z = 1+i$:

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right), \qquad \text{при } k = 0 ;$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right), \qquad \text{при } k = 1 ;$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right), \qquad \text{при } k = 2 .$$

8. Розв'язати рівняння $z^3 - 8 = 0$.

а). *Перший спосіб.* Користуючись відомою формулою для різниці кубів двочлена, маємо:

$$z^3 - 8 = (x-2)(z^2+2z+4) = 0 .$$

Звідки:

$$z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 2 ,$$

$$z^2 + 2z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3} .$$

б). *Другий спосіб.* Подамо рівняння у вигляді $z = \sqrt[3]{8}$. Комплексне число z знаходиться на осі абсцис і має модуль $\rho = 8$ та аргумент $\varphi = 0$.

Тоді

$$8 = 8(\cos 0° + i\sin 0°) .$$

Користуючись формулою (3.68), знаходимо:

$$\sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}\right), \qquad k = 0,\ 1,\ 2 .$$

Тоді:

$$z_1 = 2 \qquad \text{при } k = 0 ;$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2(\cos 120° + i\sin 120°) =$$

$$= 2(\cos(90° + 30°) + i\sin(90° + 30°)) =$$

$$= 2(-\sin 30° + i\cos 30°) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -1 + i\sqrt{3}, \quad \text{при} \quad k = 1 \ ;$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{4}\right) = 2(\cos 240° + i\sin 240°) =$$

$$= 2(\cos(270° - 30°) + i\sin(270° - 30°)) =$$

$$= 2(-\sin 30° - i\cos 30°) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -1 - i\sqrt{3}, \quad \text{при} \quad k = 2 \ .$$

9. Розв'язати рівняння $z^3 + 8 = 0$.

а). *Перший спосіб.* Подамо рівняння у вигляді $z = \sqrt[3]{-8}$. Комплексне число -8 має модуль $\rho = 8$ і головний аргумент π, оскільки воно знаходиться на від'ємній частині осі абсцис. Користуючись формулою (3.68), маємо:

$$\sqrt[3]{-8} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2 \ .$$

При цьому:

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}, \quad \text{при} \quad k = 0 \ ;$$

$$z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2, \quad \text{при} \quad k = 1 \ ;$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}, \quad \text{при} \quad k = 2 \ .$$

б). *Другий спосіб.* Розглянемо -1 як дійсний коефіцієнт комплексного числа 8, тоді $z = \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$.

Усі корені будуть відрізнятися знаком від коренів числа $\sqrt[3]{8}$, знайдених у попередньому прикладі.

Дійсно:

$$z_1 = -(2) = -2, \qquad z_2 = -(-1 + i\sqrt{3}) = 1 - i\sqrt{3} \ ,$$

$$z_3 = -(-1 - i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3} \ .$$

в). *Третій спосіб.* Дійсним коефіцієнтом комплексного числа -1 можна вважати також 8, тоді:

$$z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{-1} = 2\sqrt[3]{-1} \ .$$

Число $z = -1$ у тригонометричній формі матиме вигляд:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi \ .$$

Тоді:

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}, \qquad k = 0, 1, 2 \ .$$

Звідки:

$$(\sqrt[3]{-1})_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad k = 0 \ ;$$

$$(\sqrt[3]{-1})_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1\,, \qquad k = 1\ ;$$

$$(\sqrt[3]{-1})_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad k = 2\ .$$

Остаточно знаходимо корені виразу $z = \sqrt[3]{-8}$:

$$z_1 = 2\cdot\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}\,, \qquad z_2 = 2(-1) = -2\ ,$$

$$z_3 = 2\cdot\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}\ .$$

10. Знайти $\sqrt[4]{81}$.

У тригонометричній формі число $z = 81$, оскільки знаходиться на осі абсцис, матиме вигляд:

$$81 = 81(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)\ .$$

Користуючись (3.68), знаходимо:

$$\sqrt[4]{81} = 3\left(\cos\frac{2\pi k}{4} + i\sin\frac{2\pi k}{4}\right), \qquad k = 0,\,1,\,2,\,3\ .$$

Надаючи значення k від нуля до трьох, одержимо чотири корені: $3,\ -3,\ 3i,\ -3i$.

11. Знайти корені рівняння $z^8 - 2\sqrt{3}\,z^4 + 4 = 0$.

Поклавши $z^4 = t$, одержуємо квадратне рівняння:

$$t^2 - 2\sqrt{3}\,t + 4 = 0\ .$$

Звідки знаходимо: $t_{1,2} = \sqrt{3} \pm i$. Числа $\sqrt{3}+i$ і $\sqrt{3}-i$ взаємно спряжені, тому модулі в них однакові й дорівнюють 2, а аргументи протилежні:

$$arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}\,, \qquad arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}\ .$$

Записуючи $t_{1,2}$ в тригонометричній формі й користуючись формулою (3.68), знаходимо всі вісім коренів даного рівняння:

$$z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{t_1} = \sqrt[4]{\sqrt{3} + i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4}\right),$$

$$k = 0,\,1,\,2,\,3\ ;$$

$$z_{5,6,7,8} = \sqrt[4]{t_2} = \sqrt[4]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{4}\right),$$

$$k = 0,\,1,\,2,\,3\ .$$

Особливо важливим випадком п'ятого пункту даного параграфа є добування кореня n-го степеня з числа 1. Цей корінь має n значень, і оскільки $1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ$, то згідно з (3.68), усі ці значення визначаються формулою:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\ .$$

Дійсні значення кореня n-го степеня з одиниці одержуються при значеннях $k = 0$ і $n/2$, якщо n парне, та при $k = 0$, якщо n непарне. На комплексній площині корені n-го степеня з одиниці розташовані на одиничному колі й ділять його на n рівних дуг. Звідси випливає, що *всі корені n-го степеня, які не є чисто дійсними, розташовані симетрично відносно дійсної осі, тобто попарно спряжені.*

З розглянутого видно, що квадратний корінь з одиниці має два значення: 1 та -1; кубічний корінь з одиниці, крім самої одиниці, має два спряжені між собою числа $-1/2 + i((\sqrt{3})/2)$ та $-1/2 - i((\sqrt{3})/2)$; корінь четвертого степеня з одиниці має чотири значення: $1, -1, i$, та $-i$ тощо.

З рис. 3.14, на якому зображені кубічні корені з одиниці, видно, що комплексні корені симетричні відносно дійсної осі OX.

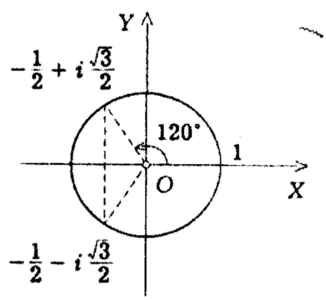


Рис. 3.14

Усі значення кореня n-го степеня з комплексного числа z можна отримати множенням одного із цих значень на всі корені n-го степеня з одиниці. Звідси ж випливає, що недійсні корені з комплексного числа z взаємно спряжені. Наприклад, одне зі значень кубічного кореня з -8 є -2, два інших отримаємо, якщо помножимо -2 на взаємно спряжені кубічні корені з одиниці $-1/2 \pm i(\sqrt{3}/2)$ (порівняйте з прикладом 9), або, наприклад, один з коренів $\sqrt[4]{81}$ є 3, тоді решту коренів одержимо, помноживши 3 на -1, i та $-i$ відповідно (порівняйте з прикладом 10).

Насамкінець відмітимо ще одну важливу особливість кореня n-го степеня з одиниці: *добуток двох коренів n-го степеня* $(n = 1, 2, \ldots)$ *з одиниці знову є коренем n-го степеня з одиниці.*

§ 3.7 ПОКАЗНИКОВА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

У різноманітних розділах сучасної математики, а також в електротехніці, радіотехніці, гідравліці та інших технічних дисциплінах дуже поширена показникова форма комплексного числа. В її основі лежить відома формула Ейлера, яку ми подамо без доведення:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \ . \qquad (3.69)$$

Ця формула була отримана видатним математиком Леонардом Ейлером (1707–1783) у 1743 році. Ірраціональне число $e \approx \approx 2,\ 71828\ldots$, яке є основою показникової функції, відіграє в математиці не менш важливу роль, ніж число π. Детальніше показникові функції з основою e будуть розглянуті нами в теорії функцій.

Якщо у формулі (3.69) замінити z на $-z$, то очевидно, що ми одержимо формулу:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \ . \qquad (3.70)$$

Якщо розглянути формули (3.69) та (3.70) разом і почленно додати та відняти їх, то ми отримаємо дуже важливі формули, які також називаються формулами Ейлера:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \ . \qquad (3.71)$$

Формули (3.71) також дають можливість отримати дуже важливі співвідношення (3.64)–(3.67) між степенями синусів та косинусів через синуси та косинуси кратних дуг і навпаки. Наприклад,

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i\cdot 3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i\cdot 3x}}{8} =$$

$$= \frac{e^{i\cdot 3x} + e^{-i\cdot 3x}}{8} + \frac{3}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

тощо.

Якщо тепер у формулі (3.69) комплексне число z записати в алгебраїчній формі (3.20) і скористатися властивостями показникової функції, то ми одержимо:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \ . \qquad (3.72)$$

Порівнюючи (3.72) з тригонометричною формою комплексного числа (3.46), маємо:

$$|e^z| = e^x, \qquad Arg\, e^z = y + 2\pi k, \qquad k \in Z \ . \qquad (3.73)$$

Утім, оскільки e^z є також комплексне число, то, переозначивши e^z знову через z і враховуючи, що $|e^z| > 0$ і $e^z \neq 0$, одержимо формули для модуля та аргументу показникової функції комплексного числа

$$|z| = e^x, \qquad arg\, z = y \tag{3.74}$$

або поклавши $|z| \equiv \rho$, $arg\, z \equiv \varphi$:

$$\rho = e^x, \qquad \varphi = y\ . \tag{3.75}$$

Таким чином, довільне комплексне число z може бути представлене в *показниковій формі*, як

$$z = |z|\, e^{i\, arg\, z} \qquad \text{або} \qquad z = \rho e^{i\varphi}\ . \tag{3.76}$$

Інколи значно зручніше при виконанні деяких алгебраїчних дій над комплексними числами користуватися їх показниковою формою.

Звернемо ще раз увагу на те, що наведені вище формули (3.20), (3.46) і формули (3.76) є різними формами запису одного й того ж комплексного числа, тобто

$$z = x + iy = |z|(\cos arg\, z + i \sin arg\, z) = |z|\, e^{i\, arg\, z} \tag{3.77}$$

або

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}\ . \tag{3.78}$$

Розглянемо дії над комплексними числами в показниковій формі.

1. **Періодичність показникової форми комплексного числа.** Неважко побачити, що для показникової форми комплексного числа справедлива рівність:

$$e^{z+2\pi i} = e^z\ . \tag{3.79}$$

Дійсно, згідно з формулою (3.72) маємо:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z(1 + i\cdot 0) = e^z\ .$$

Отже, *показникова форма комплексного числа є періодичною функцією періоду* $2\pi i$.

Користуючись періодичністю показникової форми комплексного числа та формулами Ейлера (3.71), можна довести періодичність тригонометричних функцій. Наприклад,

$$\cos(x + 2\pi) = \frac{e^{i(x+2\pi)} + e^{-i(x+2\pi)}}{2} =$$

$$= \frac{e^{ix}\cdot e^{2\pi i} + e^{-ix}\cdot e^{-2\pi i}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x\ .$$

Звідки видно, що період косинуса (аналогічно можна показати, що й синуса) дорівнює 2π, причому аргумент його може бути як дійсною, так і комплексною величиною.

2. Добуток комплексних чисел $z_1 \cdot z_2$. Нехай є два комплексних числа: $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ та $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Тоді

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

тобто

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} . \quad (3.80)$$

Оскільки добуток комплексних чисел є також комплексне число $z = \rho e^{i\varphi}$, то користуючись (3.22), одержимо

$$\rho = \rho_1 \rho_2, \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (3.81)$$

або

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| , \quad (3.82)$$

$$arg(z_1 \cdot z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2 . \quad (3.83)$$

Отже, *при множенні комплексних чисел у показниковій формі їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються.*

3. Частка комплексних чисел z_1/z_2, причому $z_2 \neq 0$, тобто $\rho_2 \neq 0$. Нехай є два комплексних числа: $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ та $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Тоді

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_1} e^{i\varphi_1 - i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} ,$$

тобто

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} . \quad (3.84)$$

Звідки одержимо

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (3.85)$$

або

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} , \quad (3.86)$$

$$arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg\, z_1 - arg\, z_2 . \quad (3.87)$$

Таким чином, *модуль частки двох комплексних чисел у показниковій формі дорівнює частці їх модулів, а аргумент — різниці їх аргументів.*

4. Піднесення комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$ до цілого додатнього степеня n. Правило множення комплексних чисел (3.80) поширюється на будь-яку кількість співмножників. Зокрема, якщо всі співмножники взяти рівними, то одержимо формулу

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi} \qquad (3.88)$$

або

$$|z^n| = |z|^n \,, \qquad (3.89)$$

$$\arg z^n = n \arg z \,. \qquad (3.90)$$

Отже, *при піднесенні комплексного числа в показниковій формі до степеня модуль його підноситься до того ж степеня, а аргумент множиться на показник степеня.*

5. **Добування кореня з комплексного числа** $z = \rho e^{i\varphi}$. Позначимо шукану величину $w = re^{i\psi}$. Тоді

$$\sqrt[n]{z} = w = re^{i\psi} \,.$$

Згідно з означенням степеня (3.88)

$$z = w^n = r^n e^{in\psi} \,.$$

Порівнюючи з виразом для $z = \rho e^{i\varphi}$, одержимо:

$$r^n = \rho, \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k, \qquad k \in Z \,.$$

Оскільки r і ρ — додатні числа, то

$$r = (\sqrt[n]{\rho})_{арифм}, \qquad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \,,$$

де під виразом $(\sqrt[n]{\rho})_{арифм}$ мається на увазі "звичайний" додатний арифметичний корінь. Остаточно маємо:

$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{\rho})_{арифм}\, e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1 \,. \qquad (3.91)$$

Таким чином, *корінь n-го степеня з комплексного числа має n різних значень, які дорівнюють арифметичному кореню з його модуля, помноженому на показникову функцію його аргументу.*

Різні значення кореня отримуються наданням числу k значень від 0 до $n-1$.

Приклади.

1. Подати в показниковій формі комплексні числа: а) 1; б) i; в) -3; г) $-i$.

а) $1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = e^{2\pi k i}$;

б) $i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$;

в) $-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3e^{\pi i}$;

г) $-i = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

2. Записати комплексне число $z = \sqrt{3} - i$ в показниковій формі.

Модуль $|z| = \sqrt{3+1} = 2$. Аргумент $\varphi = -\pi/6$. Отже,

$$\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi}{6}i} .$$

3. Подати в показниковій формі комплексне число $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{18}$.

Модуль даного числа буде:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 ,$$

а аргумент, згідно з формулою (3.38)

$$\varphi = \alpha = arctg\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} .$$

Тоді

$$z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{18} = e^{\frac{\pi}{3}\cdot 18i} = e^{6\pi i} .$$

4. Знайти: а) $z_1 \cdot z_2$; б) z_1/z_2; в) z_1^4; г) $\sqrt[3]{z_2}$, якщо відомо, що

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{4}i}, \qquad z_2 = 8e^{\frac{\pi}{3}i} .$$

а) $z_1 \cdot z_2 = 2e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot 8e^{\frac{\pi}{3}i} = 16e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i} = 16e^{\frac{7}{12}\pi i}$;

б) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2e^{\frac{\pi}{4}i}}{8e^{\frac{\pi}{3}i}} = \dfrac{1}{4}e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i} = \dfrac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{12}i} = \dfrac{1}{4}e^{\left(2\pi-\frac{\pi}{12}\right)i} = \dfrac{1}{4}e^{\frac{23}{12}\pi i}$;

в) $z_1^4 = \left(2e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^4 = 2^4e^{\pi i} = -16$;

г) $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{8e^{\frac{\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)}{3}i}} = 2e^{\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi\right)i}, \qquad k = 0, 1, 2.$

Надаючи k різні значення, одержимо три значення кореня:

$$k = 0 \Rightarrow (\sqrt[3]{z_2})_1 = 2e^{\frac{\pi}{9}i} ;$$

$$k = 1 \Rightarrow (\sqrt[3]{z_2})_2 = 2e^{\frac{7}{9}\pi i} ;$$

$$k = 2 \Rightarrow (\sqrt[3]{z_2})_3 = 2e^{\frac{13}{9}\pi i} .$$

5. Обчислити $\cos i$, $\sin i$.

Поклавши в рівності (3.71) $z = i$, маємо:

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} = \frac{e^{2} + 1}{2e} .$$

З'ясувалося, що $\cos i$ є число дійсне й більше одиниці, що зовсім незвично і на перший погляд не відповідає шкільним уявленням про тригонометричні функції.

Аналогічно вираховуємо

$$\sin i = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} = -\frac{i}{2}(e^{-1} - e^{1}) = i\,\frac{e^{2} - 1}{2e} .$$

Таким чином, $\sin i$ є чисто уявним числом.

§ 3.8 ЛОГАРИФМИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Оскільки в попередньому параграфі була визначена показникова форма комплексного числа

$$z = \rho e^{i\varphi} , \quad (3.92)$$

то цілком природним буде запровадження й логарифмічної форми комплексних чисел.

Нехай комплексне число z є

$$z = e^{w} , \quad (3.93)$$

де w певне комплексне число

$$w = u + iv . \quad (3.94)$$

Тоді

$$z = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u} e^{iv} . \quad (3.95)$$

Порівнюючи рівність (3.95) з формулою (3.92), маємо

$$\rho = e^{u} \Rightarrow u = \ln\rho , \quad (3.96)$$

і, враховуючи, що показникова форма комплексного числа (3.92) є періодичною функцією періоду $2\pi i$,

$$v = \varphi + 2\pi k, \qquad k \in Z . \quad (3.97)$$

Отже,

$$w = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k), \qquad k \in Z . \quad (3.98)$$

А оскільки з формули (3.93) $w = Ln z$, то остаточно отримуємо

$$Ln z = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k), \qquad k \in Z \quad (3.99)$$

або

$$Ln z = \ln|z| + i \arg z , \quad (3.100)$$

де $\ln\rho$ — "звичайний" дійсний натуральний (тобто при основі e) логарифм додатнього числа, а Ln — це сукупність усіх значень комплексного логарифма.

Вирази (3.99) і (3.100) є *логарифмічною формою комплексного числа* z. Відзначимо, що логарифм комплексного числа має нескінченну кількість різних значень. Єдиним винятком є число "нуль", яке не має логарифма, але умовно можна записати так: $Ln 0 = -\infty + iv$, де v — довільне дійсне число.

Оскільки дійсні додатні числа є окремим випадком комплексних, то їхній логарифм має нескінченну кількість значень, де одне з них — "звичайне", дійсне, а решта — уявні. Наприклад,

$$Ln 1 = \ln 1 + i0 + i2\pi k, \quad \text{де} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

При $k = 0$ отримуємо "звичайне" значення логарифма $\ln 1 = 0$, але логарифм $Ln 1 = \pm 2\pi i$, $Ln 1 = \pm 4\pi i$ тощо. Дійсно,

$$Ln 1 = 2\pi k i \Rightarrow 1 = e^{2\pi k i} ,$$

з іншого боку за формулою (3.69) є:

$$e^{2\pi k i} = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k = 1 + i0 = 1 ,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Слід відзначити, що на відміну від "звичайних" логарифмів, комплексні логарифми існують також і для від'ємних чисел. Наприклад, згідно з формулою (3.99), маємо

$$Ln(-1) = i\pi(2k+1),$$

так як $|-1| = 1$, а $\ln 1 = 0$ і $arg 1 = \pi$.

Логарифмічна форма комплексного числа дає можливість виконувати дію, яку неможливо виконати при будь-якій іншій формі запису комплексного числа, це *піднесення комплексного числа до комплексного степеня.* Дійсно, нехай є два комплексних числа z_1 і z_2. Тоді

$$z_1^{z_2} = \left(e^{Ln z_1}\right)^{z_2} = e^{z_2 Ln z_1} . \quad (3.101)$$

При практичному користуванні формулою (3.101), права її частина обчислюється за формулою (3.69). У загальному випадку степінь (3.101) має нескінченну кількість значень, що випливає з означення комплексного логарифма.

Приклади.

1. Записати в логарифмічній формі комплексні числа: а) i; б) $-3i$; в) $\sqrt{3} - i$.

а). Оскільки $|i| = 1$, $arg\, i = \pi/2$, то за формулою (3.98)

$$Ln\, i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = i\,\frac{\pi(1+4k)}{2}, \qquad k \in Z ;$$

б). Оскільки $|-3i| = 3$, $arg(-3i) = -\pi/2$, то за формулою (3.98)

$$Ln(-3i) = \ln 3 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \ln 3 - i\,\frac{\pi(1-4k)}{2}, \qquad k \in Z ;$$

в). Оскільки $|\sqrt{3} - i| = 2$, $arg(\sqrt{3} - i) = -\pi/6$ (див. приклад 2. попереднього параграфа), то за формулою (3.98)

$$Ln(\sqrt{3} - i) = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \ln 2 - i\,\frac{\pi(1-12k)}{6}, \qquad k \in Z .$$

2. Виконати дію $(-i)^{1+\frac{i}{\pi}}$.

Згідно з (3.101) маємо:

$$(-i)^{1+\frac{i}{\pi}} = e^{\left(1+\frac{i}{\pi}\right)Ln(-i)} .$$

А оскільки за формулою (3.98) $Ln(-i) = -(\pi/2)i$, то

$$(-i)^{1+\frac{i}{\pi}} = \sqrt{e}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} = \sqrt{e}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -i\sqrt{e} .$$

ВПРАВИ

1. Відомо, що $z_1 = 3 - 2i$ та $z_2 = 6 - 17i$.
   Знайти $z_2 - z_1$ і z_2/z_1.

2. Обчислити в алгебраїчній формі:
   1) суму $z_1 + z_2$, якщо $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - 7i$;
   2) різницю $z_2 - z_1$, якщо $z_1 = 3 - 9i$ та $z_2 = 7 + i$;
   3) добуток $z_1 z_2$, якщо $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - i$;
   4) частку z_2/z_1, якщо $z_1 = 23 + i$, $z_2 = 3 + i$.

3. Обчислити i^{37}, i^{122}.

4. Обчислити $(2 + 5i)^3$.

5. Обчислити z^4, якщо $z = \sqrt{2}(1 + i)$.

6. Знайти $z_1 + z_2$, $z_2 - z_1$, $z_1 z_2$, якщо
$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 5 - 4i .$$

7. Обчислити комплексне число $z = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3} + z_4$, якщо
$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -4 - 5i ,$$
$$z_3 = 3 - 2i, \quad z_4 = \sqrt{3} - \frac{2}{13} - \frac{23}{13} i .$$

8. Знайти комплексне число $z = \dfrac{(3 - i)^2}{1 - 2i}$.

9. Знайти суму та добуток комплексних чисел $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 3 + 4i$.

10. Виконати дії $\left(\dfrac{2 + i}{2 - i}\right)^3 + (6 + 3i)(2 + 3i)$.

11. Знайти аргумент комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$.

12. Записати число $z = -1 - i$ в тригонометричній формі.

13. Записати в тригонометричній формі число $z = 2 - 2i$.

14. Відомо комплексні числа z_1 та z_2. Знайти алгебраїчну та тригонометричну форми числа $z = z_1 + z_2$. Побудувати числа z_1, z_2 та z на комплексній площині. Обчислити z^6 за формулою Муавра.

а) $z_1 = -2$; $\quad z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;

б) $z_1 = 2$; $\quad z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$;

в) $z_1 = -2i$; $\quad z_2 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$;

г) $z_1 = 2i$; $\quad z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

15. Зобразити на комплексній площині числа $z_1 = -4 - 4i$ та $z_2 = 3(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$. Записати число z_1 у тригонометричній, а число z_2 в алгебраїчній формі.

16. Виконати ділення $\dfrac{2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)}{3(\cos 150^\circ - i\sin 150^\circ)}$.

17. Обчислити $(-\sqrt{3} - i)^5$.

18. Обчислити $\left[3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right]^{-3}$.

19. Обчислити $(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)^{15}$.

20. Обчислити $(1 - i\sqrt{3})^{12}$.

21. Обчислити $\sqrt{i}$.

22. Обчислити $\sqrt{21 - 20i}$.

23. Знайти $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$.

24. Обчислити $\sqrt[3]{z}$, де $z = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$.

25. Обчислити $z = \sqrt[4]{-8 - 8i\sqrt{3}}$.

26. Обчислити $\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}$.

27. Знайти $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2, z_1^4, $\sqrt[3]{z_2}$, якщо

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad z_2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

28. Записати в показниковій формі комплексні числа:

а) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; б) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

29. Записати комплексні числа в алгебраїчній та тригонометричній формах:

а) $15e^{\frac{3\pi}{2}i}$; б) $4e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

30. Записати в показниковій формі комплексні числа:

а) 2^{3i}; б) $3^{-\frac{1}{2}i}$; в) 5^{1+i}; г) 10^{1-i}.

31. Обчислити значення тригонометричних функцій комплексного числа:

а) $\cos(2 - i)$; б) $\sin(-3i)$.

Глава 4
МНОГОЧЛЕНИ

§ 4.1 ОПЕРАЦІЇ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ

Вираз вигляду: $$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (4.1)$$

називається ***многочленом*** або ***поліномом*** n***-го степеня*** від величини x. Многочлени позначаються, як правило, великими латинськими літерами, наприклад, $P(x)$, $Q(x)$, $S(x)$ і т. д. Інколи, щоб підкреслити степінь многочлена в загальному його позначенні, використовується запис $P_n(x)$, $Q_n(x)$, $S_n(x)$ тощо, де n — максимальний степінь величини x у многочлені, тобто степінь многочлена. Читається так: многочлен n-го степеня від x. Підкреслимо, що в означення (4.1) входить сума тільки цілих невід'ємних степенів x, узятих з деякими числовими коефіцієнтами. Числові коефіцієнти в загальному випадку є довільними комплексними числами, причому старший коефіцієнт a_0 має бути відмінним від нуля. Крім запису многочлена $P(x)$ у вигляді (4.1) у залежності від зручності, користуються також записом многочлена за зростаючими степенями x:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \ . \qquad (4.2)$$

Із означення многочлена випливає, що будь-яке число x можна вважати многочленом першого степеня, тобто таким многочленом, в якого всі коефіцієнти, крім a_{n-1} (в запису (4.1)), або a_1 (в запису (4.2)), дорівнюють нулю. Коефіцієнт a_n (в (4.1)) або a_0 (в (4.2)) є многочлен нульового степеня, оскільки фактично є коефіцієнтом при x^0, його називають також вільним коефіцієнтом. Слід зазначити, що число нуль також уважається многочленом, але це єдиний многочлен, степінь якого не визначений.

Розглянемо дії над многочленами. Нехай є, наприклад, два многочлени, записані у вигляді (4.2.):

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

та

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n .$$

1. Два многочлени вважаються *рівними*, якщо рівні їхні коефіцієнти при однакових степенях x, тобто:

$$P(x) = Q(x) \quad \Rightarrow \quad a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots,$$

$$a_{n-1} = b_{n-1}, \quad a_n = b_n . \tag{4.3}$$

2. **Сумою** двох многочленів називається многочлен, коефіцієнти якого одержуються додаванням відповідних коефіцієнтів многочленів доданків, які знаходяться при однакових степенях x, тобто:

$$P(x) + Q(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} + c_n x^n , \tag{4.4}$$

$$\text{де} \quad c_i = a_i + b_i \qquad \forall i = 0, 1, \ldots, n .$$

3. **Добутком** двох многочленів називається многочлен, коефіцієнти якого дорівнюють сумі всіляких добутків коефіцієнтів співмножників, тобто:

$$P(x) \cdot Q(x) = d_0 + d_1 x + \ldots + d_{2n-1} x^{2n-1} + d_{2n} x^{2n} , \tag{4.5}$$

де $d_i = \sum_{k+l=i}^{n} a_k b_l , \quad i = 0, 1, \ldots, 2n-1, 2n.$

Наприклад, $d_0 = a_0 b_0 , \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$ і т.д.

Ми розглянули операції над многочленами однакового степеня n. У загальному ж випадку максимальний степінь x у многочленах може бути різним. Наприклад, нехай є два многочлени

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

та

$$Q_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m ,$$

при $a_n , b_m \neq 0$

Тоді степінь суми буде дорівнювати n, якщо $n > m$, але при $n = m$ він випадково може бути менше n, коли, наприклад, $b_n = -a_n$. Степінь же добутку двох многочленів дорівнює сумі степенів $n + m$ цих многочленів.

Операція *віднімання* випливає безпосередньо з операції додавання (4.4), якщо взяти до уваги, що протилежним по відношенню до многочлена $P(x)$ (4.2) є многочлен:

$$-P(x) = -a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1}x^{n-1} - a_n x^n \ . \qquad (4.6)$$

Оскільки комплексні числа підпорядковуються законам комутативності (3.5) та асоціативності (3.6) суми, то з означення (4.4) випливають властивості комутативності та асоціативності суми многочленів. Враховуючи (3.7) та (3.8) і той факт, що в означенні добутку (4.5) коефіцієнти обох многочленів враховуються рівноправно, випливають властивості комутативності та асоціативності добутку двох многочленів. Із означень (4.4) та (4.5) випливає також дистрибутивність цих операцій:

$$[P(x) + Q(x)]S(x) = P(x)S(x) + Q(x)S(x) \ . \qquad (4.7)$$

Із означення (4.3), як легко бачити, випливає твердження, що поняття оберненого многочлена не існує. Дійсно, якщо припустити, що існує обернений многочлен $P^{-1}(x)$, то для $n \geq 1$ повинна виконуватися рівність:

$$P(x) \cdot P^{-1}(x) = 1 \ , \qquad (4.8)$$

а це суперечить (4.3). Тобто операції *ділення*, яка є оберненою до операції множення, для многочленів не існує. Звідси випливає, що частка двох многочленів, за аналогією систем цілих чисел, у загальному випадку має залишок. Тобто:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \ , \qquad (4.9)$$

де $R(x)$ — залишок від ділення $P(x)$ на $Q(x)$. Причому, якщо коефіцієнти многочленів $P(x)$ та $Q(x)$ дійсні, то коефіцієнти частки $F(x)$ та залишку $R(x)$ також будуть дійсними.

§ 4.2 КОРЕНІ МНОГОЧЛЕНІВ

Розглянемо довільний многочлен $P(x)$. Візьмемо деяке число x_0 і підставимо його у вираз $P(x)$ замість x. Таке значення многочлена $P(x_0)$ називається значенням многочлена $P(x)$ при $x = x_0$. З означення многочлена легко побачити, що, коли

$$P(x) = Q(x) + S(x) \qquad \text{або} \qquad P(x) = Q(x)S(x) ,$$

то

$$P(x_0) = Q(x_0) + S(x_0) \qquad \text{або} \qquad P(x_0) = Q(x_0)S(x_0) .$$

Якщо многочлен $P(x)$ перетворюється на нуль, при підстановці у нього числа x_0, тобто $P(x_0) = 0$, то число x_0 називається *коренем многочлена* $P(x)$ (або коренем рівняння $P(x) = 0$). Вираз $x - x_0$ при цьому сам є многочленом першого степеня, тобто лінійним многочленом. У випадку його множення на будь-який інший многочлен його називають *простим множником.*

Теорема 4.1 *Залишок від ділення многочлена $P(x)$ на лінійний многочлен $x - x_0$ дорівнює значенню многочлена в точці x_0, тобто $P(x_0)$.*

Дійсно, нехай:

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + R(x) , \tag{4.10}$$

де $R(x)$ — залишок від ділення. Тоді при $x = x_0$ одержимо:

$$P(x_0) = (x_0 - x_0)Q(x_0) + R(x_0) ,$$

звідки:

$$P(x_0) = R(x_0) . \tag{4.11}$$

Теорема доведена.

Теорема 4.2 (теорема Безу). *Кожний многочлен $P(x)$ ділиться без залишку на лінійний многочлен $x - x_0$, якщо x_0 є його коренем.*

Дійсно, якщо припустити, що x_0 є коренем многочлена $P(x)$, то, враховуючи означення кореня многочлена ($P(x_0) = 0$), можемо стверджувати (згідно з теоремою 4.1), що $R(x_0) = 0$. Таким чином:

$$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) . \tag{4.12}$$

Теорема доведена.

Може так статися, що многочлен $P(x)$ ділиться не тільки на $x - x_0$, а й на $(x - x_0)^k$, де k натуральне число більше за одиницю. У цьому випадку кажуть, що число x_0 є *кратним коренем многочлена*, а число k називається *кратністю кореня*. При $k = 1$ корінь x_0 називається *простим*.

Наведемо далі без доведення так звану "основну теорему алгебри", або теорему Ґаусса.

Теорема 4.3 (теорема Ґаусса, або основна теорема алгебри). *Будь-який многочлен степеня $n \geq 1$ має принаймні один корінь (у загальному випадку комплексний).*

Ця теорема має важливий наслідок. Нехай x_1 є одним з коренів многочлена n-го степеня $P(x)$, тоді згідно з теоремою 4.3 $P(x) = (x - x_1)P_1(x)$, де $P_1(x)$ — уже многочлен степеня $n - 1$. Якщо знову припустити, що x_2 є корінь многочлена $P_1(x)$, то $P_1(x) = (x - x_2)P_2(x)$. Ці міркування можна продовжити й далі, доки ми не дістанемо многочлен нульового степеня, тобто сталу a_0, тоді:

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \quad . \qquad (4.13)$$

Таким чином, *будь-який многочлен n-го степеня $P(x)$* або *будь-яке рівняння $P(x) = 0$ степеня n має рівно n коренів.*

Деякі з цих коренів можуть бути кратними, тобто збігатися. Тоді формула (4.13) перепишеться у вигляді:

$$P(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_l)^{k_l} \quad , \qquad (4.14)$$

де $k_1, k_2, \ldots, k_l$ $(l \leq n)$ — різні корені многочлена.

При цьому $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n$, тобто *сума кратностей усіх різних коренів дорівнює степеневі многочлена.* Тоді наслідок теореми 4.3 можна узагальнити: кожний многочлен $P(x)$ степеня $n \geq 1$ має n коренів, якщо кожний з коренівураховувати рівно стільки разів, яка його кратність.

Розглянемо довільний многочлен n-го степеня:

$$P_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n \quad ,$$

в якому $b_0 \neq 0$. Якщо ми розділимо всі коефіцієнти на b_0, то одержимо многочлен, в якого коефіцієнт при максимальному степені x буде дорівнювати одиниці, тобто:

$$P_n(x) = x^n + \frac{b_1}{b_0}x^{n-1} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{b_0}x + \frac{b_n}{b_0} \quad .$$

Якщо тепер переозначимо коефіцієнти $\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \ldots, \frac{b_{n-1}}{b_0}, \frac{b_n}{b_0}$

через $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{n-1},\ a_n$ відповідно, то одержимо многочлен:

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \ . \tag{4.15}$$

Такий многочлен n-го степеня, в якого коефіцієнт при x^n дорівнює одиниці, називається *зведеним*. З наведених вище міркувань видно, що будь-який многочлен можна звести до зведеного вигляду.

Теорема 4.4 (теорема Вієта). *Довільний k-ий коефіцієнт зведеного многочлена дорівнює сумі добутків його k коренів, узятих зі своїм знаком, якщо k парне, і з протилежним знаком, якщо k непарне.*

Дійсно, нехай є зведений многочлен n-го степеня (4.15) і нехай числа $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ є його корені. Тоді згідно з (4.14) його можна записати у вигляді добутку:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \ . \tag{4.16}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n &= \\ = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \ , \end{aligned} \tag{4.17}$$

то, зводячи подібні члени та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \ , \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \ , \\ a_3 &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) \ , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(x_1x_2\dots x_{n-1} + x_1x_2\dots x_{n-2}x_n + \\ &\quad + \dots + x_1x_3\dots x_n) \ , \\ a_n &= (-1)^n x_1x_2\dots x_n \ . \end{aligned} \tag{4.18}$$

Теорема доведена.

Таким чином, k-ий коефіцієнт у лівій частині рівності (4.17) дорівнює сумі всіляких добутків по k коренях, узятий зі знаком плюс або мінус у залежності від парності k. Формули (4.18) називаються *формулами Вієта*.

З формул (4.18) безпосередньо випливають **властивості** зведених многочленів:

1. Якщо зведений многочлен з цілими коефіцієнтами має раціональні корені, то вони обов'язково цілі;

2. Будь-який цілий корінь зведеного многочлена з цілими коефіцієнтами є дільник його вільного коефіцієнта.

В окремому випадку при $n = 2$ формули (4.18) перетворюються на відомі зі шкільного курсу математики формули Вієта для рівняння другого степеня $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$:

$$a_1 = -(x_1 + x_2), \qquad a_2 = x_1 x_2 . \tag{4.19}$$

Для випадку $n = 3$, тобто для кубічного рівняння $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$, ці формули набирають вигляду:

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3), \qquad a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 ,$$
$$a_3 = -x_1 x_2 x_3 . \tag{4.20}$$

Формули Вієта (4.18) дають можливість записати зведений многочлен за заданими його коренями, а властивості зведених многочленів, які є наслідками теореми Вієта, дають можливість розкласти зведений многочлен на прості множники.

Приклади.

1. Скласти многочлен третього степеня, коренями якого є числа $1, 2, 3$.

За формулами Вієта (4.20) маємо: $a_1 = -(1 + 2 + 3) = -6$;

$$a_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 11 ; \qquad a_3 = -1 \cdot 2 \cdot 3 = -6 .$$

Тоді:
$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 .$$

2. Скласти многочлен четвертого степеня, який простими коренями має числа 5 та -2 і двократним коренем число 3.

Згідно з формулами (4.18) знаходимо:

$$a_1 = -(5 - 2 + 3 + 3) = -9 ;$$
$$a_2 = 5 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 17 ;$$
$$a_3 = -[5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 \cdot 3] = 33 ;$$
$$a_4 = 5 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 3 = -90 .$$

Тоді:
$$P(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90 .$$

3. Розкласти многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ на прості множники.

Оскільки многочлен зведений із цілими коефіцієнтами, то його цілі корені будуть дільниками вільного коефіцієнта -6.

Дільники вільного коефіцієнта будуть $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Перевіряємо, які з цих дільників є коренями даного многочлена:

$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$ — корінь многочлена;

$P(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$ — корінь многочлена;

$P(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3$ — корінь многочлена.

Таким чином: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Порівняйте з прикладом 1.

4. Розкласти зведений многочлен $P_4(x) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8$ на прості множники.

Дільники вільного коефіцієнта будуть: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8$.

Перевіримо, які з цих дільників є коренями даного многочлена.

$$P_4(1) = 1 - 8 + 21 - 22 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \text{ — }$$

корінь многочлена $P_4(x)$.

Отже, $P_4(x)$ ділиться на $x - 1$. Ділення виконується у стовпчик, як у системі дійсних чисел:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 x^4 & -8x^3 & +21x^2 & -22x & +8 & x-1 \\ \cline{6-6}
 -\ x^4 & -x^3 & & & & x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \\ \cline{1-2}
 & -7x^3 & +21x^2 & -22x & +8 & \\
 & -\ -7x^3 & +7x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 14x^2 & -22x & +8 & \\
 & & -\ 14x^2 & -14x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -8x & +8 & \\
 & & & -\ -8x & +8 & \\ \cline{4-5}
 & & & & = &
\end{array} .$$

Поділивши $P_4(x)$ на $x - 1$, розкладемо многочлен на множники:

$$P_4(x) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8 = (x-1) \times$$
$$\times\ (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) = (x-1)P_3(x) .$$

Отриманий многочлен $P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ має вільний коефіцієнт -8 . Аналогічно:

$$P_3(1) = 1 - 7 + 14 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \text{ — }$$

корінь многочлена $P_3(x)$.

Ділимо $P_3(x)$ на $x - 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
 x^3 & -7x^2 & +14x & -8 & x-1 \\ \cline{5-5}
 -\ x^3 & -x^2 & & & x^2 - 6x + 8 \\ \cline{1-2}
 & -6x^2 & +14x & -8 & \\
 & -\ -6x^2 & +6x & & \\ \cline{2-3}
 & & 8x & -8 & \\
 & & -\ 8x & -8 & \\ \cline{3-4}
 & & & = &
\end{array} .$$

Тоді $P_4(x) = (x-1)^2(x^2 - 6x + 8) = (x-1)^2 P_2(x)$.

Многочлен $P_2(x) = x^2 - 6x + 8$ має корені 2 та 4.

Остаточно маємо:

$$P_4(x) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 22x + 8 = (x-1)^2(x-2)(x-4) .$$

§ 4.3 МНОГОЧЛЕНИ З ДІЙСНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглянемо тепер многочлени, коефіцієнти яких є дійсні числа.

Теорема 4.5 *Якщо комплексне число x_0 є коренем многочлена $P(x)$ із дійсними коефіцієнтами, то спряжене число x_0^* також буде коренем $P(x)$, причому тієї ж кратності.*

Нехай $P(x)$ є многочлен з дійсними коефіцієнтами:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \ .$$

Якщо комплексне число x_0 є його коренем, то

$$a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1} x_0 + a_n = 0 \ .$$

Остання рівність не порушиться, якщо в ній усі числа замінити на спряжені. Але всі коефіцієнти a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n, а також число 0, яке стоїть справа — дійсні, тому вони не зміняться й ми отримуємо:

$$a_0 (x_0^*)^n + a_1 (x_0^*)^{n-1} + \dots + a_{n-1} (x_0^*) + a_n = 0 \ ,$$

звідки випливає:

$$P(x_0^*) = 0 \ . \qquad (4.21)$$

Тобто многочлен з дійсними коефіцієнтами завжди поруч з комплексним коренем має також спряжений йому корінь.

Доведемо тепер, що корені x_0 та x_0^* мають однакову кратність. У даному випадку нехай ці корені мають відповідно кратності k та l і нехай $k > l$. Тоді $P(x)$ ділиться на l-ий степінь деякого многочлена $Q(x)$:

$$P(x) = Q^l(x) S(x) \ .$$

Многочлен $S(x)$, як частка від ділення двох многочленів з дійсними коефіцієнтами, також має дійсні коефіцієнти. Тоді $S(x)$ повинен мати число x_0 своїм $k-l$ кратним коренем, оскільки число x_0^* не є його коренем. Звідки випливає, що $k = l$.

Теорема доведена.

Якщо ми тепер серед усіх коренів многочлена n-го степеня $P(x)$ виберемо дійсні корені x_1, x_2, ..., x_k із кратностями m_1, m_2, ..., m_k, то формулу (4.14) можна переписати у вигляді:

$$P(x) = a_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k} p(x) \ , \quad (4.22)$$

де $p(x)$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами степені $n - (m_1 + m_2 + \dots + m_k)$, який має лише комплексні корені. Оскільки згідно з теоремою 4.5 комплексні корені є попарно спряжені, то їх можна об'єднати. Нехай $x_0 = a + ib$ комплексний корінь, тоді $x_0^* = a - ib$ — його спряжений, звідки:

$$[x_0 - (a + ib)][x_0 - (a - ib)] = x^2 + px + q \ ,$$

де $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$. Оскільки спряжені корені входять в однакових степенях, то:

$$(x - x_0)^l \cdot (x - x_0^*)^l = (x^2 + px + q)^l \ .$$

Тобто многочлен $p(x)$ можна розкласти на квадратні многочлени вигляду $x^2 + px + q$:

$$p(x) = (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i} \ , \quad (4.23)$$

де
$$l_1 + l_2 + \dots + l_i = \frac{1}{2}[n - (m_1 + m_2 + \dots + m_k)] \ .$$

Ураховуючи вирази (4.22) та (4.23), одержимо:

$$P(x) = a_0(x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_k)^{m_k} \times$$
$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i} \ , \quad (4.24)$$

де перші k многочленів відповідають дійсним кореням, а останні i многочленів — парам комплексно спряжених коренів. Таким чином *будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами від дійсного аргументу можна розкласти на дійсні лінійні та квадратичні множники.*

У зв'язку з цим лінійні та квадратичні множники зі старшим коефіцієнтом, рівним одиниці, тобто $x - x_k$, $x^2 + px + q$, називаються *простими множниками* або *простими многочленами* (відповідно першого та другого степенів).

Слід відзначити, що коли многочлен матиме тільки дійсні корені, то в правій частині розкладу (4.24) будуть присутні тільки множники вигляду $x - x_k$, а якщо всі корені многочлена будуть комплексні, то в розкладі будуть присутні тільки множники вигляду $x^2 + px + q$.

§ 4.4 РОЗКЛАД РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ НА ЕЛЕМЕНТАРНІ РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

Дроби вигляду $P(x)/Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени довільного степеня $(Q(x) \neq 0)$, називаються *раціональними дробами*. У загальному випадку раціональний дріб має вигляд:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n} . \quad (4.25)$$

Ми будемо розглядати раціональні дроби з дійсними коефіцієнтами. Якщо в (4.25) $m < n$, тобто степінь чисельника менше степеня знаменника, то дріб називається *правильним*, у протилежному випадку — *неправильним*.

Теорема 4.6 *Усякий раціональний дріб можна представити, притому єдиним способом, у вигляді суми цілої частини (многочлена) і правильного дробу.*

Доведемо єдиність даного твердження.

Дійсно, нехай є раціональний дріб $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, який можна представити:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} , \quad (4.26)$$

де степінь $R(x)$ менше степеня $Q(x)$.

Якщо матиме місце ще одна аналогічна рівність:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \bar{S}(x) + \frac{M(x)}{N(x)} ,$$

де степінь $M(x)$ менше степеня $N(x)$, то ми матимемо:

$$S(x) - \bar{S}(x) = \frac{M(x)}{N(x)} - \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{M(x)Q(x) - N(x)R(x)}{N(x)Q(x)} .$$

Оскільки зліва стоїть многочлен, а справа правильний дріб, то ми одержимо $S(x) - \bar{S}(x) = 0$ і тому:

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{R(x)}{Q(x)} .$$

Теорема доведена.

Теорема 4.7 *Сума правильних раціональних дробів є також правильний раціональний дріб.*

Нехай є два раціональні дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ та $\dfrac{P_k(x)}{Q_l(x)}$, тоді:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}+\frac{P_k(x)}{Q_l(x)}=\frac{P_m(x)Q_l(x)+P_k(x)Q_n(x)}{Q_n(x)Q_l(x)}\ . \tag{4.27}$$

Якщо зліва стоять правильні дроби, то $m<n$ і $k<l$. Однак тоді в чисельнику справа перший доданок має степінь $m+l<$ $<n+l$, а другий — степінь $k+n<n+l$, тобто весь чисельник матиме степінь менше $n+l$. Таким чином сума є правильний дріб.

З теореми 4.7 випливає, що сума правильних раціональних дробів принципово відрізняється від суми правильних числових дробів.

Ціла частина неправильного раціонального дробу добувається безпосередньо шляхом ділення чисельника на знаменник стовпчиком, як це робиться зі звичайними числами.

Приклади.

1. Виділити цілу частину неправильного раціонального дробу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де

$$P(x)=3x^4-5x^3+2x^2-4x+7\,,\qquad Q(x)=x^2-2x+1\ .$$

Поділимо чисельник на знаменник у стовпчик:

$$\begin{array}{r|l}
-\,3x^4-5x^3+2x^2-4x+7 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
3x^4-6x^3+3x^2 & 3x^2+x+1 \\ \cline{1-1}
-\,x^3-x^2-4x+7 & \\
x^3-2x^2+x & \\ \cline{1-1}
-\,x^2-5x+7 & \\
x^2-2x+1 & \\ \cline{1-1}
-3x-6 &
\end{array}\ .$$

Таким чином:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{3x^4-5x^3+2x^2-4x+7}{x^2-2x+1}=3x^2+x+1-\frac{3(x+2)}{x^2-2x+1}\ .$$

Многочлен $3x^2+x+1$ є ціла частина дробу, а залишок $-\dfrac{3(x+2)}{x^2-2x+1}$ — правильний раціональний дріб.

2. Виділити цілу частину неправильного раціонального дробу $\dfrac{x^4-5x^3+4x^2-3x+2}{x^3+3x^2+2x}$.

Поділимо чисельник на знаменник у стовпчик:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2 & x^3 + 3x^2 + 2x \\
-\ x^4 + 3x^3 + 2x^2 & \overline{x - 8} \\
\hline
-8x^3 + 2x^2 - 3x + 2 & \\
-\ -8x^3 - 24x^2 - 16x & \\
\hline
26x^2 + 13x + 2 & .
\end{array}
$$

Таким чином:

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = x - 8 + \frac{26x^2 + 13x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} .$$

3. Виділити цілу частину дробу: $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \dfrac{(x^3 + 2)^2}{(x^2 - 1)(x + 2)}$.

Оскільки $m = 6 > n = 3$, то дріб неправильний.

Для виділення цілої частини запишемо чисельник і знаменник у вигляді:

$$(x^3 + 2)^2 = x^6 + 4x^3 + 4 \ ;$$

$$(x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \ .$$

Поділимо чисельник на знаменник:

$$
\begin{array}{r|l}
x^6 + 4x^3 + 4 & x^3 + 2x^2 - x - 2 \\
-\ x^6 + 2x^5 - x^4 - 2x^3 & \overline{x^3 - 2x^2 + 5x - 6} \\
\hline
-2x^5 + x^4 + 6x^3 + 4 & \\
-\ -2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 & \\
\hline
5x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4 & \\
-\ 5x^4 + 10x^3 + x^2 - 10x & \\
\hline
-6x^3 + x^2 + 10x + 4 & \\
-\ -6x^3 - 12x^2 + 6x + 12 & \\
\hline
13x^2 + 4x - 8 & .
\end{array}
$$

Таким чином після ділення отримуємо частку $x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ і залишок $13x^2 + 4x - 8$, тобто:

$$\frac{(x^3 + 2)^2}{(x^2 - 1)(x + 2)} = x^3 - 2x^2 + 5x - 6 + \frac{13x^2 + 4x - 8}{(x^2 - 1)(x + 2)} .$$

Правильний раціональний дріб $P(x)/Q(x)$ називається *елементарним* або *найпростішим*, якщо його знаменник $Q(x)$ є простим многочленом. Враховуючи означення правильного дробу, ми приходимо до висновку, що елементарними є дроби:

$$\frac{A}{x-x_k}, \quad \frac{A_m}{(x-x_k)^m}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{B_nx+C_n}{(x^2+pz+q)^n}, \quad (4.28)$$

де A_i $(i=1, 2, \dots, m)$, B_j та C_j $(j=1, 2, \dots, n)$ — дійсні числа, m і n — натуральні числа, а тричлени з дійсними коефіцієнтами x^2+px+q мають тільки комплексні корені.

Дроби (4.28), у залежності від типу простого многочлена в знаменнику, називаються елементарними раціональними дробами першого та другого типів відповідно.

Теорема 4.8 *Усякий правильний раціональний дріб може бути виражений, і притому єдиним способом, у вигляді суми скінченної кількості елементарних дробів:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} +$$

$$+ \frac{D_1}{x-x_2} + \frac{D_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{D_{m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} + \dots +$$

$$+ \frac{E_1}{x-x_k} + \frac{E_2}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{E_{m_i}}{(x-x_k)^{m_i}} +$$

$$+ \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{B_{n_1}x+C_{n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} +$$

$$+ \frac{K_1x+L_1}{x^2+p_2x+q_2} + \dots + \frac{K_{n_2}x+L_{n_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}} + \dots +$$

$$+ \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_lx+q_l} + \dots + \frac{M_{n_j}x+N_{n_j}}{(x^2+p_lx+q_l)^{n_j}}. \quad (4.29)$$

Дійсно, якщо ми знаменник дробу $Q(x)$ представимо у вигляді (4.24), а чисельник $P(x)$ штучно зведемо до вигляду $P(x) = P(x)[(x-x_1)-(x-x_2)]$, оскільки величина x_2-x_1 є сталим множником і його завжди можна виділити з коефіцієнта a_0, то після почленного ділення чисельника на знаменник і повторення заново цих операцій $k+2l$ разів одержимо суму (4.29) елементарних дробів.

Теорема доведена.

Існує декілька способів знаходження невідомих коефіцієнтів, розташованих у чисельниках елементарних дробів. Найпоширенішим і найнадійнішим з них є *метод порівняння коефіцієнтів*. Суть його полягає в тому, що права частина розкладу (4.29) зводиться до спільного знаменника $Q(x)$, після чого знаменники відкидаються. У результаті чого ми отримуємо тотожність двох многочленів, де в лівій частині буде чисельник дробу $P(x)$, який має відомі коефіцієнти, а в правій — зведений чисельник елементарних дробів, який містить у собі невідомі коефіцієнти елементарних дробів. Порівнюючи далі коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах тотожності, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язуючи яку, знаходимо невідомі коефіцієнти. Надійність цього методу полягає в тому, що після порівняння коефіцієнтів ми маємо можливість упевнитися у виконанні початкової тотожності.

Якщо знаменник правильного дробу не має кратних коренів, то невідомі коефіцієнти значно швидше можна знайти, користуючись так званим *методом окремих значень* або *методом колокації*. Можна, не розкриваючи дужки в рівності, отриманій після зведення правої частини (4.29) до спільного знаменника, надати значенням x декілька значень, рівних дійсним кореням знаменника відповідно до кількості невідомих коефіцієнтів. Зручніше при цьому надавати x значення коренів знаменника. У результаті чого ми отримаємо необхідну кількість рівнянь, звідки й знаходимо шукані коефіцієнти.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів існує також *метод множення* обох частин тотожності, отриманої після зведення правої частини (4.29) до спільного знаменника на один і той же множник, який дає можливість відразу отримати один з невідомих коефіцієнтів.

Часто для зручності знаходження невідомих коефіцієнтів користуються декількома з наведених вище методів одночасно.

Приклади.

4. Розкласти правильний дріб $\dfrac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6}$ на елементарні дроби.

З прикладу 3 § 4.2 маємо:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x-2)(x-3) .$$

Таким чином, знаменник має дійсні прості корені:

$$x_1 = 1 , \quad x_2 = 2 , \quad x_3 = 3 .$$

Згідно з виразом (4.29)

$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} .$$

Зводячи дроби в правій частині до спільного знаменника, отримуємо:
$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

звідки:
$$9-5x = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)\ . \qquad (4.30)$$

Знайдемо спочатку невідомі коефіцієнти A, B, C методом порівняння, для чого розкриємо дужки в правій частині рівності та згрупуємо члени, тоді:
$$9-5x = (A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2C)\ .$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, одержимо три рівняння:
$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ 5A+4B+3C=5, \\ 6A+3B+2C=9. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $A=2$, $B=1$, $C=-3$.

Оскільки корені знаменника початкового дробу прості, то в цьому прикладі значно зручніше й швидше знайти невідомі коефіцієнти A, B, C, користуючись методом окремих значень. Дійсно, поклавши в тотожності (4.30) по черзі значення x рівними 1, 2, 3, одержимо: $4=2A$, $-1=-B$, $-6=2C$. Звідки знаходимо $A=2$, $B=1$, $C=-3$.

Таким чином:
$$\frac{9-5x}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-3}\ .$$

5. Розкласти правильний дріб
$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}$$
на елементарні дроби.

Розкладемо знаменник на прості дійсні множники. Оскільки
$$x^3+4x^2+4x = x(x^2+4x+4) = x(x+2)^2\ ,$$
то згідно з виразом (4.29) матимемо:
$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\ .$$

Зводячи праву частину до спільного знаменника, одержимо тотожність
$$3x^2+8 = A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx$$

$$3x^2+8 = (A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A\ .$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь:
$$\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+2B+C=0, \\ 4A=8, \end{cases}$$

звідки $A=2$, $B=1$, $C=-10$.

Таким чином:
$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{10}{(x+2)^2}\ .$$

6. Розкласти правильний дріб $\dfrac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}$ на елементарні дроби.

Згідно з (4.29) розклад даного правильного дробу матиме вигляд

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} ,$$

звідки після зведення правої частини до спільного знаменника одержимо:

$$x^2 = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2) .$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A, B, C покладемо:

$x = 1$, тоді $\quad 1 = C(1+2) \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{1}{3}$;

$x = -2$, тоді

$$(-2)^2 = A(-2-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 9A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4}{9} ;$$

$x = 0$, тоді $\quad 0 = A(0-1)^2 + B(0-1)(0+2) + C(0+2)$;

або $\quad A - 2B + 2C = 0$.

Маючи на увазі значення A і C, знаходимо $B = 5/9$.

Таким чином:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{x+2} + \frac{\frac{5}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}$$

або

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{x+2} + \frac{5}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right) .$$

7. Розкласти правильний дріб $\dfrac{3x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+4)}$ на елементарні дроби.

Згідно з виразом (4.29) маємо:

$$\frac{3x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} .$$

Після зведення правої частини до спільного знаменника одержимо:

$$3x^2 - 7x + 10 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2 + 4C .$$

Надаючи x значення 2 і порівнюючи коефіцієнти при x^2 і x^0 в обох частинах рівності, знаходимо:

$$\begin{aligned} x = 2: &\quad 8 = 4C + 4C , \\ x^2: &\quad 3 = A + C , \\ x^0: &\quad 10 = -2B + 4C , \end{aligned}$$

звідки $A = 2$, $B = -3$, $C = 1$ і

$$\frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{2x-3}{x^2+4} + \frac{1}{x-2} .$$

8. Розкласти правильний дріб $\dfrac{1}{x^4(x^2+1)}$ на елементарні дроби.

Згідно з виразом (4.29) маємо:

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Ex+F}{x^2+1} . \tag{4.31}$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A, B, C, D, E, F скористуємося методом множення. Помножимо обидві частини рівності (4.31) на x^4:

$$\frac{1}{x^2+1} = D + Cx + Bx^2 + Ax^3 + \frac{(Ex+F)x^4}{x^2+1} .$$

Поклавши $x = 0$, знаходимо $D = 1$. Тоді (4.31) можна записати:

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)} - \frac{1}{x^4} = \frac{-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Ex+F}{x^2+1} . \qquad (4.32)$$

Помножимо цей вираз на x^3, тоді:

$$-\frac{x}{x^2+1} = C + Bx + Ax^2 + \frac{(Ex+F)x^3}{x^2+1} .$$

Поклавши $x = 0$, одержимо $C = 0$. Помноживши обидві частини рівності (4.32) на x^2 і поклавши $x = 0$, знаходимо:

$$-\frac{1}{x^2+1} = Ax + B + \frac{(Ex+F)x^2}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad B = -1 .$$

Тоді вираз (4.32) матиме вигляд:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} = \frac{A}{x} + \frac{Ex+F}{x^2+1} . \qquad (4.33)$$

Помноживши рівність (4.33) на x і припустивши $x = 0$, одержимо:

$$\frac{x}{x^2+1} = A + \frac{(Ex+F)x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad A = 0 .$$

Далі з формули (4.33) маємо:

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{Ex+F}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad Ex + F = 1 \quad \Rightarrow \quad E = 0, \ F = 1 .$$

Таким чином:

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2+1} .$$

9. Розкласти правильний дріб $\frac{x}{x^3+1}$ на елементарні дроби.

Ураховуючи, що

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) ,$$

згідно з формулою (4.29) маємо:

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} ,$$

звідки:

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) .$$

Поклавши $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, знаходимо:

$$\begin{cases} 3A = -1, \\ A + C = 0, \\ A + 2B + 2C = 1, \end{cases}$$

звідки $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$.

Тоді:

$$\frac{x}{x^3+1} = -\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1} .$$

10. Розкласти правильний дріб $\dfrac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1 + x^2)^3}$ на елементарні дроби.

Згідно з виразом (4.29) маємо:

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1 + x^2)^3} = \frac{A_1 x + B_1}{1 + x^2} + \frac{A_2 x + B_2}{(1 + x^2)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{(1 + x^2)^3} .$$

Зводячи праву частину до спільного знаменника та прирівнюючи чисельники, маємо:

$$x^4 + 2x^2 + 4 = (A_1 x + B_1)(1 + x^2)^2 + (A_2 x + B_2)(1 + x^2) + A_3 x + B_3$$

або

$$x^4 + 2x^2 + 4 = (A_1 + B_1)x^4 + (2A_1 + A_2)x^3 + (A_3 + 2B_1 + B_2)x^2 + \\ + (A_1 + A_2)x + (B_1 + B_2 + B_3) .$$

Прирівнюючи коефіцієнти обох частин рівності при однакових степенях x, отримуємо: $A_1 = 0$, $B_1 = 1$, $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, $A_3 = 0$, $B_3 = 3$.

Таким чином:

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1 + x^2)^3} = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{3}{(1 + x^2)^3} .$$

ВПРАВИ

Виділити цілу частину неправильного раціонального дробу:

1. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2}$;

2. $\dfrac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$;

3. $\dfrac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 22x + 30}{x^3 - 7x - 6}$;

4. $\dfrac{x^4 - 11x^2 + 8x + 6}{x^3 - 4x^2 + x - 6}$;

5. $\dfrac{x^4 - 10x^3 + 41x^2 - 72x + 42}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$;

6. $\dfrac{x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1}$;

7. $\dfrac{x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^3 + x + 1}$;

8. $\dfrac{x^7 - x^5 + x^4 + x + 1}{x^4 + 1}$.

Розкласти правильні раціональні дроби на елементарні:

9. $\dfrac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}$;

10. $\dfrac{x^2 + 1}{(x - 1)^3(x + 3)}$;

11. $\dfrac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)}$;

12. $\dfrac{x^3 + 2}{(x + 1)^5}$;

13. $\dfrac{x^5}{(x-3)^7}$;

14. $\dfrac{2x^2-5x+8}{(x+1)(x^2+2)}$;

15. $\dfrac{x^2+x-1}{x(1+x^2)^2}$;

16. $\dfrac{2x^2-3x-3}{(x^2+1)(x-2)^2}$;

17. $\dfrac{x^3+4x^2+6x}{x^4+2x^3+3x^2+4x+2}$;

18. $\dfrac{1}{x^4+x^3-x-1}$;

19. $\dfrac{1}{x^5-x^2}$;

20. $\dfrac{2x^4+6x^2+x+4}{x^5+4x^2+4x}$;

21. $\dfrac{x^3+x+1}{x^4-81}$;

22. $\dfrac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+x+3)}$.

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

ГЛАВА 1

1. $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 11 \\ -11 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$

2. $C = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 22 & 14 \\ 5 & 15 & 20 & 30 \end{pmatrix}.$

3. 1) $AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$

2) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$

4. $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix};$

$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$

7. 1) -12; 2) 23; 3) -201; 4) -402.

9. $rang A = 1$; $rang B = 3$; $rang C = 4$;
$rang D = 3$; $rang F = 3$; $rang G = 3$.

10. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

$C^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $D^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -8 & 12 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 10 & -9 & 8 & -3 \end{pmatrix}$;

$F^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \\ -4 & -8 & 12 & 0 \\ 8 & 10 & -9 & -3 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 2

1. $x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -1.$

2. $x_1 = 2, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 1.$

3. $X = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

4. $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

5. 1) $x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0;$
   2) $x_1 = 0{,}1, \quad x_2 = -0{,}3, \quad x_3 = 1{,}6.$

6. 1) $$X_{зал} = \begin{pmatrix} 2 - 5x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_7 - x_8 \\ -2 + 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_7 + x_8 \\ -5 + 13x_1 + 10x_3 + 11x_7 + x_8 \end{pmatrix},$$

$$X_{баз} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix};$$

2) $$X_{зал} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{2}{5}x_5 + \frac{2}{3}x_6 + \frac{5}{6}x_7 + \frac{2}{3}x_8 \\ x_4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 + x_8 \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 \end{pmatrix},$$

$$X_{баз} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

7. 1) $X_{заг} = \begin{pmatrix} 1 - 3x_1 - x_4 \\ 1 - x_1 - x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}$, $X_{баз} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

2) $Y_{заг} = \begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - y_4 \\ 2 - y_1 - y_4 \\ -1 + y_1 + y_4 \end{pmatrix}$, $Y_{баз} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8. 1) 15; 2) −2.

9. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

10. 1) $X_{заг} = \begin{pmatrix} 2 + 2x_2 - x_3 \\ 4 - x_2 - x_3 \\ -88 + 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$, $X_{баз} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -88 \end{pmatrix}$;

2) $X_{заг} = \begin{pmatrix} 13 - 2x_2 + x_3 \\ 1 - \frac{2}{5}x_2 + x_3 \\ 1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$, $X_{баз} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 3

1. $3 - 15i$; $4 - 3i$.

2. $3 - 2i$; $-4 - 10i$; $5 + 5i$; $7 - 2i$.

3. i; -1.

4. $-142 - 65i$.

5. -4.

6. $7 - i$; $-3 + 7i$; $22 + 7i$.

7. $\sqrt{3} + i$.

8. $4 + 2i$.

9. $8 + 2i$; $23 + 14i$.

10. $3{,}6 + 24{,}8i$.

11. $\dfrac{11\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

12. $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

13. $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

14. а) $-3-i\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$; 1728;

б) $3-i\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; 1728;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$; $\sqrt{3}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$; 27;

г) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$; $\sqrt{7}\left(\cos\frac{14\pi}{6}+i\sin\frac{14\pi}{6}\right)$; 343.

15. $z_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$;

$z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

16. $\frac{\sqrt{2}}{3}(1+i)$.

17. $32(\sqrt{3}-i)$.

18. $\frac{1}{27}\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$.

19. $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. 4096.

21. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

22. $\pm(5-2i)$.

23. $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24}+i\sin\frac{11\pi}{24}\right)$; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{24}+i\sin\frac{23\pi}{24}\right)$;

$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{24}+i\sin\frac{35\pi}{24}\right)$; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{47\pi}{24}+i\sin\frac{47\pi}{24}\right)$.

24. $\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$

$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$

$\sqrt[3]{z_3} = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$

25. $1 + i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3} + i$; $-1 - i\sqrt{3}$.

26. $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$;

$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{19}{12}\pi + i\sin\frac{19}{12}\pi\right).$

27. $-4{,}144 + 15{,}456i$; $0{,}2415 - 0{,}6475i$;

$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k\right)\right)$, $k = 0,1,2$;

$1{,}8794 + 0{,}6840i$; $-1{,}5320 + 1{,}2856i$;

$-0{,}3472 - 1{,}9669i$.

28. а) $3i$; б) $-2(1 + i)$.

29. а) $-15i$; $15\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

б) $-2(\sqrt{3} - i)$; $4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

30. Вказівка: скористатися рівністю $a^x = e^{x\ln a}$, $a > 0$ і $a \neq 1$.

а) $e^{3i\ln 2}$; в) $5e^{i\ln 5}$; г) $10e^{-i\ln 10}$.

31. а) $-0{,}64 + 1{,}06i$; б) $-10{,}02i$.

1. $x+3$.

2. $x+1$.

3. $x-2$.

4. $x+4$.

5. $x-4$.

6. $x+5$.

7. x^2-x+2.

8. x^3-x^2+1.

9. $\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{5}{x-4}$.

10. $\frac{5}{32(x-1)}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{1}{2(x-1)^3}-\frac{5}{32(x+3)}$.

11. $\frac{1}{2(2x-1)}-\frac{1}{4(2x+3)}+\frac{1}{3(2x-5)}$.

12. $\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}+\frac{3}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+1)^5}$.

13. $\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{15}{(x-3)^3}+\frac{90}{(x-3)^4}+$

$+\frac{270}{(x-3)^5}+\frac{405}{(x-3)^6}+\frac{243}{(x-3)^7}$.

14. $\dfrac{5}{x+1} - \dfrac{3x+2}{x^2+2}$.

15. $\dfrac{2x+1}{(x^2+1)^2} + \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x}$.

16. $\dfrac{3-x}{x^2+1} + \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

17. $-\dfrac{1}{3(x+1)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{4(x+2)}{3(x^2+1)}$.

18. $\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$.

19. $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{x-1}{3(x^2+x+1)}$.

20. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2+2} + \dfrac{1}{(x^2+2)^2}$.

21. $\dfrac{29}{108(x+3)} + \dfrac{31}{108(x-3)} + \dfrac{8x-1}{18(x^2+9)}$.

22. $\dfrac{x+1}{x^2+x+2} + \dfrac{x-1}{x^2+x+3}$.

ДОДАТОК 1. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ ПІДСУМОВУВАННЯ

У вищій математиці дуже часто виникає необхідність підсумовування певних величин. У загальному випадку їх число може бути достатньо великим або нескінченним.

Очевидно, що розгорнутий вираз для суми, в якій число доданків n дорівнює навіть 10 або 20, є громіздкий і незручний. Наприклад,

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + \\ + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} .$$

Якщо число доданків нескінченне, то розгорнутий запис узагалі неможливий. Наприклад, сума нескінченно спадної геометричної прогресії

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

складається з нескінченного числа доданків.

Загальновживаним є, однак, скорочений запис, в якому знак операції підсумовування позначається великою грецькою літерою "сигма" — Σ. За його допомогою першу суму можна записати дуже лаконічно

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} = \sum_{k=1}^{20} a_k .$$

Читається цей запис так: сума по k від одиниці до двадцяти a k-го.

Якщо позначити $u_k = (1/2)^k$, то суму геометричної прогресії можна записати у вигляді

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Легко переконатися, що операція підсумовування має такі **властивості**:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n \text{ доданків}} = n \cdot c$, де c — const;

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} c a_i = c \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$,

   тобто *спільний множник виноситься за знак суми*;

3. $\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$;

4. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,

   тобто *сума не залежить від позначення індексу, за яким виконується підсумовування*. З огляду на це останній називають *німим індексом*.

У деяких випадках підсумовування виконується за двома індексами одночасно, тобто виникають подвійні суми, наприклад:

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{2} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) = \sum_{i=1}^{2} a_{i1} + \sum_{i=1}^{2} a_{i2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} a_{i3} = (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}) =$$

$$= a_{11} + \ldots + a_{23} .$$

У загальному випадку пишуть

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} ,$$

де $\sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik}$ — внутрішня сума, $\sum\limits_{i=1}^{n}$ — зовнішня сума.

Подвійні суми мають такі **властивості:**

5. $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ik},$$

тобто *величина суми не залежить від порядку підсумовування;*

6. $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_i c_l = c_l \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik},$$

тобто *множник, який не залежить від індексу підсумовування, можна виносити за знак відповідної суми.*

Відзначимо, що в математиці використовуються також такі позначення:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le m}} a_{ik}.$$

Якщо n збігається з m, то пишуть

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} = \sum_{i,\, k=1}^{n} a_{ik}.$$

Не беручи до уваги тему даного додатка, слід сказати, що за аналогією до позначення операції суми — Σ, існує також загальновживане в математиці позначення добутку — Π. Наприклад, добуток $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ може бути записаний як $\prod_{i=1}^{5} a_i$; якщо ж добуток нескінченний, то його скорочений запис матиме вигляд: $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$.

Доречно відмітити, що для випадку порожньої множини $\varnothing$ сума та добуток означаються таким чином:

$$\sum_{i \in \varnothing} a_i = 0, \qquad \prod_{i \in \varnothing} a_i = 1.$$

Знак суми Σ в сучасному його загальноприйнятому позначенні в математиці був уведений у 1755 році Л. Ейлером (1707–1783), а знак добутку Π у 1812 році К. Ґауссом (1777–1855).

ДОДАТОК 2.

Елементи теорії комбінаторики були відомі ще в давнину. Перші відомості, пов'язані з елементами комбінаторики зустрічаються в давньогрецького математика Діофанта Александрійського (III ст.).

На початок XVII ст. було відомо багато результатів у цій галузі математиків Н. Тартальї (1499–1557), П. Ерігона (XVII ст.), Б. Паскаля (1623–1662), П. Ферма (1601–1665). Але наукове обґрунтування теорії було зроблено двадцятирічним Г. В. Ляйбніцем (1646–1716) у праці «Міркування про комбінаторне мистецтво» в 1866 р., звідки й отримав назву цей розділ математики.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КОМБІНАТОРИКИ. БІНОМИ. БІНОМ НЬЮТОНА

Комбінаторика вивчає кількість комбінацій, які можна скласти зі скінченної множини елементів будь-якого походження.

У цьому розділі математики широко використовується таке поняття, як *факторіал*. Факторіал позначається знаком оклику, розташованим праворуч величини, яку він визначає. Наприклад: $5!$ — п'ять факторіал.

Факторіалом довільного натурального числа n називається добуток натуральних чисел від одиниці до n, тобто

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n .$$

Наприклад, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$. Як видно, факторіал є швидкозростаючою величиною. Нуль-факторіал за означенням уважається рівним одиниці, тобто: $0! = 1$.

Назва факторіал походить від латинського слова factor — "множник", термін запровадив у 1800 році Арбогаст. Позначення $n!$ уперше з'явилося в 1808 році в німецького математика Х. Крамка (1760–1826).

Відзначимо, що поняття факторіал існує і для більш загального випадку комплексних чисел, що буде розглянуто нами надалі в курсі спеціальних функцій.

Розглянемо основні поняття комбінаторики.

Перестановки. *Перестановками називаються будь-які комбінації, які складаються з n даних елементів і відрізняються тільки порядком їх розташування.*

Назва "перестановка" вперше була вжита викладачем єзуїтського коледжу А. Таке (1612–1660) й залишилася в математиці завдяки працям Я. Бернуллі (1654–1705). Позначення P походить від латинського permulation — "перестановка", уведено в математиці Поттсом.

Кількість усіх можливих перестановок, які можна скласти з n різних елементів, позначається символом P_n і дорівнює добутку всіх цілих чисел від 1 до n включно:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n = n! \quad \text{(Д2.1)}$$

Нехай, наприклад, є три елементи: a_1, a_2, a_3. Різними перестановками із цих елементів будуть: $(a_1 a_2 a_3)$, $(a_1 a_3 a_2)$, $(a_2 a_1 a_3)$, $(a_2 a_3 a_1)$, $(a_3 a_1 a_2)$, $(a_3 a_2 a_1)$. Як видно кількість перестановок трьох елементів дорівнює шести. І дійсно, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Приклад.

1. Скільки різних шестизначних чисел можна скласти із цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$ за умови, що кожна цифра в числі може траплятися не більше одного разу?

Оскільки кожна перестановка з даних шести цифр утворює нове шестизначне число, то всього можна скласти $P_6 = 6!$ шестизначних чисел. Із цієї кількості потрібно відняти кількість шестизначних чисел, які починаються з нуля. Щоб знайти кількість таких чисел, зафіксуємо 0 на першому місці, а останніми п'ятьма цифрами утворюємо всі можливі перестановки, яких буде $P_5 = 5!$.

Число шестизначних чисел, отриманих з даних цифр буде

$$6! - 5! = 720 - 120 = 600 .$$

Розміщення. *Розміщеннями називаються будь-які комбінації, які складаються з m елементів даних n різних елементів і відрізняються або їх складом, або порядком розташування.*

Назва "розміщення" вперше зустрічається в Я. Бернуллі (1654–1705). Позначення розміщення як A_n^m походить від латинського arrangement і введено в математику в 1904 р. Нетто.

Кількість можливих розміщень, які можна скласти з n різних елементів по m елементів, позначається символом A_n^m і дорівнює добутку m послідовних цілих чисел, з яких найбільше є n:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1)) \ . \qquad (Д2.2)$$

Нехай, наприклад, є три елементи: a_1, a_2, a_3. Тоді різними розміщеннями із трьох елементів, наприклад, по два, будуть: $(a_1 a_2)$; $(a_2 a_1)$; $(a_1 a_3)$; $(a_3 a_1)$; $(a_2 a_3)$; $(a_3 a_2)$. Як видно, кількість розміщень із трьох елементів по два дорівнює шести. І дійсно: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Відзначимо, що з означення розміщення (Д2.2) випливає, що перестановка (Д2.1) є окремим випадком розміщення з n елементів по n, тобто

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n! \ . \qquad (Д2.3)$$

Приклад.

2. Скільки різних цілих чисел можна скласти з цифр $1, 2, 3, 4, 5$, якщо в позначенні кожного числа кожна цифра трапляється не більше одного разу?

З даних п'яти цифр можна скласти $A_5^5 = P_5$ п'ятизначних чисел, A_5^4 чотиризначних, A_5^3 тризначних тощо. Усього можна скласти різних цілих чисел

$$\begin{aligned} A_5^5 + A_5^4 + A_5^3 + A_5^2 + A_5^1 &= 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 + 5\cdot4\cdot3\cdot2 + 5\cdot4\cdot3 + 5\cdot4 + 5 = \\ &= 5(4\cdot3\cdot2\cdot1 + 4\cdot3\cdot2 + 4\cdot3 + 4 + 1) = \\ &= 5(4(3\cdot2\cdot1 + 3\cdot2 + 3 + 1) + 1) = \\ &= 5(4(3(2\cdot1 + 2 + 1) + 1) + 1) = \\ &= 5(4(3(2(1+1) + 1) + 1) + 1) = \\ &= 5(4(3\cdot5 + 1) + 1) = 5\cdot65 = 325 \ . \end{aligned}$$

Сполучення. ***Сполученнями називаються будь-які комбінації, які складаються з n різних елементів по m елементів і відрізняються хоча б одним елементом.***

Термін "сполучення" походить від латинського combination і вперше з'явився в 1665 р. завдяки працям Б. Паскаля (1623–1662). Формула для числа сполучень була відома Н. Тартальї (1499–1557), незалежно від нього формулу знайшов П. Ерігон (XVII ст.) в 1634 р. Позначення C_n^m за першою літерою латинської назви введено Поттсом у 1880 р. Друге прийняте зараз позначення $\binom{n}{m}$ введено Л. Ейлером у 1778 р.

Таким чином, сполучення з n елементів по m елементів — це всі m-комбінації (або m-групи), які мають однаковий склад елементів. Комбінації (або групи), які відрізняються одна від одної тільки порядком елементів, не вважаються різними.

Кількість можливих сполучень, які можна скласти з n різних елементів по m елементів позначається символом C_n^m і визначається формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \quad . \qquad (Д2.4)$$

Якщо у формулі (Д2.4) розкрити факторіали й спростити, то вона матиме вигляд:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)m} \quad . \qquad (Д2.5)$$

Порівнюючи чисельник (Д2.5) з означенням розміщення (Д2.2), а знаменник — з означенням перестановки (Д2.1), приходимо до висновку, що сполучення зв'язані з розміщеннями та перестановками формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad . \qquad (Д2.6)$$

Формулу сполучення (Д2.4) неважко довести методом математичної індукції, що ми рекомендуємо зробити читачу самостійно.

Відзначимо, що за означення для сполучення C_n^0 береться одиниця, тобто

$$C_n^0 = 1 \quad . \qquad (Д2.7)$$

Сполученню притаманна одна цікава властивість, яка випливає безпосередньо з формули (Д2.4):

$$C_n^m = C_n^{n-m}\,, \qquad \text{при} \quad 0 \le m \le n \quad . \qquad (Д2.8)$$

Цією властивістю зручно користуватися при обчисленнях сполучень для випадку $m > n/2$.

Розглянемо сполучення для випадку невеликої кількості елементів. Нехай є п'ять елементів: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$. Різними сполученнями з п'яти елементів, узятих, наприклад, по три, будуть:

$$(a_1a_2a_3);\quad (a_1a_2a_4);\quad (a_1a_2a_5);\quad (a_1a_3a_5);\quad (a_1a_4a_5)\ ;$$

$$(a_1a_3a_4);\quad (a_2a_3a_5);\quad (a_2a_4a_5);\quad (a_2a_3a_4);\quad (a_3a_4a_5)\ .$$

Як видно, кількість сполучень із п'яти елементів по три дорівнює 10. І дійсно, згідно з формулою (Д2.4), маємо:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 2\cdot 5 = 10\ .$$

Приклади.

3. Яка кількість способів необхідна, щоб розподілити 10 чоловік по бригадах, якщо в кожній бригаді по 5 чоловік?

Склад кожної бригади є комбінацією з 10 елементів по 5. Отже, шукана кількість способів є число сполучень із 10 елементів по 5 у кожному:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!\,(10-5)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 4\cdot7\cdot9 = 252 \;.$$

4. Знайти кількість діагоналей опуклого n-кутника.

Оскільки кожні дві різні точки на площині визначають пряму лінію, то всі n точок утворюють C_n^2 прямих. Вилучаючи із цієї кількості число сторін n-кутника, рівне n, знаходимо число діагоналей:

$$C_n^2 - n = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} \;.$$

5. Розв'язати рівняння: $$C_{x+3}^{x+1} - 5C_{3x}^{2} = 6 - 19x^2 \;.$$

Скориставшись формулою (Д2.4), одержимо

$$\frac{(x+3)!}{(x+1)!\,2!} - 5\frac{(3x)!}{2!\,(3x-2)!} = 6 - 19x^2 \;,$$

$$\frac{(x+1)!\,(x+2)(x+3)}{(x+1)!\,2!} - 5\frac{3x\cdot(3x-1)(3x-2)!}{2!\,(3x-2)!} = 6 - 19x^2 \;,$$

$$\frac{1}{2}((x+2)(x+3) - 15x(3x-1)) = 6 - 19x^2$$

або

$$3x^2 - 10x + 3 = 0 \;.$$

Звідки $x_1 = 3$, $x_2 = 1/3$. Змісту задачі відповідає тільки корінь $x = 3$.

Біном. Добуток біномів, що відрізняються другими членами. *Біномом або двочленом називається вираз, який є сумою двох доданків,* наприклад, $x + a$. Якщо розглянути добуток n біномів, які відрізняються тільки другими членами, то одержимо

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) = x^n + s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \ldots + s_n \;, \qquad \text{(Д2.9)}$$

де $$s_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \;—$$

сума всіх других членів;

$$s_2 = \sum_{1\le i<k\le n}^{n} a_i a_k = a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_na_{n-1} \;—$$

сума всіх добутків других членів, узятих по два;

$$s_n = \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \dots a_n \text{ —}$$

добуток усіх других членів. Цю формулу легко довести методом математичної індукції.

Слово біном бере свій початок від Евкліда (III ст. до н. е.), де під цим терміном мався на увазі вираз $a + \sqrt{b}$. Італійський математик Н. Тарталья (1499–1557) у 1560 році вжив слово біном для виразу $ax^m + bx^n$. Сучасного змісту алгебраїчної суми двох членів термін біном набув з часів (1585 р.) голландського математика С. Стевіна (1548–1680).

Біном Ньютона. Якщо розглянути добуток n однакових біномів, то одержимо формулу, яка називається *біном Ньютона*:

$$(x + a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^n a^n \quad \text{, (Д2.10)}$$

або

$$(x + a)^n = x^n + n x^{n-1} a + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} a^2 + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} x^{n-k} a^k + \dots + a^n \quad \text{. (Д2.11)}$$

Коефіцієнти $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ називаються *біноміальними коефіцієнтами*. Слід відзначити, що в математичній літературі трапляється ще й таке позначення біноміальних коефіцієнтів:

$$C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \quad \text{. (Д2.12)}$$

Так, наприклад,

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \quad .$$

Формула (Д2.10) у таких позначеннях біноміальних коефіцієнтів матиме вигляд:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \dots +$$

$$+ \binom{n}{k} x^{n-k} a^k + \dots + \binom{n}{n} a^n \quad \text{. (Д2.13)}$$

Окремі випадки відомої формули бінома Ньютона (Д2.11) були відомі задовго до Ньютона в країнах Стародавнього Сходу. У загальних випадках для будь-яких цілих n вона зустрічається в арифметичних трактатах ал-Тусі (1201–1274) та ал-Каші (рік народження невідомий – 1429). І. Ньютону (1643–1727) належить заслуга розповсюдження її на випадок дробових та від'ємних показників.

Основні властивості формули бінома Ньютона:

1. *Кількість членів розкладу на одиницю більше показника бінома;*
2. *Член розкладу, що стоїть на $(k+1)$-му місці від початку, виражається формулою:* $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k$; (Д2.14)
3. *Сума біноміальних коефіцієнтів усіх членів розкладу дорівнює* 2^n, тобто $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$. (Д2.15)

Це легко довести, припустивши у формулі бінома Ньютона (Д2.10) $x = a = 1$.

4. *Знакозмінна сума біноміальних коефіцієнтів усіх членів розкладу дорівнює нулю,* тобто

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0 \quad . \text{(Д2.16)}$$

Для доведення цього співвідношення достатньо в (Д2.10) покласти $x = 1$, $a = -1$.

5. *Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях,* тобто

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2k} + \ldots =$$
$$= C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2k+1} + \ldots \quad . \text{(Д2.17)}$$

Очевидність цього співвідношення випливає з попередньої властивості.

Приклади.

1. Обчислити суму $S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

Розглянемо k-ий член цієї суми. Маємо:

$$kC_n^k = k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{k(n-1)!\,n}{(k-1)!\,k(n-k)!} =$$
$$= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1} \quad .$$

Отже, дану суму можна записати так:

$$S = nC_{n-1}^{0} + nC_{n-1}^{1} + \ldots + nC_{n-1}^{n-1} = n(C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1}) .$$

Якщо у формулі суми біноміальних коефіцієнтів (Д2.15) записати $n-1$ замість n, то ми одержимо:

$$C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1} .$$

Отже,

$$S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1} .$$

2. Виразити $\cos 5x$ через $\sin x$ і $\cos x$.

Припустивши у формулі Муавра (3.60) $n = 5$, одержимо

$$(\cos x + i \sin x)^5 = \cos 5x + i \sin 5x .$$

Розкладаючи ліву частину рівності за формулою бінома Ньютона (Д2.10) і користуючись формулами (Д2.12), (3.26), маємо:

$$\cos^5 x + i\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x \sin^2 x - 10 i \cos^2 x \sin^3 x +$$

$$+ 5\cos x \sin^4 x + i \sin^5 x = \cos 5x + i \sin 5x .$$

Прирівнявши дійсні частини цієї рівності, остаточно отримуємо розклад $\cos 5x$ за степенями $\sin x$ та $\cos x$:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x ,$$

або якщо скористатися рівністю $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x .$$

3. Виразити $\sin^5 x$ через синуси кратних дуг.

Скориставшись однією з формул Ейлера (3.71) і формулою бінома Ньютона (Д2.10), маємо:

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 = -\frac{i}{32}(e^{ix} - e^{-ix})^5 = -\frac{i}{32}(e^{i5x} - 5e^{i4x}e^{-ix} +$$

$$+ 10e^{i3x}e^{-i2x} - 10e^{i2x}e^{-i3x} + 5e^{ix}e^{-i4x} - e^{-i5x}) = -\frac{i}{32}(e^{i5x} -$$

$$- 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} - e^{-i5x}) .$$

Розписуючи показникові функції за формулами (3.69)–(3.71) і зводячи подібні члени, остаточно одержимо:

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x) .$$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Б

В

Д

Е

З

І

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

Щ

Навчальне видання

ГРИНЬОВ Борис Вікторович
КИРИЧЕНКО Ігор Костянтинович

ВИЩА АЛГЕБРА

Підручник
для вищих технічних навчальних закладів

Відповідальний за випуск *В. Л. Маркіанов*
Редактор *М. В. Москаленко*
Комп'ютерна верстка *І. Л. Маркіанової*
Коректор *І. Л. Безсонова*

Підписано до друку 04.01.2008. Формат 70×100/16. Гарнітура Journal.
Папір офсетний. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 14,95. Обл.-вид. арк. 14,42.
Наклад 5000 прим. Замовлення №157

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»
Україна 61103, м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а
Тел. (057) 758-83-93, 719-46-80, 719-17-26

Віддруковано з готових позитивів
у друкарні ПП «Модем», м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а
Тел. (057) 758-15-80, 758-15-90