П. Б. Гусятников, С. В. Резниченко

Векторная алгебра в примерах и задачах

учебное пособие для вузов

ВШ

П. Б. Гусятников, С. В. Резниченко

Векторная алгебра
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
инженерно-технических
специальностей вузов

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1985

ББК 22.151.5
Г96
УДК 516.8

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского института стали и сплавов; проф. *Е. В. Шикин* (Московский государственный университет им М. В. Ломоносова)

Гусятников П. Б., Резниченко С. В.

Г 96 Векторная алгебра в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов инж.-тех. спец. вузов. — М.: Высш. шк., 1985. — 232 с., ил

В пер. 55 к.

Книга посвящена векторному исчислению и его применению к решению геометрических задач. Приведены необходимые сведения из элементарной геометрии, рассмотрены векторы и линейные операции над ними, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.

$Г\frac{1702030000-313}{001(01)-85}$ 63—85

ББК 22.151.5
517.3

Петр Борисович Гусятников
Сергей Васильевич Резниченко

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Зав. редакцией литературы по физике и математике Е. С. Гридасова. Редактор Ж. И. Яковлева. Мл. редакторы С. А. Доровских, М. А. Бабаркина. Художник В. М. Боровков. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Л. А. Муравьева. Корректор Г И. Кострикова

ИБ № 4603

Изд. № ФМ-803. Сдано в набор 18.05.84. Подп. в печать 28.05.85. Формат 84×108 1/32. Бум. офс № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 12,18. усл печ. л 12,18. усл. кр.-отт. 10,56. уч. изд. л. Тираж 50 000 экз. Зак. № 278. Цена 55 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Настоящее пособие написано на основе опыта преподавания векторной алгебры в Московском физико-техническом институте. Оно соответствует программе курса «Аналитическая геометрия» для физико-математических факультетов университетов, педагогических институтов и втузов с расширенной математической подготовкой. В пособии подробно излагаются методы решения геометрических задач с использованием аппарата векторной алгебры и аналитической геометрии. Основные теоретические сведения кратко изложены в форме, позволяющей учащемуся непосредственно применять их при решении задач. В отличие от большинства имеющихся задачников, где основной акцент сделан на изучении и закреплении формальных операций над векторами, в данном пособии основным является развитие у учащегося технических навыков на основе решения содержательных геометрических задач.

В гл. 1 приведены необходимые теоретические сведения из элементарной геометрии. В гл. 2 рассматриваются векторы и линейные операции над ними, а в гл. 3 —скалярное произведение векторов. Материал этих глав соответствует программе средней школы и может быть использован учителями и учащимися при изучении геометрии в старших классах школы. В гл. 4 рассматриваются векторное и смешанное произведения векторов. В конце этой главы даются основные векторные задачи на прямую и плоскость, решение которых требует овладения всем аппаратом векторной алгебры. В Дополнении приводятся основные свойства геометрических преобразований.

В каждом параграфе примеры, как правило, расположены в порядке возрастания сложности. Более сложные примеры отмечены звездочкой. Решение примера начинается со знака $\triangle$ и заканчивается знаком $\blacktriangle$. Начало и конец доказательства важного теоретического факта отмечаются соответственно знаками $\square$ и $\blacksquare$.

Для более глубокого ознакомления с теорией можно использовать учебник: Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1980. Задачи и примеры для самостоятельного решения содержатся в книгах: Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1964, Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1976. Ряд примеров из этих задачников разобран в настоящем пособии.

Авторы выражают признательность проф. Л. Д. Кудрявцеву, проф. М. И. Шабунину и проф. Г. Н. Яковлеву, под непосредственным влиянием которых было написано это пособие. Кроме того, авторы благодарят рецензентов проф. В. А. Треногина, проф. Е. В. Шикина и доц. В. Б. Демьянова, сделавших ряд полезных замечаний, которые способствовали улучшению рукописи.

Авторы

Глава 1

СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Некоторые необходимые определения и обозначения

Отрезок прямой определяется двумя равноправными точками — его концами. Отрезок с концами A и B обозначают $[AB]$ или $[BA]$. Если A и B — различные точки (обозначение: $A \neq B$), то отрезок $[AB]$ единственным образом определяет прямую (AB). В этом случае, говоря об отрезке $[AB]$ как о множестве точек, считают, что это множество состоит из точек A и B и тех и только тех точек C, которые лежат на прямой (AB) между точками A и B. Если $A = B$, то отрезок $[AA]$ состоит из единственной точки A.

Если выбрана единица измерения, то каждому отрезку $[AB]$ можно сопоставить неотрицательное действительное число $|AB|$, которое называется его *длиной*. Условимся считать, что единица измерения длин выбрана, и, говоря о длинах отрезков, не будем указывать, в каких именно единицах они выражаются. Длина отрезка $[AB]$ называется также *расстоянием между точками A и B*.

Приведем свойства расстояния.

1°. $|AB| = |BA|$.

2°. $|AB| > 0$, *если* $A \neq B$, и $|AB| = 0$, *если* $A = B$.

3°. *Точка C лежит на отрезке* $[AB]$ *тогда и только тогда, когда* $|AC| + |CB| = |AB|$ (рис. 1.1).

Рис. 1.1

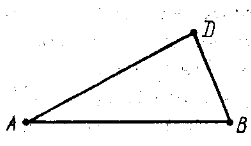


Рис. 1.2

4°. *Для любой точки D, не лежащей на отрезке* $[AB]$, *выполняется неравенство* $|AD| + |DB| > |AB|$, *называемое неравенством треугольника* (рис. 1.2).

Пусть $A \neq B$. Точка C отрезка $[AB]$, отличная от его концов, называется внутренней точкой этого отрезка. Ее положение на отрезке $[AB]$ однозначно определяется длиной отрезка $[AC]$ или отношением $\lambda = |AC| : |CB|$, которое называется *отношением, в котором точка C делит отрезок* $[AB]$, *считая от точки* A. Если $\lambda = 1$, т. е. $|AC| = |CB|$, то точка C называется *серединой отрезка* $[AB]$. Серединой отрезка $[AA]$ называется точка A. Если O — фиксированная точка, то отображение Z_O, при котором каждой точке A ставится в соответствие такая точка $B = Z_O(A)$, что O — середина отрезка $[AB]$, называется *центральной симметрией относительно точки* O. Точка O называется центром симметрии. Точки A и $Z_O(A)$ называются симметричными относительно точки O.

Любая лежащая на прямой l точка A разбивает эту прямую на два *луча* l_+ и l_- с началом в точке A. Эти лучи называются *дополнительными* друг к другу (обозначение: $l_+ = \overline{l}_-$, $l_- = \overline{l}_+$). Точка A принадлежит каждому из лучей l_+ и l_-. Две точки $B \neq A$ и $C \neq A$ прямой l принадлежат одному и тому же лучу с началом в точке $A \in l$ тогда и только тогда, когда отрезок $[BC]$ не содержит точки A, и принадлежат дополнительным лучам, когда точка A является внутренней точкой этого отрезка. Луч с началом в точке A, на котором лежит точка $B \neq A$, обозначают $[AB)$ (рис. 1.3).

Рис. 1.3

Рис. 1.4

Два луча, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными*, если их пересечение есть луч, и *противоположно направленными*, если их пересечение не является лучом. Например, на рис. 1.4 лучи $[AB)$ и $[CB)$ сонаправлены, а лучи $[BA)$ и $[CB)$ противоположно направлены.

Всякая прямая l, лежащая в плоскости P, разбивает эту плоскость на две *полуплоскости* P_+ и P_-, про которые говорят, что они *определяются прямой* l. Прямая l принадлежит каждой из этих полуплоскостей. Две точки $B \notin l$ и $C \notin l$ плоскости P лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой $l \subset P$, тогда и только тогда, когда отрезок $[BC]$ не имеет с прямой l общих точек.

Два луча $[AB)$ и $[CD)$, лежащие на параллельных несовпадающих прямых, принадлежат некоторой плоскости P. Лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются *сонаправленными* (обозначение: $[AB)\uparrow\uparrow[CD)$), если они лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой $(AC) \subset P$ (рис. 1.5), и *противоположно направленными* (обозначение: $[AB)\uparrow\downarrow[CD)$), если они лежат в разных полуплоскостях (рис. 1.6). Очевидно, что если $[AB)\uparrow\uparrow[CD)$, то $[\overline{AB})\uparrow\downarrow[CD)$.

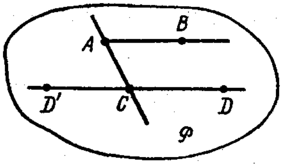


Рис. 1.5

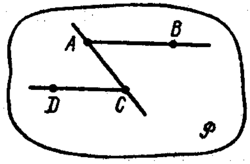


Рис. 1.6

Два луча $[AB)$ и $[CD)$ противоположно направлены тогда и только тогда, когда существует такая точка O, что $[CD) = Z_O([AB))$. Важным свойством сонаправленности лучей является транзитивность этого отношения: *два луча, порознь сонаправленные третьему, сонаправлены друг другу.*

Пусть P — некоторая плоскость, O, A, B — три ее различные точки, не лежащие на одной прямой. Точка B расположена в одной из двух полуплоскостей, на которые пря-

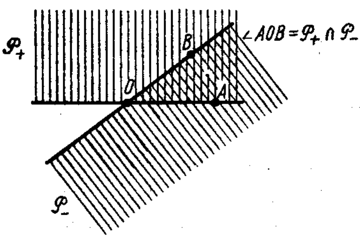


Рис. 1.7

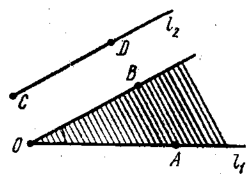


Рис. 1.8

мая (OA) разбивает плоскость P. Обозначим эту полуплоскость P_+. Аналогично, точка A расположена в некоторой полуплоскости P_-, определяемой в плоскости P прямой (OB). *Выпуклым углом* $\angle AOB$ *между лучами* $[OA)$ *и* $[OB)$ называется пересечение множеств P_+ и P_- (рис. 1.7). Величина выпуклого угла $\angle AOB$ называется *углом между лучами* $[OA)$ *и* $[OB)$ (обозначение: $\widehat{AOB}$). Эта величина может выражаться как в градусах, так и в радианах. При этом в радианной мере $0 < \widehat{AOB} < \pi$, а в градусной мере $0° < \widehat{AOB} < 180°$. Пусть лучи $l_1 = [OA)$ и $l_2 = [CD)$ не лежат на параллельных прямых. Из точки O выходит единственный луч $[OB)$, сонаправленный лучу l_2. *Углом между лучами* l_1 *и* l_2 называется угол $\widehat{AOB}$ (рис. 1.8).

По определению угол между сонаправленными лучами равен $0°$, угол между противоположно направленными лучами — $180°$.

§ 2. Преобразование подобия. Перемещение

Преобразование p пространства (плоскости) называется *преобразованием подобия*, если существует такое число $k>0$, что для любых двух точек A и B пространства (плоскости) выполнено равенство $k|AB| = |p(A)\,p(B)|$. Число k называется *коэффициентом подобия*.

Свойства преобразования подобия приведены в Дополнении.

Пусть O — фиксированная точка, $k \neq 0$ — заданное действительное число. *Гомотетией* H_O^k *с центром* O *и коэффициентом* k называется преобразование пространства (плоскости), при котором образом каждой точки A пространства (плоскости) является точка B, удовлетворяющая следующим требованиям:

а) точки A, O, B лежат на одной прямой;

б) $|OB| = |k|\,|OA|$;

в) если $A \neq O$, то $B \in [OA)$ при $k > 0$ и $B \in [\overline{OA})$ при $k < 0$.

Свойства гомотетии приведены в Дополнении.

Преобразование подобия с коэффициентом $k = 1$ называется *перемещением* (*ортогональным преобразованием*).

§ 3. Направленный отрезок. Параллельный перенос

Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$ называется упорядоченная пара точек A и B. Точка A называется *началом* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, точка B — его *концом*. На рисунках направленный отрезок изображают стрелкой, идущей из его начала в его конец (рис. 1.9). Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$ (обозначение: $-\overrightarrow{AB}$). Если точки A и B различны, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *ненулевым*; если точки A и B совпадают, то направлен-

Рис. 1.9

ный отрезок $\overrightarrow{AB}$, точнее $\overrightarrow{AA}$, называется *нулевым* (обозначение: $\vec{\theta}_A$). *Длиной* $|\overrightarrow{AB}|$ направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется величина $|AB|$.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *параллельным прямой l (плоскости P)*, если либо он нулевой, либо прямая (AB) параллельна l (плоскости P). Ненулевой направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *перпендикулярным прямой l (плоскости P)*, если прямая (AB) перпендикулярна l (плоскости P). Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая l, которой параллелен каждый из этих отрезков. Для обозначения параллельности (коллинеарности) используют символ $||$, а для обозначения перпендикулярности — символ $\perp$. Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ называются *компланарными*, если существует плоскость P, которой параллелен каждый из этих отрезков. Если направленные отрезки коллинеарны, то они компланарны. Если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярны одной плоскости P, то они коллинеарны: $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{CD}$.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными* (обозначение: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), если либо один из них нулевой, либо $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$, т. е. если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и лучи $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены. Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *противоположно направленными* (обозначение: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$), если либо один из них нулевой, либо $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$.

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются *равными*, если середины отрезков $[A_1B]$ и $[AB_1]$ совпадают (обозначение: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$). Из данного определения следует, что

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}. \qquad (1.1)$$

Очевидно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ тогда и только тогда, когда $-\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A_1B_1}$. Используя понятие центральной симметрии, можно сказать, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ тогда и только тогда, когда существует такая точка O (общая середина отрезков $[A_1B]$ и $[AB_1]$), что $A_1 = Z_O(B)$, $B_1 = Z_O(A)$ (рис. 1.10 и 1.11).

Из свойств параллелограмма следует, что направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, не лежащие на одной прямой, равны тогда и только тогда, когда четырехугольник ABB_1A_1— параллелограмм (рис. 1.10). Для равных направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$, лежащих на одной прямой, возможно одно из четырех расположений, изображенных на рис. 1.11, *а*, *б*.

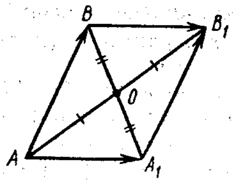


Рис 1.10

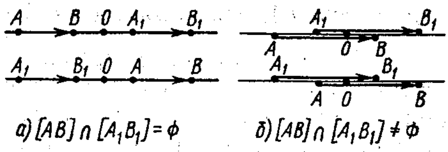


Рис. 1.11

Итак, равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ имеет место тогда и только тогда, когда: а) направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ коллинеарны; б) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1B_1}$; в) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$.

Как следует из определения, нулевой направленный отрезок равен любому другому нулевому направленному отрезку и только нулевому. Всякий направленный отрезок равен самому себе. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Из транзитивности отношений параллельности прямых, сонаправленности лучей, равенства действительных чисел следует, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$. Таким образом, отношение равенства направленных отрезков обладает свойством транзитивности. Это отношение является *отношением эквивалентности*. Оно разбивает множество направленных отрезков на классы эквивалентности. Каждый класс эквивалентности характеризуется тем, что ему принадлежат все попарно равные направленные отрезки и только они.

Для любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и любой точки C существует одна и только одна точка D такая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (точка D симметрична точке A относительно середины отрезка $[BC]$). Тот факт, что найдена точка D такая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, выражают следующей фразой: от точки C *отложен* направленный отрезок $\overrightarrow{CD}$, равный $\overrightarrow{AB}$. Точку D называют образом точки C при *параллельном переносе на направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$ (обозначение: $D = T_{\overrightarrow{AB}}(C)$).

Свойства параллельного переноса приведены в Дополнении.

§ 4. Сложение направленных отрезков. Композиция параллельных переносов

Суммой $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называется направленный отрезок $\overrightarrow{AF}$, где $F=T_{\overrightarrow{CD}}(B)$ (рис. 1.12). Операция нахождения суммы называется *сложением* направленных отрезков. Сформулируем законы сложения направленных отрезков в виде следующих утверждений.

I. $\overrightarrow{AB}+\vec{\theta}_C=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=\vec{\theta}_A=$ $=\vec{\theta}_C$.

II. *Если* $\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{CD}$, *то* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

III. Коммутативность сложения. *Для любых направленных отрезков* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *выполнено равенство* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$.

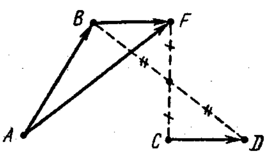


Рис. 1.12

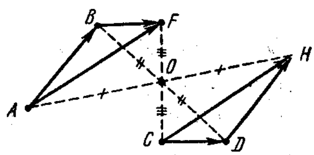


Рис. 1.13

□ Пусть F и H — такие точки, что $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DH}=$ $=\overrightarrow{AB}$ (рис. 1.13). Это означает, что середины отрезков $[BD]$ и $[CF]$ совпадают. Также совпадают середины отрезков $[BD]$ и $[AH]$. Следовательно, совпадают и середины отрезков $[CF]$ и $[AH]$, т. е. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CH}$. Но, по определению, $\overrightarrow{AF}$ есть $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, а $\overrightarrow{CH}$ является суммой $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$. ■

Если точки A и C совпадают, то совпадают и точки F и H (направленные отрезки $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{CH}$ равны, у них общее начало, а значит, и общий конец). Если точки $A=C$, B, $F=H$, D не лежат на одной прямой, то четырехугольник $ABFD$ — параллелограмм. Таким образом, справедливо правило параллелограмма (рис. 1.14): сумма двух неколлинеарных направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, имеющих общее начало A, есть направленный отрезок $\overrightarrow{AF}$, где $[AF]$ — диагональ параллелограмма $ABFD$, построенного на отрезках $[AB]$ и $[AD]$ как на сторонах.

Замечание. Если $A \neq C$, то в соответствии с определением суммы направленные отрезки $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$ имеют разные начала (соответственно A и C). Отрезки $[AF]$ и $[CH]$ различны, тем не менее направленные отрезки $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{CH}$ равны.

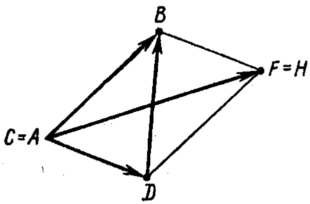


Рис. 1.14

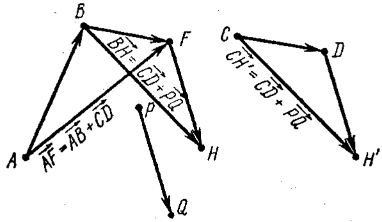


Рис. 1.15

IV. *Если* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C_1D_1}$, *то* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{C_1D_1}$.

V. Ассоциативность сложения. *Для любых направленных отрезков* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{PQ}$ *выполняется равенство*

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ}). \qquad (1.2)$$

□ Пусть $F = T_{\overrightarrow{CD}}(B)$, $H = T_{\overrightarrow{PQ}}(F)$ (рис. 1.15). По определению суммы, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{PQ}$. На основании утверждения IV $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ}$. Тогда, по определению суммы, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PQ})$. Учитывая транзитивность равенства направленных отрезков, получаем отсюда равенство (1.2). ■

Замечание. Из утверждения V по индукции получаем, что результат сложения нескольких направленных отрезков не зависит от того, как в рассматриваемой сумме расставлены скобки. Поэтому сумму направленных отрезков $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \overrightarrow{A_nB_n}$ обозначают так:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}.$$

В силу утверждения III в этой сумме не важен и порядок слагаемых.

Пусть A_1, A_2,..., A_n — конечный набор точек. Ломаную линию с последовательными вершинами в этих точках называют *путем*, идущим из точки A_1 в точку A_n. Для всякого пути справедливо п р а в и л о з а м ы к а ю щ е й (рис. 1.16):

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

Замкнутая ломаная линия $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ называется *циклом*. Справедливо следующее п р а в и л о ц и к л а:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{\theta}_{A_1}. \qquad (1.3)$$

Для того чтобы указать, что к циклу $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ применяется правило цикла, на рисунке внутри цикла изображают стрелку (рис. 1.17).

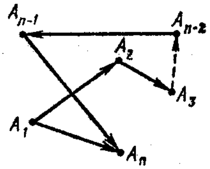


Рис. 1.16

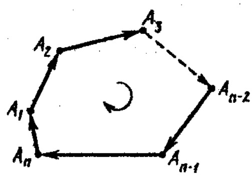


Рис. 1.17

Используя свойства 6^0 и 8^0 параллельного переноса (см. Дополнение), правило цикла можно записать на языке преобразований следующим образом: преобразование $T_{\overrightarrow{A_nA_1}} \circ T_{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}} \circ \ldots \circ T_{\overrightarrow{A_2A_3}} \circ T_{\overrightarrow{A_1A_2}}$ является тождественным преобразованием.

Разностью $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$. Операция нахождения разности называется *вычитанием*. Вычитание — операция, обратная по отношению к сложению в следующем смысле. Если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ таковы, что $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$. Иначе говоря, направленный отрезок можно переносить из одной части равенства в другую с противоположным знаком.

□ Действительно, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD}$, то, прибавляя к обеим частям этого равенства направленный отрезок $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$, получаем $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{MN} + \vec{\theta}_C = \overrightarrow{MN}$. ■

Если $ABFD$ — параллелограмм (см. рис. 1.14), то направленный отрезок $\overrightarrow{DB}$, где $[DB]$ — диагональ параллелограмма, равен разности $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. Справедливо правило раскрытия скобок

$$(\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{C_1D_1}) + \ldots + (\overrightarrow{A_nB_n} - \overrightarrow{C_nD_n}) = $$
$$= (\overrightarrow{A_1B_1} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}) - (\overrightarrow{C_1D_1} + \ldots + \overrightarrow{C_nD_n}).$$

§ 5. Умножение направленного отрезка на число

Произведением $0 \cdot \overrightarrow{AB}$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на число* 0 называется нулевой направленный отрезок $\vec{\theta}_A$. Если $k \neq 0$, то *произведением* $k\overrightarrow{AB}$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на*

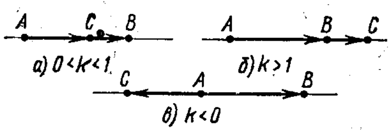


Рис. 1.18

число k называется направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, где $C = H_A^k(B)$ (рис. 1.18, *а, б, в*). Операция нахождения произведения $k\overrightarrow{AB}$ называется *умножением направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на число* k.

Таким образом, направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ равен $k\overrightarrow{AB}$ тогда и только тогда, когда:

а) направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны;

б) $|\overrightarrow{AC}| = |k||\overrightarrow{AB}|$;

в) $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, если $k \geqslant 0$, и $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, если $k < 0$.

Сформулируем законы умножения в виде следующих утверждений:

1. $1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$; $(-1) \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$.

II. *Если* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *то* $k\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

III. *Для любых действительных чисел* k_1 *и* k_2 *выполняется равенство* $k_1(k_2\overrightarrow{AB}) = k_2(k_1\overrightarrow{AB}) = (k_1k_2)\overrightarrow{AB}$.

IV. *Если* O—*произвольная точка*, $k \neq 0$, *то* (рис. 1.19, *а,б*)
$\overrightarrow{H_O^k(A)\,H_O^k(B)} = k\overrightarrow{AB}$.

□ Гомотетия H_O^k является преобразованием подобия с коэффициентом $|k|$. Поэтому $|\overrightarrow{H_O^k(A)\,H_O^k(B)}| = |k||\overrightarrow{AB}|$.

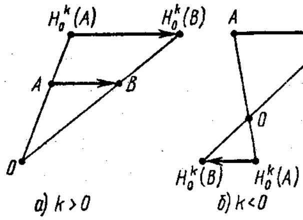


Рис. 1.19

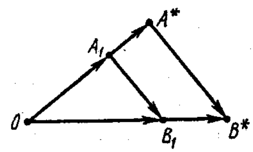


Рис. 1.20

На основании свойства 2° гомотетии (см. Дополнение) направленные отрезки $\overrightarrow{H_O^k(A)H_O^k(B)}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, причем они сонаправлены, если $k > 0$, и противоположно направлены, если $k < 0$. Таким образом, $\overrightarrow{H_O^k(A)\,H_O^k(B)} = k\overrightarrow{AB}$. ■

V. *Для любых направленных отрезков* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *и любого действительного числа* k *справедливо равенство* $k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD}$.

□При $k=0$ утверждение очевидно. Пусть $k \neq 0$. Рассмотрим произвольную точку O и обозначим $A_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(O)$, $B_1 = T_{\overrightarrow{CD}}(A_1)$, $A^* = H_O^k(A_1)$, $B^* = H_O^k(B_1)$ (рис. 1.20). По правилу замыкающей, $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{OB^*} = \overrightarrow{OA^*} + \overrightarrow{A^*B^*}$. Из равенств $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CD}$ следует, что $k\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{AB}$, $k\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{CD}$ (утверждение II) и что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (утверждение IV из § 4). По определению гомотетии, $\overrightarrow{OA^*} = k\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB^*} = k\overrightarrow{OB_1}$ Наконец, в силу утверждения IV $\overrightarrow{A^*B^*} = k\overrightarrow{A_1B_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{OB^*} = k\overrightarrow{OB_1} = k\,(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) = k\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$, $\overrightarrow{OB^*} = \overrightarrow{OA^*} + \overrightarrow{A^*B^*} = k\overrightarrow{OA_1} + k\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD}$, и поэтому $k\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD}$. ■

VI. *Для любого направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *и любых действительных чисел* k_1 *и* k_2 *справедливо равенство* $(k_1 + k_2)\,\overrightarrow{AB} = k_1\overrightarrow{AB} + k_2\overrightarrow{AB}$.

□ Это утверждение легко проверить, подсчитывая длины направленных отрезков, стоящих в левой и правой частях равенства, учитывая при этом их направление. ■

Законы умножения, сформулированные в утверждениях V и VI, называются **законами дистрибутивности**.

Глава 2

ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

§ 1. Основные определения

Вектором в пространстве (*на плоскости*) называется множество всех равных между собой направленных отрезков, начала и концы которых принадлежат пространству (плоскости). Векторы обычно обозначают строчными буквами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Если точки A и B и вектор $\vec{a}$ таковы, что $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, то вектор $\vec{a}$ обозначают так же, как направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, т. е. пишут $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. В этом случае про направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ говорят, что он *изображает* вектор $\vec{a}$, и около стрелки, изображающей направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, пишут $\vec{a}$ (рис. 2.1). Равные направленные отрезки (и только они) изображают один и тот же вектор. Если направленный отрезок $\overrightarrow{A'B'}$, так же как и $\overrightarrow{AB}$, изображает вектор $\vec{a}$, то запись

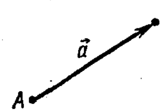


Рис. 2.1

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \tag{2.1}$$

в соответствии со сделанными определениями имеет двоякий смысл: если левая и правая части (2.1) понимаются как направленные отрезки, то эта запись означает их равенство (см. § 3 гл. 1); если же обе части понимаются как векторы, то соотношение (2.1) означает совпадение этих векторов, т. е. равенство их как множеств.

Если вектор $\vec{a}$ изображается направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, то вектор, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, называется вектором, *противоположным* вектору $\vec{a}$ (обозначение: $-\vec{a}$). *Нулевым* вектором $\vec{0}$ называется вектор, изображаемый нулевыми направленными отрезками. Очевидно, что $\vec{0} = -\vec{0}$. *Длиной* $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ называется длина изображающего его направленного отрезка. В частности, $|\vec{0}| = 0$. Векторы $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \vec{a}_n = \overrightarrow{A_nB_n}$ называются *коллинеарными* (*компланарными*), если коллинеарны (компланарны) изображающие их направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_n}$. Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \| \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то пишут $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. В соответствии с этим определением нулевой вектор $\vec{0}$ коллинеарен любому вектору и компланарен любым двум векторам.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ называется *параллельным прямой* l (*плоскости* P), если изображающий его направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ параллелен l (плоскости P). На основании свойства транзитивности параллельности прямых (на плоскости и в пространстве) это определение к о р р е к т н о, т. е. не зависит от выбора направленного отрезка, изображающего вектор $\vec{a}$. Ненулевой вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ называется *перпендикулярным прямой* l (*плоскости* P), если изображающий его (ненулевой) направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен l (плоскости P). Это определение корректно, так как если направленный отрезок $\overrightarrow{CD}$, равный направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$, изображает вектор $\vec{a}$, то $(CD) \| (AB)$ и поэтому $(CD) \perp l$ (соответственно $(CD) \perp P$), т. е. направленный отрезок $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярен l (плоскости P). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны плоскости P, то они коллинеарны. Всякий ненулевой вектор $\vec{a}$, перпендикулярный плоскости P, называется *нормальным вектором плоскости* P. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *сонаправленными* (обозначение: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), если сонаправлены изображающие их направленные отрезки $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$, и *противоположно направленными* (обозначение: $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$), если $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CD}$.

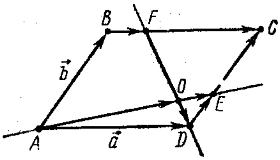
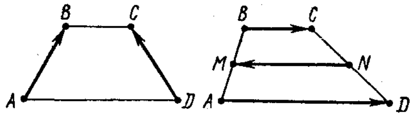


Рис. 2.2



а) б)

Рис. 2.3

Признак равенства векторов. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны (совпадают как множества) тогда и только тогда, когда: а) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; б) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Примеры равных, коллинеарных, компланарных векторов, изображаемых направленными отрезками в геометрических телах, приведены на рис. 2.2—2.7. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 2.2) равны векторы противоположных сторон: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. В равнобедренной трапеции

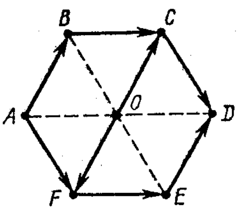


Рис. 2.4

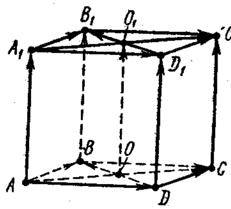


Рис. 2.5

$ABCD$ (рис. 2.3, *а*) векторы боковых сторон $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ не равны (не коллинеарны), хотя и имеют одинаковые длины: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$. Векторы оснований $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ трапеции $ABCD$ (рис. 2.3, *б*) и вектор средней линии $\overrightarrow{NM}$ коллинеарны. По определению трапеции эти векторы также не равны друг другу (имеют разные длины). Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ сонаправлены и противоположно направлены вектору $\overrightarrow{NM}$. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ (рис. 2.4) векторы сторон $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{ED}$, а также вектор $\overrightarrow{OC}$, где O — центр шестиугольника, равны, а $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{AB}$. Аналогично, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.5) векторы боковых ребер $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ попарно равны и равны вектору $\overrightarrow{OO_1}$, где O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$

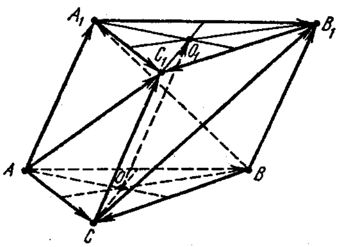


Рис. 2.6

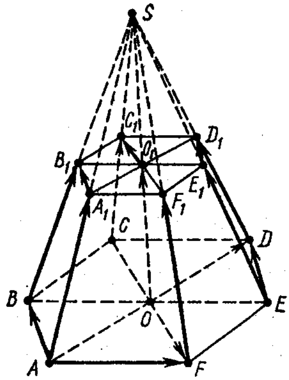


Рис. 2.7

соответственно. Равны также векторы диагоналей: $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$. Векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ компланарны (параллельны плоскости $(ABCD)$). В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 2.6) векторы боковых ребер $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ равны вектору $\overrightarrow{OO_1}$, где O и O_1 — центроиды (точки пересечения медиан) граней ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Равны также векторы соответственных сторон верхнего и нижнего оснований: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$. Векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ компланарны (параллельны плоскости (ABC)). В правильной шестиугольной усеченной пирамиде $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 2.7), в которой $|A_1B_1|:|AB| = 1:2$, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{F_1C_1}$ равны. Векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{CF}$ коллинеарны и противоположно направлены. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{D_1E_1}$ $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{C_1F_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{FF_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$ (O и O_1 — центры оснований пирамиды) компланарны (параллельны плоскости (CC_1F_1F)). Векторы боковых ребер $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не коллинеарны, хотя равны по длине. Векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ не компланарны.

Пусть $\vec{a}$ — некоторый вектор, $\overrightarrow{AB}$ — направленный отрезок, изображающий этот вектор. Если $\overrightarrow{CD}$ — произвольный направленный отрезок, также изображающий вектор $\vec{a}$, то по определению вектора $\vec{a}$ имеем $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, т. е. $D = T_{\overrightarrow{AB}}(C)$. Следовательно, $\vec{a}$ есть множество всех направленных отрезков $\overrightarrow{CD}$, начала C которых являются прообразами, а концы D — образами точек пространства (плоскости) при параллельном переносе $T_{\overrightarrow{AB}}$. Поэтому про вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ говорят, что он является параллельным переносом на направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, а параллельный перенос $T_{\overrightarrow{AB}}$ для краткости обозначают так же, как и вектор $\vec{a}$. В этом случае $\vec{a}$ понимают как преобразование пространства (плоскости). Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ — некоторый вектор, M — заданная точка. Если вместо направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, изображающего вектор $\vec{a}$, для изображения вектора $\vec{a}$ используют направленный отрезок $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ с началом в точке M, то говорят, что вектор $\vec{a}$ *откладывается* от точки M. Точку M называют *началом* вектора $\vec{a}$, точку N — его *концом*.

Все операции над направленными отрезками, в которых эти отрезки могут быть заменены на любые им равные с сохранением результата операции, а также свойства этих операций переносятся и на векторы.

§ 2. Сумма векторов. Разность векторов

Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ — вектор, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ — вектор, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{CD}$, то вектор, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначение: $\vec{a} + \vec{b}$). Из утверждения IV § 4 гл. 1 следует, что данное определение суммы векторов не зависит от выбора направленных отрезков, изображающих эти векторы.

Приведем **законы сложения векторов.**

I. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения).

II. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ассоциативность сложения).

III. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

IV. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Эти законы вытекают из утверждений III, V, I § 4 гл. 1. В силу ассоциативности сложения сумму трех (и более) векторов можно записывать, опуская скобки. Например, для параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.8) вектор $\overrightarrow{AC_1}$ является суммой $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}$. Этот факт называется правилом параллелепипеда: вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ суммы трех некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ изображается диагональю параллелепипеда, построенного на направленных отрезках, изображающих векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и имеющих общее начало (кратко: построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$).

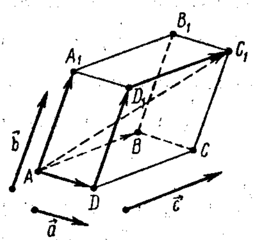


Рис. 2.8

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}+(-\vec{b})$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изображаются соответственно направленными отрезками $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, то их разность $\vec{a}-\vec{b}$ изображается направленным отрезком $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ (см. § 4 гл. 1). Если $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, то $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$. Это свойство следует из свойства разности направленных отрезков. Покажем, как можно это свойство вывести из законов сложения векторов. Прибавляя к обеим частям равенства $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ вектор $-\vec{b}$, получаем $\vec{c}-\vec{b}=\vec{c}+(-\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})+(-\vec{b})=\vec{a}+(\vec{b}+(-\vec{b}))=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. Таким образом, слагаемые в векторных равенствах можно переносить из одной части равенства в другую, изменяя их знаки на противоположные.

Пример 1. Докажите правило раскрытия скобок:

$$(\vec{a}_1 - \vec{b}_1) + (\vec{a}_2 - \vec{b}_2) + \ldots + (\vec{a}_n - \vec{b}_n) = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) - (\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n).$$

△ По определению разности векторов, $(\vec{a}_1 - \vec{b}_1) + (\vec{a}_2 - \vec{b}_2) + \ldots + (\vec{a}_n - \vec{b}_n) = (\vec{a}_1 + (-\vec{b}_1)) + (\vec{a}_2 + (-\vec{b}_2)) + \ldots + (\vec{a}_n + (-\vec{b}_n))$. Обозначая последнее выражение через $\vec{x}$ и опуская часть скобок (в соответствии с договоренностью, основанной на законе ассоциативности сложения), получаем $\vec{x} = \vec{a}_1 + (-\vec{b}_1) + \vec{a}_2 + (-\vec{b}_2) + \ldots + \vec{a}_n + (-\vec{b}_n)$. Применяя несколько раз закон коммутативности сложения, имеем $\vec{x} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) + (-\vec{b}_1) + (-\vec{b}_2) + \ldots + (-\vec{b}_n)$.

Если теперь к $\vec{x}$ прибавить сумму $(\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n)$, использовать свойства ассоциативности и коммутативности сложения и учесть n раз IV и III законы сложения векторов, то получим

$$\vec{x} + (\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n) = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) + (-\vec{b}_1) + (-\vec{b}_2) + \ldots + (-\vec{b}_n) + \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) + (\vec{b}_1 + (-\vec{b}_1)) + (\vec{b}_2 + (-\vec{b}_2)) + \ldots + (\vec{b}_n + (-\vec{b}_n)) = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) + \vec{0} + \vec{0} + \ldots + \vec{0} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n.$$

По правилу переноса слагаемых из одной части векторного равенства в другую имеем $\vec{x} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) - (\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \ldots + \vec{b}_n)$. ▲

Пример 2. Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ (см. рис. 2.4). Найдите сумму векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$.

△ Диагонали правильного шестиугольника, пересекающиеся в точке O, делятся этой точкой пополам. Лучи $[OA)$ и $[OD)$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$. Аналогично, $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OF}$. Отсюда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$ и, значит, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF})=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$. ▲

В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ выполнено также равенство $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$. Действительно, так как $ODEF$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF}$ и, следовательно, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})-(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OF})=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF})+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OF})-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE}-(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE})=(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OE})=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

Пример 3. Докажите, что: в треугольнике ABC медианы $[AK]$, $[CM]$ и $[BN]$ пересекаются в одной точке; если Q — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\vec{0}$.

△ Пусть Q — общая точка отрезков $[AK]$ и $[CM]$ (рис. 2.9). На основании свойства средней линии треугольника имеем $(MK)\parallel(AC)$. Значит, треугольники QMK и QCA подобны (по трем углам), поэтому $|QC|:|MQ|=|QA|:|KQ|=|AC|:|MK|=2$.

Таким образом, если на медиане $[AK]$ взять точку Q, делящую отрезок $[AK]$ в отношении 2:1, считая от вершины A, то точка Q будет лежать на медиане $[CM]$, причем $|CQ|:|QM|=2:1$. Проводя аналогичные рассуждения относительно медиан $[AK]$ и $[BN]$, видим, что точка Q лежит на медиане $[BN]$ и делит ее в отношении $|BQ|:|QN|=2:1$. Отсюда следует, что медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке Q, а для точки P, симметричной точке Q относительно точки N (рис. 2.9), выполнено равенство $\overrightarrow{QB}=-\overrightarrow{QP}$. Поскольку $P=Z_N(Q)$, $A=Z_N(C)$, четырехугольник $AQCP$ — параллелограмм, так что $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QP}$. Окончательно получаем $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{QP}+(-\overrightarrow{QP})=\vec{0}$. ▲

Пример 4. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы неравенства треугольника:

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|,\ |\vec{a}-\vec{b}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|. \tag{2.2}$$

Проверьте, что: равенство $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; равенство $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $|\vec{a}| \geqslant |\vec{b}|$.

$\triangle$ Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то эти неравенства очевидны. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы и пусть направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ изображает вектор $\vec{a}$. Отложим вектор $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ от точки B (рис. 2.10). Тогда направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ изображает вектор $\vec{a}+\vec{b}$. На основании свойств 3⁰ и 4⁰ расстояния (см. § 1 гл. 1) получаем $|\vec{a}+\vec{b}| = |\overrightarrow{AC}| \leqslant |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $B \in [AC]$, т. е. когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены. Заменяя в последнем неравенстве вектор $\vec{a}$ на вектор $\vec{a}-\vec{b}$, получаем $|\vec{a}| = |(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}-\vec{b}| + |\vec{b}|$. Следовательно, $|\vec{a}-\vec{b}| \geqslant |\vec{a}| - |\vec{b}|$. Равенство $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$, как доказано выше, имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, т. е. сонаправлены векторы $\vec{b}$ и $\vec{a} = (\vec{a}-\vec{b}) + \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{a}-\vec{b}| + |\vec{b}| \geqslant |\vec{b}|$. ▲

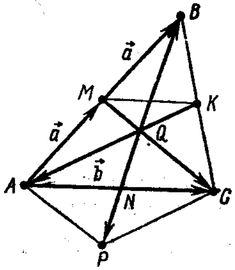


Рис. 2.9

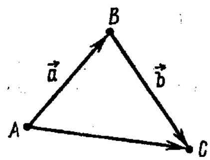


Рис. 2.10

Пример 5. Пусть A, B, C, D — некоторые точки пространства или плоскости, M — середина $[AB]$, N — середина $[CD]$, O — середина $[MN]$. Докажите, что: 1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$; 2) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$; 3) $|MN| \leqslant \frac{1}{2}(|BC| + |AD|)$.

$\triangle$ 1) Направленные отрезки $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ изображают один и тот же вектор, который обозначим $\vec{a}$. Аналогично, положим $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{ND} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON} = \vec{c}$ (рис. 2.11). Тогда $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} = (-\vec{c}) + (-\vec{a})$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{c}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{b} + \vec{c}$. Поэтому (см. пример 1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (-\vec{c}) + (-\vec{a}) + \vec{a} - \vec{c} + \vec{c} - \vec{b} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{c}) + (\vec{b} - \vec{b}) + (\vec{c} - \vec{c}) = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.

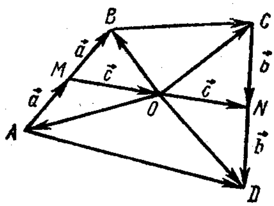


Рис. 2.11

2) По правилу замыкающей, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}$. Отсюда $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) = \vec{0} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} + \vec{0} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}$.

3) На основании неравенства треугольника $|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}| \leqslant |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AD}| = |BC| + |AD|$. Так как $\overrightarrow{MN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$, то $|\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{MN}| + |\overrightarrow{MN}| = 2|MN|$ (см. пример 4). Окончательно имеем $2|MN| = |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}| \leqslant |BC| + |AD|$. ▲

Пример 6. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ имеет место равенство $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.

$\triangle$ Пусть $\vec{x} = -(-\vec{a})$. Тогда на основании законов IV и I сложения векторов $\vec{x} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Прибавляя к обеим частям этого равенства вектор $\vec{a}$, получаем $\vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{x} + (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{x} + (\vec{a} + (-\vec{a})) = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$. ▲

§ 3. Умножение вектора на число. Признак коллинеарности векторов

Если $\vec{a}$ — вектор, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, k — действительное число, то *произведением $k\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число k* называется вектор, изображаемый направленным отрезком $k\overrightarrow{AB}$. Произведение $k\vec{a}$ обозначают также $\vec{a}k$. Для краткости, если $k \neq 0$, произведение $\frac{1}{k}\vec{a}$ записывают в виде $\vec{a}/k$.

Приведем законы умножения вектора на число.

I. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$, $k\vec{0}=\vec{0}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

II. $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$.

III. $k\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$, *если* $k\geqslant 0$; $k\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$, *если* $k\leqslant 0$.

Если k и m — действительные числа, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы, то:

IV. $k(m\vec{a})=(km)\vec{a}$ (ассоциативность умножения на число).

V. $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$,
VI. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ } (дистрибутивность умножения на число).

Эти законы непосредственно следуют из свойств умножения направленного отрезка на число (см. § 5 гл. 1).

Пример 1. Докажите равенство $-\vec{a}=(-1)\vec{a}$, используя остальные законы умножения вектора на число.

△ Действительно, $\vec{0}=0\cdot\vec{a}=(1+(-1))\vec{a}$. Поэтому $-\vec{a}=(-\vec{a})+\vec{0}=(-\vec{a})+(1+(-1))\vec{a}=(-\vec{a})+1\cdot\vec{a}+(-1)\vec{a}=((-\vec{a})+\vec{a})+(-1)\vec{a}=\vec{0}+(-1)\vec{a}=(-1)\vec{a}$. ▲

Пример 2. Докажите, что если $m\vec{a}+n\vec{b}=k\vec{a}+l\vec{b}$, то $(m-k)\vec{a}+(n-l)\vec{b}=\vec{0}$.

△ Перенося векторы из правой части равенства $m\vec{a}+n\vec{b}=k\vec{a}+l\vec{b}$ в левую, получаем $(m\vec{a}-k\vec{a})+(n\vec{b}-l\vec{b})=\vec{0}$. На основании законов I и IV умножения вектора на число $-k\vec{a}=(-1)\cdot(k\vec{a})=(-k)\vec{a}$. По закону V имеем $m\vec{a}-k\vec{a}=m\vec{a}+(-k\vec{a})=m\vec{a}+(-k)\vec{a}=(m-k)\vec{a}$. Аналогично можно доказать, что $n\vec{b}-l\vec{b}=(n-l)\vec{b}$. Таким образом, $m\vec{a}+n\vec{b}=k\vec{a}+l\vec{b}\Leftrightarrow(m-k)\vec{a}+(n-l)\vec{b}=\vec{0}$. ▲

Из законов II и III следует признак коллинеарности векторов: вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$. По коллинеарным векторам $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b}$ число k определяется однозначно: $|k| = |\vec{b}|/|\vec{a}|$, причем $k = |\vec{b}|/|\vec{a}|$, если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, и $k = -|\vec{b}|/|\vec{a}|$, если $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Пример 3. Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равенство $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $m = n = 0$.

$\triangle$ Доказательство проведем методом от противного. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы такие, что $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$ и $m \neq 0$. Тогда $\vec{0} = (1/m)\,\vec{0} = (1/m)\,(m\vec{a} + n\vec{b}) = (1/m)\,(m\vec{a}) + (1/m)\,(n\vec{b}) = 1\cdot\vec{a} + (n/m)\,\vec{b} = \vec{a} - (-n/m)\vec{b}$, т. е. $\vec{a} = (-n/m)\,\vec{b}$, и в силу признака коллинеарности векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Таким образом, имеет место противоречие. Аналогично доказывается, что предположение $n \neq 0$ также приводит к противоречию. ▲

В этом и последующих примерах не указывается, какие законы и в какой последовательности использованы.

Пример 4. Докажите, что для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равенство

$$m_1\vec{a} + n_1\vec{b} = m_2\vec{a} + n_2\vec{b} \tag{2.3}$$

эквивалентно системе равенств

$$m_1 = m_2, \;\; n_1 = n_2. \tag{2.4}$$

$\triangle$ Как показано в примере 2, равенство (2.3) эквивалентно равенству $(m_1 - m_2)\,\vec{a} + (n_1 - n_2)\,\vec{b} = \vec{0}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны; следовательно, в соответствии с примером 3 полученное соотношение эквивалентно двум равенствам: $m_1 - m_2 = 0$ и $n_1 - n_2 = 0$. ▲

Пример 5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. При каком x векторы $\vec{c} = (x-1)\,\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = (2 + 3x)\,\vec{a} - 2\vec{b}$ коллинеарны?

$\triangle$ Вектор $\vec{c} = (x-1)\,\vec{a} + \vec{b}$ ненулевой (если бы $\vec{0} = \vec{c} = (x-1)\,\vec{a} + 1\cdot\vec{b}$, то в силу неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и результата примера 3 имели бы место равенства $x - 1 = 0$, $1 = 0$, т. е. получилось бы противоречие). Согласно признаку коллинеарности векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число y такое, что $\vec{d} = y\vec{c}$, т. е. $(2+3x)\vec{a} - 2\vec{b} = y(x-1)\vec{a} + y\vec{b}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Поэтому в силу результата примера 4 полученное равенство эквивалентно системе уравнений $2+3x = y(x-1)$, $-2 = y$, т. е. системе $x = 0$, $y = -2$. Следовательно, векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $x = 0$, т. е. $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = 2(\vec{a} - \vec{b})$. ▲

Пусть в пространстве или на плоскости зафиксирована некоторая точка O, называемая *полюсом*. Тогда между точками A пространства (плоскости) и направленными отрезками $\overrightarrow{OA}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Вектор $\vec{r}_A$, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$, называется *радиусом-вектором точки A относительно полюса O*. По заданному радиусу-вектору $\vec{r}_A$ точка A находится как конец вектора $\vec{r}_A$, отложенного от полюса O.

Пример 6 (в е к т о р н о е п а р а м е т р и ч е с к о е у р а в н е н и е п р я м о й). Пусть в пространстве или на плоскости зафиксирован полюс O. Пусть, далее, l — прямая, проходящая через две заданные различные точки A и B. Опишите множество радиусов-векторов всех точек прямой l.

△ Пусть $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ — радиусы-векторы точек A и B соответственно. Обозначим через $\vec{a}$ вектор, изображаемый направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, т. е. $\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ (рис. 2.12). Через $\vec{r}$ обозначим радиус-вектор произвольной точки M прямой l. Точка M лежит на прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{a}$ коллинеарны. Согласно признаку коллинеарности это имеет место тогда и только тогда, когда существует число t (зависящее от M) такое, что выполняется равенство $\overrightarrow{AM} = t\vec{a}$. Так как $\overrightarrow{AM} = \vec{r} - \vec{r}_A$, то вектор $\vec{r}$ является радиусом-вектором точки $M \in l$ тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}$, где $\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$. Таким образом, множество всех радиусов-векторов точек прямой l есть совокупность векторов вида

$$\vec{r} = \vec{r}_* + t\vec{a}, \tag{2.5}$$

где $\vec{r}_* = \vec{r}_A$, $\vec{a} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$, t — произвольное действительное число. Вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором прямой* l, $\vec{r}_*$ — *радиусом-вектором начальной точки прямой* l, t — *параметром*, а соотношение (2.5) — **векторным параметрическим уравнением прямой**. ▲

Соотношение (2.5) можно записать в виде $\vec{r} = (1 - t)\times$ $\times\vec{r}_A + t\vec{r}_B$ или в виде $\vec{r} = \tau\vec{r}_A + t\vec{r}_B$, где t и τ — произвольные действительные числа, связанные соотношением $t + \tau = 1$. Система уравнений $\vec{r} = \tau\vec{r}_A + t\vec{r}_B$, $t + \tau = 1$ параметрически задает прямую, проходящую через точки A и B. Числа $t = t\,(M)$ и $\tau = \tau\,(M)$ называются *барицентрическими координатами точки M на ориентированной* (вдоль вектора $\vec{a}$) *прямой* (AB). Установим геометрический смысл параметра t в соотношении (2.5). Так как $\overrightarrow{AM} =$ $= t\vec{a}$, где $t = t\,(M)$, то $|\overrightarrow{AM}| = |t||\vec{a}|$, т. е. $|t| = |\overrightarrow{AM}|:$ $:|\vec{a}|$. Число t положительное, если точка $M \neq A$ лежит на $[AB]$ или если $B \in [AM]$. Число t отрицательное, если $M \neq A$ и $A \in [MB]$. $t = 0$ тогда и только тогда, когда M совпадает с A.

Пример 7 (**задача о делении отрезка в заданном отношении**). Пусть A и B — различные точки, заданные радиусами-векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ относительно полюса O, λ — положительное число. Найдите радиус-вектор $\vec{r}_M$ точки M отрезка $[AB]$, делящей этот отрезок в отношении λ, считая от точки A.

△ Точка M лежит на прямой (AB) между точками A и B, поэтому $\vec{r}_M = \vec{r}_A + t\,(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, где $t = |AM|/|AB| > 0$. Согласно условию, $\lambda = |AM|/|MB|$. Следовательно, $|AB| =$ $= |AM| + |MB| = |AM| + |AM|/\lambda = (\lambda + 1)|AM|/\lambda$. Таким образом, $t = \lambda/(\lambda + 1)$ и $\vec r_M = \vec r_A + \frac{\lambda}{\lambda+1}(\vec r_B - \vec r_A) = \frac{1}{\lambda+1}\vec r_A + \frac{\lambda}{\lambda+1}\vec r_B$. Соотношение

$$\vec r_M = (\vec r_A + \lambda \vec r_B)/(\lambda + 1) \qquad (2.6)$$

называется *формулой деления отрезка в заданном отношении*. ▲

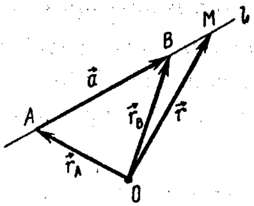


Рис. 2.12

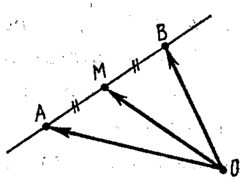


Рис. 2.13

При $\lambda = 1$ точка M — середина отрезка $[AB]$. Отрезок $[OM]$ — медиана треугольника OAB (рис. 2.13). Вектор $\vec r_M = \overrightarrow{OM}$ равен $\vec r_A/2 + \vec r_B/2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})/2$.

Пример 8. Используя векторы и операции над ними, докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из медиан в отношении 2:1, считая от вершины.

△ Пусть в $\triangle ABC$ точки K и M — середины сторон $[BC]$ и $[AB]$ соответственно, Q — точка пересечения медиан $[AK]$ и $[CM]$ (см. рис. 2.9).

Обозначая $\lambda = |CQ|/|QM|$, $\mu = |AQ|/|QK|$, докажем, что $\lambda = \mu = 2$. Пусть $\overrightarrow{AM} = \vec a$ (тогда $\overrightarrow{AB} = 2\vec a$), $\overrightarrow{AC} = \vec b$. По формуле деления отрезка $[CM]$ точкой Q в отношении λ имеем $\overrightarrow{AQ} = (\vec b + \lambda\vec a)/(\lambda+1)$. Следовательно, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{AQ} + \frac{\overrightarrow{AQ}}{\mu} = (\mu + 1)/\mu\,((\vec b + \lambda\vec a)/(\lambda + 1))$. Точка K делит отрезок $[CB]$ в отношении 1:1, поэтому $\overrightarrow{AK} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})/2 = (\vec b + 2\vec a)/2$. Сравнивая полученные для вектора $\overrightarrow{AK}$ выражения, приходим к равенству $\frac{\mu+1}{\mu} \times \frac{\vec b + \lambda\vec a}{\lambda + 1} = \frac{\vec b + 2\vec a}{2}$. В силу неколлинеарности векторов $\vec a$ и $\vec b$ отсюда следует, что $\frac{\mu+1}{\mu}\frac{1}{\lambda+1} = \frac{1}{2}$, $\frac{\mu+1}{\mu}\frac{\lambda}{\lambda+1} = 1$.

Разделив одно из этих равенств на другое, получим $\lambda = 2$ Следовательно, $(\mu + 1)\,\mu = 3/2$, т е $\mu = 2$. Итак, доказано, что точка Q, лежащая на медиане $[CM]$ и делящая ее в отношении 2:1, лежит и на медиане $[AK]$ и делит ее в том же отношении. Аналогично можно установить, что та же самая точка Q медианы $[CM]$ лежит и на медиане $[BN]$ и делит ее в отношении 2:1, считая от вершины B. Следовательно, все три медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины. ▲

Пример 9. Найдите, на какое число k надо умножить ненулевой вектор $\vec{a}$, чтобы длина вектора $\vec{b} = k\vec{a}$ была равна единице, причем: а) вектор $\vec{b}$ был сонаправлен вектору $\vec{a}$; б) вектор $\vec{b}$ был противоположно направлен вектору $\vec{a}$.

△а) Так как $k\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a} \Leftrightarrow k \geqslant 0$ (III), то $k = |k| = |\vec{b}| : |\vec{a}| = 1/|\vec{a}|$ (II).

б) Имеем $k\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a} \Leftrightarrow k \leqslant 0$. Следовательно, $-k = |k| = |\vec{b}|/|\vec{a}| = 1/|\vec{a}|$ и $k = -1/|\vec{a}|$.

Таким образом, вектор $\vec{b} = \vec{a}/|\vec{a}|$ сонаправлен вектору $\vec{a} \neq \vec{0}$ и имеет единичную длину. Всякий вектор единичной длины называется *единичным* вектором. Вектор $-\vec{a}/|\vec{a}|$ — единичный вектор, противоположно направленный вектору $\vec{a}$.▲

Пример 10. В треугольнике ABC проведена биссектриса $[CD]$ внутреннего угла $\angle C$. Выразите вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ и их длины.

△ Отложим от точки C единичные векторы $\overrightarrow{CM} = \vec{e}_1 = \vec{a}/|\vec{a}|$ и $\overrightarrow{CN} = \vec{e}_2 = \vec{b}/|\vec{b}|$ (точки M и N лежат на лучах $[CA)$ и $[CB)$ и отстоят от точки C на расстоянии, равном 1). Рассмотрим построенный на направленных отрезках $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CN}$ как на сторонах параллелограмм $CNPM$ (рис. 2.14). Так как $|\overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{CN}| = 1$, то этот параллелограмм — ромб. Значит, его диагональ $[CP]$ и есть биссектриса угла $\angle C$. Векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CP} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ коллинеарны, причем $\overrightarrow{CP} \neq \vec{0}$. Поэтому существует такое число x, что $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CP} = x\,\vec{a}/|\vec{a}| + x\vec{b}/|\vec{b}|$. С другой стороны, точка D делит отрезок $[AB]$ в некотором (пока неизвестном) отношении $\lambda = |AD| : |DB|$. Следовательно, по формуле (2.6), $\overrightarrow{CD} = (\vec{a} + \lambda\vec{b})/(\lambda + 1)$. Сравнивая полученные для вектора $\overrightarrow{CD}$ выражения и учитывая неколлинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеем $x/|\vec{a}| = 1/(\lambda + 1)$, $x/|\vec{b}| = \lambda/(\lambda + 1)$. Отсюда $\lambda = |\vec{a}|/|\vec{b}|$, $\overrightarrow{CD} = (\vec{a} + (|\vec{a}|\vec{b})/|\vec{b}|)/(|\vec{a}|/|\vec{b}| + 1) = (|\vec{a}|\vec{b} + |\vec{b}|\vec{a})/(|\vec{a}| + |\vec{b}|)$. Отметим, что равенство $\lambda = |\vec{a}|/|\vec{b}|$ означает, что биссектриса внутреннего угла $\angle C$ треугольника ABC делит противоположную сторону $[AB]$ в отношении $|AD| : |DB| = |CA| : |CB|$, т.е. на части, пропорциональные сторонам, прилежащим углу $\angle C$. ▲

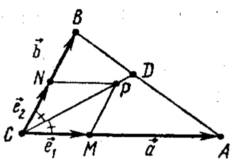


Рис. 2.14

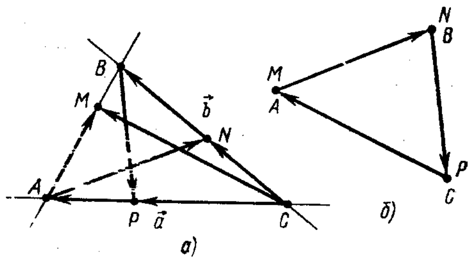


Рис. 2.15

Пример 11. Дан треугольник ABC. На прямых (AB), (BC), (CA) выбраны соответственно точки M, N, P так, что $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}$, где α, β и γ — действительные числа. При каком необходимом и достаточном условии векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$ образуют треугольник, т. е. $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$?

△ Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ (рис. 2.15, *а*, *б*). Тогда $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AM} = \alpha(\vec{b} - \vec{a})$, $\overrightarrow{CN} = (1 - \beta)\vec{b}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\vec{a}$. Следовательно, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = (1 - \alpha)\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -\vec{a} + (1 - \beta)\vec{b}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = -\vec{b} + \gamma\vec{a}$, поэтому $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = (\gamma - \alpha)\vec{a} + (\alpha - \beta)\vec{b}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, поэтому $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\gamma - \alpha = 0$, $\alpha - \beta = 0$, т. е. когда $\alpha = \beta = \gamma$. ▲

Пример 12. В треугольнике ABC точки M, N и P — основания биссектрис соответственно $[CM]$, $[AN]$ и $[BP]$ внутренних углов треугольника. Известно, что $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$. Докажите, что $\Delta\, ABC$ — правильный.

Δ Пусть $\overrightarrow{AM}=\alpha\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\beta\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=\gamma\overrightarrow{CA}$. Тогда, как доказано в примере 10, $\alpha=|AC|/(|AC|+|BC|)$, $\beta=|AB|/(|AB|+|AC|)$, $\gamma=|BC|/(|BC|+|AB|)$. В примере 11 показано, что из равенства $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$ следуют равенства $\alpha=\beta=\gamma$, т. е. равенства $|BC|:|AC|=1/\alpha-1=|AC|/|AB|=1/\beta-1=|AB/|BC|=1/\gamma-1$. Из этих равенств получаем $|AC|^2=|AB|/BC|$, $|AB|^2=|AC||BC|$. Разделив первое соотношение почленно на второе, имеем: $|AC|^3=|AB|^3$, т. е. $|AC|=|AB|$. Следовательно, $|AC|^2=|AC|\,|BC|$, т. е. и $|AC|=|BC|$.▲

Пример 13. На сторонах $[BC]$ и $[CD]$ параллелограмма $ABCD$ взяты точки F и E так, что $|BF|:|FC|=\mu$, $|DE|:|EC|=\lambda$, где λ и μ — заданные положительные числа (см. рис. 2.2). Прямые (FD) и (AE) пересекаются в точке O. Найдите отношение $|FO|:|OD|$.

Δ Обозначим $\vec{a}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Из равенств $\vec{a}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{BF}+\frac{1}{\mu}\overrightarrow{BF}=\frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{BF}$ находим, что $\overrightarrow{BF}=\mu\vec{a}/(\mu+1)$. Аналогично имеем, $\overrightarrow{DE}=\lambda\vec{b}/(\lambda+1)$. Следовательно, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\vec{a}+\lambda\vec{b}/(\lambda+1)$, $\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\mu\vec{a}:(\mu+1)-\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}/(\mu+1)-\vec{b}$. Рассмотрим цикл $AODA$. По правилу цикла,

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}. \qquad (2.7)$$

Векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OD}$ неизвестны. Однако они коллинеарны векторам $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{FD}$ соответственно, поэтому существуют (неизвестные) такие числа x и y, что $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AE}=x\vec{a}+\lambda x\vec{b}/(\lambda+1)$, $\overrightarrow{OD}=y\overrightarrow{FD}=y\vec{a}/(\mu+1)-y\vec{b}$. Подставляя полученные выражения в равенство (2.7), имеем

$$\left(x\vec{a}+\frac{\lambda\, x\vec{b}}{\lambda+1}\right)+\left(\frac{y\vec{a}}{\mu+1}-y\vec{b}\right)-\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{y}{\mu+1}-1\right)\vec{a}+\left(\frac{\lambda x}{\lambda+1}-y\right)\vec{b}=\vec{0}.$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то получаем систему уравнений $x + y/(\mu + 1) = 1$, $\lambda x/(\lambda + 1) = y$, решая которую находим

$$y = \frac{\lambda(1+\mu)}{\lambda + (1+\lambda)(1+\mu)}, \quad x = \frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda + (1+\lambda)(1+\mu)}.$$

Следовательно,

$$|FO| : |OD| = (|FD| - |OD|) : |OD| = \frac{|FD|}{|OD|} - 1 = \frac{1-y}{y} =$$
$$= \frac{1+\lambda+\mu}{\lambda(1+\mu)}. \ \blacktriangle$$

Отметим, что в этом примере получено также и выражение для отношения $|AO|:|OE| = x : (1 - x) = \frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\lambda}$.

§ 4. Матрицы, определители, системы линейных уравнений

Таблица $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ называется *матрицей второго порядка. Элементы* α_1 и α_2 образуют первую *строку* матрицы, β_1 и β_2 — вторую строку, α_1 и β_1 — первый *столбец*, α_2 и β_2 — второй столбец этой матрицы. Таблица

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

называется *матрицей третьего порядка. Элементы* α_1, α_2, α_3 образуют ее первую *строку*, α_1, β_1, γ_1 — ее первый *столбец* и т. д.

Будем рассматривать только матрицы, у которых либо все строки (столбцы) состоят из чисел, либо одна строка (столбец) состоит из векторов, а остальные строки (столбцы) состоят из чисел. Для таких матриц можно ввести понятие детерминанта (определителя) матрицы. *Детерминантом* матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ называется выражение $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, которое обозначается

$$\det A, \ \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

и называется также *определителем второго порядка*. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2; \quad \begin{vmatrix} \vec{a} & -2 \\ \vec{b} & 1 \end{vmatrix} = \vec{a}\cdot 1 - (-2)\,\vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}.$$

Детерминантом матрицы B третьего порядка (см. (2.8)) называется выражение

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \alpha_2 (\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \alpha_3 (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1),$$

обозначается

$$\det B, \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

и называется также *определителем третьего порядка*. Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = ((-1)(-2) - (-3)\cdot 4) +$$

$$+ (2\cdot(-2) - (-3)\cdot(-3)) + (2\cdot 4 - (-1)\cdot(-3)) =$$

$$= 2 + 12 - 4 - 9 + 8 - 3 = 6;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} \\ -3 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1) \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(4\vec{b} - \vec{c}) - (4\vec{a} + 3\vec{c}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) =$$

$$= -5\vec{a} + 5\vec{b} - 5\vec{c}.$$

Если все элементы одной строки (столбца) матрицы (определителя) умножаются на одно и то же число λ, то говорят, что на число λ умножается строка (столбец) матрицы (определителя). *Транспонированием* матрицы называется операция, состоящая в замене строк матрицы столбцами, а столбцов — строками с теми же номерами. Матрицу, транспонированную к матрице B, обозначают $B^{\text{т}}$. Если, например, B определяется формулой (2.8), то $B^{\text{т}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$. Если $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ и $A' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix}$ — матрицы второго порядка, одна из которых числовая (целиком составлена из чисел), то *произведением* AA' называется матрица

$$AA' = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\beta_1' & \alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\beta_2' \\ \beta_1\alpha_1' + \beta_2\beta_1' & \beta_1\alpha_2' + \beta_2\beta_2' \end{pmatrix}.$$

Произведением BB' *матриц* B *и* B' *третьего порядка*

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \end{pmatrix}$$

при условии, что одна из них числовая, называется матрица

$$BB' = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\beta_1' + \alpha_3\gamma_1' & \alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\beta_2' + \alpha_3\gamma_2' & \alpha_1\alpha_3' + \alpha_2\beta_3' + \alpha_3\gamma_3' \\ \beta_1\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \beta_3\gamma_1' & \beta_1\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \beta_3\gamma_2' & \beta_1\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \beta_3\gamma_3' \\ \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' & \gamma_1\alpha_2' + \gamma_2\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' & \gamma_1\alpha_3' + \gamma_2\beta_3' + \gamma_3\gamma_3' \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Например, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$AA' = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A'A = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 2 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 2 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей E называется числовая матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, а недиагональные — нулю. Единичная матрица второго порядка имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, третьего порядка — вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Если S и E — матрицы одного порядка, E — единичная матрица, то $SE = ES = S$. Числовые матрицы одного порядка X и Y называют *обратными* друг к другу и обозначают $Y = X^{-1}$, $X = Y^{-1}$, если $XY = YX = E$.

Приведем свойства определителей.

1^0. $\det S = \det S^{т}$.

□ Если $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$, то

$$\det S = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1;\ S^{т} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$\det S^{т} = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = \det S.$$

Если $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, то

$$S^{т} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \text{ и } \det S = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 -$$

$$- \alpha_3\beta_2\gamma_1 = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \det S^{т}. \ \blacksquare$$

2^0. *Если две строки определителя поменять местами, то знак определителя изменится.*

□ Если $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, то

$$\det S = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1,\ \det S' = \beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 =$$

$$= -(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = -\det S.$$

Если $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, $S' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$, то

$$\det S' = \beta_1(\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2) - \beta_2(\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1) +$$

$$+ \beta_3(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) = -\alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + \alpha_2(\beta_1\gamma_3 -$$

$$- \beta_3\gamma_1) - \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = -\det S.$$

Аналогично можно проверить, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

3^0. *Если две строки определителя одинаковы, то определитель равен нулю (нулевому вектору).*

□ Действительно, если две одинаковые строки поменять местами, то определитель не изменится. С другой стороны, согласно свойству 2^0 определитель изменит знак. Но единственное число (вектор), которое (который) не изменяется при изменении знака, — это нуль (нулевой вектор).■

4^0. *Если два столбца определителя поменять местами, то определитель изменит знак. Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю (нулевому вектору).*

□ Это свойство следует из свойств 1^0 —3^0. ■

5^0. *Для произвольных чисел λ и μ справедливо равенство*

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1+\mu\alpha_1' & \lambda\alpha_2+\mu\alpha_2' & \lambda\alpha_3+\mu\alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

если все три определителя имеют смысл, т. е. если одновременно все α_1 и α_1', α_2 и α_2', α_3 и α_3' — или числа, или векторы.

□ Определитель, стоящий в левой части равенства, равен

$$(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_1') \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - (\lambda\alpha_2+\mu\alpha_2') \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (\lambda\alpha_3+\mu\alpha_3') \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \lambda \left(\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right) + \mu \left(\alpha_1' \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2' \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \alpha_3' \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right) = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Аналогично, для определителя второго порядка имеем

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1+\mu\alpha_1' & \lambda\alpha_2+\mu\alpha_2' \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Свойство 5^0 называется свойством линейности определителя по первой строке. С помощью свойства 2^0 можно легко проверить линейность определителя по любой строке. При $\mu = 0$ из свойства 5^0 следует, что при умножении строки определителя на число сам определитель умножается на это число:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \lambda\beta_1 & \lambda\beta_2 & \lambda\beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \lambda\gamma_1 & \lambda\gamma_2 & \lambda\gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

6^0. *Для любой числовой матрицы* $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ *и любых чисел* λ *и* μ *выполняются следующие равенства*:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\lambda\beta_1+\mu\gamma_1 & \alpha_2+\lambda\beta_2+\mu\gamma_2 & \alpha_3+\lambda\beta_3+\mu\gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1+\lambda\alpha_1+\mu\gamma_1 & \beta_2+\lambda\alpha_2+\mu\gamma_2 & \beta_3+\lambda\alpha_3+\mu\gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1+\lambda\alpha_1+\mu\beta_1 & \gamma_2+\lambda\alpha_2+\mu\beta_2 & \gamma_3+\lambda\alpha_3+\mu\beta_3 \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

□ Согласно свойству 5^0, первый из определителей равен сумме

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

в которой второе и третье слагаемые равны нулю на основании свойства 3^0. Тем самым первое из равенств (2.10) доказано. Остальные равенства следуют из первого равенства согласно свойству 2^0. Про первый (третий, четвертый) определитель в (2.10) говорят, что он получен из $\det S$ прибавлением к первой (второй, третьей) строке линейной комбинации остальных строк. Свойство 6^0 означает, что при прибавлении к какой-либо строке определителя числовой матрицы линейной комбинации остальных строк определитель не изменяется. ■

Равенство, аналогичное (2.10), справедливо и для определителей числовых матриц второго порядка:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\lambda\beta_1 & \alpha_2+\lambda\beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1+\lambda\alpha_1 & \beta_2+\lambda\alpha_2 \end{vmatrix}.$$

7^0. *Определитель обладает свойством линейности по любому из своих столбцов. При умножении столбца определителя на число сам определитель умножается на это число. Если к столбцу определителя прибавить линейную комбинацию других столбцов, то определитель не изменится.*

□ В силу свойства 1^0 это свойство следует из свойств 5^0 и 6^0. ■

8°. *Если S и S' — матрицы одинакового порядка, одна из которых числовая, то* $\det(SS') = \det S \det S'$.

□ Пусть $S=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$, $S'=\begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix}$ — матрицы второго порядка. Тогда $\det(SS') = (\alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\beta_1')(\beta_1\alpha_2' + \beta_2\beta_2') - (\alpha_1\alpha_2' + \alpha_2\beta_2') \times (\beta_1\alpha_1' + \beta_2\beta_1') = \alpha_1(\alpha_1'\beta_1\alpha_2' + \alpha_1'\beta_2\beta_2' - \alpha_2'\beta_1\alpha_1' - \alpha_2'\beta_2\beta_1') - \alpha_2(\beta_2'\beta_1\alpha_1' + \beta_2'\beta_2\beta_1' - \beta_1'\beta_1\alpha_2' - \beta_1'\beta_2\beta_2') = \alpha_1\beta_2(\alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1') - \alpha_2\beta_1(\alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1') = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_1'\beta_2' - \alpha_2'\beta_1') = \det S \det S'$. Пусть теперь

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad S' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1' & \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \end{pmatrix}$$

и для определенности S — числовая матрица. По формуле (2.9) и согласно свойству 5^0, $\det(SS') = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c$, где

$$a = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_1\alpha_1' + \beta_2\beta_1' + \beta_3\gamma_1' & \beta_1\alpha_2' + \beta_2\beta_2' + \beta_3\gamma_2' & \beta_1\alpha_3' + \beta_2\beta_3' + \beta_3\gamma_3' \\ \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\beta_1' + \gamma_3\gamma_1' & \gamma_1\alpha_2' + \gamma_2\beta_2' + \gamma_3\gamma_2' & \gamma_1\alpha_3' + \gamma_2\beta_3' + \gamma_3\gamma_3' \end{vmatrix}.$$

Определители b и c получают в результате замены в определителе a первой строки соответственно строками $\beta_1', \beta_2', \beta_3'$ и $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$. Прибавляя в определителе a ко второй (третьей) строке первую строку, умноженную на $-\beta_1$ (соответственно на $-\gamma_1$), используя определение определителя третьего порядка и уже доказанное свойство 8^0 для определителей второго порядка, получаем

$$a=\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \beta_2\beta_1'+\beta_3\gamma_1' & \beta_2\beta_2'+\beta_3\gamma_2' & \beta_2\beta_3'+\beta_3\gamma_3' \\ \gamma_2\beta_1'+\gamma_3\gamma_1' & \gamma_2\beta_2'+\gamma_3\gamma_2' & \gamma_2\beta_3'+\gamma_3\gamma_3' \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1'\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \beta_2' & \beta_3' \\ \gamma_2' & \gamma_3' \end{vmatrix}-\alpha_2'\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \beta_1' & \beta_3' \\ \gamma_1' & \gamma_3' \end{vmatrix}+$$

$$+\alpha_3'\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \beta_1' & \beta_2' \\ \gamma_1' & \gamma_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}\det S'.$$

Аналогично можно проверить, что $b=-\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}\det S'$, $c=$ $=\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\det S'$, поэтому

$$\det(SS')=\left(\alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}\right)\det S'=$$

$$=\det S\det S'. \blacksquare$$

Пример 1. Используя свойство 6^0, вычислите определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}.$$

$\triangle$ Вычтем из второй строки первую, умноженную на 2: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$. Вычтем из третьей строки первую, умноженную на 3:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix}-$$

$$-4\cdot\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 0 & -11 \end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-4\cdot 0+7\cdot 0=-3. \blacktriangle$$

Отметим, что, используя свойство 1°, последние вычисления можно упростить:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-11) - (-6)\cdot(-6) = -3.$$

Пример 2. Докажите, что если все элементы строки (столбца) определителя равны нулю (нулевому вектору), то определитель равен нулю (нулевому вектору).

Δ Если указанную строку (столбец) умножить на нуль, то определитель, очевидно, не изменится. С другой стороны, согласно свойствам 5° и 7°, определитель умножится на нуль, т. е. станет равным нулю (нулевому вектору).▲

Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — действительные числа, то имеет место *тождество, связанное с тремя определителями*:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 =$$
$$= \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\right)^2. \qquad (2.11)$$

□ Правая часть тождества (2.11) равна $(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 = \alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 - 2(\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_2 + \alpha_1\beta_3\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1)$. Левая его часть равна $\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_3^2 - (\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2 + 2\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 + 2\alpha_1\beta_1\alpha_3\beta_3 + 2\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3) = \alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 - 2(\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_2 + \alpha_1\beta_3\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1)$, т. е. равна правой.■

Имеет место **лемма о трех определителях**: равенства

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.12)$$

выполняются тогда и только тогда, когда существуют числа λ и μ, не равные нулю одновременно, такие, что

$$\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 = 0, \ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 = 0, \ \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 = 0. \qquad (2.13)$$

При этом если $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$, то $\mu \neq 0$; если $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 > 0$, то $\lambda \neq 0$.

□ Пусть выполняются соотношения (2.13) и пусть для определенности $\lambda \neq 0$. Тогда $\alpha_1 = -\nu\beta_1$, $\alpha_2 = -\nu\beta_2$, $\alpha_3 = -\nu\beta_3$, где $\nu = \mu/\lambda$, и поэтому $\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = -\nu\beta_2\beta_3 + \nu\beta_3\beta_2 =$ $= 0$. Аналогично можно проверить, что $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$.

Обратно: если выполняются соотношения (2.12), то в силу тождества (2.11) $AB - C^2 = 0$, где $A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, $B = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$, $C = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$. Возможны следующие случаи:

а) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Тогда соотношения (2.13) выполняются при $\lambda = 1$, $\mu = 0$.

б) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$. Рассмотрим квадратный трехчлен $p(t) = (t\alpha_1 - \beta_1)^2 + (t\alpha_2 - \beta_2)^2 + (t\alpha_3 - \beta_3)^2 = t^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) - 2t(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) = At^2 - 2Ct + B = A(t - C/A)^2 + B - C^2/A = A(t - C/A)^2$. При $t = C/A$ трехчлен $p(t)$ обращается в нуль, поэтому $C\alpha_1/A - \beta_1 = C\alpha_2/A - \beta_2 = C\alpha_3/A - \beta_3 = 0$, т. е. соотношения (2.13) выполняются при $\lambda = C/A$, $\mu = -1$. ■

Свойства алгебраических дополнений. Если в определителе выделить какой-нибудь элемент и вычеркнуть строку и столбец определителя, содержащие этот элемент, то оставшийся определитель называется *минором, дополнительным к выделенному элементу*. Дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров вычеркнутых строки и столбца, называется *алгебраическим дополнением к выделенному элементу*. Например, в определителе

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

алгебраическое дополнение к элементу β_3 есть $(-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, поскольку элемент β_3 расположен во второй строке и в третьем столбце.

Пусть

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

— произвольная числовая матрица; A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 — алгебраические дополнения соответственно к элементам α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 в определителе $\det S$. Рассмотрим матрицу

$$S' = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

получающуюся из S следующим образом: в матрице S каждый элемент заменяется его алгебраическим дополнением, а получившаяся матрица затем транспонируется. Докажем, что

$$SS' = S'S = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Delta = \det S.$$

По определению произведения матриц для этого необходимо и достаточно проверить выполнение следующих равенств:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \Delta, \quad \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = 0,$$
$$\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 = 0; \tag{2.16}$$
$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 = 0, \quad \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3 = \Delta,$$
$$\gamma_1 B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 = 0; \tag{2.17}$$
$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3 = 0, \quad \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \beta_3 C_3 = 0,$$
$$\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \gamma_3 C_3 = \Delta; \tag{2.18}$$
$$\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 = \Delta, \quad \alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 = 0,$$
$$\alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 = 0; \tag{2.19}$$
$$\alpha_1 A_2 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 = 0, \quad \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2 = \Delta,$$
$$\alpha_3 A_2 + \beta_3 B_2 + \gamma_3 C_2 = 0; \tag{2.20}$$
$$\alpha_1 A_3 + \beta_1 B_3 + \gamma_1 C_3 = 0, \quad \alpha_2 A_3 + \beta_2 B_3 + \gamma_2 C_3 = 0,$$
$$\alpha_3 A_3 + \beta_3 B_3 + \gamma_3 C_3 = \Delta. \tag{2.21}$$

□ Равенства (2.16) — (2.21) доказываются одинаково. Проверим, например, первые два из равенств (2.16):

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} +$$
$$+ \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta;$$

$$\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

Из доказанного утверждения следует, что для всякой числовой матрицы S вида (2.14), определитель которой $\Delta = \det S$ не равен нулю, существует обратная к ней матрица S^{-1}, причем

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} A_1/\Delta & B_1/\Delta & C_1/\Delta \\ A_2/\Delta & B_2/\Delta & C_2/\Delta \\ A_3/\Delta & B_3/\Delta & C_3/\Delta \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \det S^{-1} = 1/\Delta.$$

Если $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$ — матрица второго порядка, причем $\Delta = \det S = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, то обратная матрица S^{-1} определяется формулой

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_2/\Delta & -\alpha_2/\Delta \\ -\beta_1/\Delta & \alpha_1/\Delta \end{pmatrix}, \quad \det S^{-1} = 1/\Delta.$$

С и с т е м ы л и н е й н ы х у р а в н е н и й. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = m, \quad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = n, \quad \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = p, \tag{2.22}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — заданные числа; m, n и p либо заданные числа, либо векторы; x, y, z — переменные (числовые, если m, n, p — числа, и векторные, если m, n, p — векторы). Матрица $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ называется *матрицей системы* (2.22). Обозначим через S' матрицу из алгебраических дополнений [см. (2.14), (2.15)] к элементам матрицы S. Положим $\Delta = \det S$.

Пусть $(x;\ y;\ z)$ — решение системы (2.22). Сложив первое из уравнений этой системы, умноженное на A_1, со вторым уравнением, умноженным на B_1, и с третьим уравнением, умноженным на C_1, получим в силу (2.19)

$$x\Delta = mA_1 + nB_1 + pC_1 = \begin{vmatrix} m & \alpha_2 & \alpha_3 \\ n & \beta_2 & \beta_3 \\ p & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta_x \tag{2.23}$$

(последнее из равенств (2.23) является определением Δ_x).

Умножая первое уравнение системы (2.22) на A_2, второе — на B_2, третье — на C_2 и складывая получившиеся уравнения, на основании (2.20) получим

$$y\Delta = mA_2 + nB_2 + pC_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & m & \alpha_3 \\ \beta_1 & n & \beta_3 \\ \gamma_1 & p & \gamma_3 \end{vmatrix} = \Delta_y. \tag{2.24}$$

Аналогично имеем

$$z\Delta = mA_3 + nB_3 + pC_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & m \\ \beta_1 & \beta_2 & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & p \end{vmatrix} = \Delta_z. \qquad (2.25)$$

Теорема 1 (правило Крамера). *Если определитель Δ матрицы S системы уравнений* (2.22) *не равен нулю, то эта система имеет единственное решение* $(x;\ y;\ z)$, *определяемое следующими формулами:*

$$x = \Delta_x/\Delta,\ y = \Delta_y/\Delta,\ z = \Delta_z/\Delta. \qquad (2.26)$$

□ Единственность решения следует из того, что, как показано выше, всякое решение $(x;\ y;\ z)$ системы (2.22) удовлетворяет равенствам (2.23) — (2.25) и поэтому имеет вид (2.26). Остается проверить, что формулы (2.26) действительно определяют решение системы (2.22). Подставляя выражения (2.26) в левую часть первого уравнения системы (2.22), в силу равенств (2.16) — (2.18) имеем

$$\alpha_1(\Delta_x/\Delta) + \alpha_2(\Delta_y/\Delta) + \alpha_3(\Delta_z/\Delta) = (1/\Delta)\ (\alpha_1 mA_1 +$$
$$+\alpha_1 nB_1 + \alpha_1 pC_1 + \alpha_2 mA_2 + \alpha_2 nB_2 + \alpha_2 pC_2 + \alpha_3 mA_3 +$$
$$+\alpha_3 nB_3 + \alpha_3 pC_3) = \frac{1}{\Delta}\{(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)\, m +$$
$$+ (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3)\, n + (\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3) p\} = m.$$

Таким образом, x, y и z, определяемые формулами (2.26), удовлетворяют первому из уравнений системы (2.22). Аналогично можно проверить, что x, y и z удовлетворяют также второму и третьему уравнениям (выполните эту проверку в качестве упражнения.) ■

Доказанная теорема означает, что если m, n, p выражаются через x, y, z с помощью элементов матрицы S (2.14) по формулам (2.22), то x, y, z выражаются через m, n, p с помощью элементов матрицы S' (2.15) по формулам (2.26) [см. (2.23) — (2.25)].

Система уравнений (2.22) называется *однородной*, если $m = n = p = 0$. Если $\Delta \neq 0$, то однородная система (2.22) имеет единственное решение $x = y = z = 0$, которое называется *тривиальным*. Любое решение $(x;\ y;\ z)$ однородной системы, для которого $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, называется *нетривиальным*.

Теорема 2 (о существовании нетривиального решения у однородной системы уравнений). *Система линейных уравнений*

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0,\ \ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = 0,\ \ \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = 0 \qquad (2.27)$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.

□ Если нетривиальное решение системы (2.27) существует, то $\Delta = 0$; в противном случае система (2.27) имела бы единственное решение — тривиальное (правило Крамера).

Обратно: пусть $\Delta = 0$. Тогда если A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 — алгебраические дополнения соответственно к элементам α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3 матрицы S системы (2.27), то в силу равенств (2.16) — (2.18) наборы $(A_1; A_2; A_3)$, $(B_1; B_2; B_3)$, $(C_1; C_2; C_3)$ — решения системы (2.27). Если хотя бы одно из этих решений нетривиально, то теорема доказана.

Рассмотрим случай $A_1 = A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Если все элементы матрицы S равны нулю, то система (2.27) имеет нетривиальное решение (ей удовлетворяют любые числа x, y, z). Если же не все элементы матрицы S равны нулю, то, поменяв (если это необходимо) уравнения системы (2.27) местами, можно без ограничения общности считать, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$. Так как

$$B_1 = -\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,\quad B_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,\quad B_3 = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то по лемме о трех определителях существует такое число $\nu \neq 0$, что $\gamma_1 = \nu\alpha_1$, $\gamma_2 = \nu\alpha_2$, $\gamma_3 = \nu\alpha_3$, т. е. третье уравнение системы получается из первого умножением обеих его частей на число ν и, следовательно, является следствием первого уравнения. Аналогично, из равенств $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ следует, что второе из уравнений системы (2.27) является следствием первого. Значит, в рассматриваемом случае система (2.27) эквивалентна своему первому уравнению (точнее, тому из своих уравнений, у которого не все коэффициенты равны нулю). Осталось проверить, что уравнение $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$ имеет нетривиальное решение. А это очевидно: если $\alpha_1 = 0$, то $(1; 0; 0)$ — решение данного уравнения; если же $\alpha_1 \neq 0$, то решением данного уравнения является $(\alpha_2/\alpha_1; -1; 0)$. ■

§ 5. Признак компланарности векторов. Базис в плоскости и в пространстве. Разложение вектора по базису

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Отложим их от одной точки: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 2.16). Обозначим через P плоскость, определяемую точками O, A, B. Любой вектор $\vec{c}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, по определению параллелен плоскости P. Если построить вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, то точка C будет принадлежать плоскости P. Проведем через точку C прямую l параллельно прямой (OB). Поскольку $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, прямые l и (OA) пересекутся в некоторой точке D. Векторы $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OA}$ коллинеарны, причем $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$. Согласно признаку коллинеарности векторов найдется такое действительное число x, что $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$. Аналогично, найдется такое число y, что $\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{OB}$. Поэтому $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, т. е.

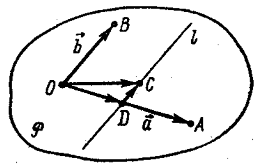


Рис. 2.16

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \tag{2.28}$$

Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{a} \| P$ и $\vec{b} \| P$ называется *базисом в плоскости* P (обозначение: $\{\vec{a}, \vec{b}\}$). Всякий вектор $\vec{c}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, образующим базис, можно представить в виде (2.28). Числа x и y называются *координатами вектора* $\vec{c}$ *в базисе* $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, а само равенство (2.28) — *разложением вектора* $\vec{c}$ *по базису* $\{\vec{a}, \vec{b}\}$. Тот факт, что числа x и y являются координатами вектора $\vec{c}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, записывается так: $\vec{c} = (x;\ y)$.

Пример 1. Докажите, что разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ единственно.

□ Пусть $\vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$ — некоторое разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$, отличное от (2.28). Тогда в силу неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем (см. пример 4 § 3 этой главы) $x = x'$, $y = y'$. Получено противоречие. ■

Пример 2 (признак компланарности). Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — три вектора пространства, связанные соотношением (2.28), где x и y — некоторые действительные числа. Докажите, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

□ Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, т. е. параллельны некоторой прямой l, то этой прямой параллельны векторы $x\vec{a}$, $y\vec{b}$, а также и вектор $\vec{c}$, являющийся суммой $x\vec{a}$ и $y\vec{b}$. Значит, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны любой плоскости, содержащей прямую l.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то отложим их от некоторой точки O (рис. 2.16): $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Обозначим через P плоскость (OAB). Возьмем на прямой (OA) точку D так, чтобы $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$. Отложим от точки D направленный отрезок $\overrightarrow{DC} = y\overrightarrow{OB}$, который будучи параллелен прямой (OB), параллелен и плоскости P. Его начало D лежит в плоскости P, значит, и конец C также расположен в плоскости P. Таким образом, начало и конец направленного отрезка $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ лежат в плоскости P. Это означает, что изображаемый им вектор $x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е. вектор $\vec{c}$, параллелен плоскости P, а следовательно, компланарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ■

Пример 3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны. Докажите, что

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = z = 0. \qquad (2.29)$$

□ Если хотя бы одно из чисел в равенстве $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$, например z, не равно нулю, то это равенство эквивалентно равенству $\vec{c} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$, где $x' = -x/z$, $y' = -y/z$. По признаку компланарности (см. пример 2) вектор $\vec{c}$ компланарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. получено противоречие. Следовательно, $x = y = z = 0$. Обратно: если $x = y = z = 0$, то равенство $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ очевидно. ■

Пример 4. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны. Докажите, что равенство

$$m_1\vec{a} + n_1\vec{b} + k_1\vec{c} = m_2\vec{a} + n_2\vec{b} + k_2\vec{c} \qquad (2.30)$$

эквивалентно системе равенств

$$m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2, \quad k_1 = k_2. \tag{2.31}$$

□ Для доказательства достаточно переписать (2.30) в виде $(m_1 - m_2)\vec{a} + (n_1 - n_2)\vec{b} + (k_1 - k_2)\vec{c} = \vec{0}$ и воспользоваться результатом примера 3. ■

Пример 5. Докажите, что если векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ($\vec{c}$ — любой вектор) компланарны.

□ Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, то все три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ параллельны одной и той же прямой, тем более одной и той же содержащей эту прямую плоскости. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, то они образуют базис в некоторой плоскости P. Векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, поэтому найдется такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a} = k\vec{a} + 0 \cdot \vec{c}$. Согласно признаку компланарности (см. пример 2), векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны (параллельны плоскости P). ■

Пример 6. Докажите, что если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, то: а) ни один из них не является нулевым; б) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

△ а) Если бы, например, $\vec{a} = \vec{0}$, то имело бы место равенство $1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$, что противоречит (2.29).

б) Если бы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то некомпланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ противоречила бы результату примера 5. Если бы $\vec{a} = \vec{0}$, имело бы место противоречие с доказанной частью а) утверждения этого примера. ▲

Пример 7. В правильной усеченной шестиугольной пирамиде $ABCDEF\ A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (см. рис. 2.7) точки O и O_1 — центры оснований соответственно $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Разложите: а) вектор $\overrightarrow{AD}$ по базису $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$; б) вектор $\overrightarrow{OO_1}$ по базису $\{\overrightarrow{EE_1}, \overrightarrow{BB_1}\}$.

△ а) $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$.

б) Точки O и O_1 — середины отрезков $[BE]$ и $[B_1E_1]$. Поэтому (см. пример 5 § 2 этой главы) $2\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{EE_1} + \overrightarrow{BB_1}$, т. е. $\overrightarrow{OO_1} = (1/2)\,\overrightarrow{EE_1} + (1/2)\,\overrightarrow{BB_1}$. ▲

Пример 8. В параллелограмме $ABCD$ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, E — середина стороны $[CD]$. Разложите вектор $\overrightarrow{BE}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{c}\}$. Представьте тремя способами вектор $\overrightarrow{BE}$ в виде

$$\overrightarrow{BE} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \tag{2.32}$$

△ Имеем $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Поэтому $\overrightarrow{BE} = (\vec{c} - \vec{a}) - (1/2)\,\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{c}$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{BE}$ уже представлен двумя способами в виде (2.32): $\overrightarrow{BE} = (-1/2)\,\vec{a} + 1\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c}$, $\overrightarrow{BE} = (-3/2)\,\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + 1\cdot\vec{c}$. Если t — произвольное действительное число, то $t\,(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$. Следовательно, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BE} + \vec{0} = (-1/2)\,\vec{a} + \vec{b} + t\,(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = (t - 1/2)\,\vec{a} + (1 + t)\,\vec{b} - t\vec{c}$. При $t = 0$ получаем первое представление, при $t = -1$ — второе. Взяв $t = 1$, получаем третье представление: $\overrightarrow{BE} = (1/2)\,\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$. ▲

Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — некоторые векторы, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа. Вектор $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ (*с коэффициентами* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$). Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то комбинация называется *тривиальной*, в противном случае — *нетривиальной*. Представление вектора $\vec{a}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется *разложением вектора* $\vec{a}$ *по векторам* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Как следует из результата примера 8, разложение четвертого вектора по трем компланарным векторам в общем случае не единственно. В примере 2 показано, что никакой из трех некомпланарных векторов нельзя разложить по двум остальным. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{2.33}$$

Результаты примера 3 из § 3 и примера 3 этого параграфа позволяют сделать вывод, что неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, некомпланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ также линейно независимы. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если они не являются линейно независимыми, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0},$$
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0. \tag{2.34}$$

Пример 9. Докажите, что: а) два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны; б) три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

□ Достаточно проверить, что коллинеарные (компланарные) векторы линейно зависимы. а) Пусть $\vec{a} \| \vec{b}$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$ и коллинеарность $\vec{0}$ и $\vec{b}$ влечет линейную зависимость $\vec{0}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то согласно признаку коллинеарности существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$, т. е. $1 \cdot \vec{b} + (-k)\,\vec{a} = \vec{0}$, $1^2 + (-k)^2 > 0$, и линейная зависимость $\vec{a}$ и $\vec{b}$ очевидна.

б) Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то, по доказанному, $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ при некоторых таких α и β, что $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Но тогда $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$, причем $\alpha^2 + \beta^2 + 0^2 > 0$, т. е. $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы. Пусть теперь компланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ таковы, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Тогда [см. формулу (2.28)] при некоторых x и y выполняется равенство $(-1)\,\vec{c} + x\,\vec{a} + y\,\vec{b} = \vec{0}$, причем $(-1)^2 + x^2 + y^2 > 0$, т. е. $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы. ■

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Базис, образованный векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначается $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Пример 10 (разложение по базису в пространстве). Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — базис, $\vec{d}$ — произвольный вектор пространства. Докажите, что вектор $\vec{d}$

можно, и притом единственным образом, разложить по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

□ Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ от некоторой точки O: $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (см. пример 6). Обозначим через P плоскость (OAB). Проведем через точку D прямую l параллельно (OC) (вектор $\vec{c}=\overrightarrow{OC}\neq\vec{0}$ (см. пример 6), поэтому $O\neq C$ и прямая l определена однозначно). Вектор $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ не параллелен плоскости P, поэтому прямая l пересечет плоскость P в некоторой точке E (рис. 2.17). Векторы $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{OC}\neq\vec{0}$ коллинеарны. Согласно признаку коллинеарности, существует такое действительное число z, что $\overrightarrow{ED}=z\overrightarrow{OC}=z\vec{c}$. Направленные отрезки $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ компланарны, причем $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ — базис в содержащей их плоскости P. Следовательно, вектор $\overrightarrow{OE}$ раскладывается по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$: $\overrightarrow{OE}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Окончательно имеем $\vec{d}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$. Единственность разложения вектора $\vec{d}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ доказана в примере 4: если также $\vec{d}=x'\vec{a}+y'\vec{b}+z'\vec{c}$, то из некомпланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ следует $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$. ■

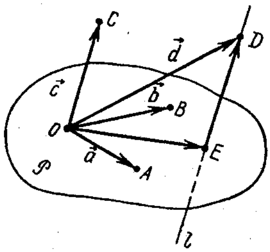


Рис. 2.17

Коэффициенты разложения вектора $\vec{d}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называются *координатами вектора* $\vec{d}$ *в базисе* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Тот факт, что числа x, y, z являются координатами вектора $\vec{d}$ в базисе, записывается так: $\vec{d}=(x;\ y;\ z)$.

Приведем свойства координат вектора. Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — базис, $\vec{d}=(x;\ y;\ z)$ и $\vec{e}=(x';\ y';\ z')$ — произвольные векторы, λ — действительное число. Тогда:

1°. $\vec{d}=\vec{e}\Leftrightarrow x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, т. е. *два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их одноименные координаты.*

2^0. $\vec{d}+\vec{e}=(x+x';\ y+y';\ z+z')$, т. е. *координаты суммы двух векторов равны суммам соответствующих координат этих векторов.*

3^0. $\lambda\vec{d}=(\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z)$, т. е. *при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

□ Свойство 1^0 доказано в примере 4. Свойства 2^0 и 3^0 являются частными случаями следующего свойства линейности координат: *для любых чисел* α *и* β $\alpha\vec{d}+\beta\vec{e}=(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y';\ \alpha z+\beta z')$.

Действительно, $\alpha\vec{d}+\beta\vec{e}=\alpha(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})+$ $+\beta(x'\vec{a}+y'\vec{b}+z'\vec{c})=(\alpha x+\beta x')\vec{a}+(\alpha y+\beta y')\vec{b}+$ $+(\alpha z+\beta z')\vec{c}=(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y';\ \alpha z+\beta z')$. ■

Аналогичными свойствами обладают координаты векторов на плоскости. Если $\{\vec{a},\vec{b}\}$ — базис в плоскости P, $\vec{d}=(x;\ y)$ и $\vec{e}=(x';\ y')$ — произвольные векторы, параллельные плоскости P, α и β — действительные числа, то:

1^0 $\vec{d}=\vec{e}\Leftrightarrow x=x',\ y=y'$;

2^0 $\alpha\vec{d}+\beta\vec{e}=(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y')$.

Пример 11. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (см. рис. 2.6). Разложите вектор $\overrightarrow{AA_1}$ по базису $\{\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{BA_1}\}$.

△ Имеем $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}=$ $=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}$. Складывая эти равенства, получаем $\overrightarrow{AA_1}+$ $+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{AC_1}$. Так как $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ (цикл $ABCA$), а $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=$ $=\overrightarrow{CC_1}$, то $\overrightarrow{AA_1}=(1/3)\overrightarrow{AC_1}+(1/3)\overrightarrow{CB_1}+(1/3)\overrightarrow{BA_1}$. ▲

Пример 12. В тетраэдре $ABCD$ точки K и L — соответственно середины ребер $[AC]$ и $[BD]$, O — точка пересечения медиан грани ACD (рис. 2.18). Разложите: а) вектор $\overrightarrow{BO}$ по базису $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$; б) вектор $\overrightarrow{KL}$ по каждому из базисов $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$, $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$ и $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$.

△ а) Складывая равенства $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BO}+$ $+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BD}$, получаем $3\overrightarrow{BO}+(\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$. На основании результата примера 3 § 2 этой главы $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{BO} = (1/3)\,\overrightarrow{BA} + (1/3)\,\overrightarrow{BC} + (1/3)\,\overrightarrow{BD}$.

б) В данном случае $\overrightarrow{AL}$ — вектор медианы треугольника ADB. Поэтому $\overrightarrow{AL} = (1/2)\,(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$. Следовательно, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = (1/2)\,(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) - (1/2)\,\overrightarrow{AC} = -(1/2)\,\overrightarrow{AC} + (1/2)\,\overrightarrow{AB} + (1/2)\,\overrightarrow{AD}$. Приведем еще один способ разложения $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$. На основании формулы для средней линии пространственного

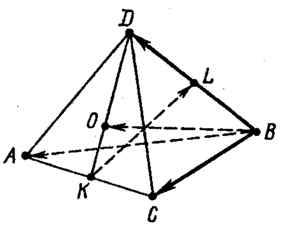


Рис. 2.18

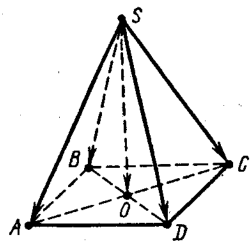


Рис. 2.19

четырехугольника (см. пример 5 § 2 этой главы) имеем $\overrightarrow{KL} = (1/2)\,(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$, а так как $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{KL} = -(1/2)\,\overrightarrow{AC} + (1/2)\,\overrightarrow{AB} + (1/2)\,\overrightarrow{AD}$. Вектор $\overrightarrow{KL}$ является вектором медианы треугольника KDB. Значит, $\overrightarrow{KL} = (1/2)\,(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KB})$. Согласно свойству точки пересечения медиан, $\overrightarrow{KO} = (1/2)\,\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{KD} = (3/2)\,\overrightarrow{OD}$. Следовательно, $\overrightarrow{KL} = (1/2)\,(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KB}) = (1/2)\,((3/2)\,\overrightarrow{OD} + (\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OB})) = (1/2)\,(2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}) = -(1/2)\,\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + 0\cdot\overrightarrow{AC}$. Наконец, как отмечалось выше, $\overrightarrow{KL} = (1/2)\,(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = -(1/2)\,\overrightarrow{DA} - (1/2)\,\overrightarrow{BC} + 0\cdot\overrightarrow{BO}$. ▲

Пример 13. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания $ABCD$. Разложите вектор $\overrightarrow{SO}$ несколькими различными способами по векторам $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$.

△ Имеем $\overrightarrow{SO} = (1/2)(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC})$, $\overrightarrow{SO} = (1/2)(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD})$ (рис. 2.19). Складывая эти два различных разложения, получаем третье: $\overrightarrow{SO} = (1/4)(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD})$. ▲

Пример 14. Укажите несколько разложений вектора $\overrightarrow{KL}$ (см. пример 12) по векторам $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$.

△ Так как $\overrightarrow{KL} = (1/2)\overrightarrow{AD} + (1/2)\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$, то $\overrightarrow{KL} = (1/2)(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}) = 0 \cdot \overrightarrow{OB} - (1/2) \times \overrightarrow{DB} + (1/2)\overrightarrow{CB} + (1/2)\overrightarrow{AB}$. Далее имеем, $\overrightarrow{KL} = (1/2) \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ (см. пример 12). Поскольку $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DB}$, получаем второе разложение: $\overrightarrow{KL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DB} + 0 \times \overrightarrow{CB} + 0 \cdot \overrightarrow{AB}$. Если теперь воспользоваться полученным в примере 12 равенством $-\overrightarrow{OB} + (1/3)\overrightarrow{DB} + (1/3)\overrightarrow{CB} + (1/3)\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, то при любом $t \in R$ получим: $\overrightarrow{KL} = (3/2)\overrightarrow{OB} + t(-\overrightarrow{OB} + (1/3)\overrightarrow{DB} + (1/3)\overrightarrow{CB} + (1/3) \times \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{DB} = (3/2 - t)\overrightarrow{OB} + ((1/3)t - 1)\overrightarrow{DB} + (1/3) \times t\overrightarrow{CB} + (1/3)t\overrightarrow{AB}$. При $t = (3/2)$ ($t = 0$) получаем первое второе) разложение. ▲

Пример 15*. На стороне $[AB]$ параллелограмма $ABCD$ расположена точка K, на продолжении стороны $[CD]$ за точку D — точка L. Прямые (KD) и (BL) пересекаются в точке N, а прямые (LA) и (CK) — в точке M. Докажите, что отрезок $[MN]$ параллелен стороне $[AD]$.

△ Обозначим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ (рис. 2.20). Векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ коллинеарны, поэтому существует определяемое положением точки $K \in [AB]$ такое число $\lambda \in [0, 1]$, что $\overrightarrow{AK} = \lambda\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{b}$. Аналогично, в силу коллинеарности векторов $\overrightarrow{CL}$ и $\overrightarrow{CD}$ существует определяемое положением точки $L \in (CD)$ такое число $\mu > 1$, что $\overrightarrow{CL} = \mu\overrightarrow{CD} = -\mu\vec{b}$. Точка N лежит на прямой (KD). Поэтому (см. пример 6 § 3 этой главы) существует (пока что неизвестное) такое число τ, что $\overrightarrow{AN} = (1 - \tau)\overrightarrow{AK} + \tau\overrightarrow{AD} = (\lambda - \lambda\tau) \times \vec{b} + \tau\vec{d}$. Точка N лежит также и на прямой (BL). Значит, существует (также неизвестное) такое число ξ, что $\overrightarrow{AN} = (1 - \xi)\overrightarrow{AB} + \xi\overrightarrow{AL} = (1 - \xi)\vec{b} + \xi(\vec{b} + \vec{d} - \mu\vec{b}) = \xi\vec{d} + (1 - \xi\mu)\vec{b}$. Получены два разложения вектора $\overrightarrow{AN}$ по базису $\{\vec{b}, \vec{d}\}$. Из единственности разложения вектора по базису получаем $\lambda - \lambda\tau = 1 - \xi\mu$, $\tau = \xi$. Следовательно, $\tau = \xi = (1 - \lambda)/(\mu - \lambda)$ и $\overrightarrow{AN} = (\lambda(\mu - 1)\,\vec{b} +$

$+(1-\lambda)\vec{d})/(\mu-\lambda)$. Вектор $\overrightarrow{AM}$ находим из аналогичных соображений. Так как $M\in(AL)$, то найдется такое число t, что $\overrightarrow{AM}=-t\overrightarrow{AL}=$ $=-t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL})=-t((1-\mu)\vec{b}+\vec{d})$. Имеем $M\in(KC)$, поэтому $\overrightarrow{AM}=(1-\theta)\overrightarrow{AK}+\theta\overrightarrow{AC}=(1-\theta)\lambda\vec{b}+\theta(\vec{b}+\vec{d})=$ $=(\lambda+\theta-\lambda\theta)\vec{b}+\theta\vec{d}$ при некотором $\theta\in R$. Сравнивая два получившихся разложения вектора $\overrightarrow{AM}$ по базису $\{\vec{b},\vec{d}\}$, приходим к системе уравнений $-t+t\mu=\lambda+\theta-\lambda\theta$, $-t=\theta$, из которой находим $t=-\theta=\lambda/(\mu-\lambda)$. Таким образом, $\overrightarrow{AM}=-(\lambda(1-$ $-\mu)\vec{b}+\lambda\vec{d})/(\mu-\lambda)$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\vec{d}/(\mu-\lambda)$, т. е. $\overrightarrow{MN}\parallel\vec{d}$. Следовательно, $(MN)\parallel(AD)$. ▲

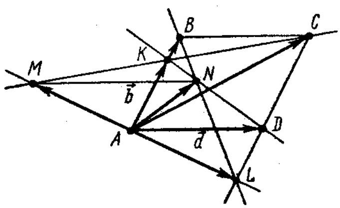


Рис. 2.20

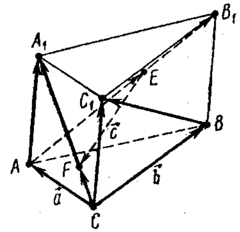


Рис. 2.21

Пример 16. На диагоналях $[AB_1]$ и $[CA_1]$ боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки E и F так, что $(EF)\|(BC_1)$. Найдите отношение $|EF|:|BC_1|$.

△ Векторы $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CC_1}$ не компланарны. Разложим все векторы по базису $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$. Имеем: $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_1}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CA}+$ $+\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}+\vec{c}$, $\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=-\vec{b}+\vec{c}$. Поскольку векторы $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ коллинеарны, существует (неизвестное) такое число μ, что $\overrightarrow{AE}=\mu\overrightarrow{AB_1}=\mu(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. Аналогично, существует такое ν, что $\overrightarrow{CF}=\nu\overrightarrow{CA_1}=\nu\times$ $\times(\vec{a}+\vec{c})$. По условию, $(EF)\|(BC_1)$. Значит, существует такое число λ, что $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{BC_1}=\lambda(-\vec{b}+\vec{c})$. Рассмотрим цикл $CAEFC$ (рис. 2.21). По правилу цикла, $\vec{0}=\overrightarrow{CA}+$ $+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}=\vec{a}+\mu(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\lambda(-\vec{b}+$ $+\vec{c})-\nu(\vec{a}+\vec{c})=(1-\mu-\nu)\vec{a}+(\mu-\lambda)\vec{b}+(\mu+$ $+\lambda-\nu)\vec{c}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны. Поэтому [см. (2.29)] $1 - \mu - \nu = 0$, $\mu - \lambda = 0$, $\mu + \lambda - \nu = 0$. Эта система имеет единственное решение: $\lambda = \mu = 1/3$, $\nu = 2/3$. Следовательно, $|EF| : |BC_1| = |\lambda| = 1/3$. ▲

Анализ приведенного решения показывает, что при решении задачи векторным методом чертеж необходим только для уяснения всей совокупности данных задачи и как инструмент, помогающий переформулировать задачу на язык векторной алгебры. При этом если некоторые условия задачи уже переведены с геометрического языка на аналитический без помощи рисунка, то нет необходимости геометрически идеально изображать эти условия на чертеже. Так, на рис. 2.21 прямые (EF) и (BC_1) изображены не параллельными. Это не повлияло на решение, поскольку факт коллинеарности векторов $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ был правильно записан аналитически. После того как решение задачи найдено, можно без труда построить правильный чертеж, поскольку в процессе решения получено не только значение отношения $|EF| : |BC_1|$, но и положение точек F и E на соответствующих отрезках: $|CF| = (2/3)\,|CA_1|$, $|AE| = (1/3)\,|AB_1|$.

Пример 17. Точки M, N, Q лежат соответственно на ребрах $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$ тетраэдра $ABCD$. Плоскость (MNQ) пересекает прямую (AD) в точке P. Известно, что $|DN| = |CN|$, $|AM| = |BM|$, $|CQ| : |CB| = n$. Найдите отношение $|DP| : |DA|$.

△ Выберем базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$: $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CD}$ (рис. 2.22). Разложим векторы по базису. Имеем: $\overrightarrow{CN} = (1/2)\,\vec{d}$, $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CQ} = (-1/2)\,\vec{d} + n\vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = (1/2)\,\overrightarrow{AB} + (1-n)\,\overrightarrow{BC} = (1/2) \times (\vec{b} - \vec{a}) - (1-n)\,\vec{b} = -(1/2)\,\vec{a} + (n - 1/2)\,\vec{b}$. Поскольку точка P лежит на прямой (AD), существует такое число λ, что $\overrightarrow{DP} = \lambda\overrightarrow{DA} = \lambda\,(\vec{a} - \vec{d})$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DP} = (1-\lambda)\,(\vec{a} - \vec{d})$. Точка P лежит также в плоскости (MNQ); следовательно, векторы $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$, $\overrightarrow{MQ}$ компланарны. Векторы $\overrightarrow{NQ}$ и $\overrightarrow{MQ}$ не коллинеарны. Они образуют базис в плоскости (MNQ). Вектор $\overrightarrow{NP}$ раскладывается по этому базису с неизвестными коэффициентами μ и ν: $\overrightarrow{NP} = \mu\overrightarrow{NQ} + \nu\overrightarrow{MQ} = \mu\,(-(1/2)\,\vec{d} + n\vec{b}) + \nu\,(-(1/2)\,\vec{a} + (n - 1/2)\,\vec{b}) = -(\nu/2)\,\vec{a} + (n(\mu + \nu) - \nu/2)\,\vec{b} - (\mu/2)\,\vec{d}$. Теперь можно воспользоваться правилом цикла. Из цикла $CNPAC$ имеем $\vec{0} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = (1/2)\,\vec{d} - (\nu/2)\,\vec{a} + (n(\mu + \nu) - \nu/2)\,\vec{b} - (\mu/2)\,\vec{d} + (1-\lambda)\,\vec{a} - (1-\lambda)\,\vec{d} - \vec{a}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ не компланарны. Следовательно, $-\nu/2+(1-\lambda)-1=0$, $n(\mu+\nu)-\nu/2=0$, $1/2-\mu/2-(1-\lambda)=0$. Таким образом, $\nu=-2\lambda$, $\mu=\nu/(2n)-\nu=2\lambda-\lambda/n$, $1/2-\lambda+\lambda/(2n)-1+\lambda=0$, т. е. $\lambda=n$. Окончательно получаем $|DP|:|DA|=|\lambda|=n$. ▲

Пример 18. На ребрах $[SA]$ и $[SB]$ тетраэдра $SABC$ выбраны соответственно точки A_1 и B_1 так, что $|SA_1|:|SA|=n$, $|SB_1|:|SB|=m$. Точки M и N лежат на отрез-

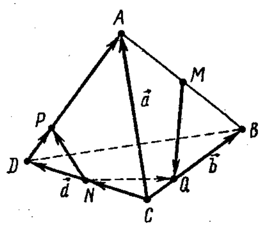


Рис. 2.22

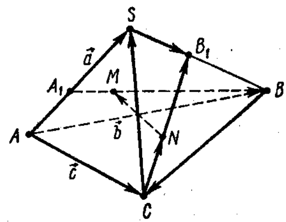


Рис. 2.23

ках $[A_1B]$ и $[CB_1]$ соответственно, причем $|CN|:|CB_1|=p$, а сам отрезок $[MN]$ параллелен плоскости (ASC). Найдите отношение $|BM|:|BA_1|$.

△ Векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AS}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 2.23) образуют базис. В этом базисе $\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{CS}+m\overrightarrow{SB}=m\overrightarrow{CB}+(1-m)\overrightarrow{CS}=m(\vec{b}-\vec{c})+(1-m)(\vec{a}-\vec{c})=(1-m)\vec{a}+m\vec{b}-\vec{c}$ [ср. с (2.5)]. Поэтому $\overrightarrow{CN}=p\overrightarrow{CB_1}=p(1-m)\vec{a}+pm\vec{b}-p\vec{c}$. Вектор $\overrightarrow{NM}$ параллелен плоскости (ASC) и, следовательно, раскладывается по базису $\{\vec{a},\vec{c}\}$ в этой плоскости: $\overrightarrow{NM}=y\vec{a}+z\vec{c}$ (числа y и z следует определить). Далее, $\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=-\vec{b}+(1-n)\vec{a}$.

Векторы $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{BA_1}$ противоположно направлены, поэтому существует такое число $x<0$, что $\overrightarrow{MB}=x\overrightarrow{BA_1}=-x\vec{b}+x(1-n)\vec{a}$. Наконец, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$. Воспользуемся правилом цикла $CNMBC$: $\vec{0}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}=p(1-m)\vec{a}+pm\vec{b}-p\vec{c}+y\vec{a}+z\vec{c}-x\vec{b}+x(1-n)\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$. Приводя подобные члены, получаем $(p(1-m)+y+x(1-n))\vec{a}+(pm-x-1)\vec{b}+$

$+ (-p+z+1)\vec{c} = \vec{0}$, что эквивалентно системе уравнений $p(1-m)+y+x(1-n)=0$, $pm-x-1=0$, $-p+z+1=0$. Из второго уравнения находим $x = pm-1$. Следовательно, $|BM| : |BA_1| = |x| = |pm-1| = 1-pm$. ▲

Пример 19 (условие коллинеарности векторов). Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — базис в пространстве. Найдите, при каком необходимом и достаточном условии векторы $\vec{a} = a_x\vec{e}_1 + a_y\vec{e}_2 + a_z\vec{e}_3$ и $\vec{b} = b_x\vec{e}_1 + b_y\vec{e}_2 + b_z\vec{e}_3$ коллинеарны.

△ Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда (см. пример 9), когда они линейно зависимы, т. е. когда существуют числа λ и μ, не равные нулю одновременно, такие, что $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$. Согласно свойству линейности координат, это равенство эквивалентно системе соотношений $\lambda a_x + \mu b_x = 0$, $\lambda a_y + \mu b_y = 0$, $\lambda a_z + \mu b_z = 0$, которые означают пропорциональность одноименных координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По лемме о трех определителях [см. (2.12) — (2.13)], указанная система соотношений имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \ ▲ \qquad (2.35)$$

Пример 20 (условие компланарности векторов). Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — базис в пространстве. Докажите, что векторы $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.36)$$

△ Векторы $\vec{a} = a_x\vec{e}_1 + a_y\vec{e}_2 + a_z\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_x\vec{e}_1 + b_y\vec{e}_2 + b_z\vec{e}_3$, $\vec{c} = c_x\vec{e}_1 + c_y\vec{e}_2 + c_z\vec{e}_3$ компланарны тогда и только тогда (см. пример 9), когда они линейно зависимы, т. е. существуют числа x, y, z, не равные нулю одновременно, такие, что $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$, т. е.

$$(a_x x + b_x y + c_x z)\vec{e}_1 + (a_y x + b_y y + c_y z)\vec{e}_2 + (a_z x + b_z y + c_z z)\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Так как $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — базис, то $(x; y; z)$ — нетривиальное решение системы уравнений

$$a_x x + b_x y + c_x z = 0, \quad a_y x + b_y y + c_y z = 0, \quad a_z x + b_z y + c_z z = 0. \tag{2.37}$$

По теореме о нетривиальном решении однородной системы уравнений (см. теорему 2 § 4 этой главы), система (2.37) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2.36). ▲

§ 6. Система координат. Координаты точки в системе координат. Формулы перехода от одной системы координат к другой

Если в пространстве зафиксированы полюс O и базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, то говорят, что в пространстве задана *(декартова) система координат* $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Точка O называется *началом координат*, прямые, проходящие через начало координат и параллельные соответственно векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, называются *осями координат* и обозначаются Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат), Oz (ось аппликат). Плоскость, определяемая координатными осями Ox и Oy, называется *координатной плоскостью Oxy*. Аналогично определяются координатные плоскости Oyz и Oxz (рис. 2.24). Если M — произвольная точка пространства, то ее *координатами* $(x; y; z)$ *в системе координат* $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называются коэффициенты разложения радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

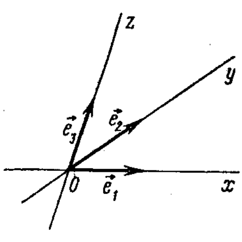


Рис. 2.24

Если ясно, о какой системе координат идет речь, то говорят просто о координатах точки M. Тот факт, что точка M имеет координаты $(x; y; z)$, записывают так: $M\,(x; y; z)$. Поскольку каждый вектор $\overrightarrow{OM}$ может быть разложен по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, в заданной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ каждая точка M имеет координаты. На основании свойства 1° координат вектора точка M полностью определяется своими координатами: точки $M\,(x; y; z)$ и $M_1\,(x_1;$

$y_1; z_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполняются равенства $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Если точки $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ заданы своими координатами в системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, то в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеем $\overrightarrow{OA} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Согласно свойству линейности координат вектора, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, т. е. *координаты вектора* $\overrightarrow{AB}$ *в базисе* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *находятся как разности соответствующих координат конца* B *и начала* A *этого вектора в системе координат* $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, *где* O — *произвольная точка пространства.*

Пример 1. В условиях примера 12 § 5 этой главы найдите: а) координаты точки O в системе координат $\{B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$; б) координаты точки L в системе координат $\{A, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$.

$\triangle$ а) Так как $\overrightarrow{BO} = (1/3)\,\overrightarrow{BA} + (1/3)\,\overrightarrow{BC} + (1/3)\,\overrightarrow{BD}$, то $O(1/3;\ 1/3;\ 1/3)$.

б) Имеем: $\overrightarrow{AK} = (1/2)\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KD} = (3/2)\,\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DL} = -(1/2)\,\overrightarrow{BD} = -(1/2)\,(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD})$. Следовательно, $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DL} = (1/2)\,\overrightarrow{AC} + (3/2)\,\overrightarrow{OD} - (1/2)\,\overrightarrow{BO} - (1/2)\,\overrightarrow{OD} = -(1/2)\,\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + (1/2)\,\overrightarrow{AC}$, т. е. $L\ (-1/2;\ 1;\ 1/2)$. ▲

Пример 2. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Найдите координаты точки A_1 в системе координат $\{B_1, \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{BA_1}\}$.

$\triangle$ Имеем $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA_1} = -\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BA_1}$. В примере 11 § 5 этой главы доказано, что $\overrightarrow{AA_1} = (1/3)\overrightarrow{AC_1} + (1/3)\,\overrightarrow{CB_1} + (1/3)\,\overrightarrow{BA_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{B_1A_1} = (-1/3) \times \overrightarrow{AC_1} - (1/3)\,\overrightarrow{CB_1} - (1/3)\,\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BA_1} = -(1/3)\,\overrightarrow{AC_1} - (1/3)\,\overrightarrow{CB_1} + (2/3)\,\overrightarrow{BA_1}$ и, значит, $A_1\ (-1/3; -1/3; 2/3)$. ▲

Пример 3. В системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ заданы три вершины параллелограмма $ABCD$: $A\ (0;\ 1;\ -1)$, $B\ (1;\ 0;\ 2)$, $C\ (2;\ 3;\ 0)$. Найдите координаты точки D.

$\triangle$ Пусть $D\ (x_D;\ y_D;\ z_D)$. Поскольку в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $\overrightarrow{BC} = (1;\ 3;\ -2)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D;\ y_D - 1;\ z_D + 1)$, а векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ противоположных сторон параллелограмма равны, $1 = x_D$, $3 = y_D - 1$, $-2 = z_D + 1$. Отсюда $x_D = 1$, $y_D = 4$, $z_D = -3$. ▲

Пример 4. В системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ A (1; 0; —2), B (—3; 4; 2), C (0; 1; 3), D (2; —1; 1). Проверьте, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и противоположно направлены, а векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не коллинеарны.

△ В базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: $\overrightarrow{AB} = (-4; 4; 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 5)$, $\overrightarrow{AD} = (1; -1; 3)$. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны. По условию компланарности достаточно проверить, что определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ [ср. с (2.36)] равен нулю. Имеем

$$\Delta = (-4)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= (-4)\,8 - 4\cdot(-8) + 4\cdot 0 = 0.$$

Следовательно, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости. Далее, $\overrightarrow{CD} = (2; -2; -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-4; 4; 4)$. Согласно свойству линейности координат вектора, $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$, т. е. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ (третий закон умножения вектора на число). Наконец, $\overrightarrow{BC} = (3; -3; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1; -1; 3)$. Так как $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, то в соответствии с условием коллинеарности векторов (см. пример 19 § 5 этой главы) векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не коллинеарны. ▲

Пример 5. В некоторой системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ A $(x_A; y_A; z_A)$, B $(x_B; y_B; z_B)$, C $(x_C; y_C; z_C)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

△ Если K — середина $[BC]$, то $\overrightarrow{AK} = (1/2)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = (1/2)((-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})) = -\overrightarrow{OA} + (1/2)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Если N $(x_N; y_N; z_N)$ — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, то $\overrightarrow{AN} = (2/3)\overrightarrow{AK} = -(2/3)\overrightarrow{OA} + (1/3)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = (1/3)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} +$

$+ \overrightarrow{OC})$. Подставляя в это равенство разложения радиусов-векторов $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, получаем $x_N\vec{e}_1 + y_N\vec{e}_2 + z_N\vec{e}_3 = (1/3)((x_A\vec{e}_1 + y_A\vec{e}_2 + z_A\vec{e}_3) + (x_B\vec{e}_1 + y_B\vec{e}_2 + z_B\vec{e}_3) + (x_C\vec{e}_1 + y_C\vec{e}_2 + z_C\vec{e}_3)) = (1/3) \times (x_A + x_B + x_C)\vec{e}_1 + (1/3)(y_A + y_B + y_C)\vec{e}_2 + (1/3) \times (z_A + z_B + z_C)\vec{e}_3$. В силу единственности разложения по базису отсюда имеем:

$$x_N = (1/3)(x_A + x_B + x_C),\ y_N = (1/3)(y_A + y_B + y_C),$$
$$z_N = (1/3)(z_A + z_B + z_C), \tag{2.38}$$

т. е. *координаты точки пересечения медиан (центра тяжести) треугольника являются средними арифметическими соответствующих координат его вершин.*

Пусть в пространстве зафиксирована система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, которую назовем «старой». Пусть также с помощью этой «старой» системы координат задана еще одна система координат $\{O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, которую назовем «новой», т. е. заданы разложения

$$\vec{e}\,'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3,\ \vec{e}\,'_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3,$$
$$\vec{e}\,'_3 = a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \tag{2.39}$$

векторов «нового» базиса по «старому» базису и заданы координаты $(\alpha; \beta; \gamma)$ точки O' (начала «новой» системы координат) в «старой» системе координат:

$$\overrightarrow{OO'} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3. \tag{2.40}$$

Рассмотрим произвольную точку M. Она имеет координаты $(x; y; z)$ в «старой» системе координат и координаты $(x'; y'; z')$ в «новой» системе координат:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,\quad \overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}\,'_1 + y'\vec{e}\,'_2 + z'\vec{e}\,'_3. \tag{2.41}$$

Формулы, выражающие «старые» координаты $(x; y; z)$ точки M через «новые» координаты $(x'; y'; z')$ этой точки, называются *формулами перехода от «старой» системы координат к «новой»*. Выведем эти формулы.

□ Из очевидного равенства $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ после подстановки в него соотношений (2.39)—(2.41) имеем

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 + x'(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3) + y'(a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3) + z'(a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) = (a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' + \alpha)\vec{e}_1 + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' + \beta)\vec{e}_2 + (a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + \gamma)\vec{e}_3.$$

Таким образом, получены два разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. В силу единственности разложения вектора по базису в пространстве соответствующие коэффициенты этих разложений должны совпадать:

$$\begin{aligned} x &= \boxed{a_{11}}\,x' + \boxed{a_{21}}\,y' + \boxed{a_{31}}\,z' + \boxed{\alpha} \\ y &= \boxed{a_{12}}\,x' + \boxed{a_{22}}\,y' + \boxed{a_{32}}\,z' + \boxed{\beta} \\ z &= \boxed{a_{13}}\,x' + \boxed{a_{23}}\,y' + \boxed{a_{33}}\,z' + \boxed{\gamma} \end{aligned}. \quad ■ \tag{2.42}$$

Это искомые формулы перехода от «старой» системы координат к «новой». Отметим, что в формулах (2.42) коэффициенты при x' суть координаты вектора $\vec{e}_1'$ в «старом» базисе [ср. с (2.39)], а коэффициенты при y' (при z') — координаты вектора $\vec{e}_2'$ (вектора $\vec{e}_3'$) в «старом» базисе. Последние слагаемые в формулах перехода (2.42) — это «старые» координаты «нового» начала координат O'

Матрица

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при x', y', z' в формулах (2.42), называется *матрицей перехода от «старой» системы координат к «новой»* или *матрицей перехода от «старого» базиса к «новому»*.

Приведем свойства матрицы перехода S.

1°. $\det S \neq 0$.

□ Векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ [см. (2.39)] не компланарны. По условию компланарности (см. пример 20 § 5 этой главы), определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Но этот определитель есть $\det S^{\mathrm{T}}$. Так как $\det S^{\mathrm{T}} = \det S$ (свойство 1° определителей), то $\det S = \Delta \neq 0$. ■

2°. *Если одноименные векторы «старого» и «нового» базисов совпадают, то S — единичная матрица*, $\det S = 1$. В этом случае переход от «старой» системы координат к «новой» называется *переносом начала координат*. Формулы этого перехода:

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

3°. *Матрица перехода S' от «нового» базиса к «старому» является обратной матрицей к матрице S:*

$$S' = S^{-1}, \quad \det S' = \frac{1}{\det S}.$$

□ Решая по правилу Крамера систему уравнений

$$a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' = x - \alpha, \quad a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z' = y - \beta, \quad a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' = z - \gamma$$

относительно x', y', z', получаем [см. формулы (2.23)—(2.25) и теорему 1 § 4 этой главы]:

$$\begin{aligned} x' &= b_{11}(x - \alpha) + b_{21}(y - \beta) + b_{31}(z - \gamma) = \\ &= b_{11}x + b_{21}y + b_{31}z + \alpha', \\ y' &= b_{12}(x - \alpha) + b_{22}(y - \beta) + b_{32}(z - \gamma) = \\ &= b_{12}x + b_{22}y + b_{32}z + \beta', \\ z' &= b_{13}(x - \alpha) + b_{23}(y - \beta) + b_{33}(z - \gamma) = \\ &= b_{13}x + b_{23}y + b_{33}z + \gamma', \end{aligned} \tag{2.43}$$

где $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$ — матрица, обратная к матрице S.

Согласно свойству обратной матрицы, $\det B = \dfrac{1}{\det S}$. Так как матрица B составлена (по столбцам) из коэффициентов при x, y, z соответственно в формулах, выражающих «новые» координаты точки через ее «старые» координаты [см. (2.43)], то $B = S'$ — матрица перехода от «новой» системы координат к «старой», или, что то же, от «нового» базиса к «старому». ■

4°. *Пусть фиксированы три системы координат:*

$$(\mathrm{I})\ \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\},\quad (\mathrm{II})\ \{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\},\quad (\mathrm{III})\ \{O'', \vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''\}$$

и пусть

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},\quad S_1 = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{21}' & a_{31}' \\ a_{12}' & a_{22}' & a_{32}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{pmatrix},\quad S_2 = \begin{pmatrix} a_{11}'' & a_{21}'' & a_{31}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' & a_{32}'' \\ a_{13}'' & a_{23}'' & a_{33}'' \end{pmatrix}$$

— соответственно матрицы перехода от системы координат (I) *к системе координат* (II), *от системы координат* (II) *к системе координат* (III), *от системы координат* (I) *к системе координат* (III). *Тогда* $S_2 = S\,S_1$, $\det S_2 = \det S \det S_1$.

□ В соответствии с формулами (2.39), (2.42) имеем:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1'' &= a_{11}'\vec{e}_1' + a_{12}'\vec{e}_2' + a_{13}'\vec{e}_3', &\qquad \vec{e}_1' &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3,\\ \vec{e}_2'' &= a_{21}'\vec{e}_1' + a_{22}'\vec{e}_2' + a_{23}'\vec{e}_3', &\qquad \vec{e}_2' &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3,\\ \vec{e}_3'' &= a_{31}'\vec{e}_1' + a_{32}'\vec{e}_2' + a_{33}'\vec{e}_3', &\qquad \vec{e}_3' &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Следовательно, $\vec{e}_1'' = a_{11}'(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3) + a_{12}'(a_{21}\vec{e}_1 +$

$$+ a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3) + a_{13}'(a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) = (a_{11}a_{11}' +$$

$$+ a_{21}a_{12}' + a_{31}a_{13}')\vec{e}_1 + (a_{12}a_{11}' + a_{22}a_{12}' + a_{32}a_{13}')\vec{e}_2 +$$

$$+ (a_{13}a_{11}' + a_{23}a_{12}' + a_{33}a_{13}')\vec{e}_3.$$

Аналогично получаем $\vec{e}_2'' = (a_{11}a_{21}' + a_{21}a_{22}' + a_{31}a_{23}')\vec{e}_1 +$

$$+ (a_{12}a_{21}' + a_{22}a_{22}' + a_{32}a_{23}')\vec{e}_2 + (a_{13}a_{21}' + a_{23}a_{22}' + a_{33}a_{23}')\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_3'' = (a_{11}a_{31}' + a_{21}a_{32}' + a_{31}a_{33}')\vec{e}_1 + (a_{12}a_{31}' + a_{22}a_{32}' +$$

$$+ a_{32}a_{33}')\vec{e}_2 + (a_{13}a_{31}' + a_{23}a_{32}' + a_{33}a_{33}')\vec{e}_3.$$

Таким образом,

$$S_2=\begin{pmatrix} a_{11}a'_{11}+a_{21}a'_{12}+a_{31}a'_{13} & a_{11}a'_{21}+a_{21}a'_{22}+a_{31}a'_{23} & a_{11}a'_{31}+a_{21}a'_{32}+a_{31}a'_{33} \\ a_{12}a'_{11}+a_{22}a'_{12}+a_{32}a'_{13} & a_{12}a'_{21}+a_{22}a'_{22}+a_{32}a'_{23} & a_{12}a'_{31}+a_{22}a'_{32}+a_{32}a'_{33} \\ a_{13}a'_{11}+a_{23}a'_{12}+a_{33}a'_{13} & a_{13}a'_{21}+a_{23}a'_{22}+a_{33}a'_{23} & a_{13}a'_{31}+a_{23}a'_{32}+a_{33}a'_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}=SS_1,\ \det S_2=\det S\det S_1. \ ■$$

Пример 6. В пространстве задана некоторая система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Точки A (1; 0; 0), B (0; 2; 0), C(—1; 2; 0), D (0; 0; 2) — вершины тетраэдра $ABCD$, точки K и L — соответственно середины ребер $[AC]$ и $[DB]$. Найдите матрицу перехода S_2 от системы координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ к системе координат $\{B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$. Напишите формулы перехода от первой системы координат ко второй.

△ В примере 12 § 5 этой главы найдено, что $\overrightarrow{AC} = 0\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AC} + 0\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{KL} = (1/2)(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}) = (1/2)\overrightarrow{AB} - (1/2)\overrightarrow{AC} + (1/2)\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC} - 1\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AC} + 0\cdot\overrightarrow{AD}$. Следовательно,

$$x = 0\cdot x' + (1/2)y' + z' + 1,\ y = x' - (1/2)y' + 0\cdot z' + 0,\ z = 0\cdot x' + (1/2)y' - z' + 0$$

— формулы перехода от системы координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ к системе координат $\{B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$, $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ — матрица перехода.

Используя свойство 4° матрицы перехода, матрицу S_2 можно найти и другим способом. Именно: по определению координат точки, $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2$,

$$\overrightarrow{OD}=2\vec{e}_3;\ \overrightarrow{AB}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_2,\ \overrightarrow{AC}=-2\vec{e}_1+2\vec{e}_2,$$

$\overrightarrow{AD}=-\vec{e}_1+2\vec{e}_3$, отсюда $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}/2$,

$\vec{e}_3=\overrightarrow{AB}/2-\overrightarrow{AC}/2+\overrightarrow{AD}/2$. Следовательно, матрица перехода от базиса $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ к базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ равна

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=$ $=\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}$, то $\overrightarrow{AC}=-2\vec{e}_1+2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{KL}=\vec{e}_3$, $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=2\vec{e}_2-2\vec{e}_3$. Таким образом, матрица перехода S_1 от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к базису $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$ есть

$$S_1=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Согласно свойству 4 ,

$$S_2=S\cdot S_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1 & 1\cdot 0+1\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(-2) \\ (-1)(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0 & (-1)\cdot 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 & (-1)\cdot 0+\left(-\frac{1}{2}\right)2+\left(-\frac{1}{2}\right)(-2) \\ 0\cdot(-2)+0\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(-2) \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Системой координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *на плоскости* P называется совокупность полюса O (фиксированной точки O плоскости P) и базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ в плоскости P (рис. 2.25). *Координатами* $(x;\ y)$ *точки* $M \in P$ *в системе координат* $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ называются коэффициенты разложения радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Тот факт, что $(x;\ y)$ — координаты точки M, записывается в виде $M\ (x;\ y)$. Если на плоскости P заданы две системы координат: «старая» $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и «новая» $\{O', \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$, причем «новая» система координат задана с помощью «старой» соотношениями

$$\vec{e}\,'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2,\ \vec{e}\,'_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2,\ \overrightarrow{OO'} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2, \tag{2.44}$$

то для произвольной точки $M \in P$ связь между ее координатами $(x;\ y)$ в «старой» системе координат и ее координатами $(x';\ y')$ в «новой» системе координат определяется *формулами перехода*:

$$x = a_{11}x' + a_{21}y' + \alpha,\quad y = a_{12}x' + a_{22}y' + \beta. \tag{2.45}$$

Матрица $S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, составленная (по столбцам) из коэффициентов при x' и y' в соотношениях (2.45), называется *матрицей перехода от «старой» системы координат («старого» базиса) на плоскости к «новой» системе координат («новому» базису)*. Столбцы матрицы S составлены из координат векторов $\vec{e}\,'_1$ и $\vec{e}\,'_2$ в «старом» базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ [ср. с (2.44)]. Для матрицы S перехода от «старой» системы координат на плоскости к «новой» выполняются свойства 1°—4°, в которых вместо матриц третьего порядка стоят соответствующие матрицы второго порядка.

Пример 7. В трапеции $ABCD$ $((AD) \| (BC))$ отношение длин оснований $|AD| : |BC|$ равно 2, O — точка пересечения диагоналей $[AC]$ и $[BD]$, O' — точка пересечения про-

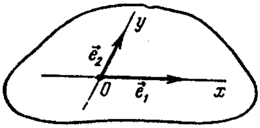


Рис. 2.25

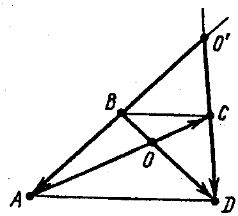


Рис. 2.26

должений боковых сторон $[AB]$ и $[CD]$. Запишите формулы перехода от системы координат $\{O, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\}$ к системе координат $\{O', \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\}$.

△ $[BC]$ — средняя линия треугольника $O'AD$ (рис. 2.26), $[AC]$ и $[DB]$ — его медианы. Поэтому $\overrightarrow{O'A} = 2\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{O'D} = 2\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OC} = (1/3)\,\overrightarrow{AC} = (1/3)\,((1/2)\,(\overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{AD})) = (1/6)\,(\overrightarrow{AO'} + (\overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{O'D})) = (1/3)\,\overrightarrow{AO'} + (1/6)\,\overrightarrow{O'D} = -(2/3)\,\overrightarrow{BA} + (1/3)\,\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = -(2/3) \times \overrightarrow{BA} + (4/3)\,\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO'} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{CD} = -(2/3)\,\overrightarrow{BA} - (2/3)\,\overrightarrow{CD}$. Следовательно, формулы перехода от системы координат $\{O, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\}$ к системе координат $\{O', \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\}$ имеют вид

$$x = -(2/3)\,x' - (2/3)\,y' - 2/3,$$

$$y = (1/3)\,x' + (4/3)\,y' - 2/3. \quad \blacktriangle$$

Пример 8. На плоскости задана некоторая система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Точки $A\ (1;\ 1)$, $B\ (0;\ -3)$, $C\ (2;\ 2)$ — вершины треугольника ABC. Найдите координаты точки N пересечения медиан $\triangle ABC$. Запишите формулы перехода от системы координат $\{N, \overrightarrow{NO}, \overrightarrow{AC}\}$ к системе координат $\{O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$.

Δ Координаты $(x_N; y_N)$ точки N находим по формуле (2.38): $x_N = (1/3)(1 + 0 + 2) = 1$, $y_N = (1/3)(1 - 3 + 2) = 0$, — считая, что плоскость треугольника ABC совпадает с координатной плоскостью Oxy некоторой пространственной системы координат, т. е. что $z_A = z_B = z_C = z_N = 0$.

Найдем формулы перехода от системы координат $\{N, \overrightarrow{NO}, \overrightarrow{AC}\}$ на плоскости (ABC) к системе координат $\{O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$. Пусть точка M имеет координаты $(x^*; y^*)$ в системе координат $\{N, \overrightarrow{NO}, \overrightarrow{AC}\}$ и координаты $(x'; y')$ в системе координат $\{O, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$, т. е. $\overrightarrow{NM} = x^*\overrightarrow{NO} + y^*\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OM} = x'\overrightarrow{AB} + y'\overrightarrow{BC}$. Воспользовавшись соотношением $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM}$, применяемым при выводе формул перехода, и разложив все векторы по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, получим

$$x^*(-\overrightarrow{ON}) + y^*(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = -\overrightarrow{ON} + x'(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + y'(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}), \text{ или}$$

$$x^*(-\vec{e}_1) + y^*((2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) - (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)) + \vec{e}_1 - x'(-3\vec{e}_2 - (\vec{e}_1 + \vec{e}_2)) - y'((2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) + 3\vec{e}_2) = \vec{0}.$$

Используя линейную независимость векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, получаем систему уравнений $-x^* + y^* + 1 + x' - 2y' = 0$, $y^* + 4x' - 5y' = 0$, решая которую относительно x^* и y^*, найдем

$$x^* = -3x' + 3y' + 1, \quad y^* = -4x' + 5y'. \quad \blacktriangle$$

Пример 9 (координатные уравнения прямой). Пусть в пространстве заданы система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и две различные точки $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$. Напишите систему уравнений, определяющую прямую (AB), т. е. такую систему уравнений, которой удовлетворяют координаты $(x; y; z)$ произвольной точки $M(x; y; z)$ прямой (AB) и только они.

Δ Воспользуемся векторным параметрическим уравнением прямой $l = (AB)$ [см. пример 6 § 3 этой главы и формулу (2.5)]. Точка $M(x; y; z)$ лежит на прямой l тогда и только тогда, когда существует такое число t, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\vec{a}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A)$. Поскольку векторное равенство эквивалентно трем координатным, получаем, что $M \in l$ тогда и только тогда, когда

$$x = x_A + ta_x,\ y = y_A + ta_y,\ z = z_A + ta_z\ (a_x = x_B - x_A,\ a_y = y_B - y_A,\ a_z = z_B - z_A) \tag{2.46}$$

при некотором $t \in R$. Точки A и B различны, поэтому хотя бы одна из координат $(a_x;\ a_y;\ a_z)$ направляющего вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ прямой l отлична от нуля. Пусть, например, $a_x \neq 0$. Тогда, выразив t из первого уравнения системы (2.46): $t = (x - x_A)/a_x$ — и подставив найденное значение t во второе и третье уравнения, получим систему двух уравнений относительно x, y и z, определяющую прямую l в пространстве:

$$y - y_A = \frac{x - x_A}{a_x} a_y,\quad z - z_A = \frac{x - x_A}{a_x} a_z,\ \text{или}$$

$$a_x (y - y_A) = a_y (x - x_A),\ a_x (z - z_A) = a_z (x - x_A). \tag{2.47}$$

Обычно систему (2.47) записывают в симметричной форме

$$\frac{x - x_A}{a_x} = \frac{y - y_A}{a_y} = \frac{z - z_A}{a_z}, \tag{2.48}$$

подразумевая при этом, что если знаменатель одной из дробей равен нулю, то [см. (2.47)] равен нулю и числитель этой дроби. Например, если $a_y = 0$, а $a_z \neq 0$, то систему уравнений (2.48) надо понимать так:

$$y = y_A,\ a_x (z - z_A) = a_z (x - x_A).$$

Если $a_y = y_B - y_A = 0$ и $a_z = z_B - z_A = 0$, то система уравнений (2.48) принимает вид $y = y_A$, $z = z_A$, т. е. определяет прямую $l = (AB)$, параллельную оси абсцисс и проходящую через точку $A\ (x_A;\ y_A;\ z_A)$. Параметрические уравнения (2.46) этой прямой имеют вид $x = x_A + a_x t$, $y = y_A$, $z = z_A$, $t \in R$ $(a_x \neq 0)$.

Так как $a_x = x_B - x_A$, $a_y = y_B - y_A$, $a_z = z_B - z_A$, то система уравнений (2.48), определяющих прямую $l = (AB)$, которая проходит через две заданные точки $A\ (x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B\ (x_B;\ y_B;\ z_B)$, может быть записана также в виде

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}. \tag{2.49}$$

Уравнения системы (2.48), (2.49) называются *каноническими уравнениями прямой l в пространстве.* ▲

Пример 10. В некоторой системе координат прямая l задана уравнениями $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-5}{0}$. Укажите координаты каких-либо двух точек этой прямой.

△ Перепишем уравнения прямой l в параметрическом виде [ср. с (2.48) и (2.46)]:

$$x=1-2t,\quad y=-3+t,\quad z=5+0\cdot t.$$

При $t=0$ получаем координаты одной точки прямой l: $A\ (1;\ -3;\ 5)$, при $t=1$ — второй точки: $B\ (-1;\ -2;\ 5)$. Координаты точек A и B можно найти и так: координаты точки $A\ (x_A;\ y_A;\ z_A)$ отнимаются от переменных $x,\ y,\ z$ в канонических уравнениях (2.48), поэтому по заданным уравнениям прямой l находим $x_A=1,\ y_A=-3,\ z_A=5$; координаты точки $B\ (x_B;\ y_B;\ z_B)$ находим из условия равенства направляющего вектора $\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$, $a_x=-2$, $a_y=1$, $a_z=0$ прямой $l=(AB)$ вектору $\overrightarrow{AB}$ [ср. с (2.48) и (2.49)]: $x_B-x_A=-2$, $y_B-y_A=1$, $z_B-z_A=0$, т. е. $x_B=x_A-2=-1$, $y_B=-2$, $z_B=5$. ▲

Пример 11. В некоторой системе координат прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями

$$l_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1},\quad l_2:\ \frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}.$$

Выясните, пересекаются ли эти прямые.

△ Прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда существует точка M, координаты $(x^*;\ y^*;\ z^*)$ которой удовлетворяют как уравнениям прямой l_1, так и уравнениям прямой l_2, т. е. системе следующих четырех уравнений:

$$x^*-1=2\,(y^*-2),\ z^*-3=y^*-2,\ x^*=y^*-3,$$
$$z^*=2\,(y^*-3). \qquad (2.50)$$

Если эта система имеет решение, то оно находится из первых трех уравнений и автоматически должно удовлетворить четвертому уравнению. Из первых трех уравнений находим: $x^*=-3$, $y^*=0$, $z^*=1$. Подставляя найденные значения в четвертое уравнение, получаем $1=2\cdot(0-3)$. Имеет место противоречие. Система уравнений (2.50) решений не имеет, т. е. l_1 и l_2 не пересекаются. ▲

Пример 12 (задача о делении отрезка в заданном отношении). Пусть в пространстве заданы система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и две различные точки A $(x_A; y_A; z_A)$ и B $(x_B; y_B; z_B)$. Точка M лежит на отрезке $[AB]$ и делит его в отношении $\lambda = |AM| : |MB|$. Определите координаты точки M.

$\triangle$ По формуле (2.6) имеем $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda+1}(\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB})$. Подставляя в это равенство разложения векторов по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, получаем на основании свойства линейности координат и свойства 1° координат векторов:

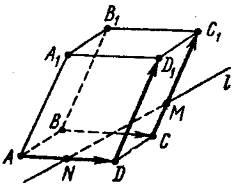


Рис. 2.27

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda+1}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda+1},$$

$$z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{\lambda+1}. \blacktriangle \qquad (2.51)$$

Пример 13. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеем: A (1; 1; 1), B (2; —1; 0), C (1; 1; 2), D_1 (3; 3; 2), точка N — середина $[AD]$, точка M делит отрезок $[CC_1]$ в отношении $|C_1M| : |MC| = 2$. Напишите канонические уравнения прямой $l = (MN)$ в той системе координат, в которой заданы координаты точек A, B, C, D_1.

$\triangle$ Пусть $(x_D; y_D; z_D)$ — координаты точки D (рис. 2.27). Вектор $\overrightarrow{AD}$ имеет координаты $(x_D - 1;\ y_D - 1;\ z_D - 1)$. Координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ таковы: $(1 - 2; 1 - (-1); 2 - 0) = (-1; 2; 2)$. Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны, поэтому равны и их одноименные координаты: $x_D - 1 = -1$, $y_D - 1 = 2$, $z_D - 1 = 2$, т. е. $x_D = 0$, $y_D = 3$, $z_D = 3$. Точка N — середина отрезка $[AD]$ (делит его в отношении 1 : 1). Следовательно, $x_N = (x_A + x_D)/2 = 1/2$, $y_N = (y_A + y_D)/2 = 2$, $z_N = 2$. Пусть $(\alpha; \beta; \gamma)$ — координаты точки C_1. Из равенства векторов $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ получаем: $\alpha - 1 = 3 - 0$, $\beta - 1 = 3 - 3$, $\gamma - 2 = 2 - 3$, т. е. $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. По формулам (2.51) деления отрезка в заданном отношении имеем: $x_M = (\alpha + 2x_C)/3 = (4 + 2\cdot 1)/3 = 2$, $y_M = (\beta + 2y_C)/3 = (1 + 2\cdot 1)/3 = 1$, $z_M = (\gamma + 2z_C)/3 = 5/3$. Следовательно, канонические уравнения прямой (MN) имеют вид

$$\frac{x - 1/2}{2 - 1/2} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z-2}{5/3 - 2}, \quad \text{или} \quad \frac{x - 1/2}{3/2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{-1/3}. \blacktriangle$$

Если $l: \dfrac{x-\alpha}{a_x}=\dfrac{y-\beta}{a_y}=\dfrac{z-\gamma}{a_z}$ и $L: \dfrac{x-\lambda}{b_x}=\dfrac{y-\mu}{b_y}=$ $=\dfrac{z-\nu}{b_z}$ — две прямые, заданные каноническими уравнениями в некоторой системе координат в пространстве, то $\vec{a}=$ $=(a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b}=(b_x; b_y; b_z)$ — направляющие векторы этих прямых. Прямые l и L параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их направляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По условию коллинеарности это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}=0.$$

Пусть P — некоторая плоскость, $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — система координат на плоскости P, $A(x_A; y_A) \in P$ и $B(x_B; y_B) \in$ $\in P$ — две различные точки. Параметрические уравнения прямой $l=(AB)$ имеют вид

$$x = x_A + ta_x,$$

$$y = y_A + ta_y \ (a_x = x_B - x_A, \ a_y = y_B - y_A), \ t \in R. \tag{2.52}$$

Каноническое уравнение прямой $l=(AB)$ на плоскости P:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}, \text{ или} \tag{2.53}$$

$$\frac{x-x_A}{a_x}=\frac{y-y_A}{a_y}. \tag{2.54}$$

Уравнение (2.54) равносильно уравнению

$$A^*x + B^*y + C^* = 0, \ (A^*)^2 + (B^*)^2 > 0, \tag{2.55}$$

где

$$A^* = y_B - y_A, \ B^* = x_A - x_B, \ C^* = y_Ax_B - x_Ay_B. \tag{2.56}$$

Согласно уравнению (2.55), направляющий вектор $\vec{a}=$ $=(a_x; a_y)$ прямой l на плоскости P находится по правилу $a_x = -B^*, \ a_y = A^*$.

Формулы деления отрезка в заданном отношении в плоском случае имеют вид

$$M \in [AB],\ \lambda = |AM| : |MB| \iff x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{\lambda + 1},\quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{\lambda + 1}. \qquad (2.57)$$

Пример 14. Найдите две точки A и B, если известно, что точка $C(-5;\ 4)$ делит отрезок $[AB]$ в отношении $3:4$, а точка $D(6;\ -5)$ — в отношении $2:3$.

$\triangle$ Пусть $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$. Тогда по формулам (2.57) имеем:

$$-5 = \frac{x_A + (3/4)\,x_B}{3/4 + 1},\ 4 = \frac{y_A + (3/4)\,y_B}{3/4 + 1},\ 6 = \frac{x_A + (2/3)\,x_B}{2/3 + 1},$$

$$-5 = \frac{y_A + (2/3)\,y_B}{2/3 + 1}.$$

Решая полученную систему уравнений относительно x_A, x_B, y_A, y_B, найдем: $x_A = 160$, $x_B = -225$, $y_A = -131$, $y_B = 184$; $A(160;\ -131)$, $B(-225;\ 184)$. ▲

Пример 15. Напишите уравнение медианы (AM) треугольника ABC: $A(-5;\ 4)$, $B(3;\ 1)$, $C(2;\ -5)$.

$\triangle$ Середина M отрезка $[BC]$ имеет координаты $x_M = (x_B + x_C)/2 = 5/2$, $y_M = (y_B + y_C)/2 = -2$. По формуле (2.53) уравнение (AM) имеет вид

$$\frac{x-(-5)}{5/2-(-5)} = \frac{y-4}{-2-4} \iff \frac{x+5}{15/2} = \frac{y-4}{-6} \iff 4x + 5y = 0. \ ▲$$

Пример 16. Напишите уравнение прямой l, проходящей через точку $M(7;\ 4)$ и параллельной прямой L, уравнение которой $3x - 2y + 4 = 0$.

$\triangle$ Направляющий вектор $\vec{a} = (a_x;\ a_y)$ прямой L есть $\vec{a} = (2;\ 3)$. Так как $l \| L$, то $\vec{a}$ является и направляющим вектором l. По формуле (2.54) уравнение l таково:

$$\frac{x-7}{2} = \frac{y-4}{3} \iff 3x - 2y - 13 = 0. \ ▲$$

Пример 17. Найдите координаты вершин $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$, $D(x_D;\ y_D)$ параллелограмма $ABCD$, если $C(3;\ -1)$, (AB): $x + y - 3 = 0$, (AD): $y = 2$.

$\triangle$ Точка A является общей точкой прямых (AB) и (AD). Поэтому ее координаты $(x_A;\ y_A)$ удовлетворяют системе уравнений $x_A + y_A - 3 = 0$, $y_A = 2$, решая которую, находим $x_A = 1$, $y_A = 2$. Направляющий вектор $\vec{a}$ прямой (AB) равен $\vec{a} = (-1; 1)$. Он является и направляющим вектором (CD). Следовательно, уравнение (CD) имеет вид

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} \iff x+y-2=0.$$

Можно аналогично найти, что $y = -1$ — уравнение прямой (BC).

Координаты точек B $(x_B; y_B)$ и D $(x_D; y_D)$ удовлетворяют системам уравнений

$$\begin{cases} x_B+y_B-3=0, \\ y_B=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_D=2, \\ x_D+y_D-2=0. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим: $x_B = 4$, $y_B = -1$, $x_D = 0$, $y_D = 2$. ▲

Пример 18. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 2.28) точка M — середина стороны $[BC]$, точка N — середина отрезка $[MD]$, P — точка пересечения прямых (AN) и (CD). Найдите координаты точек C и D, если A (1; 2), B (4; —1), P (2; 0). Найдите также отношение, в котором точка P делит отрезок $[CD]$.

△ Пусть D $(\alpha; \beta)$. Из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ следует, что координаты точки C $(x_C; y_C)$ соответственно равны $x_C = \alpha + (x_B - x_A) = \alpha + 3$, $y_C = \beta + (y_B - y_A) = \beta - 3$. Точка M $(x_M; y_M)$ — середина $[BC]$, поэтому $x_M = (x_B + x_C)/2 = (\alpha + 7)/2$, $y_M = (y_B + y_C)/2 = (\beta - 4)/2$. Точка N $(x_N; y_N)$ — середина $[MD]$, поэтому $x_N = (x_M + x_D)/2 = (3\alpha + 7)/4$, $y_N = (y_M + y_D)/2 = (3\beta - 4)/4$. Уравнение прямой (AP) имеет вид

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{0-2} \iff 2x+y-4=0.$$

Точка $N \in (AP)$. Значит, координаты точки N удовлетворяют уравнению $2\frac{3\alpha+7}{4} + \frac{3\beta-4}{4} - 4 = 0$, или $2\alpha + \beta - 2 = 0$. По условию, точка P (2; 0) лежит на прямой (DC), уравнение которой $\frac{x-\alpha}{(\alpha+3)-\alpha} = \frac{y-\beta}{(\beta-3)-\beta}$. Следовательно, $\frac{2-\alpha}{3} = \frac{0-\beta}{-3}$, или $\alpha + \beta - 2 = 0$. Решая систему уравнений $2\alpha + \beta - 2 = 0$, $\alpha + \beta - 2 = 0$, найдем $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Окончательно имеем D (0; 2),

C (3; —1). Отношение $\lambda = |CP| : |PD|$, в котором точка P делит отрезок $[CD]$, определяется из соотношения

$$x_P = \frac{x_C + \lambda x_D}{\lambda + 1} \iff 2(\lambda+1) = 3 + \lambda \cdot 0, \text{ т. е.}$$

$$\lambda = 1/2. \blacktriangle$$

Пример 19 (в е к т о р н о е п а р а м е т р и ч е с к о е у р а в н е н и е п л о с к о с т и). Пусть в пространстве зафиксирован полюс O и заданы три точки M_1, M_2, M_3, не лежащие на одной прямой. Опишите множество радиусов-векторов всех точек плоскости $P = (M_1M_2M_3)$.

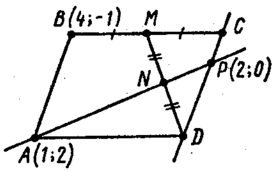


Рис. 2.28

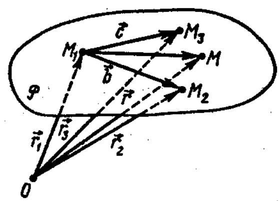


Рис. 2.29

$\triangle$ Пусть $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM}_1$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM}_2$, $\vec{r}_3 = \overrightarrow{OM}_3$ — радиусы-векторы соответственно точек M_1, M_2, M_3 (рис. 2.29), $\vec{b} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{c} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$. Векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис в плоскости P. Через $\vec{r}$ обозначим радиус-вектор произвольной точки $M \in P$. Точка M лежит в плоскости P тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$ раскладывается по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$ [см. формулу (2.28) и признак компланарности векторов (см. пример 2 § 5 этой главы)], т. е. существуют такие числа t и τ (зависящие от M), что $\overrightarrow{M_1M} = t\vec{b} + \tau\vec{c}$, или

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \tau(\vec{r}_3 - \vec{r}_1). \qquad (2.58)$$

Соотношение

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{b} + \tau\vec{c}, \quad t \in R, \ \tau \in R \qquad (2.59)$$

называется *векторным параметрическим уравнением плоскости P, проходящей через точку M_1 ($\vec{r}_1$) и параллельной векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$.* Правая часть соотношения (2.59) при произвольных действительных t и τ определяет совокупность радиусов-векторов всех точек плоскости P и только их. ▲

Соотношение (2.59) можно переписать в виде

$$\vec{r} = \theta\vec{r}_1 + t\vec{r}_2 + \tau\vec{r}_3, \quad \theta + t + \tau = 1. \tag{2.60}$$

Если точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ заданы своими координатами в системе координат $\{O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$, началом которой является полюс O, то векторное параметрическое уравнение плоскости $P = (M_1M_2M_3)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) + \tau(x_3 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) + \tau(y_3 - y_1), \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) + \tau(z_3 - z_1) \end{cases} \tag{2.61}$$

трех скалярных уравнений относительно координат $(x;\ y;\ z)$ точки $M \in P$ и чисел t и τ, зависящих от M. Уравнения системы (2.61) — параметрические уравнения плоскости P.

Пример 20 (координатное уравнение плоскости). Пусть в пространстве задана система координат $\{O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$. Докажите, что уравнение любой плоскости P, проходящей через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, имеет вид

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0. \tag{2.62}$$

△ Зафиксируем на плоскости P еще две точки $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ так, чтобы M_1, M_2 и M_3 не лежали на одной прямой. Положим $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, $b_x = x_2 - x_1$, $b_y = y_2 - y_1$, $b_z = z_2 - z_1$; $\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{c} = (c_x;\ c_y;\ c_z)$, $c_x = x_3 - x_1$, $c_y = y_3 - y_1$, $c_z = z_3 - z_1$. Точка $M(x;\ y;\ z)$ лежит в плоскости P тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. По условию компланарности, это имеет место тогда и только тогда, когда координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0, \tag{2.63}$$

или $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, где

$$A = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

Неравенство $A^2+B^2+C^2>0$ следует (см. пример 19 § 5 этой главы) из неколлинеарности векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. ▲

Уравнение (2.63) называется *координатным уравнением плоскости, проходящей через точку* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *и параллельной векторам* $\vec{b}=(b_x;\ b_y;\ b_z)$ и $\vec{c}=(c_x;\ c_y;\ c_z)$. Его можно записать также в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{2.64}$$

Уравнение (2.64) называется уравнением плоскости $P=(M_1M_2M_3)$, проходящей через три данные точки. Уравнение (2.62) можно записать также в виде

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2>0, \tag{2.65}$$

где $D=-Ax_1-By_1-Cz_1$.

Пример 21. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ 3;\ 1)$, $M_2(3;\ 1;\ 4)$, $M_3(2;\ 1;\ 5)$.

△ По формуле (2.64) уравнение искомой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 3-2 & 1-3 & 4-1 \\ 2-2 & 1-3 & 5-1 \end{vmatrix}=0 \iff \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=0 \iff x+2y+z-9=0. ▲$$

Пример 22. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3;\ 7;\ 2)$ и параллельной прямым l: $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{2}$ и L: $\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{1}$.

△ Плоскость, параллельная прямым l и L, параллельна направляющим векторам $\vec{b}=(4;\ 1;\ 2)$ и $\vec{c}=(5;\ 3;\ 1)$ этих прямых. По формуле (2.63) уравнение искомой плоскости таково

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-7 & z-2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0 \iff 5x-6y-7z+41=0. ▲$$

Пример 23. Напишите уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_1(1;\ 0;\ -1)$ и содержащей прямую l: $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{1}$.

$\triangle$ Точка M_2 (0; —1; 2) прямой l лежит в плоскости P. Следовательно, плоскость P параллельна вектору $\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2}$ и вектору $\vec{c} = (2;\ 3;\ 1)$ — направляющему вектору прямой l. По формуле (2.63) уравнение P имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-(-1) \\ 0-1 & -1-0 & 2-(-1) \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 10x-7y+z-9=0. \blacktriangle$$

Пример 24* (условие параллельности двух плоскостей). Докажите, что плоскости $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0$ и P_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$ параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{N}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1) \neq \vec{0}$ и $\vec{N}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2) \neq \vec{0}$ коллинеарны, т. е. существует такое число $\lambda \neq 0$, что

$$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1. \tag{2.66}$$

$\triangle$ Пусть плоскости P_1 и P_2 таковы, что для коэффициентов их уравнений выполнено равенство (2.66) при некотором $\lambda \neq 0$. Тогда уравнение P_2 имеет вид $\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + D_2 = 0$, или $A_1x + B_1y + C_1z + D_2/\lambda = 0$. Если $D_1 = D_2/\lambda$, то уравнения плоскостей P_1 и P_2 совпадают, т.е. совпадают и плоскости P_1 и P_2; если же $D_1 \neq D_2/\lambda$, то система уравнений $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_2/\lambda = 0$ для нахождения координат общих точек плоскостей P_1 и P_2 несовместна, т. е. $P_1 \cap P_2 = \varnothing$. В обоих случаях плоскости P_1 и P_2 параллельны.

Итак, изменяя константу D_1 в уравнении плоскости P_1, можно получить уравнения плоскостей, параллельных P_1. Проверим, что таким образом можно получить уравнения всех плоскостей, параллельных P_1. Если плоскость P^* параллельна P_1, то P^* может быть получена из P_1 параллельным переносом на некоторый вектор $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$. Поэтому если $P^* \parallel P_1$, то точка M^* $(x;\ y;\ z)$ принадлежит плоскости P^* тогда и только тогда, когда точка M_1 $(x - a_x;\ y - a_y;\ z - a_z)$ $(\overrightarrow{M_1M^*} = \vec{a},\ M^* = T_{\overrightarrow{M_1M^*}}(M_1))$ принадлежит плоскости P_1, т. е. $A_1x + B_1y + C_1z + D^* = 0$, $D^* = D_1 - A_1a_x - B_1a_y - C_1a_z$. Итак, одно из уравнений плоскости P^* получено из уравнения плоскости P_1 изменением константы D_1 на D^*.

Пусть теперь заданные в примере 24 плоскости P_1 и P_2 параллельны. Тогда в соответствии с изложенным выше плоскости P_1^*: $A_1x + B_1y + C_1z + 1 = 0$ и P_2^*: $A_2x + B_2y + C_2z = 0$ также параллельны ($P_1^* \parallel P_1 \parallel P_2 \parallel P_2^*$) и не совпадают (точка с координатами (0; 0; 0) лежит в плоскости P_2^* и не лежит в плоскости P_1^*). Следовательно, плоскости P_1^* и P_2^* не имеют общих точек и, значит, система уравнений $A_1x + B_1y + C_1z = -1$, $A_2x + B_2y + C_2z = 0$

не имеет решений. Тем более не имеет решений каждая из следующих систем уравнений:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-1, \\ A_2x+B_2y+C_2z=0, \\ 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=0; \end{cases} \qquad \text{(II)}\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-1, \\ A_2x+B_2y+C_2z=0, \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=0; \end{cases}$$

$$\text{(III)}\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-1, \\ A_2x+B_2y+C_2z=0, \\ 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0. \end{cases}$$

В соответствии с правилом Крамера (см. § 4 этой главы) определитель матрицы каждой из этих систем (Δ_{I}, Δ_{II}, Δ_{III}) равен нулю. Таким образом,

$$\Delta_{\text{I}}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0, \quad \Delta_{\text{II}}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}=0, \quad \Delta_{\text{III}}=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0.$$

В соответствии с условием коллинеарности (см. пример 19 § 5 этой главы) векторы $\vec{N}_1 \neq \vec{0}$ и $\vec{N}_2 \neq \vec{0}$ коллинеарны, т. е. $\vec{N}_2=\lambda\vec{N}_1$ при некотором $\lambda \neq 0$. Расписав это равенство по координатам, получаем (2.66). ▲

Пример 25*. Пусть $Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2>$ >0 — уравнение плоскости P. Докажите, что существуют неколлинеарные векторы $\vec{b}=(b_x;\ b_y;\ b_z)$ и $\vec{c}=(c_x;\ c_y;\ c_z)$ такие, что

$$A=\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad B=-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}. \qquad (2.67)$$

Докажите также, что векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны плоскости P.

△ Пусть $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ — произвольная точка плоскости P. Тогда $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$. Вектор $\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$ параллелен плоскости P тогда и только тогда, когда точка $M_2(x_1+a_x;$ $y_1+a_y;\ z_1+a_z)$ лежит в плоскости P, т. е.

$$A(x_1+a_x)+B(y_1+a_y)+C(z_1+a_z)+D=0,$$
$$\text{или}\quad Aa_x+Ba_y+Ca_z=0. \qquad (2.68)$$

Условие (2.68) является необходимым и достаточным условием параллельности вектора $\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$ плоскости P: $Ax+By+Cz+$ $+D=0$.

Зафиксируем два произвольных неколлинеарных вектора $\vec{b'}=$ $=(b'_x;\ b'_y;\ b'_z)$ и $\vec{c'}=(c'_x;\ c'_y;\ c'_z)$, параллельных P. Тогда на основании (2.63) одно из уравнений плоскости P запишется в виде $A'x+$ $+B'y+C'z+D'=0$, где

$$A'=\begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix}, \quad -B'=\begin{vmatrix} b'_x & b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix}, \quad C'=\begin{vmatrix} b'_x & b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix},$$

$$D'=-A'x_1-B'y_1-C'z_1.$$

Плоскость P параллельна самой себе. Учитывая результаты примера 24, найдем такое число λ, что

$$A=\lambda A'=\lambda\begin{vmatrix} b'_y & b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda b'_y & \lambda b'_z \\ c'_y & c'_z \end{vmatrix}, \quad B=-\begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_z \\ c'_x & c'_z \end{vmatrix},$$

$$C=\begin{vmatrix} \lambda b'_x & \lambda b'_y \\ c'_x & c'_y \end{vmatrix}.$$

Это означает, что в качестве искомых можно взять векторы $\vec{b}=\overrightarrow{\lambda b'}$ и $\vec{c}=\vec{c'}$.

Пусть теперь векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют (2.67). Тогда

$$Ab_x+Bb_y+Cb_z=b_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-b_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+$$

$$+b_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0,$$

$$Ac_x+Bc_y+Cc_z=c_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

В соответствии с условием (2.68) каждый из векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллелен плоскости P. ▲

Пример 26. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$ $((AB)\|(CD))$, $|CD|:|AB|=\lambda<1$. Плоскость, проходящая через точку B, пересекает ребра $[AA_1]$, $[CC_1]$ и прямую (DD_1) соответственно в точках M, N и P, причем $|AM|:|AA_1|=m$, $|CN|:|CC_1|=n$. Найдите отношение $|DP|:|DD_1|$.

△ Положим $\vec{e}_1=\overrightarrow{DA}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{DC}$, $\vec{e}_3=\overrightarrow{DD_1}$ (рис. 2.30). В системе координат $\{D, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ вершины призмы имеют координаты $A(1;0;0)$, $B(x_B;y_B;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;0)$, $A_1(1;0;1)$, $B_1(x_B;y_B;1)$, $C_1(0;1;1)$, $D_1(0;0;1)$. Вычислим координаты точки $B(x_B;y_B;0)$ (эта точка лежит в плоскости (DAC), поэтому ее третья координата равна нулю). По условию, $\overrightarrow{DC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, или $\vec{e}_2 = \lambda\left((x_B - 1)\vec{e}_1 + y_B\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3\right)$. Отсюда находим: $\lambda(x_B - 1) = 0$, $\lambda y_B = 1$, т. е. $x_B = 1$, $y_B = 1/\lambda$. Далее, по условию, $\overrightarrow{AM} = (x_M - 1;\ y_M;\ z_M) = m\overrightarrow{AA_1}$; $\overrightarrow{AA_1} = (0;\ 0;\ 1)$. Следовательно, $x_M - 1 = m\cdot 0 = 0$, $y_M = m\cdot 0 = 0$, $z_M = m\cdot 1 = m$, т. е. $M\,(1;\ 0;\ m)$. Аналогично, $N\,(0;\ 1;\ n)$. Уравнение плоскости (BMN) имеет вид [ср. с (2.64)]

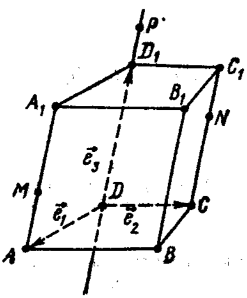


Рис. 2.30

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1/\lambda & z-0 \\ 1-1 & 0-1/\lambda & m-0 \\ 0-1 & 1-1/\lambda & n-0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(x-1) - m\left(y - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z}{\lambda} = 0.$$

Точка $P\,(0;\ 0;\ z_P)$ лежит на оси аппликат, поэтому первые две ее координаты — нули. Из условия $P \in (BMN)$ получаем

$$\frac{m-n-\lambda m}{\lambda}(0-1) - m\left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) - \frac{z_P}{\lambda} = 0, \text{ т. е.}$$

$$z_P = n + \lambda m.$$

Окончательно имеем

$$|DP| : |DD_1| = |z_P\vec{e}_3| : |\vec{e}_3| = |z_P| = n + \lambda m. \ \blacktriangle$$

Пример 27*. Внутри тетраэдра $ABCD$ взята точка K. Точки A', B', C', D' — соответственно точки пересечения прямых (AK), (BK), (CK), (DK) с плоскостями граней BCD, ACD, ABD, ABC. Докажите, что

$$\frac{|A'K|}{|AA'|} + \frac{|B'K|}{|BB'|} + \frac{|C'K|}{|CC'|} + \frac{|D'K|}{|DD'|} = 1.$$

$\triangle$ Выберем систему координат $\{A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\}$. В этой системе координат $A\,(0;\ 0;\ 0)$, $B\,(1;\ 0;\ 0)$, $C\,(0;\ 1;\ 0)$, $D\,(0;\ 0;\ 1)$. Пусть $K\,(m;\ n;\ p)$. Тогда $\overrightarrow{AK} = (m;\ n;\ p)$, $\overrightarrow{BK} = (m-1;\ n;\ p)$, $\overrightarrow{CK} = (m;$

$n-1;\ p)$, $\overrightarrow{DK}=(m;\ n;\ p-1)$. Уравнения прямых:

$$(AK):\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p};\quad (BK).\ \frac{x-1}{m-1}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p};$$

$$(CK):\frac{x}{m}=\frac{y-1}{n-1}=\frac{z}{p};\quad (DK):\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z-1}{p-1}.$$

Уравнения плоскостей:

$$(BCD):\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0\\ 0-1 & 1-0 & 0-0\\ 0-1 & 0-0 & 1-0\end{vmatrix}=0 \iff x+y+z-1=0;$$

$$(ACD):\begin{vmatrix} x & y & z\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \iff x=0;\ (ABD):y=0;\ (ABC):z=0.$$

Координаты точки $A'=(AK)\cap(BCD)$ находим из системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z-1=0,\\ x=mt,\\ y=nt,\\ z=pt\end{cases} \iff A'\left(\frac{m}{m+n+p};\ \frac{n}{m+n+p};\ \frac{p}{m+n+p}\right).$$

Координаты точки B' удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x=0,\\ x=1+(m-1)t,\\ y=nt,\\ z=pt\end{cases} \iff B'\left(0;\ \frac{n}{1-m};\ \frac{p}{1-m}\right).$$

Аналогично находим $C'\left(\frac{m}{1-n};\ 0;\ \frac{p}{1-n}\right)$, $D'\left(\frac{m}{1-p};\ \frac{n}{1-p};\ 0\right)$.

Далее имеем

$$\overrightarrow{A'A}=\left(\frac{-m}{m+n+p};\ \frac{-n}{m+n+p};\ \frac{-p}{m+n+p}\right),\quad \overrightarrow{A'K}=\left(m-\frac{m}{m+n+p};\right.$$

$$\left.n-\frac{n}{m+n+p};\ p-\frac{p}{m+n+p}\right)=\left(\frac{-m(1-(m+n+p))}{m+n+p};\right.$$

$$\left.\frac{-n(1-(m+n+p))}{m+n+p};\ \frac{-p(1-(m+n+p))}{m+n+p}\right).$$

Следовательно, $\overrightarrow{A'K}=(1-(m+n+p))\,\overrightarrow{A'A}$. Векторы $\overrightarrow{A'K}$ и $\overrightarrow{A'A}$ сонаправлены, поэтому $1-(m+n+p)>0$ и $\dfrac{|A'K|}{|AA'|}=1-$

$-(m+n+p)$. Аналогично можно проверить, что $|B'K|/|BB'|=$ $=m$, $|C'K|/|CC'|=n$, $|D'K|/|DD'|=p$. Таким образом,

$$\frac{|A'K|}{|AA'|}+\frac{|B'K|}{|BB'|}+\frac{|C'K|}{|CC'|}+\frac{|D'K|}{|DD'|}=$$
$$=1-(m+n+p)+m+n+p=1. \blacktriangle$$

§ 7. Параллельное проецирование

Рассмотрим в пространстве плоскость P и не параллельную ей прямую l (рис. 2.31). *Проекцией* $\Pi_P^l(M)$ *точки* M *на плоскость* P *параллельно прямой* l называется точка $M^* \in P$ такая, что вектор $\overrightarrow{M^*M}$ параллелен прямой l. Точка M^* является (единственной) точкой пересечения плоскости P с прямой, проходящей через точку M и параллельной прямой l. Пусть O — точка пересечения прямой l с плоскостью P. Рассмотрим систему координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — базис в плоскости P, а вектор $\vec{e}_3$ параллелен прямой l. Пусть $(x_M;\ y_M;\ z_M)$ и $(x_M^*;\ y_M^*;\ z_M^*)$ — соответственно координаты точек M и M^* в этой системе координат. Так как векторы $\overrightarrow{M^*M}=(x_M-x_M^*;\quad y_M-y_M^*;$ $z_M-z_M^*)$ и $\vec{e}_3=(0;\ 0;\ 1)$ коллинеарны, то

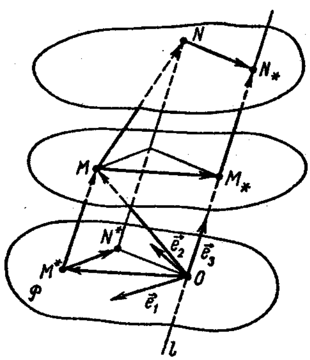


Рис. 2.31

$$\begin{vmatrix} x_M-x_M^* & y_M-y_M^* \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix} x_M-x_M^* & z_M-z_M^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix} y_M-y_M^* & z_M-z_M^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

т. е. $x_M=x_M^*$, $y_M=y_M^*$. Точка M^* лежит в плоскости $P=Oxy$, поэтому ее третья координата z_M^* равна нулю. Таким образом, по координатам $(x_M;\ y_M;\ z_M)$ точки M в данной системе координат координаты точки $M^*=$ $=\Pi_P^l(M)$ находятся по формулам $x_M^*=x_M$, $y_M^*=y_M$, $z_M^*=0$.

Проекцией $\Pi_P^l(\overrightarrow{MN})$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{MN}$ *на плоскость* P *параллельно прямой* l называется направленный отрезок $\overrightarrow{M^*N^*}$, где $M^*=\Pi_P^l(M)$, $N^*=\Pi_P^l(N)$. Если

$M(x_M; y_M; z_M)$, $N(x_N; y_N; z_N)$, т. е. вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, то $\overrightarrow{M^*N^*} = (x_N - x_M; y_N - y_M; 0)$.

Пусть $\vec{d}$ — некоторый вектор. Его проекция $\vec{d}^* = \Pi_P^l(\vec{d})$ на плоскость P параллельно прямой l определяется следующим образом: $\vec{d}^* = \Pi_P^l(\overrightarrow{MN})$, где M и N — произвольные точки пространства такие, что направленный отрезок $\overrightarrow{MN}$ изображает вектор $\vec{d}$. Данное определение является к о р р е к т н ы м, т. е. не зависит от выбора направленного отрезка $\overrightarrow{MN}$, изображающего вектор $\vec{d}$.

□ Действительно, если $\vec{d} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$, то $x_L - x_K = x_N - x_M$, $y_L - y_K = y_N - y_M$, $z_L - z_K = z_N - z_M$, а поэтому $\overrightarrow{K^*L^*} = (x_L - x_K; y_L - y_K; 0) = (x_N - x_M; y_N - y_M; 0) = \overrightarrow{M^*N^*}$. ■

Если в выбранном выше базисе $\vec{d} = (d_x; d_y; d_z)$, т. е. $\overrightarrow{MN} = (d_x; d_y; d_z)$, то в этом базисе $\vec{d}^* = \Pi_P^l(\vec{d}) = (d_x; d_y; 0)$.

Операция проецирования вектора на плоскость P параллельно прямой l является л и н е й н о й: для любых векторов $\vec{d}$ и $\vec{f}$ и любых чисел α и β справедливо равенство

$$\Pi_P^l(\alpha\vec{d} + \beta\vec{f}) = \alpha\Pi_P^l(\vec{d}) + \beta\Pi_P^l(\vec{f}). \tag{2.69}$$

□ Действительно, если в указанном выше базисе $\vec{d} = (d_x; d_y; d_z)$, $\vec{f} = (f_x; f_y; f_z)$, то $\alpha\vec{d} + \beta\vec{f} = (\alpha d_x + \beta f_x; \alpha d_y + \beta f_y; \alpha d_z + \beta f_z)$. Поэтому

$$\Pi_P^l(\alpha\vec{d} + \beta\vec{f}) = (\alpha d_x + \beta f_x; \alpha d_y + \beta f_y; 0).$$

Кроме того, $\Pi_P^l(\vec{d}) = (d_x; d_y; 0)$, $\alpha\Pi_P^l(\vec{d}) = (\alpha d_x; \alpha d_y; 0)$, $\Pi_P^l(\vec{f}) = (f_x; f_y; 0)$, $\beta\Pi_P^l(\vec{f}) = (\beta f_x; \beta f_y; 0)$. Также имеем

$$\alpha\Pi_P^l(\vec{d}) + \beta\Pi_P^l(\vec{f}) = (\alpha d_x + \beta f_x; \alpha d_y + \beta f_y; 0). \quad ■$$

Пример 1 (п р и з н а к   п а р а л л е л ь н о с т и   п р я м о й   и   п л о с к о с т и). При каком необходимом и достаточном условии прямая l: $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$ $(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 > 0)$ и плоскость P: $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$ параллельны?

△ Прямая l параллельна плоскости P тогда и только тогда, когда плоскости P параллелен направляющий вектор $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ прямой l: $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$ [см. условие (2.68)]. ▲

Пример 2. В пространстве заданы плоскость P: $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$ и прямая l: $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$ $(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 > 0)$. Напишите формулы, связывающие координаты точки $M\,(x_M;\ y_M;\ z_M)$ пространства с координатами ее проекции $M^*\,(x^*;\ y^*;\ z^*)$ на плоскость P параллельно прямой l.

△ Вектор $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ — направляющий вектор прямой l. По определению проекции найдется число $t = t_M$, зависящее от M, такое, что $\overrightarrow{M^*M} = t\vec{a}$, или $x_M - x^* = ta_x$, $y_M - y^* = ta_y$, $z_M - z^* = ta_z$, т. е. $x^* = x_M - ta_x$, $y^* = y_M - ta_y$, $z^* = z_M - ta_z$. Координаты $(x^*;\ y^*;\ z^*)$ точки M^* должны удовлетворять уравнению плоскости P: $A\,(x_M - ta_x) + B\,(y_M - ta_y) + C\,(z_M - ta_z) + D = 0$. Учитывая, что $Aa_x + Ba_y + Ca_z \neq 0$ (см. пример 1), находим отсюда:

$$t_M = \frac{Ax_M + By_M + Cz_M + D}{Aa_x + Ba_y + Ca_z};$$

$$x^* = \frac{x_M\,(Ba_y + Ca_z) - a_x\,(By_M + Cz_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z};$$

$$y^* = \frac{y_M\,(Aa_x + Ca_z) - a_y\,(Ax_M + Cz_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}; \tag{2.70}$$

$$z^* = \frac{z_M\,(Aa_x + Ba_y) - a_z\,(Ax_M + By_M + D)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}. \ ▲$$

Пример 3. Найдите проекцию вектора $\vec{b} = (1;\ 0;\ -2)$ на плоскость P: $x - 2y + z - 4 = 0$ параллельно прямой l: $\frac{x}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 5}{1}$.

△ Воспользуемся формулами (2.70). Точка $N\,(0;\ 0;\ 4)$ лежит в плоскости P, поэтому $N^* = \Pi_P^l\,(N) = N$. Возьмем точку $M\,(1;\ 0;\ 2)$ так, чтобы $\overrightarrow{NM} = \vec{b}$. По формулам

(2.70) для точки $M^*(x^*;\ y^*;\ z^*) = \Pi_P^l(M)$ имеем:

$$x^* = \frac{1\cdot((-2)\cdot 1+1\cdot 1)-2((-2)\cdot 0+1\cdot 2-4)}{1\cdot 2+(-2)\cdot 1+1\cdot 1} = 3,$$

$$y^* = \frac{-1\cdot(1\cdot 1+1\cdot 2-4)}{1} = 1.\ z^* = 3.$$

Следовательно, $\Pi_P^l(\vec{b}) = \overrightarrow{N^*M^*} = (3-0;\ \ 1-0;\ 3-4) = (3;\ 1;\ -1)$. ▲

Пример 4*. В тетраэдре $ABCD$ точки D_1, A_1, B_1, C_1 являются точками пересечения медиан соответственно треугольников ABC, BCD, CDA, DAB. Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 — соответственно плоскости (ABC), (BCD), (CDA), (DAB); l_1, l_2, l_3, l_4 — прямые (DD_1), (AA_1), (BB_1), (CC_1). Вычислите для произвольного вектора $\vec{d}$ вектор $\Gamma(\vec{d}) = \Pi_{P_1}^{l_1}(\vec{d}) + \Pi_{P_2}^{l_2}(\vec{d}) + \Pi_{P_3}^{l_3}(\vec{d}) + \Pi_{P_4}^{l_4}(\vec{d})$.

△ Векторы $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ не компланарны и образуют базис в пространстве. Вектор $\vec{d}$ раскладывается по этому базису: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Поэтому, используя линейность операции проецирования, получаем

$$\Gamma(\vec{d}) = \Gamma(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}) = \Pi_{P_1}^{l_1}(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}) +$$
$$+\Pi_{P_2}^{l_2}(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}) + \Pi_{P_3}^{l_3}(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}) +$$
$$+\Pi_{P_4}^{l_4}(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}) = \{\alpha\Pi_{P_1}^{l_1}(\vec{a}) + \beta\Pi_{P_1}^{l_1}(\vec{b}) + \gamma\Pi_{P_1}^{l_1}(\vec{c})\} +$$
$$+\ldots+\{\alpha\Pi_{P_4}^{l_4}(\vec{a}) + \beta\Pi_{P_4}^{l_4}(\vec{b}) + \gamma\Pi_{P_4}^{l_4}(\vec{c})\} =$$
$$= \alpha\{\Pi_{P_1}^{l_1}(\vec{a}) + \Pi_{P_2}^{l_2}(\vec{a}) + \Pi_{P_3}^{l_3}(\vec{a}) + \Pi_{P_4}^{l_4}(\vec{a})\} +$$
$$+\beta\{\Pi_{P_1}^{l_1}(\vec{b}) + \ldots + \Pi_{P_4}^{l_4}(\vec{b})\} + \gamma\{\Pi_{P_1}^{l_1}(\vec{c}) + \ldots + \Pi_{P_4}^{l_4}(\vec{c})\} =$$
$$= \alpha\Gamma(\vec{a}) + \beta\Gamma(\vec{b}) + \gamma\Gamma(\vec{c}).$$

Таким образом, для нахождения $\Gamma(\vec{d})$ для любого вектора $\vec{d}$ достаточно знать лишь $\Gamma(\vec{a})$, $\Gamma(\vec{b})$ и $\Gamma(\vec{c})$. Поскольку вектор $\vec{a}$ параллелен плоскостям P_3 и P_4 (изображающий вектор $\vec{a}$ направленный отрезок $\overrightarrow{DA}$ лежит в плоскостях P_3 и P_4), $\Pi_{P_3}^{l_3}(\vec{a}) = \Pi_{P_4}^{l_4}(\vec{a}) = \vec{a}$. В соответствии с результатом примера 12 § 5 этой главы $\overrightarrow{DD_1} = (1/3)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. Поэтому (рис. 2.32) $\Pi_{P_1}^{l_1}(\vec{a}) = \overrightarrow{D_1A} = -\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DA} =$

$= \vec{a} - (1/3)(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Согласно свойству медиан треугольника BCD, имеем $\Pi_{P_2}^{l_2}(\vec{a}) = \overrightarrow{DA_1} = (1/3)(\vec{b} + \vec{c})$. Следовательно, $\Gamma(\vec{a}) = \vec{a} - (1/3)(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (1/3)(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} + \vec{a} = (8/3)\vec{a}$. Аналогично находим $\Gamma(\vec{b}) = (8/3)\vec{b}$, $\Gamma(\vec{c}) = (8/3)\vec{c}$. Окончательно получим $\Gamma(\vec{d}) = \alpha\Gamma(\vec{a}) + \beta\Gamma(\vec{b}) + \gamma\Gamma(\vec{c}) = \alpha(8/3)\vec{a} + \beta(8/3)\vec{b} + \gamma(8/3)\vec{c} = (8/3)\vec{d}$ для любого вектора $\vec{d}$. ▲

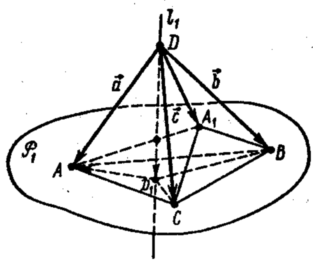


Рис. 2.32

Рассмотрим в пространстве прямую l и не параллельную ей плоскость P (см. рис. 2.31). *Проекцией* $\Pi_l^P(M)$ *точки* M *на прямую* l *параллельно плоскости* P называется такая точка $M_* \in l$, что вектор $\overrightarrow{MM_*}$ параллелен P. Точка M_* является (единственной) точкой пересечения прямой l с плоскостью, проходящей через точку M и параллельной плоскости P. В системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (см. рис. 2.31), у которой $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — базис в плоскости P, $\vec{e}_3 \| l$, $O = l \cap P$, координаты точки $M_*(x_{*M};\ y_{*M};\ z_{*M})$ находятся по координатам точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ из условий $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_*} + \overrightarrow{M_*M}$, $\overrightarrow{OM_*} \| \vec{e}_3$, $\overrightarrow{MM_*} \| P$. В системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ плоскость P имеет уравнение $z = 0$ (плоскость P проходит через точки с координатами $(0;\ 0;\ 0)$, $(1;\ 0;\ 0)$ и $(0;\ 1;\ 0)$, поэтому ее уравнение

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} \Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Longleftrightarrow z = 0.$$

Вектор $\overrightarrow{MM_*} = (x_{*M} - x_M;\ y_{*M} - y_M;\ z_{*M} - z_M)$ параллелен плоскости P. Согласно признаку (2.68), получаем $0 \cdot (x_{*M} - x_M) + 0 \cdot (y_{*M} - y_M) + 1 \cdot (z_{*M} - z_M) = 0$, т. е. $z_{*M} = z_M$. Поскольку точка M_* лежит на оси Oz, первые две ее координаты равны нулю. Таким образом, по заданным координатам $(x_M;\ y_M;\ z_M)$ точки M координаты точки $M_* = \Pi_l^P(M)$ находятся так: $M_*(0;\ 0;\ z_M)$.

Проекцией $\Pi_l^P(\overrightarrow{MN})$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{MN}$ *на прямую* l *параллельно плоскости* P называется направленный отрезок $\overrightarrow{M_*N_*}$, где $M_*=\Pi_l^P(M)$, $N_*=\Pi_l^P(N)$. Если $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ и $N(x_N;\ y_N;\ z_N)$, то вектор $\overrightarrow{M_*N_*}$ имеет координаты $(0;\ 0;\ z_N-z_M)$.

Пусть $\vec{d}$ — некоторый вектор. *Проекцией* $\vec{d}_*=\Pi_l^P(\vec{d})$ *вектора* $\vec{d}$ *на прямую* l *параллельно плоскости* P называется вектор $\vec{d}_*=\Pi_l^P(\overrightarrow{MN})$, где $\overrightarrow{MN}$ — произвольный направленный отрезок, изображающий вектор $\vec{d}$. Это определение корректно (не зависит от выбора направленного отрезка $\overrightarrow{MN}$, изображающего вектор $\vec{d}$). Если в данной системе координат $\vec{d}=(d_x;\ d_y;\ d_z)$, то $\Pi_l^P(\vec{d})=(0;\ 0;\ d_z)$. Поскольку $\Pi_P^l(\vec{d})=(d_x;\ d_y;\ 0)$, для любого вектора $\vec{d}$ выполнено тождество

$$\Pi_l^P(\vec{d})+\Pi_P^l(\vec{d})=\vec{d}. \tag{2.71}$$

Операция проецирования вектора на прямую l параллельно плоскости P обладает свойством линейности:

$$\Pi_l^P(\alpha\vec{d}+\beta\vec{f})=\alpha\Pi_l^P(\vec{d})+\beta\Pi_l^P(\vec{f}) \tag{2.72}$$

для любых векторов $\vec{d}$ и $\vec{f}$ и любых чисел α и β.

Пример 5. В некоторой системе координат заданы плоскость P: $Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2>0$ и точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Напишите уравнение плоскости P^*, параллельной плоскости P и проходящей через точку M_0.

$\triangle$ Уравнение всякой плоскости P^*, параллельной P, имеет вид

$$Ax+By+Cz+D^*=0.$$

Константа D^* находится из условия принадлежности точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ искомой плоскости P^*: $Ax_0+By_0+Cz_0+$ $+D^*=0$, или $D^*=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Окончательно P^*: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. $\blacktriangle$

Пример 6. В некоторой системе координат заданы прямая l: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ и плоскость P: $2x+y+z+$ $+2=0$. Найдите координаты проекции $M_*(x_*;\ y_*;\ z_*)$ точки $M(1;\ 2;\ 3)$ на прямую l параллельно плоскости P.

$\triangle$ Уравнение плоскости, проходящей через точку M и параллельной плоскости P, имеет вид $2\cdot(x-1)+$

$+1\cdot(y-2)+1\cdot(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-7=0$ (см. пример 5). Точка $M_*(x_*;\ y_*;\ z_*)=\Pi_l^P(M)$ является точкой пересечения этой плоскости и прямой l, поэтому ее координаты находятся из системы уравнений

$$2x_*+y_*+z_*-7=0,$$
$$x_*-1=(1/2)\,y_*,\ z_*+1=-(1/2)\,y_* \Leftrightarrow x_*=3,$$
$$y_*=4,\ z_*=-3. \ \blacktriangle$$

Пример 7.* В тетраэдре $ABCD$ точки M, N, Q, K, L, R соответственно середины ребер $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$, $[AC]$, $[AB]$, $[BC]$. Пусть P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 — соответственно плоскости (CMB), (ANC), (AQB), (DKB), (DLC), (DRA), а l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 — прямые (AD), (BD), (CD), (AC), (AB), (BC). Вычислите для произвольного вектора $\vec{d}$ вектор

$$\Gamma(\vec{d})=\Pi_{l_1}^{P_1}(\vec{d})+\Pi_{l_2}^{P_2}(\vec{d})+\Pi_{l_3}^{P_3}(\vec{d})+\Pi_{l_4}^{P_4}(\vec{d})+$$
$$+\Pi_{l_5}^{P_5}(\vec{d})+\Pi_{l_6}^{P_6}(\vec{d}).$$

$\triangle$ Векторы $\vec{a}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}$ образуют базис в пространстве. Вектор $\vec{d}$ раскладывается по этому базису: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Используя линейность операции проецирования, имеем

$$\Gamma(\vec{d})=\Gamma(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})=\sum_{j=1}^{6}\Pi_{l_j}^{P_j}(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})=$$
$$=\sum_{j=1}^{6}\left(\alpha\Pi_{l_j}^{P_j}(\vec{a})+\beta\Pi_{l_j}^{P_j}(\vec{b})+\gamma\Pi_{l_j}^{P_j}(\vec{c})\right)=\alpha\sum_{j=1}^{6}\Pi_{l_j}^{P_j}(\vec{a})+$$
$$+\beta\sum_{j=1}^{6}\Pi_{l_j}^{P_j}(\vec{b})+\gamma\sum_{j=1}^{6}\Pi_{l_j}^{P_j}(\vec{c})=\alpha\Gamma(\vec{a})+\beta\Gamma(\vec{b})+\gamma\Gamma(\vec{c})$$

(ср. с примером 4). Найдем $\Gamma(\vec{a})$. Так как $\Pi_{l_1}^{P_1}(A)=A$, $\Pi_{l_1}^{P_1}(D)=D$, то $\Pi_{l_1}^{P_1}(\vec{a})=\vec{a}$ (рис. 2.33). Так как $\Pi_{l_2}^{P_2}(A)=N$, $\Pi_{l_2}^{P_2}(D)=D$, то $\Pi_{l_2}^{P_2}(\vec{a})=\overrightarrow{DN}=(1/2)\,\vec{b}$. Аналогично имеем $\Pi_{l_3}^{P_3}(\vec{a})=(1/2)\,\vec{c}$, $\Pi_{l_4}^{P_4}(\vec{a})=(\vec{a}-\vec{c})/2$, $\Pi_{l_5}^{P_5}(\vec{a})=(\vec{a}-\vec{b})/2$. Так как $\Pi_{l_6}^{P_6}(A)=\Pi_{l_6}^{P_6}(D)=R$, то $\Pi_{l_6}^{P_6}(\vec{a})=\overrightarrow{RR}=\vec{0}$. Следовательно,

$\Gamma(\vec{a})=\vec{a}+(1/2)\,\vec{b}+(1/2)\,\vec{c}+(1/2)\,(\vec{a}-\vec{c})+(1/2)\,(\vec{a}-\vec{b})+\vec{0}=$

$=2\vec{a}$. Аналогично, $\Gamma(\vec{b})=2\vec{b}$, $\Gamma(\vec{c})=2\vec{c}$. Таким образом, для любого вектора $\vec{d}$

$$\Gamma(\vec{d}) = \alpha\Gamma(\vec{a}) + \beta\Gamma(\vec{b}) + \gamma\Gamma(\vec{c}) = \alpha 2\vec{a} + \beta 2\vec{b} + \gamma 2\vec{c} = 2\vec{d}. \ \blacktriangle$$

Рассмотрим в плоскости P две непараллельные прямые l и L (рис. 2.34). *Проекцией* $\Pi_l^L(M)$ *точки* $M \in P$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется такая точка $M_1 \in l$,

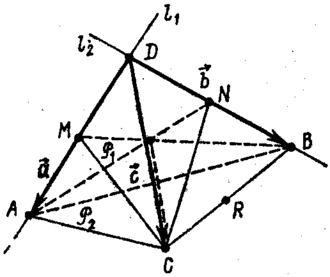


Рис. 2.33

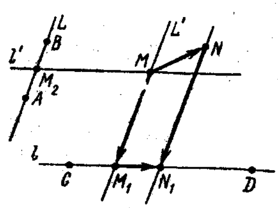


Рис. 2.34

что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ параллелен L. Точка M_1 является (единственной) точкой пересечения прямой l с прямой, проходящей через точку M и параллельной прямой L. Пусть M и N — точки плоскости P. *Проекцией* $\Pi_l^L(\overrightarrow{MN})$ *направленного отрезка* $\overrightarrow{MN}$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется направленный отрезок $\overrightarrow{M_1N_1}$, где $M_1 = \Pi_l^L(M)$, $N_1 = \Pi_l^L(N)$. Пусть $\vec{d}$ — некоторый вектор, параллельный плоскости P. *Его проекцией* $\Pi_l^L(\vec{d})$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется вектор $\vec{d}^* = \Pi_l^L(\overrightarrow{MN})$, где $\overrightarrow{MN}$ — направленный отрезок, изображающий вектор $\vec{d}$, начало M и конец N которого лежат в плоскости P. Определение проекции вектора на прямую параллельно другой прямой в плоскости к о р р е к т н о (не зависит от выбора направленного отрезка, изображающего вектор). Операция проецирования вектора на прямую l параллельно прямой L в плоскости P является л и н е й н о й:

$$\Pi_l^L(\alpha\vec{d}+\beta\vec{f}) = \alpha\Pi_l^L(\vec{d}) + \beta\Pi_l^L(\vec{f})$$

для любых векторов $\vec{d}\|P$ и $\vec{f}\|P$ и любых чисел α и β. Справедливо тождество

$$\vec{d}=\Pi_l^L(\vec{d})+\Pi_L^l(\vec{d}).$$

Пример 8. Проверьте, что прямые l: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-3}{1}$ и L: $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$ лежат в одной плоскости и не параллельны. Найдите проекцию точки M (0; —4; —7) на прямую l параллельно прямой L.

$\triangle$ Прямые l и L не параллельны, поскольку их направляющие векторы $\vec{b}=(1;\ -3;\ 1)$ и $\vec{c}=(1;\ -1;\ 3)$ не коллинеарны:

$$\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}\neq 0,\quad -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\neq 0,\quad \begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\neq 0.$$

Проверим, что эти прямые пересекаются (и, следовательно, лежат в одной плоскости). Для этого убедимся в том, что система уравнений $x-2=(y+2)/(-3)$, $z-3=(y+2)/-3$, $x=-y+2$, $z=-3(y-2)-1$ имеет решение. Из первых трех уравнений находим: $x=1$, $y=1$, $z=2$. Подставляя найденные x, y, z в четвертое уравнение, получаем, что $2=-3(1-2)-1$, т. е. это уравнение также удовлетворяется. Таким образом, прямые l и L пересекаются в точке N (1; 1; 2).

Найдем $\Pi_l^L(M)$. Для этого через точку M (0; —4; —7) проведем прямую, параллельную L. Уравнения этой прямой $\frac{x-0}{1}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+7}{3}$. Точка $\Pi_l^L(M)$ лежит на данной прямой и на прямой l, поэтому ее координаты находятся из следующей системы уравнений: $x=-y-4$, $z+7=-3(y+4)$, $x-2=-(y+2)/3$, $z-3=-(y+2)/3$. Из первых трех уравнений находим: $x=4$, $y=-8$, $z=5$. Четвертому уравнению найденные x, y, z также удовлетворяют. Следовательно, $\Pi_l^L(M)$ имеет координаты (4; —8; 5). ▲

Пример 9. На плоскости заданы четыре точки: A (1; 2), B (2; 5), C (1; —1), D (3; —7). Пусть $L=(AB)$, $l=(CD)$. Найдите такую точку M, что точка $M_1=\Pi_l^L(M)$ делит $[CD]$ в отношении 1 : 3, считая от точки C, а точка $M_2=\Pi_L^l(M)$ является серединой $[AB]$.

$\triangle$ По формулам деления отрезка в заданном отношении точка M_1 имеет координаты $x_1=\frac{x_C+(1/3)\,x_D}{1+1/3}=\frac{3}{2}$, $y_1=$

$= \frac{(-1)+(1/3)(-7)}{1+1/3} = -\frac{5}{2}$, точка M_2 — координаты $x_2=3/2$, $y_2 = 7/2$. Обозначим $l' = (MM_2)$, $L' = (MM_1)$ (рис. 2.34). По определению проекции, $l' \| l$, $L' \| L$. Следовательно, $\overrightarrow{AB} = (1; 3)$ — направляющий вектор прямой L', проходящей через точку M_1 $(3/2; -5/2)$. Поэтому уравнение L': $\frac{x-3/2}{1} = \frac{y+5/2}{3} \Leftrightarrow 3x - y - 7 = 0$. Направляющим вектором прямой l' является вектор $\overrightarrow{CD} = (2; -6)$, $M_2 \in l'$. Следовательно, уравнение l': $\frac{x-3/2}{2} = \frac{y-7/2}{-6} \Leftrightarrow 3x + y - 8 = 0$. Решая систему уравнений $3x - y - 7 = 0$, $3x + y - 8 = 0$, находим координаты точки M $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, являющейся точкой пересечения прямых l' и L'. ▲

§ 8. Некоторые примеры

Пример 1. Дан треугольник ABC. Укажите такую точку M, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

△ Так как $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}$, то $(-\overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) - 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC}$, т. е. точка M лежит на продолжении стороны $[AC]$ за точку C, причем $|AM| = 3|AC|$. ▲

Пример 2. Докажите, что для любого конечного набора точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (в пространстве или на плоскости) найдется, и притом единственная, точка M такая, что $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$. Укажите положение точки M в следующих частных случаях: 1) $A_1A_2A_3$ — треугольник; 2) $A_1A_2A_3A_4$ — пространственный или плоский четырехугольник; 3) $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный (плоский) n-угольник.

△ Зафиксируем некоторый полюс O. Для любой точки M выполнены равенства $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OM}) + \ldots + (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}) - n\overrightarrow{OM}$. Отсюда следует, что M — искомая точка тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{OM} = (1/n)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}), \qquad (2.73)$$

т. е. точка M является концом вектора $\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n})$, отложенного от точки O. Следовательно, искомая точка M всегда существует и единственна.

1) Треугольник $A_1A_2A_3$. В этом случае $\overrightarrow{OM} = (1/3) \times (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})$. Возьмем в качестве полюса O точку A_1. Тогда $\overrightarrow{A_1M} = (1/3)(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3}}{2}$. Следовательно, точка M лежит на медиане треугольника $A_1A_2A_3$, проведенной из вершины A_1, и делит ее в отношении $2:1$, считая от вершины A_1. Если в качестве полюса O взять точку A_2 (или A_3), получим, что M лежит и на медиане, проведенной из вершины A_2 (A_3), и делит ее в отношении $2:1$. Можно сделать вывод: *медианы любого треугольника пересекаются в одной точке* («центре тяжести» треугольника) *такой, что сумма векторов, идущих из этой точки в вершины треугольника, равна* $\vec{0}$. Эта точка делит каждую из медиан в отношении $2:1$. Радиус-вектор центра тяжести M треугольника $A_1A_2A_3$ относительно любого полюса O находится по формуле

$$\overrightarrow{OM} = (1/3)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}).$$

2) Четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$. В этом случае $\overrightarrow{OM} = (1/4)(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4})$. Пусть P и Q — соответственно середины сторон $[A_1A_4]$ и $[A_2A_3]$ (рис. 2.35). Зафиксируем в качестве полюса точку A_1. Имеем

$$\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \left(\overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_4A_3}\right) + \overrightarrow{A_1A_4}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_4A_3}}{2}\right) = \overrightarrow{A_1P} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$$

[мы воспользовались тем, что (см. пример 5 § 2 этой главы) $\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_4A_3}}{2}$]. Таким образом, точка M лежит на отрезке, соединяющем середины отрезков $[A_2A_3]$ и $[A_1A_4]$, и делит его пополам.

Следствие. *В тетраэдре отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер, имеют общую точку M, являющуюся серединой каждого из таких отрезков. Сумма векторов, идущих из точки M в вершины тетраэдра, равна $\vec{0}$.*

3) Правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$. В этом случае $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_n})$. Выберем в качестве полюса O точку A_1. Если $n = 2k$ — четное, то векторы $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_{2k}}$, $\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_{2k-1}}$, ..., $\overrightarrow{A_1A_k} + \overrightarrow{A_1A_{k+2}}$,

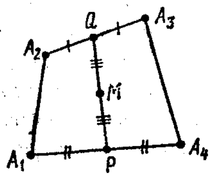


Рис. 2.35

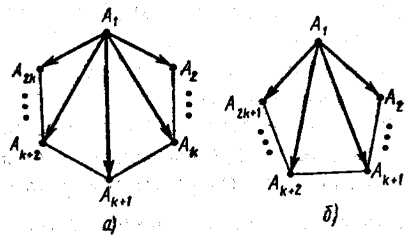


Рис. 2.36

$\overrightarrow{A_1A_{k+1}}$ направлены по биссектрисе $\angle A_2A_1A_{2k}$ (рис. 2.36, *а*). Если $n = 2k + 1$ — нечетное, то по биссектрисе $\angle A_2A_1A_{2k+1}$ направлены векторы $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_{2k+1}}$, $\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_{2k}}$, ..., $\overrightarrow{A_1A_{k+1}} + \overrightarrow{A_1A_{k+2}}$ (рис. 2.36, *б*). В обоих случаях то же направление (т. е. направление биссектрисы $\angle A_2A_1A_n$) имеет и вектор $\overrightarrow{A_1M} = (1/n)((\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_n}) + (\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_{n-1}}) + ...)$. Следовательно, точка M лежит на биссектрисе $\angle A_2A_1A_n$. Если в качестве полюса зафиксировать точку A_2, то получим, что M лежит и на биссектрисе угла $\angle A_1A_2A_3$. Можно сделать вывод: M — центр многоугольника $A_1A_2 ... A_n$. Таким образом, *сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, равна* $\vec{0}$. ▲

Пример 3. Докажите, что в тетраэдре отрезки, соединяющие вершины с центрами тяжести противолежащих граней, имеют общую точку и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины.

△Пусть A, B, C, D — вершины тетраэдра. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, Q — центр тяжести грани ACD, M — точка, лежащая на отрезке $[QB]$ и делящая его в отношении 3 : 1, считая от вершины B (рис. 2.37). По формуле из примера 2, $\overrightarrow{BQ} = (1/3)(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = (1/3)((\vec{a} - \vec{b}) + (-\vec{b}) + (\vec{c} - \vec{b})) = (\vec{a} + \vec{c})/3 - \vec{b}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{3} - \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{4} - \frac{3}{4}\vec{b},\ \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \left(\frac{\vec{a}+\vec{c}}{4} - \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right),$$

т. е. точка M — точка (см. пример 2), для которой выполнено условие

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}. \tag{2.74}$$

Таким образом, точка M из примера 2 (п. 2), построенная для тетраэдра $ABCD$, лежит на отрезке, соединяющем вершину B с центром тяжести Q противоположной грани, и делит отрезок $[QB]$ в отношении $3:1$, считая от вершины.

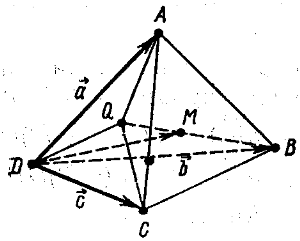


Рис. 2.37

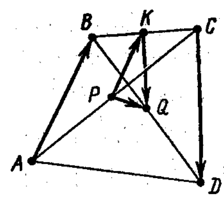


Рис. 2.38

Проведя аналогичные рассуждения для вершины C (D или A), приходим к выводу, что та же точка M, определяемая условием (2.74), лежит на отрезке, соединяющем C (D или A) с центром тяжести противолежащей грани, и делит этот отрезок в отношении $3:1$. ▲

Пример 4. В пространстве зафиксированы четыре различные точки: A, B, C и D. Точки P и Q — соответственно середины отрезков $[AC]$ и $[BD]$. Докажите, что $\overrightarrow{PQ} = (1/2)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.

△ Пусть K — середина $[BC]$ (рис. 2.38). Тогда $[PK]$ — средняя линия $\triangle ABC$, и поэтому $\overrightarrow{PK} = (1/2)\overrightarrow{AB}$. Аналогично, $\overrightarrow{KQ} = (1/2)\overrightarrow{CD}$. Следовательно, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{KQ} = (1/2)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$. ▲

Пример 5. Пусть A, B, C, D, E, F, G, H — произвольные точки в пространстве или на плоскости, $M, N, P, Q, M', N', P', Q', R, S, R', S'$ — соответственно середины от-

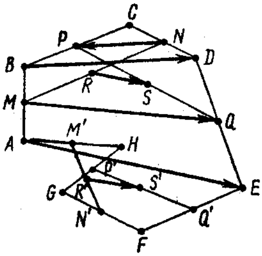


Рис. 2.39

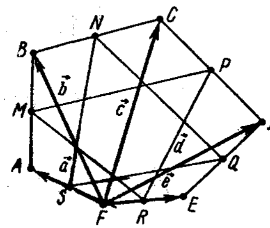


Рис. 2.40

резков $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[DE]$, $[AH]$, $[GF]$, $[HG]$, $[FE]$, $[MN]$, $[PQ]$, $[M'N']$, $[P'Q']$ (рис. 2.39). Докажите, что $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R'S'}$.

△ В соответствии с формулой для средней линии пространственного четырехугольника (см. пример 5 § 2 этой главы) имеем: $\overrightarrow{RS} = (1/2)(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ})$, $\overrightarrow{NP} = (1/2)\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{MQ} = (1/2)(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE})$. Поэтому $\overrightarrow{RS} = (1/2)((1/2)\overrightarrow{DB} + (1/2)\overrightarrow{BD} + (1/2)\overrightarrow{AE}) = (1/4)\overrightarrow{AE}$. Аналогично,

$$\overrightarrow{R'S'} = (1/2)\left(\overrightarrow{N'P'} + \overrightarrow{M'Q'}\right) = (1/2)\left((1/2)\overrightarrow{FH} + (1/2)\left(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AE}\right)\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}. \ ▲$$

Пример 6. В произвольном выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ соединены через одну середины сторон. Докажите, что точки пересечения медиан двух образовавшихся треугольников совпадают.

△ Пусть S, M, N, P, Q, R — середины соответственно сторон $[FA]$, $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$. Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{FA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{FB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{FC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{FD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{FE}$ (рис. 2.40). Возьмем в качестве полюса вершину F шестиугольника и вычислим радиусы-векторы относительно полюса F точек

K и L, являющихся центрами тяжести соответственно треугольников MPR и SNQ. Имеем: $\overrightarrow{FM} = (1/2)(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{FP} = (1/2)(\vec{c}+\vec{d})$, $\overrightarrow{FR} = (1/2)\vec{e}$, $\overrightarrow{FS} = (1/2)\vec{a}$, $\overrightarrow{FN} = (1/2)(\vec{b}+\vec{c})$, $\overrightarrow{FQ} = (1/2)(\vec{d}+\vec{e})$. По формуле из примера 2 имеем:

$$\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FR}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right) + \frac{1}{2}\vec{e}\right) = \frac{1}{6}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}\right),\ \overrightarrow{FL} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FS}+\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{FQ}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{e}\right)\right) = \frac{1}{6}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}\right),$$

т. е. $\overrightarrow{FL} = \overrightarrow{FK}$. ▲

Пример 7. Дан треугольник ABC, $[AN]$ — его медиана. Через произвольную точку F отрезка $[AN]$ проведены прямые (CF) и (BF) до пересечения со сторонами $[AB]$ и $[AC]$ соответственно в точках M и P. Докажите, что $CPMB$ — трапеция, если $F \neq A$ и $F \neq N$.

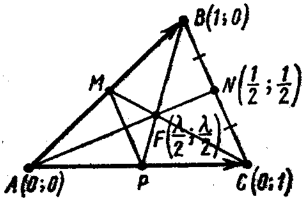


Рис. 2.41

△ Введем систему координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ (рис. 2.41). В этой системе координат $A\ (0;\ 0)$, $B\ (1;\ 0)$, $C\ (0;\ 1)$, $N\ (1/2;\ 1/2)$, $\overrightarrow{AN} = (1/2;\ 1/2)$. Точка F лежит на отрезке $[AN]$, причем $F \neq A$, $F \neq N$. Следовательно, $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AN}$ при некотором $\lambda \in (0,\ 1)$ и $F\ (\lambda/2;\ \lambda/2)$. Уравнения прямых:

$$(BF):\ \frac{x-1}{\lambda/2-1} = \frac{y-0}{\lambda/2-0} \Leftrightarrow \lambda x-(\lambda-2)\,y-\lambda=0;$$

$$(CM):\ \frac{x-0}{\lambda/2-0} = \frac{y-1}{\lambda/2-1} \Leftrightarrow (\lambda-2)\,x-\lambda y+\lambda=0;$$

$$(AC): x=0;\ (AB): y=0.$$

Координаты точки $P = (BF) \cap (AC)$ находим из системы уравнений $\lambda x - (\lambda-2)y - \lambda = 0$, $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y = \frac{\lambda}{2-\lambda}$, т. е. $P\left(0;\ \frac{\lambda}{2-\lambda}\right)$. Аналогично, $M\left(\frac{\lambda}{2-\lambda};\ 0\right)$ и, значит, $\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{\lambda}{2-\lambda}; \frac{\lambda}{2-\lambda}\right)$. Так как $\overrightarrow{BC} = (-1; 1)$, то $\overrightarrow{MP} = \frac{\lambda}{2-\lambda}\overrightarrow{BC}$, т. е. $(MP) \parallel (BC)$, $|MP| \neq |BC|$ и $CPMB$ — трапеция. ▲

Пример 8*. Найдите необходимые и достаточные условия того, чтобы три прямые l_i: $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $A_i^2 + B_i^2 > 0$, $i = 1, 2, 3$ на плоскости имели общую точку.

□ Три прямые l_1, l_2, l_3 имеют общую точку тогда и только тогда, когда существуют числа x_0, y_0 (координаты этой точки) такие, что

$$C_1 = -x_0A_1 - y_0B_1, \quad C_2 = -x_0A_2 - y_0B_2, \quad C_3 = -x_0A_3 - y_0B_3. \tag{2.75}$$

Если, зафиксировав некоторый базис в пространстве, ввести векторы $\vec{a} = (A_1; A_2; A_3)$, $\vec{b} = (B_1; B_2; B_3)$, $\vec{c} = (C_1; C_2; C_3)$, то для этих трех векторов условие (2.75) означает, что вектор $\vec{c}$ может быть разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следовательно, если прямые l_1, l_2, l_3 имеют общую точку, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.76}$$

Условие (2.76) является необходимым условием существования общей точки у прямых l_1, l_2, l_3. Выясним достаточность этого условия. Если векторы $\vec{a} = (A_1; A_2; A_3)$ и $\vec{b} = (B_1; B_2; B_3)$ не коллинеарны, то из условия (2.76) вытекает, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны: вектор $\vec{c}$ параллелен плоскости, в которой $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. На основании формулы (2.38) выполнено и условие (2.75) при некоторых x_0 и y_0. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то либо $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$: $A_1 = \lambda B_1$, $A_2 = \lambda B_2$, $A_3 = \lambda B_3$ и условие (2.75) принимает вид $C_1 = -(\lambda x_0 + y_0)B_1$, $C_2 = -(\lambda x_0 + y_0)B_2$, $C_3 = -(\lambda x_0 + y_0)B_3$, т. е. $\vec{c} = -(\lambda x_0 + y_0)\vec{b}$, либо $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} = \mu\vec{a}$: $B_i = \mu A_i$, $i = 1, 2, 3$, а условие (2.75) превращается в условие $\vec{c} = -(x_0 + \mu y_0)\vec{a}$. Таким образом, необходимое и достаточное условие наличия общей точки у трех прямых l_i : $A_ix + B_iy + C_i = 0$, $A_i^2 + B_i^2 > 0$, $i = 1,2,3$, следующее:

$$\Delta = 0 \text{ и либо } \vec{a} \nparallel \vec{b}, \text{ либо } \vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}. \tag{2.77}$$

Если $\Delta = 0$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то l_1, l_2, l_3 имеют единственную общую точку [вектор $\vec{c}$ единственным образом (с коэффициентами $-x_0$, $-y_0$) раскладывается по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$]. Если же $\Delta = 0$, а $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, то разложение (2.75) не единственно (если $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, $\vec{c} = \lambda'\vec{b}$, то соотношения (2.75) выполнены при произвольных x_0 и y_0, связанных соотношением $\lambda x_0 + y_0 = -\lambda'$; если же $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} = \mu\vec{a}$, $\vec{c} = \mu'\vec{a}$, то равенства (2.75) имеют место при произвольных x_0 и y_0 таких, что $x_0 + \mu y_0 = -\mu'$). Окончательно, если $\Delta = 0$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то прямые l_1, l_2, l_3 имеют единственную общую точку. Если $\Delta = 0$, $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{c}$, то все три прямые совпадают. ■

Пример 9*. На сторонах (или продолжениях сторон) треугольника ABC выбраны точки $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$ так, что $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}$. Докажите, что равенство

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = \alpha\beta\gamma \tag{2.78}$$

является необходимым и достаточным условием того, чтобы прямые (AN), (BP) и (CM) либо пересекались в одной точке, либо были попарно параллельны.

$\triangle$ Введем систему координат $\{A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$. В этой системе координат $A\ (0;\ 0)$, $B\ (0;\ 1)$, $C\ (1;\ 0)$, $M\ (0;\ \alpha)$, $N\ (\beta;\ 1-\beta)$, $P\ (1-\gamma;\ 0)$. Уравнения прямых:

$$(AN): \frac{x-0}{\beta-0} = \frac{y-0}{(1-\beta)-0} \Leftrightarrow (1-\beta)\,x - \beta y = 0;$$

$$(BP): \frac{x-0}{(1-\gamma)-0} = \frac{y-1}{0-1} \Leftrightarrow x + (1-\gamma)\,y - (1-\gamma) = 0;$$

$$(CM): \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{\alpha-0} \Leftrightarrow \alpha x + y - \alpha = 0.$$

Необходимое условие пересечения этих трех прямых в одной точке [ср. с (2.76)]

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\beta & -\beta & 0 \\ 1 & 1-\gamma & -(1-\gamma) \\ \alpha & 1 & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 = (1-\beta)\,\times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1-\gamma & -(1-\gamma) \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} - (-\beta)\begin{vmatrix} 1 & -(1-\gamma) \\ \alpha & -\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

[ср. с (2.78)]. Если $(AN) \parallel (BP)$, то направляющие векторы $\vec{n} = (\beta;\ 1-\beta)$ и $\vec{p} = (1-\gamma;\ -1)$ этих прямых коллинеарны. Согласно условию коллинеарности,

$$(AN) \parallel (BP) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta & 1-\beta \\ 1-\gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta = -(1-\beta)(1-\gamma) \qquad (2.79)$$

[если $\vec{e}$ — произвольный вектор, не параллельный плоскости (ABC), то в базисе $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \vec{e}\}$ $\vec{n} = (\beta; 1-\beta; 0)$, $\vec{p} = (1-\gamma; -1; 0)$ и соотношение (2.79) легко получается из критерия (2.35)]. Аналогично, если $(BP) \parallel (CM)$, то $\vec{p} \parallel \vec{m}$, $\vec{p} = (1-\gamma; -1)$, $\vec{m} = (-1; \alpha)$, т. е.

$$(BP) \parallel (CM) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\gamma & -1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma = -(1-\alpha). \qquad (2.80)$$

Если теперь прямые (AN), (BP) и (CM) попарно параллельны, то из соотношений (2.79) и (2.80) получаем $\beta\alpha\gamma = (1-\beta)(1-\gamma)(1-\alpha)$, т. е. (2.78) является необходимым условием выполнения соотношений $(AN) \parallel (BP) \parallel (CM)$.

Покажем достаточность условия (2.78). Если это условие выполнено, а трехмерные векторы $\vec{a} = (1-\beta; 1; \alpha)$ и $\vec{b} = (-\beta; 1-\gamma; 1)$ не коллинеарны, то в силу результатов, полученных в примере 8, прямые (AN), (BP), (CM) имеют, и притом единственную, общую точку.

Пусть теперь выполнено соотношение (2.78), а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны:

$$\begin{vmatrix} 1-\beta & 1 \\ -\beta & 1-\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\beta & \alpha \\ -\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1-\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $1 = \gamma(1-\beta)$, $1 = \beta(1-\alpha)$, $1 = \alpha(1-\gamma)$, или

$$\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \beta = 1/(1-\alpha), \gamma = -(1-\alpha)/\alpha. \qquad (2.81)$$

Подставив значения β и γ в коэффициенты уравнений прямых, приходим к выводу, что уравнения прямых (AN), (BP), (CM) таковы: (AN): $\alpha x + y = 0$; (BP): $\alpha x + y = 1$; (CM): $\alpha x + y = \alpha$. Любые два из этих уравнений несовместны, т. е. (AN), (BP) и (CM) попарно параллельны. ▲

Если указанные в примере 9 прямые пересекаются в одной точке, то, каков бы ни был полюс O, радиус-вектор $\vec{r}$ этой точки относительно полюса O выражается через радиусы-векторы $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$, $\vec{r}_C = \overrightarrow{OC}$ по формуле

$$\vec{r} = \frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}\vec{r}_A + \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}\vec{r}_B + \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)}\vec{r}_C. \qquad (2.82)$$

Пример 10. Выведите формулу (2.82).

$\triangle$ Пусть прямые (AN), (BP), (CM) пересекаются в одной точке $Q(x;\ y)$ (и, как следствие, выполнено равенство (2.78), причем [см. (2.81)] $\alpha(1-\gamma)\neq 1$). Тогда $(x;\ y)$ — решение системы уравнений $x+(1-\gamma)y=1-\gamma$, $\alpha x+y=\alpha$. Имеем $x=\dfrac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}$, $y=\dfrac{\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}$. Следовательно, $\vec{r}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OA}+$ $+x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AB}=\vec{r}_A+x(\vec{r}_C-\vec{r}_A)+y(\vec{r}_B-\vec{r}_A)=(1-x-y)\vec{r}_A+$ $+y\vec{r}_B+x\vec{r}_C$. Далее,

$$1-x-y=\frac{1-\alpha(1-\gamma)-(1-\gamma)(1-\alpha)-\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}=\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)};$$

$$x=\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}=\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{\alpha\gamma+(1-\alpha)}=$$

$$=\frac{(1-\gamma)(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)/\beta+(1-\alpha)}=\frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)};$$

$$y=\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha(1-\gamma)}=\frac{\alpha\gamma}{(1-\alpha)(1-\gamma)+\gamma}=$$

$$=\frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma/(1-\beta)+\gamma}=\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}$$

Формула (2.82) доказана. $\blacktriangle$

Пример 11. Используя результат примера 9, докажите, что в треугольнике в одной точке пересекаются: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие его периметр пополам; д) прямые, соединяющие вершины треугольника с точками противоположных сторон, в которых этих сторон касается вписанная в треугольник окружность.

$\triangle$ Пусть $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$ (рис. 2.42).

а) По определению медианы, точки M, N, P являются основаниями медиан $[CM]$, $[AN]$, $[BP]$ тогда и только тогда, когда $\alpha=$ $=\beta=\gamma=1/2$. В этом случае $(1-\alpha)=(1-\beta)=(1-\gamma)=$ $=1/2$. Следовательно, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1/8=\alpha\beta\gamma$. Условие (2.78) выполнено. Соотношения (2.81) не выполнены ($\beta(1-\alpha)={}^1/_4\neq 1$). Следовательно, медианы треугольника пересекаются в одной точке. По формуле (2.82), радиус-вектор $\vec{r}_1$ этой точки

$$\vec{r}_1=\frac{{}^1/_2\cdot{}^1/_2}{1-{}^1/_2\cdot{}^1/_2}\vec{r}_A+\frac{{}^1/_2\cdot{}^1/_2}{1-{}^1/_2\cdot{}^1/_2}\vec{r}_B+\frac{{}^1/_2\cdot{}^1/_2}{1-{}^1/_2\cdot{}^1/_2}\vec{r}_C=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C\right).$$

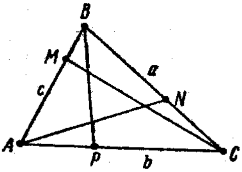


Рис. 2.42

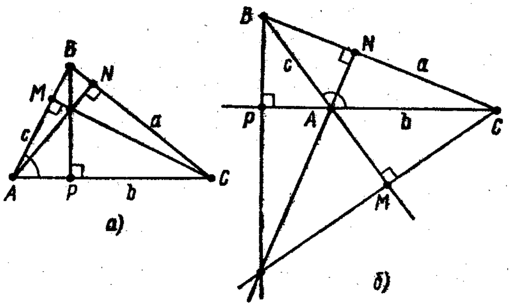


Рис. 2.43

б) Если $[AN]$, $[BP]$, $[CM]$ — биссектрисы треугольника ABC, то согласно свойству биссектрисы (см. пример 10 § 3 этой главы), $\alpha = b/(a+b)$, $1-\alpha = a/(a+b)$, $\beta = c/(b+c)$, $1-\beta = b/(b+c)$, $\gamma = a/(a+c)$, $1-\gamma = c/(a+c)$. Поэтому $\alpha\beta\gamma = \dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, т. е. условие (2.78) выполнено. Соотношения (2.81) не выполнены ($\beta(1-\alpha) = \dfrac{ac}{(a+b)(b+c)} < 1$). Следовательно, биссектрисы треугольника ABC пересекаются в одной точке. По формуле (2.82), радиус-вектор $\vec{r}_2$ этой точки

$$\vec{r}_2 = \frac{\dfrac{a}{a+c}\,\dfrac{a}{a+b}}{1-\dfrac{b}{a+b}\,\dfrac{c}{a+c}}\vec{r}_A + \frac{\dfrac{b}{a+b}\,\dfrac{b}{b+c}}{1-\dfrac{c}{b+c}\,\dfrac{a}{a+b}}\vec{r}_B +$$

$$+\frac{\dfrac{c}{b+c}\,\dfrac{c}{a+c}}{1-\dfrac{a}{a+c}\,\dfrac{b}{b+c}}\vec{r}_C = \frac{a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C}{a+b+c}.$$

в) Если $[AN]$, $[BP]$, $[CM]$ — высоты треугольника ABC, то $\alpha = \dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{|AC|\cos\widehat{A}}{|AB|} = \dfrac{b}{c}\cos\widehat{A} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{C}}\cos\widehat{A}$, если $\angle A$ — острый или прямой; если же $\angle A$ — тупой, то (рис. 2.43) $\alpha = -\dfrac{|AM|}{|AB|} = -\dfrac{|AC|}{|AB|}\cos(180^\circ - \widehat{A}) = \dfrac{b}{c}\cos\widehat{A} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{C}}\cos\widehat{A}$, т. е. во всех случаях $\alpha = \dfrac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{C}}\cos\widehat{A}$. Аналогично, $1-\alpha = \dfrac{a}{c}\cos\widehat{B} =$

$$= \frac{\sin \widehat{A}}{\sin \widehat{C}} \cos \widehat{B},\ \beta = \frac{c}{a} \cos \widehat{B} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin \widehat{A}} \cos \widehat{B},\ 1-\beta = \frac{b}{a} \cos \widehat{C} =$$

$$= \frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{A}} \cos \widehat{C},\ \gamma = \frac{a}{b} \cos \widehat{C} = \frac{\sin \widehat{A}}{\sin \widehat{B}} \cos \widehat{C},\ 1-\gamma = \frac{c}{b} \cos \widehat{A} =$$

$= \dfrac{\sin \widehat{C}}{\sin \widehat{B}} \cos \widehat{A}$. Поэтому $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = \dfrac{a}{c} \cos \widehat{B} \cdot \dfrac{b}{a} \times$ $\times \cos \widehat{C} \dfrac{c}{b} \cos \widehat{A} = \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C} = \alpha\beta\gamma$ и условие (2.78) выполнено. Соотношения (2.81) не выполнены ($\beta(1-\alpha) = \cos^2 \widehat{B} < 1$). Следовательно, *высоты треугольника пересекаются в одной точке*, называемой *ортоцентром* треугольника. Радиус-вектор $\vec{r}_3$ этой точки находим по формуле (2.82):

$$\vec{r}_3 = \frac{\dfrac{\sin^2 \widehat{A} \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}}{\sin \widehat{B} \sin \widehat{C}}}{1 - \dfrac{b}{c} \cos \widehat{A} \dfrac{c}{b} \cos \widehat{A}} \vec{r}_A + \frac{\dfrac{\sin^2 \widehat{B} \cos \widehat{A} \cos \widehat{C}}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{C}}}{1 - \dfrac{c}{a} \cos \widehat{B} \dfrac{a}{c} \cos \widehat{B}} \vec{r}_B +$$

$$+ \frac{\dfrac{\sin^2 \widehat{C} \cos \widehat{B} \cos \widehat{A}}{\sin \widehat{B} \sin \widehat{A}}}{1 - \dfrac{a}{b} \cos \widehat{C} \dfrac{b}{a} \cos \widehat{C}} \vec{r}_C =$$

$$= \operatorname{ctg} \widehat{B} \operatorname{ctg} \widehat{C}\, \vec{r}_A + \operatorname{ctg} \widehat{C} \operatorname{ctg} \widehat{A}\, \vec{r}_B + \operatorname{ctg} \widehat{A} \operatorname{ctg} \widehat{B}\, \vec{r}_C.$$

г) Если в примере 9 точки M, N, P таковы, что прямые (AN), (BP), (CM) делят (каждая) периметр треугольника $2p = a + b + c$ пополам, то $|AC| + |AM| = p$, $\alpha = \dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{p-b}{c} > 0$ (точка M лежит на отрезке $[AB]$). Аналогично, $1-\alpha = (p-a)/c$, $\beta = (p-c)/a$, $1-\beta = (p-b)/a$, $\gamma = (p-a)/b$, $1-\gamma = (p-c)/b$. Поэтому

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = \frac{p-a}{c} \frac{p-b}{a} \frac{p-c}{b} = \alpha\beta\gamma$$

и условие (2.78) выполнено. Соотношения (2.81) не выполнены, так как

$$\beta(1-\alpha) = \frac{p-c}{a} \frac{p-a}{c} = \frac{ac - p(a+c-p)}{ac} = 1 - \frac{p(p-b)}{ac} < 1.$$

Следовательно, данные прямые пересекаются в одной точке. Используя тождества

$$\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}=\frac{(p-a)^2}{bc-(p-b)(p-c)}=\frac{(p-a)^2}{p(b+c-p)}=$$

$$=\frac{(p-a)^2}{p(2p-a-p)}=\frac{p-a}{p},$$

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}=\frac{(p-b)^2}{ac-(p-c)(p-a)}=\frac{p-b}{p};\quad \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)}=\frac{p-c}{p},$$

находим радиус-вектор $\vec{r}_4$ общей точки прямых (AN), (BP) и (CM) по формуле (2.82):

$$\vec{r}_4=\frac{p-a}{p}\vec{r}_A+\frac{p-b}{p}\vec{r}_B+\frac{p-c}{p}\vec{r}_C=3\vec{r}_1-2\vec{r}_2.$$

д) Если в примере 9 M, N, P — это точки, в которых вписанная в ΔABC окружность касается его сторон $[AB]$, $[BC]$ и $[CA]$, то согласно свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем: $\alpha c=|AM|=|AP|=(1-\gamma)\,b$, $(1-\alpha)\,c=$ $=|BM|=|BN|=\beta a$, $(1-\beta)\,a=$ $=|CN|=|CP|=\gamma b$ (рис. 2.44). Из этих соотношений находим: $\alpha=$ $=(p-a)/c$, $1-\alpha=(p-b)/c$, $\beta=$ $=(p-b)/a$, $1-\beta=(p-c)/a$, $\gamma=$ $=(p-c)/b$, $1-\gamma=(p-a)/b$. Поэтому

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=$$

$$=\frac{p-b}{c}\,\frac{p-c}{a}\,\frac{p-a}{b}=\alpha\beta\gamma$$

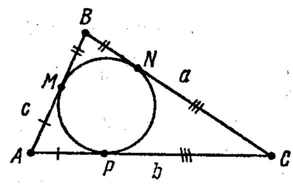


Рис. 2.44

и соотношение (2.78) выполнено. Соотношение (2.81) не выполнено, так как

$$\beta(1-\alpha)=\frac{p-b}{a}\,\frac{p-b}{c}=$$

$$=1-\frac{(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)+(p-c)(p-b)}{ac}<1.$$

Следовательно, прямые (AN), (BP), (CM) пересекаются в одной точке. Используя тождества

$$\frac{\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha(1-\gamma)}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc-(p-a)^2}=$$

$$=\frac{(p-b)(p-c)}{(p-a+p-c)(p-a+p-b)-(p-a)^2}=$$

$$=\frac{(p-b)(p-c)}{\varepsilon},\ \varepsilon=(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)+$$

$$+(p-c)(p-b);$$

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\beta(1-\alpha)}=\frac{(p-a)(p-c)}{\varepsilon};\quad \frac{\beta(1-\gamma)}{1-\gamma(1-\beta)}=\frac{(p-a)(p-b)}{\varepsilon},$$

находим радиус-вектор $\vec{r}_5$ общей точки указанных прямых:

$$\vec{r}_5=\frac{(p-b)(p-c)\vec{r}_A+(p-c)(p-a)\vec{r}_B+(p-a)(p-b)\vec{r}_C}{(p-a)(p-b)+(p-a)(p-c)+(p-b)(p-c)}$$

Пример 12*. Докажите, что если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (на плоскости или в пространстве) расположены так, что прямые, соединяющие соответственно вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1, пересекаются в одной точке O и никакие две из соответственных сторон не параллельны, то три точки пересечения соответственных сторон лежат на одной прямой.

Δ Пусть O — полюс. Положим $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC_1}=\vec{c}$. Тогда существуют известные (так как положение точек A, B, C задано) числа p, q, r такие, что $\overrightarrow{OA}=-p\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=-q\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=-r\vec{c}$. Обозначим через M точку пересечения прямых (A_1C_1) и (AC) (эти прямые пересекаются, поскольку лежат в одной плоскости (OAC) и не параллельны), через N (Q) — точку пересечения прямых (A_1B_1) и (AB) $[(B_1C_1)$ и $(BC)]$, через $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ — соответственно радиусы-векторы точек M, N, Q. Вычислим вектор $\vec{r}_1=\overrightarrow{OM}$. Точка M лежит на прямой (A_1C_1). Поэтому существует (неизвестное) такое число t, что $\vec{r}_1=t\vec{a}+(1-t)\vec{c}$. Так как $M\in(AC)$, то $\vec{r}_1=\tau(-p\vec{a})+(1-\tau)(-r\vec{c})$ при некотором $\tau\in R$. Таким образом, получена система уравнений: $\vec{r}_1=t\vec{a}+(1-t)\vec{c}$, $\vec{r}_1=-\tau p\vec{a}-(1-\tau)r\vec{c}$. Приравняв правые части этих равенств и воспользовавшись линейной независимостью векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$, получаем $t=-\tau p$, $1-t=-(1-\tau)r$.

Отсюда $\tau=(1+r)/(r-p)$, $t=-(p(1+r))/(r-p)$, так что

$$\vec{r}_1=\overrightarrow{OM}=\frac{p(1+r)}{p-r}\vec{a}+\frac{r(1+p)}{r-p}\vec{c}.$$

Аналогично,

$$\vec{r}_2=\overrightarrow{ON}=\frac{p(1+q)}{p-q}\vec{a}+\frac{q(1+p)}{q-p}\vec{b},$$

$$\vec{r}_3=\overrightarrow{OQ}=\frac{q(1+r)}{q-r}\vec{b}+\frac{r(1+q)}{r-q}\vec{c}.$$

Для векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MQ}$ получаем выражения

$$\overrightarrow{MN}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\frac{1+p}{(p-r)(p-q)}\{p(q-r)\vec{a}+q(r-p)\vec{b}+r(p-q)\vec{c}\},$$

$$\overrightarrow{MQ}=\vec{r}_3-\vec{r}_1=\frac{1+r}{(r-p)(q-r)}\{p(q-r)\vec{a}+q(r-p)\vec{b}+r(p-q)\vec{c}\}.$$

Следовательно, векторы $\overrightarrow{MQ}$ и $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны и, значит, точки M, N, Q лежат на одной прямой. ▲

Пример 13. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник, K, L, M и N — центры тяжести соответственно треугольников ABC, BCD, CDA и DAB. Докажите, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, пересекаются в той же точке, что и прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $KLMN$.

△ Пусть O — фиксированный полюс. В соответствии с результатами примера 2 для точек Q и Q', являющихся точками пересечения прямых, которые соединяют середины противоположных сторон соответственно в четырехугольниках $ABCD$ и $KLMN$, выполнены равенства $\overrightarrow{OQ} = (1/4)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OQ'} = (1/4)(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON})$. В том же примере 2 доказано, что

$\overrightarrow{OK} = (1/3)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, $\overrightarrow{OL} = (1/3)(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$,

$\overrightarrow{OM} = (1/3)(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$, $\overrightarrow{ON} = (1/3)(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Таким образом, $\overrightarrow{OQ'} = (1/4)(1/3)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = (1/4)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OQ}$, т. е. $Q' = Q$. Заметим также, что $\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OQ} = (1/12) \times (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OD}) = -(1/3)\overrightarrow{QD}$, $\overrightarrow{QL} = -(1/3)\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QM} = -(1/3)\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QN} = -(1/3)\overrightarrow{QC}$, т. е. $KLMN$ является образом $ABCD$ при гомотетии с центром Q и коэффициентом $-1/3$. ▲

Пример 14*. Длина стороны основания NPQ правильной треугольной пирамиды $MNPQ$ равна 2, длина высоты — 3. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в центре O основания пирамиды, вершина C — на высоте $[OM]$, а отрезок $[BC_1]$ лежит в плоскости (MNP). Найдите длину ребра куба.

△ Положим $|AB| = a$ и введем две системы координат: «старую» $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и «новую» $\{A, \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, положив $\vec{e}_1 = \overrightarrow{QO}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{PN}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OM}$, $\vec{e}\,'_1 = \overrightarrow{AA_1}$, $\vec{e}\,'_2 = \overrightarrow{DB}$, $\vec{e}\,'_3 = \overrightarrow{AC}$ (рис. 2.45) «Старая» система координат связана с пирамидой, «новая» — с кубом. По условию, $C \in [OM]$ и $A = O$, поэтому векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}\,'_3$ сонаправлены, и так как $|OM| = 3$, $|AC| = |AB|\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, то

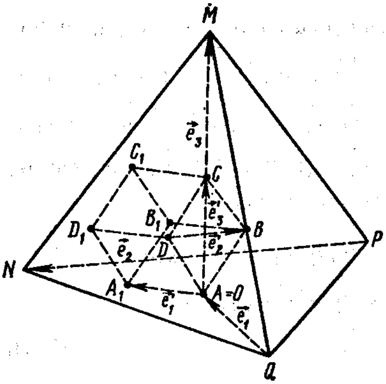


Рис. 2.45

(см. пример 7 § 3 этой главы), $\vec{e}_3' = (1/3)\, a\sqrt{2}\,\vec{e}_3$. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1', \vec{e}_2'$ компланарны: параллельны плоскости (NPQ). Следовательно, $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ — две системы координат на плоскости (NPQ). Рассмотрим подробнее эти системы координат.

Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ параллельны соответственно прямым (QO) и (PN), и так как $(QO) \perp (PN)$, то, следовательно, оси Ox и Oy системы координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ взаимно перпендикулярны. Аналогично, поскольку векторы $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ параллельны соответственно прямым (AA_1) и (DB), а $(AA_1) \perp (DB)$, оси Ox' и Oy' системы координат $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ также взаимно перпендикулярны. Итак, на плоскости (NPQ) имеются две системы координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ с общим началом O, оси каждой из которых взаимно перпендикулярны. В таком случае система координат $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ может быть получена из системы координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ либо поворотом в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) на некоторый угол φ ($0° \leqslant \varphi < 360°$) (рис. 2.46), либо поворотом на некоторый угол φ и последующей симметрией относительно оси Ox' (рис. 2.47). Какой из двух случаев реализуется, зависит от того, как (в каком порядке) занумерованы вершины грани $ABCD$ куба. На рис. 2.45 порядок нумерации таков, что имеет место второй случай.

Найдем формулы перехода от «старой» системы координат к «новой». Пусть система координат $\{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ может быть получена

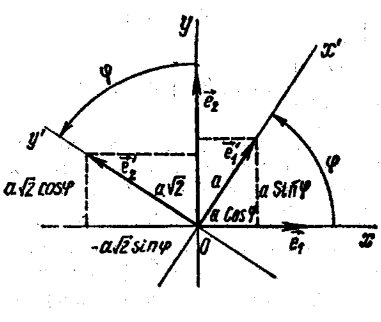


Рис. 2.46

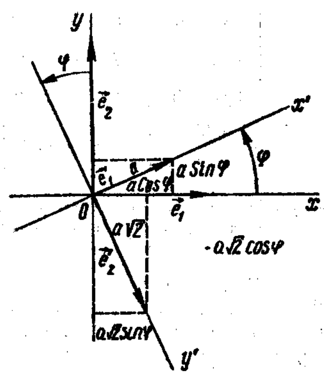


Рис. 2.47

из системы координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ поворотом на угол φ (см. рис. 2.46). Тогда так как $|\vec{e}_1|=2/\sqrt{3}$, $|\vec{e}_2|=2$, $|\vec{e}_1'|=a$, $|\vec{e}_2'|=a\sqrt{2}$, то $\vec{e}_1'=(1/2)\,a\sqrt{3}\cos\varphi\,\vec{e}_1+(1/2)\,a\sin\varphi\,\vec{e}_2$, $\vec{e}_2'=-(1/2)\,a\sqrt{6}\sin\varphi\,\vec{e}_1+(1/2)\,a\sqrt{2}\cos\varphi\,\vec{e}_2$, а поскольку $\vec{e}_3'=(1/3)\,a\sqrt{2}\,\vec{e}_3$, заключаем, что в этом случае формулы перехода имеют вид

$$\begin{aligned}
x&=(1/2)\,a\sqrt{3}\cos\varphi\, x'-(1/2)\,a\sqrt{6}\sin\varphi\, y',\\
y&=(1/2)\,a\sin\varphi\, x'+(1/2)\,a\sqrt{2}\cos\varphi\, y',\\
z&=(1/3)\,a\sqrt{2}\,z'.
\end{aligned}\tag{2.83}$$

Если же система координат $\{O, \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ может быть получена из системы координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ поворотом на угол φ и последующей симметрией относительно оси Ox' (рис. 2.47), то $\vec{e}_1{}'=(1/2)\,a\sqrt{3}\times\cos\varphi\,\vec{e}_1+(1/2)\,a\sin\varphi\,\vec{e}_2$, $\vec{e}_2'=(1/2)\,a\sqrt{6}\sin\varphi\,\vec{e}_1-(1/2)\,a\sqrt{2}\times\cos\varphi\,\vec{e}_2$, и так как по-прежнему $\vec{e}_3{}'=(1/3)\,a\sqrt{2}\,\vec{e}_3$, то в этом случае формулы перехода имеют вид

$$\begin{aligned}
x&=(1/2)\,a\sqrt{3}\cos\varphi\, x'+(1/2)\,a\sqrt{6}\sin\varphi\, y',\\
y&=(1/2)\,a\sin\varphi\, x'-(1/2)\,a\sqrt{2}\cos\varphi\, y',\\
z&=(1/3)\,a\sqrt{2}\,z'.
\end{aligned}\tag{2.84}$$

В «старой» системе координат $M\,(0;\,0;\,1)$, $N\,(1/2;\,1/2;\,0)$, $P\,(1/2;\,-1/2;\,0)$, поэтому на основании формулы (2.64) уравнение плоскости (MNP) в «старой» системе координат имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1\\ 1/2-0 & 1/2-0 & 0-1\\ 1/2-0 & -1/2-0 & 0-1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 1/2 & -1\\ -1/2 & -1\end{vmatrix}-$$

$$-y\begin{vmatrix} 1/2 & -1\\ 1/2 & -1\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x+z-1=0.$$

В «новой» системе координат $B\,(0;\,1/2;\,1/2)$, $C_1\,(1;\,0;\,1)$. Если формулы перехода от «старой» системы координат к «новой» определяются равенствами (2.83), то в «старой» системе координат $B\,((-1/4)\,a\times\sqrt{6}\sin\varphi;\ (1/4)\,a\sqrt{2}\cos\varphi;\ (1/6)\,a\sqrt{2})$, $C_1\,((1/2)\,a\sqrt{3}\cos\varphi;\ (1/2)\,a\sin\varphi;\ (1/3)\,a\sqrt{2})$. Поскольку точки B и C_1 по условию принадлежат плоскости (MNP), справедливы равенства $2\,((-1/4)\,a\times\sqrt{6}\sin\varphi)+(1/6)\,a\sqrt{2}-1=0$, $2\,((1/2)\,a\sqrt{3}\cos\varphi)+(1/3)\,a\sqrt{2}-1=0$. Отсюда находим, что $\sin\varphi=(a-$

$-3\sqrt{2})/(3a\sqrt{3})$, $\cos\varphi=(3-a\sqrt{2})/(3a\sqrt{3})$, и так как $\sin^2\varphi+$ $+\cos^2\varphi=1$, то для a получаем уравнение

$$\frac{(a-3\sqrt{2})^2}{27a^2}+\frac{(3-a\sqrt{2})^2}{27a^2}=1 \Leftrightarrow 8a^2+4\sqrt{2}a-9=0.$$

Решая это уравнение и учитывая, что $a>0$, находим $a=$ $=(2\sqrt{5}-\sqrt{2})/4$.

Если же формулы перехода от «старой» системы координат к «новой» определяются равенствами (2.84), то в «старой» системе координат $B\left(\frac{1}{4}a\sqrt{6}\sin\varphi;\ -\frac{1}{4}a\sqrt{2}\cos\varphi;\ \frac{1}{6}a\sqrt{2}\right)$, $C_1\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}\cos\varphi;\ \frac{1}{2}a\sin\varphi;\ \frac{1}{3}a\sqrt{2}\right)$. Из условий $B\in(MNP)$, $C_1\in(MNP)$ находим, что $\sin\varphi=(3\sqrt{2}-a)/(3a\sqrt{3})$, $\cos\varphi=$ $=(3-a\sqrt{2})/(3a\sqrt{3})$. Следовательно, для определения a получается то же самое уравнение, так что и в этом случае $a=(2\sqrt{5}-\sqrt{2})/4$. ▲

Глава 3

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

§ 1. Угол между векторами. Определение скалярного произведения. Теорема косинусов

Углом между ненулевыми векторами $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$ называется угол между лучами $[AB)$ и $[CD)$. Таким образом, если от одной точки O отложить векторы $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{ON}=\vec{b}$ (рис. 3.1), то величина выпуклого угла $\angle MON$ есть, по определению, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Этот угол обозначается $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$. Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не определен.

Угол между векторами может принимать значения от 0 до 180°. Если ненулевые векторы сонаправлены,то угол между ними равен 0°. Угол между ненулевыми противоположно направленными векторами равен 180°. Если угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 90°, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют *ортогональными* и пишут $\vec{a}\perp\vec{b}$ (рис. 3.2). По определению, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ также считают ортогональными, если один из них нулевой.

Пример 1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые неколлинеарные векторы. *Докажите*, что вектор $\vec{c} = \vec{a}/|\vec{a}| + \vec{b}/|\vec{b}|$ образует равные углы с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

△ Векторы $\vec{a}_1 = \vec{a}/|\vec{a}|$ и $\vec{b}_1 = \vec{b}/|\vec{b}|$ единичные: $|\vec{a}_1| = |\vec{b}_1| = 1$. Отложим их от одной точки: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}_1$ — и построим параллелограмм $OACB$ (рис. 3.3). Так как $|OA| = |OB|$, то $OACB$ — ромб. Его диагональ (OC)

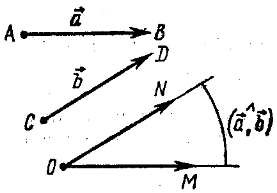


Рис. 3.1

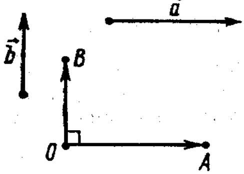


Рис. 3.2

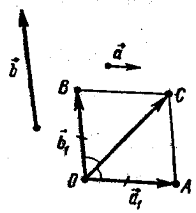


Рис. 3.3

является биссектрисой $\angle AOB$. Поэтому вектор диагонали $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$ образует равные углы с векторами $\overrightarrow{OA} = \vec{a}_1$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}_1$ и с сонаправленными им векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ▲

Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Таким образом,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Если один из векторов нулевой, то скалярное произведение по определению равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{0}) = (\vec{0}, \vec{b}) = 0.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то косинус угла между ними находится по формуле

$$\cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}. \tag{3.1}$$

Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{a})$, равное $|\vec{a}|^2$, называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $(\vec{a})^2$ или $\vec{a}^2$. Длина вектора $\vec{a}$ и его скалярный квадрат связаны соотношением

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}. \qquad (3.2)$$

Скалярное произведение векторов положительно, если угол между ними острый, и отрицательно, если угол между векторами тупой.

Пример 2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\widehat{B} = 90°$) $|AC| = b$, $\widehat{A} = \alpha$. Найдите $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

$\triangle$ Имеем: $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) = \widehat{C} = 90° - \alpha$; $|\overrightarrow{CB}| = b \sin\alpha$, $|\overrightarrow{CA}| = b$. Поэтому

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = |\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}| \cos(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) = $$
$$= b \sin\alpha\, b \cos(90° - \alpha) = b^2 \sin^2\alpha. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Докажите, что скалярное произведение векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны.

$\triangle$ Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, т. е. $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = $$
$$= 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то, по определению, они ортогональны. Также, по определению, $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. $\blacktriangle$

Пример 4 (теорема косинусов). Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы следующие равенства:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}), \qquad (3.3)$$
$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}). \qquad (3.4)$$

$\square$ Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Случай 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Рассмотрим параллелограмм $OBCA$ (рис. 3.4—3.6). Обозначим $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$, $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, M и N — основания перпендикуляров, опущенных на прямую (OA) соответственно из точек B и C. По теореме Пифагора, для прямоугольных треугольников AMB и ONC

$$|AB|^2 = |AM|^2 + |MB|^2,\ |OC|^2 = |ON|^2 + |NC|^2. \quad (3.5)$$

Если угол φ острый (рис. 3.4), то $|AM| = |OA| - |OM| = a - b\cos\varphi$, $|MB| = |NC| = b\sin\varphi$, $|ON| = |OA| + |AN| = a + b\cos\varphi$. Если $\varphi = 90°$ (рис. 3.5),

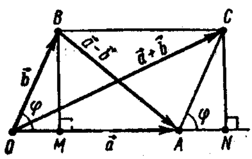


Рис. 3.4

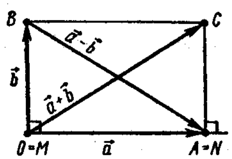


Рис. 3.5

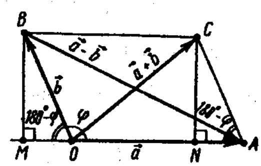


Рис. 3.6

то $|AM| = |OA| = a = a - b\cos\varphi$, $|MB| = |NC| = b = b\sin\varphi$, $|ON| = |OA| = a = a + b\cos\varphi$. Если угол φ тупой (рис. 3.6), то $|AM| = |OA| + |OM| = a + b\cos(180° - \varphi) = a - b\cos\varphi$, $|MB| = |NC| = b\sin(180° - \varphi) = b\sin\varphi$, $|ON| = |OA| - |AN| = a + b\cos\varphi$. Таким образом, во всех случаях $|AM| = a - b\cos\varphi$, $|MB| = |NC| = b\sin\varphi$, $|ON| = a + b\cos\varphi$. Поэтому по формулам (3.5) имеем

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |AB|^2 = (a - b\cos\varphi)^2 + (b\sin\varphi)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}),$$

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = |OC|^2 = (a + b\cos\varphi)^2 + (b\sin\varphi)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}).$$

Случай 2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то соотношения (3.3) и (3.4) очевидны: $(\vec{a} \pm \vec{0})^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{0}^2 \pm 2(\vec{a}, \vec{0})$. Если же $\vec{b} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{a} = k\vec{b}$. Тогда $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = |\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |(k \pm 1)\vec{b}|^2 = (|k \pm 1||\vec{b}|)^2 = (k \pm 1)^2|\vec{b}|^2 = (k^2 + 1 \pm 2k)|\vec{b}|^2 =$

$= (|k||\vec{b}|)^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2k|\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \pm 2k|\vec{b}|^2$. Если $k > 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены и $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 0° = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 1 = |k\vec{b}||\vec{b}| = |k||\vec{b}||\vec{b}| = k|\vec{b}|^2$. Если $k = 0$, т. е. $\vec{a} = \vec{0}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 = 0 \cdot |\vec{b}|^2 = k|\vec{b}|^2$. Если $k < 0$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 180° = |k\vec{b}||\vec{b}| \cdot (-1) = |k||\vec{b}||\vec{b}| \cdot (-1) = k|\vec{b}|^2$. Таким образом, во всех этих случаях $2k|\vec{b}|^2 = 2(\vec{a}, \vec{b})$ так что $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \pm 2(\vec{a}, \vec{b})$. ■

Пример 5. Докажите, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

△ Если $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ — векторы сторон параллелограмма $OACB$ (рис. 3.4—3.6), то $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$ и $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB}$ — векторы его диагоналей. Складывая почленно равенства (3.3) и (3.4), получаем

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + \vec{b})^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2. \tag{3.6}$$

Поскольку $|BC| = |OA| = |\vec{a}|$, $|AC| = |OB| = |\vec{b}|$, по формуле (3.6) получаем

$$|AB|^2 + |OC|^2 = (|OA|^2 + |BC|^2) + (|OB|^2 + |AC|^2). \quad ▲$$

Пример 6. Дано: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и угол $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

△ По формуле (3.6),

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2} = \sqrt{2 \cdot 121 + 2 \cdot 529 - 900} = 20.$$

По теореме косинусов [см. формулу (3.3)], $(\vec{a}, \vec{b}) = (1/2)(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2) = -125$. Следовательно,

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\frac{125}{253}, \text{ т. е.}$$

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180° - \arccos\frac{125}{253}. \quad ▲$$

Пример 7. Найдите длины диагоналей ромба $OBCA$ (см. рис. 3.3), у которого длины сторон равны единице, а $\widehat{AOB} = \arcsin\frac{24}{25}$.

$\triangle$ По теореме косинусов, $|\overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = 2 - 2\cos\widehat{AOB}$. Поскольку $\angle AOB$ острый, $\cos\widehat{AOB} = \sqrt{1 - \sin^2\widehat{AOB}} = \sqrt{1-(24/25)^2} = 7/25$. Поэтому $|AB| = \sqrt{2 - 2\cdot 7/25} = 6/5$. Аналогично, $|OC| = \sqrt{2 + 2\cos\widehat{AOB}} = 8/5$. $\blacktriangle$

Пример 8. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

$\triangle$ По формулам (3.3)—(3.4),

$$(1/4)(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = (1/4)((\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})) - (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}))) = (\vec{a}, \vec{b}). \tag{3.7}$$

Следовательно, равенство $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ выполнено тогда и только тогда, когда $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, т. е. когда $\vec{a} \perp \vec{b}$ (см. пример 3). $\blacktriangle$

Пример 9. Докажите, что $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

$\triangle$ Пусть $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$, т. е. $\vec{a} = (1/2)(\vec{x} + \vec{y})$, $\vec{b} = (1/2)(\vec{x} - \vec{y})$. Тогда $|\vec{a}| = (1/2)|\vec{x} + \vec{y}|$, $|\vec{b}| = (1/2)|\vec{x} - \vec{y}|$ и по формуле (3.7) имеем

$$\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (1/4)(|\vec{x} + \vec{y}|^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2) = (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}). \ \blacktriangle$$

Пример 10. В треугольнике ABC $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$. Найдите длину медианы $[CM]$.

$\triangle$ Обозначим $m_c = |CM|$. Поскольку $\overrightarrow{CM} = (1/2) \times (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$, по формуле (3.4) находим $m_c^2 = (1/4) \times (b^2 + a^2 + 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}))$. Из равенства $c^2 = |AB|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}|^2 = a^2 + b^2 - 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ находим

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = (1/2)(a^2 + b^2 - c^2). \tag{3.8}$$

Следовательно, $m_c^2 = (1/4)(b^2 + a^2 + a^2 + b^2 - c^2)$, т. е.

$$m_c^2 = (1/4)(2a^2 + 2b^2 - c^2). \ \blacktriangle \tag{3.9}$$

Пример 11. В треугольнике ABC заданы длины сторон: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Проверьте, что

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (1/2)(a^2 + b^2 + c^2). \tag{3.10}$$

$\triangle$ По формуле (3.8), $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (1/2)(a^2 + b^2 - c^2)$. Аналогично, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (1/2)(a^2 + c^2 - b^2)$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (1/2)(b^2 + c^2 - a^2)$. Складывая все три равенства почленно, получаем (3.10). $\blacktriangle$

Пример 12. В треугольнике ABC m_a, m_b, m_c — длины медиан, проведенных соответственно из вершин A, B, C. Докажите, что $\angle C$ тупой тогда и только тогда, когда

$$m_c^2 < \frac{m_a^2 + m_b^2}{5}.$$

$\triangle$ Угол $\angle C$ тупой тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) < 0$, т. е. $x = a^2 + b^2 - c^2 < 0$ [в силу (3.8)]. По формуле (3.9), $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$. Аналогично, $4m_b^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$, $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Складывая эти равенства почленно, имеем $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. Поэтому $3c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4m_c^2$, т. е. $c^2 = (4/9)(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2)$. Аналогично, $a^2 = (4/9)(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2)$, $b^2 = (4/9)(2m_c^2 + 2m_a^2 - m_b^2)$. Отсюда $x = a^2 + b^2 - c^2 = (4/9)(5m_c^2 - m_a^2 - m_b^2)$, т. е. $x < 0 \iff 5m_c^2 < m_a^2 + m_b^2$. $\blacktriangle$

Пример 13 (ф о р м у л а Г е р о н а). Выразите площадь треугольника ABC через длины его сторон $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

$\triangle$ Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$, S — площадь $\triangle ABC$. Известно, что $S = (1/2)\, ab \sin\varphi$. Поэтому $S^2 = (1/4)a^2b^2(1 - \cos^2\varphi) = (1/4)(a^2b^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2)$. По формуле (3.8), $(\vec{a}, \vec{b}) = (1/2)(a^2 + b^2 - c^2)$. Следовательно,

$$S^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(ab + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right) \times$$

$$\times \left(ab \quad \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right) = \frac{1}{16}((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2) =$$

$$= \frac{1}{16}(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b).$$

Обозначая $p = (1/2)(a+b+c)$, находим $a+b-c = 2(p-c)$, $c+a-b = 2(p-b)$, $c-a+b = 2(p-a)$, так что

$$S^2 = \frac{1}{16} 2p2(p-c)2(p-b)2(p-a) =$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c), \text{ т. е. } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \blacktriangle$$

§ 2. Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа λ справедливы соотношения:

1°. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (коммутативность).

2°. $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$.

3°. $(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ (дистрибутивность).

□ Свойство 1° следует из определения скалярного произведения и того факта, что для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \widehat{(\vec{b}, \vec{a})}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то при любом λ свойство 2° следует из определения скалярного произведения. Оно также справедливо при любых $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\lambda = 0$. Осталось рассмотреть случай $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Обозначим $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.

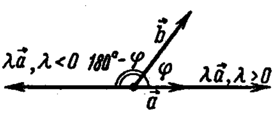


Рис. 3.7

Тогда если $\lambda > 0$, то $\widehat{(\lambda\vec{a}, \vec{b})} = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ (рис. 3.7), поэтому $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \cos \widehat{(\lambda\vec{a}, \vec{b})} = \lambda|\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$. Если же $\lambda < 0$, то $\widehat{(\lambda\vec{a}, \vec{b})} = 180° - \varphi$ (рис. 3.7) и $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \cos \widehat{(\lambda\vec{a}, \vec{b})} = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}| \cos(180° - \varphi) = (-\lambda) \times |\vec{a}||\vec{b}|(-\cos\varphi) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$ Свойство 2° доказано.

Для доказательства свойства 3° используем формулу

$$0 = (\vec{m} + \vec{n})^2 + (\vec{m} - \vec{n})^2 - 2(\vec{m}^2 + \vec{n}^2) \qquad (3.11)$$

[см. формулу (3.6)], в которой положим $\vec{m} = (\vec{a} + \vec{b})/2 + \vec{c}$, $\vec{n} = (\vec{a} - \vec{b})/2$. Имеем $\vec{m} + \vec{n} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{m} - \vec{n} = \vec{b} + \vec{c}$. По теореме косинусов,

$$(\vec{m} + \vec{n})^2 = (\vec{a} + \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{c}),$$

$$(\vec{m} - \vec{n})^2 = (\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{b}, \vec{c}),$$

$$\vec{m}^2 = \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \vec{c}\right)^2 = \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2 + \vec{c}^2 + 2\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \vec{c}\right).$$

Согласно свойству 2° скалярного произведения, $2\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \vec{c}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c})$.

Далее, $\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2 = \left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}|^2 =$

$= \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}))$. Аналогично, $\vec{n}^2 = \left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}))$ [см. формулу (3.3)].

Подставляя полученные выражения в формулу (3.11), получаем

$$0 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{c}) + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{b}, \vec{c}) -$$
$$- 2\left(\left(\frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})) + \vec{c}^2 + (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c})\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}))\right) = 2((\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) -$$
$$- (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c})), \ (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}). \quad \blacksquare$$

Пример 1. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и любых чисел x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 верны следующие равенства:

$$(x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}, \vec{q}) = x_1(\vec{a}, \vec{q}) + y_1(\vec{b}, \vec{q}) + z_1(\vec{c}, \vec{q}), \qquad (3.12)$$

$$(\vec{p}, x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}) = x_2(\vec{p}, \vec{a}) + y_2(\vec{p}, \vec{b}) + z_2(\vec{p}, \vec{c}), \tag{3.13}$$

$$(x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}, x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}) = x_1x_2\vec{a}^2 + y_1y_2\vec{b}^2 + \\ + (x_1y_2 + x_2y_1)(\vec{a}, \vec{b}) + z_1z_2\vec{c}^2 + (x_1z_2 + x_2z_1)(\vec{a}, \vec{c}) + \\ + (y_1z_2 + y_2z_1)(\vec{b}, \vec{c}) \tag{3.14}$$

[формулы (3.12), (3.13) означают, что скалярное произведение обладает **свойством линейности по каждому из сомножителей**, формула (3.14) — общая формула для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$].

□ Согласно свойству 3°, $(x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}, \vec{q}) = (x_1\vec{a} + (y_1\vec{b} + z_1\vec{c}), \vec{q}) = (x_1\vec{a}, \vec{q}) + (y_1\vec{b} + z_1\vec{c}, \vec{q}) = x_1(\vec{a}, \vec{q}) + (y_1\vec{b}, \vec{q}) + (z_1\vec{c}, \vec{q}) = x_1(\vec{a}, \vec{q}) + y_1(\vec{b}, \vec{q}) + z_1(\vec{c}, \vec{q})$ (здесь использовано свойство 2°). Равенство (3.12) доказано.

На основании свойства 1° и формулы (3.12) $(\vec{p}, x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}) = (x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}, \vec{p}) = x_2(\vec{a}, \vec{p}) + y_2(\vec{b}, \vec{p}) + z_2(\vec{c}, \vec{p}) = x_2(\vec{p}, \vec{a}) + y_2(\vec{p}, \vec{b}) + z_2(\vec{p}, \vec{c})$. Равенство (3.13) доказано.

Обозначая $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, $\vec{q} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$, получим на основании формул (3.12), (3.13)

$$(\vec{p}, \vec{q}) = (x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}, \vec{q}) = x_1(\vec{a}, \vec{q}) + y_1(\vec{b}, \vec{q}) + \\ + z_1(\vec{c}, \vec{q}) = x_1(\vec{a}, x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}) + y_1(\vec{b}, x_2\vec{a} + \\ + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}) + z_1(\vec{c}, x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}) = \\ = x_1(x_2(\vec{a}, \vec{a}) + y_2(\vec{a}, \vec{b}) + z_2(\vec{a}, \vec{c})) + \\ + y_1(x_2(\vec{a}, \vec{b}) + y_2(\vec{b}, \vec{b}) + z_2(\vec{b}, \vec{c})) + \\ + z_1(x_2(\vec{a}, \vec{c}) + y_2(\vec{b}, \vec{c}) + z_2(\vec{c}, \vec{c})) = x_1x_2\vec{a}^2 + y_1y_2\vec{b}^2 + \\ + (x_1y_2 + x_2y_1)(\vec{a}, \vec{b}) + z_1z_2\vec{c}^2 + (x_1z_2 + x_2z_1)(\vec{a}, \vec{c}) + \\ + (y_1z_2 + y_2z_1)(\vec{b}, \vec{c}).$$

Формула (3.14) доказана. ■ При $\vec{c}=\vec{0}$ она принимает вид

$$(x_1\vec{a}+y_1\vec{b},\ x_2\vec{a}+y_2\vec{b}) = x_1x_2\vec{a}^2+y_1y_2\vec{b}^2+ \\ +(x_1y_2+x_2y_1)(\vec{a},\vec{b}). \qquad (3.15)$$

Пример 2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$. Вычислите величину $\mu=(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$, если $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=2$.

△ Так как $-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, то $4=\vec{c}^2=(-\vec{c},-\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2(\vec{a},\vec{b})+2(\vec{b},\vec{c})+2(\vec{c},\vec{a})=1+16+4+2\mu$. Таким образом, $\mu=-17/2$. ▲

Пример 3. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные векторы. Вычислите $(3\vec{a}-4\vec{b},2\vec{a}+5\vec{b})$, если $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$.

△ $3=|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2(\vec{a},\vec{b})=1+1+2(\vec{a},\vec{b})$. Отсюда $(\vec{a},\vec{b})=1/2$. Следовательно, по формуле (3.15),

$$(3\vec{a}-4\vec{b},2\vec{a}+5\vec{b})=6\vec{a}^2-20\vec{b}^2+7(\vec{a},\vec{b})=6-20+ \\ +7/2=-21/2. \ ▲$$

Пример 4. Дано: $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=120°$. Найдите длины векторов $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$, их скалярное произведение и угол φ между ними.

△ $(\vec{a},\vec{b})=3\cdot2\cdot\cos120°=-3$. По формуле (3.15), $|\vec{p}|^2=(\vec{p},\vec{p})=(\vec{a}+2\vec{b},\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}^2+4(\vec{a},\vec{b})+4\vec{b}^2=9+(-12)+16=13$, т. е. $|\vec{p}|=\sqrt{13}$; $|\vec{q}|^2=(\vec{q},\vec{q})=(2\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}-\vec{b})=4\vec{a}^2-4(\vec{a},\vec{b})+\vec{b}^2=52$, т. е. $|\vec{q}|=2\sqrt{13}$;

$$(\vec{p},\vec{q})=(\vec{a}+2\vec{b},2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}^2+3(\vec{a},\vec{b})-2\vec{b}^2=$$

$$=18+(-9)-8=1,\quad \cos\varphi=(\vec{p},\vec{q})/(|\vec{p}||\vec{q}|)=$$

$$=1/(\sqrt{13}\cdot2\sqrt{13})=1/26,\ \varphi=\arccos(1/26). \ ▲$$

Пример 5. Длины ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны. Найдите угол φ между этими векторами, если известно, что векторы $\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{q}=5\vec{a}+3\vec{b}$ ортогональны.

△ Так как $\vec{p} \perp \vec{q}$, то $0 = (\vec{p}, \vec{q}) = (\vec{a} + 3\vec{b}, 5\vec{a} + 3\vec{b}) = 5\vec{a}^2 + 18(\vec{a}, \vec{b}) + 9\vec{b}^2 = 5|\vec{a}|^2 + 18|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 9|\vec{b}|^2$. Учитывая, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, находим отсюда $\cos\varphi = -7/9$, т. е. $\varphi = 180° - \arccos(7/9)$. ▲

Пример 6. В треугольнике ABC проведены медианы $[AD]$, $[BE]$ и $[CF]$. Вычислите величину $\lambda = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF})$.

△ Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Тогда $\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = -\vec{a} + (1/2)\vec{b}$, $\overrightarrow{BE} = (1/2)\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CF} = (1/2)(\vec{a} + \vec{b})$. Следовательно, по формуле (3.15),

$$\lambda = (-\vec{b}, -\vec{a} + (1/2)\vec{b}) + (\vec{a}, (1/2)\vec{a} - \vec{b}) +$$
$$+ (\vec{b} - \vec{a}, (1/2)\vec{a} + (1/2)\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) - (1/2)\vec{b}^2 + (1/2)\vec{a}^2 -$$
$$- (\vec{a}, \vec{b}) - (1/2)\vec{a}^2 + (1/2)\vec{b}^2 = 0. \ ▲$$

Пример 7. Докажите, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости или в пространстве имеет место равенство $\mu = 0$, где $\mu = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

△ Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$. Тогда $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = -\vec{c}$. Следовательно,

$$\mu = (\vec{c} - \vec{b}, -\vec{a}) + (\vec{a} - \vec{c}, -\vec{b}) + (\vec{b} - \vec{a}, -\vec{c}) =$$
$$= -(\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) - (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c}) = 0. \ ▲$$

Пример 8. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $\widehat{BAA_1} = \alpha$, $\widehat{CAA_1} = \beta$ (рис. 3.8). Найдите $\widehat{BCC_1}$.

$$△ \cos \widehat{BCC_1} = \frac{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CC_1})}{|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{CC_1}|} = \frac{(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1})}{|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{AA_1}|} =$$
$$= \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}) - (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1})}{|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{AA_1}|} = (|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AA_1}|\cos\alpha -$$
$$-|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AA_1}|\cos\beta)/(|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{AA_1}|) = (c\cos\alpha - b\cos\beta)/a.$$

В частности, если $\triangle ABC$ — правильный, то $\cos\alpha - \cos\beta = \cos\widehat{BCC_1}$. ▲

Пример 9. В прямоугольной трапеции $ABCD$ диагонали взаимно перпендикулярны, а отношение длин оснований $|BC| : |AD| = \lambda$. Найдите отношение длин диагоналей.

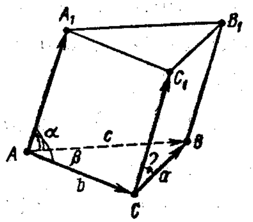


Рис. 3.8

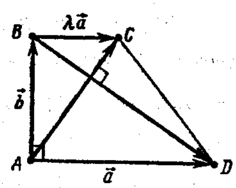


Рис. 3.9

△ Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 3.9). Тогда $\overrightarrow{BC} = \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b}$. По условию, $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ и $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 0$, т. е. $0 = (\vec{b} + \lambda\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}) = \lambda\vec{a}^2 + (1 - \lambda)(\vec{a}, \vec{b}) - \vec{b}^2 = \lambda\vec{a}^2 - \vec{b}^2$. Таким образом, $\vec{b}^2 = \lambda\vec{a}^2$, а искомое отношение равно

$$|AC| : |BD| = \sqrt{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC})/(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD})} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\vec{b} + \lambda\vec{a}, \vec{b} + \lambda\vec{a})}{(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})}} = \sqrt{\frac{\vec{b}^2 + 2\lambda(\vec{a}, \vec{b}) + \lambda^2\vec{a}^2}{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b})}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\vec{b}^2 + \lambda^2\vec{a}^2}{\vec{a}^2 + \vec{b}^2}} = \sqrt{\frac{\lambda\vec{a}^2 + \lambda^2\vec{a}^2}{\vec{a}^2 + \lambda\vec{a}^2}} = \sqrt{\lambda}. \ ▲$$

Пример 10. Определите угол между диагоналями $[AC]$ и $[BD]$ выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$.

△ Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ и, по условию, $(\vec{b} - \vec{a})^2 + \vec{c}^2 = (\vec{c} - \vec{b})^2 + \vec{a}^2$, т. е. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{b})$. Поэтому $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = (\vec{c} - \vec{a}, -\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{c}, \vec{b}) = 0$. Значит, диагонали $[AC]$ и $[BD]$ перпендикулярны. ▲

Пример 11. **Выразите вектор биссектрисы $\vec{l} = \overrightarrow{CL}$ треугольника** ABC через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ его сторон и их длины $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$.

$\triangle$ Углы $\widehat{ACL}$ и $\widehat{LCB}$ (рис. 3.10) равны, поэтому равны их косинусы: $(\vec{b}, \vec{l})/(|\vec{b}||\vec{l}|) = (\vec{a}, \vec{l})/(|\vec{a}||\vec{l}|)$, т. е. $0 = (a\vec{b} - b\vec{a}, \vec{l})$. Точка L делит отрезок $[AB]$ в некотором (неизвестном) отношении $\lambda = |AL| : |AB|$. Поэтому $\vec{l} = (\vec{a} + \lambda\vec{b})/(\lambda + 1)$ и, следовательно, $0 = a(\vec{a}, \vec{b}) - ba^2 + \lambda ab^2 - \lambda b(\vec{a}, \vec{b})$. Таким образом, $\lambda = a(ab - (\vec{a}, \vec{b}))/(b(ab - (\vec{a}, \vec{b}))) = a/b$, так как $ab - (\vec{a}, \vec{b}) = ab(1 - \cos\widehat{C}) > 0$, и

$$\vec{l} = \frac{\vec{a} + (a/b)\vec{b}}{1 + (a/b)} = \frac{a\vec{b} + b\vec{a}}{a + b}. \ \blacktriangle$$

Пример 12. **Выразите длину биссектрисы $[CL]$ треугольника** ABC **через длины его сторон** $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

$\triangle$ Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$. Тогда $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$. По формуле из примера 11, $\overrightarrow{CL} = (a\vec{b} + b\vec{a})/(a + b)$. Поэтому

$$|\overrightarrow{CL}|^2 = \frac{1}{(a+b)^2}(a\vec{b} + b\vec{a})^2 = \frac{1}{(a+b)^2}((a\vec{b})^2 + (b\vec{a})^2 + 2(a\vec{b}, b\vec{a})) = \frac{1}{(a+b)^2}(2a^2b^2 + 2ab(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{2ab}{(a+b)^2}(ab + (\vec{a}, \vec{b})).$$

В силу формулы (3.8) $(\vec{a}, \vec{b}) = (1/2)(a^2 + b^2 - c^2)$. Следовательно,

$$|\overrightarrow{CL}|^2 = \frac{2ab}{(a+b)^2}\,\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2} = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}. \ \blacktriangle$$

Пример 13. Докажите, что если в треугольнике ABC длины двух биссектрис равны, то этот треугольник — равнобедренный.

$\triangle$ Если $[CL]$ и $[AM]$ — биссектрисы углов соответственно $\angle C$ и $\angle A$, то по формуле из примера 12 имеем

$$|CL|^2 = ab - abc^2/(a + b)^2, \quad |AM|^2 = bc - bca^2/(b + c)^2.$$

Таким образом, если $|CL| = |AM|$, то $a - ac^2/(a+b)^2 = c - ca^2/(b+c)^2$, или

$$a-c=\frac{ac\,(c\,(b+c)^2-a\,(a+b)^2)}{(a+b)^2\,(b+c)^2}=$$
$$=\frac{ac\,(c^3-a^3+2b\,(c^2-a^2)+b^2\,(c-a))}{(a+b)^2\,(b+c)^2}.$$

Отсюда

$$(a-c)\left(1+\frac{ac\,(c^2+ac+a^2+2b\,(c+a)+b^2)}{(a+b)^2\,(b+c)^2}\right)=0, \text{ т. е. } a=c. \blacktriangle$$

Пример 14. В треугольнике ABC медиана $[CM]$ перпендикулярна биссектрисе $[AL]$, причем $|CM| : |AL| = n$. Найдите угол $\widehat{A}$.

$\triangle$ Обозначим $\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $b = |\vec{b}|$, $c = |\vec{c}|$, $\widehat{A} = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}})$. Тогда $\overrightarrow{CM} = \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{AL} = (2b\vec{c} + c2\vec{b})/(2b + c)$ (см. пример 11). По условию, $(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{CM}) = 0$, т. е. $0 = (2b\vec{c} + 2c\vec{b}, \vec{b} - \vec{c}) = 2\,(cb^2 - bc^2 + (b - c)\,(\vec{b}, \vec{c})) = 2\,(b - c)bc\,(1 + \cos\widehat{A})$. Так как $0° < \widehat{A} < 180°$, то

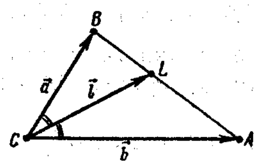


Рис. 3.10

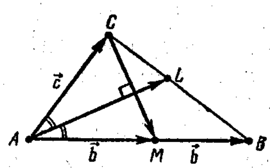


Рис. 3.11

$bc\,(1 + \cos\widehat{A}) \neq 0$ и, значит, $b = c$. [В этом можно было убедиться и геометрически (рис. 3.11): по условию задачи, в $\triangle ACM$ биссектриса $\angle A$ является и высотой, а значит, треугольник ACM равнобедренный: $|AC| = |AM|$.]

Таким образом,

$$\overrightarrow{AL} = (2/3)\,(\vec{b} + \vec{c}),\ |AL|^2 = (4/9)\,(\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\,(\vec{b}, \vec{c})) =$$
$$= (4/9)\,(2b^2 + 2b^2\cos\widehat{A}) = (8/9)b^2\,(1 + \cos\widehat{A}),\ |CM|^2 =$$
$$= (\vec{b} - \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\,(\vec{b}, \vec{c}) = 2b^2 - 2b^2\cos\widehat{A} =$$
$$= 2b^2\,(1 - \cos\widehat{A}).$$

Следовательно,

$$n^2 = |CM|^2 : |AL|^2 = \frac{9\,(1-\cos\widehat{A})}{4\,(1+\cos\widehat{A})}.$$

Отсюда находим $\cos\widehat{A} = (9 - 4n^2)/(9 + 4n^2)$. ▲

Пример 15. В треугольнике ABC $|AC| = 1$, $|BC| = 2$, $\widehat{C} = \arccos(3/4)$. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ векторы высот $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AE}$ (рис. 3.12).

△ Обозначим $\overrightarrow{CD} = \vec{h}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{H}$. Векторы $\vec{h} - \vec{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ коллинеарны. Поэтому сущест-

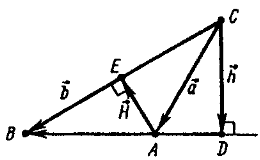


Рис. 3.12

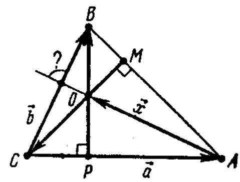


Рис. 3.13

вует такое число t, что $\vec{h} - \vec{a} = t\,(\vec{b} - \vec{a})$. Найдем t из условия ортогональности векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB}$: $0 = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = (\vec{h}, \vec{b} - \vec{a}) = (\vec{a} + t\,(\vec{b} - \vec{a}), \vec{b} - \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}) - \vec{a}^2 + t\,(\vec{b} - \vec{a})^2$. Отсюда

$$t = \frac{\vec{a}^2 - (\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\,(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{a\,(a - b\cos\widehat{C})}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}} = \frac{1 - 1\cdot 2\cdot 3/4}{1 + 4 - 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3/4} = -\frac{1}{4},$$

так как $a = |\vec{a}| = 1$, $b = |\vec{b}| = 2$. Следовательно, $\vec{h} = \vec{a} - (1/4)(\vec{b} - \vec{a}) = (5\vec{a} - \vec{b})/4$. Аналогично, вектор $\vec{H} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$ можно представить в виде $\vec{H} = -\vec{a} + \lambda\vec{b}$, где число λ находится из условия $(\vec{H}, \vec{b}) = 0$: $-(\vec{a}, \vec{b}) + \lambda\vec{b}^2 = 0$, т. е. $\lambda = (\vec{a}, \vec{b})/b^2 = (a\cos\widehat{C})/b = 3/8$. Значит, $\vec{H} = -\vec{a} + (3/8)\vec{b}$. ▲

Пример 16. Докажите, что в треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

□ Проведем в треугольнике ABC (рис. 3.13) высоты $[CM]$ и $[BP]$ и обозначим через O точку пересечения прямых (CM) и (BP). Для доказательства утверждения примера достаточно установить, что прямая (AO) перпендикулярна прямой (BC), т. е. что $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}) = 0$. Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{x} = \overrightarrow{AO}$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = -\vec{x} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{x} - \vec{a}$. По определению высоты, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}) = 0$, т. е. $(-\vec{x} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}) = 0$. Отсюда $(\vec{x}, \vec{a}) - (\vec{x}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) - \vec{a}^2$. Аналогично, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA}) = 0$, т. е. $(\vec{b} - \vec{x} - \vec{a}, \vec{a}) = 0$. Отсюда $(\vec{x}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}) - \vec{a}^2$. Таким образом, $(\vec{x}, \vec{a}) = (\vec{x}, \vec{a}) - (\vec{x}, \vec{b})$ и, значит, $(\vec{x}, \vec{b}) = 0$, т. е. $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}) = 0$. ■

Пример 17. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F — середины ребер соответственно $[AD]$ и $[CB]$. Докажите, что векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{FE}$ и $\overrightarrow{CB}$ попарно ортогональны, причем $|FE| = \frac{|AD|}{\sqrt{2}}$.

△ Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, $a = |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Так как $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = 60°$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = (1/2)a^2$. Значит, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = (-\vec{a}, \vec{b} - \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}) = 0$, т. е. $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CB}$. Далее, $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = (1/2)\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} + (1/2)\overrightarrow{DA} = (1/2)(\vec{b} - \vec{c}) - \vec{b} + (1/2)\vec{a} = (1/2)(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$. Поэтому

$$|FE| = (1/2)|\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}| = (1/2)\sqrt{(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{a} - \vec{b} - \vec{c})} =$$
$$= (1/2)\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) - 2(\vec{a}, \vec{c}) + 2(\vec{b}, \vec{c})} =$$
$$= (1/2)\sqrt{3a^2 - 2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|AD|.$$

Наконец, $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{AD}) = (1/2)(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, -\vec{a}) = (1/2)(-\vec{a}^2 + (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})) = 0$ и $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{CB}) = (1/2)(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}) = (1/2)((\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{a}, \vec{c}) - \vec{b}^2 + \vec{c}^2) = 0$, т. е. $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{CB}$. ▲

Пример 18. Точки E и F — середины ребер $[AD]$ и $[BC]$ пирамиды $ABCD$. Докажите, что равенства $|BD| =$

$= |AC|$ и $|AB| = |CD|$ выполнены одновременно тогда и только тогда, когда отрезок $[EF]$ перпендикулярен как $[BC]$, так и $[AD]$.

□ Выберем в качестве базисных векторы $\vec{a} = \overrightarrow{ED}$, $\vec{b} = \overrightarrow{EF}$, $\vec{c} = \overrightarrow{FC}$. Тогда $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Значит, $|BD| = |AC|$ тогда и только тогда, когда $(\vec{c} - \vec{b} + \vec{a})^2 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$, или (см. пример 8 предыдущего параграфа) $(\vec{b}, \vec{a} + \vec{c}) = 0$. Аналогично, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{CD} = -\vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$, а равенство $|AB| = |CD|$ эквивалентно соотношению $(\vec{b}, \vec{a} - \vec{c}) = 0$. Таким образом,

$$\begin{cases} |BD| = |AC|, \\ |AB| = |CD| \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) = 0, \\ (\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{b}, \vec{c}) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\vec{a}, \vec{b}) = 0, \\ (\vec{b}, \vec{c}) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{b} \perp \vec{a}, \\ \vec{b} \perp \vec{c}. \end{cases} \blacksquare$$

Пример 19. В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и E — середины ребер $[AC]$ и $[AB]$ соответственно, N — точка пересечения медиан грани BCD. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{DE}$.

△ Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, $a = |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Тогда

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = a^2/2, \ \overrightarrow{DE} = (1/2)(\vec{a} + \vec{b}),$$

$$\overrightarrow{DM} = (1/2)(\vec{a} + \vec{c}), \ \overrightarrow{DN} = (2/3)(1/2)(\vec{b} + \vec{c}) =$$

$$= (1/3)(\vec{b} + \vec{c}).$$

Поэтому $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = -(1/6)(3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$, $(6|\overrightarrow{MN}|)^2 = (3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}, \ 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) = 9\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 12(\vec{a}, \vec{b}) + 6(\vec{a}, \vec{c}) - 4(\vec{b}, \vec{c}) = 14a^2 - 10(\vec{a}, \vec{b}) = 9a^2$, $|\overrightarrow{MN}| = a/2$, $|\overrightarrow{DE}| = (1/2)\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})} = (a\sqrt{3})/2$. По формуле (3.14),

$$(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{MN}) = -(1/12)(\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) =$$

$$= -(1/12)(3\vec{a}^2 + (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}) - 2\vec{b}^2 + (\vec{b}, \vec{c})) = -\frac{5a^2}{24}.$$

Следовательно, если $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{MN}})$, то

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{MN})}{|\overrightarrow{DE}|\,|\overrightarrow{MN}|} = \frac{-5a^2/24}{(a\sqrt{3}/2)(a/2)} = -\frac{5}{6\sqrt{3}}, \text{ т. е.}$$

$$\varphi = 180^\circ - \arccos\frac{5}{6\sqrt{3}}. \ \blacktriangle$$

Пример 20*. Точки E и F — соответственно середины ребер $[AD]$ и $[BC]$ правильного тетраэдра $ABCD$. Точки N и M лежат соответственно на отрезках $[CD]$ и $[EF]$, причем $\alpha = \widehat{MNC} = 45^\circ$, $\beta = \widehat{NME} = 60^\circ$. В каких отношениях точки M и N делят отрезки $[EF]$ и $[CD]$?

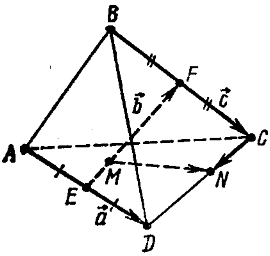


Рис. 3.14

$\triangle$ В данной задаче многократно придется вычислять скалярные произведения, поэтому удобно взять в качестве базисных векторы $\vec a = \overrightarrow{ED}$, $\vec b = \overrightarrow{EF}$, $\vec c = \overrightarrow{FC}$ (рис. 3.14). Пусть $d = |\vec a|$. В соответствии с результатом примера 17 векторы $\vec a, \vec b, \vec c$ попарно ортогональны: $(\vec a, \vec b) = (\vec a, \vec c) = (\vec b, \vec c) = 0$ и $|\vec c| = d$, $|\vec b| = d\sqrt{2}$. По условию задачи существуют числа λ и μ такие, что $\overrightarrow{CN} = \lambda\overrightarrow{CD} = \lambda(\vec a - \vec b - \vec c)$, $\overrightarrow{MF} = \mu\overrightarrow{EF} = \mu\vec b$. Следовательно, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CN} = \lambda\vec a + (\mu - \lambda)\vec b + (1-\lambda)\vec c$, $|\overrightarrow{MN}|^2 = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN}) = \lambda^2\vec a^2 + (\mu-\lambda)^2\vec b^2 + (1-\lambda)^2\vec c^2 + 2\lambda(\mu-\lambda)(\vec a, \vec b) + 2\lambda(1-\lambda)(\vec a, \vec c) + 2(\mu-\lambda)(1-\lambda)(\vec b, \vec c) = \lambda^2 d^2 + (\mu-\lambda)^2 2d^2 + (1-\lambda)^2 d^2 = d^2((\lambda-1)^2 + 2(\mu-\lambda)^2 + \lambda^2)$,

$$\overrightarrow{CD} = \vec a - \vec b - \vec c, \ |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AD}| = 2|\vec a| = 2d.$$

Далее,

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD}) = (\lambda\vec a + (\mu-\lambda)\vec b + (1-\lambda)\vec c, \vec a - \vec b - \vec c) = \lambda\vec a^2 - (\mu-\lambda)\vec b^2 - (1-\lambda)\vec c^2 = (4\lambda - 2\mu - 1)d^2, \ |\overrightarrow{EF}| = |\vec b| = d\sqrt{2}, \ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EF}) = (\lambda\vec a + (\mu-\lambda)\vec b + (1-\lambda)\vec c, \vec b) = (\mu-\lambda)\vec b^2 = 2(\mu-\lambda)d^2.$$

По условию задачи имеем

$$\cos\alpha=\cos \widehat{MNC}=\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CN}})=\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD}})=$$

$$=\frac{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD})}{|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{4\lambda-2\mu-1}{2\sqrt{\lambda^2+2(\mu-\lambda)^2+(\lambda-1)^2}},$$

$$\cos\beta=\cos \widehat{NME}=-\cos \widehat{NMF}=-\cos(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EF}})=-\frac{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EF})}{|\overrightarrow{MN}||\overrightarrow{EF}|}=$$

$$=\frac{2(\lambda-\mu)}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+2(\mu-\lambda)^2+(\lambda-1)^2}}. \qquad (3.16)$$

Из этих двух соотношений находим

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{4\lambda-2\mu-1}{2\sqrt{2}(\lambda-\mu)}, \quad \text{или} \quad \mu=\frac{\lambda(4\cos\beta-2\sqrt{2}\cos\alpha)-\cos\beta}{2\cos\beta-2\sqrt{2}\cos\alpha}$$

и, значит, $\lambda-\mu=(1-2\lambda)\cos\beta/(2\cos\beta-2\sqrt{2}\cos\alpha)$. Неизвестную λ находим теперь из уравнения (3.16):

$$\cos\beta=\frac{(1-2\lambda)\cos\beta/(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{2\lambda^2+(1-2\lambda)^2\cos^2\beta/(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2+2(\lambda-1)^2}}. \qquad (3.17)$$

Возводя обе части (3.17) в квадрат и сокращая на $\cos^2\beta\neq 0$, находим $4\lambda^2-4\lambda+2=(1-2\lambda)^2\sin^2\beta/(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2$, т. е.

$$(1-2\lambda)^2=4\lambda^2-4\lambda+1=\left(\frac{\sin^2\beta}{(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}-1\right)^{-1}=$$

$$=\frac{(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}{\sin^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}.$$

Как следует из (3.17), числа $1-2\lambda$ и $\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha$ имеют одинаковый знак, поэтому $1-2\lambda=(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha):$ $:\sqrt{\sin^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}$. Искомые отношения таковы:

$$\frac{|CN|}{|ND|}=\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{1-(1-2\lambda)}{1+(1-2\lambda)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sin^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{\sin^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}+(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)},$$

$$\frac{|FM|}{|ME|}=\frac{\mu}{1-\mu}=$$

$$=\frac{\sqrt{\sin^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}-(2\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}{\sqrt{\sin^2\beta-(\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)^2}+(2\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha)}.$$

В случае $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ имеем $|CN| : |ND| = 3 + 2\sqrt{2}$, $|FM| : |ME| = 1$. ▲

Пример 21*. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна $2d$. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, D, середину F ребра $[BC]$ и центр K грани ADC.

△ Воспользуемся базисом, введенным в предыдущем примере (рис. 3.14). Пусть O — центр сферы, $\overrightarrow{OF} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ (x, y и z пока что неизвестны), R — искомый радиус. Имеем:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FA} = (x-1)\vec{a} + (y-1)\vec{b} + z\vec{c},$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD} = (x+1)\vec{a} + (y-1)\vec{b} + z\vec{c},$$

$$\overrightarrow{CK} = (2/3)\overrightarrow{CE} = (2/3)(-\vec{b} - \vec{c}),\ \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CK} = x\vec{a} + (y - 2/3)\vec{b} + (z + 1/3)\vec{c}.$$

По условию, $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OD}|^2 = |\overrightarrow{OK}|^2 = |\overrightarrow{OF}|^2 = R^2$, что приводит к следующей системе уравнений:

$$(x-1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2 = w^2,\ (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2 = w^2,\ x^2 + 2\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = w^2,$$

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = w^2,$$

где $w = R/d$. Вычитая из первого уравнения второе, находим $x = 0$. Вычитая из первого уравнения четвертое, получаем $1 - 2x + 2 - 4y = 0$, т. е. $y = 3/4$. Остается система: $9/8 + z^2 = w^2$, $1/72 + (z + 1/3)^2 = w^2$. Вычитая из одного уравнения другое, находим $z = 3/2$. Следовательно,

$$R = dw = d\sqrt{9/8 + 9/4} = 3\sqrt{6}d/4. ▲$$

Пример 22. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC: $|AC| = |BC| = a$, $\widehat{C} = 90°$. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой (CA_1), а вершины P и Q — на прямой (AB_1). Найдите: а) объем призмы; б) объем тетраэдра.

△ Обозначим $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CC_1}$ (рис. 3.15), $r = |PQ|$, $h = |\vec{c}|$. По условию, $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$. Пусть E и F — соответственно середины отрезков $[MN]$ и $[PQ]$. В примере 17 доказано, что $|MN| = r = |PQ|$, $|FE| = r/\sqrt{2}$ и $0 = (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{PQ})$ и, следовательно,

$$(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{CA_1}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{A_1C}) = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB_1}) = 0. \qquad (3.18)$$

а) Из условия $(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{CA_1}) = (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{c}) = 0$ имеем $-\vec{a}^2 + \vec{c}^2 = 0$, т. е. $-a^2 + h^2 = 0$. Значит, $h = a$. Объем призмы $V_{\text{пр}}$ равен

$$V_{\text{пр}} = hS_{ABC} = h\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

б) Пусть (пока неизвестные) числа λ и μ таковы, что $\overrightarrow{CE} = \lambda\overrightarrow{CA_1} = \lambda(\vec{a} + \vec{c})$ (коллинеарность $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{CA_1}$), $\overrightarrow{AF} = \mu\overrightarrow{AB_1} = \mu(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ (коллинеарность $\overrightarrow{AF}$ и $\overrightarrow{AB_1}$). Тогда $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = (1 - \lambda - \mu)\vec{a} + \mu\vec{b} + (\mu - \lambda)\vec{c}$. Из (3.18) имеем

$$0 = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CA_1}) = ((1 - \lambda - \mu)\vec{a} + \mu\vec{b} + (\mu - \lambda)\vec{c}, \vec{a} + \vec{c}) =$$
$$= (1 - \lambda - \mu)\vec{a}^2 + (\mu - \lambda)\vec{c}^2 = (1 - 2\lambda)a^2,$$
$$0 = (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AB_1}) = ((1 - \lambda - \mu)\vec{a} + \mu\vec{b} + (\mu - \lambda)\vec{c}, -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) =$$
$$= (\lambda + \mu - 1)\vec{a}^2 + \mu\vec{b}^2 + (\mu - \lambda)\vec{c}^2 = (3\mu - 1)a^2,$$

т. е. $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/3$. Поэтому $\overrightarrow{EF} = (1/6)(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$,

$$|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{6}|\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}| = (1/6)\sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}, \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})} =$$

$= (1/6)\sqrt{\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + \vec{c}^2} = a\sqrt{6}/6$. Следовательно, $r = \sqrt{2}|EF| = a\sqrt{3}/3$, а объем $V_{\text{тетр}}$ тетраэдра равен

$$V_{\text{тетр}} = (1/3)\left(r\sqrt{2/3}\right)\left(r^2\sqrt{3}/4\right) = r^3\sqrt{2}/12 = a^3\sqrt{6}/108. \ \blacktriangle$$

Пример 23*. В пирамиде $MNPQ$ углы $\angle QMN$, $\angle MNP$ и $\angle NPQ$ прямые. Вершины A, B, C, D правильного тетраэдра расположены соответственно на ребрах $[MP]$, $[NP]$, $[NQ]$, $[PQ]$ пирамиды $MNPQ$. Прямые (AB) и (MN) параллельны. Найдите отношение объемов правильного тетраэдра и пирамиды.

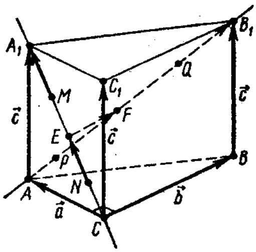


Рис. 3.15

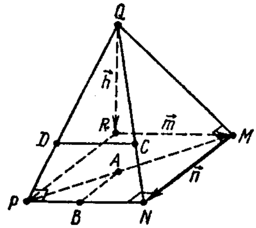


Рис. 3.16

$\triangle$ Пусть R — основание перпендикуляра, опущенного из вершины Q на плоскость MNP (рис. 3.16). Обозначим $\vec{h} = \overrightarrow{QR}$, $\vec{m} = \overrightarrow{RM}$, $\vec{n} = \overrightarrow{MN}$. Тогда $(\vec{h}, \vec{m}) = (\vec{h}, \vec{n}) = 0$. Далее, $(\vec{m}, \vec{n}) = (\overrightarrow{MQ} + \vec{h}, \vec{n}) = (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}) = 0$, так как $Q\widehat{M}N = 90^\circ$. Следовательно, векторы $\vec{h}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ попарно ортогональны. По условию, $(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PQ}) = 0$. Так как $(\overrightarrow{PN}, \vec{h}) = 0$, то $(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PR}) = (\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PQ} + \vec{h}) = 0$. Также по условию, $(\overrightarrow{PN}, \vec{n}) = 0$. Итак, в четырехугольнике $PRMN$ три угла: $\angle RMN$, $\angle MNP$, $\angle NPR$ — прямые. Значит, $PRMN$ — прямоугольник: $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{RM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{MN} = \vec{n}$. Поскольку $(AB) \parallel (MN)$, существует такое число x, что $\overrightarrow{PB} = x\overrightarrow{PN} = x\vec{m}$, $\overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{PM} = x(\vec{m} - \vec{n})$ и, в частности, $\overrightarrow{AB} = x\vec{n}$. Точки C и D лежат соответственно на ребрах $[QN]$ и $[QP]$, поэтому существуют числа y и z такие, что $\overrightarrow{QC} = y\overrightarrow{QN} = y(\vec{h} + \vec{m} + \vec{n})$, $\overrightarrow{QD} = z\overrightarrow{QP} = z(\vec{h} + \vec{n})$. В частности, $\overrightarrow{CD} = (z - y)\vec{h} - y\vec{m} + (z - y)\vec{n}$. Согласно свойству скрещивающихся ребер правильного тетраэдра (см. пример 17), $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$, т. е. $(x\vec{n}, (z - y)\vec{h} - y\vec{m} + (z - y)\vec{n}) = x(z - y)|\vec{n}|^2 = 0$. Так как $|AB| = x|\vec{n}| \neq 0$, то $y = z$, т. е. $(CD) \parallel (NP)$ (рис. 3.16). Выразим векторы ребер тетраэдра $ABCD$ через векторы базиса $\{\vec{h}, \vec{m}, \vec{n}\}$:

$$\overrightarrow{AB} = x\vec{n}, \quad \overrightarrow{CD} = -y\vec{m},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = (y - 1)\vec{h} + (y - x)\vec{m} + (x + y - 1)\vec{n},$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QD} = (z - 1)\vec{h} - x\vec{m} + (z - 1)\vec{n} =$$

$$= (y - 1)\vec{h} - x\vec{m} + (y - 1)\vec{n},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = (y - 1)\vec{h} - x\vec{m} + (x + y - 1)\vec{n},$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (y - 1)\vec{h} + (y - x)\vec{m} + (y - 1)\vec{n}.$$

Поскольку $ABCD$ — правильный тетраэдр, длины всех его ребер равны. Следовательно, обозначив $h = |\vec{h}|$, $m = |\vec{m}|$, $n = |\vec{n}|$, $a = |\overrightarrow{AB}|$, приходим к системе уравнений

$$a^2 = x^2n^2,\ a^2 = y^2m^2,\ a^2 = (y-1)^2 h^2 + (y-x)^2 m^2 + (x+y-1)^2 n^2,\ a^2 = (y-1)^2 h^2 + x^2m^2 + (y-1)^2 n^2,\ a^2 = (y-1)^2 h^2 + x^2m^2 + (x+y-1)^2 n^2.$$

Вычитая из третьего уравнения пятое, получаем $(y-x)^2 = x^2$, т. е. $y(y-2x) = 0$. Так как $|CD| = |y\vec{m}| \neq 0$, то $y \neq 0$. Следовательно, $y = 2x$. Вычитая из третьего уравнения четвертое, получаем $x(x+2y-2) = 0$. Так как $x \neq 0$, то $0 = x + 2y - 2 = 5x - 2$, т. е. $x = 2/5$, $y = 4/5$. Теперь для a, h, m, n имеем систему уравнений $a^2 = 4n^2/25$, $a^2 = 16m^2/25$, $a^2 = h^2/25 + 4m^2/25 + n^2/25$. Отсюда $n = (5/2)\,a$, $m = (5/4)\,a$, $h = (5/\sqrt{2})\,a$. Имеем

$$V_{ABCD} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}},\quad V_{MNPQ} = \frac{1}{3}h\left(\frac{1}{2}mn\right) = \frac{125}{48\sqrt{2}}a^3,$$

поэтому искомое отношение объемов $V_{ABCD} : V_{MNPQ} = 8 : 125$. ▲

Пример 24. Даны прямоугольник $ABCD$ и точка M. Покажите, что: а) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$; б) $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$.

△ а) Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{x}$. Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ и $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) - (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}) = (-\vec{x}, -\vec{x} + \vec{a} + \vec{b}) - (-\vec{x} + \vec{a}, -\vec{x} + \vec{b}) = \vec{x}^2 - (\vec{x}, \vec{a}) - (\vec{x}, \vec{b}) - (\vec{x}^2 - (\vec{a}, \vec{x}) - (\vec{x}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{b})) = -(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$

б) Учитывая а), имеем $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 - |\overrightarrow{MD}|^2 = (|\overrightarrow{MA}|^2 - 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) + |\overrightarrow{MC}|^2) - (|\overrightarrow{MB}|^2 - 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}) + |\overrightarrow{MD}|^2) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{b} - \vec{a})^2 = 4(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$ ▲

Пример 25. Точки A, B, C, D пространства (плоскости) таковы, что для любой точки M пространства (плоскости) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}) \neq (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{DM})$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

△ Обозначим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{r} = \overrightarrow{AM}$. Тогда $\overrightarrow{CM} = \vec{r} - \vec{c}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{r} - \vec{b}$, $\overrightarrow{DM} = \vec{r} - \vec{d}$. По условию, для любого вектора $\vec{r}$ (пространства или плоскости) $(\vec{r}, \vec{r}-\vec{c}) \neq (\vec{r}-\vec{b}, \vec{r}-\vec{d})$, т. е.

$$(\vec{r}, \vec{d}+\vec{b}-\vec{c}) \neq (\vec{b}, \vec{d}). \tag{3.19}$$

Докажем, что вектор $\vec{a}=\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}$ равен $\vec{0}$. Предположим противное: $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда вектор $\vec{r}=\frac{(\vec{b}, \vec{d})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$ удовлетворяет равенству $(\vec{r}, \vec{a})=(\vec{b}, \vec{d})$, что противоречит (3.19). Итак, $\vec{a}=\vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{AB}=\vec{b}=\vec{c}-\vec{d}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм. Положив в (3.19) $\vec{r}=\vec{0}$, получаем $(\vec{b}, \vec{d}) \neq 0$, т. е. $ABCD$ не является прямоугольником (ср. с примером 24). ▲

Пример 26. Пусть O — центр правильного n-угольника $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$, M — произвольная точка. Найдите величину

$$f(M)=f(A_1, A_2, \ldots, A_n;\ M)=|A_1M|^2+ \\ +|A_2M|^2+\ldots+|A_nM|^2,$$

если $|OM|=l$, $|OA_1|=R$.

△ Обозначим $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_i=\overrightarrow{OA}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда $|\vec{r}|=l$, $|\vec{r}_i|=R$, $i=1, 2, \ldots, n$, $|\overrightarrow{A_iM}|^2=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}_i|^2=\vec{r}^2+\vec{r}_i^2-2(\vec{r}, \vec{r}_i)=l^2+R^2-2(\vec{r}, \vec{r}_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $f(M)=n(l^2+R^2)-2(\vec{r}, \vec{r}_1+\vec{r}_2+\ldots+\vec{r}_n)=n(l^2+R^2)$ (сумма $\vec{r}_1+\vec{r}_2+\ldots+\vec{r}_n$ радиусов-векторов вершин правильного n-угольника относительно его центра равна $\vec{0}$). ▲

Пример 27. Правильные m- и n-угольник расположены так, что расстояние между их центрами равно d. Радиусы описанных около многоугольников окружностей равны соответственно r и R. Все вершины m-угольника соединены со всеми вершинами n-угольника отрезками. Найдите сумму квадратов длин всех таких отрезков.

△ Пусть O и O' — центры, а A_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и B_j, $j=1, 2, \ldots, m$, — соответственно вершины n-угольника и m-угольника. На основании результата примера 26 для любого $j=1, 2, \ldots, m$

$$f(B_j)=|B_jA_1|^2+|B_jA_2|^2+\ldots+|B_jA_n|^2= \\ =n(|OB_j|^2+R^2).$$

Искомая сумма σ равна

$$\sigma = f(B_1) + f(B_2) + \ldots + f(B_m) =$$
$$= mnR^2 + n(|B_1O|^2 + |B_2O|^2 + \ldots + |B_mO|^2) =$$
$$= mnR^2 + nf(B_1, B_2, \ldots, B_m; O).$$

В силу результата примера 26, примененного к правильному m-угольнику $B_1B_2\ldots B_{m-1}B_m$, имеем $f(B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_m;\ O) = m(|OO'|^2 + r^2)$. Поэтому окончательно $\sigma =$ $= mn(R^2 + d^2 + r^2)$. ▲

Пример 28*. Докажите, что если $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ — углы треугольника ABC, то выполнены неравенства:

1) $\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} + \cos 2\widehat{C} \geqslant -3/2$;

2) $\cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} + \cos \widehat{C} \leqslant 3/2$;

3) $\sin(\widehat{A}/2) + \sin(\widehat{B}/2) + \sin(\widehat{C}/2) \leqslant 3/2$.

☐ Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — произвольные единичные векторы, $\alpha = (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2})$, $\beta = (\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3})$, $\gamma = (\widehat{\vec{e}_3, \vec{e}_1})$. Преобразуя очевидное неравенство $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geqslant 0$, получаем $3 +$ $+ 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \geqslant 0$, или

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqslant -3/2. \qquad (3.20)$$

1) Если $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ — углы треугольника, то $\widehat{A} > 0°$, $\widehat{B} > 0°$, $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} > 0°$.

Без ограничения общности можно считать, что $\widehat{A} \leqslant \widehat{B} \leqslant$ $\leqslant 90°$. Возьмем векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ такие, что $\vec{e}_2$ получается из $\vec{e}_1$ поворотом на угол $2\widehat{A}$, а $\vec{e}_3$ получается из $\vec{e}_2$ поворотом на угол $2\widehat{B}$ в том же направлении (рис. 3.17). Тогда $\alpha =$ $= 2\widehat{A}$, $\beta = 2\widehat{B}$, а $\gamma = 2\widehat{C}$, если $2\widehat{C} \leqslant 180°$, и $\gamma = 360° -$ $- 2\widehat{C}$, если $\widehat{C} > 90°$. Поэтому $\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} + \cos 2\widehat{C} =$ $= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqslant -3/2$ [см. (3.20)].

2) Пусть ABC — данный треугольник. Положим $\vec{e}_1 =$ $= \overrightarrow{AB}/|AB|$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{BC}/|BC|$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{CA}/|CA|$. Тогда $\alpha =$ $= 180° - \widehat{B}$, $\beta = 180° - \widehat{C}$, $\gamma = 180° - \widehat{A}$ (рис. 3.18). Подставляя эти значения в неравенство (3.20), получаем $-\cos\widehat{B} - \cos\widehat{C} - \cos\widehat{A} \geqslant -3/2$, т. е. $\cos\widehat{A} + \cos\widehat{B} +$ $+ \cos\widehat{C} \leqslant 3/2$.

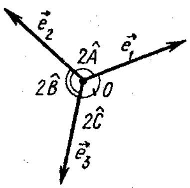


Рис. 3.17

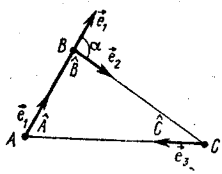


Рис. 3.18

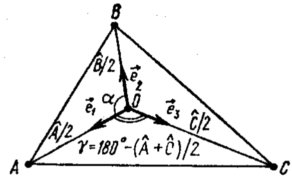


Рис. 3.19

3) Обозначим через O центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Положим $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}/|OA|$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}/|OB|$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}/|OC|$. Тогда (рис. 3.19) $\alpha = 180° - (1/2)\widehat{A} - (1/2)\widehat{B} = 90° + (1/2)\widehat{C}$, $\beta = 90° + (1/2)\widehat{A}$, $\gamma = 90° + (1/2)\widehat{B}$, $\cos\alpha = -\sin(\widehat{C}/2)$, $\cos\beta = -\sin(\widehat{A}/2)$, $\cos\gamma = -\sin(\widehat{B}/2)$. Поэтому из (3.20) имеем $\sin(\widehat{C}/2) + \sin(\widehat{A}/2) + \sin(\widehat{B}/2) \leqslant 3/2$. ■

Пример 29*. Внутри тетраэдра $ABCD$ выбрана точка O. Обозначая $\alpha_1 = A\widehat{O}B$, $\alpha_2 = A\widehat{O}C$, $\alpha_3 = A\widehat{O}D$, $\alpha_4 = B\widehat{O}C$, $\alpha_5 = B\widehat{O}D$, $\alpha_6 = C\widehat{O}D$, докажите, что среди углов α_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, найдется по крайней мере один: а) не больший $\arccos(-1/3)$; б) не меньший $\arccos(-1/3)$.

△ а) Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ — единичные векторы, сонаправленные соответственно с $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$. Тогда $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)^2 \geqslant 0$, или $4 + 2(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_6) \geqslant 0$. Поэтому если бы все углы α_i были больше $\arccos(-1/3)$, т. е. $\cos\alpha_i < -1/3$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, то получили бы противоречие $0 \leqslant 4 + 2(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_6) < 4 + 2\cdot 6\cdot(-1/3) = 0$; значит, среди углов α_i найдется угол, не больший $\arccos(-1/3)$.

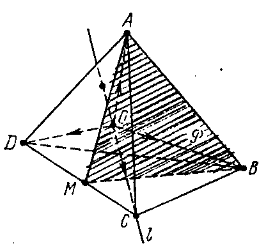


Рис. 3.20

б) Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ линейно зависимы. Поэтому существуют числа x, y, z, t такие, что $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 0$ и

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + t\vec{e}_4 = \vec{0}. \qquad (3.21)$$

Докажем, что все числа x, y, z, t имеют одинаковый знак. Действительно, точка O лежит внутри тетраэдра, поэтому плоскость P, проходящая через точки O, A и B, пересекает ребро $[CD]$ во внутренней точке M (рис. 3.20). Концы векторов $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ лежат по разные стороны от плоскости P, если все векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ считать отложенными от точки O. Обозначая через l прямую (OC), получаем, что вектор $\Pi_l^P \vec{e}_4 = \vec{a}$ отличен от $\vec{0}$ и противоположно направлен вектору e_3. С другой стороны, из равенства (3.21), учитывая соотношения $\Pi_l^P \vec{e}_2 = \Pi_l^P \vec{e}_1 = \vec{0}$, после проецирования на l параллельно P, имеем

$$z\vec{e}_3 + t\vec{a} = \vec{0}. \tag{3.22}$$

Числа z и t не равны нулю: если $z = 0$ ($t = 0$), то из (3.22) следует, что $t = 0$ ($z = 0$); следовательно [см. (3.21)], $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \vec{0}$, $x^2 + y^2 > 0$, т. е. векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ коллинеарны, что невозможно. Векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{a}$ противоположно направлены. Следовательно, z и t имеют одинаковые знаки [см. (3.22)]. Аналогично доказывается, что x и t (y и t) имеют одинаковые знаки. Таким образом, все шесть чисел xy, xz, xt, yz, yt, zt положительны.

Если теперь предположить, что все углы $\alpha_i < \arccos(-1/3)$, т. е. $\cos\alpha_i > -1/3$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, то $2xy(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2xy\cos\alpha_1 > -(2/3)xy$. Аналогично, $2xz(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 2xz\cos\alpha_2 > -(2/3)xz$, $2xt(\vec{e}_1, \vec{e}_4) > -(2/3)xt$, $2yz(\vec{e}_2, \vec{e}_3) > -(2/3)yz$, $2yt(\vec{e}_2, \vec{e}_4) > -(2/3)yt$, $2zt(\vec{e}_3, \vec{e}_4) > -(2/3)zt$.
Поэтому из формулы (3.21) находим

$$\begin{aligned}0 = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 + t\vec{e}_4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 +\\ + 2(xy(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + xz(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + xt(\vec{e}_1, \vec{e}_4) + yz(\vec{e}_2, \vec{e}_3) +\\ + yt(\vec{e}_2, \vec{e}_4) + zt(\vec{e}_3, \vec{e}_4)) > x^2 + y^2 + z^2 + t^2 -\\ -(2/3)(xy + xz + xt + yz + yt + zt) = (1/3)((x-y)^2 + (x-z)^2 +\\ + (x-t)^2 + (y-z)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Получено противоречие. ▲

§ 3. Ортогональное проецирование в пространстве. Нормальное векторное уравнение плоскости

Пусть l — некоторая прямая в пространстве. *Ортогональной проекцией* $\text{Пр}_l M$ *точки* M *пространства на прямую* l называется точка $M^* = \Pi_l^P(M)$, где P — плоскость, перпендикулярная прямой l. Иначе говоря, $M^* = M$, если $M \in l$, и M^* — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l, если $M \notin l$. Пусть $\vec{a}$ — некоторый вектор. По определению, *ортогональной проекцией вектора* $\vec{a}$ *на прямую* l называется вектор $\text{Пр}_l\vec{a} = \Pi_l^P(\vec{a})$. Найдем явное выражение для $\text{Пр}_l\vec{a}$. Выберем на прямой l точку M и отложим от нее вектор $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ (рис. 3.21, *а*, *б*). Тогда

$\text{Пр}_l\vec{a} = \overrightarrow{MN^*}$, где $N^* = \text{Пр}_l N$. Обозначив $\vec{x} = \overrightarrow{MN^*}$, $\vec{y} = \overrightarrow{N^*N}$, получим

$$\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}. \tag{3.23}$$

Пусть $\vec{e}$ — направляющий вектор прямой l. Тогда $\vec{x} = \lambda\vec{e}$. Для нахождения λ умножим обе части равенства (3.23) скалярно на $\vec{e}$ и учтем, что по определению ортогональной проекции точки N $(\vec{y}, \vec{e}) = 0$. Имеем $(\vec{a}, \vec{e}) = \lambda(\vec{e}, \vec{e})$, т. е.

$$\text{Пр}_l\,\vec{a} = \vec{x} = \lambda\vec{e} = \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{(\vec{e}, \vec{e})}\vec{e}, \tag{3.24}$$

$$|\text{Пр}_l\,\vec{a}| = \left|\frac{|\vec{a}||\vec{e}|\cos\varphi}{|\vec{e}||\vec{e}|}\vec{e}\right| = |\vec{a}|\,|\cos\varphi| = \frac{|(\vec{a}, \vec{e})|}{|\vec{e}|}. \tag{3.25}$$

Пусть P — некоторая плоскость в пространстве. *Ортогональной проекцией* $\text{Пр}_P M$ *точки M на плоскость P* называется точка $M^* = \Pi_P^l(M)$, где l — прямая, перпендикулярная плоскости P. Таким образом, $M^* = M$, если

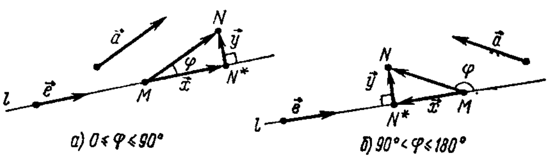


Рис. 3.21

$M \in P$; M^* — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость P, если $M \notin P$. Если $\vec{n} \neq \vec{0}$ — вектор, перпендикулярный P (т. е. направляющий вектор прямой l), то в силу равенства

$$\vec{a} = \Pi_P^l(\vec{a}) + \Pi_l^P(\vec{a})$$

и формулы (3.24) получаем

$$\text{Пр}_P\,\vec{a} = \vec{a} - \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{(\vec{n}, \vec{n})}\vec{n}, \tag{3.26}$$

где $\text{Пр}_P\vec{a}$ — *ортогональная проекция вектора $\vec{a}$ на плоскость P*, т. е. вектор $\text{Пр}_P\vec{a} = \overrightarrow{\text{Пр}_P M\,\text{Пр}_P N}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

Пример 1. Длина ребра основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M, N, P и Q являются соответственно серединами ребер $[AB]$, $[AC]$, $[A_1C_1]$ и $[C_1B_1]$. Длина проекции вектора $\overrightarrow{MP}$ на прямую (NQ) равна $a/4$. Найдите длину высоты призмы.

$\triangle$ По условию, $|\text{Пр}_{(NQ)}\overrightarrow{MP}|^2 = (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ})^2/|\overrightarrow{NQ}|^2 = a^2/16$ [см. формулу (3.25)]. Возьмем в качестве базисных векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BB_1}$. Тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$, $(\vec{a}, \vec{b}) = a^2/2$, $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$ (призма правильная). Искомая длина $h = |\vec{c}|$. Так как $\overrightarrow{MP} = (1/2)\vec{b} + \vec{c}$, $\overrightarrow{NQ} = -(1/2)\vec{a} + \vec{c}$, то $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ}) = -(1/4)(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{c}^2 = h^2 - a^2/8$, $|\overrightarrow{NQ}|^2 = (1/4)\vec{a}^2 + \vec{c}^2 = h^2 + a^2/4$. Следовательно, для величины $x = h^2$ имеем уравнение

$$(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ})^2 = (x - a^2/8)^2 = (a^2/16)(x + a^2/4) = (a^2/16)|\overrightarrow{NQ}|^2,$$

или $x^2 - (5/16)a^2x = 0$. Так как $x \neq 0$, то $h^2 = (5/16)a^2$, т. е. $h = a\sqrt{5}/4$. ▲

Пример 2 (нормальное векторное уравнение плоскости). Пусть в пространстве фиксирован полюс O, выбраны число D и ненулевой вектор $\vec{N}$. Докажите, что множество P всех точек, радиусы-векторы $\vec{r}$ которых удовлетворяют уравнению

$$(\vec{r}, \vec{N}) = D, \qquad (3.27)$$

есть плоскость. Укажите ее расположение в пространстве.

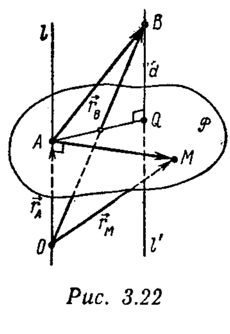


Рис. 3.22

□ Рассмотрим точку A с радиусом-вектором $\vec{r}_A = D\vec{N}/|\vec{N}|^2$ (рис. 3.22). Так как $(\vec{r}_A, \vec{N}) = D(\vec{N}, \vec{N})/|\vec{N}|^2 = D$, то $A \in P$. Обозначим через l прямую с направляющим вектором $\vec{N}$, проведенную через точку A. Пусть M — произвольная точка P с радиусом-вектором $\vec{r}_M$. Равенство $(\vec{r}_M, \vec{N}) = D$, эквивалентное равенству $(\vec{r}_M - \vec{r}_A, \vec{N}) = 0$, выполнено тогда и только тогда, когда $\vec{r}_M - \vec{r}_A = \overrightarrow{AM} \perp \vec{N}$. Таким образом, точка M

принадлежит множеству P тогда и только тогда, когда она расположена на некоторой прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l. Но множество P всех таких прямых заполняет плоскость, проходящую через точку A и перпендикулярную l. ■

Итак, (3.27) — уравнение некоторой плоскости P в пространстве. Это уравнение называется *нормальным (векторным) уравнением плоскости* P. Вектор $\vec{N}$ называют *нормальным вектором плоскости* P и говорят, что $\vec{N}$ ортогонален (перпендикулярен) плоскости P (или что плоскость P ортогональна вектору $\vec{N}$). Подчеркнем еще раз, что когда говорят, что плоскость P задана уравнением (3.27), подразумевают (хотя и не оговаривают особо), что в пространстве фиксирован полюс, от которого отсчитываются радиусы-векторы $\vec{r}$ точек плоскости P, удовлетворяющие равенству (3.27).

Всякая плоскость P может быть задана нормальным векторным уравнением. Для этого необходимо зафиксировать полюс O, некоторую точку $M_0\,(\vec{r}_0)$ плоскости P и направляющий вектор $\vec{N} \neq \vec{0}$ прямой l, перпендикулярной P. Поскольку точка $M\,(\vec{r})$ лежит в плоскости P тогда и только тогда (по свойству перпендикуляра l к плоскости P), когда векторы $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{N}$ — ортогональны, $M \in P$ тогда и только тогда, когда

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}) = 0. \qquad (3.28)$$

Очевидно, что (3.28) переходит в (3.27), если обозначить $D = (\vec{r}_0, \vec{N})$.

Уравнение $(\vec{r}, \vec{n}) = D$, где $|\vec{n}| = 1$, называется *нормированным (векторным) уравнением плоскости*.

Пример 3. Найдите расстояние d от точки B с радиусом-вектором $\vec{r}_B$ до плоскости P, заданной уравнением $(\vec{r}, \vec{N}) = D$.

△ Пусть Q — основание перпендикуляра l', опущенного из точки B на плоскость P (рис. 3.22); A — точка с радиусом-вектором $\vec{r}_A = D\vec{N}/|\vec{N}|^2$. Тогда $\vec{N}$ — направляющий вектор l' и по формуле (3.25) имеем

$$d = |\text{Пр}_{l'}\, \overrightarrow{AB}| = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \vec{N})|}{|\vec{N}|} = \frac{|(\vec{r}_B - \vec{r}_A, \vec{N})|}{|\vec{N}|}.$$

Окончательно

$$d = \frac{|(\vec{r}_B, \vec{N}) - D|}{|\vec{N}|}. \blacktriangle \tag{3.29}$$

Пример 4. Найдите ортогональную проекцию точки $B(\vec{r}_B)$ на плоскость $P: (\vec{r}, \vec{N}) = D$.

$\triangle$ Как отмечалось в примере 3, точки $Q = \text{Пр}_P B$ и $A\left(\frac{D\vec{N}}{|\vec{N}|^2}\right)$ связаны соотношением

$$\overrightarrow{BQ} = \text{Пр}_{l'} \overrightarrow{BA} = \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_B, \vec{N})}{|\vec{N}|^2} \vec{N} = \frac{D - (\vec{r}_B, \vec{N})}{|\vec{N}|^2} \vec{N}.$$

Следовательно,

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_B + \overrightarrow{BQ} = \vec{r}_B + \frac{D - (\vec{r}_B, \vec{N})}{|\vec{N}|^2} \vec{N}. \blacktriangle$$

Пример 5. Найдите расстояние δ от точки M с радиус-вектором $\vec{r}_M$ до прямой l, параметрическое уравнение которой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$.

$\triangle$ Пусть $M^* = \text{Пр}_l M$; M_0 — точка прямой l с радиус-вектором $\vec{r}_0$. Тогда (рис. 3.23) $\overrightarrow{M_0M^*} = \text{Пр}_l \overrightarrow{M_0M} = (\overrightarrow{M_0M}, \vec{a})\vec{a}/(\vec{a}, \vec{a})$, $\overrightarrow{M^*M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M^*} = \vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{a}/(\vec{a}, \vec{a})$, где $\vec{b} = \overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_M - \vec{r}_0$.

Таким образом,

$$\delta = |\overrightarrow{M^*M}| = \left|\vec{b} - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})}\vec{a}\right| =$$

$$= \sqrt{\vec{b}^2 - 2\frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{\vec{a}^2} + \frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{(\vec{a}^2)^2}\vec{a}^2} =$$

$$= \frac{1}{|\vec{a}|}\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2} =$$

$$= \frac{1}{|\vec{a}|}\sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{r}_M - \vec{r}_0|^2 - (\vec{a}, \vec{r}_M - \vec{r}_0)^2}. \blacktriangle$$

Пример 6. Напишите параметрическое векторное уравнение прямой l^*, являющейся проекцией (ортогональной) прямой l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,t$ на плоскость $P : (\vec{r}, \vec{N}) = D$.

$\triangle$ Пусть M — произвольная точка прямой l, $\vec{r}_M = \vec{r}_0 + \vec{a}\,t$ — ее радиус-вектор, Q — ортогональная проекция точки M на плоскость P. По формуле, полученной в примере 4,

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_M + \frac{D-(\vec{r}_M, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N} = \left(\vec{r}_0 + \frac{D-(\vec{r}_0, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N}\right) + \left(\vec{a} - \frac{(\vec{a}, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N}\right)t.$$

Когда t пробегает все вещественные значения, точка M пробегает всю прямую l, а соответствующая точка Q — всю прямую l^*. Следовательно,

$$\vec{r} = \left(\vec{r}_0 + \frac{D-(\vec{r}_0, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N}\right) + \vec{b}t,$$

где $\vec{b} = \vec{a} - \frac{(\vec{a}, \vec{N})}{|\vec{N}|^2}\vec{N}$, $t \in R$, — параметрическое уравнение прямой l^*. ▲

Пример 7. Найдите ортогональную проекцию точки $M\ (\vec{r}_M)$ на прямую l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,t$.

$\triangle$ Сохраняя обозначения примера 5 (рис. 3.23), имеем

$$\vec{r}_{M^*} = \vec{r}_{M_0} + \overrightarrow{M_0 M^*} = \vec{r}_0 + \frac{(\overrightarrow{M_0 M}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a} = \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}. \blacktriangle$$

Пример 8. Напишите уравнение прямой l^*, проходящей через точку $M\ (\vec{r}_M)$ и пересекающей ортогонально прямую l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,t$, не содержащую M.

$\triangle$ Уравнение l^* есть $\vec{r} = \vec{r}_M + \vec{b}t$, где $\vec{b} = \overrightarrow{MM^*}$, $M^* = \text{Пр}_l M$ (рис. 3.23). По формуле, приведенной в примере 7,

$$\vec{b} = \vec{r}_{M^*} - \vec{r}_M = -\vec{r}_M + \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_M - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}\vec{a}. \blacktriangle$$

Пример 9. Длина ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Уравнения плоскостей (AA_1B_1B) и (AA_1C_1C) таковы: $(\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1$ и $(\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2$, где $|\vec{n}_1| =$

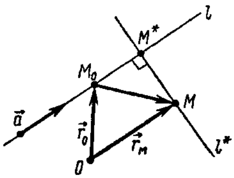


Рис. 3.23

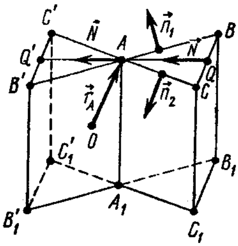


Рис. 3.24

$= |\vec{n}_2| = 1$, $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = -1/2$. Напишите нормальное векторное уравнение плоскости (BB_1C_1C).

$\triangle$ Нормальный вектор $\vec{N}$ плоскости (BB_1C_1C) коллинеарен биссектрисе $[AQ]$ угла $\angle BAC$ (рис. 3.24), поэтому можно взять $\vec{N} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2$, $|\vec{N}| = \sqrt{(\vec{n}_1 + \vec{n}_2, \vec{n}_1 + \vec{n}_2)} = \sqrt{1 + 2(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + 1} = 1$. Следовательно, уравнение плоскости (BB_1C_1C) имеет вид $(\vec{r}, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) = D$. Осталось найти D.

Расстояние $d = |AQ| = a\sqrt{3}/2$ от точки A до плоскости (BB_1C_1C) определяется формулой (3.29):

$$d = \frac{|(\vec{r}_A, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) - D|}{|\vec{n}_1 + \vec{n}_2|} = |(\vec{r}_A, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) - D|.$$

Отсюда $D = (\vec{r}_A, \vec{n}_1) + (\vec{r}_A, \vec{n}_2) \pm a\sqrt{3}/2$. Так как точка A лежит в плоскости (AA_1B_1B), то $(\vec{r}_A, \vec{n}_1) = D_1$. Аналогично, $(\vec{r}_A, \vec{n}_2) = D_2$. Таким образом, задача имеет два решения: $(\vec{r}, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) = D_1 + D_2 + a\sqrt{3}/2$ и $(\vec{r}, \vec{n}_1 + \vec{n}_2) =$

$= D_1 + D_2 - a\sqrt{3}/2$, — соответствующие двум возможным расположениям призм $ABCA_1B_1C_1$ и $AB'C'A_1B_1'C_1'$ (рис. 3.24). ▲

Пример 10. Напишите уравнение прямой, пересекающей ортогонально две непараллельные прямые l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ и $L: \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{b}\tau$.

△ Задача эквивалентна следующей: найти точки $M_0 \in l$ и $M_1 \in L$ такие, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ ортогонален как вектору $\vec{a}$, так и вектору $\vec{b}$. Прямая, проходящая через точку M_0, с направляющим вектором $\overrightarrow{M_0M_1}$ является искомой. Остается найти числа t_0 и τ_1 такие, что векторы $\vec{r}_0 + \vec{a}t_0$ и $\vec{r}_1 + \vec{b}\tau_1$ являются радиусами-векторами искомых точек M_0 и M_1 соответственно. Эти числа находим из условий ортогональности: $(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}) = (\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{b}) = 0$, или $(\vec{r}_1 + \vec{b}\tau_1 - \vec{r}_0 - \vec{a}t_0, \vec{a}) = 0$, $(\vec{r}_1 + \vec{b}\tau_1 - \vec{r}_0 - \vec{a}t_0, \vec{b}) = 0$. Перепишем эту систему уравнений в виде

$$t_0\vec{a}^2 - \tau_1(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha, \quad t_0(\vec{a}, \vec{b}) - \tau_1\vec{b}^2 = \beta, \qquad (3.30)$$

где $\alpha = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a})$, $\beta = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b})$. Решение системы (3.30)

$$t_0 = \frac{-\beta(\vec{a}, \vec{b}) + \alpha\vec{b}^2}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}, \quad \tau_1 = \frac{\alpha(\vec{a}, \vec{b}) - \beta\vec{a}^2}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}.$$

Таким образом, уравнение искомой прямой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a})\vec{b}^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b})(\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}\vec{a} +$$

$$+ \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a})(\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b})\vec{a}^2}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}\vec{b} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a})\vec{b}^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b})(\vec{a}, \vec{b})}{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}\vec{a}\right)t, \; t \in R. ▲$$

§ 4. Ортонормированный базис. Прямоугольная система координат. Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве

Три единичных попарно перпендикулярных вектора, взятых в определенном порядке, называются *ортонормированным* (или *прямоугольным*) *базисом в пространстве*. Векторы прямоугольного базиса принято обозначать $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Каждый вектор $\vec{a}$ единственным образом представляется в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Числа x, y, z называются *координатами вектора* $\vec{a}$ *в базисе* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Если $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то пишут $\vec{a} = (x; y; z)$. Например, $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$, $\vec{0} = (0; 0; 0)$ и т. д. Координаты векторов в ортонормированном базисе обладают свойством линейности: для любых векторов $\vec{a}=(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ и чисел α и β

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2; \alpha z_1 + \beta z_2).$$

Из единственности разложения вектора по базису следует, что векторное равенство $\vec{a} = \vec{b}$ равносильно системе трех скалярных равенств $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{3.31}$$

Длина вектора $\vec{a}$ равна $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

□ Действительно, поскольку $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, по формуле (3.14), $(\vec{a}, \vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}^2 + y_1y_2\vec{j}^2 + z_1z_2\vec{k}^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)(\vec{i}, \vec{j}) + (x_1z_2 + x_2z_1)(\vec{i}, \vec{k}) + (y_1z_2 + y_2z_1)(\vec{j}, \vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Из (3.31) следует, что $(\vec{a}, \vec{a}) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, т. е. $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. ■

Всюду в этом параграфе считаем, что координаты векторов заданы в ортонормированном базисе, не оговаривая этого особо.

Пример 1. Найдите координаты и длину вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a} = (0; -2; -3)$, $\vec{b} = (3; 2; 3)$.

$\triangle$ Согласно свойству линейности координат, $3\vec{a} + 2\vec{b} = (3 \cdot 0 + 2 \cdot 3;\ \ 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2;\ \ 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 3) = (6; -2; -3)$. Поэтому $|3\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = 7$. $\blacktriangle$

Пример 2. Найдите, при каких значениях m векторы $\vec{a} = (m; -2; 1)$ и $\vec{b} = (m; m; -3)$ ортогональны.

$\triangle$ Имеем $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow 0 = (\vec{a}, \vec{b}) = m \cdot m + (-2) \cdot m + 1 \cdot (-3) = m^2 - 2m - 3 \Leftrightarrow (m = -1$ или $m = 3)$. $\blacktriangle$

Пример 3. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$, противоположно направленного вектору $\vec{a} = (2; -2; 1)$.

$$\triangle\ |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3; \vec{e} = -\vec{a}/|\vec{a}| =$$

$$= (-2/3; 2/3;\ -1/3).\ \blacktriangle$$

Пример 4. Найдите угол между векторами $\vec{a} = (1; 2; 2)$ и $\vec{b} = (-1; 0; -1)$.

$$\triangle \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135^\circ.\ \blacktriangle$$

Если $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — ортонормированный базис, то система координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ называется *прямоугольной*. Если $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ — точки, заданные своими координатами в прямоугольной системе, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ \ y_2 - y_1;\ \ z_2 - z_1)$, $|\overrightarrow{AB}| = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Пример 5. В треугольнике с вершинами в точках A (3; 2; —3), B (4; 3; —3), C (3; 1; —4) найдите величину угла $\widehat{A}$ и длину медианы $[AN]$.

$\triangle$ Так как $\widehat{A}$—угол между векторами $\overrightarrow{AB}=(4-3;\ 3-2;\ -3-(-3))=(1;\ 1;\ 0)$ и $\overrightarrow{AC}=(0;\ -1;\ -1)$, то $\cos\widehat{A}=(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})/(|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|)=(-1)/(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})=-1/2$, т. е. $\widehat{A}=120°$. Вектор $\overrightarrow{AN}=(1/2)(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=(1/2;\ 0;\ -1/2)$, $|AN|=\sqrt{(1/2)^2+(-1/2)^2}=1/\sqrt{2}$. ▲

Два единичных взаимно перпендикулярных вектора, параллельных плоскости P, взятые в определенном порядке, называются *ортонормированным* (*прямоугольным*) *базисом в плоскости* P. Векторы ортонормированного базиса принято обозначать $\vec{i}$, $\vec{j}$. Каждый вектор $\vec{a}$, параллельный плоскости P, единственным образом представляется в виде $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Числа x, y называют *координатами вектора* $\vec{a}$ *в базисе* $\{\vec{i},\ \vec{j}\}$ и пишут $\vec{a}=(x;\ y)$. Если $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, то для любых чисел α и β $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=(\alpha x_1+\beta x_2;\ \alpha y_1+\beta y_2)$, $(\vec{a},\ \vec{b})=x_1x_2+y_1y_2$, $|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$. Равенство $\vec{a}=\vec{b}$ эквивалентно системе равенств $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Если $O\in P$, а $\{\vec{i},\ \vec{j}\}$ — ортонормированный базис в плоскости P, то система координат $\{O,\ \vec{i},\ \vec{j}\}$ на плоскости P называется *прямоугольной*. Если A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$ — точки плоскости P, заданные своими координатами в прямоугольной системе координат, то $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$, $|\overrightarrow{AB}|=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Пример 6. Даны точка A (—1; 2) и вектор $\vec{a}=(3;\ -4)$. Найдите координаты таких точек B и C, что $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}\perp\vec{a}$ и $|\overrightarrow{AC}|=|\vec{a}|$.

$\triangle$ Пусть B $(x;\ y)$. Тогда $\overrightarrow{AB}=(x+1;\ y-2)$, и если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, то $3=x+1$, $-4=y-2$, т. е. $x=2$, $y=-2$. Итак, точка B имеет координаты (2; —2). Пусть C $(\tilde{x};\ \tilde{y})$. Тогда $\overrightarrow{AC}=(\tilde{x}+1;\ \tilde{y}-2)$. Так как $(\overrightarrow{AC},\ \vec{a})=3(\tilde{x}+1)-4(\tilde{y}-2)=0$, то $\tilde{x}=(4/3)\tilde{y}-11/3$. Далее, $|\overrightarrow{AC}|=$

$= |\vec{a}|$, т. е. $(\tilde{x}+1)^2 + (\tilde{y}-2)^2 = 3^2 + (-4)^2$, или $((4/3)\,\tilde{y} - 8/3)^2 + (\tilde{y}-2)^2 = 25$. Решая это уравнение относительно $\tilde{y}$, найдем $\tilde{y}_1 = -1$, $\tilde{y}_2 = 5$. Следовательно, существуют две точки C, удовлетворяющие условию задачи: $C_1\,(-5; -1)$ и $C_2\,(3; 5)$. ▲

Пример 7 (нормальное уравнение прямой на плоскости). Докажите, что в любой системе координат уравнение

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 > 0 \qquad (3.32)$$

определяет прямую на плоскости. Выясните геометрический смысл коэффициентов A и B, если система координат прямоугольная.

□ Если $M_1\,(x_1; y_1)$ и $M_2\,(x_2; y_2)$ — две различные точки, заданные своими координатами в некоторой (не обязательно прямоугольной) системе координат, то в этой системе координат уравнение прямой $l = (M_1M_2)$ имеет вид [см. формулу (2.53) гл. 2] $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, или $Ax + By + C = 0$, где $A = y_2 - y_1$, $B = -(x_2 - x_1)$, $A^2 + B^2 > 0$, $C = -Ax_1 - By_1$. Вектор

$$\vec{a} = (-B; A) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1). \qquad (3.33)$$

— направляющий вектор прямой l, заданной уравнением (3.32).

Всякое уравнение (3.32) есть уравнение прямой на плоскости. Эта прямая проходит через точки $(0; -C/B)$ и $(-C/A; 0)$, если $A \neq 0$, $B \neq 0$. Если $A = 0$, то уравнение $By + C = 0$, $B \neq 0$ — уравнение прямой, проходящей через точки $(0; -C/B)$ и $(1; -C/B)$. Эта прямая параллельна оси абсцисс. Уравнение $Ax + C = 0$, $A \neq 0$ есть уравнение прямой, параллельной оси ординат $\left(\text{прямая проходит через точки } \left(-\frac{C}{A}; 0\right) \text{ и } \left(-\frac{C}{A}; 1\right)\right)$.

Если $M_1\,(x_1; y_1)$ — точка прямой l с уравнением (3.32), то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е. $C = -Ax_1 - By_1$, и уравнение (3.32) можно записать в виде

$$A\,(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (3.34)$$

Если система координат — прямоугольная, то вектор $\vec{N} = (A; B)$ удовлетворяет соотношению $(\vec{N}, \vec{a}) = A\,(-B) + BA = 0$, т. е. $\vec{N} \perp \vec{a}$ (рис. 3.25). Вектор $\vec{N}$ называется *нормальным вектором прямой* l, заданной уравнением (3.32). Таким образом, для прямой l, заданной уравнением (3.32) в прямоугольной системе координат, координаты нормального вектора $\vec{N}$ — это коэффициенты при переменных x и y в уравнении (3.32). Уравнение (3.32) можно записать также в виде

$$(\vec{r}, \vec{N}) = D, \qquad (3.35)$$

где $\vec{r} = (x; y)$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x; y)$ прямой l, $\vec{N} = (A; B)$ — ее нормальный вектор, $D = -C$. Уравнение (3.35), эквивалентное (3.32), если система координат прямоугольная, называется *нормальным векторным уравнением прямой на плоскости*, а соответствующее уравнение (3.32) — *нормальным* (*координатным*) *уравнением* l. ■

Пример 8. Найдите радиус-вектор $\vec{x}$ общей точки прямых l: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$ и L: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{b}t$, $t \in R$, $(\vec{N}, \vec{b}) \neq 0$.

△ $(\vec{x}, \vec{N}) = D$ и $\vec{x} = \vec{r}_0 + \vec{b}t$ при некотором $t \in R$. Подставляя $\vec{x}$ в первое из уравнений, найдем

$$(\vec{r}_0, \vec{N}) + t(\vec{b}, \vec{N}) = D, \text{ т. е. } t = \frac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{b}, \vec{N})} \text{ и}$$

$$\vec{x} = \vec{r}_0 + \frac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{b}, \vec{N})}\vec{b}. ▲$$

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется величина меньшего из углов, образованных этими прямыми. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90° (все четыре угла, образованные этими прямыми, конгруэнтны). *Если прямые параллельны, то угол между ними считают равным* 0°. *Углом между двумя скрещивающимися прямыми* называют угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — направляющие векторы прямых, то угол φ между этими прямыми находят по формуле

$$\cos\varphi = |(\vec{a}, \vec{b}) / (|\vec{a}||\vec{b}|)|.$$

Пример 9. Найдите угол φ между прямыми $-x + 2y + 3 = 0$ и $3x - y - 1 = 0$.

△ Направляющие векторы прямых: $\vec{a} = (-2; -1)$, $\vec{b} = (1; 3)$ [см. (3.33)]. Следовательно,

$$\cos\varphi = \left|\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right| = \left|\frac{(-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 3}{\sqrt{5}\,\sqrt{10}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т. е. } \varphi = 45^\circ. ▲$$

Пример 10. Найдите точку M^* $(x^*; y^*)$, симметричную точке M_0 $(1; 3)$ относительно прямой l: $x - 2y + 3 = 0$.

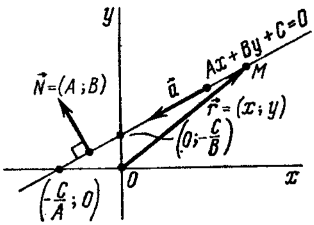


Рис. 3.25

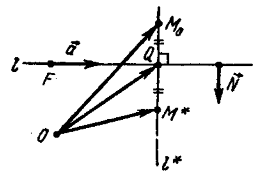


Рис. 3.26

△ По определению симметричной точки:

а) вектор $\overrightarrow{M_0M^*} = (x^* - 1; y^* - 3)$ перпендикулярен прямой l, т. е. ортогонален ее направляющему вектору $\vec{a} = (2; 1)$, иными словами,

$$0 = (\overrightarrow{M_0M^*}, \vec{a}) = 2(x^* - 1) + (y^* - 3) =$$
$$= 2x^* + y^* - 5; \qquad (3.36)$$

б) середина отрезка $[MM^*]$, т. е. точка $Q\left(\frac{1 + x^*}{2}; \frac{3 + y^*}{2}\right)$ (рис. 3.26), лежит на прямой l, и, значит, координаты $(1 + x^*)/2$ и $(3 + y^*)/2$ удовлетворяют уравнению прямой:

$$0 = \frac{1 + x^*}{2} - 2\,\frac{3 + y^*}{2} + 3 = \frac{1}{2}x^* - y^* + \frac{1}{2}. \qquad (3.37)$$

Из системы уравнений (3.36), (3.37) находим $x^* = 9/5$, $y^* = 7/5$. ▲

Пример 11. Напишите уравнение прямой l^*, проходящей через точку M_0 (3; 7) перпендикулярно прямой l: $x - y + 3 = 0$. Найдите расстояние от точки M_0 до прямой l.

△ Нормальный вектор $\vec{N} = (1; -1)$ прямой l является направляющим вектором прямой l^*. Поскольку l^* проходит через точку M_0 (3; 7), ее уравнение

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-1} \iff x+y-10=0.$$

Координаты $(x_Q;\ y_Q)$ общей точки Q прямых l и l^* (т. е. основания перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l) находятся из системы уравнений $x_Q - y_Q + 3 = 0$, $x_Q + y_Q - 10 = 0$, т. е. $x_Q = 7/2$, $y_Q = 13/2$. Расстояние от точки M_0 до l равно

$$d = |M_0Q| = \sqrt{(7/2-3)^2+(13/2-7)^2} = 1/\sqrt{2}. \ ▲$$

Так же как и в пространстве, на плоскости вводится операция ортогонального проецирования на прямую: если M_0 — точка плоскости P, то ее *ортогональной проекцией* $\text{Пр}_l M_0$ *на прямую* $l \subset P$ называется основание Q перпендикуляра l^*, опущенного из точки M_0 на прямую l ($Q = M_0$, если $M_0 \in l$) (рис. 3.26). Если зафиксировать прямую $l_0 \in P$, перпендикулярную l, то, поскольку $l_0 \| l^*$, имеем $\text{Пр}_l M_0 = \Pi_l^{l_0}(M_0) = \Pi_l^{l^*}(M_0)$. По определению, $\text{Пр}_l \vec{b} = \Pi_l^{l_0}(\vec{b})$ для любого вектора $\vec{b}$ плоскости P. Как и для ортогонального проецирования на прямую в пространстве, выполнены равенства

$$\text{Пр}_l \vec{b} + \text{Пр}_{l_0} \vec{b} = \vec{b}, \quad \text{если } l \perp l_0; \tag{3.38}$$

$$\text{Пр}_l \vec{b} = \frac{(\vec{a},\ \vec{b})}{(\vec{a},\ \vec{a})}\,\vec{a}, \tag{3.39}$$

$$|\text{Пр}_l \vec{b}| = \frac{|(\vec{a},\ \vec{b})|}{|\vec{a}|}, \tag{3.40}$$

если $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой l.

Прямая $l \in P$ разбивает плоскость P на две полуплоскости. Если зафиксировать прямую $l_0 \perp l$ и нормальный вектор $\vec{N}$ прямой l, то точки $M_1 \notin l$ и $M_2 \notin l$ лежат в одной полуплоскости тогда и только тогда, когда векторы $\text{Пр}_{l_0}\overrightarrow{FM_1}$ и $\text{Пр}_{l_0}\overrightarrow{FM_2}$ сонаправлены (рис. 3.27), т. е. числа $d_1 = (\overrightarrow{FM_1}, \vec{N})/|\vec{N}|$ и $d_2 = (\overrightarrow{FM_2}, \vec{N})/|\vec{N}|$ [ср. с (3.39)] имеют одинаковый знак. В связи с этим вводится для каждой точки $M \in P$ число

$$d = d_l(M) = \frac{(\overrightarrow{FM}, \vec{N})}{|\vec{N}|}, \tag{3.41}$$

называемое *ориентированным расстоянием от точки M до прямой l.* Числа $d_l(M_1)$ и $d_l(M_2)$ имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда точки M_1 и M_2 лежат в одной полуплоскости, определяемой прямой l; $d_l(M) > 0$ тогда и только тогда, когда точка M расположена в той же полуплоскости, что и конец вектора $\vec{N}$, если начало $\vec{N}$ поместить на прямой l.

Пример 12 (расстояние от точки до прямой на плоскости). Докажите, что число $d_l(M)$ в формуле (3.41) не зависит ни от выбора точки $F \in l$, ни от длины вектора $\vec{N}$. Проверьте, что $|d_l(M_0)|$ — обычное расстояние от точки M_0 до прямой l. Докажите, что если l: $Ax + By + C = 0$ и $\vec{N} = (A; B)$, то для точки $M_0(x_0; y_0)$

$$d_l(M_0) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.42}$$

□ Если F' — другая точка l, то $\overrightarrow{F'F} \perp \vec{N}$, т. е. $(\overrightarrow{F'F}, \vec{N}) = 0$, поэтому

$$\frac{(\overrightarrow{F'M}, \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{(\overrightarrow{F'F}, \vec{N}) + (\overrightarrow{FM}, \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{(\overrightarrow{FM}, \vec{N})}{|\vec{N}|}.$$

Если $\vec{N'} = k\vec{N}$, $k > 0$, то $|\vec{N'}| = k|\vec{N}|$ и $(\overrightarrow{FM}, \vec{N'})/|\vec{N'}| = (\overrightarrow{FM}, k\vec{N})/(k|\vec{N}|) = (\overrightarrow{FM}, \vec{N})/|\vec{N}|$. Расстояние δ от точки M_0 до прямой l есть (рис. 3.27) $\delta = |\text{Пр}_{l_0} \overrightarrow{FM_0}| = |(\overrightarrow{FM_0}, \vec{N})|/|\vec{N}| = |d_l(M_0)|$ [см. формулу (3.40)]. Наконец если $l: Ax + By + C = 0$, $\vec{N} = (A; B)$ и $M_0(x_0; y_0)$, то, обозначая $(x_F; y_F)$ координаты точки F и используя тот факт, что $F \in l$, т. е. $C = -(Ax_F + By_F)$, получим

$$d_l(M_0) = \frac{(\overrightarrow{FM_0}, \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{(x_0 - x_F)A + (y_0 - y_F)B}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \blacksquare$$

Пример 13. Найдите длину h высоты, опущенной из вершины A (4; 4) треугольника ABC, если B (—6; —1), C (—2; —4).

△ Уравнение прямой $l=(BC)$: $\frac{x+6}{-2+6}=\frac{y+1}{-4+1} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 3x+4y+22=0$. Поэтому

$$h=|d_l(A)|=\left|\frac{3\cdot4+4\cdot4+22}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=10. \blacktriangle$$

Пример 14. Напишите уравнение биссектрисы $\tilde{l}$ того угла, образованного прямыми l: $x+7y=0$ и L: $x-y-4=0$, внутри которого лежит точка A (1; 1).

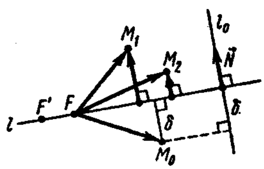


Рис. 3.27

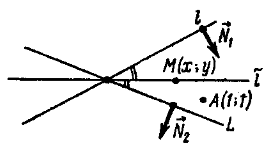


Рис. 3.28

△ Если $M\ (x;\ y) \in \tilde{l}$ и лежит внутри данного угла (рис. 3.28), то числа $d_l\ (M) = (x+7y)/\sqrt{50}$ и $d_l\ (A) = (1+7\cdot1)/\sqrt{50} > 0$ имеют одинаковый знак, т. е. $d_l\ (M) > 0$. Одинаковый знак и у чисел $d_L\ (M) = (x-y-4)/\sqrt{2}$ и $d_L\ (A) = (1-1-4)/\sqrt{2} < 0$, т. е. $d_L\ (M) < 0$. Точка $M\ (x;\ y)$ удовлетворяет определяющему свойству биссектрисы угла: ее расстояния $|d_l(M)| = d_l\ (M)$ и $|d_L\ (M)| = -d_L(M)$ до прямых l и L равны: $(x+7y)/(5\sqrt{2}) = -(x-y-4)/\sqrt{2}$, т. е. $6x+2y-20=0$. Итак, все точки биссектрисы удовлетворяют уравнению $3x+y-10=0$, которое, следовательно, и есть уравнение биссектрисы. ▲

Пример 15. Дан треугольник ABC: A (4; 4), B (—6; —1), C (—2; —4). Напишите уравнение биссектрисы внутреннего угла C.

△ Имеем $\overrightarrow{CA} = (6;\ 8)$, $\overrightarrow{CB} = (-4;\ 3)$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$, $|\overrightarrow{CB}| = 5$. По формуле из примера 11

§ 2 направляющий вектор $\overrightarrow{CL}$ биссектрисы равен

$$\frac{|\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{CB}+|\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|+|\overrightarrow{CB}|}=\frac{10\overrightarrow{CB}+5\overrightarrow{CA}}{15}=\frac{2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}}{3}=$$

$$=\left(-\frac{2}{3};\ \frac{14}{3}\right).$$

Следовательно, ее уравнение $\frac{x+2}{-2/3}=\frac{y+4}{14/3}\Leftrightarrow 7x+y+$ $+18=0$. ▲

Пример 16. Зная вершину A (3; —4) треугольника ABC и уравнения двух его высот (BM): $7x-2y-1=0$ и $(CN): 2x-7y-6=0$, напишите уравнение стороны (BC).

△ Нормальный вектор (7; —2) прямой (BM) параллелен прямой (AC). Поэтому ее уравнение $\frac{x-3}{7}=\frac{y+4}{-2}$, или (AC): $2x+7y+22=0$. Координаты точки $C(x_C;\ y_C)=(AC)\cap(CN)$ найдем из системы уравнений $2x_C+7y_C+22=0$, $2x_C-7y_C-6=0\Leftrightarrow x_C=-4$, $y_C=-2$. Аналогично, (2; —7) — направляющий вектор (AB), и уравнение этой прямой $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-7}$, или (AB): $7x+2y-13=0$. Координаты точки $B(x_B;\ y_B)$ находятся из системы уравнений $7x_B+2y_B-13=0$, $7x_B-$ $-2y_B-1\doteq 0$, т. е. $x_B=1$, $y_B=3$. Следовательно, уравнение (BC):

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-3}{-2-3}\Longleftrightarrow x-y+2=0. ▲$$

Пример 17. Напишите уравнения и найдите длину δ перпендикуляра, опущенного из точки M_0 (—3; 13; 7) на прямую l: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{1}$.

△ Пусть $Q(x_Q;\ y_Q;\ z_Q)$—основание искомого перпендикуляра (см. рис. 3.26). Так как $Q\in l$, то $\frac{x_Q-1}{3}=\frac{z_Q-3}{1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_Q=3z_Q-8,\quad \frac{y_Q-2}{-4}=\frac{z_Q-3}{1}\Leftrightarrow y_Q=-4z_Q+14.$$

Вектор $\overrightarrow{M_0Q}=(x_Q+3;\ y_Q-13;\ z_Q-7)$ ортогонален направляющему вектору $\vec{a}=(3;\ -4;\ 1)$ прямой $l:0=$

$=(\vec{a}, \overrightarrow{M_0Q})=3(x_Q+3)-4(y_Q-13)+(z_Q-7)=3(3z_Q-5)-$
$-4(-4z_Q+1)+(z_Q-7)=26z_Q-26$. Отсюда $z_Q=1$,
$x_Q=-5$, $y_Q=10$,

$$\delta=|M_0Q|=\sqrt{(-5+3)^2+(10-13)^2+(1-7)^2}=7.$$

Уравнения прямой (M_0Q)

$$\frac{x+3}{-5+3}=\frac{y-13}{10-13}=\frac{z-7}{1-7} \iff \frac{x+3}{2}=\frac{y-13}{3}=\frac{z-7}{6}. \ \blacktriangle$$

Пример 18. Найдите точку $M^*(x^*; y^*; z^*)$, симметричную точке $M_0(1; 2; 3)$ относительно прямой l: $\frac{x-8}{1}=$
$=\frac{y-11}{3}=\frac{z-4}{-1}$.

$\triangle$ Векторы $\overrightarrow{M_0M^*}=(x^*-1; y^*-2; z^*-3)$ и $\vec{a}=$
$=(1; 3; -1)$ ортогональны (ср. с примером 10, рис. 3.26): $x^*-1+3(y^*-2)-(z^*-3)=0$. Середина $Q\left(\frac{1+x^*}{2}; \frac{2+y^*}{2};\right.$
$\left.\frac{3+z^*}{2}\right)$ отрезка $[M_0M^*]$ лежит на прямой l:

$$\frac{(1+x^*)/2-8}{1}=\frac{(2+y^*)/2-11}{3}, \quad \frac{(1+x^*)/2-8}{1}=$$
$$=\frac{(3+z^*)/2-4}{-1}.$$

Решая систему трех получившихся уравнений, найдем: $x^*=9$, $y^*=2$, $z^*=11$. $\blacktriangle$

Пример 19. Напишите уравнения общего перпендикуляра к двум прямым l: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-3}$ и L: $\frac{x}{-2}=$
$=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{1}$.

$\triangle$ Пусть $\vec{a}=(1; 2; -3)$ и $\vec{b}=(-2; 1; 1)$ — направляющие векторы данных прямых, $M_1(x_1; y_1; z_1)\in l$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)\in L$ — точки пересечения этих прямых с искомым перпендикуляром. Шесть уравнений для нахождения x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 получаем из следующих условий:

$$M_1\in l, \text{ т. е. } \frac{x_1-2}{1}=\frac{y_1-2}{2}, \quad \frac{x_1-2}{1}=\frac{z_1+1}{-3} \Leftrightarrow y_1=$$
$$=2x_1-2, \ z_1=-3x_1+5;$$

$M_2 \in L$, т. е. $\frac{x_2}{-2}=\frac{y_2-2}{1}$, $\frac{z_2-4}{1}=\frac{y_2-2}{1} \Longleftrightarrow x_2=$
$= -2y_2+4$, $z_2=y_2+2$;

$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a})=0$, т. е. $x_2-x_1+2(y_2-y_1)-3(z_2-z_1)=$
$=0 \Longleftrightarrow 14x_1+3y_2-17=0$;

$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{b})=0$, т. е. $-2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)=$
$=0 \Longleftrightarrow x_1+2y_2-3=0$.

Отсюда $x_1=y_2=1$, $y_1=0$, $z_1=x_2=2$, $z_2=3$. Следовательно, $M_1(1;\ 0;\ 2)$, $M_2(2;\ 1;\ 3)$. Уравнения перпендикуляра $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{3-2} \Longleftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$. Расстояние $|M_1M_2|$ между скрещивающимися прямыми l и L равно $|M_1M_2|=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{3}$. ▲

Пример 20. Докажите, что прямая $\tilde{l}$, проходящая через точку M_0 (1; 2; 3) и пересекающая прямые l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ и L: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-8}{-9}=\frac{z+3}{6}$, образует с этими прямыми равные углы.

△ Если $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)=l \cap \tilde{l}$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)=L \cap \tilde{l}$, то существуют такие числа t и τ, что $x_1=1+2t$, $y_1=1-t$, $z_1=1+2t$, $x_2=2+2\tau$, $y_2=8-9\tau$, $z_2=-3+6\tau$. Точки M_0, M_1, M_2 лежат на одной прямой, т. е. векторы $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-1;\ \ y_1-2;\ \ z_1-3)=(2t;\ \ -t-1;\ \ 2t-2)$ и $\overrightarrow{M_0M_2}=(x_2-1;\ \ y_2-2;\ z_2-3)=(2\tau+1;\ \ -9\tau+6;\ \ 6\tau-6)$ коллинеарны. По условию коллинеарности,

$$0=\begin{vmatrix} 2t & -t-1 \\ 2\tau+1 & -9\tau+6 \end{vmatrix}=-16t\tau+13t+2\tau+1,$$

$$0=\begin{vmatrix} 2t & 2t-2 \\ 2\tau+1 & 6\tau-6 \end{vmatrix}=8t\tau-14t+4\tau+2,$$

$$0=\begin{vmatrix} -t-1 & 2t-2 \\ -9\tau+6 & 6\tau-6 \end{vmatrix}=12t\tau-6t-24\tau+18.$$

Исключая $t\tau$ из первых двух уравнений, получаем $\tau = (3/2)t - 1/2$. Если исключить $t\tau$ из последних двух уравнений, то получим $\tau = (t+1)/2$. Следовательно, $3t - 1 = t + 1$, т. е. $t = 1$, $\tau = (1+1)/2 = 1$. Таким образом, $M_1(3; 0; 3)$, $M_2(4; -1; 3)$. Уравнения $\tilde{l}$

$$\frac{x-1}{4-3} = \frac{y-2}{-1-0} = \frac{z-3}{3-3} \iff \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{0}.$$

Направляющие векторы прямых $\tilde{l}$, l, L таковы: $\vec{c} = (1; -1; 0)$, $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (2; -9; 6)$. Угол φ между прямыми l и $\tilde{l}$ находится по формуле

$$\cos\varphi = \left|\frac{(\vec{a}, \vec{c})}{|\vec{a}||\vec{c}|}\right| = \frac{2\cdot 1 + (-1)(-1) + 2\cdot 0}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = 45^\circ.$$

Угол ψ между прямыми $\tilde{l}$ и L определяется из соотношения

$$\cos\psi = \left|\frac{(\vec{b}, \vec{c})}{|\vec{b}||\vec{c}|}\right| = \frac{2\cdot 1 + (-9)\cdot(-1) + 6\cdot 0}{\sqrt{2}\sqrt{2^2+(-9)^2+6^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т. е.}$$

$$\psi = 45^\circ = \varphi. \ \blacktriangle$$

Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и пусть P — плоскость, заданная нормальным векторным уравнением

$$(\vec{r}, \vec{N}) = -D, \tag{3.43}$$

где $\vec{r} = (x; y; z)$ — радиус-вектор произвольной точки $M(x; y; z) \in P$, $\vec{N} = (A; B; C)$, $A^2 + B^2 + C^2 = |\vec{N}|^2 > 0$ — нормальный вектор плоскости P. Раскрывая левую часть формулы (3.43) по формуле (3.31), получаем *нормальное координатное уравнение плоскости* P:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0. \tag{3.44}$$

Плоскость P, заданная нормальным уравнением в прямоугольной системе координат, перпендикулярна вектору $\vec{N} = (A; B; C)$, координаты которого — коэффициенты при неизвестных x, y, z в уравнении (3.44) этой плоскости.

Если $A \neq 0$, то P пересекает ось абсцисс в точке $M_1(-D/A; 0; 0)$. Если $B \neq 0$, то P пересекает ось ординат в точке $M_2(0; -D/B; 0)$. Если $C \neq 0$, то P пересекает ось аппликат в точке $M_3(0; 0; -D/C)$.

Если $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$, $M_3(0; 0; c)$ — три точки пересечения плоскости P с осями координат, то уравнение плоскости P

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{3.45}$$

Уравнение (3.45) называется *уравнением плоскости в отрезках.*

Если в уравнении (3.44) $A = 0$, т. е. $(\vec{i}, \vec{N}) = 0$, то плоскость P параллельна оси абсцисс. Она пересекает плоскость Oyz по прямой, уравнения которой $x = 0$, $By + Cz + D = 0$. Если $B = 0$ $(C = 0)$, то плоскость P параллельна оси ординат (оси аппликат).

Как и в случае прямой на плоскости, для плоскости P, заданной уравнением (3.44) в прямоугольной системе координат в пространстве, вводится *ориентированное расстояние* $d_P(M_0)$ *от точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ пространства *до плоскости* P по формуле

$$d_P(M_0)=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.46}$$

Для любых двух точек $M_1 \notin P$ и $M_2 \notin P$ знаки чисел $d_P(M_1)$ и $d_P(M_2)$ одинаковы тогда и только тогда, когда M_1 и M_2 лежат по одну сторону от плоскости P (в одном полупространстве, определяемом этой плоскостью); $d_P(M) > 0$ тогда и только тогда, когда точка M лежит в том же полупространстве, что и конец вектора $\vec{N} = (A; B; C)$, если его начало поместить в плоскость P. Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости P, заданной уравнением (3.44) в прямоугольной системе координат, определяется формулой

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{3.47}$$

Пример 21. Докажите формулу (3.47).

□ Записав уравнение (3.44) в виде (3.43), где $\vec{N} = (A; B; C)$, и воспользовавшись обозначением $\vec{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$ и формулами (3.27) и (3.29), получим

$d = |(\vec{r}_0, \vec{N}) + D|/|\vec{N}| = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|:$ $:\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. ■

Пример 22. Напишите нормальное координатное уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1; 0; —1), M_2 (—1; 1; 0), M_3 (0; 2; 1).

△ Пусть (3.44) — искомое уравнение. Координаты точек M_1, M_2, M_3 ему удовлетворяют. Поэтому $A - C + D = 0$, $-A + B + D = 0$, $2B + C + D = 0$. Сложив почленно эти равенства, получим $3B + 3D = 0$, т. е. $B = -D$. Тогда $A = 0$, $C = D$ и искомое уравнение (3.44) имеет вид $D(0 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot z + 1) = 0$. Так как $2D^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0$, то $D \neq 0$. Сокращая на D, окончательно получаем $-y + z + 1 = 0$. ▲

Если точка M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ лежит в плоскости P, заданной уравнением (3.44), то $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ и уравнение (3.44) можно записать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (3.48)$$

Пример 23. Найдите нормальное координатное уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (—1; 2; 1) перпендикулярно вектору $\vec{N} = (2; 0; -2)$.

△ Искомое уравнение имеет вид [ср. с (3.48)]

$$2(x - (-1)) + 0 \cdot (y - 2) + $$
$$+ (-2)(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x - z + 2 = 0. \ ▲$$

Пример 24. Основанием треугольной пирамиды $DABC$ с вершиной D $(2; 2; -\sqrt{3})$ служит треугольник с вершинами в точках A (0; 0; 0), B (0; 1; 1), C (1; 1; 0). Найдите длину h высоты пирамиды.

△ Запишем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A, B, C. По формуле (2.64) имеем

$$0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 1-0 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -x + y - z.$$

Длина высоты есть расстояние от точки D до этой плоскости. По формуле (3.47)

$$h = \frac{|-2+2-\sqrt{3}|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}} = 1. \ ▲$$

Пусть плоскости P_1 и P_2 заданы нормальными координатными уравнениями

$$P_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_1^2+B_1^2+C_1^2>0,$$
$$(3.49)$$
$$P_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\ A_2^2+B_2^2+C_2^2>0.$$

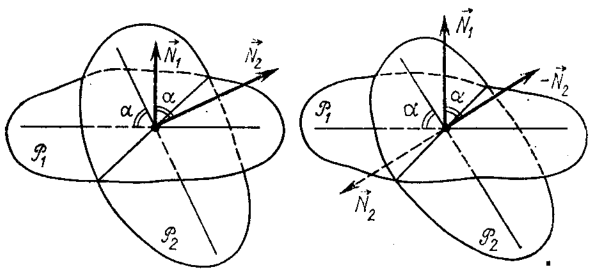
Плоскости P_1 и P_2 параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их нормальные векторы $\vec{N}_1=(A_1;\ B_1;\ C_1)$ и $\vec{N}_2=(A_2;\ B_2;\ C_2)$, т. е. когда существует такое число $\lambda\neq 0$, что

$$A_1=\lambda A_2,\ B_1=\lambda B_2,\ C_1=\lambda C_2. \qquad (3.50)$$

Плоскости P_1 и P_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда ортогональны их нормальные векторы:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (3.51)$$

Пересекаясь, непараллельные плоскости P_1 и P_2 образуют две пары равных двугранных углов. *Углом α между плоскостями* P_1 и P_2 называется величина меньшего из этих



а) $0°\leqslant\varphi\leqslant 90°,\ \alpha=\varphi$ б) $90°\leqslant\varphi\leqslant 180°,\ \alpha=180°-\varphi$

Рис. 3.29

двугранных углов. *Угол между параллельными плоскостями по определению считают равным* 0°. Пусть $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2. Пусть $\varphi=(\widehat{\vec{N}_1,\ \vec{N}_2})$; тогда $\alpha=\varphi$, если $0°\leqslant\varphi\leqslant 90°$, и $\alpha=180°-\varphi$, если $90°\leqslant\varphi\leqslant 180°$ (рис. 3.29, *а*, *б*). В обоих случаях

$$\cos\alpha=|\cos\varphi|=\frac{|(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2)|}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}. \qquad (3.52)$$

Пример 25. Найдите расстояние между параллельными плоскостями P_1 и P_2, заданными уравнениями (3.49).

$\triangle$ Расстояние между P_1 и P_2 есть расстояние между произвольной точкой M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0) \in P_2$ и плоскостью P_1, т. е. число $d = |A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1|/\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$. Плоскости P_1 и P_2 параллельны. Следовательно, существует такое число λ, что справедливы равенства (3.50).

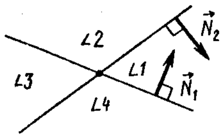


Рис. 3.30

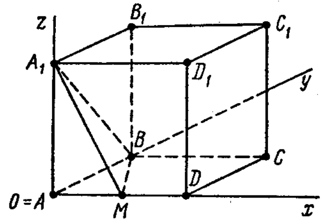


Рис. 3.31

Поэтому $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = \lambda\,(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0) + D_1 = D_1 - \lambda D_2$. Окончательно $d = |D_1 - \lambda D_2|/\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$, где λ удовлетворяет (3.50). Если, например, $A_2 \neq 0$, то $d = \dfrac{|A_2D_1 - A_1D_2|}{|A_2|\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$. $\blacktriangle$

Пример 26. Найдите величину того из четырех двугранных углов, образованных плоскостями P_1: $8x + 4y + z + 1 = 0$ и P_2 : $2x - 2y + z + 1 = 0$, в котором лежит точка M_0 (1; 1; 1).

$\triangle$ Зафиксируем нормальные векторы $\vec{N}_1 = (8;\ 4;\ 1)$ и $\vec{N}_2 = (2;\ -2;\ 1)$ плоскостей. Если занумеровать двугранные углы, как показано на рис. 3.30, то, поскольку

$$d_{P_1}(M_0) = \frac{8\cdot 1 + 4\cdot 1 + 1 + 1}{\sqrt{64 + 16 + 1}} > 0,$$

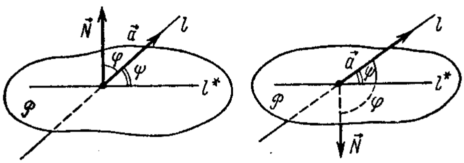
$$d_{P_2}(M_0) = \frac{2\cdot 1 - 2\cdot 1 + 1 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} > 0,$$

точка M_0 лежит внутри $\angle 1$, величина которого по теореме об углах с соответственно перпендикулярными сторонами равна $180^\circ - (\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2}) = 180^\circ - \arccos\dfrac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|} = 180^\circ - \arccos\dfrac{1}{3}$. $\blacktriangle$

Пример 27. Найдите угол α между плоскостями $P_1: 4x + 2y - 2z + 5 = 0$ и $P_2: -x + y + 2z - 3 = 0$.

$\triangle$ Имеем $\vec{N}_1 = (4;\ 2;\ -2)$, $\vec{N}_2 = (-1;\ 1;\ 2)$, $|\vec{N}_1| = 2\sqrt{6}$, $|\vec{N}_2| = \sqrt{6}$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = -6$. По формуле (3.52), $\cos\alpha = \left|\dfrac{-6}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}\right| = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 60°$. ▲

Пример 28. Найдите угол между плоскостью грани $A_1B_1C_1D_1$ и плоскостью, проходящей через вершины A_1, B и середину M ребра $[AD]$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



а) $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$; $\psi = 90° - \varphi$ б) $90° \leqslant \varphi \leqslant 180°$; $\psi = \varphi - 90°$

Рис. 3.32

$\triangle$ Взяв длину ребра куба за единицу длины, рассмотрим систему координат $\{A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}\}$. В этой прямоугольной системе координат A_1 (0; 0; 1), B (0; 1; 0), M (1/2; 0; 0) (рис. 3.31). По формуле (3.45), уравнение плоскости (A_1BM) $\dfrac{x}{1/2} + \dfrac{y}{1} + \dfrac{z}{1} = 1$, т.е. $2x + y + z = 1$. Ее нормальный вектор $\vec{N}_1 = (2;\ 1;\ 1)$. Плоскость $(A_1B_1C_1D_1)$ параллельна координатной плоскости Oxy, ее уравнение $z = 1$, нормальный вектор $\vec{N}_2 = (0;\ 0;\ 1)$. По формуле (3.52),

$$\cos\alpha = \left|\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{ т. е. } \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}. \ ▲$$

Углом между прямой l и плоскостью P называется угол ψ между l и ортогональной проекцией l^* прямой l на плоскость P. Если $\vec{a}$ — направляющий вектор l, $\vec{N}$ — нормальный вектор P, $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{N}})$, то углы ψ и φ связаны (рис. 3.32, *а, б*) соотношениями $\psi = 90° - \varphi$, если $0° \leqslant \varphi \leqslant$

$\leqslant 90°$, и $\psi = \varphi - 90°$, если $90° \leqslant \varphi \leqslant 180°$. Поэтому угол ψ находят по формуле

$$\sin\psi = |\cos\varphi| = \frac{|(\vec{a}, \vec{N})|}{|\vec{a}|\,|\vec{N}|}. \qquad (3.53)$$

Пример 29. При каком значении m угол ψ между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}$ и плоскостью $mx + y + z + 4 = 0$ равен $45°$?

$\triangle$ По формуле (3.53), $1/\sqrt{2} = \sin\psi = |(\vec{a}, \vec{N})|/(|\vec{a}|\,|\vec{N}|)$, где $\vec{a} = (2;\ -1;\ 1)$, $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $\vec{N} = (m;\ 1;\ 1)$, $|\vec{N}| = \sqrt{m^2+2}$, $(\vec{a}, \vec{N}) = 2m$. Следовательно, $1/\sqrt{2} = \frac{|2m|}{\sqrt{6}\,\sqrt{m^2+2}} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{6}$. $\blacktriangle$

Пример 30*. В правильной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) величина двугранного угла при основании равна $30°$. Точки M, N, P, Q — середины сторон $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ соответственно. Точка E лежит на ребре $[AB]$, $F \in [SC]$. Известно, что углы, образованные прямой (EF) с плоскостью (SMP), прямой (EF) с плоскостью (SBA) и прямой (DF) с плоскостью (SNQ), равны. Найдите величину α этих углов.

$\triangle$ Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Возьмем за единицу длины половину длины отрезка $[AB]$ и рассмотрим прямоугольную систему координат $\{O, \vec{OM}, \vec{ON}, \vec{OS}/|\vec{OS}|\}$ (рис. 3.33). В этой системе координат M (1; 0; 0), P (—1; 0; 0), N (0; 1; 0), Q 0; — 1; 0), A (1; —1; 0), B (1; 1; 0), C (—1; 1; 0), D (—1; —1; 0), S (0; 0; h), E (1; m; 0), F ($-\lambda$; λ; $(1-\lambda)h$), где $h = |OS|/|OM|$, $\lambda = |FS|/|SC| \in [0, 1]$ (h, λ, m неизвестны). Уравнения плоскостей:

$P_1 = (ABCD)$: $z = 0$; $P_2 = (SMP)$: $y = 0$; $P_3 = (SNQ)$: $x = 0$;

$$P_4 = (SBA):\quad 0 = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-h \\ 1-0 & 1-0 & 0-h \\ 1-0 & -1-0 & 0-h \end{vmatrix} =$$

$$= -2hx - 2(z-h) \Longleftrightarrow hx + z - h = 0.$$

Нормальные векторы этих плоскостей: $\vec{N}_1 = (0;\ 0;\ 1)$, $\vec{N}_2 = (0;\ 1;\ 0)$, $\vec{N}_3 = (1;\ 0;\ 0)$, $\vec{N}_4 = (h;\ 0;\ 1)$. Направляющие векторы прямых таковы: (EF): $\vec{a} = \vec{EF} = (-\lambda - 1;\ \lambda - m;\ (1-\lambda)h)$, (DF): $\vec{b} = \vec{DF} = (-\lambda + 1;\ \lambda + 1;\ (1-\lambda)h)$. По условию задачи, в соответствии с формулами (3.52)—(3.53)

$$\sqrt{3}/2 = \cos 30° = |(\vec{N}_1, \vec{N}_4)|/(|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_4|) = 1/\sqrt{h^2+1} \Longleftrightarrow h = 1/\sqrt{3};$$

$$\frac{|(\vec{a},\vec{N}_2)|}{|\vec{a}|\,|\vec{N}_2|}=\frac{|(\vec{a},\vec{N}_4)|}{|\vec{a}|\,|\vec{N}_4|}=\frac{|(\vec{b},\vec{N}_3)|}{|\vec{b}|\,|\vec{N}_3|}\iff$$

$$\iff\frac{|\lambda-m|}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-m)^2+(1-\lambda)^2h^2}}=$$

$$=\frac{|2h\lambda|}{\sqrt{h^2+1}\,\sqrt{(\lambda+1)^2+(\lambda-m)^2+(1-\lambda)^2h^2}}=$$

$$=\frac{|1-\lambda|}{\sqrt{(1-\lambda)^2+(\lambda+1)^2+(1-\lambda)^2h^2}}\iff$$

$$\iff\begin{cases}|\lambda-m|=\lambda,\\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2+\lambda^2+(1-\lambda)^2/3}}=\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{(\lambda+1)^2+4(1-\lambda)^2/3}}.\end{cases}$$

Следовательно, либо $\lambda-m=\lambda$, т. е. $m=0$, либо $m=2\lambda$, причем λ в обоих случаях находится из уравнения $\lambda^2((7/3)\lambda^2-(2/3)\lambda+7/3)=(1-\lambda)^2((7/3)\lambda^2+(4/3)\lambda+4/3)\Leftrightarrow((1-\lambda)^2-\lambda^2)((7/3)\lambda^2+(4/3)\lambda+4/3)=\lambda^2(1-2\lambda)\Leftrightarrow(1-2\lambda)((\lambda+1)^2+(1/3)(\lambda-1)^2)=0\Leftrightarrow\lambda=1/2$. Таким образом, задача имеет два решения: $m=0$, $\lambda=1/2$, $h=1/\sqrt{3}$ и $m=1$, $\lambda=1/2$, $h=1/\sqrt{3}$. В обоих случаях $\sin\alpha=(1-\lambda)/\sqrt{(\lambda+1)^2+(1-\lambda)^2(h^2+1)}=\sqrt{3/31}$, т. е. $\alpha=\arcsin\sqrt{3/31}$. ▲

Пример 31. Напишите параметрические уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей $4x+y-6z-2=0$ и $y-3z+2=0$.

△ Полагая $z=4t$, где t — параметр, находим из второго уравнения $y=12t-2$, а затем из первого уравнения $x=-(1/4)(y-6z-2)=1+3t$. Итак, $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{12}=\frac{z}{4}=t$ — искомые уравнения. ▲

Пример 32. Найдите угол φ между прямыми

$$l:\begin{cases}3x+y-z+1=0,\\3x-y+z=0\end{cases}\quad\text{и}\quad L:\begin{cases}x-y+1=0,\\2x+2y-5z+1=0.\end{cases}$$

△ Напишем параметрические уравнения прямой l, взяв $z=t$ в качестве параметра. Решая систему $3x+y=t-1$, $3x-y=-t$, находим $x=-1/6$, $y=t-1/2$. Таким образом, $x=-1/6+0\cdot t$, $y=-1/2+1\cdot t$, $z=0+1\cdot t$ — искомые параметрические уравнения прямой l, а вектор $\vec{a}=(0;\ 1;\ 1)$ (его координаты — коэффициенты при t в параметрических уравнениях) — направляющий вектор прямой l. На прямой L в качестве параметра выберем $y = 5\tau$. Тогда $x = -1 + 5\tau$, $z = (1/5)(2x + 2y + 1) = -1/5 + 4\tau$. Вектор $\vec{b} = (5;\ 5;\ 4)$ — направляющий вектор L. Таким образом, $\cos\varphi = |(\vec{a}, \vec{b})|/(|\vec{a}|\ |\vec{b}|) = 9/(\sqrt{2}\sqrt{66}) = 3\sqrt{3}/(2\sqrt{11})$, $\varphi = \arccos\left((3/2)\sqrt{3/11}\right)$. ▲

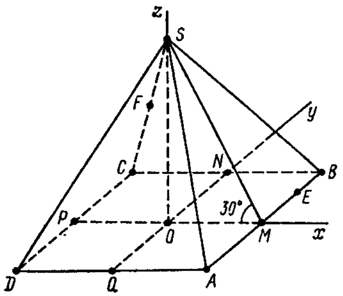


Рис. 3.33

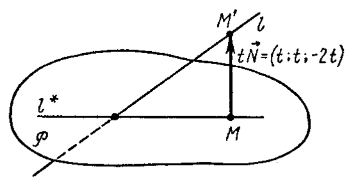


Рис. 3.34

Пример 33. Составьте уравнения ортогональной проекции l^* прямой l: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ на плоскость P: $x + y - 2z + 4 = 0$.

△ Точка M $(x;\ y;\ z)$ лежит на прямой l^* тогда и только тогда (рис. 3.34), когда: а) $M \in P$, т.е. $x + y - 2z + 4 = 0$; б) при некотором t точка M' $(x + t;\ y + t;\ z - 2t)$ лежит на прямой l, т. е. $\frac{x+t-1}{1} = \frac{y+t+1}{-1} = \frac{z-2t}{2}$. Получена система уравнений $x + y - 2z + 4 = 0$, $x + y = -2t$, $2y + z + 2 = 0$. Выражая x, y и z через t, получаем: $x = 2 - (5/2)t$, $y = -2 + (1/2)t$, $z = 2 - t$ — искомые параметрические уравнения l^*. Следовательно, $\frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$ — уравнения l^*. ▲

Пример 34. Найдите проекцию Q точки M_0 $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ на плоскость P: $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ и вектор $\overrightarrow{M_0Q}$. Напишите уравнения прямой (M_0Q).

△ Вектор $\vec{N} = (A;\ B;\ C)$ перпендикулярен плоскости P, поэтому уравнения перпендикуляра $l = (M_0Q)$ к плоскости P, опущенного из точки M_0, имеют вид

$$x = x_0 + At,\ y = y_0 + Bt,\ z = z_0 + Ct,\quad t \in R. \qquad (3.54)$$

Точка $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$ лежит на этом перпендикуляре, поэтому существует такое число t_Q, что $x_Q = x_0 + At_Q$, $y_Q = y_0 + Bt_Q$, $z_Q = z_0 + Ct_Q$. Чтобы найти t_Q, используем то обстоятельство, что $Q \in P$, т. е. $Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D = 0$. Из этого равенства после подстановки x_Q, y_Q, z_Q находим $t_Q = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(A^2 + B^2 + C^2)$. Следовательно,

$$x_Q = \frac{(B^2+C^2)\,x_0 - ABy_0 - ACz_0 - AD}{A^2+B^2+C^2};$$

$$y_Q = \frac{-ABx_0 + (A^2+C^2)\,y_0 - BCz_0 - BD}{A^2+B^2+C^2};$$

$$z_Q = \frac{-ACx_0 - BCy_0 + (A^2+B^2)\,z_0 - CD}{A^2+B^2+C^2};$$

$$\overrightarrow{M_0Q} = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}\vec{N}.$$

В силу (3.54) уравнения (M_0Q) $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$. ▲

Пример 35. Найдите точку M^*, симметричную точке $M_0(1;\ 2;\ 3)$ относительно плоскости $P: 2x - 3y + 5z - 68 = 0$.

△ Точка $M^*(x^*;\ y^*;\ z^*)$ лежит на перпендикуляре l, опущенном из точки M_0 на плоскость P. Уравнения l $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$. Следовательно, $x^* = 1 + 2t$, $y^* = 2 - 3t$, $z^* = 3 + 5t$ при некотором t. Середина $Q\left(\frac{1+x^*}{2};\ \frac{2+y^*}{2};\ \frac{3+z^*}{2}\right)$ отрезка $[M_0M^*]$ лежит в плоскости P, т. е.

$$0 = 2\,\frac{1+x^*}{2} - 3\,\frac{2+y^*}{2} + 5\,\frac{3+z^*}{2} - 68 = 19t - 57.$$

Отсюда $t = 3$, $x^* = 7$, $y^* = -7$, $z^* = 18$. ▲

Пример 36. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра $[AD]$. Какой угол образует с плоскостью грани $ABCD$ линия пересечения плоскостей (AB_1D_1) и (A_1MC_1)?

△ Взяв длину ребра куба в качестве единицы длины, рассмотрим прямоугольную систему координат $\{A_1, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1D_1}, \overrightarrow{A_1A}\}$. В этой системе координат $A_1(0;\ 0;\ 0)$, $B_1(1;\ 0;\ 0;)$, $C_1(1;\ 1;\ 0)$, $D_1(0;\ 1;\ 0)$, $A(0;\ 0;\ 1)$, $M\left(0;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$.

Уравнения плоскостей:

$$(AB_1D_1):\quad \frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1;$$

$$(A_1MC_1):\quad 0=\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & \frac{1}{2}-0 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix}=-x+y-\frac{1}{2}z;$$

$$(ABCD):\quad z=1,\ \vec{N}=(0;\ 0;\ 1).$$

Параметрические уравнения линии l пересечения плоскостей (AB_1D_1) и (A_1MC_1) найдем, взяв $t=(1/4)\,z$ в качестве параметра. Тогда $x=1-4t-y$, $x=y-2t$. Следовательно, $1-4t-y=y-2t$, т.е. $y=1/2-t$ и $x=$ $=1/2-3t$ $(z=4t)$. Таким образом, $\vec{a}=(-3;\ -1;\ 4)$ — направляющий вектор прямой l. Искомый угол ψ находим по формуле (3.53): $\sin\psi=|(\vec{a},\ \vec{N})|/(|\vec{a}|\ |\vec{N}|)=4/\sqrt{26}$, $\psi=$ $=\arcsin 2\sqrt{2/13}$. ▲

Пример 37. Вычислите длину $h=|SH|$ высоты треугольной пирамиды $SABC$, у которой все углы при вершине S прямые, а длины боковых ребер $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ соответственно равны a, b, c.

△ Рассмотрим прямоугольную систему координат $\{S,\ \overrightarrow{SA}/a,\ \overrightarrow{SB}/b,\ \overrightarrow{SC}/c\}$. В этой системе координат $A\ (a;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ b;\ 0)$, $C\ (0;\ 0;\ c)$. По формуле (3.45), уравнение плоскости (ABC) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$. Длина h высоты есть расстояние от точки $S\ (0;\ 0;\ 0)$ до плоскости (ABC). По формуле (3.47) имеем $h=|0/a+0/b+0/c-1|:$ $:\sqrt{1/a^2+1/b^2+1/c^2}$. Следовательно, $1/h^2=1/a^2+1/b^2+$ $+1/c^2$. ▲

Пример 38. Катеты $[AB]$ и $[AC]$ прямоугольного треугольника ABC расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Прямая (AB) образует с ребром двугранного угла угол α. Найдите угол ψ между этим ребром и прямой (AC).

△ Рассмотрим прямоугольную систему координат с началом O в точке A. Ось Oy направим по ребру двугранного угла (рис. 3.35), ось Ox расположим в грани P двугранного угла. Ось Oz направим так, чтобы точки полуплоскости Q имели положительные аппликаты. Тогда уравнение плоскости, содержащей Q, $-x \operatorname{tg} \varphi + z = 0$.

Если $B(x_B; y_B; z_B)$, то из условия $B \in Q$ имеем $z_B = x_B \operatorname{tg} \varphi$. Угол между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\vec{j}$ равен α: $\cos \alpha = |y_B/\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}|$. Отсюда $y_B^2(1-\cos^2\alpha) = (x_B^2 + z_B^2) \times \cos^2\alpha = x_B^2 \cos^2\alpha/\cos^2\varphi$, т. е. $|y_B| = |x_B| \operatorname{ctg}\alpha/\cos\varphi$.

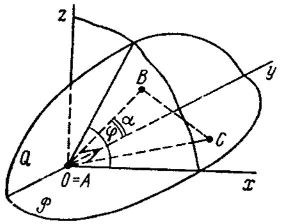


Рис. 3.35

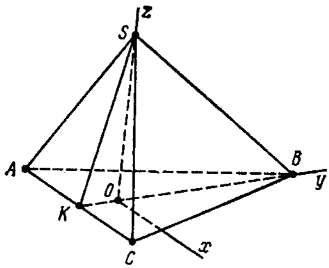


Рис. 3.36

Точка C с координатами $(x_C; y_C; 0)$ удовлетворяет условию $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 0$, т. е. $x_B x_C + y_B y_C = 0$, и, следовательно, $|x_C|/|y_C| = |y_B|/|x_B| = \operatorname{ctg}\alpha/\cos\varphi$. Поэтому

$$\cos\psi = \left|\frac{(\overrightarrow{OC}, \vec{j})}{|\overrightarrow{OC}||\vec{j}|}\right| = \frac{|y_C|}{\sqrt{x_C^2 + y_C^2}} = 1/\sqrt{(x_C/y_C)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha/\cos\varphi)^2 + 1}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\varphi}, \text{ т. е. } \psi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\varphi}. \ \blacktriangle$$

Пример 39. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ длина ребра основания ABC равна a, а угол α между апофемой и боковой гранью равен 45°. Найдите длину h высоты пирамиды.

$\triangle$ Введем прямоугольную систему координат, выбрав за ее начало O центр грани ABC и сонаправив ее оси Ox, Oy, Oz соответственно с векторами $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OS}$ (рис. 3.36).

Тогда $S(0;\ 0;\ h)$, $A(-a/2;\ -a/(2\sqrt{3});\ 0)$, $B(0;\ a/\sqrt{3};\ 0)$, $C(a/2;\ -a/(2\sqrt{3});\ 0)$. Уравнение плоскости (BSC):

$$0=\begin{vmatrix} x-0 & y-a/\sqrt{3} & z-0 \\ 0-0 & 0-a/\sqrt{3} & h-0 \\ a/2-0 & -a/(2\sqrt{3})-a/\sqrt{3} & 0-0 \end{vmatrix}=$$

$$=a\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}x-\frac{h}{2}\left(y-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)+\frac{a}{2\sqrt{3}}z\right).$$

В качестве ее нормального вектора можно взять вектор $\vec{N}=(h\sqrt{3}/2;\ -h/2;\ a/(2\sqrt{3}))$, $|\vec{N}|=\sqrt{h^2+a^2/12}$. Вектор $\overrightarrow{SK}$ апофемы грани ASC равен $(1/2)(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC})=(0;\ -a/(2\sqrt{3});\ -h)$. Он является направляющим вектором $\vec{a}$ прямой (SK), $|\vec{a}|=\sqrt{h^2+a^2/12}$. По формуле (3.53)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\alpha=\frac{|(\vec{a},\ \vec{N})|}{|\vec{a}|\,|\vec{N}|}=\frac{ah\sqrt{3}/4}{h^2+a^2/12}.$$

Получено уравнение $h^2-h(a\sqrt{6}/4)+a^2/12=0$, у которого два решения: $h_1=a/\sqrt{6}$ и $h_2=a\sqrt{6}/12$. ▲

Пример 40*. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Грань SAB перпендикулярна плоскости основания, $\widehat{ASB}=\widehat{ASC}=45°$. Найдите углы $\triangle SAC$.

△ Пусть O — середина $[AB]$, M — основание перпендикуляра, опущенного из точки S на плоскость (ABC) [поскольку плоскости (ASB) и (ABC) перпендикулярны, $M\in(AB)$]. Взяв за единицу длины длину отрезка $[OB]$, рассмотрим прямоугольную систему координат (рис. 3.37) $\left\{O,\ \frac{\overrightarrow{OC}}{\sqrt{3}},\ \overrightarrow{OB},\ \frac{\overrightarrow{MS}}{|MS|}\right\}$. В этой системе координат $A(0;\ -1;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(\sqrt{3};\ 0;\ 0)$, $S(0;\ m;\ h)$, где m и h — неизвестные, входящие в соотношения $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OB}$, $|MS|=h\,|OB|$. Тогда $\overrightarrow{SA}=(0;\ -1-m;\ -h)$, $\overrightarrow{SB}=(0;\ 1-m;\ -h)$, $\overrightarrow{SC}=(\sqrt{3};\ -m;\ -h)$. По условию,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\widehat{ASB}=\frac{(\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SB})}{|\overrightarrow{SA}|\,|\overrightarrow{SB}|}=\frac{m^2-1+h^2}{\sqrt{(m+1)^2+h^2}\,\sqrt{(m-1)^2+h^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\widehat{ASC}=\frac{(\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SC})}{|\overrightarrow{SA}|\,|\overrightarrow{SC}|}=\frac{m^2+m+h^2}{\sqrt{(m+1)^2+h^2}\,\sqrt{3+m^2+h^2}}.$$

Вводя неизвестную $w = m^2 + h^2$, приходим к системе уравнений

$$2(w-1)^2 = (w+2m+1)(w-2m+1), \quad w > 1,$$
$$2(w+m)^2 = (w+2m+1)(w+3), \quad w+m > 0.$$

Упрощая уравнения, получаем $w^2 - 6w + 1 + 4m^2 = 0$, $w^2 - 4w + 2mw + 2m^2 - 6m - 3 = 0$. Почленно вычитая и приводя подобные члены, имеем $m^2 - m(w-3) + (2-w) = 0$, $m = (1/2)(w - 3 \pm \sqrt{w^2 - 6w + 9 - 8 + 4w}) = (w - 3 \pm (w-1))/2$, т. е. возможны два случая: а) $m = -1$ и б) $m = w - 2$. Если $m = -1$, то $w^2 - 6w + 5 = 0$, $w = 5$ ($w = 1$

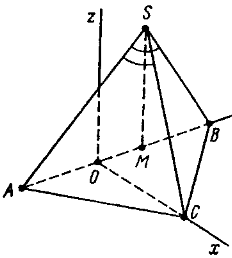


Рис. 3.37

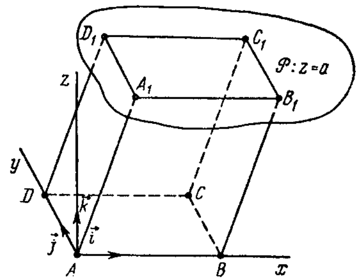


Рис. 3.38

не подходит, так как $w > 1$). Итак, в случае а) $m = -1$, $w = 5$, $h = \sqrt{w - m^2} = 2$. В случае б) $5w^2 - 22w + 17 = 0$, т. е. $w = 17/5$, $m = 7/5$, $h = \sqrt{w - m^2} = 6/5$. Найдем углы треугольника SAC.

а) $\overrightarrow{AS} = (0;\ m+1;\ h) = (0;\ 0;\ 2)$, $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3};\ 1;\ 0)$, $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}) = 0$,

т. е. $\widehat{SAC} = 90°$. Так как $\widehat{ASC} = 45°$, то и $\widehat{SCA} = 45°$.

б) $\overrightarrow{AS} = (0;\ 12/5;\ 6/5) = \frac{6}{5}(0;\ 2;\ 1)$, $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3};\ 1;\ 0)$, $\cos\widehat{SAC} =$

$$= \frac{(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AS}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(6/5)(0\cdot\sqrt{3} + 2\cdot 1 + 1\cdot 0)}{(6/5)\sqrt{0^2+2^2+1^2}\,\sqrt{3+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ т. е.}$$

$$\widehat{SAC} = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \operatorname{arctg} 2.$$

Следовательно, $\widehat{SCA} = 180° - 45° - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg} 3$. ▲

Пример 41*. В основании наклонного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$; $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ — боковые ребра этого параллелепипеда. Длина стороны $[AB]$ равна длине высоты параллелепипеда. Сфера с центром в точке O проходит через вершину B и касается ребер (A_1B_1) и (DD_1) соответственно в точках A_1 и D_1. Найдите отношение объема параллелепипеда к объему сферы, если $\widehat{A_1OB} = \widehat{D_1OB} = 120°$.

$\triangle$ Обозначим $a = |AB|$, $b = |AD|$. Выберем прямоугольную систему координат, взяв точку A за полюс и положив $\vec{i} = \overrightarrow{AB}/|AB|$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}/|AD|$ (рис. 3.38). Вектор $\vec{k}$ направим так, чтобы точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежали по ту же сторону от плоскости $(ABCD)$, что и конец вектора $\vec{k}$, если его начало расположено в точке A. Поскольку длина высоты параллелепипеда равна a, все точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в плоскости $z = a$. Пусть $(m;\ n;\ a)$ — координаты точки A_1, $(0;\ b;\ 0)$ — координаты точки D. Тогда $D_1\ (m;\ n+b;\ a)$, $B\ (a;\ 0;\ 0)$. Пусть $(x;\ y;\ z)$ — координаты точки O, R — неизвестный радиус сферы. Запишем данные задачи:

$$|OB|^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \tag{3.55}$$

$$|OA_1|^2 = (x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-a)^2 = R^2, \tag{3.56}$$

$$|OD_1|^2 = (x-m)^2 + (y-n-b)^2 + (z-a)^2 = R^2. \tag{3.57}$$

Сфера касается ребер (A_1B_1) и (DD_1) в точках A_1 и D_1, поэтому

$$0 = (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{A_1B_1}) = (\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{AB}) = (m-x)a, \tag{3.58}$$

$$0 = (\overrightarrow{OD_1}, \overrightarrow{DD_1}) = (\overrightarrow{OD_1}, \overrightarrow{AA_1}) = (m-x)m + (n+b-y)n + (a-z)a. \tag{3.59}$$

Наконец,

$$-\frac{1}{2} = \cos 120^\circ = \frac{(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA_1}|\,|\overrightarrow{OB}|} = \frac{(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB})}{R^2} = \frac{1}{R^2}\left((m-x)(a-x) + (y-n)y + (z-a)z\right), \tag{3.60}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{(\overrightarrow{OD_1}, \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OD_1}|\,|\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{R^2}\left((m-x)(a-x) + (y-n-b)y + (z-a)z\right). \tag{3.61}$$

Из (3.58) имеем $m = x$. Вычитая из уравнения (3.60) уравнение (3.61), найдем $y = 0$. Вычитая из уравнения (3.56) уравнение (3.57), получаем $n = -b/2$. В результате система упрощается: $(x-a)^2 + z^2 = R^2$, $b^2/4 + (z-a)^2 = R^2$, $-b^2/4 + a(a-z) = 0$, $z(z-a) = -(1/2)R^2$. Складывая три последних уравнения, находим $2(z-a)^2 = (1/2)R^2$, т. е. $z - a = \pm(1/2)R$. Тогда $b^2/4 = (3/4)R^2$, $b = R\sqrt{3}$ и $b^2/4 = a(a-z) = \mp(1/2)aR$. В этом равенстве знак минус невозможен. Следовательно, $a = b^2/(2R) = 3R/2$. Таким образом,

$$\frac{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}}{V_{\text{сферы}}} = \frac{a^2 b}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{27\sqrt{3}}{16\pi}\ . \quad \blacktriangle$$

Пример 42. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E — середина $[CD]$, точка F — середина высоты $[BL]$ грани ABD. Отрезок $[MN]$ с концами на прямых (AD) и (BC) пересекает прямую (EF) и перпендикурен ей. Найдите длину этого отрезка.

$\triangle$ Введем ортогональный базис $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{LP} = \vec{c}$ (P — середина отрезка $[BC]$) (рис. 3.39). Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 0$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$, $|\vec{c}| = a/\sqrt{2}$. Используя формулу для средней линии пространственного четырехугольника, получаем $\overrightarrow{FE} = (1/2)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{LD}) = \vec{a}/4 + \vec{b}/2$. Точки M и N лежат на прямых (AD) и (BC), поэтому существуют такие числа x и y, что $\overrightarrow{PN} = x\vec{b}$, $\overrightarrow{LM} = y\vec{a}$, и, значит, $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PN} = -y\vec{a} + x\vec{b} + \vec{c}$. Из условия перпендикулярности прямых (FE) и (MN) получаем $0 = (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{MN}) = -(1/4)y\vec{a}^2 + (1/2)x\vec{b}^2 = (a^2/4) \times (2x - y)$, т.е. $y = 2x$. Прямые (FE) и (MN) пересекаются. Следовательно, векторы $\overrightarrow{FE} = (1/4)\vec{a} + (1/2)\vec{b}$, $\overrightarrow{MN} = -2x\vec{a} + x\vec{b} + \vec{c}$ и $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}/2 = (1/2 - y)\vec{a} + (1/2)(-\vec{a}/2 + \vec{c} + \vec{b}/2) = (1/4 - 2x)\vec{a} + (1/4)\vec{b} + (1/2)\vec{c}$ компланарны. Согласно признаку компланарности,

$$0 = \begin{vmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 \\ -2x & x & 1 \\ 1/4-2x & 1/4 & 1/2 \end{vmatrix} = (1/4)\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{vmatrix} - (1/2)\begin{vmatrix} -2x & 1 \\ 1/4-2x & 1/2 \end{vmatrix} = (1-6x)/16.$$

Отсюда $x = 1/6$, $\overrightarrow{MN} = (1/6)(-2\vec{a} + \vec{b} + 6\vec{c})$, $|\overrightarrow{MN}| = (1/6)\sqrt{4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 36\vec{c}^2} = a\sqrt{23}/6$. $\blacktriangle$

Пример 43. Выведите все свойства скалярного произведения, используя теорему косинусов и тот факт, что в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ длина $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ равна $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (оба эти факта выводятся в классической геометрии без использования понятия скалярного произведения и его свойств).

$\square$ Пусть $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$. По теореме косинусов, $(\vec{a}, \vec{b}) = (1/2)(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) = (1/2)((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (z_1 + z_2)^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Из этого выражения следует, что $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$. Так как $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$, то $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) =$

$= (\lambda x_1) x_2 + (\lambda y_1) y_2 + (\lambda z_1) z_2 = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$. Наконец, если $\vec{c} = (x_1'; y_1'; z_1')$, то $\vec{a} + \vec{c} = (x_1 + x_1'; y_1 + y_1'; z_1 + z_1')$ и $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) = (x_1 + x_1') x_2 + (y_1 + y_1') y_2 + (z_1 + z_1') z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 + x_1' x_2 + y_1' y_2 + z_1' z_2 = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{c}, \vec{b})$. ■

Пример 44. Докажите, что для вектора $\vec{a} = (x; y; z)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе, $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

□ Рассмотрим прямоугольную систему координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и точку A такую, что $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, т. е. $A\ (x; y; z)$. Пусть M — общая точка прямой, которая параллельна оси Oz и проходит через точку A, и плоскости Oxy; N — общая точка прямой, проведенной через точку M параллельно оси Ox, и оси ординат (рис. 3.40); P — точка пересечения прямой, проведенной через точку M параллельно оси Oy, с осью абсцисс.

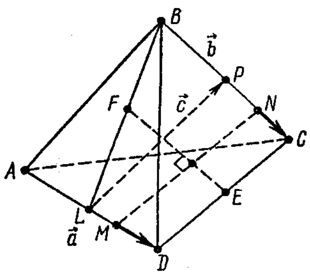


Рис. 3.39

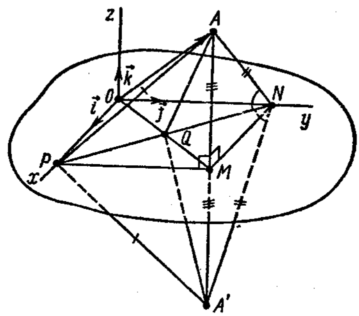


Рис. 3.40

Тогда, по определению координат, $M\ (x; y; 0)$, $N\ (0; y; 0)$, $P\ (x; 0; 0)$, $\overrightarrow{MA} = z\vec{k}$, $|MA| = |z|$, $\overrightarrow{ON} = y\vec{j}$, $|ON| = |PM| = |y|$, $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$, $|OP| = |MN| = |x|$. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ ортогональны. Поэтому либо $M = N$, либо $\widehat{ONM} = 90°$. В обоих случаях, учитывая теорему Пифагора, имеем $|OM| = \sqrt{|ON|^2 + |MN|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Таким образом, если $A = M$, т. е. $z = 0$, то утверждение доказано. Аналогично доказывается утверждение примера, если A лежит в координатной плоскости Oyz или в плоскости Oxz. Рассмотрим случай, когда A не лежит ни в одной из координатных плоскостей. Тогда $PONM$ — прямоугольник. Пусть Q — точка пересечения его диагоналей. Продолжим отрезок $[AM]$ за точку M и отложим вектор $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{AM}$. В $\triangle A'NA$ $[NM]$ — медиана. Поскольку векторы $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{NM}$ коллинеарны соответственно $\vec{k}$ и $\vec{i}$, а $\vec{k}$ и $\vec{i}$ ортогональны, $[NM]$—высота $\triangle A'NA$.

Следовательно, $\triangle A'NA$ равнобедренный: $|AN| = |A'N|$. Аналогично доказывается, что $|AP| = |A'P|$. В $\triangle PAN$ и $\triangle PA'N$ стороны попарно равны: $|PA| = |PA'|$, $|AN| = |A'N|$, $|PN| = |PN|$. Следовательно, $\triangle PAN$ и $\triangle PA'N$ конгруэнтны и, в частности, $A\widehat{N}Q = A'\widehat{N}Q$. Рассмотрим теперь $\triangle ANQ$ и $\triangle A'NQ$. Имеем $|AN| = |A'N|$, $|NQ| = |NQ|$, $A\widehat{N}Q = A'\widehat{N}Q$. Значит, $\triangle ANQ$ и $\triangle A'NQ$ конгруэнтны и, в частности, $|AQ| = |A'Q|$. Таким образом, $\triangle AQA'$ — равнобедренный, а $[QM]$ — медиана, проведенная к основанию. Следовательно, она является и высотой, т. е. $Q\widehat{M}A = 90°$. Поэтому к $\triangle OMA$ применима теорема Пифагора: $|OA| = |\vec{a}| = \sqrt{|OM|^2 + |MA|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Утверждение доказано. ■

Основным моментом было доказательство того факта, что если прямая (AM) перпендикулярна прямым (MN) и (MP), лежащим в плоскости Oxy и не параллельным друг другу, то (AM) перпендикулярна и третьей прямой (OM), лежащей в плоскости Oxy, т. е. доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости без использования в доказательстве свойств скалярного произведения.

Глава 4

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

§ 1. Ориентация на плоскости и в пространстве

Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ — два базиса в пространстве и пусть S (S') — матрица перехода от первого базиса ко второму (от второго — к первому, см. § 6, гл. 2). Говорят, что базис $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ имеет *ту же ориентацию*, что и базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, если $\det S > 0$. При этом пишут $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\} \sim \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Из свойств матрицы перехода (см. § 6 гл. 2) следует, что: 1°) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и 2°) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$, если $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\} \sim \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Поэтому говорят об *одинаково ориентированных* базисах $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$, если $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$. Если два базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ не являются одинаково ориентированными, то говорят, что они *противоположно ориентированы*, и пишут $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \not\sim \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$. Из свойств матрицы перехода от базиса к базису вытекает также, что: 3°) если $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ и $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\} \sim \{\vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3\}$, то $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3\}$. Таким образом, отношение $\sim$ является *отношением эквивалент-*

ности [см. свойства 1°) — 3°)] во множестве всех базисов в пространстве. Поскольку $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \sim \{\vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''\}$, если $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \approx \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ и $\{\vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''\} \approx \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$, множество базисов в пространстве разбивается отношением $\sim$ на *два* непересекающихся множества (*класса эквивалентности*) так, что всякий базис принадлежит одному и только одному классу. Два базиса, принадлежащие одному классу, одинаково ориентированы, любые два базиса, принадлежащие разным классам, противоположно ориентиро-

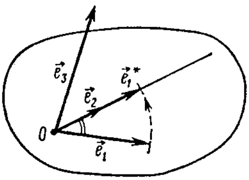


Рис. 4.1

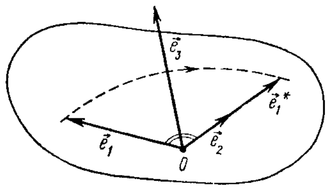


Рис. 4.2

ваны. Один из классов называется классом *правых* базисов (принадлежащие ему базисы называются *правыми* базисами, не принадлежащие — *левыми*). Обычно класс правых базисов выбирают так, что *всякий правый базис* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *удовлетворяет следующему требованию: если базисные векторы отложить от одной точки и положить* $\vec{e}_1^{\,*} = \dfrac{|\vec{e}_1|}{|\vec{e}_2|}\vec{e}_2$, *то кратчайший поворот вектора* $\vec{e}_1$ *вокруг этой точки в плоскости векторов* $\vec{e}_1$ *и* $\vec{e}_2$ *до совмещения с вектором* $\vec{e}_1^{\,*}$ *осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора* $\vec{e}_3$ (рис. 4.1, 4.2).

Пример 1. Пусть $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — базис. Докажите, что: 1) $\{\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}\} \approx \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$; 2) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \sim \{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\} \sim \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\} \approx$ $\approx \{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$ и $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\} \sim \{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\} \sim \{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}$.

$\triangle$ 1) Матрица S перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ к базису $\{\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}\}$ равна

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \det S = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c}\} \approx \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}.$$

2) Матрицы S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 перехода от базиса $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ соответственно к базисам $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}, \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$, $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$, $\{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\}$, $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}$ равны:

$$S_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \det S_1=-1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=1,\ \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}\sim\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\};$$

$$S_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \det S_2=1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1,\ \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}\sim\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\};$$

$$S_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \det S_3=-1\cdot\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}\not\sim\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\};$$

$$S_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \det S_4=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\ \{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}\sim\{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\};$$

$$S_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \det S_5=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,$$

$$\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}\sim\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}.\ \blacktriangle$$

Говорят, что на одной плоскости два базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ имеют *одинаковую ориентацию*, и пишут $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}\sim$ $\sim\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, если $\det S>0$, или, что то же, $\det S'>0$, где S и S' — матрицы перехода соответственно от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ к базису $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ и от базиса $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ к базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Как и в случае пространства, отношение $\sim$ является *отношением эквивалентности во множестве всех базисов одной плоскости*. Данное отношение разбивает это множество на два класса: класс *правых* и класс *левых* базисов. *В правом базисе кратчайший поворот от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ осуществляется против часовой стрелки, в левом базисе — по часовой стрелке.*

Условимся всюду в дальнейшем через $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $(\{\vec{i}, \vec{j}\})$ обозначать правый ортонормированный базис в пространстве (в плоскости).

Класс правых ортонормированных базисов в плоскости (в пространстве), однозначно определенный любым своим представителем, называется положительной *ориентацией на плоскости* (*в пространстве*). Если задан какой-нибудь правый базис $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ $(\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$, то говорят, что на плоскости (в пространстве) с помощью базиса $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ $(\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\})$ задана положительная ориентация. Плоскость (пространство) при этом называют *ориентированной* (*ориентированным*). Ориентацию, задаваемую левым ортонормированным базисом, называют *отрицательной.*

§ 2. Определение и свойства векторного произведения. Условие коллинеарности векторов. Площадь треугольника и четырехугольника

Зафиксируем правый ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Пусть $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ и $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ — произвольные векторы. *Векторным произведением* $[\vec{a}, \vec{b}]$ *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (*в указанном порядке*) называется вектор

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right). \quad (4.1)$$

Из свойств определителей вытекают следующие свойства векторного произведения:

1^0. $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$ (антикоммутативность). (4.2)

$$\square\ [\vec{b}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = -[\vec{a}, \vec{b}]. \ \blacksquare$$

2^0. *Для любых векторов* $\vec{a}' = (a'_x;\ a'_y;\ a'_z)$, $\vec{a}'' = (a''_x;\ a''_y;\ a''_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$ *и любых чисел* α *и* β *справедливы равенства*

$$[\alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}'',\ \vec{b}] = \alpha[\vec{a}',\ \vec{b}] + \beta[\vec{a}'',\ \vec{b}], \qquad (4.3)$$

$$[\vec{b},\ \alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}''] = \alpha[\vec{b},\ \vec{a}'] + \beta[\vec{b},\ \vec{a}''].$$

□ Согласно свойству определителей,

$$[\alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}'', \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha a'_x + \beta a''_x & \alpha a'_y + \beta a''_y & \alpha a'_z + \beta a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a''_x & a''_y & a''_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \alpha[\vec{a}', \vec{b}] + \beta[\vec{a}'', \vec{b}],$$

$$[\vec{b}, \alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}''] = -[\alpha\vec{a}' + \beta\vec{a}'', \vec{b}] = -(\alpha[\vec{a}', \vec{b}] + \beta[\vec{a}'', \vec{b}]) =$$

$$= -(-\alpha[\vec{b}, \vec{a}'] - \beta[\vec{b}, \vec{a}'']) = \alpha[\vec{b}, \vec{a}'] + \beta[\vec{b}, \vec{a}''].$$

Здесь несколько раз использовано свойство 1^0. ■

Пример 1. Докажите, что $[\vec{a},\ \vec{a}] = \vec{0}$.

△ Согласно свойству 1^0, $[\vec{a},\ \vec{a}] = -[\vec{a},\ a]$. Поэтому $2[\vec{a},\ \vec{a}] = \vec{0}$, $[\vec{a},\ \vec{a}] = \vec{0}$. ▲

Приведем геометрические свойства векторного произведения двух векторов.

I. *Вектор* $[\vec{a},\ \vec{b}]$ *ортогонален как вектору* $\vec{a}$, *так и вектору* $\vec{b}$.

□ По формулам (3.31), (4.1), согласно свойству 3^0 определителей имеем

$$(\vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]) = a_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что $(\vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]) = -(\vec{b}, [\vec{b}, \vec{a}]) = -0 = 0$. ■

II. *Длина вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ численно равна площади S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е.*

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

□ Пусть $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Тогда

$$S^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\varphi = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\varphi =$$
$$= (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2.$$

В силу тождества, связанного с тремя определителями,

$$S^2 = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)^2 =$$
$$= |[\vec{a}, \vec{b}]|^2. \ ■$$

III. Из определения векторного произведения и признака коллинеарности векторов следует, что *векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.*

IV. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]\}$ — правый базис.*

□ Достаточно доказать, что определитель матрицы перехода от базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к базису $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]\}$ положителен. Пусть

$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}$, $c_y = -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}$, $c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ — координаты вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$. Тогда

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} -$$
$$- c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = |[\vec{a}, \vec{b}]|^2 > 0,$$

поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. ■

Для данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ свойствами I — IV *вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ определяется однозначно*: если $\vec{a} \| \vec{b}$, то согласно свойству III $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. Если же $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то на основании свойства I вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ перпендикулярен плоскости P, в которой векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис (этим однозначно с точностью до параллельности определяется прямая, которой вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ параллелен), длина вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ согласно свойству II численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направление вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ определяется с помощью свойства IV из условия, что $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]\}$ — правый базис. Таким образом, свойства I—IV можно было бы принять за определение векторного произведения. Этому определению удовлетворил бы вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$, определяемый формулой (4.1), и только он. Часто так и поступают: векторное произведение определяют с помощью свойств I—IV, а формулу (4.1) выводят из такого определения и затем используют в вычислениях.

Пример 2. Найдите $[\vec{a}, \vec{b}]$, если в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $\vec{a} = (-1;\ 0;\ 1)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ 3)$.

△ По формуле (4.1),

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1;\ 5;\ -1). \ \blacktriangle$$

Пример 3. Пусть $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ — произвольный правый ортонормированный базис. Докажите, что для любых векторов $\vec{a} = (a'_x;\ a'_y;\ a'_z)$ и $\vec{b} = (b'_x;\ b'_y;\ b'_z)$, заданных координатами в этом базисе,

$$[a, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix},$$

иначе говоря, *вид правой части формулы (4.1) не зависит от выбора правого ортонормированного базиса.*

□ Вектор $[\vec{i}', \vec{j}']$ имеет длину, равную 1 (свойство II), ортогонален как $\vec{i}'$, так и $\vec{j}'$ (свойство I), причем $\{\vec{i}', \vec{j}', [\vec{i}', \vec{j}']\}$—правый базис (свойство IV), поэтому вектор $[\vec{i}',$

$\vec{j}'$] есть не что иное, как $\vec{k}'$, т. е. $[\vec{i}', \vec{j}']=\vec{k}'$. Аналогично устанавливается, что $[\vec{j}', \vec{k}']=\vec{i}'$, $[\vec{k}', \vec{i}']=\vec{j}'$. Поскольку $\vec{a}=a'_x\vec{i}'+\vec{a}''$, где $\vec{a}''=a'_y\vec{j}'+a'_z\vec{k}'$, согласно свойству 2^0, $[\vec{a}, \vec{b}]=a'_x[\vec{i}', \vec{b}]+[\vec{a}'', \vec{b}]=a'_x[\vec{i}', \vec{b}]+a'_y[\vec{j}', \vec{b}]+a'_z[\vec{k}', \vec{b}]$. Далее, полагая $\vec{b}''=b'_y\vec{j}'+b'_z\vec{k}'$, получим по свойству 2^0 $[\vec{i}', \vec{b}]=[\vec{i}', b'_x\vec{i}']+[\vec{i}', \vec{b}'']=b'_x[\vec{i}', \vec{i}']+b'_y[\vec{i}', \vec{j}']+b'_z[\vec{i}', \vec{k}']=b'_y[\vec{i}', \vec{j}']-b'_z[\vec{k}', \vec{i}']=b'_y\vec{k}'-b'_z\vec{j}'$. Аналогично, $[\vec{j}', \vec{b}]=-b'_x\vec{k}'+b'_z\vec{i}'$, $[\vec{k}', \vec{b}]=b'_x\vec{j}'-b'_y\vec{i}'$. Следовательно,

$$[\vec{a}, \vec{b}]=a'_x(b'_y\vec{k}'-b'_z\vec{j}')+a'_y(-b'_x\vec{k}'+b'_z\vec{i}')+a'_z(b'_x\vec{j}'-$$
$$-b'_y\vec{i}')=\vec{i}'(a'_yb'_z-a'_zb'_y)-\vec{j}'(a'_xb'_z-a'_zb'_x)+$$
$$+\vec{k}'(a'_xb'_y-a'_yb'_x)=\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a'_x & a'_y & a'_z \\ b'_x & b'_y & b'_z \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Пусть P — фиксированная плоскость в пространстве, $\{\vec{i}', \vec{j}'\}$ — ортонормированный (не обязательно правый) базис в плоскости P, $\vec{a}=a_x\vec{i}'+a_y\vec{j}'$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}'+b_y\vec{j}'$ — произвольные векторы, параллельные плоскости P. Положим $\vec{k}'=[\vec{i}', \vec{j}']$. Тогда $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ — правый ортонормированный базис в пространстве (свойство IV), в этом базисе

$$\vec{a}=(a_x;\ a_y;\ 0),\ \vec{b}=(b_x;\ b_y;\ 0),\ [\vec{a}, \vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix}=$$
$$=(0;\ 0;\ a_xb_y-b_xa_y).$$

Поэтому площадь S параллелограмма, лежащего в плоскости P и построенного на векторах $\vec{a}=a_x\vec{i}'+a_y\vec{j}'$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}'+b_y\vec{j}'$, равна

$$S=|a_xb_y-a_yb_x|. \qquad (4.4)$$

Далее в этом параграфе, если не оговорено противное, считаем, что координаты векторов заданы в правом ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (на плоскости $\{\vec{i}, \vec{j}\}$), а координаты точек — в соответствующей прямоугольной системе координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (на плоскости $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$).

Пример 4. Проверьте, что векторы $\vec{a} = (1;\ 0;\ -1)$, $\vec{b} = (-1;\ 1;\ 0)$, $\vec{c} = (2;\ 0;\ -3)$ не компланарны. Найдите единичный вектор $\vec{d}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, такой, что $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\} \sim \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

△ Имеем

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны и $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — левый базис. Искомый вектор $\vec{d}$ ортогонален как $\vec{a}$, так и $\vec{b}$, поэтому $\vec{d} \parallel [\vec{a}, \vec{b}]$. Поскольку $|\vec{d}| = 1$, возможны только два случая: $\vec{d}_1 = [\vec{a}, \vec{b}]/|[\vec{a}, \vec{b}]|$ или $\vec{d}_2 = -\vec{d}_1 = -[\vec{a}, \vec{b}] : |[\vec{a}, \vec{b}]|$. Согласно свойству IV, базис $\{\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]\}$, а следовательно, и одинаково ориентированный с ним базис $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}_1\}$ являются правыми. Так как $\{\vec{a}, \vec{b}, -\vec{d}_1\} \not\sim \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}_1\}$, то $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}_2\}$ — левый базис, т.е. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}_2\} \sim \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Значит, искомый вектор $\vec{d}$ равен $\vec{d}_2$. Имеем

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (1;\ 1;\ 1), \quad |[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{3}.$$

Следовательно, $\vec{d} = (-1/\sqrt{3};\ -1/\sqrt{3};\ -1/\sqrt{3})$. ▲

Пример 5. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (-1;\ 3)$ и $\vec{b} = (1;\ 2)$.

△ По формуле (4.4) $S = |(-1) \cdot 2 - 3 \cdot 1| = 5$.▲

Пример 6. Вычислите площадь треугольника, вершины которого находятся в точках A (—1; 0; —1), B (0; 2; —3), C (4; 4; 1).

$\triangle$ Площадь $\triangle ABC$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\right)^2+\left(-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)^2}, \quad (4.5)$$

где $a_x = 1$, $a_y = 2$, $a_z = -2$ и $b_x = 5$, $b_y = 4$, $b_z = 2$ — соответственно координаты векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Таким образом, $S_{ABC} = (1/2)\sqrt{12^2 + (-12)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 9$. ▲

Пример 7. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выразите векторы 1) $[\vec{a} + \vec{b},\ \vec{a} - \vec{b}]$ и 2) $[(\vec{a} + \vec{b})/2,\ \vec{b} - \vec{a}/2]$ через вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

$\triangle$ Согласно свойству линейности векторного произведения имеем 1) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] - [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}] - [\vec{b}, \vec{b}] = \vec{0} - [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{a}, \vec{b}] - \vec{0} = -2\vec{c}$.

Здесь учтены свойство (4.2) и результат примера 1.

2) Аналогично, $[(\vec{a} + \vec{b})/2,\ \vec{b} - \vec{a}/2] = (1/2)\,[\vec{a},\ \vec{b} - \vec{a}/2] + (1/2)\,[\vec{b},\ \vec{b} - \vec{a}/2] = (1/2)\,[\vec{a},\ \vec{b}] - (1/4)\,[\vec{a},\ \vec{a}] + (1/2)\,[\vec{b},\ \vec{b}] - (1/4)\,[\vec{b},\ \vec{a}] = (1/2)\vec{c} - (1/4)(-\vec{c}) = (3/4)\vec{c}$. ▲

Пример 8. Три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ связаны соотношениями $\vec{a} = [\vec{b},\ \vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c},\ \vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a},\ \vec{b}]$. Найдите длины этих векторов и углы между ними.

$\triangle$ Так как $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{c}$. Кроме того, $\vec{b} = [\vec{c},\ \vec{a}]$, поэтому $\vec{b} \perp \vec{c}$. Значит, все три вектора попарно ортогональны. Далее, $|\vec{a}| = |\vec{b}|\,|\vec{c}| \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = |\vec{b}|\,|\vec{c}|$, $|\vec{b}| = |\vec{c}|\,|\vec{a}|$, $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$. Перемножая эти соотношения, получаем $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}| = 1$. Учитывая, что $|\vec{b}|\,|\vec{c}| = |\vec{a}|$, имеем $|\vec{a}|^2 = 1$, т. е. $|\vec{a}| = 1$. Аналогично, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Так как

$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, то $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — правый ортонормированный базис. ▲

Пример 9. Докажите, что если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно не коллинеарны, то условия $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$ и $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ эквивалентны.

□ Если $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, то, умножая это равенство векторно на $\vec{a}$, получаем $[\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$. Отсюда $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}]$. Если умножить не на $\vec{a}$, а на $\vec{b}$, то получим $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}]$.

Обратно: если $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}]$, т.е. $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}] = \vec{0}$, то согласно свойству III векторного произведения $\vec{a} + \vec{c} \parallel \vec{b}$, т.е. существует такое число λ, что $\vec{a} + \vec{c} + \lambda\vec{b} = \vec{0}$. Выражая отсюда $\vec{a} = -\vec{c} - \lambda\vec{b}$ и подставляя в равенство $[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$, получаем $[\vec{b}, \vec{c}] = \lambda[\vec{b}, \vec{c}]$, т.е. $(1 - \lambda)[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{0}$. Векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, т.е. $[\vec{b}, \vec{c}] \neq \vec{0}$. Следовательно, $\lambda = 1$ и $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b} = \vec{0}$. ■

Пример 10. Даны разложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$: $\vec{a} = a_x\vec{e}_1 + a_y\vec{e}_2 + a_z\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_x\vec{e}_1 + b_y\vec{e}_2 + b_z\vec{e}_3$. Разложите вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ по векторам $\vec{f}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, $\vec{f}_2 = [\vec{e}_3, \vec{e}_1]$, $\vec{f}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$.

△ Согласно свойству линейности векторного произведения, $[\vec{a}, \vec{b}] = [a_x\vec{e}_1 + a_y\vec{e}_2 + a_z\vec{e}_3, \vec{b}] = a_x[\vec{e}_1, \vec{b}] + a_y[\vec{e}_2, \vec{b}] + a_z[\vec{e}_3, \vec{b}]$. Аналогично, $[\vec{e}_1, \vec{b}] = [\vec{e}_1, b_x\vec{e}_1 + b_y\vec{e}_2 + b_z\vec{e}_3] = b_x[\vec{e}_1, \vec{e}_1] + b_y[\vec{e}_1, \vec{e}_2] + b_z[\vec{e}_1, \vec{e}_3] = b_y\vec{f}_3 - b_z\vec{f}_2$ (здесь учтено равенство $[\vec{e}_1, \vec{e}_1] = \vec{0}$). Так же проверяется, что $[\vec{e}_2, \vec{b}] = b_z\vec{f}_1 - b_x\vec{f}_3$, $[\vec{e}_3, \vec{b}] = b_x\vec{f}_2 - b_y\vec{f}_1$. Следовательно,

$$[\vec{a}, \vec{b}] = a_x(b_y\vec{f}_3 - b_z\vec{f}_2) + a_y(b_z\vec{f}_1 - b_x\vec{f}_3) + a_z(b_x\vec{f}_2 - b_y\vec{f}_1) =$$

$$= \vec{f}_1\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{f}_2\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{f}_3\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad ▲ \quad (4.6)$$

Пример 11. Докажите, что площадь S треугольника, векторы сторон которого равны векторам медиан треугольника ABC (рис. 4.3, *а*, *б*), составляет 3/4 площади σ треугольника ABC.

$\triangle$ Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. Тогда $\overrightarrow{CC_1} = (\vec{a} + \vec{b})/2$, $\overrightarrow{B_1B} = \vec{b} - \vec{a}/2$, $[\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}] = [(\vec{a} + \vec{b})/2, \vec{b} - \vec{a}/2] = (3/4)\,[\vec{a}, \vec{b}]$ (см. пример 7). Поэтому $S = (1/2)\,|[\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}]| = (3/4)\,(1/2)\,|[\vec{a}, \vec{b}]| = (3/4)\sigma$. ▲

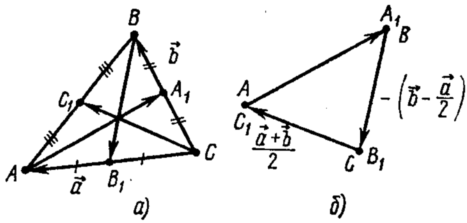


Рис. 4.3

Пример 12. Дан треугольник ABC. На прямых (AB), (BC), (CA) выбраны соответственно точки M, N, P так, что $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \alpha\,\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \alpha\,\overrightarrow{CA}$. При каком значении α площадь $S(\alpha)$ треугольника, векторы сторон которого суть $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$, наименьшая?

$\triangle$ Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$. На основании результата примера 11 § 3 гл. 2 векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$ действительно образуют треугольник, причем $\overrightarrow{CM} = (1-\alpha)\,\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\overrightarrow{AN} = -\vec{a} + (1-\alpha)\,\vec{b}$. Поэтому

$$S(\alpha) = (1/2)\,|[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AN}]| = (1/2)\,|[(1-\alpha)\,\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

$$-\vec{a} + (1-\alpha)\,\vec{b}]| = (1/2)\,|-\alpha\,[\vec{b}, \vec{a}] + (1-\alpha)^2\,[\vec{a}, \vec{b}]| =$$

$$= (1/2)\,(1-\alpha+\alpha^2)\,|[\vec{a}, \vec{b}]| = (1-\alpha+\alpha^2)\,S_{ABC}.$$

Минимум этого выражения достигается при $\alpha = 1/2$, т.е. в случае, когда $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$ — медианы $\triangle ABC$ (пример 11). Этот минимум равен $(3/4)\,S_{ABC}$. ▲

Пример 13. Треугольники ABC и ACD расположены в одной плоскости так, что точки B и D лежат по разные стороны от прямой (AC) (рис. 4.4, *а*, *б*). Докажите, что площадь S четырехугольника $ABCD$ равна

$$S=\frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}]\right|. \tag{4.7}$$

△ По условию задачи, $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\}\sim\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$. Поэтому векторы $[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]$ и $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]$ сонаправлены, и, следовательно, длина суммы этих векторов равна сумме их длин:

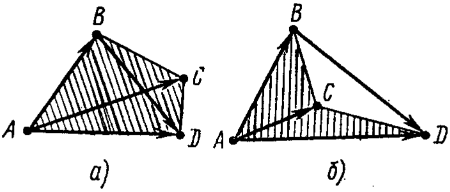


Рис. 4.4

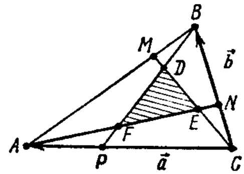


Рис. 4.5

$|[\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AC}]|+|[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}]|=|[\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AC}]+[\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}]|=$ $=|[\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AC}]-[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]|=|[\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]|=|[\overrightarrow{BD},$ $\overrightarrow{AC}]|$. Так как $|[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}]|=2S_{ADC}$, $|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}]|=2S_{ABC}$, $S=S_{ADC}+S_{ABC}$, то $S=(1/2)\,|[\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{AC}]|=(1/2)\,|[\overrightarrow{AC},$ $\overrightarrow{BD}]|$.▲

Пример 14*. Дан треугольник ABC, площадь которого S. На прямых (AB), (BC), (CA) выбраны точки M, N, P соответственно так, что $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\beta\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=\gamma\overrightarrow{CA}$, $\alpha\beta\gamma\neq$ $\neq(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, а прямые (CM), (BP) и (AN) попарно пересекаются: $D=(CM)\cap(BP)$, $E=(CM)\cap(AN)$, $F=(BP)\cap$ $\cap(AN)$. Найдите площадь σ треугольника DEF.

△ Поскольку $\alpha\beta\gamma\neq(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, точки D, E, F попарно различны (рис. 4.5) (см. пример 9 § 8 гл. 2). Если в качестве базисных взять векторы $\vec a=\overrightarrow{CA}$ и $\vec b=\overrightarrow{CB}$, то $\overrightarrow{CM}=\alpha\vec b+$ $+(1-\alpha)\vec a$, $\overrightarrow{AN}=-\vec a+(1-\beta)\vec b$, $\overrightarrow{BP}=\gamma\vec a-\vec b$. Пусть $\overrightarrow{CE}=$ $=x\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CD}=y\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BD}=z\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BF}=u\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AF}=v\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AE}=$ $=w\overrightarrow{AN}$ (числа x, y, z, u, v, w будем искать по правилу цикла, используя единственность разложения векторов по базису $\{\vec a, \vec b\}$). Из цикла $AECA$ получаем

$$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CA}=\vec 0\Leftrightarrow w\left(-\vec a+(1-\beta)\,\vec b\right)-x\left(\alpha\vec b+(1-\alpha)\vec a\right)+\vec a=$$
$$=0\cdot\vec a+0\cdot\vec b\Leftrightarrow\begin{cases}-w-x\,(1-\alpha)+1=0,\\ w\,(1-\beta)-x\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow w=$$
$$=\frac{\alpha}{1-\beta+\alpha\beta},\quad x=\frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha\beta}$$

[здесь использовано то обстоятельство, что $1-\beta+\alpha\beta \neq 0$. Действительно, числа x и w существуют (прямые (AN) и (CM) пересекаются) и удовлетворяют соотношениям $w(1-\beta+\alpha\beta)=\alpha$, $x(1-\beta+\alpha\beta)=1-\beta$. Если бы $1-\beta+\alpha\beta=0$, то имели бы $\alpha=0$, $1-\beta=0$ и, следовательно, $\alpha\beta\gamma=0=(1-\alpha)(1-\beta)\times\times(1-\gamma)$, что противоречит условию задачи]. Аналогично находим: $y=\gamma/(1-\alpha+\alpha\gamma)$, $z=(1-\alpha)/(1-\alpha+\alpha\gamma)$, $u==\beta/(1-\gamma+\beta\gamma)$, $v=(1-\gamma)/(1-\gamma+\beta\gamma)$. Площадь

$$\sigma=\frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{ED},\ \overrightarrow{EF}]|=\frac{1}{2}\,|[(y-x)\,\overrightarrow{CM},\ (v-w)\,\overrightarrow{AN}]|=$$

$$=\frac{1}{2}\,|y-x|\,|v-w|\,|[\overrightarrow{CM},\ \overrightarrow{AN}]|=\frac{1}{2}\,|y-x|\,|v-w|\times$$

$$\times|[\alpha\vec{b}+(1-\alpha)\,\vec{a},\ -\vec{a}+(1-\beta)\,\vec{b}]|=\frac{1}{2}\,|y-x|\,|v-w|\,|\alpha\,[\vec{a},\ \vec{b}]+$$

$$+(1-\alpha)(1-\beta)\,[\vec{a},\ \vec{b}]\,|=|y-x|\,|v-w|\,|1-\beta+\alpha\beta|\,S.$$

Поскольку

$$y-x=\frac{\gamma(1-\beta+\alpha\beta)-(1-\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)}=$$

$$=\frac{\alpha\beta\gamma-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\alpha+\alpha\gamma)},$$

$$v-w=-\frac{\alpha\beta\gamma-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{(1-\beta+\alpha\beta)(1-\gamma+\beta\gamma)},$$

окончательно имеем

$$\sigma=\frac{(\alpha\beta\gamma-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma))^2}{|(1-\beta+\alpha\beta)(1-\gamma+\beta\gamma)(1-\alpha+\alpha\gamma)|}\,S. \quad \blacktriangle$$

Отметим, что если $\alpha=\beta=\gamma=k\neq 1/2$, то

$$0<\sigma=S_{DEF}=\frac{(2k-1)^2}{k^2-k+1}\,S=\frac{4\,(k-1/2)^2}{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+3/4}\,S<4S_{ABC}.$$

Пример 15. На сторонах $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ и $[DA]$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади S (рис. 4.6) расположены соответственно точки M, N, P, Q так, что $|AM|:|AB|=|BN|:|BC|=|CP|:|CD|=|DQ|:|DA|=\alpha$. Найдите площадь $\sigma(\alpha)$ четырехугольника $MNPQ$. При каком значении α эта площадь минимальна?

$\triangle$ По формуле (4.7), $\sigma(\alpha)=(1/2)\,|[\overrightarrow{MP},\ \overrightarrow{NQ}]|$, где $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=-\alpha\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-(1-\alpha)\,\overrightarrow{CD}==-\alpha\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AD}+(1-\alpha)\,\overrightarrow{AD}-(1-\alpha)\,\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{BD}++(1-\alpha)\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{NQ}=(1-\alpha)\,\overrightarrow{BD}-\alpha\overrightarrow{AC}$, $[\overrightarrow{MP},\ \overrightarrow{NQ}]=$

$= [\alpha\overrightarrow{BD} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC},\quad (1-\alpha)\overrightarrow{BD} - \alpha\overrightarrow{AC}] = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]$. Таким образом,

$$\sigma(\alpha) = (1/2)(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]| = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)S.$$

Минимум $\sigma(\alpha)$ достигается при $\alpha = 1/2$ и равен $(1/2)S$.▲

Пример 16*. Площадь треугольника ABC равна S. Точки E и F — соответственно середины сторон $[AB]$ и $[AC]$. Точки $M \neq C$ и N лежат на стороне $[BC]$, причем $|MN| = |NC|$ (рис. 4.7). Прямые

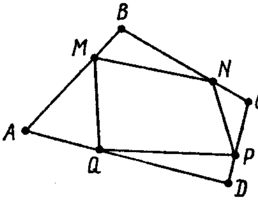


Рис. 4.6

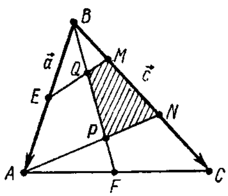


Рис. 4.7

(EM) и (AN) пересекают медиану $[BF]$ соответственно в точках Q и P. Докажите, что площадь σ четырехугольника $MNPQ$ удовлетворяет неравенствам $(1/6)S \leqslant \sigma \leqslant (1/5)S$. В каких случаях: а) $\sigma = (1/5)S$; б) $\sigma = (1/6)S$?

△ Положим $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{NC} = (1/2)x\vec{c}$ (по условию задачи, $0 < x \leqslant 1$). Векторы $\overrightarrow{BP}$ и $\overrightarrow{BF} = (1/2)(\vec{a} + \vec{c})$ сонаправлены. Поэтому существует такое число λ, что $\overrightarrow{BP} = \lambda(\vec{a} + \vec{c})$. Аналогично, существует такое число α, что $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AN} = \alpha(-\vec{a} + (1 - x/2)\vec{c})$. Из цикла $ABPA$ получаем $-\vec{a} + \lambda(\vec{a} + \vec{c}) - \alpha(-\vec{a} + (1 - x/2)\vec{c}) = \vec{0}$, т. е. $\alpha + \lambda = 1$, $\lambda = \alpha(1 - x/2)$. Отсюда $\lambda = (2 - x)/(4 - x)$. Следовательно, площадь треугольника BPN есть $S_{BPN} = (1/2)|[\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BN}]| = (1/2)|[\lambda(\vec{a} + \vec{c}), (1 - x/2)\vec{c}]| = (1/2)\lambda(1 - x/2)|[\vec{a}, \vec{c}]| = [(2 - x)^2 S]/[2(4 - x)]$. Аналогично, рассмотрев цикл $EBQE$, находим

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1-x}{3-2x}(\vec{a}+\vec{c}),\quad S_{BQM} = \frac{(1-x)^2}{3-2x}S.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{MNPQ}}{S} = \frac{S_{BPN} - S_{BQM}}{S} = \frac{(2-x)^2}{2(4-x)} - \frac{(1-x)^2}{3-2x} = f(x).$$

Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, причем $f'(x) = 5(2 - x)(2 - 3x)/[2(4 - x)^2(3 - 2x)^2]$. Следовательно, $f'(x) > 0$ на промежутке $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$, т. е. $f(x)$ монотонно возрастает на этом промежутке, и $f'(x) < 0$ на промежутке $(2/3, 1]$. Поэтому $f(x)$ достигает максимума в точке $x = 2/3$, $f(2/3) = 1/5$. Поскольку $f(0) = f(1) = 1/6$, минимум $f(x)$ на промежутке $(0, 1]$ достигается при $x = 1$. Таким образом, $\sigma = (1/5)S$, если $|BM| = |MN| = |NC|$ (в этом случае $(EM) \| (AN)$); $\sigma = (1/6)S$, если $M = B$. ▲

Пример 17. Докажите, что площадь трапеции $ABCD$ ($(AD) \| (BC)$) равна $\frac{1+k}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|$, где $k = |BC| : |AD|$.

△ Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Тогда $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + k\vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ и

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{1}{2}|[\vec{b} + k\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}]| =$$

$$= \frac{1}{2}|[\vec{b}, \vec{a}] - k[\vec{a}, \vec{b}]| = \frac{k+1}{2}|[\vec{a}, \vec{b}]|. \quad ▲$$

Пример 18*. Площадь трапеции $ABCD$ равна S, отношение длин оснований $|AD| : |BC| = \frac{1}{k} = 3$. На прямой, пересекающей в точке K продолжение основания $[AD]$ за точку D, расположен от-

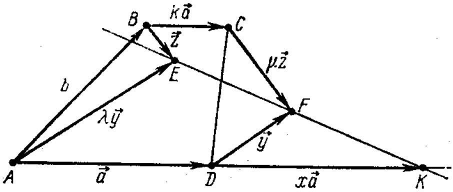


Рис. 4.8

резок $[EF]$ так, что $(AE) \| (DF)$, $(BE) \| (CF)$, $|AE| : |DF| = m = 2$, $|CF| : |BE| = n = 2$ (рис. 4.8). Найдите площадь σ треугольника EFB.

△ Обозначим $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DK} = x\vec{a}$, $x > 0$, $\overrightarrow{DF} = \vec{y}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{z}$. Тогда $\overrightarrow{AE} = \lambda\vec{y}$, $|\lambda| = m$, $\overrightarrow{CF} = \mu\vec{z}$, $|\mu| = n$, $\overrightarrow{BC} = k\vec{a}$. Из цикла $ABEA$ $\vec{b} + \vec{z} - \lambda\vec{y} = \vec{0}$. Из цикла $ABCFDA$ $\vec{b} + (k-1)\vec{a} + \mu\vec{z} - \vec{y} = \vec{0}$. Из этой системы находим $\vec{y} = [(1-\mu)\vec{b} + (k-1)\vec{a}]/(1-\lambda\mu)$. Поэтому

$$\sigma = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}]| = \frac{1}{2}|[\lambda\vec{y} - \vec{a}, \vec{y}]| = \frac{1}{2}|[\vec{a}, \vec{y}]| =$$

$$= \frac{1}{2|1-\lambda\mu|}|[\vec{a}, (1-\mu)\vec{b} + (k-1)\vec{a}]| = \frac{|1-\mu|}{2|1-\lambda\mu|}|[\vec{a}, \vec{b}]| =$$

$$= \frac{|1-\mu|}{|1-\lambda\mu|}\frac{S}{k+1} \quad \text{(см. пример 17).}$$

Осталось использовать условие $x > 0$. Векторы $\vec{KF} = \vec{y} - x\vec{a}$ и $\vec{KE} = \lambda\vec{y} - (1 + x)\vec{a}$ коллинеарны, т. е. $\vec{KE} = t\vec{KF}$ при некотором $t: \lambda\vec{y} - (1 + x)\vec{a} = t\vec{y} - tx\vec{a}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{y}$ не коллинеарны. Поэтому $\lambda = t$, $1 + x = tx$, т. е. $\lambda = (1 + x)/x > 0$. Следовательно, $\lambda = m$. Таким образом, возможны два случая: 1) $\mu = n$, тогда

$$\sigma = \frac{|1-n|}{|1-mn|} \frac{S}{k+1} = \frac{1}{4} S;$$

2) $\mu = -n$, тогда

$$\sigma = \frac{1+n}{1+mn} \frac{S}{k+1} = \frac{9}{20} S. \quad \blacktriangle$$

Пример 19*. Докажите, что все грани тетраэдра $ABCD$ равновелики тогда и только тогда, когда они являются конгруэнтными треугольниками.

□ Воспользуемся рис. 3.14 и обозначениями примера 18 § 2 гл. 3. Тогда $\vec{BC} = 2\vec{c}$, $\vec{AD} = 2\vec{a}$, $\vec{BD} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Следовательно,

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} |[\vec{BC}, \vec{BD}]| = |[\vec{c}, \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}]| = |[\vec{c}, \vec{a} - \vec{b}]|,$$

$$S_{BAD} = \frac{1}{2} |[\vec{AD}, \vec{AB}]| = |[\vec{a}, \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}]| = |[\vec{a}, \vec{b} - \vec{c}]|,$$

$$S_{BAC} = \frac{1}{2} |[\vec{BC}, \vec{AB}]| = |[\vec{c}, \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}]| = |[\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}]|,$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} |[\vec{AD}, \vec{AC}]| = |[\vec{a}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]| = |[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}]|.$$

На основании тождества $|[\vec{m}, \vec{n}]|^2 = \vec{m}^2\vec{n}^2 - (\vec{m}, \vec{n})^2$ равновеликость всех граней тетраэдра $ABCD$ эквивалентна системе уравнений

$$\vec{c}^2 (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2(\vec{a}, \vec{b})) - ((\vec{a}, \vec{c}) - (\vec{b}, \vec{c}))^2 = \vec{c}^2 (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})) - ((\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}))^2,$$

$$\vec{a}^2 (\vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2(\vec{b}, \vec{c})) - ((\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{a}, \vec{c}))^2 = \vec{a}^2 (\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{b}, \vec{c})) - ((\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}))^2,$$

$$\vec{c}^2 (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})) - ((\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}))^2 = \vec{a}^2 (\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{b}, \vec{c})) - ((\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}))^2. \quad (4.8)$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\vec{c}^2 (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{c}), \quad \vec{a}^2 (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{a}, \vec{b}).$$

Перемножая эти соотношения, получаем $(\vec{a}^2\vec{c}^2 - (\vec{a}, \vec{c})^2)(\vec{a}, \vec{b})(\vec{b}, \vec{c}) = 0$. Поскольку $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $|\vec{a}||\vec{c}| > |(\vec{a}, \vec{c})|$. Следовательно, $(\vec{a}, \vec{b})(\vec{b}, \vec{c}) = 0$. Поэтому $\vec{a}^2(\vec{b}, \vec{c})^2 = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{a}, \vec{b})(\vec{b}, \vec{c}) = 0$, т. е. $(\vec{b}, \vec{c}) = 0$. Тогда $\vec{c}^2(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{c}) = 0$, т. е. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Подставляя найденные скалярные произведения в уравнение (4.8), получим $\vec{b}^2(\vec{a}^2 - \vec{c}^2) = 0$, т. е. $|\vec{a}| = |\vec{c}|$. Следовательно, $|AD| = |BC|$. Вектор $\vec{b} = \overrightarrow{EF}$ ортогонален как $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a}$, так и $\overrightarrow{BC} = 2\vec{c}$. На основании результата примера 18 § 2 гл. 3 также имеем $|AB| = |CD|$ и $|BD| = |AC|$. Итак, длины скрещивающихся ребер тетраэдра $ABCD$ попарно равны. Значит, его грани — конгруэнтные треугольники. ■

§ 3. Двойное векторное произведение. Векторное уравнение прямой в пространстве. Нормальный вектор плоскости

Пример 1 (формула двойного векторного произведения (ДВП)). Докажите, что для любых трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространстве

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \tag{4.9}$$

□ Выберем правый ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, взяв ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ в плоскости, параллельной векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, так, чтобы вектор $\vec{i}$ был коллинеарен вектору $\vec{b}$, и положив $\vec{k} = [\vec{i}, \vec{j}]$. Тогда в этом базисе

$$\vec{b} = b\vec{i} = (b;\ 0;\ 0),\quad \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} = (c_x;\ c_y;\ 0),\quad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b & 0 & 0 \\ c_x & c_y & 0 \end{vmatrix} = bc_y\vec{k} = (0;\ 0;\ bc_y),$$

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ 0 & 0 & bc_y \end{vmatrix} = a_y bc_y\vec{i} - a_x bc_y\vec{j}.$$

Прибавим и отнимем в правой части последнего равенства вектор $a_x bc_x \vec{i}$. Получим $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = b\vec{i}(a_xc_x + a_yc_y + a_z \cdot 0) - (c_x\vec{i} + c_y\vec{j})(a_xb + a_y \cdot 0 + a_z \cdot 0) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$. ■

Пример 2. При каком необходимом и достаточном условии справедливо равенство

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]? \qquad (4.10)$$

$\triangle$ По формуле (4.9), $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = -[\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c})$, $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$. Следовательно, равенство (4.10) выполняется тогда и только тогда, когда $\vec{0} = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$. Но по формуле (4.9), $\vec{a}(\vec{b}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) = [\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]]$. Таким образом, равенство (4.10) справедливо тогда и только тогда, когда $[\vec{b}, [\vec{a}, \vec{c}]] = \vec{0}$, т.е. когда векторы $\vec{b}$ и $[\vec{a}, \vec{c}]$ коллинеарны. Это возможно, если $\vec{a} \parallel \vec{c}$ или $\vec{a} \nparallel \vec{c}$, а вектор $\vec{b}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$. $\blacktriangle$

Пример 3 (в е к т о р н о е у р а в н е н и е п р я м о й в п р о с т р а н с т в е). Пусть в пространстве зафиксирован полюс O, выбраны векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{M}$, причем $(\vec{M}, \vec{a}) = 0$. Докажите, что множество l всех точек пространства, радиусы-векторы $\vec{r}$ которых удовлетворяют уравнению

$$[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}, \qquad (4.11)$$

есть прямая. Укажите ее расположение в пространстве.

$\square$ П е р в о е р е ш е н и е. Выберем систему координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ так, что $\vec{k} = \vec{a}/a$, $a = |\vec{a}| \neq 0$, т. е. $\vec{a} = (0; 0; a)$. Поскольку $(\vec{M}, \vec{a}) = 0$, указанная система координат может быть выбрана так, что вектор $\vec{M}$ коллинеарен вектору $\vec{j}$, т.е. $\vec{M} = m\vec{j} = (0; m; 0)$. Если теперь $A\ (x; y; z)$ — произвольная точка l, то в силу уравнения (4.11)

$$[\vec{r}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = ay\vec{i} - ax\vec{j} = \vec{M} = m\vec{j}.$$

Следовательно, точка $A\ (x; y; z) \in l$ тогда и только тогда, когда ее координаты $(x; y; z)$ удовлетворяют системе уравнений

$$y = 0, \quad x = -m/a. \qquad (4.12)$$

Первое из этих уравнений — уравнение плоскости Oxz, второе — уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz. Значит, l есть множество точек, общих для обеих плоскостей, т.е. прямая, параллельная оси Oz (вектору $\vec{a}$). Эта прямая проходит через точку с радиусом-вектором $\vec{r}_0 = (-m/a;\ 0;\ 0)$. Выразим $\vec{r}_0$ через $\vec{a}$ и $\vec{M}$:

$$\vec{r}_0 = -\frac{m}{a}\vec{i} = -\frac{m}{a}[\vec{j},\ \vec{k}] = \left[\vec{k},\ \frac{m}{a}\vec{j}\right] = \left[\vec{k},\ \frac{\vec{M}}{a}\right] =$$

$$= \left[\frac{\vec{a}}{a},\ \frac{\vec{M}}{a}\right] = \frac{[\vec{a},\ \vec{M}]}{a^2}.$$

Параметрическое уравнение прямой l имеет вид

$$\vec{r} = \frac{[\vec{a},\ \vec{M}]}{|\vec{a}|^2} + \vec{a}t,\quad t \in R. \tag{4.13}$$

Второе решение (геометрическое). Если $\vec{M} = \vec{0}$, то l — множество всех точек пространства, радиусы-векторы $\vec{r}$ которых коллинеарны вектору $\vec{a}$ (так как $[\vec{r},\ \vec{a}] = \vec{0}$), т.е. l — прямая, проходящая через полюс O, с направляющим вектором $\vec{a}$.

Пусть $\vec{M} \neq \vec{0}$. Рассмотрим плоскость P, проходящую через полюс O и перпендикулярную $\vec{M}$. Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Так как $(\vec{a},\ \vec{M}) = 0$, то $A \in P$. Следовательно, $(OA) \in P$. Пусть $B(\vec{r})$ — произвольная точка из l. Из формулы (4.11) согласно свойству I векторного произведения имеем $(\vec{r},\ \vec{M}) = 0$, т.е. $B \in P$. Таким образом, l — некоторое подмножество плоскости P. Далее, $|[\vec{r},\ \vec{a}]| = |\vec{M}|$, т.е. площадь параллелограмма $BOAC$, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{a}$, равна $|\vec{M}|$ (свойство II векторного произведения), а высота параллелограмма $BOAC$, опущенная из точки B на прямую (OA), имеет длину $h = |\vec{M}|/|\vec{a}|$, общую для всех точек $B \in l$. Таким образом, все точки подмножества l лежат в плоскости P и равноудалены на расстояние h от прямой (OA). Множество точек P, удаленных на расстояние h от (OA), состоит из двух прямых l_1 и l_2, параллельных (OA) (рис. 4.9). Для одной из этих прямых (на рис. 4.9 это прямая l_1) радиусы-векторы $\vec{r}$ лежащих на ней точек вместе с $\vec{a}$ и $\vec{M}$ в указанном порядке образуют правый базис, для другой прямой (l_2) — левый. Согласно свойству IV векторного произведения, l_2 не содержит точек множества l, определяемых уравнением (4.11), а всякая точка l_1 принадлежит l (для каждой такой точки установлены свойства I, II, IV, определяющие векторное равенство (4.11)). Таким образом, l — прямая с направляющим вектором $\vec{a}$, проходящая через точку D (основание перпендикуляра, опущенного из точки O на l_1). Радиус-вектор $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OD}$ точки D легко найти следующим образом. Поскольку $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} \perp \vec{M}$,

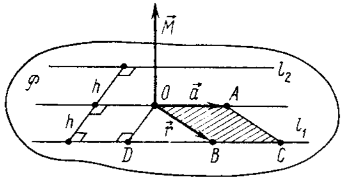


Рис. 4.9

а базис $\{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}, \vec{M}\}$ —правый, $\overrightarrow{OD} \uparrow\uparrow [\vec{a}, \vec{M}]$, т. е. $\vec{r}_0 = = \lambda [\vec{a}, \vec{M}]$, где $\lambda > 0$. Чтобы найти λ, заметим, что $|\vec{r}_0| = = |\overrightarrow{OD}| = h = |\vec{M}|/|\vec{a}|$, т. е. $|\vec{M}|/|\vec{a}| = |\lambda [\vec{a}, \vec{M}]| = \lambda |[\vec{a}, \vec{M}]| = \lambda |\vec{a}| |\vec{M}|$ ($\vec{a}$ и $\vec{M}$ ортогональны). Следовательно, $\lambda = 1/|\vec{a}|^2$, т.е. $\vec{r}_0 = [\vec{a}, \vec{M}]/|\vec{a}|^2$.

Третье решение. Возьмем $\vec{r}_0 = [\vec{a}, \vec{M}]/|\vec{a}|^2$. По формуле ДВП,

$$[\vec{r}_0, \vec{a}] = -\frac{1}{|\vec{a}|^2} [\vec{a}, [\vec{a}, \vec{M}]] = -\frac{1}{|\vec{a}|^2} (\vec{a}(\vec{a}, \vec{M}) - \\ - \vec{M}(\vec{a}, \vec{a})) = \vec{M} \text{ (так как } (\vec{a}, \vec{M}) = 0).$$

Значит, $\vec{r}_0$ — радиус-вектор некоторой точки $D \in l$, а уравнение (4.11) в силу равенства $\vec{M} = [\vec{r}_0, \vec{a}]$ эквивалентно уравнению

$$[\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}] = \vec{0}. \tag{4.14}$$

Согласно свойству III векторного произведения, равенство (4.14) справедливо тогда и только тогда, когда $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{a}$, т. е. когда существует такое $t \in R$, что $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}t$, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t, \quad t \in R. \tag{4.15}$$

Таким образом, уравнение (4.11) эквивалентно векторному параметрическому уравнению (4.15), а l, следовательно, — прямая с параметрическим уравнением (4.15). ■

Пример 4. Напишите векторное (типа (4.11)) уравнение прямой l: $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{3}$.

△ Прямая l проходит через точку с радиусом-вектором $\vec{r}_0=(-1;\ 3;\ 0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{a}=(-3;\ 4;\ 3)$. Поскольку $\vec{M}=[\vec{r}_0,\ \vec{a}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 0\\ -3 & 4 & 3\end{vmatrix}=9\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$, векторное уравнение l

$$[\vec{r},\ -3\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}]=9\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}. \quad ▲$$

Пример 5. Найдите радиус-вектор $\vec{x}$ общей точки прямой $l:[\vec{r},\ \vec{a}]=\vec{M}$, $|\vec{a}|\neq 0$, $(\vec{a},\ \vec{M})=0$ и плоскости $P:(\vec{r},\ \vec{N})=D$, $\vec{N}\neq\vec{0}$, $(\vec{N},\ \vec{a})\neq 0$.

△ Запишем уравнение l в параметрическом виде (4.13). Тогда задача сводится к нахождению такого числа t, что вектор $\vec{x}=\frac{[\vec{a},\ \vec{M}]}{|\vec{a}|^2}+\vec{a}t$ удовлетворяет также и равенству $(\vec{x},\ \vec{N})=D$, т. е. $t(\vec{a},\ \vec{N})+([\vec{a},\ \vec{M}],\ \vec{N})/|\vec{a}|^2=D$. Отсюда

$$t=\frac{D|\vec{a}|^2-([\vec{a},\ \vec{M}],\ \vec{N})}{|\vec{a}|^2(\vec{a},\ \vec{N})},$$

$$\vec{x}=\frac{1}{|\vec{a}|^2}\left([\vec{a},\ \vec{M}]+\frac{D|\vec{a}|^2-([\vec{a},\ \vec{M}],\ \vec{N})}{(\vec{a},\ \vec{N})}\vec{a}\right). \quad ▲$$

Пример 6. Напишите нормальное уравнение плоскости P, заданной параметрически уравнением $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}u+\vec{b}v$, $u,\ v\in R$.

△ Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы и параллельны плоскости P. Следовательно, в качестве нормального вектора $\vec{N}$ можно взять вектор

$$\vec{N}=[\vec{a},\ \vec{b}]. \tag{4.16}$$

Вектор $\vec{r}_0$ является радиусом-вектором некоторой точки плоскости P. По формуле (3.28), нормальное уравнение P $(\vec{r} - \vec{r}_0, [\vec{a}, \vec{b}]) = 0$. ▲

Пример 7. В тетраэдре $ABCD$ биссекторная плоскость двугранного угла с ребром $[CD]$ пересекает ребро $[AB]$ в точке F (рис. 4.10). Докажите, что $[AF] : |FB| = S_{ACD} : S_{BCD}$.

△ Положим $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{b}' = [\vec{c}, \vec{a}]$, $\vec{a}' = [\vec{c}, \vec{b}]$, $\varphi = (\widehat{\vec{a}', \vec{b}'})$, $|AF| = \mu|AB|$. Тогда $S_{ACD} = (1/2)|\vec{b}'|$, $S_{BCD} = (1/2)|\vec{a}'|$. По формуле (4.16), векторы $\vec{N}_1 = \vec{a}'$, $\vec{N}_2 = [\vec{c}, \overrightarrow{DF}] = [\vec{c}, \overrightarrow{DA} + \mu\overrightarrow{AB}] = [\vec{c}, \vec{a} + \mu(\vec{b} - \vec{a})] = \mu\vec{a}' + (1 - \mu)\vec{b}'$, $\vec{N}_3 = \vec{b}'$ — нормальные векторы соответственно плоскостей (BCD), (FCD), (ACD).

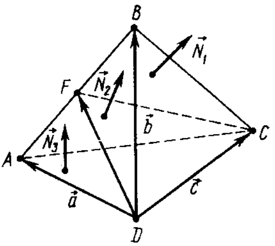


Рис. 4.10

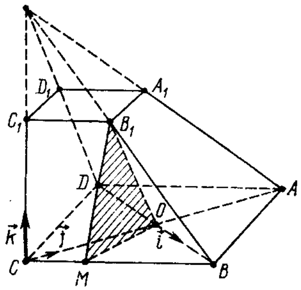


Рис. 4.11

Поскольку плоскость (FCD) — биссекторная, $(\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2}) = (\widehat{\vec{N}_2, \vec{N}_3})$. Следовательно,

$$\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} = \frac{(\vec{N}_2, \vec{N}_3)}{|\vec{N}_2||\vec{N}_3|}, \text{ т. е. } \frac{\mu\vec{a}'^2 + (1-\mu)(\vec{a}', \vec{b}')}{|\vec{a}'|} = \frac{(1-\mu)\vec{b}'^2 + \mu(\vec{a}', \vec{b}')}{|\vec{b}'|},$$

или $(1 - \cos\varphi)((1 - \mu)|\vec{b}'| - \mu|\vec{a}'|) = 0$. Так как $0° < \varphi < 180°$, то

$$S_{ACD} : S_{BCD} = |\vec{b}'| : |\vec{a}'| = \frac{\mu}{1-\mu} = |AF| : |FB|. \quad ▲$$

Пример 8. $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$ — боковые ребра четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$, нижним основанием которой является ромб $ABCD$. Ребро $[CC_1]$ перпендикулярно плоскости $(ABCD)$, $|CC_1| = |A_1B_1| = 2$, $|AB| = 4$, $\widehat{BAD} = 60°$. На ребре $[BC]$ взята точка M так, что $|BM| = 3$, и через точки B_1, M и центр O ромба $ABCD$ проведена плоскость. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью грани AA_1C_1C.

$\triangle$ Введем правый ортонормированный базис $\vec{i} = \overrightarrow{OB}/|\overrightarrow{OB}|$, $\vec{j} = \overrightarrow{OA}/|\overrightarrow{OA}|$, $\vec{k} = \overrightarrow{CC_1}/|\overrightarrow{CC_1}|$ (рис. 4.11). В этом базисе $\overrightarrow{OB} = (2;\ 0;\ 0)$, $\overrightarrow{CO} = (0;\ 2\sqrt{3};\ 0)$, $\overrightarrow{CC_1} = (0;\ 0;\ 2)$, $\overrightarrow{CB} = (2;\ 2\sqrt{3};\ 0)$, $\overrightarrow{CM} = (1/4)\overrightarrow{CB} = (1/2;\ \sqrt{3}/2;\ 0)$, $\overrightarrow{C_1B_1} = (1/2)\overrightarrow{CB} = (1;\ \sqrt{3};\ 0)$, $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CM} = (-1/2;\ 3\sqrt{3}/2;\ 0)$, $\overrightarrow{MB_1} = -\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = (1/2;\ \sqrt{3}/2;\ 2)$. Нормальный вектор $\vec{N}_1$ плоскости (B_1MO) по формуле (4.16) равен

$$\vec{N}_1 = [\overrightarrow{MO},\ \overrightarrow{MB_1}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1/2 & 3\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 2 \end{vmatrix} = (3\sqrt{3};\ 1;\ -\sqrt{3}).$$

Нормальный вектор $\vec{N}_2$ плоскости (AA_1C_1C), параллельной $\vec{j}$ и $\vec{k}$, равен, очевидно, $\vec{i}$. Поэтому для угла φ между плоскостями (B_1MO) и (AA_1C_1C) получаем выражение

$$\cos\varphi = |(\vec{N}_1, \vec{N}_2)|/(|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|) =$$
$$= 3\sqrt{3}/\sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{3}/\sqrt{31},$$
$$\varphi = \arccos 3\sqrt{3/31} = \operatorname{arctg}(2/(3\sqrt{3})). \ \blacktriangle$$

Пример 9. Найдите направляющий вектор прямой l, являющейся линией пересечения двух плоскостей $P_1 : (\vec{r}, \vec{N}_1) = D_1$ и $P_2 : (\vec{r}, \vec{N}_2) = D_2$.

$\triangle$ Вектор $\vec{a}$ (направляющий вектор прямой l), будучи параллелен плоскости P_1, ортогонален ее нормальному вектору $\vec{N}_1$. Аналогично, $\vec{a} \perp \vec{N}_2$. Следовательно, в качестве $\vec{a}$ можно взять вектор $[\vec{N}_1, \vec{N}_2]$. ▲

Пример 10. Найдите угол между прямой l:

$$\begin{cases} 3x + 5y + 4z - 1 = 0, \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью P: $x + z + 2 = 0$.

△ Направляющий вектор $\vec{a}$ прямой l находим по формуле

$$\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2], \qquad (4.17)$$

где $\vec{N}_1 = (3; 5; 4)$, $\vec{N}_2 = (1; 1; 0)$ (см. пример 9). По формуле (3.53) угол φ между l и P равен $\varphi = \arcsin \dfrac{|(\vec{N}, \vec{a})|}{|\vec{N}|\,|\vec{a}|}$, где

$$\vec{N} = (1; 0; 1), \ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4; 4; -2), \text{ т. е. } \varphi =$$

$$= \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ. \ ▲$$

Пример 11. Найдите угол φ между прямыми

$$l: \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и } L: \begin{cases} x - y + 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

△ По формуле (4.17) направляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ прямых l и L соответственно равны $\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= (-2; 2; -1)$, $\vec{b} = (5; 5; 0)$. Следовательно, $\cos\varphi =$ $= |(\vec{a}, \vec{b})|/(|\vec{a}|\,|\vec{b}|) = 0$, $\varphi = 90^\circ$. ▲

§ 4. Смешанное произведение векторов. Условие компланарности векторов. Объем тетраэдра

Число $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ называется *смешанным произведением* (*упорядоченной тройки*) *векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (обозначение: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$).

Приведем свойства смешанного произведения векторов.

1^0. *Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители компланарны.*

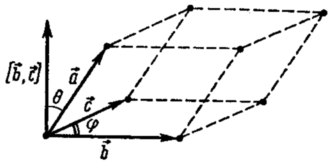


Рис. 4.12

□ Если φ — угол между векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$, θ — угол между векторами $\vec{a}$ и $[\vec{b}, \vec{c}]$ (рис. 4.12), то

$$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \begin{cases} 0, \text{ если } \vec{a} = \vec{0} \text{ или } [\vec{b}, \vec{c}] = \vec{0}; \\ |\vec{a}|\,|[\vec{b}, \vec{c}]|\cos\theta = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|\sin\varphi\cos\theta, \\ \text{если } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ и } [\vec{b}, \vec{c}] \neq \vec{0}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Таким образом, равенство $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ возможно лишь в следующих случаях:

а) $\vec{a} = \vec{0}$. В этом случае векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, очевидно, компланарны;

б) $[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{0}$. В этом случае векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, поэтому векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны;

в) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $[\vec{b}, \vec{c}] \neq \vec{0}$ (т. е. $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$, $\sin\varphi \neq 0$), $\cos\theta = 0$ [см. формулу (4.18)]. В этом случае $\vec{a}$ ортогонален $[\vec{b}, \vec{c}]$, т.е. $\vec{a}$ параллелен плоскости, в которой $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис.

Далее, если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$, то, по формуле (4.18), $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — ненулевые векторы, $\sin\varphi \neq 0$, т.е. $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\cos\theta \neq 0$, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $[\vec{b}, \vec{c}]$ не ортогональны и, значит, $\vec{a}$ не параллелен той плоскости, в которой $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис. Иными словами, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны. ■

2^0. *Если в правом ортонормированном базисе* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.19}$$

□ Вектор $[\vec{b}, \vec{c}]$ по формуле (4.1) равен

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \right).$$

Поэтому

$$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Отметим, что из формулы (4.19) и критерия компланарности векторов (см. пример 20 § 5 гл. 2) свойство 1^0 вытекает тривиально. Очевидным следствием (4.19) является следующее свойство.

3^0. *Базис* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ *является правым тогда и только тогда, когда* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$.

□ По формуле (4.19), $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det S^{\mathrm{T}} = \det S$, где S — матрица перехода от правого базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. ■

4^0. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) =$

$$= -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}). \tag{4.20}$$

В частности, *если в смешанном произведении два сомножителя одинаковы, то оно равно нулю.*

□ Равенства (4.20) следуют из формулы (4.19) и свойства 2^0 определителей (см. § 4 гл. 2). Равенство $(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = 0$ (и другие, в которых в смешанном произведении два сомножителя одинаковы) вытекает из равенств (4.20): при $\vec{b} = \vec{a}$ имеем

$$(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}), \text{ т.е. } (\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) = 0. \blacksquare$$

5⁰. *Если* $\vec{a}=a_x\vec{e}_1+a_y\vec{e}_2+a_z\vec{e}_3$, $\vec{b}=b_x\vec{e}_1+b_y\vec{e}_2+b_z\vec{e}_3$, $\vec{c}=c_x\vec{e}_1+c_y\vec{e}_2+c_z\vec{e}_3$, *то*

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3). \tag{4.21}$$

□ В соответствии с формулой (4.6)

$$[\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}\vec{f}_1-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}\vec{f}_2+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\vec{f}_3,$$

где $\vec{f}_1=[\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, $\vec{f}_2=[\vec{e}_3,\vec{e}_1]$, $\vec{f}_3=[\vec{e}_1,\vec{e}_2]$. Поскольку $(\vec{e}_1,\vec{f}_1)=$ $=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $(\vec{e}_2,\vec{f}_1)=(\vec{e}_3,\vec{f}_1)=0$ (вектор $\vec{f}_1$ ортогонален как $\vec{e}_2$, так и $\vec{e}_3$), $(\vec{a},\vec{f}_1)=(a_x\vec{e}_1+a_y\vec{e}_2+a_z\vec{e}_3,\vec{f}_1)=a_x(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Аналогично $(\vec{a},\vec{f}_2)=a_y(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $(\vec{a},\vec{f}_3)=a_z(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Следовательно,

$$(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\left(a_x\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\right)=$$

$$=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} ■.$$

6⁰. *Объем параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *равен модулю смешанного произведения этих векторов.*

□ По формуле (4.18), $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|\sin\varphi|\cos\theta|$, а объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен произведению площади основания $S=|\vec{b}|\,|\vec{c}|\sin\varphi$ на высоту $h=|\vec{a}|\,|\cos\theta|$. Таким образом, если параллелепипед построен на некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 4.12), то его объем равен $|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$. ■

7⁰. *Смешанное произведение линейно по каждому из сомножителей*

$$(\lambda\vec{a}+\mu\vec{d},\ \vec{b},\ \vec{c})=\lambda(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})+\mu(\vec{d},\ \vec{b},\ \vec{c}),$$
$$(\vec{a},\ \lambda\vec{b}+\mu\vec{d},\ \vec{c})=\lambda(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})+\mu(\vec{a},\ \vec{d},\ \vec{c}),\qquad(4.22)$$
$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \lambda\vec{c}+\mu\vec{d})=\lambda(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})+\mu(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d})$$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ *и чисел* λ и μ.

□ Равенства (4.22) следуют из свойств линейности скалярного и векторного произведений. ■

Пример 1. Вычислите объем V параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, зная его вершину $A(1;\ 2;\ 3)$ и концы выходящих из нее ребер $B(9;\ 6;\ 4)$, $D(3;\ 0;\ 4)$, $A'(5;\ 2;\ 6)$.

△ Имеем $V=|(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA'})|=\left|\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}\right|=48.$ ▲

Пример 2. В условиях предыдущего примера найдите длину h высоты параллелепипеда, опущенной на основание $ABCD$ из вершины A'.

△ Площадь основания $ABCD$ равна $S=|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}]|$. $[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(6;\ -6;\ -24)$, поэтому $S=6\sqrt{1^2+(-1)^2+(-4)^2}=6\sqrt{18}=18\sqrt{2}$. Следовательно, $h=V/S=4\sqrt{2}/3$. ▲

Пример 3. Докажите, что объем тетраэдра равен 1/6 модуля смешанного произведения любых трех некомпланарных векторов, образующих ребра тетраэдра.

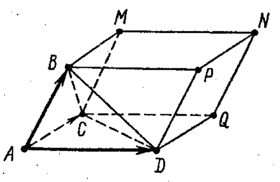


Рис. 4.13

□ Достроив тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда $ACQDBMNP$ (рис. 4.13), получим $V_{ABCD}=(1/3)\,hS_{ACD}$, где h — длина высоты, опущенной из вершины B на плоскость (ACD), $S_{ACD}=(1/2)\,S_{ACQD}$ — площадь треугольника ACD. Таким образом, $V_{ABCD}=(1/6)\,hS_{ACQD}=(1/6)\times V_{ACQDBMNP}=(1/6)\,|(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})|$. Кроме того, $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})$. Действительно,

$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ (векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны, и их смешанное произведение равно нулю). Аналогично, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. ■

Пример 4. Даны вершины тетраэдра $A(0;\ 0;\ 2)$, $B(3;\ 0;\ 5)$, $C(1;\ 1;\ 0)$, $D(4;\ 1;\ 2)$. Найдите его объем и длину высоты, опущенной из вершины D.

△ Имеем $V_{ABCD} = (1/6)\,|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$, $h = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| / |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$. Так как $\overrightarrow{AB} = (3;\ 0;\ 3)$, $\overrightarrow{AC} = (1;\ 1;\ -2)$, то

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3;\ 9;\ 3)$$

и $|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = 3\sqrt{11}$. Далее, $\overrightarrow{AD} = (4;\ 1;\ 0)$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AD}, [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]) = 4\cdot(-3) + 1\cdot 9 + 0\cdot 3 = -3$. Следовательно, $V_{ABCD} = 1/2$, $h = 1/\sqrt{11}$. ▲

Пример 5. Дан тетраэдр, определяемый двумя отрезками, которые принадлежат скрещивающимся прямым. Докажите, что объем тетраэдра не изменится, если сдвинуть эти отрезки, не меняя их длин, вдоль соответствующих прямых.

△ Пусть l и L — скрещивающиеся прямые M, N, M', N' — точки прямой l, P, Q, P', Q' — точки прямой L такие, что (рис. 4.14) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{Q'P'} = \vec{b}$. Тогда (см. пример 3) $V_{MNPQ} = (1/6)|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{QN})|$, $V_{M'N'P'Q'} = (1/6)|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{Q'N'})|$. Поскольку $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{Q'N'} + \overrightarrow{N'N} = \lambda\vec{b} + \overrightarrow{Q'N'} + \mu\vec{a}$ (векторы $\overrightarrow{QQ'}$ и $\overrightarrow{QP} = \vec{b}$ коллинеарны, поэтому найдется такое число λ, что $\overrightarrow{QQ'} = \lambda\vec{b}$; аналогично, $\overrightarrow{N'N} = \mu\vec{a}$ с некоторым коэффициентом μ),

$$(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{QN}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{Q'N'}) + \mu(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Первое и третье слагаемые в правой части этого равенства равны нулю согласно свойству 4^0. Следовательно, $(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{QN}) = (\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{Q'N'})$ и, значит, $V_{MNPQ} = V_{M'N'P'Q'}$. ▲

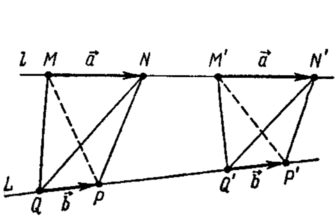


Рис. 4.14

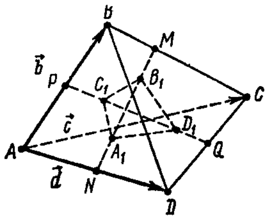


Рис. 4.15

Пример 6. В тетраэдре $ABCD$ точки M, N, P, Q лежат соответственно на ребрах $[BC]$, $[AD]$, $[AB]$, $[CD]$, причем $|AP| = |PB|$, $|AN| = |ND|$, $|CQ| = |QD|$, $|MC| = 2|BM|$. Пары точек A_1, B_1 и C_1, D_1 выбраны соответственно на отрезках $[NM]$ и $[PQ]$ так, что $|NA_1| = |A_1B_1| = |B_1M|$, $|PC_1| = |C_1D_1| = |D_1Q|$. Найдите отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

△ Введем базис $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ (рис. 4.15). В этом базисе $\overrightarrow{C_1D_1} = (1/3)\overrightarrow{PQ} = (1/3)\ (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}) = (1/3) \times \times \left(-(1/2)\vec{b} + (1/2)(\vec{c} + \vec{d})\right) = (1/6)(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$, $\overrightarrow{A_1B_1} = = (1/3)\overrightarrow{NM} = (1/3)\ (\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + (1/3)\overrightarrow{BC}) = (1/3)\left(-(1/2)\vec{d} + + \vec{b} + (1/3)(\vec{c} - \vec{b})\right) = (2/9)\vec{b} + (1/9)\vec{c} - (1/6)\vec{d}$. Кроме того, $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{C_1D_1} = (1/3)\ \vec{b} + (1/6)\vec{c} + (1/6)\vec{d}$, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AN} + + \overrightarrow{A_1B_1} = (2/9)\vec{b} + (1/9)\vec{c} + (1/3)\vec{d}$. Следовательно, $\overrightarrow{C_1A_1} = = -(1/9)\vec{b} - (1/18)\vec{c} + (1/6)\vec{d}$. Объем тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ равен

$$\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{C_1D_1}, \overrightarrow{C_1A_1})\right| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 2/9 & 1/9 & -1/6 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/9 & -1/18 & 1/6 \end{matrix} \right| \times$$

$$\times\ (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})\Big| = \frac{1}{216} \cdot \frac{1}{6}\ |(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})| = \frac{V_{ABCD}}{216}. \ ▲$$

Пример 7. Докажите, что если $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

△ Умножая данное равенство скалярно на $\vec{a}$, получаем $0 = (\vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]) + (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) + (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{a}])$. Так как $(\vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]) = (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{a}]) = 0$, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Согласно свойству 1^0 смешанного произведения, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.▲

Пример 8. Докажите, что если векторы $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

△ Пусть векторы $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ компланарны. Тогда они линейно зависимы, т.е. существуют числа x, y, z, не равные нулю одновременно $(x^2 + y^2 + z^2 > 0)$, такие, что

$$x[\vec{a}, \vec{b}] + y[\vec{b}, \vec{c}] + z[\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}.$$

Умножая это равенство скалярно последовательно на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, получаем: $y(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, $z(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, $x(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Отсюда $(x^2 + y^2 + z^2)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = 0$. Следовательно, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны (параллельны одной плоскости P). Каждый из векторов $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ (согласно свойствам I и III векторного произведения) либо нулевой, либо параллелен прямой, перпендикулярной плоскости P. Следовательно, эти три вектора коллинеарны. ▲

Пример 9. Докажите тождество

$$[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \tag{4.23}$$

△ По формуле ДВП (4.9), учитывая свойство 4^0 смешанного произведения, имеем $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]] = \vec{c}([\vec{a}, \vec{b}], \vec{d}) - \vec{d}([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \vec{c}(\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) - \vec{d}(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. ▲

Пример 10. Докажите, что

$$([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2. \tag{4.24}$$

□ По формуле (4.23) $[[\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]] = \vec{c}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{c}) = \vec{c}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{c}$. Следовательно, $([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]) = ([\vec{a}, \vec{b}], (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$. ■

Формулы (4.24) и (4.23) позволяют получить второе решение примера 8. Именно: если векторы $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{a}]$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю. Следовательно, в силу (4.24) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Тогда по формуле (4.23) имеем $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{a}]] = \vec{c}\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}) - \vec{a}\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\vec{a}\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -\vec{a}\cdot 0 = \vec{0}$, т.е. векторы $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{c}, \vec{a}]$ коллинеарны. Аналогично проверяется, что и $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}]] = [[\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]] = \vec{0}$.

Пример 11. Докажите тождество

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\,\vec{d} = (\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})\,\vec{a} + (\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})\,\vec{b} + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\,\vec{c}.$$

△ Рассмотрим вектор $\vec{m} = [[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]]$. По формуле (4.23), $\vec{m} = \vec{c}\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Вектор $\vec{m}$ можно записать также в виде $\vec{m} = -[[\vec{c}, \vec{d}], [\vec{a}, \vec{b}]] = [[\vec{c}, \vec{d}], [\vec{b}, \vec{a}]] = \vec{b}\,(\vec{c}, \vec{d}, \vec{a}) - \vec{a}\,(\vec{c}, \vec{d}, \vec{b})$ (учтено еще раз соотношение (4.23)). Таким образом, $\vec{c}\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}\,(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{m} = -\vec{b}\,(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$, откуда и следует доказываемое тождество.▲

Пример 12. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ — радиусы-векторы четырех точек пространства A, B, C, D относительно некоторого полюса O. Докажите, что эти четыре точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{d}, \vec{a}).$$

△ Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$, т.е. $(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{a}) = 0$. Согласно свойству линейности смешанного произведения, получаем, учитывая свойство 4°, $0 = (\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d} - \vec{a}) - (\vec{b}, \vec{a}, \vec{d} - \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d} - \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{a}, \vec{d} - \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) - (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) - (\vec{b}, \vec{a}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{a}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{a}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{d}, \vec{a}) - ((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}))$. ▲

Пример 13. Даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ трех ребер тетраэдра $ABCD$, выходящих из вершины D

Найдите вектор $\overrightarrow{DH}$ высоты тетраэдра, опущенной из вершины D на плоскость (ABC).

$\triangle$ Вектор $\overrightarrow{BH}$ компланарен неколлинеарным векторам $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Следовательно, найдутся такие числа λ и μ, что $\overrightarrow{BH} = \lambda(\vec{a} - \vec{b}) + \mu(\vec{c} - \vec{b})$. Вектор $\overrightarrow{DH}$ перпендикулярен плоскости (ABC), т.е. коллинеарен вектору $\vec{d} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}] = [\vec{c} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}]$. Следовательно, существует такое число ν, что $\overrightarrow{DH} = \nu\vec{d}$. Из цикла $DHBD$ имеем $\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$, т.е. $\nu([\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}]) = \lambda\vec{a} + (1 - \lambda - \mu)\vec{b} + \mu\vec{c}$. Умножая обе части этого равенства скалярно на вектор $\vec{d}$, получим $\nu|\vec{d}|^2 = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, т. е. $\nu = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})/|\vec{d}|^2$. Таким образом,

$$\overrightarrow{DH} = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{|[\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}]|^2}([\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}]) \blacktriangle.$$

Пример 14. Докажите, что отрезок $[AB]$, концы A и B которого расположены на разных гранях данного двугранного угла, тогда и только тогда образует с этими гранями равные углы, когда концы отрезка равноудалены от ребра двугранного угла.

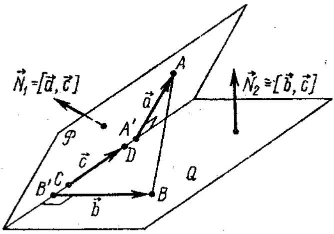


Рис. 4.16

$\triangle$ Пусть P и Q — грани двугранного угла (рис. 4.16), $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — их нормальные векторы, $A \in P$, $B \in Q$; C и D — две различные точки на ребре двугранного угла, A' и B' — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек A и B на прямую (CD). Векторы $\vec{a} = \overrightarrow{A'A}$, $\vec{b} = \overrightarrow{B'B}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ образуют базис, причем $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$. В качестве нормальных векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ можно взять векторы $\vec{N}_1 = [\vec{a}, \vec{c}]$, $|\vec{N}_1| = |\vec{a}|\,|\vec{c}|$ и $\vec{N}_2 = [\vec{b}, \vec{c}]$, $|\vec{N}_2| = |\vec{b}|\,|\vec{c}|$. По формуле (3.53) углы, образованные отрезком $[AB]$ с гранями P и Q, равны тогда и только тогда, когда

$$\frac{|(\vec{N}_1, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{N}_1||\overrightarrow{AB}|} = \frac{|(\vec{N}_2, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{N}_2||\overrightarrow{AB}|}, \text{ или } \frac{|(\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{c})|}{|\vec{a}|} = \frac{|(\overrightarrow{AB}, \vec{b}, \vec{c})|}{|\vec{b}|}.$$

Раскладывая вектор $\overrightarrow{AB}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$: $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}$ (λ неизвестно), получаем согласно свойствам 7^0, 4^0 смешанного произведения $(\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) + \lambda(\vec{c}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$; $(\overrightarrow{AB}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$. Следовательно, углы, образованные $[AB]$ с P и Q, равны тогда и только тогда, когда $1/|\vec{a}| = 1/|\vec{b}|$, т.е. $|AA'| = |BB'|$.▲

Пример 15. Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ не компланарны. Докажите, что векторы $\vec{f}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$, $\vec{f}_2 = [\vec{e}_3, \vec{e}_1]$, $\vec{f}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ в таком порядке образуют правый базис.

△ По формуле (4.24), $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2$. Поскольку $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — базис, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2 > 0$. Следовательно, согласно свойству 3^0 смешанного произведения, $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ — правый базис. ▲

Построенный по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ базис $\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$, где

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \vec{e}\,'_2 = \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}_1]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \vec{e}\,'_3 = \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \tag{4.25}$$

называется базисом, *взаимным* базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Из свойств смешанного произведения следует, что для всех $i, j = 1, 2, 3$

$$(\vec{e}_i, \vec{e}\,'_j) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ 1, & \text{при } i = j. \end{cases} \tag{4.26}$$

По формуле (4.24),

$$(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3) = \frac{1}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}. \tag{4.27}$$

Пример 16. Найдите радиус-вектор $\vec{x}$ общей точки M трех плоскостей: P_1: $(\vec{r}, \vec{N}_1) = D_1$, P_2: $(\vec{r}, \vec{N}_2) = D_2$, P_3: $(\vec{r}, \vec{N}_3) = D_3$, где $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3) \neq 0$.

△ Искомый вектор $\vec{x}$ удовлетворяет системе уравнений

$$(\vec{x}, \vec{N}_1) = D_1, \ (\vec{x}, \vec{N}_2) = D_2, \ (\vec{x}, \vec{N}_3) = D_3. \tag{4.28}$$

Будем искать $\vec{x}$ в виде разложения по базису $\{\vec{N}'_1, \vec{N}'_2, \vec{N}'_3\}$, взаимному базису $\{\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3\}$: $\vec{x} = y\vec{N}'_1 + z\vec{N}'_2 + t\vec{N}'_3$. Тогда $(\vec{x}, \vec{N}_1) = y(\vec{N}_1, \vec{N}'_1) + z(\vec{N}_1, \vec{N}'_2) + t(\vec{N}_1, \vec{N}'_3) = y$ [см. равенства (4.26)]. Аналогично, $(\vec{x}, \vec{N}_2) = z$, $(\vec{x}, \vec{N}_3) = t$, т. е. система (4.28) принимает вид $y = D_1$, $z = D_2$, $t = D_3$ и ее решение очевидно. Таким образом,

$$\vec{x} = D_1 \vec{N}'_1 + D_2 \vec{N}'_2 + D_3 \vec{N}'_3 =$$

$$= \frac{D_1 [\vec{N}_2, \vec{N}_3] + D_2 [\vec{N}_3, \vec{N}_1] + D_3 [\vec{N}_1, \vec{N}_2]}{(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)}. \blacktriangle \qquad (4.29)$$

Пример 17. Найдите вектор $\vec{x}$, образующий с данными некомпланарными векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равные углы.

$\triangle$ Нахождение $\vec{x}$ эквивалентно решению системы уравнений

$$(\vec{x}, \vec{a}) = \alpha, \ (\vec{x}, \vec{b}) = \beta, \ (\vec{x}, \vec{c}) = \gamma,$$

где $\alpha = |\vec{x}|\,|\vec{a}| \cos\varphi$, $\beta = |\vec{x}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$, $\gamma = |\vec{x}|\,|\vec{c}| \cos\varphi$; φ — одинаковый (неизвестный) угол между $\vec{x}$ и $\vec{a}$, $\vec{x}$ и $\vec{b}$, $\vec{x}$ и $\vec{c}$. По формуле (4.29) для системы (4.28) имеем

$$\vec{x} = \frac{\alpha [\vec{b}, \vec{c}] + \beta [\vec{c}, \vec{a}] + \gamma [\vec{a}, \vec{b}]}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} =$$

$$= |\vec{x}| \cos\varphi \frac{|\vec{a}|\,[\vec{b}, \vec{c}] + |\vec{b}|\,[\vec{c}, \vec{a}] + |\vec{c}|\,[\vec{a}, \vec{b}]}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}.$$

Поскольку по условию задачи длина вектора $\vec{x}$ несущественна, в качестве искомого можно взять вектор

$$\vec{x} = \frac{|\vec{a}|\,[\vec{b}, \vec{c}] + |\vec{b}|\,[\vec{c}, \vec{a}] + |\vec{c}|\,[\vec{a}, \vec{b}]}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}\, t,$$

где t — любое действительное число, не равное нулю. $\blacktriangle$

Пример 18*. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ верно равенство

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} (\vec{x}, \vec{a}) & (\vec{x}, \vec{b}) & (\vec{x}, \vec{c}) \\ (\vec{y}, \vec{a}) & (\vec{y}, \vec{b}) & (\vec{y}, \vec{c}) \\ (\vec{z}, \vec{a}) & (\vec{z}, \vec{b}) & (\vec{z}, \vec{c}) \end{vmatrix}. \qquad (4.30)$$

□ Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=0$, т. е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (для определенности это вектор $\vec{a}$) раскладывается по двум другим: $\vec{a}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$. Тогда

$$(\vec{x}, \vec{a})=\alpha(\vec{x}, \vec{b})+\beta(\vec{x}, \vec{c}),$$
$$(\vec{y}, \vec{a})=\alpha(\vec{y}, \vec{b})+\beta(\vec{y}, \vec{c}),$$
$$(\vec{z}, \vec{a})=\alpha(\vec{z}, \vec{b})+\beta(\vec{z}, \vec{c}).$$

Следовательно, в определителе, стоящем в правой части (4.30), первый столбец является линейной комбинацией второго и третьего столбцов. Поэтому данный определитель равен нулю. Таким образом, если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=0$, то равенство (4.30) выполнено: обе его части равны нулю.

Пусть теперь $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\neq 0$, т. е. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — базис. Разложим векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ по базису $\{\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'\}$, взаимному базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\vec{x}=\alpha_1\vec{a}'+\alpha_2\vec{b}'+\alpha_3\vec{c}',$$
$$\vec{y}=\beta_1\vec{a}'+\beta_2\vec{b}'+\beta_3\vec{c}',$$
$$\vec{z}=\gamma_1\vec{a}'+\gamma_2\vec{b}'+\gamma_3\vec{c}'.$$

По формуле (4.21), $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})=\Delta\cdot(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}.$$

Учитывая соотношение (4.27), получаем, что левая часть (4.30) равна $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})=(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')\cdot\Delta=\Delta$. С другой стороны, в силу (4.26) $(\vec{x}, \vec{a})=(\vec{a}, \vec{x})=(\vec{a}, \alpha_1\vec{a}'+\alpha_2\vec{b}'+\alpha_3\vec{c}')=\alpha_1$, $(\vec{x}, \vec{b})=\alpha_2$, $(\vec{x}, \vec{c})=\alpha_3$, $(\vec{y}, \vec{a})=\beta_1$, $(\vec{y}, \vec{b})=\beta_2$, $(\vec{y}, \vec{c})=\beta_3$, $(\vec{z}, \vec{a})=\gamma_1$, $(\vec{z}, \vec{b})=\gamma_2$, $(\vec{z}, \vec{c})=\gamma_3$, т. е. правая часть (4.30) также равна определителю Δ. ■

Пример 19*. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ длины всех ребер равны 1, $D\widehat{A}B=D\widehat{A}A'=B\widehat{A}A'$. Найдите величину каждого из этих углов, если объем параллелепипеда равен $1/\sqrt{2}$.

△ Воспользуемся формулой (4.30), в силу которой

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}. \tag{4.31}$$

Полагая $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$, получаем, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA'}$, может быть найден по формуле

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = \sqrt{\begin{vmatrix} (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD}) & (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) & (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AA'}) \end{vmatrix}}. \tag{4.32}$$

По условию, $|AD| = |AB| = |AA'| = 1$, т. е. $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AA'}) = 1$, $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}) = \cos\varphi$, где $\varphi = D\widehat{A}B = D\widehat{A}A' = B\widehat{A}A'$ (рис. 4.17). Согласно формуле (4.32), получаем

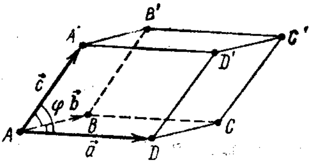


Рис. 4.17

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & w & w \\ w & 1 & w \\ w & w & 1 \end{vmatrix}} = \sqrt{2w^3 - 3w^2 + 1},$$

где $w = \cos\varphi$. Решая уравнение $0 = 2w^3 - 3w^2 + 1/2 = 2w^3 - w^2 - (2w^2 - 1/2) = 2w^2(w - 1/2) - 2(w + 1/2) \times (w - 1/2) = 2(w - 1/2)(w - (\sqrt{3} + 1)/2)(w + (\sqrt{3} - 1)/2)$ и учитывая неравенство $|w| = |\cos\varphi| \leqslant 1$, находим,

$$\varphi_1 = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ, \quad \varphi_2 = \arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2} = 180^\circ - \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2}. \quad ▲$$

Пример 20*. Выразите объем тетраэдра $ABCD$ через длины $a = |AD|$, $b = |BD|$, $c = |CD|$ трех его ребер, выходящих из одной вершины D, и величины $\alpha = A\widehat{D}B$, $\beta = B\widehat{D}C$, $\gamma = C\widehat{D}A$ плоских углов при этой вершине.

△ Используя результат примера 3 и формулу (4.32), получаем

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix}(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DA}) & (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) & (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})\\ (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) & (\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DB}) & (\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})\\ (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}) & (\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}) & (\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DC})\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix}a^2 & ab\cos\alpha & ac\cos\gamma\\ ab\cos\alpha & b^2 & bc\cos\beta\\ ac\cos\gamma & bc\cos\beta & c^2\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\,.\ ▲$$

Пример 21. Докажите, что объем тетраэдра $ABCD$ может быть вычислен по формуле $V=(1/6)\,|AD|\,|BC|\,d\sin\varphi$, где φ — угол между прямыми (AD) и (BC), а d — расстояние между этими прямыми.

△ Объем V тетраэдра $ABCD$ равен $V=(1/6)\,|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})|$ (см. пример 3). Пусть $M\in(AD)$ и $N\in(BC)$ — точки пересечения общего перпендикуляра к прямым (AD) и (BC) с этими прямыми. Тогда $d=|\overrightarrow{MN}|$, а вектор $\overrightarrow{MN}$, будучи ортогонален $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$, коллинеарен векторному произведению $[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}]$. Пусть λ и μ — такие числа, что $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BC}$. Тогда $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MN}-\mu\overrightarrow{BC}$ и $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})=\lambda(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})-\mu(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{MN},[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}])$. Следовательно, $V=(1/6)\,|(\overrightarrow{MN},[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}])|=(1/6)\,d\cdot|[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}]|$ (векторы $[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}]$ и $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны). Так как $|[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}]|=|AD|\times$ $\times\,|BC|\sin\varphi$, то $V=(1/6)\,|AD|\,|BC|\,d\sin\varphi$.▲

Пример 22*. Дан тетраэдр $ABCD$. На ребрах $[AB]$, $[CD]$ и продолжении ребра $[AC]$ за точку C выбраны соответственно точки M, N, P так что $|AM|:|AB|=\lambda$, $|CN|:$ $:|CD|=\mu$, $|PC|:|CA|=\nu$. Определите объем той отсекаемой плоскостью (MNP) от тетраэдра части, которая содержит точку A. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V.

△ Пусть Q и R — точки пересечения плоскости (MNP) с прямыми (BC) и (DA) (рис. 4.18). Объем многогранника $RAMQCN$ равен V_1-V_2, где $V_1=(1/6)\,|(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR})|$ и $V_2=(1/6)\,|(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PN})|$ — соответственно объемы тетраэдров $PRAM$ и $PNCQ$. Вычислим векторы, входящие в выражения для объемов. Обозначим $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. Тогда $V = (1/6)\,|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$. Имеем $\overrightarrow{PM} = (\nu + 1)\vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$. Пусть $\overrightarrow{PQ} = x\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{CQ} = y\vec{b}$. Найдем x и y, используя цикл $PCQP$: $\vec{0} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{PQ} = \nu\vec{a} + y\vec{b} - x((\nu + 1 - \lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b})$. В силу единственности разложения по базису $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ $y = x\lambda$, $\nu = x(\nu + 1 - \lambda)$. Следовательно, $x = \nu/(1 + \nu - \lambda)$. Пусть $\overrightarrow{PR} = z\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{RA} = w\overrightarrow{DA}$. Неизвестные числа z и w находим, используя цикл $PRAP$: $\vec{0} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RA} - \overrightarrow{PA} = z(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CN}) + w(\vec{a} - \vec{c}) - \overrightarrow{PA} = (z\nu + w - \nu - 1)\,\vec{a} + (z\mu - w)\,\vec{c}$. Отсюда $z\nu + w - \nu - 1 = 0$, $z\mu - w = 0$. Сложив оба равенства, получим $z = (\nu + 1)/(\mu + \nu)$. Таким образом, окончательно

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} \nu+1 & 0 & 0 \\ \nu+1-\lambda & \lambda & 0 \\ z\nu & 0 & z\mu \end{vmatrix}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right| = (\nu+1)\,\lambda z\mu V =$$

$$= \frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V;$$

$$V_2 = \frac{1}{6}\left|\left(\frac{\nu}{1+\nu}\overrightarrow{PA}, x\overrightarrow{PM}, \frac{1}{z}\overrightarrow{PR}\right)\right| = \frac{\nu x}{z(\nu+1)}V_1;$$

$$V_1 - V_2 = \left(1 - \frac{\nu x}{z(\nu+1)}\right)\frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V =$$

$$= \left(1 - \frac{\nu^2(\mu+\nu)}{(\nu+1)^2(1+\nu-\lambda)}\right)\frac{(\nu+1)^2\lambda\mu}{\mu+\nu}V.$$

Отметим замечательный частный случай получившейся формулы: $\lambda = \mu = 1/2$ (плоскость (MNP) проходит через середины скрещивающихся ребер тетраэдра). В этом случае (независимо от величины ν) $V_1 - V_2 = (1/2)V$, т. е. *плоскость, проходящая через середины скрещивающихся ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие (одинаковые по объему) части.* ▲

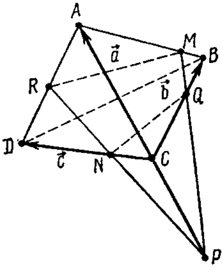


Рис. 4.18

Пример 23* (теорема косинусов для трехгранного угла). Плоские углы $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ (рис. 4.19) трехгранного угла $OABC$ соответственно равны α, β, γ. Докажите, что величина $\widehat{B}$ двугранного угла при ребре $[OB)$ удовлетворяет соотношению

$$\cos \widehat{B} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}. \tag{4.33}$$

□ Рассмотрим единичные векторы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}/|\overrightarrow{OA}|$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}/|\overrightarrow{OB}|$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}/|\overrightarrow{OC}|$. Тогда $\vec{N}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$ ($|\vec{N}_1| = |\vec{e}_2| \times |\vec{e}_3| \sin\beta = \sin\beta$), $\vec{N}_2 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ ($|\vec{N}_2| = \sin\alpha$) — нормальные векторы плоскостей соответственно (COB) и (AOB) (рис. 4.20 — на этом рисунке изображена проекция иско-

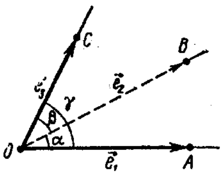


Рис. 4.19

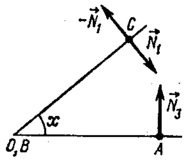


Рис. 4.20

мого двугранного угла при ребре $[OB)$ на плоскость, ортогональную (OB)). Согласно свойствам углов с соответственно перпендикулярными сторонами,

$$\cos \widehat{B} = \cos (180° - (\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2})) = -\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} =$$

$$= -\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Для вычисления произведения $(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$ воспользуемся тем, что по формуле двойного векторного произведения имеем $[\vec{e}_2, \vec{N}_1] = [\vec{e}_2, [\vec{e}_2, \vec{e}_3]] = \vec{e}_2 (\vec{e}_2, \vec{e}_3) - \vec{e}_3 (\vec{e}_2, \vec{e}_2)$ и, следовательно, $(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = (\vec{N}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{N}_1) = (\vec{e}_1, [\vec{e}_2, \vec{N}_1]) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)(\vec{e}_2, \vec{e}_3) - (\vec{e}_1, \vec{e}_3)|\vec{e}_2|^2 = \cos\alpha \cos\beta - \cos\gamma$. Таким образом, $\cos\widehat{B} = (\cos\gamma - \cos\alpha \cos\beta)/(\sin\alpha \times \sin\beta)$. ■

Пример 24*. Докажите, что: а) всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух остальных; б) сумма плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

$\triangle$ а) Воспользуемся обозначениями примера 23. Поскольку $0° < \alpha < 180°$, $0° < \beta < 180°$, $0° < \widehat{B} < 180°$, из формулы (4.33) следует, что $\cos\gamma = \cos(\alpha + \beta) + (1 + \cos\widehat{B})\sin\alpha\sin\beta > \cos(\alpha + \beta)$. Так как косинус на отрезке $[0°, 180°]$ монотонно убывает, а $0° < \gamma < 180°$, то из неравенства $\cos\gamma > \cos(\alpha + \beta)$ вытекает, что $\gamma < \alpha + \beta$, если $0° < \alpha + \beta \leqslant 180°$. Если же $\alpha + \beta > 180°$, то неравенство $\alpha + \beta > \gamma$ очевидно, ибо $180° > \gamma$. б) Преобразуя полученное неравенство $0 < \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ и используя то обстоятельство, что по доказанному, $0° < \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} < \frac{\alpha+\beta}{2} < 180°$, т. е. $\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} > 0$, получаем $\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > 0$. Так как $0° < \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) < 270°$, то отсюда следует, что $0° < \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) < 180°$, т. е. $\alpha + \beta + \gamma < 360°$. $\blacktriangle$

§ 5. Векторные задачи на прямую и плоскость

Пример 1. Напишите параметрическое векторное уравнение прямой l, заданной как линия пересечения двух непараллельных плоскостей $P_1 : (\vec{r}, \vec{N}_1) = D_1$ и $P_2 : (\vec{r}, \vec{N}_2) = D_2$.

$\triangle$ Первое решение. Вектор $\vec{r}$ является тогда и только тогда радиусом-вектором точки прямой l, когда

$$(\vec{r}, \vec{N}_1) = D_1,\ (\vec{r}, \vec{N}_2) = D_2,\ \vec{N}_1(\vec{r}, \vec{N}_2) - \vec{N}_2(\vec{r}, \vec{N}_1) = D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2$$

(в этои системе уравнений третье уравнение есть очевидное следствие первых двух). Используя формулу двойного векторного произведения, перепишем это третье уравнение в виде

$$[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}, \qquad (4.34)$$

где $\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, $\vec{M} = D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2$. Уравнение (4.34) является векторным уравнением некоторой прямой l^* (см. пример 3 § 3 этой главы), полностью определяющим эту прямую. Уравнению (4.34) удовлетворяют все радиусы-векторы точек прямой l. Следовательно, $l \subset l^*$, т. е. $l = l^*$, а (4.34) — векторное уравнение l. Запишем это уравнение в соответствии с формулой (4.13) в параметрическом виде:

$$\vec{r} = \frac{[[\vec{N}_1, \vec{N}_2], D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1, \vec{N}_2]|^2} + [\vec{N}_1, \vec{N}_2]t, \quad t \in R. \qquad (4.35)$$

Второе решение. Прямая l, находясь в плоскостях P_1 и P_2, перпендикулярна как вектору $\vec{N}_1$, так и вектору $\vec{N}_2$. Следовательно (см. пример 9 § 3 этой главы), вектор $\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$ — направляющий вектор l. Вектор $\vec{r}_0$ (радиус-вектор начальной точки прямой l) найдем как радиус-вектор основания перпендикуляра, опущенного из полюса на прямую l, т. е. как решение системы уравнений $(\vec{r}_0, \vec{N}_1) = D_1$, $(\vec{r}_0, \vec{N}_2) = D_2$, $(\vec{r}_0, \vec{a}) = 0$ $(\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2])$. Это система уравнений типа (4.28). По формуле (4.29), ее решение

$$\vec{r}_0 = \frac{D_1[\vec{N}_2, \vec{a}] + D_2[\vec{a}, \vec{N}_1] + 0\cdot[\vec{N}_1, \vec{N}_2]}{(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{a})} =$$

$$= \frac{[\vec{a}, D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2]}{(\vec{a}, [\vec{N}_1, \vec{N}_2])} = \frac{[[\vec{N}_1, \vec{N}_2], D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1, \vec{N}_2]|^2}.$$

Параметрическое уравнение l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $t \in R$ совпадает с (4.35). ▲

Пример 2. Напишите в параметрическом виде уравнения прямой l: $x + y - z + 1 = 0$, $x + 2y + z - 4 = 0$.

△ В обозначениях предыдущего примера:

$$\vec{N}_1 = (1;\ 1;\ -1), \quad D_1 = -1, \quad \vec{N}_2 = (1;\ 2;\ 1),$$

$$D_2=4,\ D_2\vec N_1-D_1\vec N_2=(5;\ 6;\ -3),\ \vec a=[\vec N_1,\ \vec N_2]=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(3;\ -2;\ 1),\ \vec r_0=\frac{1}{9+4+1}\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 3 & -2 & 1\\ 5 & 6 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{14}(0;\ 14;\ 28)=(0;\ 1;\ 2).$$

Следовательно, уравнения l — это $x=0+3t$, $y=1-2t$, $z=2+t$ или $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$. ▲

Пример 3. Найдите ортогональную проекцию $M_*(\vec r_*)$ точки $M_0(\vec r_0)$ на прямую l, являющуюся линией пересечения плоскостей $P_1:(\vec r,\ \vec N_1)=D_1$ и $P_2:(\vec r,\ \vec N_2)=D_2$.

△ Вектор $\vec a=[\vec N_1,\ \vec N_2]$ — направляющий вектор l. По условию, $M_*\in l$, $\overrightarrow{M_0M_*}\perp\vec a$ (т. е. $(\vec r_*-\vec r_0,\ \vec a)=0$), и мы приходим к следующей системе уравнений для определения радиуса-вектора $\vec r_*$ точки M_*:

$$(\vec r_*,\ \vec N_1)=D_1,\ (\vec r_*,\ \vec N_2)=D_2,\ (\vec r_*,\ \vec a)=D_3.$$

Здесь $\vec a=[\vec N_1,\ \vec N_2]$, $D_3=(\vec r_0,\ \vec a)=(\vec r_0,\ \vec N_1,\ \vec N_2)$. По формуле (4.29) находим

$$\vec r_*=\frac{D_1[\vec N_2,\ \vec a]+D_2[\vec a,\ \vec N_1]+D_3\vec a}{(\vec N_1,\ \vec N_2,\ \vec a)}=$$

$$=\frac{[[\vec N_1,\ \vec N_2],\ D_2\vec N_1-D_1\vec N_2]+(\vec r_0,\ \vec N_1,\ \vec N_2)[\vec N_1,\ \vec N_2]}{|[\vec N_1,\ \vec N_2]|^2}.\ ▲$$

Пример 4 (пучок плоскостей, проходящих через заданную прямую). Напишите уравнения всех плоскостей, проходящих через прямую l, которая является линией пересечения плоскостей: $P_1:\ (\vec r,\ \vec N_1)+D_1=0$ и $P_2:\ (\vec r,\ \vec N_2)+D_2=0$, $[\vec N_1,\ \vec N_2]\neq\vec 0$.

□ Направляющий вектор $\vec a$ прямой l равен $\vec a=[\vec N_1,\ \vec N_2]$. Пусть P^* — произвольная плоскость, проходящая через прямую l. Тогда нормальный вектор $\vec N^*\neq\vec 0$ этой плоскости ортогонален вектору $\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, т. е. параллелен плоскости, в которой векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ образуют базис. Поэтому существуют (зависящие от $\vec{N}^*$, т.е. от плоскости P^*) такие числа α и β, что $\vec{N}^* = \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Следовательно, уравнение P^* — это $(\vec{r}, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = D^*$. Число D^* также определяется плоскостью P^*: оно выражается через α и β. Чтобы найти связь между D^*, α и β, рассмотрим произвольную точку $M_0 \in l$ с радиусом-вектором $\vec{r}_0$. Так как $M_0 \in P_1$, то $(\vec{r}_0, \vec{N}_1) = -D_1$; так как $M_0 \in P_2$, то $(\vec{r}_0, \vec{N}_2) = -D_2$. Наконец, $D^* = (\vec{r}_0, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2$, поскольку $M_0 \in P^*$. Таким образом, уравнение всякой плоскости P^*, содержащей l, имеет вид

$$(\vec{r}_1, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = -\alpha D_1 - \beta D_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} = 0, \qquad (4.36)$$

где α и β — не равные нулю одновременно числа, определяемые плоскостью P^*. Обратно: если β и α — произвольные числа, не равные нулю одновременно, то уравнение (4.36) является уравнением некоторой плоскости, причем плоскости, содержащей l (если $\vec{r}_0$ — радиус-вектор произвольной точки $M_0 \in l$, то $M_0 \in P_1$: $(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1 = 0$, $M_0 \in P_2$: $(\vec{r}_0, \vec{N}_2) + D_2 = 0$ и, следовательно, $\alpha\{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}_0, \vec{N}_2) + D_2\} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, т.е. M_0 лежит в плоскости, заданной уравнением (4.36)).

Уравнение (4.36) называется *уравнением пучка плоскостей, проходящих через линию пересечения плоскостей* P_1: $(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1 = 0$ и P_2: $(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2 = 0$. Если уравнения P_1 и P_2 заданы в координатной форме

$$P_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$P_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то, вводя векторы $\vec{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$, получаем P_1: $(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1 = 0$, P_2: $(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2 = 0$. Следовательно, уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую $l = P_1 \cap P_2$, принимает вид [ср. с (4.36)]

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y +$$
$$+ C_2z + D_2) = 0,\ \alpha^2 + \beta^2 > 0. \ \blacksquare \qquad (4.37)$$

Пример 5. Через линию пересечения двух плоскостей P_1: $(\vec{r}, \vec{N}_1) = -D_1$ и P_2: $(\vec{r}, \vec{N}_2) = -D_2$ проведите плоскость перпендикулярную плоскости P_3: $(\vec{r}, \vec{N}_3) = D_3$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_3) \neq$ $\neq 0$.

△ По формуле (4.36) уравнение искомой плоскости имеет вид $\alpha\{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} = 0$, или $(\vec{r}, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2) = -(\alpha D_1 + \beta D_2)$. Нормальный вектор этой плоскости есть вектор $\vec{N} = \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2$. По условию этот вектор ортогонален $\vec{N}_3$, т.е. $\alpha(\vec{N}_1, \vec{N}_3) + \beta(\vec{N}_2, \vec{N}_3) = 0$. Так как $(\vec{N}_1, \vec{N}_3) \neq 0$, то $\alpha = -\beta(\vec{N}_2, \vec{N}_3)/(\vec{N}_1, \vec{N}_3)$, $\beta \neq 0$. Подставляя α и β в (4.36) и сокращая на $\beta/(\vec{N}_1, \vec{N}_3)$, получаем

$$(\vec{r}, -\vec{N}_1(\vec{N}_3, \vec{N}_2) + \vec{N}_2(\vec{N}_3, \vec{N}_1)) = D_1(\vec{N}_2, \vec{N}_3) -$$

$$- D_2(\vec{N}_1, \vec{N}_3) \Leftrightarrow (\vec{r}, \vec{N}_3, [\vec{N}_1, \vec{N}_2]) = (D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2, \vec{N}_3). \blacktriangle$$

Пример 6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M (—3; 1; 0) и линию пересечения плоскостей P_1: $x + 2y - z + 4 = 0$ и P_2: $3x - y + 2z - 1 = 0$.

△ Уравнение искомой плоскости имеет вид [см. (4.37)]

$$P: \ \alpha(x + 2y - z + 4) + \beta(3x - y + 2z - 1) = 0,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Связь между α и β определяется из условия $M \in P$, т. е. $\alpha(-3 + 2 \cdot 1 - 0 + 4) + \beta(3 \cdot (-3) - 1 + 2 \cdot 0 - 1) =$ $= 0$, или $3\alpha - 11\beta = 0$. После подстановки $\alpha = \frac{11}{3}\beta$ и сокращения на $\frac{1}{3}\beta \neq 0$ уравнение P принимает вид $20x +$ $+ 19y - 5z + 41 = 0$. ▲

Пример 7. Составьте уравнение плоскости, параллельной прямой L: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z}{-2}$ и проходящей через линию пересечения плоскостей P_1: $x - y + 2 = 0$, P_2: $y +$ $+ z - 4 = 0$.

△ Уравнение искомой плоскости имеет вид

$$\alpha(x - y + 2) + \beta(y + z - 4) = 0 \Leftrightarrow \alpha x + (\beta - \alpha)y +$$

$$+ \beta z + (2\alpha - 4\beta) = 0.$$

Ее нормальный вектор $\vec{N} = (\alpha;\ \beta-\alpha;\ \beta)$ ортогонален направляющему вектору $\vec{a} = (-1;\ 3;\ -2)$ прямой L: $\alpha\cdot(-1)+(\beta-\alpha)\cdot 3+\beta\cdot(-2)=0$. Отсюда $\beta=4\alpha$, а уравнение искомой плоскости $x+3y+4z-14=0$. ▲

Пример 8. Напишите уравнение произвольной плоскости, проходящей через общую точку плоскостей P_1: $(\vec{r}, \vec{N}_1) = -D_1$, P_2: $(\vec{r}, \vec{N}_2) = -D_2$, P_3: $(\vec{r}, \vec{N}_3) = -D_3$, $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3) \neq 0$.

△ Пусть $\vec{r}_0$ — радиус-вектор общей точки M_0 плоскостей P_1, P_2, P_3. Тогда $(\vec{r}_0, \vec{N}_1) = -D_1$, $(\vec{r}_0, \vec{N}_2) = -D_2$, $(\vec{r}_0, \vec{N}_3) = -D_3$. Если P^* — произвольная плоскость, то ее нормальный вектор $\vec{N} \neq \vec{0}$ раскладывается по некомпланарным векторам $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$: $\vec{N} = \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2 + \gamma\vec{N}_3$ (числа α, β, γ, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$ определяются вектором $\vec{N}$, т. е. плоскостью P^*). Таким образом, уравнение P^* — это $(\vec{r}, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2 + \gamma\vec{N}_3) + D^* = 0$. Точка M_0 принадлежит P^* тогда и только тогда, когда $\vec{r}_0$ удовлетворяет уравнению P^*, т.е. когда $D^* = -(\vec{r}_0, \alpha\vec{N}_1 + \beta\vec{N}_2 + \gamma\vec{N}_3) = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma D_3$. Таким образом, уравнение P^*

$$\alpha\{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} + \\ +\gamma\{(\vec{r}, \vec{N}_3) + D_3\} = 0, \qquad (4.38)$$

называемое *уравнением связки плоскостей, проходящих через общую точку плоскостей* P_1, P_2, P_3, описывает (при переменных α, β, γ, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>0$) множество всех плоскостей, проходящих через точку M_0. ▲

Пример 9. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\vec{r}_1)$ и прямую l: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $(\vec{a}, \vec{M}) = 0$.

△ Запишем уравнение l в параметрическом виде: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $t \in R$, $\vec{r}_0 = \dfrac{[\vec{a}, \vec{M}]}{|\vec{a}|^2}$. Точка M с радиусом-вектором $\vec{r}$ лежит в искомой плоскости P тогда и только тогда, когда векторы $\vec{r}-\vec{r}_1$, $\vec{r}_0-\vec{r}_1$, $\vec{a}$ компланарны, т. е. $(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{r}_0-\vec{r}_1, \vec{a}) = 0$. Замечая, что $[\vec{r}_0-\vec{r}_1, \vec{a}] = \vec{M} - [\vec{r}_1, \vec{a}]$, получаем уравнение P: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} = \vec{M} - [\vec{r}_1, \vec{a}]$, $D = (\vec{r}_1, \vec{N}) = (\vec{r}_1, \vec{M})$. ▲

Пример 10. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\vec{r}_0)$ и линию пересечения плоскостей P_1: $(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1 = 0$ и P_2: $(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2 = 0$, $[\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq \vec{0}$, $M_0 \notin P_1$.

△ Уравнение искомой плоскости P [см. (4.36)] $\alpha\{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Числа α и β удовлетворяют условию $\alpha\{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\} + \beta\{(\vec{r}_0, \vec{N}_2) + D_2\} = 0$, $\{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\} \neq 0$. Выражая отсюда α и подставляя в уравнение плоскости P, после сокращения на число

$-\beta/\{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\} \neq 0$ получаем $\{(\vec{r}_0, \vec{N}_2) + D_2\} \times \{(\vec{r}, \vec{N}_1) + D_1\} - \{(\vec{r}_0, \vec{N}_1) + D_1\}\{(\vec{r}, \vec{N}_2) + D_2\} = 0$. ▲

Пример 11. Даны прямая l: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $(\vec{a}, \vec{M}) = 0$ и плоскость P: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} \neq \vec{0}$. При каком условии: а) l и P имеют единственную общую точку; б) $l \cap P = \varnothing$; в) $l \subset P$?

△ а) Запишем уравнение l в параметрическом виде: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $t \in R$, где $\vec{r}_0 = [\vec{a}, \vec{M}]/|\vec{a}|^2$. Прямая l и плоскость P имеют единственную общую точку тогда и только тогда, когда уравнение

$$(\vec{r}_0 + \vec{a}\,t, \vec{N}) = D \Leftrightarrow t(\vec{a}, \vec{N}) = D - (\vec{r}_0, \vec{N}) \tag{4.39}$$

имеет единственное решение t. Это имеет место тогда и только тогда, когда $(\vec{a}, \vec{N}) \neq 0$. В этом случае $t = \dfrac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{a}, \vec{N})} = \dfrac{Da^2 - (\vec{a}, \vec{M}, \vec{N})}{a^2(\vec{a}, \vec{N})}$, а радиус-вектор $\vec{r}$ общей точки прямой l и плоскости P определяется формулой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,\frac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{a}, \vec{N})} = \frac{D\vec{a} + \vec{r}_0(\vec{N}, \vec{a}) - \vec{a}(\vec{N}, \vec{r}_0)}{(\vec{a}, \vec{N})} =$$

$$= \frac{D\vec{a} + [\vec{N}, [\vec{r}_0, \vec{a}]]}{(\vec{a}, \vec{N})} = \frac{D\vec{a} + [\vec{N}, \vec{M}]}{(\vec{a}, \vec{N})}. \tag{4.40}$$

б) Если $(\vec{a}, \vec{N}) = 0$, $D \neq (\vec{a}, \vec{M}, \vec{N})/|\vec{a}|^2$, то уравнение (4.39) имеет вид $t \cdot 0 = D - (\vec{a}, \vec{M}, \vec{N})/|\vec{a}|^2$ и решений не имеет, т.е. l и P общих точек не имеют.

в) Если $(\vec{a}, \vec{N}) = 0$, $D|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{M}, \vec{N})$, то уравнение (4.39) принимает вид $t \cdot 0 = 0$. Его решением является любое число t. Таким образом, любая точка прямой l лежит и в плоскости P: $l \subset P$. ▲

Пример 12. Найдите ортогональную проекцию $M_*(\vec{r}_*)$ точки $M_1(\vec{r}_1)$ на прямую l: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $(\vec{a}, \vec{M}) = 0$.

△ По условию, $M_* \in l$, т.е. $[\vec{r}_*, \vec{a}] = \vec{M}$, и $\overrightarrow{M_*M_1} \perp \vec{a}$, или $(\vec{r}_*, \vec{a}) = (\vec{r}_1, \vec{a})$. Задача сведена, таким образом, к нахождению радиуса-вектора $\vec{r}_*$ общей точки прямой l: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$ и плоскости P: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} = \vec{a}$, $D = (\vec{r}_1, \vec{a})$. По формуле (4.40),

$$\vec{r}_* = \frac{(\vec{r}_1, \vec{a})\,\vec{a} + [\vec{a}, \vec{M}]}{(\vec{a}, \vec{a})}. \ ▲$$

Пример 13. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(\vec{r}_1)$ и пересекающей ортогонально прямую l: $(\vec{r}, \vec{N}_i) = D_i$, $i = 1, 2$, $[\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq \vec{0}$.

△ Пусть $M_0(\vec{r}_0)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую l. Тогда из условий $M_0 \in l$ и $(M_1 M_0) \perp l$, т.е. $(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}) = 0$, где $\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$ — направляющий вектор l, имеем

$$(\vec{r}_0, \vec{N}_1) = D_1, \ (\vec{r}_0, \vec{N}_2) = D_2, \ (\vec{r}_0, \vec{a}) = D_3,$$
$$D_3 = (\vec{r}_1, \vec{N}_1, \vec{N}_2).$$

Получена система уравнений типа (4.28). Ее решение [см. (4.29)]:

$$\vec{r}_0 = \frac{[[\vec{N}_1, \vec{N}_2], D_2\vec{N}_1 - D_1\vec{N}_2] + (\vec{r}_1, \vec{N}_1, \vec{N}_2)[\vec{N}_1, \vec{N}_2]}{|[\vec{N}_1, \vec{N}_2]|^2}.$$

Уравнение перпендикуляра $\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)t$, $t \in R$. ▲

Пример 14. Составьте уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_1(\vec{r}_1)$ и перпендикулярной линии l пересечения плоскостей P_1: $(\vec{r}, \vec{N}_1) = D_1$ и P_2: $(\vec{r}, \vec{N}_2) = D_2$, $[\vec{N}_1, \vec{N}_2] \neq \vec{0}$.

$\triangle$ Вектор $\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$, направляющий вектор прямой l, является нормальным вектором искомой плоскости, уравнение которой, следовательно, $(\vec{r}, \vec{a}) = D$. Число D находится из условия $M_1 \in P$: $(\vec{r}_1, \vec{a}) = D$. Окончательно уравнение P — это $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0$. $\blacktriangle$

Пример 15. Составьте уравнение прямой, лежащей в плоскости P: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $\vec{N} \neq \vec{0}$ и пересекающей под прямым углом прямую l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, при условии, что $(\vec{a}, \vec{N}) \neq 0$, $[\vec{a}, \vec{N}] \neq \vec{0}$.

$\triangle$ Радиус-вектор $\vec{r}_*$ общей точки M_* плоскости P и прямой l находится из соотношений $\vec{r}_* = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, $(\vec{r}_0 + \vec{a}t, \vec{N}) = D$, т. е. $\vec{r}_* = \vec{r}_0 + \vec{a}\,\dfrac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{a}, \vec{N})}$. Искомая прямая необходимо проходит через эту точку. Поскольку искомая прямая L лежит в плоскости P, направляющий вектор $\vec{b}$ прямой L ортогонален $\vec{N}$. По условию, также $\vec{b} \perp \vec{a}$. Следовательно, в качестве направляющего вектора прямой L можно взять вектор $\vec{b} = [\vec{a}, \vec{N}]$. Таким образом, уравнение L — это $\vec{r} = \left(\vec{r}_0 + \dfrac{D - (\vec{r}_0, \vec{N})}{(\vec{a}, \vec{N})}\vec{a}\right) + [\vec{a}, \vec{N}]\tau$, $\tau \in R$. $\blacktriangle$

Пример 16. Через прямую l: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ проведите плоскость, перпендикулярную плоскости P: $(\vec{r}, \vec{N}) = D$, $[\vec{a}, \vec{N}] \neq \vec{0}$.

$\triangle$ Точка $M_0(\vec{r}_0)$ и один из направляющих векторов (вектор $\vec{a}$) искомой плоскости известны. В качестве второго направляющего вектора можно взять, например, $\vec{N}$, поскольку, по условию искомая плоскость, будучи перпендикулярна плоскости P, параллельна ее нормальному вектору $\vec{N}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{N}$ не коллинеарны. Искомая плоскость

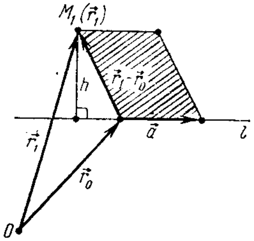


Рис. 4.21

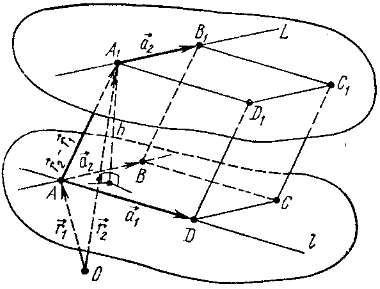


Рис. 4.22

им параллельна. Поэтому в качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять $\vec{N}^* = [\vec{a}, \vec{N}]$, а уравнение этой плоскости $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}, \vec{N}) = 0$. ▲

Пример 17. Найдите расстояние от точки $M_1(\vec{r}_1)$ до прямой $l : \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$.

△ Искомое расстояние h — длина высоты параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ и $\vec{a}$ (рис. 4.21). Следовательно,

$$h = \frac{|[\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}. \ ▲$$

Пример 18. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $l : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ и $L : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 \tau$.

△ Искомое расстояние h — длина общего перпендикуляра к прямым l и L, т. е. расстояние между параллельными плоскостями, одна из которых содержит l, а другая — L, т. е. длина высоты параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.22), построенного на векторах $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, т. е. число

$$h = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}. \ ▲$$

Дополнение

Свойства преобразования подобия p. 1^0. Преобразование подобия p с коэффициентом k взаимно однозначно. Образом пространства (плоскости) при преобразовании p является все пространство (вся плоскость). Обратное к p преобразование существует и также является преобразованием подобия (с коэффициентом $1/k$).

2^0. Если A, B, C — точки, лежащие на одной прямой, причем $C \in [AB]$, то их образы $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ также лежат на одной прямой, причем $p(C) \in [p(A)\ p(B)]$.

3^0. При преобразовании подобия p образом прямой (AB) является прямая $(p(A)\ p(B))$, образом отрезка $[AB]$ — отрезок $[p(A)\ p(B)]$, образом луча $[AB)$ — луч $[p(A)\ p(B))$, образом плоскости (ABC) — плоскость $(p(A)\ p(B)\ p(C))$.

4^0. При преобразовании подобия образами параллельных прямых являются параллельные прямые, образами сонаправленных (противоположно направленных) лучей — сонаправленные (противоположно направленные) лучи, образами параллельных плоскостей — параллельные плоскости.

5^0. Если O, A, B — три точки, не лежащие на одной прямой, то угол $A\widehat{O}B$ равен углу $p(A)\ \widehat{p(O)}\ p(B)$. Если треугольники OAB и $O^*A^*B^*$ таковы, что $A\widehat{O}B = A^*\widehat{O^*}B^*$, $A\widehat{B}O = A^*\widehat{B^*}O^*$, то существует преобразование подобия p такое, что $A^* = p(A)$, $B^* = p(B)$, $O^* = p(O)$.

6^0. Композиция двух преобразований подобия с коэффициентами k_1 и k_2 есть преобразование подобия с коэффициентом k_1k_2.

Свойства гомотетии H_O^k. 1^0. Гомотетия H_O^k является преобразованием подобия с коэффициентом $|k|$.

2^0. При преобразовании гомотетии H_O^k образом плоскости является параллельная ей плоскость, образом прямой (AB) — параллельная ей прямая $(H_O^k(A)\ H_O^k(B))$, лучи $[AB)$ и $H_O^k([AB)) = [H_O^k(A) H_O^k(B))$ сонаправлены, если $k > 0$, и противоположно направлены, если $k < 0$.

3^0. Композиция гомотетий $H_O^{k_1}$ и $H_O^{k_2}$ есть гомотетия $H_O^{k_1k_2}$.

4^0 Если $O_1 \neq O_2$, $k_1k_2 \neq 1$, то композиция гомотетий $H_{O_1}^{k_1}$ и $H_{O_2}^{k_2}$ есть гомотетия $H_O^{k_1k_2}$, центр которой лежит на прямой $(O_1 O_2)$. Центры гомотетий $H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_2}^{k_2}$ и $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ совпадают тогда и только тогда, когда $(k_1-1)(k_2-1)=0$.

5⁰. Композиция $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$, где $k_2=\frac{1}{k_1}$, — параллельный перенос $T_{(1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}}$.

6⁰. Преобразование, обратное гомотетии H_O^k, есть гомотетия $H_O^{1/k}$.

Свойства центральной симметрии Z_O. 1⁰. Центральная симметрия Z_O является гомотетией: $Z_O = H_O^{(-1)}$. Обратное к ней преобразование совпадает с ней самой.

2⁰. Центральная симметрия является перемещением.

3⁰. Композиция $Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$ двух центральных симметрий есть параллельный перенос $T_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$.

4⁰. Композиция $Z_{O_3} \circ Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$ трех центральных симметрий Z_{O_1}, Z_{O_2}, Z_{O_3} есть центральная симметрия Z_O, центр которой является образом точки O_2 при центральной симметрии относительно середины отрезка $[O_1O_3]$. Если точки O_1, O_2, O_3 не лежат на одной прямой, то $O_1O_2O_3O$ — параллелограмм.

Свойства параллельного переноса $T_{\overrightarrow{AB}}$. 1⁰. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, то $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{A_1B_1}}$, т. е. для любой точки C $T_{\overrightarrow{AB}}(C) = T_{\overrightarrow{A_1B_1}}(C)$. Обратно: если хотя бы для одной точки C выполнено равенство $T_{\overrightarrow{AB}}(C) = T_{\overrightarrow{A_1B_1}}(C)$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

2⁰. Параллельный перенос есть перемещение.

3⁰. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда $[AB] = T_{\overrightarrow{CA}}([CD])$.

4⁰. $[AB) \uparrow\uparrow [A_1B_1)$ тогда и только тогда, когда $[AB) = T_{\overrightarrow{A_1A}}([A_1B_1))$.

5⁰. Параллельный перенос $T_{\overrightarrow{AB}}$ имеет обратное преобразование, которое является параллельным переносом на направленный отрезок $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

6⁰. Параллельный перенос на нулевой направленный отрезок есть тождественное преобразование.

7^0. При параллельном переносе образом плоскости является параллельная ей плоскость, образом прямой — параллельная ей прямая, образом луча — сонаправленный ему луч.

8^0 Для любых направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ выполнены равенства $T_{\overrightarrow{AB}} \circ T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{CD}} \circ T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}}$.

9^0 Для любых точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедливо **правило цикла**: $T_{\overrightarrow{A_nA_1}} \circ T_{\overrightarrow{A_{n-1}A_n}} \circ \ldots \circ T_{\overrightarrow{A_2A_3}} \circ T_{\overrightarrow{A_1A_2}} = T_{\overrightarrow{A_1A_1}}$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ