И. А. КАПЛА́Н

Практические занятия по высшей математике

И. А. КАПЛАН

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

(АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ)

Третье издание

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений УССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО

Харьков 1967

517(07)
К20

В книге разобраны и подробно решены типовые задачи по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, дифференциальному и интегральному исчислениям и по интегрированию дифференциальных уравнений.

Из задач, помещенных для самостоятельного решения, многие снабжены указаниями, промежуточными результатами и ответами.

Книга рассчитана на студентов высших технических учебных заведений, может быть полезна также преподавателям, ведущим практические занятия.

Ответственный редактор первой части кандидат физико-математических наук доцент *Д. З. Гордевский.*

Ответственный редактор второй и третьей части кандидат физико-математических наук доцент *Р. В. Солодовников.*

2—2—3
13—67Р

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге объединены три ее части, изданные в прошлые годы отдельными книгами. В нее вошли практические занятия по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, дифференциальному исчислению функций одной и многих независимых переменных, по неопределенным и определенным интегралам и их приложениям к задачам геометрии, механики и гидравлики и по интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Цель книги — помочь студенту научиться самостоятельно решать задачи по указанным разделам курса высшей математики в высших технических учебных заведениях. Она рассчитана прежде всего на студентов, обучающихся заочно и по вечерней системе, но может быть полезной и студентам стационарных высших технических учебных заведений, а также преподавателям, ведущим практические занятия.

Книга написана в полном соответствии с новой программой по высшей математике.

Весь учебный материал разделен на отдельные практические занятия. Перед каждым занятием помещены основные сведения из теории, относящиеся к этому практическому занятию, теоремы, определения, формулы и подробное решение типовых задач различной степени трудности с полным анализом решения, причем большое количество этих задач решаются различными способами и целесообразность этих способов сравнивается. Каждое практическое занятие содержит большое число задач для самостоятельного решения, многие из них снабжены методическими указаниями к решению и промежуточными результатами.

Такое построение книги предоставляет студенту широкие возможности для активной самостоятельной работы и экономит его время. Студент, пользующийся этим пособием, должен перед каждым практическим занятием выучить относящийся к нему раздел теории, внимательно, с выполнением всех действий на бумаге, разобрать решенные задачи, и только после этого приступить к решению задач, предложенных для самостоятельного решения.

Для удобства пользования книгой перед первой и второй частью помещен указатель рекомендованных учебников и параграфов в них, которые должны быть изучены перед каждым практическим занятием.

Книга написана так, что она допускает не только последовательное проведение всех практических занятий, но и использование их в выборочном порядке.

Автор приносит глубокую благодарность рецензенту этой книги доктору физико-математических наук профессору Г. М. Баженову и ее ответственным редакторам кандидатам физико-математических наук доцентам Д. З. Гордевскому и Р. В. Солодовникову, ценные советы и замечания которых, учтенные автором, способствовали значительному улучшению книги.

Автор признателен также сотрудникам кафедры высшей математики Харьковского инженерно-строительного института В. Г. Александрову, Э. Б. Александровой, В. М. Аветисовой, И. М. Каневской, Ю. В. Князеву, З. Ф. Паскаловой и Л. В. Олейник, проверившим ответы к задачам и Р. А. Ежовой за помощь в оформлении рукописи.

ЧАСТЬ 1

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Указатель учебников и параграфов, которые должны быть изучены перед каждым практическим занятием

Номер практического занятия	Из учебника И. И. Привалова «Аналитическая геометрия»	Из учебника Н. В. Ефимова «Краткий курс аналитической геометрии»
1	Гл. I, § 1—5	§ 1, 2, 3, 5
2	Гл. I, § 6, 10	§ 6, 7
3	Гл. II, § 1—4 Гл. III, § 1—6, 14, 15	§ 11—13, 16, 17, 19, 20, 22
4	Гл. III, § 7—13	§ 18, 23
5	Из гл. III повторить все ранее изученные параграфы	Повторить § 6—23
6	Гл. III, § 16	§ 22
7	Гл. I, § 11; гл. II, § 16	§ 4, § 11—15
8 и 9	Повторить из гл. I § 11 и из гл. II § 1—6	Повторить § 4 и § 11—15
10	Гл. IV, § 1, 2, 3, 8	§ 24, 25, 26
11	Гл. IV, § 4, 5, 9, 10, 17	§ 14, 30—32, 35, 36
12	Гл. V, 1, 2, 6, п. 3	§ 10, 43, 45
13	Гл. V, § 3, 6, п. 2	§ 10, 45
14	Разобрать страницы 29, 33 по книге «Высшая математика. Методические указания и контрольные задания», 1959 г.	То же самое
15	Гл. VI, § 1—8	Приложение, § 1—6
16	Ч. II, гл. I, § 1—4 и гл. II, § 1—15	§ 46—61
17	Ч. II, гл. III, § 1—3 и гл. IV, § 1—10	§ 62, 66, 67, 68, 71
18	Ч. II, гл. V, § 1—5	§ 69—71
19	Ч. II, гл. V, § 6—10	§ 69—71
20	Ч. II, гл. III, § 4—6, гл. VI, § 1—12	§ 64, 65, 72—76

ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Координаты точки на плоскости. Расстояние между двумя точками.

На первых двух практических занятиях мы будем решать задачи, связанные с применением первоначальных формул аналитической геометрии на плоскости. Сюда относятся такие задачи:

1) определение расстояния между двумя точками на плоскости;

2) деление отрезка прямой в заданном отношении;

3) определение площади треугольника по координатам его вершин.

На этом и последующих практических занятиях по аналитической геометрии будут применяться только две системы координат: прямоугольная система на плоскости и в пространстве и полярная.

Когда в условии задачи будет сказано «дана точка», то это значит, что координаты точки известны. Если же в задаче будет поставлено требование «найти точку», то это означает, что следует определить ее координаты.

Фраза «дан отрезок прямой» означает, что координаты концов этого отрезка известны. Если известны координаты концов отрезка прямой, то тем самым положение отрезка на плоскости вполне определено. Координаты точки записываются в скобках рядом с названием точки, причем *всегда на первом месте в прямоугольной системе координат записывается абсцисса точки, а на втором — ее ордината.* Например, если x_1 — абсцисса точки A, а y_1 — ее ордината, то это записывается так: $A(x_1, y_1)$.

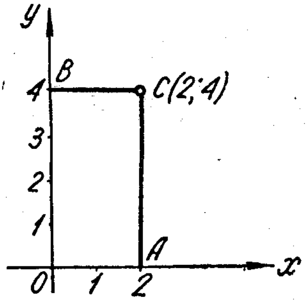
У точки, лежащей на оси абсцисс, ордината равна нулю; у точки, лежащей на оси ординат, абсцисса равна нулю. Обе координаты начала координат равны нулю.

1. Расстояние d между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ плоскости определяется по формуле

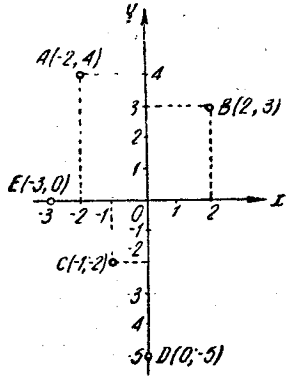
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1, 1)$$

Задача 1,1. Построить точку C (2, 4).

Решение. Абсцисса точки C равна 2, а ее ордината равна 4. Выберем единицу масштаба и возьмем на плоскости прямоугольную систему координат. Отложим на оси Ox вправо от начала координат O отрезок OA длиною в 2 ед. масштаба, а по оси Oy вверх от начала координат — отрезок OB длиною 4 ед. масштаба. Из точки A восстановим перпендикуляр к оси Ox, а из точки B — перпендикуляр к оси Oy. Пересечение этих перпендикуляров и определит искомую точку C (фиг. 1,1).



Фиг. 1,1.



Фиг. 1,2.

Задача 1,2 (для самостоятельного решения). Построить точки A (—2, 4); B (2, 3); C (—1, —2); D (0, —5); E (—3, 0) (фиг. 1,2).

Задача 1,3. Построить точку, симметричную точке A (x, y) относительно: а) оси Ox, б) оси Oy, в) начала координат.

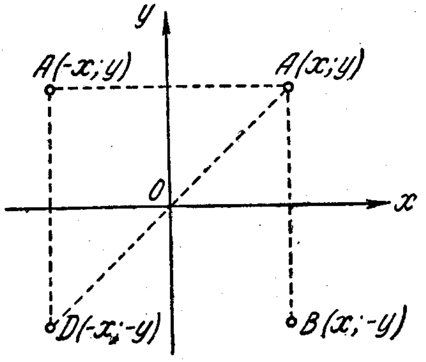
Решение. Две точки M_1 и M_2 называются симметричными относительно прямой, если отрезок M_1M_2 перпендикулярен этой прямой, причем его средина лежит на этой прямой.

Две точки M_1 и M_2 называются симметричными относительно точки O, если точка O является срединой отрезка M_1M_2. Эти определения следует иметь в виду при решении задач 1, 3 и 1, 4.

а) Точка B, симметричная с точкой A (x, y) относительно оси Ox, имеет абсциссу такую же, как и точка A, а ординату, равную по абсолютной величине ординате точки A, но противоположную ей по знаку. Значит, точка B имеет координаты x и $—y$: B (x,$—y$) (фиг. 1, 3).

б) Точка C, симметричная с точкой A (x, y) относительно оси Oy, будет иметь ординату такую же, как и точка A, а абсцисса точки C будет по абсолютной величине равна абсциссе точки A, но противоположна ей по знаку. Значит, точка C имеет координаты $-x$ и y: $C(-x, y)$ (фиг. 1, 3).

в) Точка D, симметричная точке $A(x, y)$ относительно начала координат, будет иметь абсциссу и ординату, равные по абсолютной величине абсциссе и ординате точки A, но противоположные им по знаку, т. е. координаты точки D будут равны $-x$ и $-y$: $D(-x, -y)$ (фиг. 1, 3).

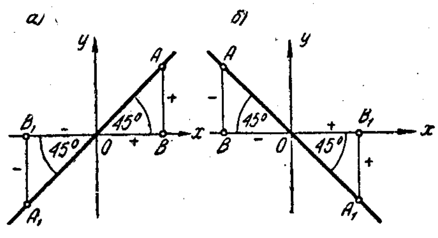


Фиг. 1,3.

Задача 1, 4 (для самостоятельного решения). Дана точка A (3, -4). Построить точки, симметричные ей относительно: а) оси абсцисс, б) оси ординат, в) начала координат.

Ответ. а) B (3, 4); б) $C(-3, -4)$; в) $D(-3, +4)$.

Задача 1, 5. Какое соотношение существует между координатами точки, если она лежит: а) на биссектрисе первого и третьего координатных углов; б) на биссектрисе второго и четвертого координатных углов.



Фиг. 1,4.

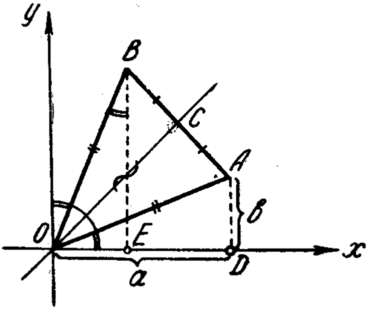
Решение. а) Биссектриса первого и третьего координатных углов делит эти углы пополам и с положительным направлением оси Ox составляет угол в 45°. Если из любой точки $A(x, y)$ этой биссектрисы опустить перпендикуляр на ось Ox, то треугольник OAB будет равнобедренным прямоугольным треугольником, и потому его катеты OB и AB между собою равны (фиг. 1, 4a). Так как катет OB есть абсцисса точки A, а катет AB — ее ордината*, то заключение состоит в том, что абсцисса и ордината любой точки этой биссектрисы между собою равны, причем это верно независимо от того, находится ли точка A в первом координатном углу или в третьем, так как в каждом из них абсцисса

* Координатами точки могут быть не только числа, но и отрезки, измеренные единицей масштаба.

и ордината точки имеют один и тот же знак. Итак, для координат точек этой биссектрисы имеет место равенство $x = y$.

б) для точек биссектрисы второго и четвертого координатных углов мы, рассуждая так же, придем к заключению, что абсцисса и ордината любой точки на этой биссектрисе также равны между собою по абсолютной величине, но противоположны по знаку, что следует из таблицы знаков абсциссы и ординаты во второй и четвертой четвертях:

Четверти	II	IV
x	—	+
y	+	—



Фиг. 1,5.

Таким образом, для координат точек, лежащих на этой биссектрисе, выполняется равенство $x = -y$.

Задача 1, 6. Точка $A(a, в)$ находится внутри первого координатного угла. Определить координаты точки B, симметричной с точкой A относительно биссектрисы этого координатного угла.

Решение. Так как точка B симметрична точке A относительно биссектрисы первого координатного угла, то она лежит с точкой A на перпендикуляре к OC и $AC = CB$ (фиг. 1, 5). Учитывая это, а также то, что в треугольниках OAC и OCB катет OC — общий, заключаем, что эти прямоугольные треугольники между собою равны (фиг. 1, 5).

Рассмотрев теперь треугольники OBE и OAD, мы придем к заключению, что и они равны, так как, будучи прямоугольными они имеют равные гипотенузы и равные острые углы AOD и OBE. Почему?

Из равенства треугольников OBE и OAD заключаем, что $OD = BE$, а $AD = OE$. Так как по условию абсцисса OD точки A равна a, а ее ордината $AD = в$, то мы приходим к заключению, что точка B имеет абсциссу $OE = AD = в$, а ординату $BE = OD = a$. Итак, координатами точки B служат числа $в$ и a: $B(в, a)$.

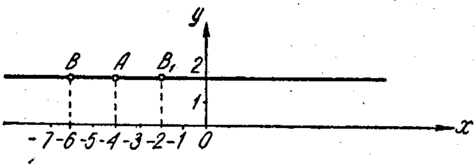
Задача 1, 7 (для самостоятельного решения). Найти координаты точки B, симметричной точке A (—12, 4) относительно биссектрисы третьего координатного угла.

Ответ. B(4, —12).

Задача 1, 8 (для самостоятельного решения). Найти координаты точки B, симметричной точке $A(2, 4)$ относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

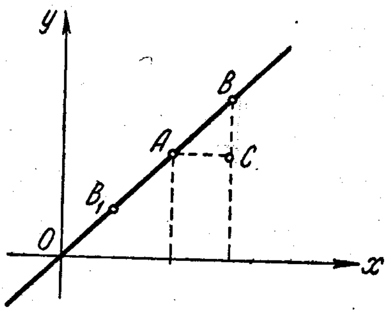
Ответ. $B(-4, -2)$.

Задача 1, 9. Точки $A(-4, 2)$ и $B(x, y)$ лежат на прямой, параллельной оси Ox, причем расстояние между ними равно 2 ед. масштаба. Определить координаты точки B.



Фиг. 1,6.

Решение. Задача допускает два решения: точка B может находиться как слева, так и справа от точки A. Так как в каждом из этих случаев точка B лежит на прямой, параллельной оси Ox, то ордината ее y в обоих случаях будет равна ординате точки A, т. е. $y = 2$. Абсцисса же ее в том случае, когда она находится слева от точки A, будет равна -6, а когда она находится справа от A, будет равна -2. Итак, $B(-6, 2)$, а $B_1(-2, 2)$ (фиг. 1, 6).



Фиг. 1,7.

Задача 1, 10 (для самостоятельного решения). Точки $A(-5, 2)$ и $B(x, y)$ лежат на прямой, параллельной оси Oy. Найти координаты точки B, если она находится от точки A на расстоянии 6 ед. масштаба. Построить чертеж.

Ответ. $B_1(-5, 8)$ и $B_2(-5, -4)$.

Задача 1, 11. Точки $A(5, 5)$ и $B(x, y)$ лежат на биссектрисе первого координатного угла. Расстояние между ними равно 4 ед. масштаба. Найти координаты точки B.

Решение. Так как точка B лежит на биссектрисе первого координатного угла, то ее абсцисса и ордината между собою равны (задача 1, 5). В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC (фиг. 1, 7) гипотенуза $AB = 4$, а $AC = BC$. Тогда по теореме Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \text{ и } 2AC^2 = 16, \; AC^2 = 8; \; AC = BC = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, абсцисса искомой точки (а значит, и ее ордината) получится из абсциссы точки A, если к ней сначала прибавить, а потом из нее вычесть $2\sqrt{2}$, и задача имеет два решения:

$$B\left(5 + 2\sqrt{2},\ 5 + 2\sqrt{2}\right) \text{ и } B_1\left(5 - 2\sqrt{2},\ 5 - 2\sqrt{2}\right).$$

Задача 1, 12. Найти расстояние между точками $A(4, -5)$ и $B(7, -1)$.

Решение. По формуле (1, 1) для расстояния d между двумя точками, если взять в ней $x_1 = 4$; $x_2 = 7$; $y_1 = -5$; $y_2 = -1$, получаем

$$d = \sqrt{(7-4)^2 + [-1-(-5)]^2}; \quad d = 5 \text{ ед. масштаба.}$$

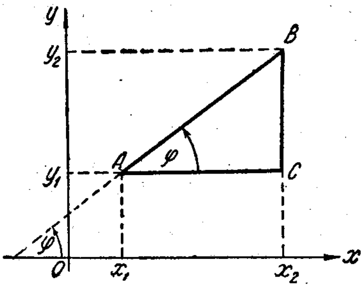
Задача 1, 13 (для самостоятельного решения). Определить расстояние между точками $A(-3, 9)$ и $B(3, 1)$.

Ответ. $d = 10$ ед. масштаба.

Задача 1, 14 (для самостоятельного решения). Найти длину отрезка AB, соединяющего точки $A(-11{,}5)$ и $B(1{,}0)$.

Ответ. $d = 13$ ед. масштаба.

Задача 1, 15. Под каким углом к положительному направлению оси Ox наклонен отрезок, соединяющий точки $A(-1; 3)$ и $B(7, -3)$?



Фиг. 1,8.

Решение. По известным координатам точек A и B можно определить тангенс угла, под которым отрезок AB наклонен к оси Ox. Если x_1 и y_1 — координаты точки A, а x_2 и y_2 — координаты точки B, то из фиг. 1, 8 усматриваем, что величина $AC = x_2 - x_1$, а величина $BC = y_2 - y_1$, и тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (1, 2)$$

По этой формуле определится тангенс угла между отрезком AB и положительным направлением оси Ox, причем этот угол отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки. Формула (1, 2) верна при любом расположении точек A и B на плоскости.

Подставляя в формулу (1, 2) координаты точек A и B, получим, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3-(+3)}{7-(-1)} = -\frac{3}{4},$$

$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{4}$ или $-\operatorname{tg}\varphi = 0{,}75$. Но $-\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(180° - \varphi)$, и у нас $\operatorname{tg}(180° - \varphi) = 0{,}75$; отсюда $180° - \varphi = 36°52'$, а $\varphi = 180° - 36°52' = 143°08'$. В дальнейшем мы будем пользоваться формулой (1, 2) для определения угла между прямой и положительным направлением оси абсцисс. Определенный по этой формуле $\operatorname{tg}\varphi$ называется угловым коэффициентом прямой. Решим еще одну аналогичную задачу.

Задача 1, 16. Отрезок AB соединяет точки $A(-6, 7)$ и $B(1, -2)$. Определить длину этого отрезка и угол между ним и положительным направлением оси Ox.

Решение. По формуле (1, 1), полагая в ней $x_1 = -6$, $x_2 = 1$, $y_1 = 7$, $y_2 = -2$, получаем, что длина $AB \approx 11{,}4$ ед. масштаба (знак $\approx$ означает, что имеет место приближенное равенство). Теперь по формуле (1, 2) находим угловой коэффициент отрезка AB: $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{9}{7}$. Перепишем это равенство в виде $-\operatorname{tg}\varphi = \frac{9}{7}$. Отсюда следует, что $\operatorname{tg}(180° - \varphi) = 1{,}2857$, и по таблицам найдем, что $\varphi = 127°52'$.

Задача 1,17 (для самостоятельного решения). Найти длину отрезка AB, соединяющего точки $A(-4, 5)$ и $B(-6, 7)$ и угол между этим отрезком и положительным направлением оси Ox.

Ответ. $AB = \sqrt{8}$ ед. масштаба; $\varphi = 135°$.

Задача 1, 18. Найти периметр треугольника, если координаты его вершин известны: $A(-3, -6)$; $B(4, -1)$; $C(5, -2)$.

Ответ. $AB \approx 8{,}6$ ед. масштаба;

$AC \approx 8{,}9$ ед. масштаба;

$BC \approx 1{,}4$ ед. масштаба;

периметр треугольника $AB + AC + BC \approx 8{,}6 + 8{,}9 + 1{,}4 = 18{,}9$ ед. масштаба.

Задача 1, 19 (для самостоятельного решения). Найти периметр треугольника с вершинами $A(1, 3)$, $B(4, 5)$, $C(-5, -7)$.

Ответ. Периметр треугольника приближенно равен 30,3 ед. масштаба.

Задача 1, 20. Доказать, что треугольник, вершины которого $A(2, 3)$; $B(6, 7)$; $C(-7, 2)$ — тупоугольный.

Решение. 1) Определяем длины сторон и находим, что

$AB = \sqrt{32}$ ед. масштаба;

$AC = \sqrt{82}$ ед. масштаба;

$BC = \sqrt{194}$ ед. масштаба.

Значит, $BC^2 > AB^2 + AC^2$ $(194 > 32 + 82)$; треугольник действительно тупоугольный.

Замечание. Из элементарной геометрии известно, что если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник — прямоугольный; если квадрат бо̀льшей стороны треугольника меньше суммы квадратов двух других сторон, то треугольник — остроугольный; если же квадрат бо̀льшей из сторон треугольника больше суммы квадратов двух других сторон, то треугольник — тупоугольный. Пользуясь этим замечанием, решите самостоятельно следующую задачу.

Задача 1, 21. Определить вид треугольника, если координаты его вершин известны:

$$A(2, -5);\ B(-7, -4);\ C(-1, 6).$$

Ответ. Треугольник — остроугольный, так как длины сторон равны:

$$AB = \sqrt{82};\ AC = \sqrt{130};\ BC = \sqrt{136}.$$

Задача 1, 22 (для самостоятельного решения). Доказать, что треугольник ABC — прямоугольный, если координаты его вершин

$$A(0,\ 0);\ B(4,\ 2);\ C(-2,\ 4).$$

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Деление отрезка в заданном отношении. Координаты середины отрезка. Определение площади треугольника по известным координатам его вершин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Если x_1 и y_1 — координаты точки A, а x_2 и y_2 — координаты точки B, то координаты x и y точки C, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (2, 1)$$

Если $\lambda = 1$, то точка $C(x,\ y)$ делит отрезок AB пополам, и тогда координаты x и y средины отрезка AB определятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (2, 2)$$

2. Площадь треугольника по известным координатам его вершин $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right]. \qquad (2, 3)$$

Полученное с помощью этой формулы число следует взять по абсолютной величине.

Задача 2, 1. Найти координаты точки C — средины отрезка, соединяющего точки $A(-2,\ 4)$ и $B(-4,\ 10)$.

Решение. Воспользуемся формулами (2, 2). *Запомните, что каждая координата средины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.*

В формулах (2, 2) возьмем $x_1 = -2$; $x_2 = -4$; $y_1 = 4$; $y_2 = 10$. Тогда абсцисса средины отрезка AB

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + (-4)}{2} = \frac{-6}{2} = -3,$$

а ордината средины отрезка AB

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 + 10}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Итак, средина отрезка AB — точка $C(-3, 7)$.

Задача 2, 2 (для самостоятельного решения). Найти координаты точки C — средины отрезка AB, если координаты концов отрезка известны: $A(-7, 5)$; $B(11, -9)$.

Ответ. $x = 2$; $y = -2$; $C(2, -2)$.

Задача 2, 3. Найти координаты конца B отрезка, если другой конец отрезка — точка $A(-5, -7)$, а средина отрезка — $C(-9, -12)$.

Решение. В формулах (2, 2) координаты средины отрезка обозначены через x и y. По условию задачи $x = -9$; $y = -12$. Координаты одного конца отрезка точки A в этих формулах $x_1 = -5$; $y_1 = -7$. Координаты точки B (другого конца отрезка) — величины неизвестные, которые мы обозначим через x_2 и y_2. Тогда по формулам (2, 2) для определения этих неизвестных получаем два уравнения:

$$-9 = \frac{-5 + x_2}{2}; \quad -12 = \frac{-7 + y_2}{2}.$$

Отсюда

$$-18 = -5 + x_2 \text{ и } x_2 = -13,$$
$$-24 = -7 + y_2 \text{ и } y_2 = -17.$$

Задача 2, 4 (для самостоятельного решения). Один конец отрезка $A(-4, 2)$, средина отрезка $C(-6, 5)$. Найти координаты, точки B другого конца отрезка.

Ответ. $x_2 = -8$; $y_2 = 8$.

Задача 2,5 (для самостоятельного решения). Даны вершины треугольника:

$$A(-7, 4);\ B(-5, 2);\ C(6, -3).$$

Найти координаты средин его сторон.

Ответ. Если обозначить средину стороны AB буквой E, средину стороны AC буквой F, а средину стороны BC буквой K, то координаты этих точек: $E(-6, 3)$; $F\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Задача 2, 6 (для самостоятельного решения). Даны вершины треугольника:

$$A(-4, 6);\ B(-8, 9);\ C(5, -6).$$

Найти координаты точек E, F и K средин сторон AB, AC и BC.

Ответ. $E\left(-6; \frac{15}{2}\right)$; $F\left(+\frac{1}{2}; 0\right)$; $K\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Задача 2, 7. Даны координаты средин сторон треугольника: $E(7, 8)$; $F(-4, 5)$; $K(1, -4)$. Определить координаты вершин треугольника.

Решение. Пусть точки A, B и C — вершины треугольника, точка E — средина стороны AB, точка F — средина стороны AC, а K — средина стороны BC. Требуется найти координаты точек A, B и C.

Обозначим через x_A и y_A — координаты вершины A,
» x_B и y_B — координаты вершины B,
» x_C и y_C — координаты вершины C.

По формулам (2, 2) имеем

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_E = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad (*)$$

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad y_F = \frac{y_A + y_C}{2}; \qquad (**)$$

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2}; \quad y_K = \frac{y_B + y_C}{2}. \qquad (***)$$

Подставляя в эти формулы координаты точек E, F и K, мы для определения неизвестных получим следующие уравнения:

а) Уравнения, отмеченные (*), после подстановки в них координат точки E запишутся так:

$$7 = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad 8 = \frac{y_A + y_B}{2},$$

или

$$x_A + x_B = 14; \quad y_A + y_B = 16.$$

б) Уравнения, отмеченные (**), если подставить в них координаты точки F, запишутся в виде

$$-4 = \frac{x_A + x_C}{2}; \quad 5 = \frac{y_A + y_C}{2},$$

или

$$x_A + x_C = -8; \quad y_A + y_C = 10.$$

в) Если же в уравнения, отмеченные (***), подставить координаты точки K, то эти уравнения запишутся так:

$$1 = \frac{x_B + x_C}{2}; \quad -4 = \frac{y_B + y_C}{2},$$

или

$$x_B + x_C = 2, \quad y_B + y_C = -8.$$

Итак, для определения шести неизвестных мы получили такие две системы уравнений:

Первая система уравнений	Вторая система уравнений
$\left.\begin{aligned} x_A + x_B &= 14 \\ x_A + x_C &= -8 \\ x_B + x_C &= 2 \end{aligned}\right\}$,	$\left.\begin{aligned} y_A + y_B &= 16 \\ y_A + y_C &= 10 \\ y_B + y_C &= -8 \end{aligned}\right\}$.

Складывая почленно уравнения первой системы, будем иметь

$$x_A + x_B + x_A + x_C + x_B + x_C = 8.$$

После приведения подобных членов и деления обеих частей уравнения на 2 получим

$$x_A + x_B + x_C = 4. \qquad (2, 4)$$

Так как на основании третьего уравнения первой системы $x_B + x_C = 2$, то из (2, 4) получаем $x_A + 2 = 4$, а $x_A = 2$; используя второе уравнение первой системы $x_A + x_C = -8$, получим $x_B - 8 = 4$; $x_B = 12$; на основании первого уравнения первой системы $x_A + x_B = 14$, и уравнение (2, 4) примет вид

$$x_C + 14 = 4; \text{ а } x_C = -10.$$

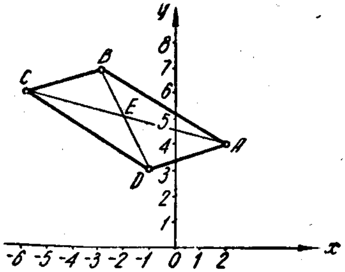
Итак,

$$x_A = 2; \quad x_B = 12; \quad x_C = -10.$$

Поступая так же, найдем из второй системы уравнений

$$y_A = 17; \quad y_B = -1; \quad y_C = -7.$$

Вершины треугольника имеют такие координаты:



Фиг. 2,1.

$$A\,(2,\ 17); \quad B\,(12,\ -1); \quad C\,(-10,\ -7)$$

(проверить правильность полученного решения по условию задачи).

Задача 2, 8 (для самостоятельного решения). Координаты средин сторон треугольника $E\,(-4,\ 6)$; $F\,(2,\ -6)$; $K\,(0,\ -4)$. Найти координаты вершин треугольника.

Ответ. $x_A + x_B + x_C = -2$; $\quad x_A = -2$; $\quad x_B = -6$; $\quad x_C = 6$;
$y_A + y_B + y_C = -4$; $\quad y_A = 4$; $\quad y_B = 8$; $\quad y_C = -16$.
Координаты вершин треугольника: $A\,(-2,\ 4)$; $B\,(-6,\ 8)$; $C\,(6,\ -16)$.

Задача 2, 9. Точки $A\,(2,\ 4)$, $B\,(-3,\ 7)$ и $C\,(-6,\ 6)$ — три вершины параллелограмма, причем A и C — противоположные вершины. Найти четвертую вершину.

Решение. Требование задачи: «найти четвертую вершину» означает, что следует найти ее координаты. Решение задачи облегчит чертеж (фиг. 2, 1).

Известно, что диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Поэтому координаты точки E — пересечения диагоналей найдем как координаты средины отрезка AC. Обозначая их через x_E и y_E, получим, что

$$x_E = \frac{2 + (-6)}{2}; \quad x_E = -2;$$

$$y_E = \frac{4 + 6}{2}; \qquad y_E = 5.$$

$$E\,(-2,\ 5).$$

Зная координаты точки E — средины диагонали BD и координаты одного из ее концов $B(-3, 7)$, по формулам (2, 2) легко определим искомые координаты вершины D параллелограмма. В формулах (2, 2) надо положить $x = -2$; $y = 5$; $x_1 = -3$; $y_1 = 7$. Искомыми будут x_D и y_D — координаты точки D. Получаем такие уравнения:

$$-2 = \frac{-3 + x_D}{2}; \quad -4 = -3 + x_D; \quad x_D = -1.$$

$$5 = \frac{7 + y_D}{2}; \quad 10 = 7 + y_D; \qquad y_D = 3.$$

Итак, вершина $D(-1, 3)$.

Задача 2, 10 (для самостоятельного решения). Три вершины параллелограмма имеют координаты $A(-6, -4)$; $B(-4, 8)$; $C(-1, 5)$, причем A и C — противоположные вершины. Определить координаты четвертой вершины параллелограмма.

Ответ. Координаты точки E пересечения диагоналей $E\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Координаты четвертой вершины параллелограмма $D(-3, -7)$.

Теперь решим несколько задач, связанных с делением отрезка AB в данном отношении (формула (2, 1)). Если точка C делит отрезок AB в отношении λ, то это следует понимать так: $\lambda = \frac{AC}{CB}$. Числитель этой дроби есть длина отрезка, начало которого находится в точке A — в начале отрезка AB, а конец в точке C, делящей этот отрезок. Знаменатель дроби есть длина отрезка, имеющего начало в точке C, а конец в точке B — в конце отрезка AB. Это замечание, разъясняющее смысл числа λ, поможет избежать ошибок. В формулах (2, 1) в числителе λ является множителем при координатах конца отрезка.

Задача 2, 11. Отрезок AB, соединяющий точки $A(2, 5)$ и $B(4, 9)$, разделить в отношении $1:3$.

Решение. Условие задачи требует найти координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{3}$.

Точку $A(2, 5)$ будем считать началом отрезка, а точку $B(4, 9)$ — ее концом. В формулах (2, 1) x и y — искомые координаты точки C, x_1 и y_1 — координаты точки A, x_2 и y_2 — координаты точки B; $\lambda = \frac{1}{3}$. Значит, у нас $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $y_1 = 5$; $y_2 = 9$. Итак, по формулам (2, 1)

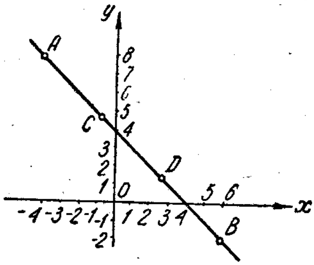
$$x = \frac{2 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}}; \quad x = \frac{2 + \frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}; \quad x = \frac{5}{2};$$

$$y = \frac{5 + \frac{1}{3} \cdot 9}{1 + \frac{1}{3}}; \quad y = \frac{5+3}{\frac{4}{3}}; \quad y = 6.$$

Точка C имеет координаты $C\left(\frac{5}{2}, \ 6\right)$.

Задача 2, 12. Концы отрезка AB имеют координаты: $A(-4, 8)$, $B(6, -2)$. Найти координаты точек C и D, делящих отрезок AB на три равные части (фиг. 2, 2).

Решение. Отрезок AB разделен на три равные части, а точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Так как $AC = \frac{1}{2} CB$, то отсюда следует, что



Фиг. 2,2.

$$\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}.$$

В первой из формул (2, 1) следует положить

$$x_1 = -4;$$
$$x_2 = 6;$$
$$\lambda = \frac{1}{2};$$

x_C — искомая абсцисса точки C.

Во второй из формул (2, 1) надо положить, что

$$y_1 = 8;$$
$$y_2 = -2;$$

y_C — искомая ордината точки C.

Итак,

$$x_C = \frac{-4 + \frac{1}{2} \cdot 6}{1 + \frac{1}{2}}; \quad x_C = \frac{-4+3}{\frac{3}{2}}; \quad x_C = -\frac{2}{3};$$

$$y_C = \frac{8 + \frac{1}{2} \cdot (-2)}{1 + \frac{1}{2}}; \quad y_C = \frac{8-1}{\frac{3}{2}}; \quad y_C = \frac{14}{3}.$$

Координаты точки C найдены: $C\left(-\frac{2}{3}, \ \frac{14}{3}\right)$.

Координаты точки D можно определить просто, как координаты средины отрезка CB. Пользуясь формулами для определения координат средины отрезка, получаем

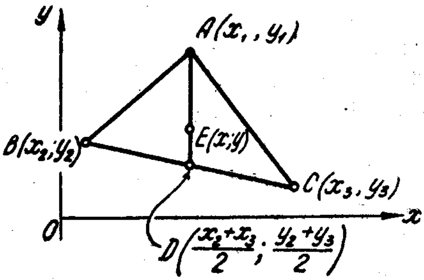
$$x_D = \frac{-\frac{2}{3}+6}{2}; \quad x_D = \frac{8}{3};$$

$$y_D = \frac{\frac{14}{3}-2}{2}; \quad y_D = \frac{4}{3}.$$

Задача 2, 13 (для самостоятельного решения). Найти координаты точек, делящих отрезок с началом в точке $A(-6, 10)$ и концом в точке $B(-2, -6)$ в отношениях:

1) $\lambda = \frac{1}{2}$; 2) $\lambda = 2$; 3) $\lambda = \frac{1}{3}$; 4) $\lambda = \frac{2}{3}$.

Ответ. 1) $\left(-\frac{14}{3}, \frac{14}{3}\right)$; 2) $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 3) $(-5, 6)$; 4) $\left(-\frac{22}{5}, \frac{18}{5}\right)$.



Фиг. 2,3.

Задача 2, 14. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника, вершинам которого соответствуют координаты: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (толщину пластинки не учитывать).

Решение. Центр тяжести треугольника, указанного в условии задачи, находится в точке пересечения его медиан. Из элементарной геометрии известно, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке, причем эта точка делит медианы в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. Обозначим эту точку буквой E, ее координаты — x_E и y_E (фиг. 2, 3).

Рассмотрим медиану, проведенную из вершины A. Один ее конец A имеет координаты (x_1, y_1), а координаты другого ее конца получим, как координаты средины отрезка BC, концы которого имеют известные координаты: $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Координаты точки D обозначим через x_D и y_D и по формулам (2, 2) для определения координат средины отрезка получим

$$x_D = \frac{x_2+x_3}{2}; \quad y_D = \frac{y_2+y_3}{2}; \quad D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

Теперь, зная координаты начала A и конца D отрезка AD и то, что точка $E(x_E, y_E)$ делит этот отрезок в отношении $\lambda = 2$, по формулам (2, 1) получаем

$$x_E = \frac{x_1 + 2\,\frac{x_2 + x_3}{2}}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad x_E = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3};$$

$$y_E = \frac{y_1 + 2\,\frac{y_2 + y_3}{2}}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \quad y_E = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Полученный результат приводит к выводу, *что координаты центра тяжести однородной треугольной пластинки, если не учитывать ее толщину, равны среднему арифметическому одноименных координат ее вершин.*

Задача 2, 15 (для самостоятельного решения). Найти центр тяжести однородной треугольной пластинки, вершины которой имеют координаты (толщиной пластинки пренебречь): $A(2, -3)$; $B(-3, 6)$; $C(-7, 0)$.

Ответ. $x = -\frac{8}{3}$; $y = 1$.

Задача 2, 16. Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2, -3)$, $B(1, 1)$, $C(-6, 5)$.

Решение. Задачу очень просто решить, воспользовавшись формулой (2, 3), в которой нужно взять

$$x_1 = 2, \ x_2 = 1, \ x_3 = -6; \ y_1 = -3, \ y_2 = 1, \ y_3 = 5.$$

Подставляя эти числа в (2, 3), получим

$$S = \frac{1}{2}\{[2-(-6)]\cdot(1-5)-[1-(-6)]\cdot(-3-5)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{(2+6)\cdot(-4)-(1+6)\cdot(-8)\} = \frac{1}{2}[-32-(-56)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(-32+56) = \frac{1}{2}\cdot 24 = 12;$$

$$S = 12 \text{ кв. ед.}$$

Решение задач, в которых требуется определить площадь треугольника по координатам его вершин, не представляет трудности, а потому можно ограничиться самостоятельным решением еще одной задачи.

Задача 2, 17 (для самостоятельного решения). Координаты вершин треугольника: $A(-2, 4)$, $B(-6, 8)$, $C(5, -6)$. Определить площадь этого треугольника.

Ответ. $S = 6$ кв. ед.

Задача 2, 18. Доказать, что три точки $A(1, 8)$, $B(-2, -7)$, $C(-4, -17)$ лежат на одной прямой.

Решение. Если три точки A, B и C лежат на одной прямой, то треугольник ABC обратится в отрезок прямой, а потому его площадь должна быть равна нулю. Полагая в формуле (2, 3) $S=0$, получим условие, при котором три точки лежат на одной прямой

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)=0,$$

или

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3)=(x_2-x_3)(y_1-y_3).$$

В более удобной форме условие, при котором три точки лежат на одной прямой, можно записать так:

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}. \qquad (2, 5)$$

Подставляя сюда координаты данных точек, получим, что левая часть (2, 5) будет равна

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{5}{2},$$

а правая часть

$$\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}=\frac{5}{2}.$$

Требование (2, 5) выполнено:

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{2},$$

и, значит, три данные точки лежат на одной прямой.

Задача 2, 19 (для самостоятельного решения). Проверить, что три точки: $A(1, 5)$, $B(-5, -1)$, $C(-8, -4)$ лежат на одной прямой.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Различные виды уравнения прямой. Исследование общего уравнения прямой. Построение прямой по ее уравнению.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В прямоугольных координатах уравнение прямой на плоскости задается в одном из следующих видов:

1. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y=kx+b, \qquad (3, 1)$$

где k — угловой коэффициент прямой, т. е. тангенс того угла, который прямая образует с положительным направлением оси Ox, причем этот угол отсчитывается от оси Ox к прямой против часовой стрелки, b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат. При $b=0$ уравнение (3, 1) имеет вид $y=kx$, и соответствующая ему прямая проходит через начало координат.

Уравнением (3, 1) может быть определена любая прямая на плоскости, не перпендикулярная оси Ox.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом разрешено относительно текущей координаты y.

2. *Общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0. \tag{3, 2}$$

Частные случаи общего уравнения прямой:

а) Если $C = 0$, уравнение (3, 2) будет иметь вид

$$Ax + By = 0,$$

и прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат, так как координаты начала координат $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяют этому уравнению.

б) Если в общем уравнении (3, 2) $B = 0$, то уравнение примет вид

$$Ax + C = 0, \text{ или } x = -\frac{C}{A}.$$

Уравнение не содержит переменной y, а определяемая этим уравнением прямая параллельна оси Oy.

в) Если в общем уравнении прямой (3, 2) $A = 0$, то это уравнение примет вид

$$By + C = 0, \text{ или } y = -\frac{C}{B};$$

уравнение не содержит переменной x, а определяемая им прямая параллельна оси Ox.

Следует запомнить: если прямая параллельна какой-нибудь координатной оси, то в ее уравнении отсутствует член, содержащий координату, одноименную с этой осью.

г) При $C = 0$ и $A = 0$ уравнение (3, 2) принимает вид $By = 0$, или $y = 0$.

Это уравнение оси Ox.

д) При $C = 0$ и $B = 0$ уравнение (3, 2) запишется в виде $Ax = 0$ или $x = 0$.

Это уравнение оси Oy.

3. *Уравнение прямой в отрезках на осях*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{3, 3}$$

где a — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox;
b — величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

Каждый из этих отрезков отложен от начала координат.

Особенности этого уравнения такие: в левой части уравнения между дробями стоит знак плюс, величины a и b могут быть как положительными, так и отрицательными, правая часть уравнения равна единице.

4. *Нормальное уравнение прямой*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (3, 4)$$

Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, измеренная в ед. масштаба, а α — угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ox. Отсчитывается этот угол от оси Ox против часовой стрелки. Для приведения общего уравнения прямой (3, 2) к нормальному виду обе его части надо умножить на нормирующий множитель.

$$N = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad (3, 5)$$

причем перед дробью следует выбрать знак, противоположный знаку свободного члена C в общем уравнении прямой (3, 2).

Особенности нормального уравнения прямой: сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице, свободный член отрицателен, а правая часть его равна нулю.

ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ЕЕ УРАВНЕНИЮ

Прямая вполне определена, если известны две принадлежащие ей точки. Для того, чтобы построить прямую по ее уравнению, надо, пользуясь этим уравнением, найти координаты двух ее точек. Твердо следует помнить, *что если точка принадлежит прямой, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению прямой.*

При практическом построении прямой по ее уравнению наиболее точный график получится тогда, когда координаты взятых для ее построения двух точек — целые числа.

1. Если прямая определена общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и $C \neq 0$, то для ее построения проще всего определить точки пересечения прямой с координатными осями.

Укажем, как определить координаты точек пересечения прямой с координатными осями. Координаты точки пересечения прямой с осью Ox находят из следующих соображений: ординаты всех точек, расположенных на оси Ox, равны нулю. В уравнении прямой полагают, что y равно нулю, и из полученного уравнения находят x. Найденное значение x и есть абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. Если окажется, что $x = a$, то координаты точки пересечения прямой с осью Ox будут $(a, 0)$.

Чтобы определить координаты точки пересечения прямой с осью Oy, рассуждают так: абсциссы всех точек, расположенных на оси Oy, равны нулю. Взяв в уравнении прямой x равным нулю, из полученного уравнения определяют y. Найденное значение y и будет ординатой точки пересечения прямой с осью Oy. Если окажется, например, что $y = b$, то точка пересечения прямой с осью Oy имеет координаты $(0, b)$.

Пример. Прямая $2x + y - 6 = 0$ пересекает ось Ox в точке $(3, 0)$. Действительно, взяв в этом уравнении $y = 0$, получим для определения x уравнение $2x - 6 = 0$, откуда $x = 3$.

Чтобы определить точку пересечения этой прямой с осью Oy, положим в уравнении прямой $x = 0$. Получим уравнение $y - 6 = 0$, из которого следует, что $y = 6$. Таким образом, прямая пересекает координатные оси в точках $(3, 0)$ и $(0, 6)$.

Если же в общем уравнении прямой $C = 0$, то прямая, определяемая этим уравнением, проходит через начало координат. Таким образом, уже известна одна ее точка, и для построения прямой остается только найти ее еще одну точку. Абсциссу x этой точки задают произвольно, а ординату y находят из уравнения прямой.

Пример. Прямая $2x - 4y = 0$ проходит через начало координат. Вторую точку прямой определим, взяв, например, $x = 2$. Тогда для определения y получаем уравнение $2 \cdot 2 - 4y = 0$; $4y = 4$; $y = 1$. Итак, прямая $2x - 4y = 0$ проходит через точки $(0, 0)$ и $(2, 1)$.

2. Если прямая задана уравнением (3, 1) с угловым коэффициентом, то из этого уравнения уже известна величина отрезка b, отсекаемого прямой на оси ординат, и для построения прямой остается определить координаты еще только одной точки, принадлежащей этой прямой. Если в уравнении (3, 1) $k \neq 0$ и $b \neq 0$, то легче всего определить координаты точки пересечения прямой с осью Ox. Выше было указано, как это сделать.

Если же в уравнении (3, 1) $b = 0$, то прямая проходит через начало координат, и тем самым уже известна одна принадлежащая ей точка. Чтобы найти еще одну точку, следует дать x любое значение и определить из уравнения прямой значение y, соответствующее этому значению x.

Пример. Прямая $y = \frac{1}{2}x$ проходит через начало координат и точку $(2, 1)$ так как при $x = 2$ из ее уравнения $y = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

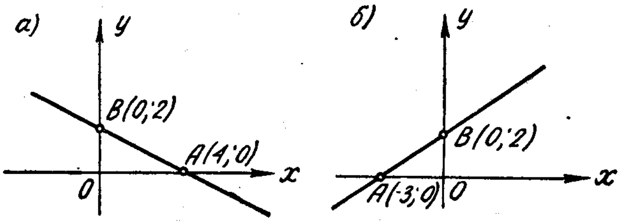
Построение прямых, параллельных координатным осям, затруднений не вызывает.

Теперь будем строить прямые по их уравнениям.

Задача 3.1. Построить прямые: а) $x + 2y - 4 = 0$; б) $2x - 3y + 6 = 0$; в) $y = 3x + 2$; г) $y = -2x$; д) $2x + 3y = 0$;

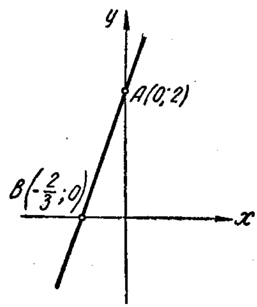
е) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$; ж) $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$; з) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-4=0$; и) $y=2$; к) $x+3=0$.

а) Определим точки пересечения прямой $x+2y-4=0$ с координатными осями. Взяв в этом уравнении сначала $y=0$, найдем



Фиг. 3,1.

из него, что точка A пересечения прямой с осью Ox имеет абсциссу $x=4$. Координаты точки A (4, 0). Положив теперь в уравнении $x=0$, найдем, что точка B пересечения прямой с осью Oy имеет ординату $y=2$. Координаты точки B (0, 2). Построив эти точки, соединим их прямой (фиг. 3,1 *а*). Эта прямая и соответствует данному уравнению.



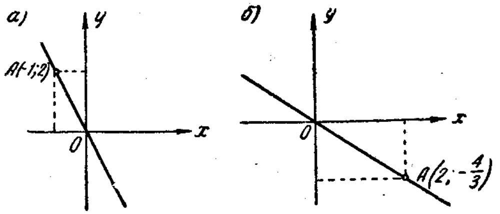
Фиг. 3,2.

б) Определим точки пересечения прямой $2x-3y+6=0$ с координатными осями: при $y=0$ получаем $2x+6=0$, $x=-3$. Точка A пересечения прямой с осью Ox имеет координаты $(-3, 0)$; при $x=0$ имеем $-3y+6=0$; $y=2$, и прямая пересекает ось Oy в точке B (0, 2). Построим эти точки, соединим их прямой и получим прямую, соответствующую данному уравнению (фиг. 3,1 *б*).

в) Прямая $y=3x+2$ задана уравнением с угловым коэффициентом. Из уравнения видно, что прямая отсекает на оси ординат отрезок, величина которого $b=2$ (фиг. 3, 2). Значит, точка A (0, 2) принадлежит прямой. Найдем еще одну точку на этой прямой. Как указано выше, легче всего определить точку пересечения прямой с осью Ox. Взяв в уравнении прямой равным нулю, получим $0=3x+2$, а $x=-\frac{2}{3}$, и точка B пересечения прямой с осью Ox имеет координаты $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Построив точки (0, 2) и $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ и соединив их прямой, получим прямую, соответствующую этому уравнению.

г) Прямая $y = -2x$ проходит через начало координат ($b = 0$), а поэтому для ее построения достаточно найти еще только одну точку, принадлежащую ей.

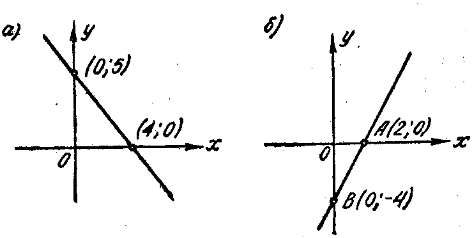
Взяв $x = -1$, получим, что $y = -2 \cdot (-1) = 2$ и, значит, точка $A(-1,2)$ принадлежит прямой. Проведя прямую через начало координат и точку $(-1,2)$, мы получим прямую, соответствующую данному уравнению (фиг. 3, 3 *а*).



Фиг. 3,3.

д) Прямая $2x + 3y = 0$ проходит через начало координат, так как ее уравнение не содержит свободного члена. Найдем еще одну точку, принадлежащую прямой. Возьмем, например, на прямой точку с абсциссой $x = 2$. Подставляя в уравнение прямой $x = 2$, получим для определения ординаты этой точки уравнение $2 \cdot 2 + 3y = 0$; $3y = -4$; $y = -\frac{4}{3}$.

Таким образом, прямой принадлежит и точка $A\left(2, -\frac{4}{3}\right)$. Прямая, проведенная через начало координат и точку $A\left(2, -\frac{4}{3}\right)$, и будет соответствовать данному уравнению (фиг. 3, 3 *б*).



Фиг. 3,4.

е) Уравнение $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ — уравнение прямой в отрезках на осях. Из него сразу усматриваем, что прямая отсекает на осях Ox и Oy отрезки, величины которых $a = 4$, $b = 5$ (фиг. 3, 4 *а*).

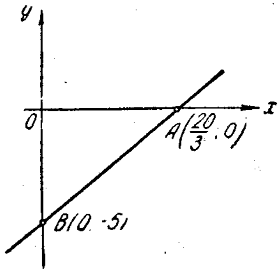
ж) Уравнение $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ преобразуем к виду (3,3). Запомните, что в уравнении прямой, в отрезках на осях в левой его части, между дробями должен быть знак плюс. На основании этого замечания данное уравнение перепишем в виде

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1;$$

тогда $a = 2$, а $b = -4$. Прямая, соответствующая этому уравнению, показана на фиг. 3, 4 *б*.

з) Для построения прямой $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 4 = 0$. Определим точки пересечения ее с координатными осями. Положив в ее уравнении $y = 0$, найдем, что $\frac{3}{5}x - 4 = 0$, а отсюда $x = \frac{20}{3}$, и точка A пересечения прямой с осью абсцисс имеет координаты $A\left(\frac{20}{3}, 0\right)$.

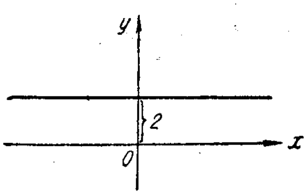
Взяв в уравнении прямой $x = 0$, найдем, что $y = -5$ и точка B пересечения прямой с осью Oy имеет координаты $B(0, -5)$. Проводим через эти точки прямую. Она и соответствует данному уравнению (фиг. 3, 5).



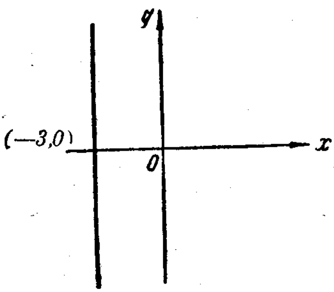
Фиг. 3,5.

и) Уравнение $y = 2$ определяет прямую, у которой все точки имеют ординату, равную 2 ед. масштаба. Эта прямая, очевидно, параллельна оси Ox, находится над ней и проходит через точку $(0, 2)$ (фиг. 3,6).

к) Уравнение $x + 3 = 0$ перепишем в виде $x = -3$. Это уравнение определяет прямую, у которой все точки имеют абсциссы, равные -3. Ясно, что эта прямая параллельна оси Oy, находится слева от нее на расстоянии 3 ед. масштаба и проходит через точку $(-3, 0)$ (фиг. 3, 7).



Фиг. 3,6.



Фиг. 3,7.

Задача 3, 2. Общее уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в виде: 1) с угловым коэффициентом; 2) в отрезках на осях и 3) в нормальном виде. Построить эту прямую.

Решение. 1) Уравнение (3, 1) прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y = kx + b$. Чтобы заданное уравнение преобразовать к этому виду, разрешим его относительно y: $3y = 4x + 12$, $y = \frac{4}{3}x + 4$.

Сравнивая с уравнением (3, 1), видим, что здесь угловой коэффициент прямой $k = \frac{4}{3}$, а величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, $b = 4$ (если уравнение прямой дано в общем виде (3, 2), то ее угловой коэффициент легко получить, если разделить коэффициент при x на коэффициент при y и взять полученное частное с обратным знаком $k = -\frac{A}{B}$.*

2) В отрезках на осях уравнение прямой имеет вид (3,3)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Чтобы определить величины отрезков, отсекаемых заданной прямой $4x - 3y + 12 = 0$, поступим так: в уравнении прямой положим $y = 0$. Получаем $4x + 12 = 0$, а $x = -3$. Значит, наша прямая пересекает ось Ox в точке с координатами $(-3, 0)$, и в уравнении (3, 3) величина отрезка $a = -3$.

Полагая в нашем уравнении $x = 0$, определим ординату точки пересечения прямой с осью ординат. Будем иметь

$$-3y + 12 = 0; \ y = 4.$$

Точка пересечения прямой с осью ординат имеет координаты $(0, 4)$, и в уравнении (3, 3) величина отрезка $b = 4$**.

Таким образом, наше уравнение в отрезках на осях будет иметь вид

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1.$$

3) Чтобы привести уравнение к нормальному виду, обе его части следует умножить на нормирующий множитель (3, 5), выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в общем уравнении прямой. В нашем случае свободный член в общем уравнении прямой равен $+12$, а поэтому перед корнем в нормирующем множителе должен быть выбран противоположный знак, т. е. знак минус, и так как

$$A = 4, \ B = -3, \text{ то}$$

$$N = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}; \ N = -\frac{1}{5}.$$

Умножая на $-\frac{1}{5}$ обе части уравнения

$$4x - 3y + 12 = 0,$$

приведем его к нормальному виду

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0.$$

---

* В дальнейшем вместо фразы «возьмем прямую с уравнением, например, $Ax + By + C = 0$» мы будем употреблять более короткую: «возьмем прямую $Ax + By + C = 0$». Мы обращаем на это внимание потому, что $Ax + By + C = 0$ есть уравнение прямой, но не сама прямая.

** В дальнейшем вместо термина «величина отрезка» употребляется термин «отрезок».

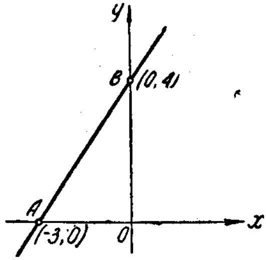
Запомнить: *В нормальном уравнении прямой сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах должна быть равна единице, а свободный член должен быть отрицательным.* Эти два требования в полученном нами последнем уравнении, как легко проверить, выполнены. В пункте 2 решения мы получили уравнение прямой в отрезках на осях: $a = -3$, $b = 4$. Зная эти отрезки, мы легко построим нашу прямую (фиг. 3, 8).

Задачи 3, 3 и 3, 4 решаются так же, как и задача 3, 2. Поэтому приводятся только ответы. Эти задачи должны быть решены самостоятельно.

Задача 3, 3 (для самостоятельного решения). Уравнение прямой $6x + 8y - 15 = 0$ представить в виде:

1) с угловым коэффициентом, 2) в отрезках на осях.

Построить эту прямую.



Фиг. 3,8.

Ответ. 1) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{8}.$$

2) Уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{2{,}5} + \frac{y}{1{,}875} = 1.$$

Задача 3, 4 (для самостоятельного решения). Те же требования, что и в задаче 3, 3 для прямой $12x - 5y + 26 = 0$.

Ответ. $y = \frac{12}{5}x + \frac{26}{5}$; $\frac{x}{-\frac{13}{6}} + \frac{y}{\frac{26}{5}} = 1.$

Задача 3, 5. Под каким углом прямая $y = x + 2$ пересекает ось Ox?

Решение. Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом в виде (3, 1). Сравнивая данное уравнение с уравнением $y = kx + b$, получаем, что $k = 1$. Нам известно, что k — угловой коэффициент прямой, т. е. k — это тангенс того угла, который прямая составляет с положительным направлением оси Ox. Этот угол мы обозначим буквой φ. Значит, $k = \operatorname{tg}\varphi$. У нас $k = 1$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = 1$; следовательно, $\varphi = 45°$. Этим заканчивается решение задачи.

Задача 3, 6 (для самостоятельного решения). Под каким углом прямая $y = 2x + 3$ пересекает ось Ox?

Указание. При решении задачи воспользуйтесь таблицами тригонометрических функций.

Ответ. $\operatorname{tg}\varphi = 2$; $\varphi = 63°26'$.

Задача 3, 7. Найти уравнение биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Решение. Уравнение прямой с угловым коэффициентом в том случае, когда прямая проходит через начало координат, имеет вид

$$y = kx, \qquad (3, 6)$$

так как в этом случае отрезок b, отсекаемый прямой на оси Oy, равен нулю. Биссектриса первого и третьего координатных углов составляет с положительным направлением оси Ox угол в $45°$. Величина k в уравнении (3, 1) есть тангенс этого угла, т. е. $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Подставляя это значение в уравнение (3, 6), получим $y = x$.

Это и есть уравнение биссектрисы первого и третьего координатных углов, его следует запомнить. Оно может быть записано также в виде $x - y = 0$.

Задача 3, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнение биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

Ответ. $y = -x$, или $x + y = 0$.

Задача 3, 9. Прямая проходит через точку $(2, -3)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b = 3$. Найти ее уравнение.

Решение. Будем искать уравнение прямой в виде (3, 1) с угловым коэффициентом. Это целесообразно сделать потому, что в задаче задан отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат, а в уравнение прямой с угловым коэффициентом входит этот отрезок. Итак, в уравнении $y = kx + b$ нам известно, что $b = 3$. Подставим в него это значение и получим

$$y = kx + 3. \qquad (A)$$

Следовательно, теперь осталось определить только угловой коэффициент k. По условию прямая проходит через точку $(2, -3)$. Если линия проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению линии. Подставим в последнее уравнение 2 вместо x и -3 вместо y. Получим уравнение для определения k: $-3 = 2k + 3$. Решая уравнение, находим, что $k = -3$.

Подставляя это значение k в (A), получим искомое уравнение прямой $y = -3x + 3$.

Задача 3, 10 (для самостоятельного решения). Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-1, -3)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = 4$. Эта задача решается так же, как и 3, 9.

Ответ. $y = 7x + 4$.

Задача 3, 11. Написать уравнение прямой, отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a = 3$ и $b = 4$.

Решение. В уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

подставим $a=3$ и $b=4$. Получим искомое уравнение в виде

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

Задача 3, 12 (для самостоятельного решения). Построить прямые, заданные уравнениями

1) $x+2y-6=0$; 2) $x-3y+9=0$;
3) $3x-y=0$; 4) $x+2y=0$;
5) $x-4=0$; 6) $2y-3=0$.

Решим теперь две задачи, связанные с исследованием общего уравнения прямой.

Задача 3, 13. Указать особенности в расположении относительно координатных осей прямых

1) $2x-5y=0$; 2) $3x-2=0$;
3) $7y+12=0$; 4) $5x=0$;
5) $3y=0$.

Решение. 1) Прямая $2x-5y=0$ проходит через начало координат, так как ее уравнение не содержит свободного члена.

2) Прямая $3x-2=0$ параллельна оси Oy (ее уравнение не содержит текущей координаты y).

3) Прямая $7y+12=0$ параллельна оси Ox (ее уравнение не содержит текущей координаты x).

4) Прямая $5x=0$ совпадает с осью Oy (ее уравнение можно переписать в виде $x=0$).

Задача 3, 14 (для самостоятельного решения). Указать особенности в расположении прямых

1) $5x+3y=0$; 4) $5y=0$;
2) $4y+8=0$; 5) $7x=0$.
3) $3x-16=0$;

Ответ. 1) Проходит через начало координат;
2) параллельна оси Ox;
3) параллельна оси Oy;
4) совпадает с осью Ox;
5) совпадает с осью Oy.

Задача 3, 15. Уравнение прямой $x+3y-4=0$ привести к нормальному виду.

Решение. Нормирующий множитель определяется по формуле

$$N=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Здесь $A=1$; $B=3$. Перед корнем надо выбрать знак, противоположный знаку свободного члена в заданном уравнении, т. е. знак плюс. Тогда нормирующий множитель

$$N=\frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}};\quad N=\frac{1}{\sqrt{10}};$$

после умножения обеих частей уравнения на N уравнение примет вид

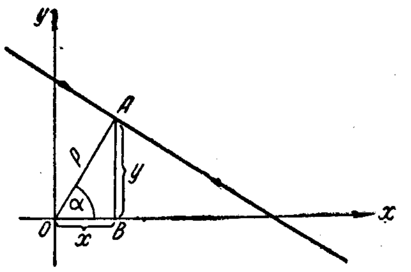
$$\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{4}{\sqrt{10}}=0.$$

Задача 3, 16. Привести к нормальному виду уравнение прямой $5x-12y+26=0$.

Ответ. $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$.

Из сравнения с уравнением (3, 4) видим, что $p=2$; $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$; $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

Задача 3, 17 (для самостоятельного решения). Уравнение прямой $7x+y-3=0$ привести к нормальному виду.



Фиг. 3,9.

Ответ. $\frac{7}{5\sqrt{2}}x+\frac{1}{5\sqrt{2}}y-\frac{3}{5\sqrt{2}}=0$;

$$p=\frac{3}{5\sqrt{2}};\quad \cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}};$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Задача 3, 18 (для самостоятельного решения). Привести к нормальному виду уравнение прямой $6x-8y-15=0$.

Ответ. $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-1{,}5=0$; $p=1{,}5$; $\cos\alpha=\frac{3}{5}$;

$$\sin\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Задача 3, 19. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $3x-6y+5=0$, а также координаты основания этого перпендикуляра.

Решение. Приведем данное уравнение к нормальному виду:

$$N=-\frac{1}{\sqrt{3^2+6^2}},\quad N=-\frac{1}{\sqrt{45}}=-\frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

После умножения на нормирующий множитель уравнение примет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{\sqrt{5}}{3}=0.$$

Из сравнения с (3, 4) заключаем, что $p=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Для определения координат основания этого перпендикуляра из фиг. 3, 9 получим формулы

$$x=p\cos\alpha,$$

$$y=p\sin\alpha$$

(эти формулы верны при любом расположении прямой относительно координатных осей).

Как видно из уравнения (3, 4), $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и искомые координаты основания перпендикуляра равны

$$x = -\frac{1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}.$$

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Определение точки пересечения двух прямых.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(x_1, y_1)$ в данном направлении, определяемом угловым коэффициентом k,

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{4, 1}$$

Это уравнение определяет пучок прямых, проходящих через точку $A(x_1, y_1)$, которая называется центром пучка.

2. Уравнение прямой, проходящей через две точки: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, записывается так:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4, 2}$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4, 3}$$

3. Углом между прямыми a и b называется угол, на который надо повернуть первую прямую a вокруг точки пересечения этих прямых против движения часовой стрелки до совпадения ее со второй прямой b.

Если две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$y = k_1x + b_1,$$

$$y = k_2x + b_2, \tag{4, 4}$$

то угол между ними θ определится по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{4, 5}$$

Следует обратить внимание на то, что в числителе дроби из углового коэффициента второй прямой вычитается угловой коэффициент первой прямой.

Если уравнения прямых заданы в общем виде

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \qquad (4, 6)$$

угол между ними определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (4, 7)$$

4. Условия параллельности двух прямых:

а) Если прямые заданы уравнениями (4, 4) с угловым коэффициентом, то необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в равенстве их угловых коэффициентов:

$$k_1 = k_2. \qquad (4, 8)$$

б) Для случая, когда прямые заданы уравнениями в общем виде (4, 6), необходимое и достаточное условие их параллельности состоит в том, что коэффициенты при соответствующих текущих координатах в их уравнениях пропорциональны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (4, 9)$$

5. Условия перпендикулярности двух прямых:

а) В случае, когда прямые заданы уравнениями (4, 4) с угловым коэффициентом, необходимое и достаточное условие их перпендикулярности заключается в том, что их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку, т. е.

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (4, 10)$$

Это условие может быть записано также в виде

$$k_1k_2 = -1. \qquad (4, 11)$$

б) Если уравнения прямых заданы в общем виде (4, 6), то условие их перпендикулярности (необходимое и достаточное) заключается в выполнении равенства

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (4, 12)$$

6. Координаты точки пересечения двух прямых находят, решая систему уравнений (4, 6). Прямые (4, 6) пересекаются в том и только в том случае, когда

$$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0.$$

Задача 4, 1. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки: $(-1,\ 2)$ и $(2,\ 1)$.

Решение. По уравнению (4, 2), полагая в нем* $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, получим

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+1}{2+1}, \qquad \text{или} \qquad \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3};$$

после упрощений получаем окончательно искомое уравнение в виде

$$x + 3y - 5 = 0.$$

Задача 4, 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(2, 1)$ и $B(-5, 1)$.

Решение. Эта задача не отличается от предыдущей. Подставляя координаты точек A и B в уравнение (4, 2), получаем

$$\frac{x-2}{-5-2} = \frac{y-1}{1-1},$$

или $\frac{x-2}{-7} = \frac{y-1}{0}$, а отсюда заключаем, что $y - 1 = 0$, или $y = 1$ (см. объяснения в учебнике И. И. Привалова «Аналитическая геометрия». 1957, гл. III, § 12).

Задача 4, 3 (для самостоятельного решения). Найти уравнения сторон треугольника, вершины которого $A(1, -1)$; $B(3, 5)$, $C(-7, 11)$.

Указание. Эта задача решается точно так же, как и две предыдущие. Используя формулу (4, 2), получим уравнения сторон:

$$\begin{aligned} (AB)\quad & 3x - y - 4 = 0, \\ (BC)\quad & 3x + 5y - 34 = 0, \\ (AC)\quad & 3x + 2y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Задача 4, 4. Стороны треугольника заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} (AB)\quad & 2x + 4y + 1 = 0, \\ (AC)\quad & x - y + 2 = 0, \\ (BC)\quad & 3x + 4y - 12 = 0. \end{aligned}$$

Найти координаты вершин треугольника.

Решение. Координаты вершины A найдем, решая систему, составленную из уравнений сторон AB и AC:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными решаем способами, известными из элементарной алгебры, и получаем

$$x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

---

* Безразлично, какую точку считать первой, а какую — второй.

Вершина A имеет координаты

$$A\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

Координаты вершины B найдем, решая систему из уравнений сторон AB и BC:

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y+\ \ 1&=0 \\ 3x+4y-12&=0 \end{aligned}\right\};$$

получаем $x=13$; $y=-\frac{27}{4}$; $B\left(13,\ -\frac{27}{4}\right)$.

Координаты вершины C получим, решая систему из уравнений сторон BC и AC:

$$\left.\begin{aligned} 3x+4y-12&=0 \\ x-\ \ y+\ \ 2&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Вершина C имеет координаты $C\left(\frac{4}{7},\ \frac{18}{7}\right)$.

Задача 4, 5 (для самостоятельного решения). Найти координаты вершин треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} &(AB)\quad x+\ \ y-\ \ 5=0, \\ &(BC)\quad 2x-\ \ y+\ \ 4=0, \\ &(AC)\quad 5x-3y+14=0. \end{aligned}$$

Ответ. $A\left(\frac{1}{8},\ \frac{39}{8}\right)$; $B\left(\frac{1}{3},\ \frac{14}{3}\right)$; $C(2,\ 8)$.

Задача 4, 6 (для самостоятельного решения). Найти координаты вершин треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} &(AB)\quad 2x+\ \ y-\ \ 5=0, \\ &(BC)\quad 2x-\ \ y+\ \ 4=0, \\ &(AC)\quad 5x-8y+14=0. \end{aligned}$$

Ответ. $A\left(\frac{26}{21},\ \frac{53}{21}\right)$; $B\left(\frac{1}{4},\ \frac{9}{2}\right)$; $C\left(-\frac{18}{11},\ \frac{8}{11}\right)$.

Задача 4, 7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,\ 5)$ параллельно прямой $3x-4y+15=0$.

Решение. Докажем, что если две прямые параллельны, то их уравнения всегда можно представить в таком виде, что они будут отличаться только свободными членами. Действительно, из условия (4, 9) параллельности двух прямых следует, что $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

Обозначим через t общую величину этих отношений. Тогда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = t,$$

а отсюда следует, что

$$A_1 = A_2 t, \quad B_1 = B_2 t. \tag{4, 13}$$

Если две прямые

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
и
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

параллельны, условия (4, 13) выполняются, и, заменяя в первом из этих уравнений A_1 и B_1 по формулам (4, 13), будем иметь

$$A_2 t x + B_2 t y + C_1 = 0,$$

или, разделив обе части уравнения на $t \neq 0$, получим

$$A_2 x + B_2 y + \frac{C_1}{t} = 0. \tag{4, 14}$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением второй прямой $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, мы замечаем, что эти уравнения отличаются только свободным членом; тем самым мы доказали требуемое. Теперь приступим к решению задачи. Уравнение искомой прямой запишем так, что оно будет отличаться от уравнения данной прямой только свободным членом: первые два слагаемые в искомом уравнении возьмем из данного уравнения, а его свободный член обозначим через C. Тогда искомое уравнение запишется в виде

$$3x - 4y + C = 0, \tag{4, 15}$$

и определению подлежит C.

Придавая в уравнении (4, 15) величине C всевозможные действительные значения, мы получим множество прямых, параллельных данной. Таким образом, уравнение (4, 15) представляет собой уравнение не одной прямой, а целого семейства прямых, параллельных данной прямой $3x - 4y + 15 = 0$. Из этого семейства прямых нам следует выделить ту, которая проходит через точку $A\,(2,\ 5)$.

Если прямая проходит через точку, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению прямой. А поэтому мы определим C, если в (4, 15) подставим вместо текущих координат x и y координаты точки A, т. е. $x = 2$, $y = 5$. Получаем $3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 + C = 0$ и $C = 14$.

Найденное значение C подставляем в (4, 15), и искомое уравнение запишется так:

$$3x - 4y + 14 = 0.$$

Ту же задачу можно решить и иначе. Так как угловые коэффициенты параллельных прямых между собою равны, а для данной прямой $3x - 4y + 15 = 0$ угловой коэффициент $k = \frac{3}{4}$, $\left(k = -\frac{A}{B}\right)$, то и угловой коэффициент искомой прямой также равен $\frac{3}{4}$.

Теперь используем уравнение (4, 1) пучка прямых. Точка $A(2, 5)$, через которую проходит прямая, нам известна, а потому, подставив в уравнение пучка прямых $y - y_1 = k(x - x_1)$ значения $k = \frac{3}{4}$; $x_1 = 2$; $y_1 = 5$,

получим

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x - 2); \quad 4y - 20 = 3x - 6,$$

или после упрощений

$$3x - 4y + 14 = 0,$$

т. е. то же, что и раньше.

Задача 4, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(3, -4)$ параллельно прямой $2x + 5y - 7 = 0$.

Указание. Задача решается так же, как и предыдущая. Решение проведите двумя способами.

Ответ. $2x + 5y + 14 = 0$.

Задача 4, 9. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(5, -1)$ перпендикулярно к прямой $3x - 7y + 14 = 0$.

Решение. Мы знаем, что если две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

перпендикулярны, то выполняется равенство (4, 12)

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$$

или, что то же,

$$A_1A_2 = -B_1B_2,$$

а отсюда следует, что

$$\frac{A_2}{B_1} = -\frac{B_2}{A_1}.$$

Общее значение этих отношений обозначим через t.

Тогда $$\frac{A_2}{B_1} = -\frac{B_2}{A_1} = t,$$

откуда следует, что

$$A_2 = B_1t, \ B_2 = -A_1t.$$

Подставляя эти значения A_2 и B_2 в уравнение второй прямой, получим

$$B_1tx - A_1ty + C_2 = 0,$$

или, деля на t обе части равенства, будем иметь

$$B_1x - A_1y + \frac{C_2}{t} = 0.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением первой прямой

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

замечаем, что у них коэффициенты при x и y поменялись местами, а знак между первым и вторым слагаемым переменился на противоположный, свободные же члены различны.

Приступим теперь к решению задачи. Желая написать уравнение прямой, перпендикулярной к прямой $3x - 7y + 14 = 0$, мы на основании только что сделанного заключения поступим так: поменяем местами коэффициенты при x и y, а знак минус между ними заменим знаком плюс, свободный член обозначим буквой C. Получим $7x + 3y + C = 0$. Это уравнение есть уравнение семейства прямых, перпендикулярных прямой $3x - 7y + 14 = 0$. Мы определим C из условия, что искомая прямая проходит через точку $A(5, -1)$. Известно, что если прямая проходит через точку, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению прямой. Подставляя в последнее уравнение 5 вместо x и -1 вместо y, получим

$$7 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) + C = 0;$$

$$C = -32.$$

Это значение C подставим в последнее уравнение и получим

$$7x + 3y - 32 = 0.$$

Решим ту же задачу другим способом, использовав для этого уравнение (4, 1) пучка прямых

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Угловой коэффициент искомой прямой мы найдем из условия (4, 10), т. е. он должен быть обратен по абсолютной величине и противоположен по знаку угловому коэффициенту данной прямой.

Угловой коэффициент данной прямой $3x - 7y + 14 = 0$

$$k_1 = \frac{3}{7};$$

тогда угловой коэффициент прямой, ей перпендикулярной,

$$k_2 = -\frac{7}{3}.$$

Подставив в уравнение пучка прямых $k_2 = -\frac{7}{3}$, а вместо x_1 и y_1 координаты данной точки $A(5, -1)$, найдем $y-(-1) = -\frac{7}{3}(x-5)$, или $3y+3 = -7x+35$, и окончательно $7x+3y-32=0$, т. е. то же, что и раньше.

Задача 4, 10 (для самостоятельного решения). Через точку $A(-3, 2)$ провести прямую, перпендикулярную прямой $7x+4y-11=0$*.

Ответ. $4x-7y+26=0$.

Задача 4, 11 (для самостоятельного решения). Через точку пересечения прямых

$$x+y-1=0 \text{ и } 2x+3y+4=0$$

провести прямую: 1) перпендикулярно прямой $3x-y+7=0$; 2) параллельно этой прямой.

Ответ. 1) $x+3y+11=0$; 2) $3x-y-27=0$.

Задача 4, 12 (для самостоятельного решения). Сторонами треугольника являются координатные оси и прямая, проходящая через точку $A(3, 4)$. Найти уравнение этой прямой при условии, что площадь треугольника равна 9 кв. ед.

Указание. 1. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(3, 4)$.

2. Найти величины отрезков, отсекаемых этой прямой на координатных осях. Получится

$$a = \frac{3k-4}{k}, \quad b = 4-3k.$$

3. Использовать формулу для определения площади прямоугольного треугольника $S = \pm\frac{1}{2}ab$, где a и b — катеты, и для определения k получатся уравнения

$$9k^2-42k+16=0 \text{ и } 9k^2-6k+16=0.$$

Корни второго уравнения комплексны и должны быть отброшены. Подставляя найденные из первого уравнения значения k в уравнение пучка прямых, полученное в п. 1, окончательно найдем, что требованию задачи удовлетворяют две прямые:

$$1)\ y = \frac{7+\sqrt{33}}{3}(x-3)+4 \text{ и } 2)\ y = \frac{7-\sqrt{33}}{3}(x-3)+4.$$

Задача 4, 13. Даны две противоположные вершины квадрата $A(2, 1)$ и $C(4, 5)$. Найти две другие (фиг. 4, 1).

Решение. Обозначим буквами B и D искомые вершины: $B(x_2, y_2)$ и $D(x_4, y_4)$. Надо найти числа x_2, y_2 и x_4, y_4. Для

* Это условие следует понимать так же, как и условие задачи 4, 9.

определения каждой пары этих чисел необходимы два уравнения, связывающие их.

Первое из них мы найдем, определив расстояние AB и приравняв его к расстоянию BC ($AB = BC$, так как стороны квадрата равны между собой):

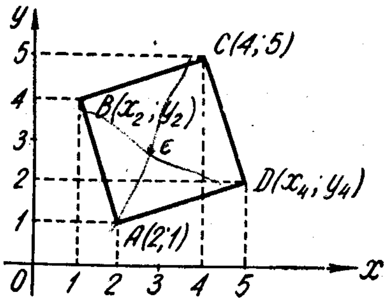
$$AB = \sqrt{(x_2-2)^2+(y_2-1)^2},\quad BC = \sqrt{(x_2-4)^2+(y_2-5)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{(x_2-2)^2+(y_2-1)^2} = \sqrt{(x_2-4)^2+(y_2-5)^2}.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, после упрощений получим первое уравнение, связывающее x_2 и y_2,

$$x_2 + 2y_2 = 9.$$



Фиг. 4,1.

Для получения второй связи между x_2 и y_2 найдем угловые коэффициенты прямых AB и BC. Так как эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1 (см. формулу (4, 11)).

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), определяется по формуле

$$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

В нашем случае $x_1 = 2$, $y_1 = 1$. Для прямой AB угловой коэффициент

$$k = \frac{y_2-1}{x_2-2}.$$

Для прямой BC угловой коэффициент, учитывая координаты точки C, будет равен

$$k_1 = \frac{y_2-5}{x_2-4}.$$

Из условия перпендикулярности двух прямых (4, 11) следует, что

$$\frac{y_2-1}{x_2-2}\cdot\frac{y_2-5}{x_2-4} = -1.$$

Умножая обе части этого равенства на $(x_2-2)\cdot(x_2-4)$, получим

$$(y_2-1)(y_2-5) = -(x_2-2)(x_2-4),$$

$$\text{или}\quad (y_2-1)(y_2-5)+(x_2-2)(x_2-4) = 0;$$

раскрывая скобки, будем иметь

$$x_2^2 + y_2^2 - 6x_2 - 6y_2 + 13 = 0.$$

Это второе уравнение, связывающее x_2 и y_2.

Его можно получить и проще: 1) координаты точки E пересечения диагоналей квадрата найдутся, как координаты средины диагонали $AC: E(3, 3)$. Из условия $BE = AE$ получаем предыдущее уравнение. Таким образом, для определения x_2 и y_2 мы имеем такую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2y_2 &= 9 \\ x_2^2 + y_2^2 - 6x_2 - 6y_2 + 13 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Из первого уравнения находим, что $x_2 = 9 - 2y_2$. Подставляем это значение во второе уравнение и, решая относительно y_2 полученное квадратное уравнение, найдем, что

$$(y_2)_1 = 4, \quad (y_2)_2 = 2,$$

$$\text{а } (x_2)_1 = 1, \quad (x_2)_2 = 5.$$

Значит, вершиной B могут служить точки с координатами (1, 4) и (5, 2). Проделайте самостоятельно точно такую же работу относительно второй искомой вершины; получите

$$(x_4)_1 = 5; \quad (y_4)_1 = 2;$$

$$(x_4)_2 = 1; \quad (y_4)_2 = 4.$$

Следовательно, вершина D имеет координаты (5, 2) или (1, 4).

Задача 4, 14. Найти угол между двумя прямыми

$$y = 2x + 4;$$

$$y = 3x - 1.$$

Решение. Поставим перед собой задачу найти острый угол между данными прямыми. Воспользуемся формулой (4, 5), так как прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом, причем поскольку нас интересует острый угол, правую часть формулы (4, 5) возьмем по абсолютной величине:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

У нас

$$k_1 = 2; \quad k_2 = 3;$$

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{3-2}{1+3\cdot 2}\right|; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{7}.$$

По таблицам тригонометрических функций находим, что $\theta = 8°8'$.

Задача 4, 15 (для самостоятельного решения).

Найти угол между прямыми

$$y = -2x + 3 \text{ и } y = 3x + 5.$$

Ответ. $\theta = 135°$.

Задача 4, 16. Найти угол между прямыми

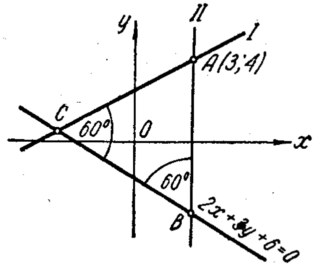
$$3x + 4y - 7 = 0 \text{ и}$$
$$4x - 3y + 8 = 0.$$

Решение. Воспользуемся формулой (4, 7), так как уравнения прямых заданы в общем виде.

У нас $A_1 = 3$; $B_1 = 4$; $A_2 = 4$; $B_2 = -3$;

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-9-16}{12-12}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{-25}{0};$$

и так как деление на нуль невозможно, то $\operatorname{tg}\theta$ не существует. Угол $\theta = 90°$, т. е. прямые перпендикулярны. Их перпендикулярность можно было усмотреть и сразу, составив выражение (4, 12) $A_1A_2 + B_1B_2$ и убедившись, что оно равно нулю.



Фиг. 4,2.

Задача 4, 17 (для самостоятельного решения).

Найти острый угол между прямыми

$$3x + 5y - 7 = 0 \text{ и } x - y + 5 = 0.$$

Ответ. $\operatorname{tg}\theta = 4$; $\theta = 75°58'$.

Указание. Для определения угла θ воспользуйтесь таблицами тригонометрических функций.

Задача 4, 18. Найти уравнения прямых, проходящих через точку A (3, 4) под углом в 60° к прямой $2x + 3y + 6 = 0$.

Решение. Для решения задачи нам следует определить угловые коэффициенты прямых I и II (фиг. 4, 2). Обозначим эти коэффициенты соответственно через k_1 и k_2, а угловой коэффициент данной прямой — через k. Очевидно, что $k = -\frac{2}{3}$.

На основании определения угла между двумя прямыми (стр. 35) при определении угла между данной прямой и прямой I следует в числителе дроби в формуле (4, 5) вычесть угловой коэффициент данной прямой, так как ее нужно повернуть против часовой стрелки вокруг точки C до совпадения с прямой I.

Учитывая, что $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, получаем

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{k_1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)k_1}; \quad \sqrt{3} = \frac{k_1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k_1}; \quad k_1 = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{3}.$$

Определяя же угол между прямой II и данной прямой, следует в числителе той же дроби вычесть угловой коэффициент прямой II, т. е. k_2, так как прямую II следует повернуть против часовой стрелки вокруг точки B до совпадения ее с данной прямой:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{-\frac{2}{3} - k_2}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)k_2}; \quad \sqrt{3} = \frac{-\frac{2}{3} - k_2}{1 - \frac{2}{3} k_2}; \quad k_2 = \frac{24 + 13\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 4, 19. Через центр тяжести треугольника, вершины которого $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(5, 5)$, провести прямую, параллельную стороне AC, и прямую, перпендикулярную стороне AB.

Решение. Прежде всего определим координаты центра тяжести M треугольника. Известно, что каждая координата центра тяжести площади треугольника есть средняя арифметическая одноименных координат его вершин. Значит, если вершины треугольника имеют координаты (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), то координаты его центра тяжести x_C и y_C будут

$$x_C = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

В нашем случае

$$x_C = \frac{2 + (-1) + 5}{3} = 2,$$

$$y_C = \frac{3 + 4 + 5}{3} = 4.$$

Центр тяжести треугольника M имеет координаты $(2, 4)$. Уравнение стороны AB будет $x + 3y - 11 = 0$; уравнение стороны AC будет $2x - 3y + 5 = 0$ (мы нашли эти уравнения, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки).

Теперь так же, как в задачах 4, 7 и 4, 9, определим уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно стороне AC и перпендикулярно стороне AB. Получим соответственно

$$2x - 3y + 8 = 0 \text{ и } 3x - y - 2 = 0.$$

ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Расстояние от данной точки до данной прямой.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Расстояние точки A (x_1, y_1) до прямой $Ax + By + C = 0$ есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Она определяется по формуле

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \qquad (5, 1)$$

Правило. *Чтобы определить расстояние от точки* $A(x_1, y_1)$ *до прямой* $Ax+By+C=0$, *нужно привести уравнение прямой к нормальному виду, взять левую часть полученного уравнения и подставить в нее вместо текущих координат координаты данной точки. Абсолютная величина полученного числа и даст искомое расстояние.*

Расстояние от точки до прямой есть всегда величина положительная. Кроме расстояния от точки до прямой, рассматривается еще так называемое отклонение точки от прямой.

Отклонение δ данной точки от данной прямой есть расстояние от этой точки до прямой, которому приписывается знак плюс, если точка и начало координат находятся по разные стороны от прямой, и знак минус, если точка и начало координат находятся по одну сторону от прямой (см. учебник И. И. Привалова, гл. III, § 16, или § 22 учебника Н. В. Ефимова).

Расстояние от точки до прямой есть абсолютная величина отклонения этой точки от прямой.

Задача 5, 1. Найти расстояние от начала координат до прямой $x+y-2=0$ (см. также задачу 3, 19).

Решение. Приведем уравнение прямой к нормальному виду. Нормирующий множитель

$$N=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}, \qquad N=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В нормальном виде уравнение прямой запишется так:

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=0.$$

Свободный член в нормальном уравнении прямой, взятый по абсолютной величине, дает искомое расстояние $p=\sqrt{2}$ ед. масштаба.

Задача 5, 2. Найти расстояние от точки (2, 5) до прямой

$$6x+8y-5=0.$$

Решение. Приведем уравнение прямой к нормальному виду. Нормирующий множитель

$$N=\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{1}{10}.$$

Уравнение прямой в нормальном виде запишется так:

$$\frac{6x+8y-5}{10}=0.$$

Согласно правилу стр. 47, возьмем теперь левую часть этого уравнения $\frac{6x+8y-5}{10}$ и подставим в нее координаты данной точки. Абсолютная величина полученного числа и даст искомое расстояние

$$d = \left| \frac{6 \cdot 2 + 8 \cdot 5 - 5}{10} \right| = 4{,}7 \text{ ед. масштаба.}$$

Итак, $d = 4{,}7$ ед. масштаба.

Задача 5, 3 (для самостоятельного решения).

Найти расстояние от точки $(3, -1)$ до прямой $3x + 5y + 8 = 0$.

Ответ. $d = \frac{6}{17}\sqrt{34}$ ед. масштаба.

Задача 5, 4. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$3x + 4y - 12 = 0,$$
$$3x + 4y + 13 = 0.$$

Решение. Искомое расстояние мы найдем, как расстояние от произвольной точки первой прямой до второй прямой. Возьмем на первой прямой произвольную точку, например, точку с абсциссой $x = 0$. Ее ордината будет $y = 3$.

Итак, на первой прямой выбрана точка $A\,(0{,}3)$. Найдем теперь расстояние этой точки до второй прямой так же, как и в задачах 5, 2 и 5, 3, и получим

$$d = 5 \text{ ед. масштаба.}$$

Задача 5, 5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-4, 3)$ и удаленной от начала координат на расстояние 5 ед. масштаба.

Решение. Уравнение искомой прямой, как проходящей через точку $(-4, 3)$, запишется на основании уравнения (4, 1) в виде

$$y - 3 = k\,(x + 4).$$

После упрощений оно примет вид

$$kx - y + (4k + 3) = 0.$$

Теперь приведем его к нормальному виду. Нормирующий множитель будет равен

$$N = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

и уравнение в нормальном виде будет выглядеть так:

$$\frac{k}{\pm\sqrt{1 + k^2}}\,x + \frac{1}{\pm\sqrt{1 + k^2}}\,y + \frac{4k + 3}{\pm\sqrt{1 + k^2}} = 0.$$

Сравнивая это уравнение с нормальным уравнением прямой, видим, что прямая удалена от начала координат на величину

$$p = \frac{|4k + 3|}{\sqrt{1 + k^2}},$$

которая по условию равна 5. Значит, для определения k получаем такое уравнение:

$$\frac{|4k+3|}{\sqrt{1+k^2}} = 5,$$

а после возведения в квадрат обеих частей этого уравнения для определения k будем иметь квадратное уравнение

$$9k^2 - 24k + 16 = 0,$$

откуда

$$k_1 = k_2 = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, искомое уравнение запишется так:

$$y - 3 = \frac{4}{3}(x+4),$$

и после упрощений получаем

$$4x - 3y + 25 = 0.$$

Задача 5, 6. Через точку $(-1, 2)$ провести прямую, расстояние которой от точки $(3, -1)$ равно 2 ед. масштаба.

Решение. Уравнение искомой прямой, как прямой, проходящей через точку $(-1, 2)$, запишется так:

$$y - 2 = k(x+1), \text{ или } kx - y + (k+2) = 0. \qquad (A)$$

Приведем его к нормальному виду. Нормирующий множитель

$$N = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

После приведения уравнения (A) к нормальному виду оно запишется в виде

$$\frac{kx - y + (k+2)}{\pm\sqrt{1+k^2}} = 0.$$

Вспомним теперь, что расстояние между точкой и прямой определяется по формуле

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|.$$

В нашем случае следует определить расстояние от точки $(3, -1)$ до прямой. У нас $x_1 = 3$; $y_1 = -1$; $d = 2$; подставляя эти значения в предыдущую формулу, будем иметь

$$2 = \left| \frac{3k+1+k+2}{\sqrt{1+k^2}} \right|; \qquad 2 = \frac{|4k+3|}{\sqrt{1+k^2}},$$

или

$$2\sqrt{1+k^2} = |4k+3|, \quad 4(1+k^2) = 16k^2 + 24k + 9,$$

и для определения k получаем уравнение

$$12k^2+24k+5=0,$$

откуда находим, что

$$k_1=\frac{-6+\sqrt{21}}{6},\quad k_2=\frac{-6-\sqrt{21}}{6}.$$

Подставляя эти значения в (A), заключаем, что есть две прямые, удовлетворяющие условию задачи:

$$1)\ y-2=\frac{-6+\sqrt{21}}{6}(x+1);$$

$$2)\ y-2=\frac{-6-\sqrt{21}}{6}(x+1).$$

Задача 5, 7. Через точку $M_1(1, 2)$ провести прямую, расстояния до которой от точек $M_2(2, 3)$ и $M_3(4, -5)$ были бы равны.

Решение. Так как искомая прямая проходит через точку $M_1(1, 2)$, то ее уравнение запишется так:

$$y-2=k(x-1), \tag{B}$$

или

$$kx-y-k+2=0,$$

а после приведения его к нормальному виду

$$\frac{kx-y-k+2}{\pm\sqrt{1+k^2}}=0.$$

Используя формулу (5, 1) для длины перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, и подставляя в нее сначала координаты точки M_2: $x_2=2$; $y_2=3$, а потом координаты точки M_3: $x_3=4$; $y_3=-5$, получим

$$d_1=\left|\frac{k-1}{\sqrt{1+k^2}}\right|,\quad d_2=\left|\frac{3k+7}{\sqrt{1+k^2}}\right|.$$

По условию $d_1=d_2$, а отсюда следует, что имеют место два равенства:

$$\frac{k-1}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{3k+7}{\sqrt{1+k^2}}\ \text{ и }\ \frac{k-1}{\sqrt{1+k^2}}=-\frac{3k+7}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Из первого $k=-4$, а из второго $k=\frac{2}{3}$. Итак, искомых прямых две, и уравнения их получим из (B), подставляя в него сначала $k=-4$, а потом $k=-\frac{3}{2}$.

Искомые прямые: $4x+y-6=0$ и $3x+2y-7=0$.

Задача 5, 8. Дана прямая $4x+3y+1=0$. Найти уравнение прямой, параллельной данной и отстоящей от нее на 3 ед. масштаба.

Решение. Очевидно, что искомых прямых будет две. Отклонение δ точек одной из искомых прямых от данной будет равно $+3$, а другой -3; $\delta = \pm 3$.

Уравнение семейства прямых, параллельных данной, будет таким:

$$4x + 3y + C = 0.$$

Из этого семейства требуется отобрать две искомые прямые. После приведения его к нормальному виду получим

$$\frac{4x + 3y + C}{\pm 5} = 0$$

(два знака в знаменателе мы удерживаем пока потому, что знак C нам неизвестен). Возьмем на данной прямой произвольную точку, например, $A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$. Подставим ее координаты в левую часть последнего уравнения и, учитывая, что отклонение точек данной прямой от искомых равно ± 3, для определения C получим уравнения

$$\pm 3 = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + C}{\pm 5}, \quad \text{откуда} \quad \pm 3 = \frac{C - 1^*}{\pm 5}.$$

На основании этого $C_1 = 16$, $C_2 = -14$. Подставляя эти значения C в уравнение семейства прямых $4x + 3y + C = 0$, получим, что искомых прямых две:

$$4x + 3y + 16 = 0 \text{ и } 4x + 3y - 14 = 0.$$

Решение допускает простую проверку, которую рекомендуется сделать.

Задача 5, 9 (для самостоятельного решения). Уравнения сторон треугольника ABC известны:

$$(AB)\ x + y - 1 = 0,$$
$$(AC)\ 2x - y - 5 = 0,$$
$$(BC)\ 3x + y = 0.$$

Найти длины высот этого треугольника и их уравнения.

Указание. Определить координаты вершин треугольника и воспользоваться формулой для определения расстояния от точки до прямой.

---

* Четыре случая: $3 = \frac{C-1}{5}$; $3 = \frac{C-1}{-5}$; $-3 = \frac{C-1}{5}$; $-3 = \frac{C-1}{-5}$ сводятся к двум: 1) $\frac{C-1}{5} = 3$; 2) $\frac{C-1}{5} = -3$, откуда $C_1 = 16$; $C_2 = -14$.

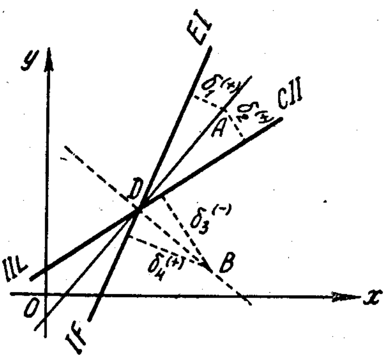
Ответ. Уравнение высоты h_{BC} $x-3y-5=0$;
уравнение высоты h_{AC} $2x+4y-5=0$;
уравнение высоты h_{AB} $x-y-4=0$;

$$h_{BC}=\frac{\sqrt{10}}{2};\quad h_{AC}=\frac{3\sqrt{5}}{2};\quad h_{AB}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Уравнение биссектрисы угла между двумя прямыми. Задачи повышенной трудности.

На этом практическом занятии мы будем решать задачи повышенной трудности, однако такие, которые не потребуют каких-либо дополнительных сведений из теории прямой линии. Научимся прежде всего находить уравнение биссектрисы угла между двумя прямыми.



Фиг. 6,1.

Задача 6, 1. Найти уравнения биссектрис углов между прямыми $12x+9y-17=0$ и $3x+4y+11=0$.

Решение*. Приведем подробное решение этой задачи. Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла между двумя прямыми есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла. Обратимся к фиг. 6, 1. Отклонения δ_1 и δ_2 точки A биссектрисы от сторон угла CDE имеют знак плюс, так как точка A и начало координат лежат по разные стороны как от первой, так и от второй прямой, т. е. $\delta_1=\delta_2$. Возьмем точку B на биссектрисе смежного угла CDF. Точка B и начало координат лежат по разные стороны от прямой EF, поэтому отклонение δ_4 имеет знак плюс ($\delta_4>0$). Отклонение δ_3 точки B от прямой CL имеет знак минус, так как точка B и начало координат лежат с одной и той же стороны от прямой CL, т. е. $\delta_3<0$. Значит, δ_3 и δ_4 в этом случае равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, и имеет место равенство

$$\delta_3=-\delta_4.$$

* Прежде чем решать эту задачу, еще раз повторите рассуждения о знаке отклонения точки от прямой по учебнику Н. В. Ефимова (§ 67) или по учебнику И. И. Привалова (§ 16, гл. III).

Обозначим через X и Y текущие координаты точки на биссектрисе и рассмотрим отклонения этой точки от сторон угла. Для биссектрисы одного угла эти отклонения равны, а для биссектрисы смежного угла они равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Пусть уравнения сторон угла имеют вид

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Приведем эти уравнения к нормальному виду, и тогда, для случая, когда $\delta_1 = \delta_2$, уравнение биссектрисы будет иметь вид

$$\frac{A_1X + B_1Y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2X + B_2Y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (A)$$

Для случая же $\delta_3 = -\delta_4$ уравнение биссектрисы получим в виде

$$\frac{A_1X + B_1Y + C_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2X + B_2Y + C_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B^2}}. \qquad (B)$$

Замечание. При решении задачи нет надобности обозначать текущие координаты точки на биссектрисе через X и Y. Их можно обозначить через x и y, так как это не меняет этих уравнений.

Объединяя уравнения (A) и (B) и используя только что сделанное замечание, будем иметь уравнения двух биссектрис в виде

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Теперь решение нашей задачи не составит труда.

Для нашего случая уравнения биссектрис запишутся так:

$$\frac{12x + 9y - 17}{\sqrt{12^2 + 9^2}} = \pm\frac{3x + 4y + 11}{\sqrt{3^2 + 4^2}},$$

или

$$\frac{12x + 9y - 17}{15} = +\frac{3x + 4y + 11}{5}$$

и

$$\frac{12x + 9y - 17}{15} = -\frac{3x + 4y + 11}{5}.$$

Окончательно уравнения биссектрис получаем в виде

$$21x + 21y + 16 = 0,$$

$$3x - 3y - 50 = 0.$$

Легко проверить, что найденные две биссектрисы перпендикулярны. Действительно, условие перпендикулярности двух прямых $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ выполняется (проверьте!)*.

---

* На этом примере мы получили подтверждение известной из геометрии теоремы: биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны.

Задача 6, 2 (для самостоятельного решения). Найти уравнение биссектрисы угла между прямыми

$$4x + 2y + 7 = 0 \text{ и } 2x - 4y + 15 = 0.$$

Ответ. Уравнение биссектрис получаем в виде

$$\frac{4x + 2y + 7}{\sqrt{20}} = \pm \frac{2x - 4y + 15}{\sqrt{20}}.$$

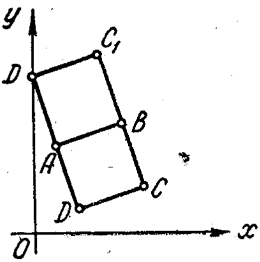
После упрощений получаем уравнения биссектрис в виде

$$x + 3y - 4 = 0,$$

$$3x - \quad + 11 = 0.$$

Задача 6, 3 (для самостоятельного решения). Найти уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, заданного вершинами

$$A\,(0, 0);\ B\,(3, -1);\ C\,(4, 7).$$



Фиг. 6,2.

Указание. Найдите сначала уравнения сторон треугольника. Получите такие уравнения:

$$(AB)\ x + 3y = 0, \quad (AC)\ 7x - 4y = 0,$$

$$(BC)\ 8x - y - 25 = 0.$$

Уравнение биссектрисы угла A: $(7\sqrt{10} - \sqrt{65})x - (4\sqrt{10} + 3\sqrt{65})y = 0$.

Уравнение биссектрисы угла B: $(8\sqrt{10} + \sqrt{65})\,x + (3\sqrt{65} - \sqrt{10})\,y - 25\sqrt{10} = 0$.

Уравнение биссектрисы угла C: $3x - y - 5 = 0$.

Задача 6, 4. Даны две смежные вершины квадрата $A\,(1, 4)$ и $B\,(4, 5)$. Найти две другие (фиг. 6, 2).

Решение. Очевидно, что задача допускает два решения, так как искомые вершины могут находиться по разные стороны отрезка AB. Уравнение стороны квадрата AB будет таким: $x - 3y + 11 = 0$, а ее длина равна $\sqrt{10}$. Теперь через точки A (1, 4) и B (4, 5) проведем прямые, перпендикулярные AB, и на каждой из этих прямых определим по две точки, расстояние которых от AB равно $\sqrt{10}$ (у квадрата все стороны равны). Координаты этих точек и будут искомыми.

Уравнения прямых, перпендикулярных к AB и проходящих через концы отрезка AB, будут такими:

$$(AD)\ 3x + y - 7 = 0, \quad (BC)\ 3x + y - 17 = 0.$$

На каждой из этих прямых найдем две точки, находящиеся от AB на расстоянии, равном $\sqrt{10}$, причем для одной из точек отклонение от AB будет положительным, для другой — отрицательным.

Обозначим координаты точки D через x_1 и y_1. Так как эта точка лежит на прямой AD, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т. е. имеет место уравнение

$$3x_1 + y_1 - 7 = 0. \qquad (A)$$

Второе уравнение, связывающее x_1 и y_1, найдем, определяя отклонение этой точки от прямой AB. Приведя уравнение AB к нормальному виду и взяв отклонение равным $\pm\sqrt{10}$, получим

$$\pm\sqrt{10} = \frac{x_1 - 3y_1 + 11}{-\sqrt{10}},$$

а отсюда будем иметь два уравнения:

$$x_1 - 3y_1 + 1 = 0 \text{ и } x_1 - 3y_1 + 21 = 0.$$

Объединяя каждое из этих уравнений с уравнением (A), получим две системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + y_1 - 7 &= 0 \\ x_1 - 3y_1 + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} 3x_1 + y_1 - 7 &= 0 \\ x_1 - 3y_1 + 21 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Из первой системы уравнений $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; из второй — $x_1 = 0$; $y_1 = 7$. Таким образом, вершина D может иметь координаты (0, 7) или (2, 1).

Точно так же найдем, что четвертая вершина C квадрата может иметь координаты (5, 2) или (3, 8)

Эту задачу можно решить и иначе. Используйте указания, которые даются ниже, и самостоятельно решите задачу другим способом:

1) Найдите длину d стороны AB.

2) Диагональ квадрата BD будет равна $d\sqrt{2}$.

3) Напишите формулу для определения расстояния от точки D до точки A и от точки D до точки B. Вы получите два уравнения, из которых и определятся координаты точки D.

4) Найдите координаты средины диагонали BD.

5) Зная координаты этой точки и координаты точки A, пользуясь формулами для определения координат точки, делящей отрезок пополам, определите и координаты точки C.

Задача 6, 5. Найти уравнение прямой, параллельной прямой

$$2x + 3y + 6 = 0$$

и отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв. единицам.

Решение. Обозначим отрезки, отсекаемые искомой прямой на координатных осях Ox и Oy, соответственно через a и b. Тогда имеем

$$3 = \frac{1}{2}ab, \text{ или } ab = 6. \qquad (A)$$

Уравнение семейства прямых, параллельных данной, запишется в виде $2x + 3y + C = 0$. Отрезки, отсекаемые этой прямой на осях координат, равны

$$a = -\frac{C}{2}, \quad b = -\frac{C}{3}.$$

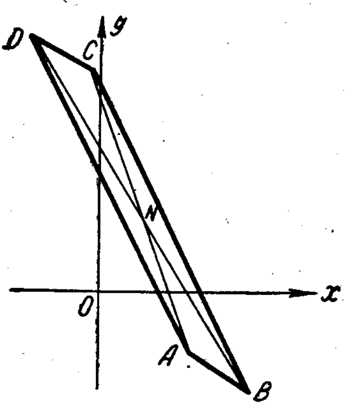
Подставляя a и b в (A), получим

$$\left(-\frac{C}{2}\right)\left(-\frac{C}{3}\right) = 6,$$

откуда

$$\frac{C^2}{6} = 6, \; C^2 = 36, \quad C_1 = 6, \quad C_2 = -6,$$

и искомая прямая имеет уравнение $2x + 3y + 6 = 0$, или $2x + 3y - 6 = 0$. Среди только что найденных прямых есть данная: $2x + 3y + 6 = 0$. Таким образом, данная прямая удовлетворяет требованию задачи; этому требованию удовлетворяет также и найденная прямая $2x + 3y - 6 = 0$.



Фиг. 6,3.

Задача 6, 6. Даны уравнения двух сторон параллелограмма

$$x + 2y + 1 = 0 \quad (AB)$$
$$2x + y - 3 = 0 \quad (AD)$$

и точка пересечения его диагоналей $N(1, 2)$. Найти уравнения двух других сторон этого параллелограмма (фиг. 6, 3).

При решении, замечая, что данные стороны параллелограмма не параллельны, будем следовать такому плану:

1) найдем координаты точки A пересечения данных сторон;

2) зная координаты точек A и N, найдем координаты точки C, что мы легко сможем сделать по формуле определения координат средины отрезка;

3) через найденную точку C проведем сначала прямую, параллельную AD, а потом прямую, параллельную AB.

4) Определим координаты точки A, как точки пересечения прямых AB и AD, и получим, что

$$x_A = \frac{7}{3}; \quad y_A = -\frac{5}{3},$$

т. е.

$$A\left(\frac{7}{3}; \; -\frac{5}{3}\right).$$

5) Формулы для определения координат средины отрезка в данном случае запишутся так:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_N = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

По этим формулам получим

$$x_C = -\frac{1}{3}, \quad y_C = \frac{17}{3}.$$

Итак, точка $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{17}{3}\right)$.

6) Через точку C проведем прямую, параллельную AD, и получим, что уравнение стороны BC будет таким:

$$2x + y - 5 = 0.$$

Уравнение стороны CD

$$x + 2y - 11 = 0.$$

Задача 6, 7. Найти координаты точки P, равноудаленной от точек $M_1(4, -3)$ и $M_2(2, -1)$ и отстоящей от прямой $2x + y - 1 = 0$ на расстоянии, равном 2 ед. масштаба.

Указание. Обозначим координаты искомой точки P через x_1 и y_1; из условия, что $M_1P = M_2P$, получаем

$$x_1 - y_1 = 5.$$

Это первая зависимость между x_1 и y_1. Вторую же зависимость между ними найдем из условия, что искомая точка находится на расстоянии 2 ед. масштаба от прямой $2x + y - 1 = 0$; получим

$$2 = \frac{2x_1 + y_1 - 1}{\pm\sqrt{5}}.$$

Отсюда два уравнения, связывающие x_1 и y_1, имеют вид

$$2x_1 + y_1 - 1 - 2\sqrt{5} = 0,$$

или

$$2x_1 + y_1 - 1 + 2\sqrt{5} = 0.$$

Каждое из этих уравнений следует решить совместно с ранее полученным уравнением $x_1 - y_1 = 5$. Задача допускает два решения:

$$x_1 = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{5};$$

$$y_1 = -3 + \frac{2}{3}\sqrt{5},$$

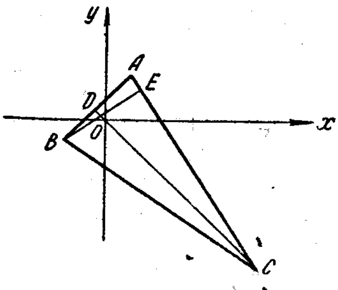
или

$$x_1 = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{5}; \qquad y_1 = -3 - \frac{2}{3}\sqrt{5}.$$

Задача 6, 8. Даны уравнения высот треугольника $2x-3y+1=0$ и $x+y=0$ и координаты одной из его вершин $A(1,2)$. Найти уравнения сторон треугольника.

Решение. Точка $A(1,2)$ не принадлежит данным в условии высотам треугольника, так как ее координаты не удовлетворяют их уравнениям: $2\cdot1-3\cdot2+1\neq0$ и $1+2\neq0$. Отсюда следует, что высоты, данные в задаче, проведены из двух других вершин треугольника B и C (фиг. 6, 4).

Назовем их CD и BE, $CD\perp AB$, $BE\perp AC$. Пусть высота CD имеет уравнение $x+y=0$, а уравнение высоты BE $2x-3y+1=0$. Так как $AC\perp BE$, то уравнение AC мы найдем из уравнения семейства прямых, перпендикулярных BE, приняв во внимание, что искомая прямая проходит через данную точку $A(1,2)$.



Фиг. 6,4.

Сторона AC имеет уравнение $3x+2y-7=0$. Уравнение прямой AB найдем, как уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ перпендикулярно CD. Оно имеет вид

$$x-y+1=0.$$

Теперь следует найти координаты точек B и C:

$$x_B=-2;\quad y_B=-1;$$
$$x_C=7;\quad y_C=-7.$$

Уравнение стороны BC $2x+3y+7=0$.

Таким образом, уравнения всех трех сторон треугольника найдены.

Задача 6, 9 (для самостоятельного решения). Даны две вершины треугольника $A(2,1)$ и $B(4,9)$ и точка пересечения его высот $N(3,4)$. Найти уравнение сторон треугольника.

Ответ.

$$(AB)\quad 4x-y-7=0,$$
$$(BC)\quad x+3y-31=0,$$
$$(AC)\quad x+5y-7=0.$$

Задача 6. 10 (для самостоятельного решения). Даны координаты средин сторон треугольника — $A(1,2)$, $B(7,4)$, $C(3,-4)$. Найти уравнения сторон треугольника (фиг. 6,5).

Ответ. 1) $2x-y=0$; 3) $x-3y-15=0$.

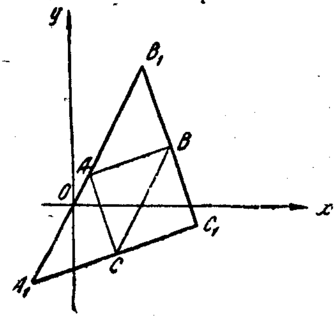
2) $3x+y-25=0$;

Задача 6, 11. Даны уравнения сторон треугольника $x+y-1=0\,(AB)$ и $y+1=0\,(BC)$ и точка $N(-1, 0)$ пересечения его медиан. Найти уравнение третьей стороны AC (фиг. 6, 6).

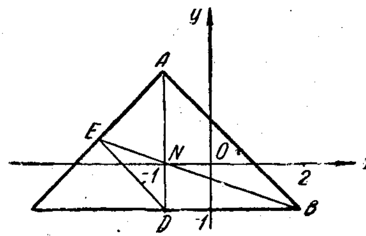
Ответ. $x-y+3=0$.

Решение задач, которыми заканчиваются упражнения, по теме «Прямая линия», связано с уравнением пучка прямых. Перед решением этих задач следует изучить § 23 из учебника Н. В. Ефимова или § 11 главы III учебника И. И. Привалова.

Задача 6, 12. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x-y-1=0$ и $x+2y-2=0$ и точку $M(-1, 1)$, не находя точки пересечения данных прямых.



Фиг. 6,5.



Фиг. 6,6.

Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых $Ax+By+C=0$ и $A_1x+B_1y+C_1=0$, записывается так:

$$Ax+By+C+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0; \qquad (6,\ 1)$$

в нашем случае оно будет иметь вид

$$x-y-1+\lambda(x+2y-2)=0. \qquad (A)$$

Из этого пучка надо выделить прямую, проходящую через точку $M(-1, 1)$. Подставляя в уравнение (A) координаты точки M вместо текущих координат, получим $\lambda=-3$.

Подставив это значение λ в уравнение (A), будем иметь $x-y-1-3(x+2y-2)=0$.

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, находим уравнение искомой прямой

$$2x+7y-5=0.$$

Задача 6, 13. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $x+y-1=0$ и $x+2y+1=0$ и отсекает на отрицательной части оси Oy отрезок в 2 ед. масштаба.

Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых, имеет вид (6, 1).

В нашем случае оно запишется так:

$$x+y-1+\lambda(x+2y+1)=0. \qquad (B)$$

Так как прямая на отрицательной части оси Oy отсекает отрезок в 2 ед. масштаба, то прямая проходит через точку $(0, -2)$. Подставляя координаты этой точки вместо текущих координат в (B), получим $\lambda=-1$, а уравнение искомой прямой будет иметь вид

$$y+2=0.$$

Задача 6, 14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+2y-11=0$ и $2x-y-2=0$ на расстоянии 5 ед. масштаба от начала координат.

Решение. Уравнение пучка прямых с центром пучка в точке пересечения данных прямых имеет вид $x+2y-11+\lambda(2x-y-2)=0$,

или

$$(1+2\lambda)x+(2-\lambda)y-(11+2\lambda)=0. \qquad (A)$$

Нормирующий множитель равен

$$N=\frac{1}{\pm\sqrt{(1+2\lambda)^2+(2-\lambda)^2}}.$$

Умножая на нормирующий множитель уравнение (A) и принимая во внимание, что в нормальном уравнении прямой абсолютная величина свободного члена равна расстоянию прямой от начала координат, для определения λ получаем уравнение

$$\frac{|11+2\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda^2+(2-\lambda)^2}}=5, \text{ откуда } \lambda=\frac{2}{11}.$$

Искомое уравнение: $3x+4y-25=0$.

Задача 6, 15 (для самостоятельного решения). Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x+5y+8=0$ и $3x-4y-7=0$ под углом в 45° к прямой $y=4x+3$.

Ответ. $69x-115y-199=0$ и $115x+69y+99=0$.

Задача 6, 16 (для самостоятельного решения). Через точку $M(1, -1)$ провести прямую так, чтобы средина ее отрезка между параллельными прямыми $x+2y-1=0$ (I) и $x+2y-3=0$ (II) лежала на прямой $x-y-1=0$ (фиг. 6, 7).

Ответ. $4x-y-5=0$.

Задача 6, 17 (для самостоятельного решения). Луч света, проходящий через точку $C(2,3)$, отражается от прямой (AB) $x+y+1=0$ и проходит после этого через точку $(1,1)$. Найти уравнения падающего и отраженного лучей (фиг. 6, 8).

Ответ. Уравнение падающего луча

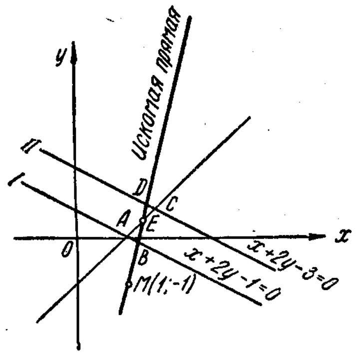
$$5x-4y+2=0;$$

уравнение отраженного луча

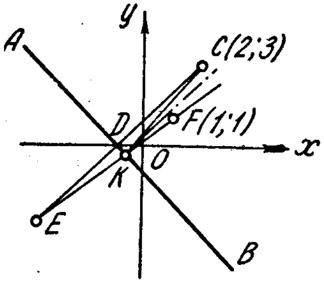
$$4x - 5y + 1 = 0.$$

Задача 6, 18 (для самостоятельного решения). Луч света, проходящий через точку $C(1,2)$, отражается от прямой (AB) $x + 5y + 1 = 0$ и проходит через точку $F(-1,3)$.

Найти уравнение луча падающего и отраженного.



Фиг. 6,7.



Фиг. 6,8.

Ответ. Уравнение отраженного луча

$$73x + 14y + 31 = 0;$$

уравнение падающего луча

$$62x - 41y + 20 = 0.$$

Этим мы заканчиваем упражнения, связанные с теорией прямой линии на плоскости.

СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Полярная система координат. Переход от полярных координат к декартовым и обратно. Построение кривой, определяемой уравнением в полярных координатах.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие посвящается полярной системе координат, упражнениям на переход от декартовой системы координат к полярной и обратно, а также на построение кривой по ее уравнению в полярных координатах.

В полярной системе координат основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение точки на плоскости, являются точка O — полюс и ось OP, которая называется полярной осью.

Если M — произвольная точка плоскости, не совпадающая с полюсом O, то ее положение на плоскости вполне определено заданием двух чисел: r — ее расстояния от полюса, выраженного в ед. масштаба, и φ — угла, на который следует повернуть полярную ось против часовой стрелки, чтобы она совпала с лучом OM. Числа r и φ называются полярными координатами точки M. Из них первой координатой считается r, а второй φ. Координата r называется полярным радиусом точки M (иногда радиусом-вектором точки M), а координата φ — ее полярным углом*. Полярные координаты точки записываются в скобках справа от обозначения ее, причем на первом месте в скобках записывается координата r, а на втором — координата φ, например, $M(r, \varphi)$. Полярный угол φ считается положительным, если он отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от полярной оси по часовой стрелке.

В определенной таким образом полярной системе координат полярный радиус r — всегда величина положительная или равная нулю ($r \geqslant 0$), так как под r понимается расстояние от полюса O до точки M, а расстояние, как и всякая длина, не может быть отрицательным.

Однако на практике удобнее пользоваться такой системой полярных координат, в которой полярный радиус r может принимать и отрицательные значения. Система полярных координат, в которой полярный радиус r может принимать любые значения (положительные, отрицательные и равные нулю), называется **обобщенной** системой полярных координат. Этой системой мы и будем пользоваться.

Если точка M имеет координаты $+r$ и φ: $M(+r, \varphi)$, то она имеет также и координаты $-r$ и $\varphi+\pi$; $M(-r, \varphi+\pi)$, так как угол $\varphi+\pi$ характеризует направление полярного радиуса, прямо противоположное тому, которое соответствует углу φ (см. задачи 7,3 и 7,4).

Отметим, что какой бы из этих двух систем полярных координат мы ни пользовались, всегда паре чисел r и φ соответствует на плоскости единственная точка.

Если полюс полярной системы координат находится в начале прямоугольной системы координат, а положительная полуось Ox совпадает с полярной осью, ось же Oy перпендикулярна оси Ox и направлена так, что ей соответствует полярный угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то по известным полярным координатам точки ее прямоугольные координаты x и y вычисляются из формул

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi^{**}. \tag{7, 1}$$

* Полярный угол измеряется в радианах.

** Везде в дальнейшем, если не будет оговорено, предполагается именно такое расположение полярной и прямоугольной систем координат.

Если же известны прямоугольные координаты x и y точки, ее полярные координаты определяются по формулам

$$r = \pm\sqrt{x^2+y^2};\quad \sin\varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}};\quad \cos\varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}};\tag{7, 2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.\tag{7, 3}$$

Как видно из (7, 2), у корня в формуле для определения r стоят два знака — плюс и минус, что соответствует обобщенной системе полярных координат, а потому и в формулах для определения $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ перед корнем стоят два знака (рекомендуется ознакомиться в учебнике И. И. Привалова с замечанием к § 11, гл. 1). Два знака в формуле для определения r появились потому, что r находится из выражения $r^2 = x^2 + y^2$. Если за r оставляется право быть только величиной положительной или нулем, то $r = +\sqrt{x^2+y^2}$. Если же r, как это имеет место в обобщенной системе полярных координат, может быть и отрицательной величиной, то из $r^2 = x^2 + y^2$ следует, что $r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$.

В заключение укажем, как вести вычисления по формулам (7, 2), чтобы по известным прямоугольным координатам точки найти ее полярные координаты. Прежде всего следует определить r, выбрав перед корнем любой знак, затем вычислить $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, сохранив перед корнем в формулах (7, 2) уже выбранный знак, и по знакам $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ установить четверть, в которой находится полярный угол φ. Само вычисление угла φ по таблицам тригонометрических функций следует вести по формуле (7, 3).

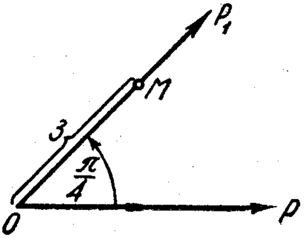
Укажем также, как следует в полярной системе координат построить точку M по ее полярным координатам r и φ. По заданному полярному углу φ строим ось, проходящую через полюс под углом φ к полярной оси, причем положительное направление построенной оси должно совпадать с тем направлением, которое имела бы полярная ось, если бы ее повернули против часовой стрелки на угол φ. На этой оси откладываем отрезок длиной $|r|$ от полюса O в положительном направлении построенной оси, если $r > 0$, и в отрицательном — если $r < 0$.

Задача 7, 1. Построить точку M с координатами $\left(3, +\frac{\pi}{4}\right)$ в полярной системе координат (фиг. 7, 1).

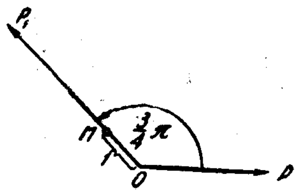
Решение. Проведем через полюс O ось OP_1 под углом $\frac{\pi}{4}$ к полярной оси OP (положительное направление указано стрелкой) и отложим от полюса в положительном направлении оси OP_1 отрезок OM, равный трем единицам масштаба. Конец M этого отрезка и будет искомой точкой.

Задача 7, 2. Построить в полярной системе координат точку $M\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение. Проведем через полюс O ось OP_1 под углом $\frac{3\pi}{4}$ к полярной оси (положительное направление указано стрелкой на фиг. 7, 2) и отложим от полюса в положительном направлении оси OP_1 отрезок OM, равный одной ед. масштаба. Конец этого отрезка M и будет искомой точкой



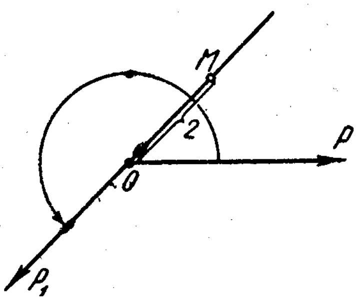
Фиг. 7,1.



Фиг. 7,2.

Задача 7, 3. Построить в полярной системе координат точку $M\left(-2, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Решение. Проведем через полюс O ось OP_1 под углом $\frac{5}{4}\pi$ к полярной оси (положительное направление на ней указано стрелкой на фиг. 7, 3) и отложим от полюса в отрицательном направлении оси OP_1 отрезок OM, равный двум ед. масшт. Конец этого отрезка и будет искомой точкой.



Фиг. 7,3.

Задача 7, 4 (для самостоятельного решения). В полярной системе координат построить точку $\left(-4, \frac{7}{4}\pi\right)$.

Задача 7, 5. Прямоугольные координаты точки $A\,(2, 3)$. Найти ее полярные координаты.

Решение. По формулам (7, 2) получаем $r = \pm\sqrt{13}$. Выбираем по нашему усмотрению знак перед корнем, например, плюс. Тогда $r = +\sqrt{13}$, $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Так как $\sin\varphi > 0$ и $\cos\varphi > 0$, то угол φ находится в первой четверти. На основании формулы (7, 3) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{2}$; по таблицам находим, что $\varphi=0{,}98$. Полярные координаты точки A найдены: $r=\sqrt{13}$, $\varphi=0{,}98$ или $A(\sqrt{13};\ 0{,}98)$. Постройте точку. Если бы перед корнем был выбран знак минус, то тогда $r=-\sqrt{13}$; $\sin\varphi=-\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt{13}}$, и так как $\sin\varphi<0$ и $\cos\varphi<0$, то угол φ находится в третьей четверти. Зная, что $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{2}$, получаем $\varphi=4{,}12$, а точка A имеет полярные координаты $r=-\sqrt{13}$, $\varphi=4{,}12$: $A(-\sqrt{13},\ 4{,}12)$. Постройте точку по этим координатам и убедитесь, что она совпала с ранее построенной.

Задача 7, 6 (для самостоятельного решения). Найти полярные координаты точки A, прямоугольные координаты которой $(-1,\ -1)$.

Ответ. $A\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right)$ или $A\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{4}\pi\right)$.

Задача 7, 7 (для самостоятельного решения). Прямоугольные координаты точки $A\ (2,\ -2)$. Найти ее полярные координаты.

Ответ. $A\left(2\sqrt{2},\ \frac{7}{4}\pi\right)$ или $A\left(-2\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$.

Задача 7, 8. Найти прямоугольные координаты точки A, полярные координаты которой $\left(2,\ \frac{1}{4}\pi\right)$.

Решение. По формулам перехода (7, 1)

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

получаем

$$x=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},\quad x=\sqrt{2},$$

$$y=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2},\quad y=\sqrt{2}.$$

Задача 7, 9. Найти прямоугольные координаты точки, полярные координаты которой $A\left(-3,\ \frac{5}{4}\pi\right)$.

Решение.

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,$$

$$x=-3\cos\frac{5}{4}\pi,\qquad y=-3\sin\frac{5}{4}\pi,$$

$$x=\frac{3\sqrt{2}}{2},\qquad y=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 7, 10 (для самостоятельного решения). Найти прямоугольные координаты точки A, полярные координаты которой $\left(2,\ \frac{3}{2}\pi\right)$.

Ответ. $x=0$; $y=-2$.

Задача 7, 11. Составить уравнение прямой линии в полярных координатах.

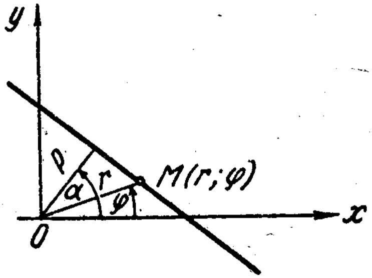
Решение. Поместим полюс полярной системы координат в начало прямоугольной системы координат, полярную ось совместим с положительной полуосью абсцисс (фиг. 7, 4).

Возьмем уравнение прямой в нормальном виде

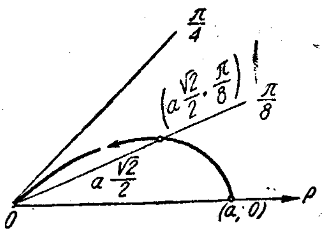
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Формулы перехода (7, 1) имеют вид

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$



Фиг. 7,4.



Фиг. 7,5.

Подставив в это уравнение значения x и y из формулы (7, 1), получим $r\cos\varphi\cdot\cos\alpha + r\sin\varphi\cdot\sin\alpha - p = 0$,

или $\qquad r(\cos\varphi\cdot\cos\alpha + \sin\varphi\cdot\sin\alpha) - p = 0,$

откуда $\qquad r\cos(\varphi - \alpha) = p,$

и окончательно $\qquad r = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$

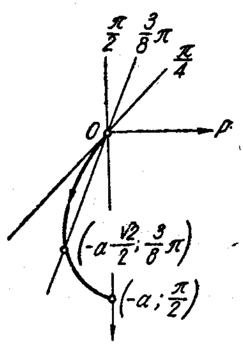
В этом уравнении постоянными величинами являются p и α, величины же r и φ — переменные: это текущие полярные координаты точки на прямой (последняя формула может быть получена также из чертежа).

Задача 7, 12. Построить кривую $r = a\cos 2\varphi$ и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

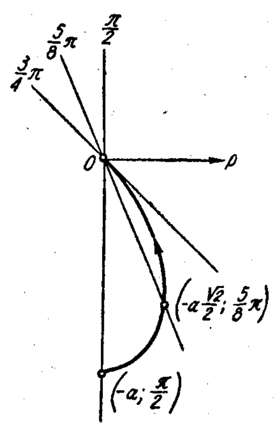
Решение. Будем давать значения полярному углу φ от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через промежуток $\alpha = \frac{\pi}{8}$ и вычислим соответствующие значения r. Найденные значения поместим в таблицу. Примем произвольный отрезок за единицу масштаба, которой мы будем пользоваться при построении r. По значениям r и φ из таблицы построим точки, соответствующие каждой паре чисел r и φ, и соединим их плавной кривой.

φ	2φ	$r = a\cos 2\varphi$
0	0	a
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	π	$-a$
$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	2π	a

φ	2φ	$r = a\cos 2\varphi$
$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	0
$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	3π	$-a$
$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	0
$\frac{15\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	4π	a



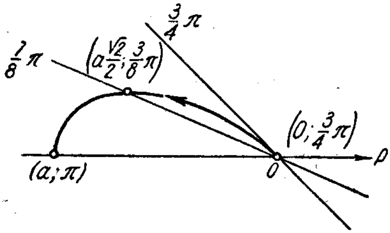
Фиг. 7,6.



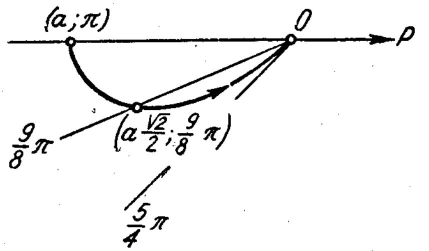
Фиг. 7,7.

Построение кривой показано на фиг. 7,5 — 7,12.

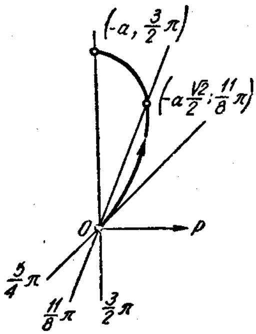
На фиг. 7, 13 кривые, построенные на различных этапах, соединены в одну. Полученная кривая называется четырехлепестковой розой.



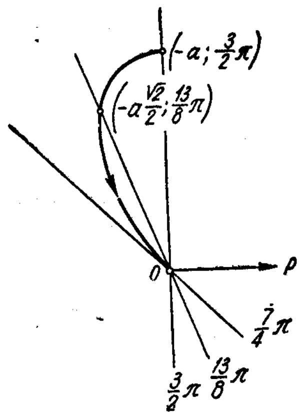
Фиг. 7,8.



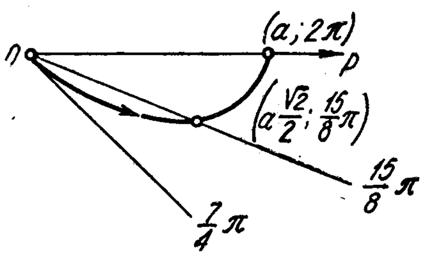
Фиг. 7,9.



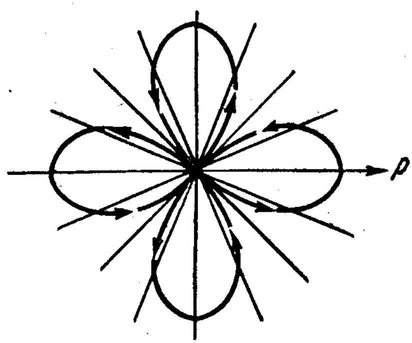
Фиг. 7,10.



Фиг. 7,11.



Фиг. 7,12.



Фиг. 7,13.

Теперь найдем уравнение четырехлепестковой розы в прямоугольной системе координат, причем напоминаем, что начало прямоугольной системы координат помещено в полюс полярной системы координат, а ось абсцисс направлена вдоль полярной оси.

Учитывая, что $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, уравнение четырехлепестковой розы $r = a\cos 2\varphi$ перепишем в виде $r = a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$. Подставляя сюда формулы перехода (7, 2), получим

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = a\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right),$$

или

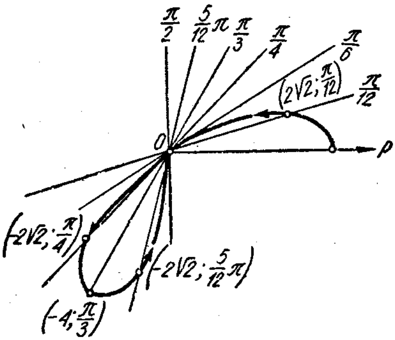
$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = a\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Отсюда

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2) = a(x^2-y^2).$$

Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получим окончательно

$$(x^2+y^2)^3 = a^2(x^2-y^2)^2.$$



Фиг. 7,14.

Задача 7, 13 (для самостоятельного решения). Построить кривую

$$r = 4\cos 3\varphi$$

и найти ее уравнение в прямоугольных координатах при условии, что начало прямоугольных координат совпадает с полюсом полярной системы координат, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью.

Указание. Углу φ придавать значения от 0 до 2π через промежуток $\alpha = \frac{\pi}{12}$, т. е. значения

$$0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \ldots$$

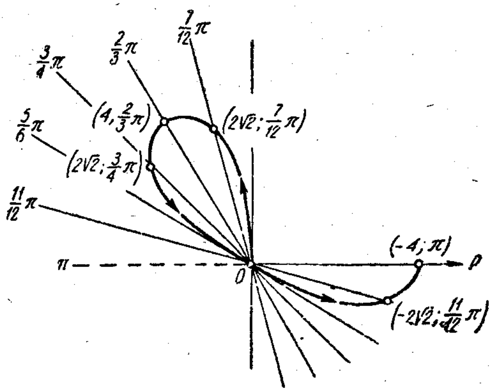
Постройте точки с координатами (r, φ) и соедините их плавной кривой (фиг. 7, 14—7, 18). Точки кривой для значений $\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (фиг. 7, 16 и 7, 17) совпадут с построенными на фиг. 7, 14 и 7, 15.

Кривая $r = 4\cos 3\varphi$ называется трехлепестковой розой (фиг. 7, 18). Для преобразования уравнения этой кривой к прямоугольным координатам надо выразить $\cos 3\varphi$ через $\cos\varphi$:

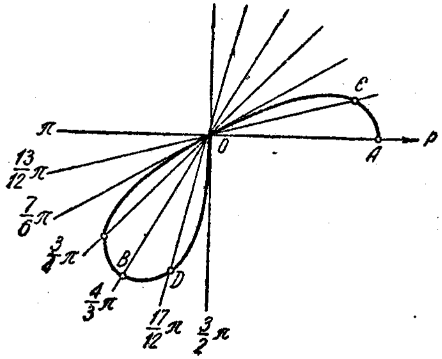
$$\cos 3\varphi = \cos(2\varphi + \varphi) = \cos 2\varphi \cdot \cos\varphi - \sin 2\varphi \cdot \sin\varphi$$

(использовать, что $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi$, и учесть, что $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$). Окончательно

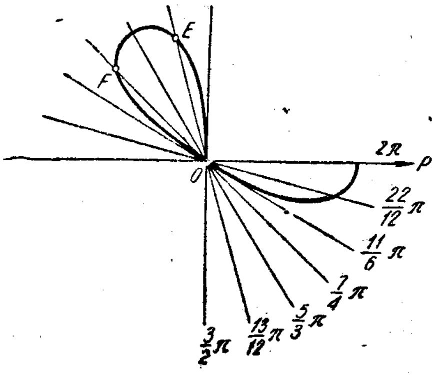
$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$



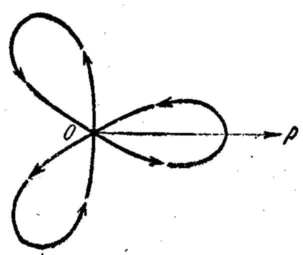
Фиг. 7,15.



Фиг. 7,16.



Фиг. 7,17.



Фиг. 7,18.

Уравнение кривой $r = 4\cos 3\varphi$ перепишется теперь в виде

$$r = 4(4\cos^2\varphi - 3\cos\varphi),$$

или

$$r = 16\cos^3\varphi - 12\cos\varphi.$$

Применить формулы (7, 2).

Ответ. $(x^2 + y^2)^2 = 4x(x^2 - 3y^2)$.

Задача 7, 14 (для самостоятельного решения).

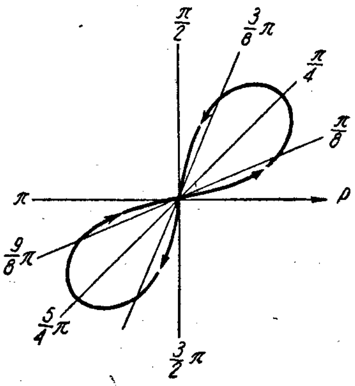
Построить кривую $r = 5\sin 3\varphi$ и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат, полагая, что начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом полярной системы координат, а положительная полуось абсцисс — с полярной осью.

Задача 7, 15 (для самостоятельного решения). Построить лемнискату Бернулли

$$r^2 = 6\sin 2\varphi$$

и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат при расположении осей координат, указанном в предыдущей задаче.

Ответ. Кривая изображена на фиг. 7, 19.



Фиг. 7,19.

Задача 7, 16. Построить кривую

$$(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3 \quad (a > 0).$$

Указание. Найти полярное уравнение кривой. Поместить полюс в начало прямоугольной системы координат, а полярную ось совместить с положительной частью оси абсцисс. Воспользоваться формулами (7, 1). Уравнение данной кривой в полярных координатах имеет вид

$$r = 2a\cos^3\varphi.$$

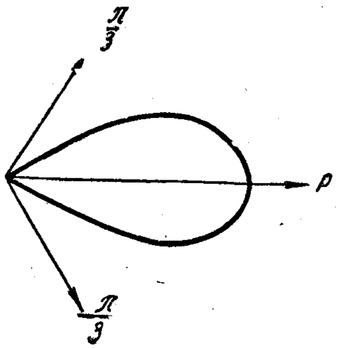
Из рассмотрения данного уравнения мы заключаем, что при любых значениях x и y его левая часть не отрицательна, так как она содержит квадрат суммы $x^2 + y^2$. Значит, и правая его часть $2ax^3$ $(a > 0)$ не может быть отрицательной, т. е. x не может принимать отрицательных значений. Это говорит о том, что вся кривая будет расположена вправо от оси Oy.

Так как замена в данном уравнении y на $-y$ не изменяет уравнения, то очевидно, что кривая расположена симметрично относительно оси абсцисс. Значит, достаточно построить кривую в первой четверти, а затем симметричную ей часть — в четвертой четверти. Эти соображения говорят о том, что полярному углу φ в уравнении данной кривой $r = 2a\cos^3\varphi$ следует придавать значения только от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, это простое исследование помогло нам значительно упростить вычисления, так как теперь, вместо того, чтобы придавать полярному углу φ значения от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, мы ограничимся значениями для φ только из первой четверти (кривая изображена на фиг. 7, 20).

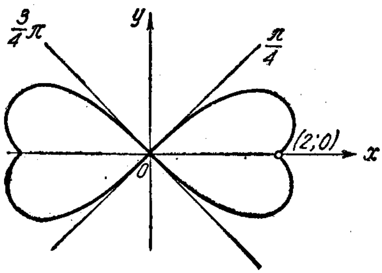
Задача 7, 17 (для самостоятельного решения). Построить кривую

$$x^6 = 4(x^4 - y^4).$$

Указание. Прежде всего усматриваем, что замена x на $-x$ и y на $-y$ не изменяет уравнения кривой. Это говорит о том, что кривая расположена симметрично относительно координатных осей. Поэтому достаточно построить кривую только в первой четверти, а потом, учитывая симметрию ее относительно координатных осей, построить ее в трех остальных четвертях.



Фиг. 7,20.



Фиг. 7,21.

Перейдем к полярной системе координат, расположив ее так, как было указано в предыдущей задаче. Используя формулы (7, 1), получим уравнение кривой в полярной системе координат

$$r = \frac{2\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos^3 \varphi}.$$

Так как полярный радиус r может принимать только действительные значения, то $\cos 2\varphi$, стоящий под знаком корня в полученном уравнении, не может быть отрицательным, т. е. должно быть $\cos 2\varphi \geqslant 0$. Это значит, что угол 2φ должен находиться или в первой, или в четвертой четверти. Но мы уже выяснили, что достаточно построить кривую только в первой четверти, а поэтому будем рассматривать значения 2φ, удовлетворяющие условию $0 \leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что для построения кривой в первой четверти углу φ следует придавать значения от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Эскиз кривой показан на фиг. 7, 21.

Задача 7, 18 (для самостоятельного решения). Построить спираль Архимеда $r = a\varphi$ $(a > 0)$.

Задача 7, 19 (для самостоятельного решения). Построить кардиоиду

$$r = 2a(1 + \cos\varphi) \quad (a > 0).$$

Задача 7, 20 (для самостоятельного решения). Построить гиперболическую спираль

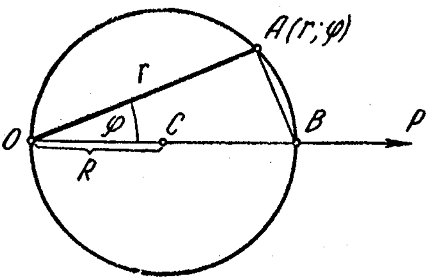
$$r = \frac{k}{\varphi} \quad (k > 0).$$

ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Составление уравнения кривой по ее геометрическим свойствам.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Составить уравнение линии на плоскости в выбранной системе координат — это значит составить такое уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты точек, которые на этой линии не лежат (это определение следует усвоить, так как оно неоднократно в дальнейшем используется).



Фиг. 8,1.

Для вывода уравнения линии поступают так:

1. Выбирают на плоскости систему координат.

2. На линии, уравнение которой выводится, берут произвольную точку. Координаты этой точки обозначают через x и y, если уравнение линии выводится в прямоугольных координатах, или через r и φ, если оно выводится в полярных координатах. Основываясь на заданном свойстве всех точек, лежащих на линии, составляют уравнение, связывающее координаты произвольной точки с некоторыми постоянными величинами, данными в задаче. Найденное уравнение и будет искомым.

Задача 8, 1. Составить уравнение окружности, проходящей через полюс системы координат, центр которой C лежит на полярной оси, а радиус равен R (фиг. 8, 1), и найти уравнение этой окружности в прямоугольных координатах.

Для вывода уравнения окружности, указанной в задаче, возьмем на окружности произвольную точку $A(r, \varphi)$ и соединим ее с точкой B — концом диаметра. Угол OAB — прямой, а потому, так как диаметр равен $2R$, из прямоугольного треугольника AOB получаем

$$r = 2R\cos\varphi.$$

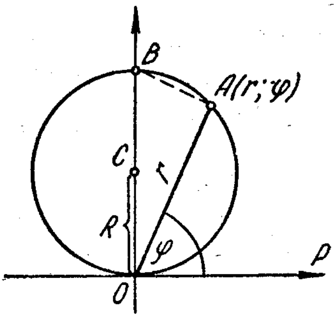
Это и будет искомое уравнение. Теперь преобразуем это уравнение к прямоугольным координатам. Используя формулы перехода (7, 2), будем иметь

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = 2R\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.$$

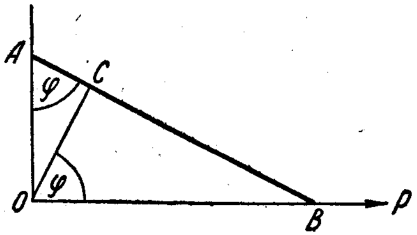
Умножая обе части уравнения на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, получим

$$x^2+y^2=2Rx, \text{ или } x^2+y^2-2Rx=0.$$

Задача 8, 2 (для самостоятельного решения). Найти уравнение окружности радиуса R, проходящей через полюс, центр которой C лежит на прямой, перпендикулярной полярной оси и проходящей через полюс (фиг. 8, 2). Найти уравнение этой окружности в прямоугольных координатах.



Фиг. 8,2.



Фиг. 8,3.

Ответ. Искомое уравнение в полярной системе координат

$$r=2R\sin\varphi.$$

Уравнение этой окружности в прямоугольных координатах

$$x^2+y^2-2Ry=0.$$

Задача 8, 3 (для самостоятельного решения) Найти уравнение окружности радиуса a, центр которой находится в полюсе. Написать уравнение этой окружности в прямоугольной системе координат.

Ответ. $r=a$; в прямоугольной системе координат

$$x^2+y^2=a^2.$$

Задача 8, 4. Отрезок AB неизменной длины $2l$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины угла на этот отрезок опущен перпендикуляр OC. Найти геометрическое место оснований таких перпендикуляров. Построить кривую и найти ее уравнение в прямоугольных координатах.

Решение. Поместим полюс полярной системы координат в вершину прямого угла, а полярную ось направим по одной из сторон прямого угла — например, по стороне OB (фиг. 8, 3).

Пусть точка C имеет полярные координаты r и φ. Тогда

$$\begin{aligned} BC &= r\operatorname{tg}\varphi \\ AC &= r\operatorname{ctg}\varphi \\ \hline BC + AC &= r(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi), \end{aligned}$$

но

$$BC + AC = 2l \text{ и } r(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi) = 2l,$$

а отсюда

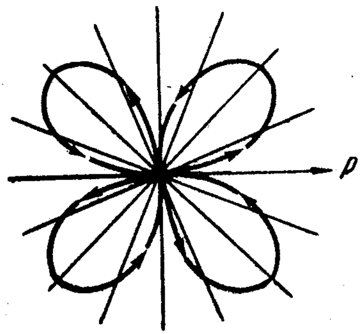
$$r\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = 2l,$$

$$r \cdot \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos\varphi} = 2l,$$

$$r \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\varphi} = 2l, \text{ или } r = l\sin 2\varphi.$$

Это и есть искомое уравнение. Значит, наше геометрическое место имеет уравнение

$$r = l\sin 2\varphi.$$



Фиг. 8,4.

Кривая — четырехлепестковая роза (фиг. 8, 4).

Теперь постройте кривую (полярному углу φ придавать значения от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через промежуток $\alpha = \frac{\pi}{8}$). Найдем уравнение этой кривой в прямоугольной системе координат. Уравнение кривой перепишем в виде $r = 2l\sin\varphi \cdot \cos\varphi$ ($\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \times \times \cos\varphi$). Используя формулы (7, 2) для перехода от полярной системы координат к прямоугольной, получим

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = 2l\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},$$

а отсюда, возводя в квадрат обе части равенства, будем иметь окончательно

$$(x^2 + y^2)^3 = 4l^2x^2y^2.$$

Сравнивая уравнение нашей кривой в прямоугольных координатах с ее уравнением в полярных координатах

$$r = l\sin 2\varphi,$$

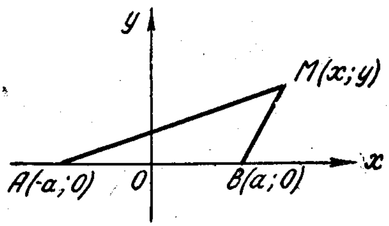
мы усматриваем, что последнее значительно проще. Кривая получается поворотом на 45° кривой, изображенной на фиг. 7, 13.

Задача 8, 5. Найти уравнение геометрического места точек, произведение расстояний которых до двух данных точек A и B есть величина постоянная, равная a^2. Длину AB считать равной $2a$.

Решение. Проведем вывод уравнения в прямоугольных координатах. Направим ось Ox по прямой, соединяющей A и B, как обычно, вправо, начало координат поместим в средине отрезка AB, ось Oy направим вверх по перпендикуляру к оси Ox. Длина отрезка AB по условию равна $2a$ ($AB = 2a$); тогда точки A и B будут иметь координаты: $A(-a, 0)$; $B(a, 0)$. Пусть точка M принадлежит кривой. Ее координаты обозначим через x и y (фиг. 8, 5).

Из условия задачи $AM \cdot BM = a^2$. По формуле расстояния между двумя точками

$$AM = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \quad BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$



Фиг. 8,5.

Значит,

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \times \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2.$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$[(x+a)^2 + y^2]\,[(x-a)^2 + y^2] = a^4,$$

или

$$[(x^2 + y^2 + a^2) + 2ax]\,[(x^2 + y^2 + a^2) - 2ax] = a^4;$$
$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4.$$

Упрощая, получаем

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Это и есть искомое уравнение.

Преобразуем теперь это уравнение к полярным координатам, поместив полюс полярной системы координат в начале прямоугольной системы координат, а полярную ось направим по положительной полуоси Ox. Подставляя в последнее уравнение значения x и y из формул перехода (7, 1), будем иметь

$$r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

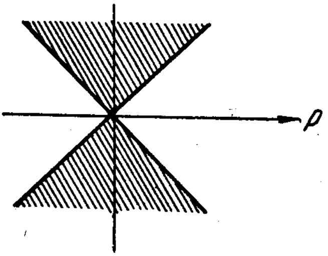
Замечая, что $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$, и сокращая на r^2, получим окончательно

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

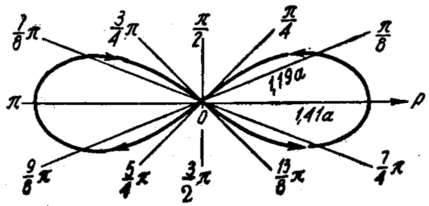
Кривая, определяемая этим уравнением, называется лемнискатой Бернулли. Постройте теперь эту кривую.

Так же, как в задаче 7, 12, составьте таблицу значений r по известным значениям φ, имея в виду, что так как полярный радиус может принимать только действительные значения, то кривая не может быть расположена в тех секторах, где полярный радиус имеет мнимые значения.

Это будет иметь место для значений φ от $\varphi = \frac{\pi}{4}$ до $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ и от $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ до $\varphi = \frac{7}{4}\pi$, а поэтому в этих секторах точек кривой нет. На фиг. 8, 6 эти секторы заштрихованы, а кривая изображена на фиг. 8, 7.



Фиг. 8,6.



Фиг. 8,7.

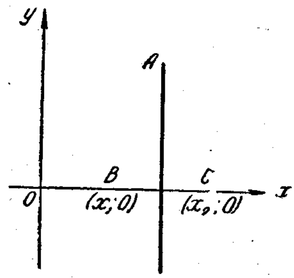
ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в составлении уравнений линий.

Это практическое занятие является продолжением предыдущего. Мы будем составлять уравнение линии по известному свойству, общему всем ее точкам.

Задача 9, 1. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

Решение. Возьмем прямоугольную систему координат и пусть две данные точки B и C лежат на оси абсцисс и имеют координаты $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ (фиг. 9, 1). Пусть точка A принадлежит искомому геометрическому месту. Обозначим ее координаты через x и y: $A(x, y)$.



Фиг. 9,1.

На основании формулы для определения расстояния между двумя точками

$$AB = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}, \quad AC = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2},$$

и значит, так как по условию $AB = AC$, мы можем написать, что

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}.$$

Это и есть уравнение искомого геометрического места.

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, будем иметь

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (x - x_2)^2 + y^2.$$

После очевидных упрощений получим

$$2x(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1);$$

сокращая на $x_2 - x_1$ ($x_2 - x_1 \neq 0$), имеем

$$2x = x_1 + x_2,$$

или

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Это уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox и проходящей через середину отрезка BC.

Итак, искомым геометрическим местом является прямая, перпендикулярная к отрезку BC, соединяющему данные точки, и проходящая через его средину.

Замечание. При решении задачи нам пришлось уничтожить радикалы в уравнении искомого геометрического места

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}, \qquad (A)$$

в результате чего было получено уравнение

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (B)$$

Из алгебры известно, что возведение обеих частей уравнения в квадрат может привести к уравнению, которое не равносильно (не эквивалентно) исходному. Это значит, что уравнение, полученное от возведения в квадрат обеих частей исходного уравнения, может иметь решения, не удовлетворяющие исходному уравнению, т. е. иметь так называемые «посторонние» корни. Поэтому всегда в тех случаях, когда обе части уравнения приходится возводить в квадрат, следует ставить вопрос об эквивалентности полученного и исходного уравнений.

В интересующем нас случае вопрос ставится так: не содержит ли линия (B) точек, которых нет на линии (A), т. е. таких, координаты которых не удовлетворяют уравнению (A) и таким образом не удовлетворяют исходному условию $AB = AC$.

Чтобы убедиться в том, что линия (B) не содержит точек, которых нет в линии (A), надо показать, что уравнение (B) может быть преобразовано в уравнение (A).

Произведя в обратном порядке операции, с помощью которых было получено уравнение (B), мы придем к уравнению

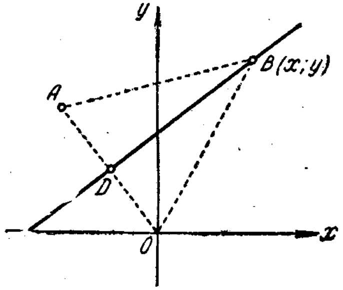
$$(x - x_1)^2 + y^2 = (x - x_2)^2 + y^2,$$

откуда следует, что

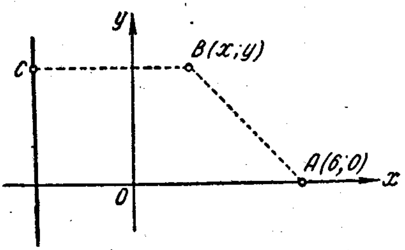
$$\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2} = \pm\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}, \qquad (C)$$

т. е. что $AB = \pm AC$; отсюда видно, что или $AB - AC = 0$, или $AB + AC = 0$.

Но $AB > 0$ и $AC > 0$, а следовательно, $AB + AC \neq 0$, так как сумма двух положительных величин не может быть равна нулю, а потому остается только одно равенство $AB - AC = 0$, т. е. $AB = AC$, и знак минус перед корнем в правой части уравнения (C) должен быть отброшен. Поскольку из уравнения (A) получается уравнение (B) и обратно — из уравнения (B) следует уравнение (A), то эти уравнения равносильны (эквивалентны). Таким образом, поставленный нами вопрос решен: линия (B) не содержит таких точек, которых нет на линии (A).



Фиг. 9,2.



Фиг. 9,3.

При решении следующих задач этого практического занятия нам придется часто обе части исходного уравнения возводить в квадрат. Учащийся должен знать, что всякий раз в таком случае перед ним должен возникать вопрос об эквивалентности полученного и исходного уравнений. Однако мы во всех последующих задачах этим заниматься не будем, а заметим только, что эквивалентность исходного и окончательного уравнений в этих задачах действительно имеет место.

Задача 9, 2 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от точки $A(-3, 4)$ (фиг. 9, 2).

Ответ. $6x - 8y + 25 = 0$.

Проверьте, что эта прямая перпендикулярна отрезку AO и проходит через его середину.

Задача 9, 3 (для самостоятельного решения). Найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от прямой $x = -4$ и точки $A(6, 0)$.

Указание. Пусть точка $B(x, y)$ принадлежит искомому геометрическому месту (фиг. 9, 3). По условию расстояния от точки B до прямой $x = -4$ и до точки $A(6, 0)$ между собою равны, т. е. $AB = BC$. По формуле для определения расстояния между двумя точками

$$AB = \sqrt{(x-6)^2 + y^2}, \text{ а } BC = x + 4$$

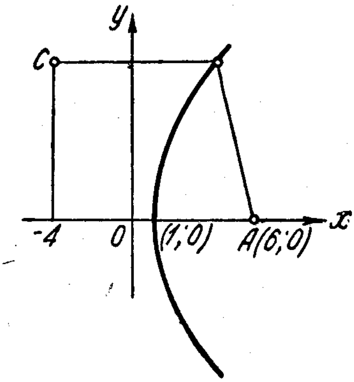
и

$$\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = x + 4.$$

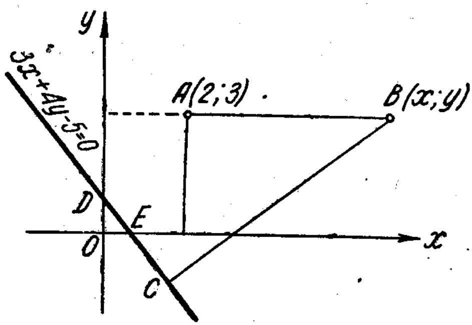
Ответ. $y^2 = 20(x-1)$. Эскиз кривой показан на фиг. 9, 4. Как увидим в дальнейшем, это — уравнение параболы, и значит, искомым геометрическим местом является парабола.

Задача 9, 4 (для самостоятельного решения). Определить траекторию точки, которая движется так, что ее расстояние от точки (2, 3) равно ее расстоянию до прямой $3x + 4y - 5 = 0$.

Указание. Пусть точка $B(x, y)$ принадлежит искомому геометрическому месту (фиг. 9, 5). По условию $BC = AB$. Расстояние BC от точки $B(x, y)$ до прямой $3x + 4y - 5 = 0$ найти по правилу определения расстояния от точки до прямой (см. задачу 5, 2). Получим $\frac{3x + 4y - 5}{5} =$
$= \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$.



Фиг. 9,4.



Фиг. 9,5.

Это и есть уравнение искомого геометрического места. Возводя в квадрат обе части уравнения*, освобождаясь от дробей и перенося все члены уравнения в его правую часть, получим окончательно

$$16x^2 - 24\,xy + 9y^2 - 70x - 110y + 300 = 0.$$

Геометрическое место, уравнение которого мы нашли, есть парабола.

Следует запомнить, что геометрическим местом точек, равноудаленных от данной точки и от данной прямой, является парабола.

Задача 9, 5 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, равноудаленных от прямой $x + y - 2 = 0$ и точки $(1, -1)$.

Ответ. Парабола $x^2 - 2xy + y^2 + 8y = 0$.

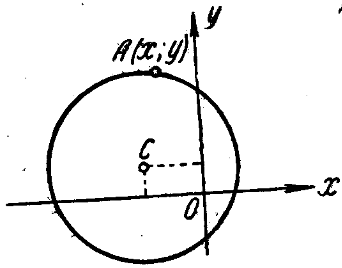
Задача 9, 6 (для самостоятельного решения). Найти уравнение траектории точки A, которая движется так, что ее расстояние от точки $C(-5, 2)$ всегда равно 7 (фиг. 9, 6).

---

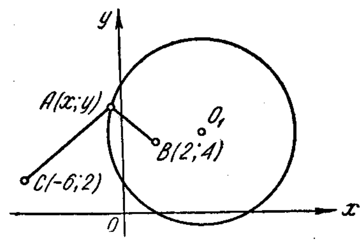
* По поводу возведения в квадрат обеих частей уравнения см. замечание к задаче 9, 1.

Ответ. Траектория — окружность $x^2+y^2+10x-4y-20=0$ с центром в точке $C(-5,\ 2)$ и радиус ее $R=7$.

Задача 9, 7. Найти траекторию точки A, которая движется так, что ее расстояние до точки $B(2,\ 4)$ в два раза меньше, чем до точки $C(-6,\ 2)$.



Фиг. 9,6.



Фиг. 9,7.

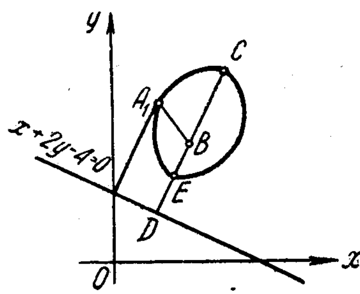
Указание. Обозначить координаты точки A, как всегда, через x и y (фиг. 9,7). По условию $AC=2AB$.

$$AC=\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2};\quad AB=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}.$$

Значит, из $AC=2AB$ получаем, что

$$\sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}=$$
$$=2\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}.$$

Ответ. Траекторией является окружность $3x^2+3y^2-28x-$ $-28y+40=0$ с центром в точке $\left(\frac{14}{3},\ \frac{14}{3}\right)$, а ее радиус $r\approx 5{,}5$.



Фиг. 9,8.

Задача 9, 8 (для самостоятельного решения). Точка A движется так, что отношение ее расстояния до точки $B(2,\ 3)$ к ее расстоянию до прямой $x+2y-4=0$ равно $\frac{1}{2}$. Найти уравнение траектории точки.

Указание. Обозначить координаты точки A через x и y (фиг. 9, 8). Расстояние точки $A(x,\ y)$ до точки $B(2,\ 3)$ $AB=$ $=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$, а ее расстояние AC до прямой $x+2y-$ $-4=0$ будет равно

$$AC=\left|\frac{x+2y-4}{\sqrt{5}}\right|;$$

по условию $\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$.

Отсюда $\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}}{\left|\dfrac{x+2y-4}{\sqrt{5}}\right|}=\dfrac{1}{2}.$

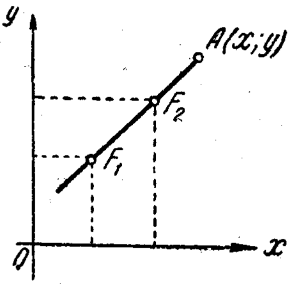
Ответ. Уравнение траектории

$$19x^2-4xy+16y^2-72x-104y+244=0.$$

Задача 9, 9 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, сумма расстояний которых от точек $F_1(2,\ 3)$ и $F_2(4,\ 5)$ есть величина постоянная, равная 10 (фиг. 9, 9).

Ответ. $24x^2-2xy+24y^2-136x-186y+1=0$ (эллипс).

Задача 9, 10 (для самостоятельного решения). Найти уравнение геометрического места точек, расстояние каждой из которых от данной прямой AB в два раза меньше расстояния от данной точки C, не лежащей на этой прямой.



Фиг. 9,9.

Указание. Направить ось Ox по данной прямой AB, а ось Oy по перпендикуляру к оси Ox, проходящему через данную точку C. Координаты точки C пусть будут $(0,\ b)$ $(b \neq 0)$.

Ответ. $x^2-3y^2-2by+b^2=0$ (гипербола).

Следует иметь в виду, что уравнение геометрического места в выбранной системе координат может оказаться более или менее сложным в зависимости от расположения координатных осей в выбранной системе координат. В данном случае, если бы мы направили ось Oy не через точку C, то абсцисса точки C уже была бы равна не нулю, а скажем, a, и уравнение геометрического места оказалось бы более сложным. Следует, однако, помнить, что в зависимости от того или иного расположения координатных осей может измениться только уравнение линии, но не сама линия.

Задача 9, 11 (для самостоятельного решения). Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые, проходящие через точку $(a,\ b)$.

Ответ. Окружность $x^2+y^2-ax-by=0$.

ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Кривые второго порядка: окружность, эллипс.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Окружность. Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки.

Уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \qquad (10,1)$$

где a и b — координаты центра окружности, а r — радиус окружности.

Если же центр окружности находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (10, 2)$$

2. **Эллипс.** Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух данных фиксированных точек (фокусов) есть для всех точек эллипса одна и та же постоянная величина (эта постоянная величина должна быть больше, чем расстояние между фокусами).

Простейшее уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (10, 3)$$

где a — большая полуось эллипса,

b — малая полуось эллипса.

Если $2c$ — расстояние между фокусами, то между a, b и c (если $a > b$) существует соотношение

$$a^2 - b^2 = c^2. \qquad (10, 4)$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (10, 5)$$

У эллипса эксцентриситет $e < 1$ (так как $c < a$), а его фокусы лежат на большой оси.

Задача 10, 1. Написать уравнение окружности с центром в точке C $(2, -3)$ и радиусом, равным 6.

Решение. По уравнению (10, 1), полагая в нем $a = 2$, $b = -3$, $r = 6$, сразу имеем $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$, или

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0.$$

Задача 10, 2. (для самостоятельного решения). Написать уравнение окружности с центром в точке $(-4, 7)$ и радиусом, равным 7.

Ответ. $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 49$,
или

$$x^2 + y^2 + 8x - 14y + 16 = 0.$$

Задача 10, 3. Показать, что

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

есть уравнение окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение. Заданное уравнение преобразуем к виду (10, 1). Выпишем члены, содержащие только x, и члены, содержащие только y. Легко проверить (сделайте это!), что

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4,$$
$$y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9.$$

Левая часть уравнения запишется теперь так:

$$\underbrace{(x+2)^2-4}_{x^2+4x}+\underbrace{(y-3)^2-9}_{y^2-6y}-3=0,$$

или отсюда

$$(x+2)^2+(y-3)^2=16. \qquad (A)$$

Сравнивая уравнение (A) с (10, 1), заключаем, что это уравнение определяет окружность, центр которой имеет координаты $C(-2, 3)$, $r^2=16$, а $r=4$.

Задача 10, 4. Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2+y^2-x+2y-1=0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду (10, 1).

Соберем члены, содержащие только x и только y:

$$x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

$$y^2+2y=(y+1)^2-1.$$

Заданное уравнение перепишется в виде

$$\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}_{x^2-x}+\underbrace{(y+1)^2-1}_{y^2+2y}-1=0.$$

или

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2-\frac{9}{4}=0,$$

и окончательно в виде

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{9}{4}.$$

Следовательно, из сравнения с уравнением (10, 1) заключаем, что центр окружности находится в точке $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, а радиус равен $\frac{3}{2}$.

Задача 10, 5 (для самостоятельного решения). Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2+y^2+3x-7y-\frac{3}{2}=0.$$

Ответ. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$, $r=4$.

Задача 10, 6 (для самостоятельного решения). Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2+y^2+x-y=0.$$

Ответ. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 10, 7. Найти точки пересечения окружности $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ и прямой $y = 2x$.

Решение. Координаты точек пересечения должны удовлетворять обоим указанным уравнениям, так как эти точки находятся как на одной, так и на другой линии. Решим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r}(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ y = 2x\end{array}\right\}.$$

Подставляя в первое уравнение $2x$ вместо y и раскрывая скобки, получим

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4 = 4,$$

или

$$5x^2 - 10x + 1 = 0,$$

а отсюда

$$x_1 = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}, \quad x_2 = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}.$$

Подставляя эти значения во второе уравнение $y = 2x$, получим

$$y_1 = \frac{10+4\sqrt{5}}{5}, \quad y_2 = \frac{10-4\sqrt{5}}{5}.$$

Искомыми точками пересечения будут $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$A\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}, \frac{10+4\sqrt{5}}{5}\right) \text{ и } B\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}, \frac{10-4\sqrt{5}}{5}\right).$$

Задача 10, 8. Написать уравнение окружности, проходящей через три точки: (0, 1); (2, 0); (3, —1).

Решение. Искомое уравнение имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Поскольку окружность проходит через указанные точки, координаты каждой из этих точек удовлетворяют уравнению окружности. Подставляя поочередно в искомое уравнение координаты данных точек, получим три уравнения для определения a, b и r. Вот эти уравнения:

$$\left.\begin{array}{r}a^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ (2-a)^2 + b^2 = r^2 \\ (3-a)^2 + (-1-b)^2 = r^2\end{array}\right\}.$$

Возьмем уравнения первое и второе, а потом первое и третье. Правые части этих уравнений между собой равны, значит, равны и левые их части, и мы получаем

$$\left.\begin{array}{r}a^2 + (1-b)^2 = (2-a)^2 + b^2 \\ a^2 + (1-b)^2 = (3-a)^2 + (-1-b)^2\end{array}\right\}.$$

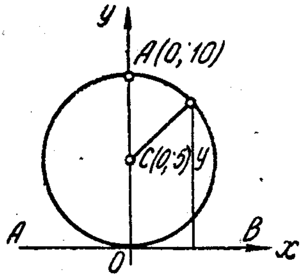
Раскрывая скобки и упрощая, будем иметь

$$\left.\begin{array}{r}4a - 2b = 3 \\ 6a - 4b = 9\end{array}\right\}.$$

Отсюда $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{9}{2}$. Подставляя эти значения a и b в первое из уравнений системы, получим $r^2 = \frac{65}{2}$. Искомое уравнение имеет вид

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{65}{2},$$

или после упрощений $x^2 + y^2 + 3x + 9y - 10 = 0$.



Фиг. 10,1.

Задача 10, 9. Найти уравнение окружности, касающейся оси Ox в начале координат и пересекающей ось Oy в точке A (0, 10) (фиг. 10, 1).

Решение. Известно, что диаметр окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Это значит, что диаметр OA окружности направлен по оси Oy, центр окружности находится в точке C (0,5), а радиус окружности $r = 5$. Искомое уравнение имеет вид

$$x^2 + (y - 5)^2 = 25, \text{ или } x^2 + y^2 - 10y = 0.$$

Задача 10, 10 (для самостоятельного решения). Найти уравнение окружности, касающейся оси Oy в начале координат и пересекающей ось Ox в точке (—12, 0).

Ответ. $x^2 + y^2 + 12x = 0$.

Задача 10, 11. Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что: а) полуоси его $a = 6$, $b = 4$; б) расстояние между фокусами $2c = 10$, а большая ось $2a = 16$; в) малая полуось $b = 4$, и расстояние между фокусами $2c = 10$; г) большая полуось $a = 12$, а эксцентриситет $e = 0{,}5$; д) малая полуось $b = 8$, а эксцентриситет $e = 0{,}6$; е) сумма полуосей $a + b = 12$, а расстояние между фокусами $2c = 6\sqrt{2}$.

Решение. а) Простейшее уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Подставляя сюда $a = 6$, $b = 4$, получим

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

б) У нас $2c = 10$; $c = 5$;
$2a = 16$; $a = 8$.

Чтобы написать уравнение эллипса, следует найти малую полуось b. Между величинами a, b и c у эллипса существует зависимость $a^2 - b^2 = c^2$, или $b^2 = a^2 - c^2$. В нашем случае $b^2 = 64 - 25 = 39$, и уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1.$$

в) Решите самостоятельно.

Ответ. $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1.$

г) $a = 12$; $e = 0,5$; известно, что $e = \frac{c}{a}$; в этой формуле неизвестно c. Для его определения получаем уравнение

$$0,5 = \frac{c}{12}; \text{ отсюда } c = 6.$$

Теперь, зная, что $a = 12$, $c = 6$, пользуясь соотношением $a^2 - c^2 = b^2$, найдем, что $b^2 = 144 - 36 = 108$; $a^2 = 144$.

Уравнение будет $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1.$

д) $b = 8$; $e = 0,6$; $e = \frac{c}{a}$, отсюда $\frac{c}{a} = 0,6$, $c = 0,6a$. Напишем соотношение $a^2 - c^2 = b^2$ и подставим в него $c = 0,6a$; $b = 8$. Получим $a^2 - 0,36a^2 = 64$; $0,64a^2 = 64$; $a^2 = 100$.

Уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

е) $a + b = 12$, $2c = 6\sqrt{2}$.

Для определения уравнения эллипса надо знать a и b. Нам известно, что $c = 3\sqrt{2}$; $c^2 = 18$; $a^2 - b^2 = c^2$.

Поэтому $(a + b) \cdot (a - b) = 18$. Подставляя сюда $a + b = 12$, найдем, что $a - b = 1,5$.

Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 12 \\ a - b &= 1,5 \end{aligned}\right\},$$

получим, что $a = 6,75$, $b = 5,25$.

Уравнение эллипса запишется в виде

$$\frac{x^2}{6,75^2} + \frac{y^2}{5,25^2} = 1.$$

Задача 10, 12. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$4x^2 + 9y^2 = 144.$$

Решение. Преобразуем это уравнение к простейшему виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Разделив обе части заданного уравнения на 144, получим $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Отсюда заключаем, что $a^2 = 36$, $b^2 = 16$. Значит, $a = 6$, $2a = 12$; $b = 4$; $2b = 8$. Таким образом, длины осей равны соответственно 12 и 8. Зная a и b, из соотношения $a^2 - c^2 = b^2$ найдем c. Подставим $a = 6$; $b = 4$ и получим, что $c = 2\sqrt{5}$. Координаты фокусов будут $(2\sqrt{5}, 0)$ и $(-2\sqrt{5}, 0)$. Эксцентриситет эллипса

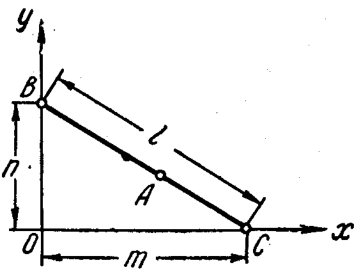
$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Задача 10, 13 (для самостоятельного решения). Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$16x^2 + 9y^2 = 144.$$

Указание. Фокусы эллипса лежат на его большой оси. Большая ось заданного эллипса лежит на оси Oy, как вы легко усмотрите, получив простейшее уравнение эллипса.

Ответ. Большая ось равна 8, малая 6. Координаты фокусов $F_1\ (0, \sqrt{7})$, $F_2(0, -\sqrt{7})$, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$.



Фиг. 10,2.

Задача 10, 14. Отрезок BC постоянной длины l движется своими концами по сторонам прямого угла BOC. Какую линию опишет на этом отрезке точка A, разделяющая его в отношении λ $\left(\frac{BA}{AC} = \lambda\right)$?

Решение. Стороны прямого угла, о котором идет речь в задаче, примем за оси прямоугольной системы координат (фиг. 10, 2), Если мы обозначим через m и n отрезки, отсекаемые отрезком BC соответственно на координатных осях Ox и Oy, то во все время движения будет сохраняться равенство

$$m^2 + n^2 = l^2.$$

Координаты точек B и C будут $B(0, n)$, $C(m, 0)$, Координаты точки A обозначим через x и y. Тогда по формулам (2, 1) для определения координат точки, делящей отрезок в данном отношении, получаем

$$x = \frac{0 + \lambda m}{1 + \lambda} = \frac{\lambda m}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{n + \lambda \cdot 0}{1 + \lambda} = \frac{n}{1 + \lambda};$$

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{m}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{n}{1 + \lambda}.$$

Возведем обе части каждого из этих равенств в квадрат и почленно их сложим. Получим

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + y^2 = \frac{m^2 + n^2}{(1 + \lambda)^2},$$

вспоминая, что $m^2 + n^2 = l^2$, имеем

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + y^2 = \frac{l^2}{(1 + \lambda)^2},$$

а отсюда, деля обе части этого уравнения на его правую часть, запишем искомое уравнение в виде

$$\frac{x^2}{\frac{\lambda^2 l^2}{(1+\lambda)^2}} + \frac{y^2}{\frac{l^2}{(1+\lambda)^2}} = 1.$$

Искомым геометрическим местом является эллипс с полуосями

$$a = \frac{\lambda l}{1+\lambda} \text{ и } b = \frac{l}{1+\lambda}.$$

ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Кривые второго порядка: гипербола, парабола.

Основные сведения из теории

Гипербола. *Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных фиксированных точек (фокусов) гиперболы есть одна и та же постоянная величина.* Предполагается, что эта постоянная величина не равна нулю и меньше, чем расстояние между фокусами.

Простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{11, 1}$$

Здесь a — действительная полуось гиперболы, b — мнимая полуось гиперболы.

Если $2c$ — расстояние между фокусами гиперболы, то между a, b и c существует соотношение

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{11, 2}$$

При $b = a$ гипербола называется равносторонней. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{11, 3}$$

Фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к длине ее действительной оси

$$e = \frac{c}{a}. \tag{11, 4}$$

Асимптоты гиперболы — две прямые, определяемые уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x \\ y &= -\frac{b}{a}x \end{aligned}\right\}. \tag{11, 5}$$

Напомним, что асимптотой кривой, имеющей бесконечную ветвь, называется прямая, которая обладает тем свойством, что когда точка по кривой удаляется в бесконечность, ее расстояние до этой прямой стремится к нулю.

Парабола. *Параболой называется геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от заданной фиксированной точки и от заданной фиксированной прямой.* Точка, о которой идет речь в определении, называется фокусом параболы, а прямая — ее директрисой.

Простейшее уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \tag{11, 6}$$

Входящая в это уравнение величина p называется параметром параболы. Параметр параболы равен расстоянию от директрисы параболы до ее фокуса.

Координаты фокуса F параболы (11, 6) $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. Уравнение директрисы параболы (11, 6)

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{11, 7}$$

Эксцентриситет параболы $e = 1$.

Гипербола

Задача 11, 1. Составить простейшее уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами ее равно 20, а расстояние между фокусами 30.

Решение. Вершины гиперболы лежат на ее действительной оси. По условию $2a = 20$; $2c = 30$. Значит, $a = 10$; $c = 15$; $a^2 = 100$; $c^2 = 225$.

Величины a, b и c у гиперболы связаны соотношением (11, 2)

$$a^2 + b^2 = c^2;$$

отсюда $b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 100$; $b^2 = 125$.

Значит, уравнением гиперболы будет

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1.$$

Задача 11, 2. Действительная полуось гиперболы равна 5, эксцентриситет $e = 1{,}4$. Найти уравнение гиперболы.

Решение. У нас $a = 5$, $a^2 = 25$; $e = \frac{c}{a} = 1{,}4$; $c = 1{,}4a = 1{,}4 \cdot 5 = 7$, $c^2 = 49$; $b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$, $b^2 = 24$; искомым уравнением будет

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

Задача 11, 3. Гипербола проходит через точки $\left(3, \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ и $(-2\sqrt{5}, 3)$. Найти уравнение гиперболы.

Решение. Уравнение гиперболы (11, 1) может быть записано так:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (11, 8)$$

Определению подлежат a^2 и b^2. Подставим в это уравнение координаты первой точки и получим

$$45b^2 - 12a^2 = 5a^2b^2.$$

Подставляя в уравнение гиперболы (11, 8) координаты второй точки, получим

$$20b^2 - 9a^2 = a^2b^2.$$

Решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 20b^2 - 9a^2 &= a^2b^2 \\ 45b^2 - 12a^2 &= 5a^2b^2 \end{aligned}\right\}.$$

Умножая первое уравнение на 4, а второе на 3 и вычитая из второго первое, получим $a^2 = 5$. Подставим $a^2 = 5$ в первое уравнение и получим $20b^2 - 45 = 5b^2$, откуда $b^2 = 3$. Подставляя найденные значения a^2 и b^2 в (11, 8), получим, что искомое уравнение имеет вид

$$3x^2 - 5y^2 = 15.$$

Задача 11, 4. Найти уравнение асимптот гиперболы

$$2x^2 - 3y^2 = 6.$$

Решение. У гиперболы две асимптоты, определяемые уравнениями (11,5). Следует найти a и b.

Приведем уравнение гиперболы к простейшему виду, разделив обе его части на 6. Получим

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

Отсюда заключаем, чт $a^2 = 3$, $a = \sqrt{3}$; $b^2 = 2$, $b = \sqrt{2}$. Подставляя эти значения a и b в уравнения асимптот (11, 5) получаем

$$\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0.$$

Задача 11, 5 (для самостоятельного решения). Дана гипербола

$$\frac{x^2}{16}-y^2=1.$$

Найти уравнения ее асимптот.

Ответ. Уравнения асимптот

$$y=\frac{1}{4}x \text{ и } y=-\frac{1}{4}x.$$

Задача 11, 6. Найти эксцентриситет гиперболы $25x^2-36y^2=900$.

Указание. Привести уравнение гиперболы к простейшему виду (11, 1). Окажется, что $a=6$; $b=5$; из (11, 2) следует, что $c=\sqrt{61}$. Эксцентриситет $e=\frac{c}{a}$, $e=\frac{\sqrt{61}}{6}$.

Задача 11, 7. Уравнения асимптот гиперболы $y=\frac{1}{2}x$ и $y=-\frac{1}{2}x$, а расстояние между фокусами $2c=10$. Найти уравнение гиперболы.

Решение. Уравнения асимптот гиперболы имеют вид (11, 5). Из условия задачи следует, что: 1) $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ и $a=2b$; 2) $c=5$. Подставляя в соотношение (11, 2) значения $a=2b$ и $c=5$, получим $(2b)^2+b^2=25$; $b^2=5$; $a=2b$, а потому $a^2=4b^2=20$. Искомым уравнением гиперболы будет $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

Задача 11, 8. На правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ найти точку, расстояние которой от асимптоты с отрицательным угловым коэффициентом было бы в два раза больше, чем расстояние ее от асимптоты с положительным угловым коэффициентом.

Решение. Так как у нас $a^2=25$; $a=5$; $b^2=9$; $b=3$, то на основании (11, 5) уравнение асимптоты с отрицательным угловым коэффициентом запишется в виде $y=-\frac{3}{5}x$, или $3x+5y=0$, а уравнение асимптоты с положительным угловым коэффициентом

$$y=\frac{3}{5}x, \text{ или } 3x-5y=0.$$

Возьмем на правой ветви гиперболы точку A с координатами x и y. Ее расстояние d_1 до асимптоты $3x+5y=0$, определенное по правилу нахождения расстояния от точки до прямой, будет $d_1=\left|\frac{3x+5y}{\sqrt{34}}\right|$. Расстояние d_2 этой точки до асимптоты $3x-5y=0$

$$d_2=\left|\frac{3x-5y}{\sqrt{34}}\right|.$$

По условию $d_1 = 2d_2$, или

$$\left|\frac{3x+5y}{\sqrt{34}}\right| = 2\left|\frac{3x-5y}{\sqrt{34}}\right|.$$

Отсюда или

$$\frac{3x+5y}{\sqrt{34}} = -2\,\frac{3x-5y}{\sqrt{34}}, \qquad (A)$$

или

$$\frac{3x+5y}{\sqrt{34}} = 2\,\frac{3x-5y}{\sqrt{34}}. \qquad (B)$$

Из (A) следует, что

$$3x+5y = -6x+10y; \quad x = \frac{5}{9}y.$$

Из (B) вытекает, что

$$3x+5y = 6x-10y; \; 3x-15y = 0; \; x = 5y.$$

Полученные соотношения $x = 5y$ и $x = \frac{5}{9}y$ есть зависимости между абсциссой и ординатой искомой точки. Подставим сначала $x = 5y$ в уравнение данной гиперболы. Из условия задачи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{25y^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, откуда $y_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $y_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$; у нас $x = 5y$, т. е. $x_1 = \frac{15\sqrt{2}}{4}$, $x_2 = -\frac{15\sqrt{2}}{4}$.

Но по условию задачи точка лежит на правой ветви гиперболы. Значит, абсцисса ее положительна, и значение $x_2 = -\frac{15\sqrt{2}}{4}$ должно быть отброшено. Ордината точки на правой ветви гиперболы может быть как положительной, так и отрицательной. Но из того, что $x = 5y$, следует, что y должен иметь такой же знак, как и x, а потому, так как абсцисса x положительна, ордината не может быть отрицательной. Значение $y_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$ должно быть отброшено, и окончательно

$$x = \frac{15\sqrt{2}}{4}, \quad y = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Убедитесь самостоятельно, что зависимость $x = \frac{5}{9}y$ приводит к мнимым значениям y. На этой гиперболе нет точки, для которой $x = \frac{5}{9}y$. Таким образом, есть только одна точка $\left(\frac{15\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$, удовлетворяющая условию задачи.

Задача 11, 9 (для самостоятельного решения). Найти острый угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

Указание. Воспользоваться формулой (11, 4) и заменить в ней c по формуле (11, 2), откуда должно получиться соотношение

$$4a^2 = a^2 + b^2,$$

$$3a^2 = b^2, \quad b = \pm a\sqrt{3}, \quad \frac{b}{a} = \pm\sqrt{3}.$$

Подставляя это значение $\frac{b}{a}$ в уравнения асимптот гиперболы (11, 5), получим

$$y = +\sqrt{3}x \text{ и } y = -\sqrt{3}x.$$

Угол между асимптотами найдем по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|,$$

где $k_1 = \sqrt{3}$, $k_2 = -\sqrt{3}$. Отсюда заключаем, что угол $\varphi = 60°$*.

Задача 11, 10. Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти уравнение эллипса, фокусы которого находятся в фокусах гиперболы, если известно, что эллипс проходит через точку A (4, 6).

Решение. Уравнение гиперболы преобразуем к простейшему виду и получим $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$, $a^2 = b^2 = 8$. Из соотношения (11, 2) получаем, что $c = 4$. Значит, координаты фокусов гиперболы $F_2(-4,0)$ и $F_1(4,0)$. В этих точках находятся фокусы эллипса. Обозначим большую и малую полуоси эллипса через a_1 и b_1. Расстояние между фокусами эллипса такое же, как и расстояние между фокусами гиперболы. Поэтому половину этого расстояния по-прежнему обозначаем через c. Но у эллипса

$$c = \sqrt{a_1^2 - b_1^2},$$

$$\text{т. е. } 4 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} \text{ и } a_1^2 - b_1^2 = 16. \qquad (A)$$

Для определения a_1 и b_1 нужно найти еще одно соотношение, связывающее их. Искомое уравнение эллипса запишется так:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \qquad (B)$$

Поскольку точка A (4, 6) лежит на эллипсе, ее координаты должны удовлетворять уравнению эллипса. Подставляя в послед-

* Угол между асимптотами может быть найден также из таких соображений: угловой коэффициент одной асимптоты $k_1 = \sqrt{3}$, а другой $-k_2 = -\sqrt{3}$. Это значит, что асимптоты составляют с положительным направлением оси Ox углы в 60 и 120°, а следовательно, острый угол φ между ними равен $120 - 60° = 60°$.

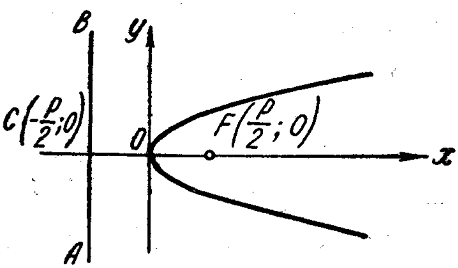
нее уравнение $x = 4$, $y = 6$, получаем, что $36a_1^2 + 16b_1^2 = a_1^2 b_1^2$. Присоединяя уравнение (A) к этому уравнению, получаем для определения a_1^2 и b_1^2 систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 - b_1^2 &= 16 \\ 36a_1^2 + 16b_1^2 &= a_1^2 b_1^2 \end{aligned}\right\},$$

откуда $a_1^2 = 64$; $b_1^2 = 48$. Подставляя эти значения в (B), находим искомое уравнение $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

Парабола

Простейшее уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px\ (p > 0)$. Вершина этой параболы находится в начале координат, ее ось направлена по оси Ox. Фокус этой параболы находится в точке $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, а директриса AB имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$. Парабола $y^2 = 2px$ расположена так, как указано на фиг. 11, 1 (запомните, что фокус параболы лежит на ее оси симметрии).



Фиг. 11,1.

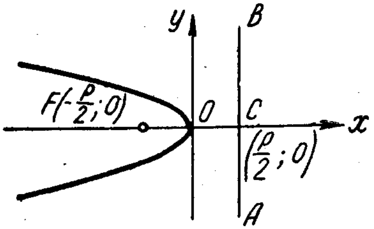
Задача 11, 11. Как расположена относительно координатных осей линия $y^2 = -2px\ (p > 0)$? Какая это линия?

Решение. Прежде всего замечаем, что эта кривая проходит через начало координат, так как координаты точки (0, 0) удовлетворяют ее уравнению.

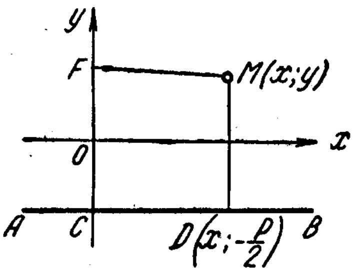
Левая часть уравнения при любом вещественном значении y положительна, значит и правая часть также должна быть положительной. Так как величина $p > 0$ по условию, то это будет иметь место только тогда, когда величина x не является положительной, т. е. когда $x \leqslant 0$. Значит, x не может принимать положительных значений. Из уравнения $y^2 = -2px$ видно, что при замене в нем y на $-y$ оно не изменится. Это говорит о том, что кривая расположена симметрично относительно оси Ox. Какая это кривая линия?

Возьмем параболу $y^2 = 2px$. Замена в этом уравнении x на $-x$ переводит параболу в кривую $y^2 = -2px$. Следовательно, рассматриваемая кривая $y^2 = -2px$ расположена симметрично параболе $y^2 = 2px$ относительно оси Oy. Значит, кривая $y^2 = -2px$ — тоже парабола. Ее фокус и директриса симметричны фокусу и директрисе параболы $y^2 = 2px$ относительно оси Oy: фокус имеет координаты $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, а директриса определяется уравнением $x = \frac{p}{2}$ (фиг. 11, 2).

Составим теперь уравнение параболы, исходя из известного определения этой кривой, выбрав такое расположение координатных осей: примем за ось Oy прямую, проходящую через фокус параболы перпендикулярно к ее директрисе, а за положительное направление на ней возьмем направление от директрисы



Фиг. 11,2.



Фиг. 11,3.

к фокусу. Начало координат поместим в точку, делящую пополам расстояние между фокусом и директрисой. Ось Ox направим, как обычно (фиг. 11, 3). Итак, AB — данная прямая, F — данная точка.

Если $FC = p$, то фокус F имеет координаты $\left(0, \frac{p}{2}\right)$. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит параболе. Тогда из определения параболы (см. стр. 90) следует, что $FM = MD$. По формуле расстояния между двумя точками $FM = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$, $MD = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$; координаты любой точки кривой удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2},$$

и после очевидных упрощений будем иметь $x^2 = 2py$. Если разрешить это уравнение относительно y, то получится, что

$$y = \frac{1}{2p}x^2.$$

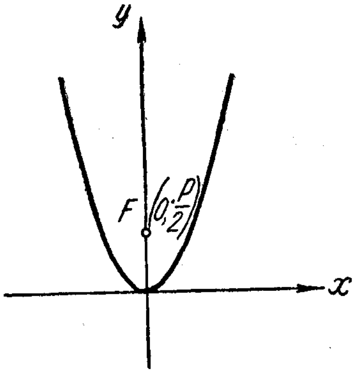
Обозначим $\frac{1}{2p} = a\ (a > 0)$, так как по условию $p > 0$. Уравнение параболы в этом случае будет иметь вид

$$y = ax^2 \quad (a > 0).$$

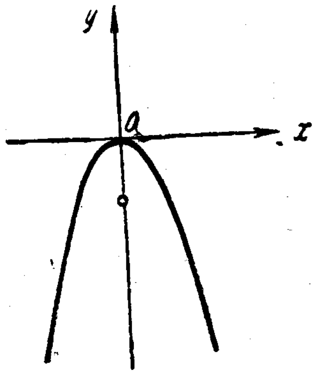
Исследуем теперь расположение этой параболы относительно координатных осей.

1. Точка с координатами (0, 0) лежит на параболе, так как из уравнения параболы усматриваем, что при $x=0$ и $y=0$, т. е. парабола $y=ax^2$ проходит через начало координат, являющееся вершиной параболы.

2. При замене x на $-x$ уравнение $y=ax^2$ не изменяется. Это значит, что парабола $y=ax^2$ расположена симметрично относительно оси Oy.



Фиг. 11,4.



Фиг. 11,5.

3. Так как по предположению $a>0$, то при любом x, как положительном, так и отрицательном, будет $y>0$. Это значит, что кривая расположена над осью Ox.

4. При возрастании x по абсолютной величине будет возрастать и y. Парабола $y=ax^2\,(a>0)$ имеет вид, указанный на фиг. 11, 4. Координаты фокуса этой параболы найдем так: у нас $OF=\frac{p}{2}$, или с учетом того, что $\frac{1}{2p}=a$, получим $p=\frac{1}{2a}$, $\frac{p}{2}=\frac{1}{4a}$. Итак, фокус параболы $y=ax^2$ имеет координаты $\left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$. Если в уравнении параболы $y=ax^2$ y заменить на $-y$, то мы получим кривую, которая расположена симметрично параболе $y=ax^2$ относительно оси Ox. Значит, кривая $y=-ax^2$ — тоже парабола. Расположение ее показано на фиг. 11, 5.

На фиг. 11, 6—11, 9 изображены параболы

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2px \quad (\text{фиг. } 11{,}6) \\ y^2 &= -2px \ (\text{фиг. } 11{,}7) \end{aligned}\right\} p>0$$

$$\left.\begin{aligned} y &= ax^2 \quad (\text{фиг. } 11{,}8) \\ y &= -ax^2 \ (\text{фиг. } 11{,}9) \end{aligned}\right\} a>0$$

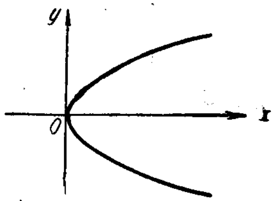
Параболу, определяемую уравнением $y = ax^2$, называют восходящей, а параболу, определяемую уравнением $y = -ax^2$, — нисходящей.

Расположение этих парабол следует хорошо запомнить.

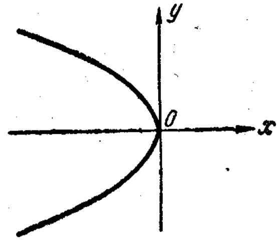
Задача 11, 12. Парабола $y^2 = 2px$ проходит через точку A (2, 4). Определить ее параметр p.

Решение. Подставляем в уравнение параболы вместо текущих координат координаты точки A (2, 4). Получаем

$$4^2 = 2p \cdot 2; \quad 16 = 4p; \quad p = 4.$$

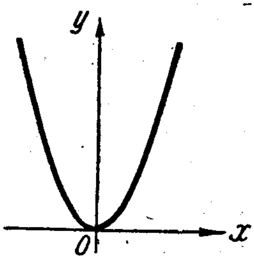


Фиг. 11,6.

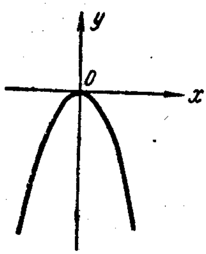


Фиг. 11,7.

Задача 11, 13. Составить уравнение параболы, зная, что вершина ее находится в начале координат и расстояние от фокуса до вершины равно 4 единицам длины, а осью симметрии служит ось Ox.



Фиг. 11,8.



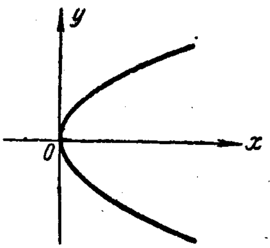
Фиг. 11,9.

Решение. Так как осью симметрии параболы служит ось Ox, а вершиной — начало координат, то парабола может быть определена одним из уравнений $y^2 = 2px$ и $y^2 = -2px$. Параметр параболы p есть расстояние от директрисы параболы до фокуса. Расстояние от фокуса до вершины равно половине параметра. Значит, у нас $\frac{p}{2} = 4$, $p = 8$. Подставляя это значение p в каждое из только что написанных уравнений, получим

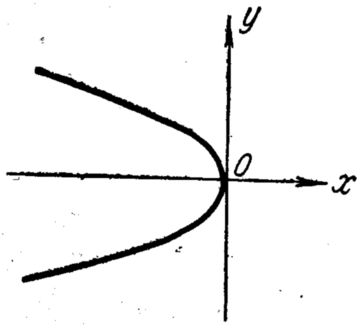
$$y^2 = 16x \text{ и } y^2 = -16x.$$

Эскизы парабол указаны на фиг. 11, 10 и 11, 11.

Задача 11, 14. Парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $A(4, -1)$, а вершина ее лежит в начале координат. Составить ее уравнение.



Фиг. 11,10.



Фиг. 11,11.

Решение. Так как парабола проходит через точку $A(4, -1)$ с положительной абсциссой, а ее осью служит ось Ox, то уравнение параболы следует искать в виде $y^2 = 2px$. Подставляя в это уравнение координаты точки A, будем иметь

$$1 = 8p, \quad p = \frac{1}{8}, \quad 2p = \frac{1}{4};$$

искомым уравнением будет

$$y^2 = \frac{1}{4}x.$$

Эскиз этой параболы показан на фиг. 11, 10.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Преобразование прямоугольных координат. Параллельный перенос координатных осей без изменения их направления.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Преобразованием системы координат называется переход от одной системы координат к другой.

При такой замене надо установить формулы, позволяющие по известным координатам точки в одной системе координат определить ее координаты в другой.

Главной целью преобразования координат является определение такой координатной системы, в которой уравнение данной линии становится наиболее простым. Удачным расположением координатных осей можно добиться того, чтобы уравнение кривой приняло наиболее простой вид. Это имеет важное значение для исследования свойств кривой.

Преобразование уравнения кривой второго порядка к простейшему виду достигается в общем случае 1) параллельным переносом координатной системы без изменения направления осей и 2) поворотом осей.

Если имеются две системы прямоугольных координат с разными началами, оси которых параллельны и одинаково направлены, то между координатами одной и той же точки в этих системах координат существует зависимость

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + x_0 \\ y = y_1 + y_0 \end{array}\right\}, \tag{12, 1}$$

где x, y — координаты точки в первоначальной системе координат, x_1, y_1 — ее координаты в новой системе координат, а x_0, y_0 — координаты нового начала O_1 в первоначальной системе координат.

Эти формулы позволяют определить первоначальные координаты точки x и y, если известны ее новые координаты и координаты нового начала в первоначальной системе координат.

Для обратного перехода от первоначальных к новым служат формулы

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x - x_0 \\ y_1 = y - y_0 \end{array}\right\}. \tag{12, 2}$$

Первоначальную систему координат иногда называют исходной, иногда — старой.

Задача 12, 1. Координаты точки относительно некоторой системы координат $x = 2$, $y = -1$. Чему будут равны координаты этой точки, если, сохраняя направления осей, перенести начало координат в точку:

а) $(7, -4)$; б) $(4, -2)$; в) $(2, -1)$; г) $(-1, -4)$.

Решение. а) По формулам (12, 2), полагая в них $x = 2$, $x_0 = 7$, $y = -1$, $y_0 = -4$, получаем $x_1 = 2 - 7$; $y_1 = -1 - (-4)$, отсюда новые координаты точки $x_1 = -5$; $y_1 = 3$.

Случаи б), в) и г) решите самостоятельно.

Ответ. б) $(-2, 1)$; в) $(0, 0)$; г) $(3, 3)$.

Задача 12, 2. Относительно двух систем координат xOy и $x_1O_1y_1$, имеющих одно и то же направление осей, координаты некоторой точки $(12, -7)$ и $(0, 15)$. Чему равны координаты начала каждой из этих систем относительно другой? Сделайте чертеж.

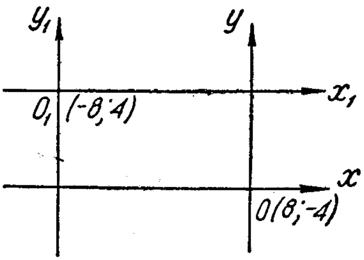
Решение. По формулам (12, 1), полагая в них $x=12$, $x_1=0$, $y=-7$, $y_1=15$, получаем координаты нового начала в системе координат xOy:

$$12 = 0 + x_0,\ x_0 = 12,$$
$$-7 = 15 + y_0,\ y_0 = -22.$$

В системе координат $x_1O_1y_1$ координаты точки O — начала координат в системе xOy получим, поменяв местами x с x_1 и y с y_1 в предыдущих формулах. Будем иметь

$$0 = 12 + x_0',\ x_0' = -12,$$
$$15 = -7 + y_0',\ y_0' = 22.$$

Здесь x_0' и y_0' — координаты точки O в системе координат $x_1O_1y_1$.



Фиг. 12,1.

Задача 12, 3 (для самостоятельного решения). Две системы координат имеют одинаковые направления осей. Координаты начала первой системы относительно второй (8, —4). Чему равны координаты начала второй системы координат относительно первой (фиг. 12, 1)?

Ответ: (—8, 4).

Задача 12, 4 (для самостоятельного решения). Как изменятся координаты любой точки $A(x, y)$, если за ось абсцисс принять ось ординат, а за ось ординат — ось абсцисс?

Ответ. Абсцисса и ордината точки поменяются местами.

Геометрический смысл квадратичной функции:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Задача 12, 5. Уравнение $y = ax^2 + bx + c$ преобразовать так, чтобы в преобразованном виде оно не содержало члена с первой степенью x и свободного члена.

Решение. В учебнике Привалова на стр. 113 проведено исследование кривой, определяемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, и показано, что это уравнение определяет параболу.

Указанный в учебнике Привалова способ решает поставленную нами задачу. Мы укажем здесь другой прием, основанный также на параллельном переносе системы координат, который помогает проще решить эту задачу.

Заданное уравнение $y = ax^2 + bx + c$ преобразуем так: у первых двух слагаемых в правой части уравнения вынесем за скобки a $(a \neq 0)$. Теперь

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c. \qquad (A)$$

Из выражения $x^2 + \frac{b}{a} x$, стоящего в скобке, выделим полный квадрат суммы двух слагаемых. Запишем это выражение в виде $x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x$.

Прибавим к нему и вычтем из него $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, отчего выражение не изменится. Получим, что

$$x^2 + \frac{b}{a} x = \underline{x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Легко усмотреть, что сумма первых трех подчеркнутых слагаемых равна $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, а потому окончательно

$$x^2 + \frac{b}{a} x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}.$$

Тем самым мы из $x^2 + \frac{b}{a} x$ выделили полный квадрат суммы двух слагаемых: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Теперь выражение (A) может быть переписано так:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c.$$

Если раскрыть скобки в правой части этого равенства, то получим

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c,$$

или

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

а отсюда следует, что

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \qquad (B)$$

Сделаем параллельный перенос координатных осей без изменения их направления в точку O_1 с координатами

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (C)$$

Подставляя эти значения x_0 и y_0 в формулы (12, 1), получим

$$x = x_1 - \frac{b}{2a}, \quad y = y_1 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

или

$$x_1 = x + \frac{b}{2a}, \quad y_1 = y - \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (D)$$

В новой системе координат уравнение (B) перепишется так:

$$y_1 = ax_1^2. \tag{E}$$

Этим и заканчивается преобразование исходного уравнения.

Легко заметить, что полученное уравнение (E) действительно значительно проще исходного: в нем нет первой степени текущей координаты x_1 и нет свободного члена.

Таким образом, требование задачи выполнено: 1) преобразованное уравнение не содержит члена с первой степенью абсциссы и 2) оно не содержит свободного члена.

Полученное уравнение $y_1 = ax_1^2$ есть уравнение параболы, вершина которой находится в новом начале координат — точке $O_1\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Мы можем сделать такое заключение:

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ является парабола, вершина которой находится в точке $O_1\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, а ее ось симметрии параллельна оси Oy. Для построения этой параболы следует:

1) определить координаты ее вершины O_1;

2) точку O_1 принять за новое начало координат и через нее провести координатные оси O_1x_1 и O_1y_1, параллельные первоначальным осям координат и одинаково с ними направленные;

3) в новой системе координат построить параболу $y_1 = ax_1^2$.

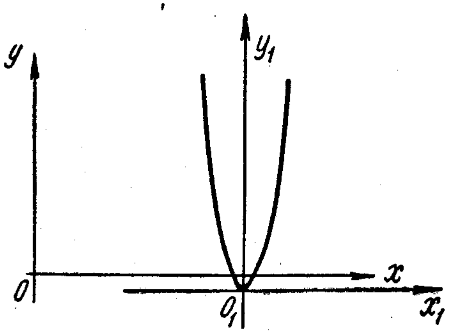
Не следует запоминать координаты вершины параболы — формулы (C), а проделывать каждый раз указанные простые выкладки. Решение последующих задач основано на выделении полного квадрата из квадратного трехчлена, а потому эта операция должна быть хорошо усвоена. После решения нескольких задач эти преобразования не будут вызывать никаких затруднений.

Решенная нами задача иногда формулируется иначе: уравнение кривой $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ упростить так, чтобы в нем отсутствовал член с первой степенью текущей координаты и свободный член, а иногда и еще короче: привести уравнение кривой $y = ax^2 + bx + c$ к каноническому виду. В дальнейшем мы будем пользоваться и этими формулировками. После того как показано, что уравнение $y = ax^2 + bx + c$ определяет параболу, можно заключить: упрощение этого уравнения достигнуто параллельным переносом первоначальной системы координат так, что новое начало координат находится в вершине параболы, а новая координатная ось O_1y_1 совпадает с осью симметрии параболы.

Следует также иметь в виду, что если в уравнении $y = ax^2 + bx + c$ коэффициент a положителен, то ветвь параболы направлена вверх (так называемая «восходящая» парабола), а при отрицательном a — вниз («нисходящая» парабола).

Форма параболы определяется только коэффициентом a. Числа же b и c на форму параболы влияния не оказывают, и изменение их при одном и том же a влияет только на расположение параболы на плоскости. Заметим также, что чем больше a по абсолютной величине, тем сильнее парабола прижата к оси симметрии; наоборот, чем меньше a по абсолютной величине, тем «шире» будет парабола.

Решим теперь ряд задач с числовыми значениями a, b и c и начертим эскизы нескольких парабол (с построением эскиза параболы по ее уравнению приходится очень часто встречаться, например, при изучении сопротивления материалов).



Фиг. 12,2.

Задача 12, 6. Упростить уравнение параболы $y = x^2 - 7x + 12$, найти координаты ее вершины и начертить эскиз кривой.

Решение. Выделим в правой части уравнения $y = x^2 - 7x + 12$ полный квадрат по способу, указанному в предыдущей задаче, и получим

$$y = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 12,$$

или

$$y + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2.$$

Положим

$$x_1 = x - \frac{7}{2}, \quad y_1 = y + \frac{1}{4}.$$

Отсюда из сравнения с формулами (12, 2) координаты нового начала, т. е. вершины параболы, будут $x_0 = \frac{7}{2}$, $y_0 = -\frac{1}{4}$. После переноса начала координат в точку $O_1\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ уравнение параболы примет наиболее простой вид $y_1 = x_1^2$. Эскиз кривой представлен на фиг. 12, 2.

Задача 12, 7. Привести к простейшему виду уравнение параболы

$$y = 2x^2 + 4x + 5$$

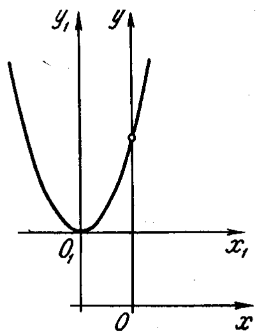
и найти координаты ее вершины.

Решение. Уравнение $y = 2x^2 + 4x + 5$ преобразуем, выделив в правой части полный квадрат:

$$y = 2(x^2 + 2x) + 5, \quad y = 2[(x+1)^2 - 1] + 5, \quad y = 2(x+1)^2 + 3,$$

$$y - 3 = 2(x+1)^2;$$

пусть теперь $x_1 = x + 1$, $y_1 = y - 3$. Из сравнения с формулами (12, 2) координаты нового начала: $x_0 = -1$; $y_0 = 3$. Уравнение параболы примет вид $y_1 = 2x_1^2$. Эскиз параболы показан на фиг. 12, 3.



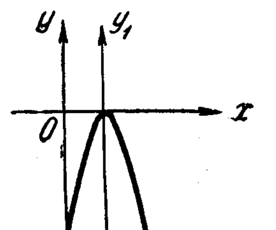
Фиг. 12,3.

Задача 12, 8 (для самостоятельного решения). Уравнение параболы $y = -3x^2 + 8x - 9$ преобразовать к простейшему виду и начертить ее эскиз.

Ответ. Вершина параболы находится в точке $\left(\frac{4}{3}, -\frac{11}{3}\right)$. Преобразованное уравнение будет иметь вид $y_1 = -3x_1^2$. Знак минус у коэффициента при x_1^2 указывает на то, что парабола — «нисходящая» (фиг. 12, 4).

Самостоятельно решите несколько аналогичных задач и обязательно начертите эскизы этих парабол.

Задача 12, 9 (для самостоятельного решения). Преобразовать к простейшему виду уравнения парабол: 1) $y = 5x^2 + 4x - 3$ 2) $y = -6x^2 + 3x + 1$; 3) $y = 2x^2 + 3x$; 4) $y = -x^2 + 2x$; 5) $y = 3x^2 + 9x - 1$. Начертить эскизы этих парабол.



Фиг. 12,4.

Ответ. Координаты вершины:

1) $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{19}{5}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{8}\right)$; 3) $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{8}\right)$;

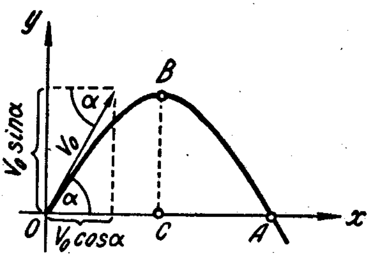
4) $(1, 1)$; 5) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{31}{4}\right)$.

Задача 12, 10. Из точки O под углом α к горизонту брошена материальная точка с начальной скоростью v_0. Найти: 1) уравнение траектории полета, 2) высоту подъема; 3) дальность полета (сопротивление воздуха в расчет не принимать).

Решение. Прежде всего определим траекторию полета. Пусть в начальный момент $t = 0$ точка находилась в начале координат (фиг. 12, 5). Проекции начальной скорости на оси прямоугольной системы координат равны:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

По прошествии t секунд точка в горизонтальном направлении пройдет путь $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$ (так как скорость ее в горизонтальном направлении v_{0x} — постоянна и равна $v_0 \cos\alpha$). В вертикальном направлении точка пройдет за то же время t путь, который мы получим, если из пройденного в вертикальном направлении пути $v_0 \sin\alpha \cdot t$ отнимем $\frac{gt^2}{2}$ — расстояние на которое опустится точка под действием силы притяжения земли. Значит, в вертикальном направлении за время t будет пройден путь



Фиг. 12,5.

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Уравнения $x = v_0 \cos\alpha \cdot t$, $y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$

и являются уравнениями траектории полета точки. Мы замечаем, что обе координаты x и y выражены здесь через одну и ту же переменную величину t. В этом случае говорят, что мы имеем параметрические уравнения траектории* (у нас параметром является время t). Желая найти зависимость между координатами x и y, исключим из этих уравнений параметр t. Из первого уравнения следует, что $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$. Подставим это значение t во второе уравнение и получим

$$y = v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha},$$

или

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot x. \qquad (A)$$

Положим

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = a, \quad \operatorname{tg}\alpha = b,$$

и тогда

$$y = -ax^2 + bx.$$

---

* С параметрическими уравнениями линий мы будем часто встречаться в математическом анализе. В учебнике Привалова это вопрос освещен в § 5 гл. II.

Легко усмотреть, что это уравнение параболы и, следовательно, траекторией точки является парабола. Так как в ее уравнении отсутствует свободный член, то парабола проходит через начало координат. Найдем теперь высоту полета точки. Для этого определим ординату вершины параболы. Так как коэффициент при x^2 отрицателен, то парабола — «нисходящая», а вершина параболы будет ее наивысшей точкой.

Из уравнения траектории $y = -ax^2 + bx$ найдем, что абсцисса вершины $x_0 = \frac{b}{2a}$.

Подставляя сюда

$$a = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad b = \operatorname{tg} \alpha,$$

получим

$$x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

После подстановки этого значения x_0 в уравнение траектории (A) получим ординату вершины параболы и тем самым высоту полета

$$y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Как легко усмотреть, дальность полета l равна удвоенной абсциссе вершины, т. е. $l = 2x_0$, или $l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Дальность полета l будет наибольшей, если $\sin 2\alpha$, входящий в выражение l, будет иметь наибольшее значение, т. е. при $\sin 2\alpha = 1$, а тогда $\alpha = 45°$.

Задача 12, 11. Упростить уравнение кривой

$$3x + 2y^2 + 6y - 1 = 0.$$

Указание. Привести уравнение к виду

$$x = -\frac{2}{3} y^2 - 2y + \frac{1}{3}$$

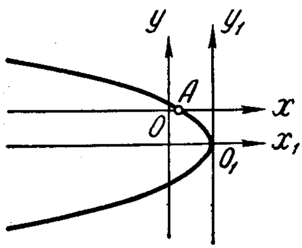
и поступить так же, как в предыдущих задачах.

Ответ. Кривая — парабола $y_1^2 = -\frac{3}{2} x_1$; вершина параболы в точке $\left(\frac{11}{6}, -\frac{3}{2}\right)$ (фиг. 12, 6). Ось параболы параллельна оси абсцисс.

Задача 12, 12 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение кривой $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$ и начертить ее эскиз.

Ответ. Простейшее уравнение кривой $y_1^2 = -\frac{1}{3}x_1$, координаты вершины параболы $O_1\left(\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right)$. Ось параболы параллельна оси абсцисс.

Мы выполнили ряд упражнений на упрощение уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$ и видели, что упрощение этого уравнения достигается параллельным переносом координатных осей без изменения их направления так, что новое начало координат находится в вершине параболы. Этим же преобразованием координат (т. е. параллельным переносом) можно привести к простейшему (каноническому) виду уравнение любой линии второго порядка, если это уравнение не содержит члена с произведением текущих координат. Сейчас мы выполним ряд таких упражнений.



Фиг. 12,6.

Задача 12, 13. Привести к простейшему виду уравнение

$$x^2 + 2y^2 - 5x + 4y - 6 = 0.$$

Решение. Соберем члены уравнения, содержащие одну и ту же переменную величину, и получим

$$(x^2 - 5x) + (2y^2 + 4y) - 6 = 0.$$

Из второй скобки вынесем коэффициент при y^2, после чего предыдущее уравнение примет вид

$$(x^2 - 5x) + 2(y^2 + 2y) - 6 = 0.$$

В каждой из скобок выделим полный квадрат и получим

$$\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] + 2[(y + 1)^2 - 1] - 6 = 0,$$

или

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2(y + 1)^2 - \frac{25}{4} - 2 - 6 = 0,$$

откуда следует, что

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2(y + 1)^2 = \frac{57}{4}. \qquad (A)$$

Произведем теперь такую замену: положим, что

$$x_1 = x - \frac{5}{2}, \quad y_1 = y + 1.$$

Произведенная замена представляет собою не что иное, как преобразование координат всех точек плоскости параллельным переносом координатных осей без изменения их направления. Сравнение последних соотношений с формулами (12, 2) показывает, что новое начало координат находится в точке $O_1\left(\frac{5}{2}, -1\right)$, а уравнение ($A$) принимает вид

$$x_1^2 + 2y_1^2 = \frac{57}{4}.$$

Разделив обе части этого уравнения на $\frac{57}{4}$, получим канонический (простейший) вид данного уравнения

$$\frac{x_1^2}{\frac{57}{4}} + \frac{y_1^2}{\frac{57}{8}} = 1.$$

Заданное уравнение определяет эллипс с полуосями $a = \frac{\sqrt{57}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{57}}{2\sqrt{2}}$, центр которого находится в первоначальной системе координат в точке $O_1\left(\frac{5}{2}, -1\right)$. Таким образом, упрощение уравнения этой линии достигнуто параллельным переносом начала координат в ее центр.

Задача 12, 14 (для самостоятельного решения). Упростить параллельным переносом координатных осей без изменения их направления уравнение линии $x^2 - 3y^2 + 4x - 5y + 1 = 0$.

Ответ. Линия — гипербола. Центр ее находится в точке $O_1\left(-2, -\frac{5}{6}\right)$. Ее каноническое уравнение

$$\frac{x_1^2}{\frac{11}{12}} - \frac{y_1^2}{\frac{11}{36}} = 1.$$

Задача 12, 15 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение кривой

$$2x^2 + 3y^2 - x + y = 0.$$

Ответ. Кривая — эллипс с центром в точке $O_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right)$ в исходной системе координат. Простейшее уравнение кривой

$$\frac{x_1^2}{\frac{5}{48}} + \frac{y_1^2}{\frac{5}{72}} = 1.$$

Задача 12, 16 (для самостоятельного решения). Привести к каноническому виду уравнение линии

$$4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 9 = 0.$$

Ответ. Линия — гипербола с центром в точке O_1 (1, —3) в исходной системе координат. Каноническое уравнение линии

$$x_1^2 - \frac{y_1^2}{4} = 1.$$

В задачах 12, 14 — 12, 16, как и в задаче 12, 13, упрощение уравнений линий достигнуто параллельным переносом начала координат в центр этих линий.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Преобразование координат поворотом координатных осей без изменения начала координат.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Если φ — угол поворота, x и y — первоначальные координаты точки, x_1 и y_1 — координаты той же точки в новой, повернутой системе координат, то имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\ y &= x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \end{aligned}\right\}. \tag{13, 1}$$

и

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y_1 &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{13, 2}$$

Задача 13, 1. Чему будут равны координаты точки $A\left(\sqrt{3},\ 2\right)$, если повернуть оси координат на угол $+60°$ без изменения начала координат.

Решение. Воспользуемся формулами (13, 2). Тогда так как

$$\cos 60° = \frac{1}{2}, \quad \text{а} \quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3};$$

$$y_1 = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2}; \quad y_1 = -\frac{1}{2}.$$

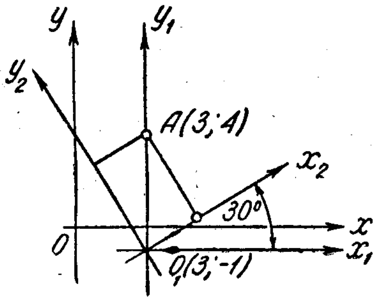
Задача 13, 2. Координатные оси прямоугольной системы координат переносятся без изменения направления осей в точку O_1 (3, —1) и поворачиваются на угол 30°. Найти новые координаты точки A, если старые ее координаты были A (3, 4) (фиг. 13, 1).

1) Сначала перенесем параллельно координатные оси, не изменяя их направления, в точку (3, —1). По формулам (12, 2) получаем $x_1 = 0$; $y_1 = 5$.

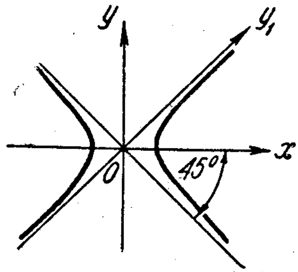
2) Повернем теперь оси координат $x_1O_1y_1$ на 30°; координаты точки в системе координат $x_2O_1y_2$ найдутся по формулам (13, 2), в которых надо заменить x_1 на x_2, y_1 на y_2, x на x_1, а y на y_1. Получаем

$$x_2 = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi,$$
$$y_2 = -x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Подставляя в эти формулы $\sin\varphi = \sin 30° = \frac{1}{2}$; $\cos\varphi = \cos 30° =$



Фиг. 13,1.



Фиг. 13,2.

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_1 = 0$; $y_1 = 5$, будем иметь искомые координаты точки

$$x_2 = \frac{5}{2}; \quad y_2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Определение. *Гипербола, определяемая уравнением $x^2 - y^2 = a^2$, называется равносторонней.*

Задача 13, 3. Какой вид примет уравнение равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, если оси координат повернуть на угол $\varphi = -45°$ (фиг. 13, 2)?

Решение. Так как $\varphi = -45°$, то

$$\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x = x_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1);$$

$$y = -x_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + y_1 \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1 + y_1).$$

Подставляя эти значения x и y в уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, будем иметь

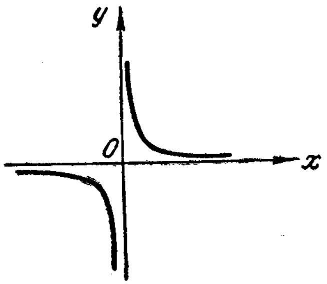
$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1)\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1 + y_1)\right]^2 = a^2,$$

или

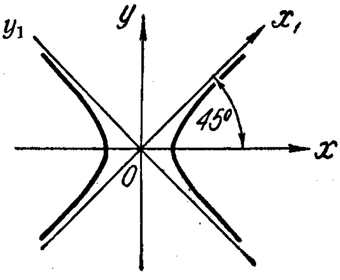
$$\frac{1}{2}[(x_1+y_1)^2-(y_1-x_1)^2]=a^2.$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{2}(x_1+y_1-y_1+x_1)(x_1+y_1+y_1-x_1)=a^2,$$



Фиг. 13,3.



Фиг. 13,4.

окончательно

$$2x_1y_1=a^2, \text{ или } x_1y_1=\frac{a^2}{2}.$$

Это и есть искомое преобразованное уравнение равносторонней гиперболы. Так как у равносторонней гиперболы $b=a$, то уравнения ее асимптот $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ при $b=a$ примут вид $y=x$ и $y=-x$.

Эти прямые перпендикулярны и являются биссектрисами 1-го и 2-го координатных углов. Значит, если асимптоты равносторонней гиперболы принять за координатные оси, то уравнение равносторонней гиперболы (если опустить индексы у x_1 и y_1) примет вид

$$xy=\frac{a^2}{2}.$$

Это уравнение носит название уравнения равносторонней гиперболы относительно ее асимптот (фиг. 13, 3). Его следует запомнить.

Если бы мы сделали поворот осей не на $-45°$, а на $+45°$ (фиг. 13, 4), то уравнение гиперболы приняло бы вид

$$x_1y_1=-\frac{a^2}{2}.$$

Опуская индексы в уравнении $x_1y_1=-\frac{a^2}{2}$, мы получили бы уравнение равносторонней гиперболы относительно ее асимптот в виде $xy = -\frac{a^2}{2}$. Запомните, что ветви гиперболы $xy = \frac{a^2}{2}$ расположены в первой и третьей четвертях (фиг. 13, 3), ветви же гиперболы $xy = -\frac{a^2}{2}$ находятся во второй и четвертой четвертях (фиг. 13, 5).

Геометрический смысл дробно-линейной функции

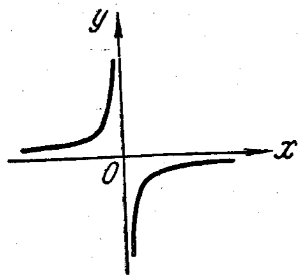
$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (A)$$

Определение. *Функция вида* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ *называется дробно-линейной* (предполагается, что $ad - bc \neq 0$, так как, если $ad - bc = 0$, то $ad = bc$, и тогда $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$). Обозначая общую величину этих отношений через t, мы имели бы

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t,$$

откуда $a = bt$, $c = dt$. Подставляя эти значения a и c в уравнение (A), мы получили бы, что

$$y = \frac{btx+b}{dtx+d} = \frac{b\,(tx+1)}{d\,(tx+1)} = \frac{b}{d},$$



Фиг. 13,5.

и уравнение не содержало бы x. Уравнение (A) определяет равностороннюю гиперболу, асимптоты которой параллельны координатным осям. Ниже даются упражнения на преобразование уравнения (A) к уравнению, в котором нет членов первого измерения.

Преобразованное уравнение может получить вид либо $xy = \frac{a^2}{2}$, либо $xy = -\frac{a^2}{2}$.

Напомним, что уравнение $xy = \frac{a^2}{2}$ определяет гиперболу, асимптоты которой служат координатными осями, а ветви расположены в первой и третьей четвертях; уравнение $xy = -\frac{a^2}{2}$ определяет гиперболу, у которой асимптоты служат координатными осями, а ветви расположены во второй и четвертой четвертях.

Задача 13, 4. Преобразовать дробно-линейную функцию $y = \frac{2x+3}{3x+4}$ так, чтобы в преобразованном виде она не содержала членов первого измерения, и начертить эскиз кривой.

Эту задачу мы решим более простым способом, чем тот, который указан в учебнике. Числитель дроби $2x+3$ в правой части уравнения разделим на ее знаменатель $3x+4$ по правилам деления многочленов:

$$\begin{array}{r|l} 2x+3 & 3x+4 \\ \cline{2-2} -\;2x+\frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ \cline{1-1} \frac{1}{3} & \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{2x+3}{3x+4}=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{3x+4}.$$

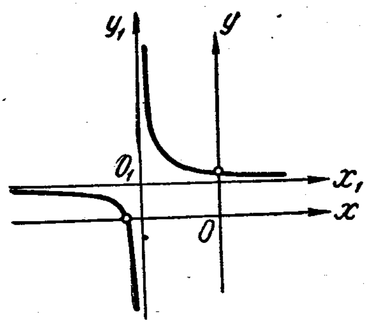
В знаменателе второй дроби в правой части этого равенства вынесем за скобки 3 и получим, что правая часть данного уравнения может быть записана так:

$$\frac{2x+3}{3x+4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{9\left(x+\frac{4}{3}\right)},$$

а данное уравнение приобретает вид

$$y=\frac{2}{3}+\frac{1}{9\left(x+\frac{4}{3}\right)},$$

или $y-\frac{2}{3}=\frac{1}{9\left(x+\frac{4}{3}\right)}$.



Фиг. 13,6.

Обозначим теперь $x_1=x+\frac{4}{3}$; $y_1=y-\frac{2}{3}$. Тогда из сравнения этих соотношений с формулами (12, 2) получаем, что $x_0=-\frac{4}{3}$, $y_0=\frac{2}{3}$, а в преобразованном виде данное уравнение запишется так:

$$y_1=\frac{1}{9x_1}, \quad \text{или} \quad x_1y_1=\frac{1}{9} \quad (\text{фиг. } 13{,}6).$$

Этим же способом преобразуйте уравнение

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

так, чтобы в упрощенном виде оно не содержало членов первого измерения (при этом преобразовании считать $c\neq 0$). Должно получиться

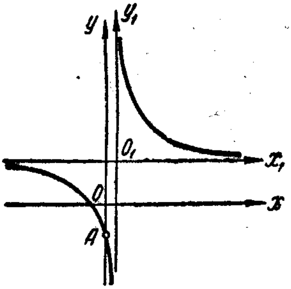
$$y-\frac{a}{c}=\frac{bc-cd}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}},$$

а полагая $x+\frac{d}{c}=x_1$ и $y-\frac{a}{c}=y_1$, будем иметь

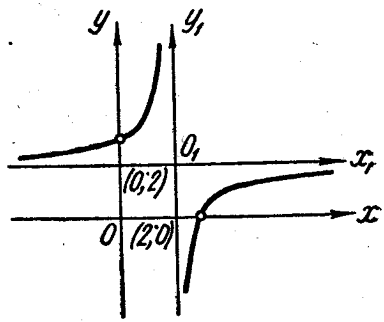
$$y_1=\frac{bc-cd}{c^2}\cdot\frac{1}{x_1}.$$

Новое начало координат находится в точке с координатами $x_0=-\frac{d}{c}$, $y_0=\frac{a}{c}$.

Задача 13, 5 (для самостоятельного решения). Уравнение $y=\frac{5x+2}{2x-1}$ преобразовать так, чтобы в преобразованном виде оно



Фиг. 13,7.



Фиг. 13,8.

не содержало членов первого измерения, и начертить эскиз кривой.

Ответ. $x_1y_1=\frac{9}{4}$.

Это уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной к асимптотам. Ветви кривой находятся в первой и третьей четвертях новой системы координат. Новое начало координат находится в точке $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ — фиг. 13,7.

Задача 13, 6 (для самостоятельного решения). Дробно-линейную функцию $y=\frac{6x-17}{3x-6}$ преобразовать так, чтобы в преобразованном виде уравнение не содержало членов первого измерения, начертить эскиз кривой и найти уравнения асимптот.

Ответ. $x_1y_1=-\frac{5}{3}$; $x_0=2$, $y_0=2$.

Кривая — равносторонняя гипербола, ветви которой расположены во второй и четвертой четвертях новой системы координат. Эскиз кривой представлен на фиг. 13,8. Уравнения асимптот: $x=2$ и $y=2$.

Задача 13, 7 (для самостоятельного решения). Преобразовать дробно-линейные функции

1) $y = \frac{x-1}{x+2}$,

2) $y = \frac{2-2x}{x+1}$,

3) $y = \frac{3x+1}{x+2}$

так, чтобы в преобразованном виде они не содержали членов первого измерения, найти уравнения асимптот и начертить эскизы кривых.

Ответ.

Преобразованные уравнения кривых	Координаты нового начала	Уравнения асимптот
1) $x_1y_1 = -3$;	$x_0 = -2$; $y_0 = 1$;	$x = -2$; $y = 1$;
2) $x_1y_1 = 4$;	$x_0 = -1$; $y_0 = -2$;	$x = -1$; $y = -2$;
3) $x_1y_1 = -5$;	$x_0 = -2$; $y_0 = 3$;	$x = -2$; $y = 3$.

ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Упрощение общего уравнения кривой второго порядка

На двух последних занятиях мы достигали упрощения уравнения кривой параллельным переносом (задачи 12, 4—12, 16), а в задаче 13, 3 уравнение кривой было преобразовано поворотом координатных осей без изменения начала координат.

Общее уравнение линии второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Задача упрощения этого уравнения состоит в том, чтобы в преобразованном уравнении были устранены: 1) член, содержащий произведение текущих координат, и 2) члены, содержащие первые степени двух координат или, по крайней мере, одной из них.

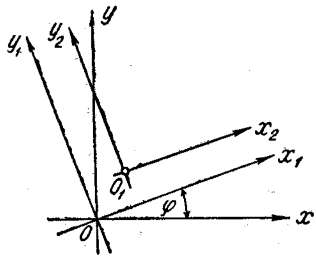
Новая программа по высшей математике для машиностроительных, приборостроительных, механических, энергетических и строительных специальностей втузов не предусматривает изложения в общем виде вопроса об упрощении уравнения кривых второго порядка и изучения инвариантов.

Поэтому мы приведем решение только нескольких задач. Из них учащийся уяснит методы, с помощью которых достигается упрощение уравнений линий второго порядка.

Случаи упрощения уравнения кривой второго порядка, когда оно не содержит произведения текущих координат, были разобраны раньше.

В том случае, когда уравнение линии второго порядка содержит произведение текущих координат, упрощение его следует начинать с поворота осей без изменения начала координат и надлежащим выбором угла поворота добиться того, чтобы из преобразованного уравнения был устранен член, содержащий произведение текущих координат. Преобразование координат в этом случае будем вести по формулам

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi \\ y &= x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi \end{aligned}\right\}.$$



Фиг. 14,1.

Если после устранения из преобразованного уравнения члена с произведением текущих координат в нем останутся члены с первыми степенями текущих координат, то последующим параллельным переносом осей можно, как это было показано, привести уравнение к каноническому виду.

Координатную систему, полученную в результате поворота первоначальной системы координат, будем обозначать через x_1Oy_1, а систему координат, полученную от параллельного переноса координат системы x_1Oy_1,— через $x_2O_1y_2$ (см. фиг. 14, 1).

Задача 14, 1. Привести к простейшему виду уравнение кривой

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

и найти координаты центра в первоначальной системе координат.

Решение. Начнем с поворота осей. Целью этого преобразования, как вы уже знаете, является уничтожение в преобразованном уравнении члена, содержащего произведение текущих координат. Формулы преобразования координат поворотом осей без изменения начала координат имеют вид

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi,$$

$$y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Подставляя эти значения x и y в заданное уравнение, будем иметь

$$5(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)^2 + 4(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)\cdot(x_1\sin\varphi +$$
$$+ y_1\cos\varphi) + 8(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi)^2 - 32(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi) -$$
$$- 56(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) + 80 = 0.$$

Раскроем скобки и получим

$$5x_1^2\cos^2\varphi - 10x_1y_1\sin\varphi\cdot\cos\varphi + 5y_1^2\sin^2\varphi + 4x_1^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi -$$
$$-4x_1y_1\sin^2\varphi + 4x_1y_1\cos^2\varphi - 4y_1^2\sin\varphi\cos\varphi +$$
$$+8x_1^2\sin^2\varphi + 16x_1y_1\sin\varphi\cdot\cos\varphi + 8y_1^2\cos^2\varphi -$$
$$-32x_1\cos\varphi + 32y_1\sin\varphi - 56x_1\sin\varphi -$$
$$-56y_1\cos\varphi + 80 = 0.$$

Сделаем приведение подобных членов:

$$(5\cos^2\varphi + 4\sin\varphi\cos\varphi + 8\sin^2\varphi)x_1^2 + (6\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi +$$
$$+4\cos^2\varphi)x_1y_1 + (5\sin^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi + 8\cos^2\varphi)y_1^2 -$$
$$-(32\cos\varphi + 56\sin\varphi)x_1 + (32\sin\varphi -$$
$$-56\cos\varphi)y_1 + 80 = 0. \qquad (A)$$

Выберем теперь угол поворота φ так, чтобы коэффициент при x_1y_1 обратился в нуль. Приравнивая этот коэффициент нулю, получаем уравнение для определения значения угла φ, при котором этот коэффициент обратится в нуль:

$$6\sin\varphi\cos\varphi - 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на $\cos^2\varphi$ ($\cos\varphi \neq 0$, так как если $\cos\varphi = 0$, то $\sin\varphi = \pm 1$, и тогда это уравнение не имеет места, ибо получается, что $-4 = 0$. Это замечание следует помнить и при решении последующих задач). После деления получим

$$\frac{6\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi} - 4\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} + 4 = 0,$$

или после упрощений

$$2\,\mathrm{tg}^2\varphi - 3\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2 = 0.$$

Отсюда получаем для тангенса угла φ поворота координатных осей такие значения:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4},$$

или

$$(\mathrm{tg}\,\varphi)_1 = 2 \text{ и } (\mathrm{tg}\,\varphi)_2 = -\frac{1}{2}.$$

Эти два значения $\mathrm{tg}\,\varphi$ соответствуют двум взаимно-перпендикулярным направлениям, так как произведение этих тангенсов равно -1. Из $(\mathrm{tg}\,\varphi) = 2$ следует, что угол поворота φ может находиться в первой или третьей четвертях, а из $(\mathrm{tg}\,\varphi) = -\frac{1}{2}$ следует, что угол поворота φ может находиться во второй или четвертой четвертях. Условимся всегда брать для $\operatorname{tg}\varphi$ из двух возможных значений — положительное, а угол поворота φ — в первой четверти $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, из двух возможных значений тангенса берем $\operatorname{tg}\varphi=2$. Определим по известному $\operatorname{tg}\varphi$ величину $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Это нам нужно для того, чтобы определить коэффициенты при x_1^2, y_1^2, x_1 и y_1 в уравнении (A).

Так как у нас $\operatorname{tg}\varphi>0$, а угол φ находится в первой четверти, то по известному $\operatorname{tg}\varphi$ функции $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ могут быть определены следующим образом:

$$\sin\varphi=+\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},\quad \cos\varphi=+\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

Из этого следует, что $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$\sin^2\varphi=\frac{4}{5},\ \cos^2\varphi=\frac{1}{5},\ \sin\varphi\cdot\cos\varphi=\frac{2}{5}.$$

При найденных значениях $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ коэффициент при x_1^2 равен 9, коэффициент при x_1y_1 — нулю, при y_1^2 равен 4, коэффициент при x_1 равен $-\frac{144}{\sqrt{5}}$, а при y_1 равен $\frac{8}{\sqrt{5}}$. Подставляя эти значения в уравнение (A) и поступая так же, как в задаче 12, 13, получим

$$9\left(x_1^2-\frac{16}{\sqrt{5}}x_1\right)+4\left(y_1^2+\frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)+80=0.$$

Выделяя в скобках полные квадраты, имеем

$$9\left[\left(x_1-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{64}{5}\right]+4\left[\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{1}{5}\right]+80=0,$$

откуда

$$9\left(x_1-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{576}{5}+4\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}+80=0,$$

или

$$9\left(x_1-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=36. \qquad (B)$$

Сделаем теперь параллельный перенос координатной системы x_1Oy_1 (фиг. 14, 1).

Формулы преобразования, аналогичные формулам (12, 1) и (12, 2), запишем так:

$$\left.\begin{aligned}x_1&=x_2+x_0\\ y_1&=y_2+y_0\end{aligned}\right\} \qquad (14, 1)$$

и

$$\left.\begin{aligned}x_2&=x_1-x_0\\ y_2&=y_1-y_0\end{aligned}\right\} \qquad (14, 2)$$

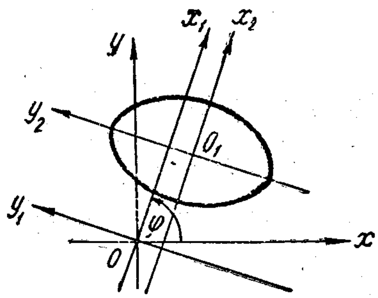
Теперь в уравнение (B) введем обозначения:

$x_2 = x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}$; $y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$; из сравнения с формулами (14, 2) заключаем, что $x_0 = +\frac{8}{\sqrt{5}}$, $y_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, а уравнение ($B$) перепишем так:

$$9x_2^2 + 4y_2^2 = 36.$$

После деления обеих частей равенства на 36 получим данное уравнение в каноническом виде:

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1.$$



Фиг. 14,2.

Итак, данное уравнение определяет эллипс. Он вытянут вдоль оси O_1y_2. Эскиз кривой показан на фиг. 14, 2. Докажите, что точка O_1 — центр эллипса в исходной системе координат имеет координаты (2, 3)*.

Ниже помещено для самостоятельного решения несколько задач с подробными ответами и указаниями. Эти задачи следует решать так же, как и задачу 14, 1. При решении их следует считать, что угол поворота находится в первой четверти, и, значит, из двух возможных значений $\operatorname{tg}\varphi$ надо брать положительное.

Учащимся рекомендуется ознакомиться не только с приведенным, но и с более совершенным методом упрощения общего уравнения кривой второго порядка, изложенным в учебниках И. И. Привалова и Н. В. Ефимова.

Задача 14, 2 (для самостоятельного решения).

Упростить уравнение кривой

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0.$$

Ответ. Кривая — гипербола. Каноническое уравнение ее

$$\frac{y_2^2}{1} - \frac{x_2^2}{4} = 1 \text{ (фиг. 14,3).}$$

---

* Принимая во внимание, что $x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi$; $y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi$, а $x_1 = x_2 + x_0$; $y_1 = y_2 + y_0$, получаем, что

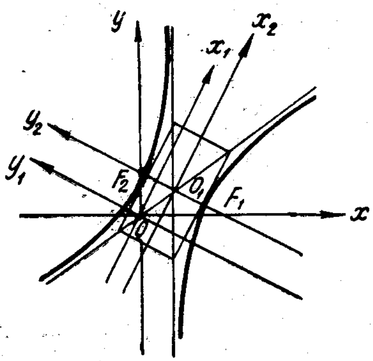
$$x = (x_2 + x_0)\cos\varphi - (y_2 + y_0)\sin\varphi;$$

$$y = (x_2 + x_0)\sin\varphi + (y_2 + y_0)\cos\varphi.$$

Указание. Уравнение для определения $\operatorname{tg}\varphi$ имеет вид $2\operatorname{tg}^2\varphi - 3\operatorname{tg}\varphi - 2 = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = 2$, $0° < \varphi < 90°$. После поворота первоначальной координатной системы на угол, для которого $\operatorname{tg}\varphi = 2$, уравнение приобретает вид

$$x_1^2 - 4y_1^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 + 5 = 0.$$

В системе координат x_1Oy_1 координаты центра гиперболы $O_1\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

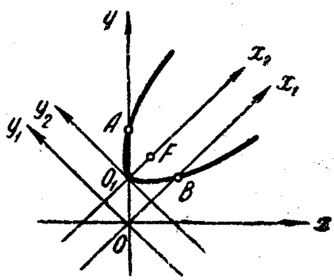


Фиг. 14,3.

Задача 14, 3 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение линии

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0.$$

Ответ. Кривая — парабола. Ее каноническое уравнение $y_2^2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}x_2$ (фиг. 14,4). Для определения $\operatorname{tg}\varphi$ получим уравнение $2\operatorname{tg}^2\varphi + 3\operatorname{tg}\varphi - 2 = 0$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$; $0° < \varphi < 90°$. После поворота первоначальной координатной системы на угол, для которого $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$, уравнение приобретет вид $5y_1^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{10}{\sqrt{5}}y_1 + 2 = 0$.



Фиг. 14,4.

В системе координат x_1Oy_1 координаты вершины параболы $O_1\left(\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Задача 14, 4 (для самостоятельного решения). Упростить уравнение кривой

$$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$$

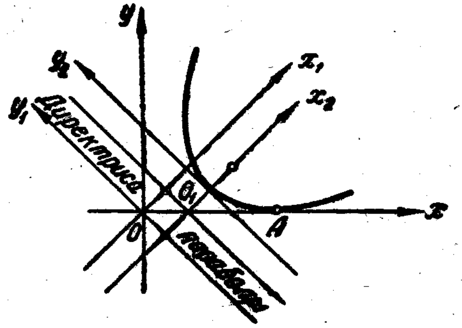
и найти координаты фокуса в исходной системе координат.

Ответ. Кривая — парабола. Ее каноническое уравнение $y_2^2 = 2\sqrt{2}x_2$ (фиг. 14, 5); $\operatorname{tg}\varphi = 1$; $\varphi = 45°$. После поворота первоначальной координатной системы на этот угол уравнение примет вид

$$2y_1^2 - 4\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}y_1 + 9 = 0.$$

В системе координат x_1Oy_1 вершина параболы имеет координаты $O_1\left(\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, координаты фокуса в исходной системе координат F (2, 1).

Задача 14, 5. Привести к простейшему виду уравнение



Фиг. 14,5.

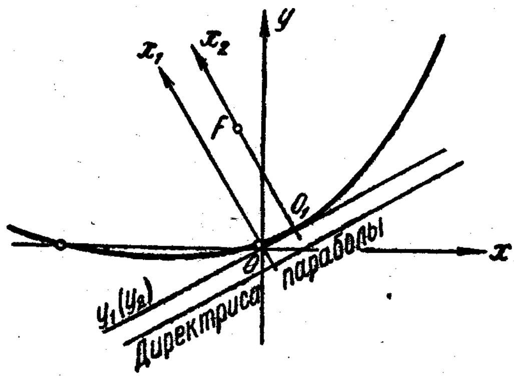
$$9x^2 + 24\,xy + 16y^2 + 50x -$$
$$-100y + 25 = 0.$$

Найти уравнение директрисы и координаты фокуса в первоначальной системе координат.

Ответ. Кривая — парабола. Ее каноническое уравнение $y_2^2 = 4x_2$ (фиг. 14, 6). В первоначальной системе координат фокус параболы имеет координаты $F\left(-\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$, а уравнение директрисы $4x - 3y - 5 = 0$.

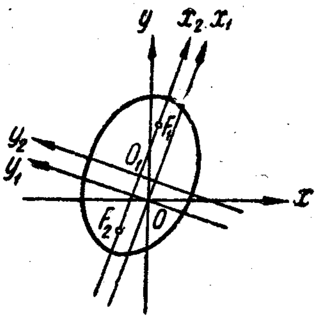
Задача 14, 6. Упростить уравнение кривой

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y - 319 = 0.$$

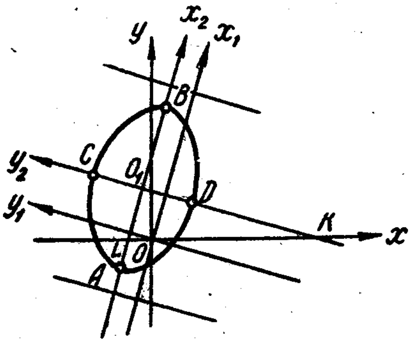


Фиг. 14, 6.

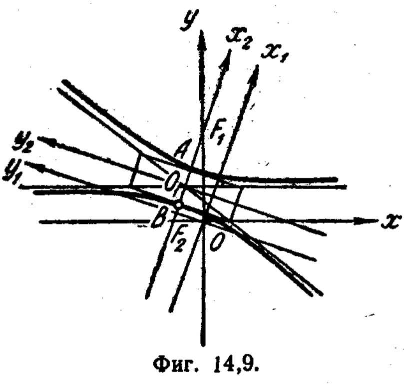
Ответ. Кривая — эллипс. Его каноническое уравнение $\frac{x_2^2}{81} + \frac{y_2^2}{36} = 1$. В системе координат x_1Oy_1 центр эллипса имеет координаты $O_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (см. фиг. 14,7).



Фиг. 14,7.



Фиг. 14,8.



Фиг. 14,9.

Задача 14, 7. Упростить уравнение линии

$$34x^2-12xy+18y^2+24x-72y-504=0.$$

Найти в первоначальной системе координат уравнения осей симметрии.

Ответ. Кривая — эллипс. Его каноническое уравнение $\frac{x_2^2}{36}+\frac{y_2^2}{16}=1$ (фиг. 14, 8). Уравнение осей симметрии

$$3x-y+2=0;\quad x+3y-6=0.$$

Задача 14, 8. Упростить уравнение линии

$$6xy+8y^2-12x-26y+11=0.$$

Ответ. Кривая — гипербола. Ее каноническое уравнение $\frac{x_1^2}{1}-\frac{y_1^2}{9}=1$ (фиг. 14, 9).

ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определители и системы линейных алгебраических уравнений.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Вычисление определителей основывается на их известных свойствах, которые относятся к определителям всех порядков. Вот эти свойства:

1. Если переставить две строки (или два столбца) определителя, то определитель изменит знак.

2. Если соответствующие элементы двух столбцов (или двух строк) определителя равны или пропорциональны, то определитель равен нулю.

3. Значение определителя не изменится, если поменять местами строки и столбцы, сохранив их порядок.

4. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

5. Значение определителя не изменится, если к элементам одной строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число. Для определителей третьего порядка это свойство может быть записано, например, так:

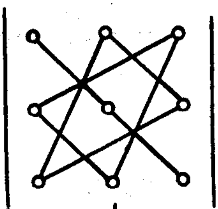
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \qquad (15, 1)$$

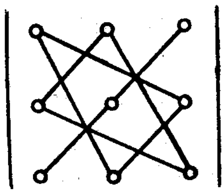
7. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - \\ - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \qquad (15, 2)$$



+

Фиг. 15,1



—

Фиг. 15,2

Существует удобная схема для вычисления определителя третьего порядка (см. фиг. 15, 1 и фиг. 15, 2).

По схеме, приведенной на фиг. 15, 1, произведения соединенных элементов берутся со своим знаком, а по схеме фиг. 15, 2 — с обратным. Величина определителя равна алгебраической сумме полученных шести произведений.

В определителе порядка n алгебраическим дополнением элемента, стоящего на пересечении k-го столбца и l-й строки, называется определитель порядка $(n-1)$, получаемый из данного вычеркиванием в нем строки и столбца, на пересечении которых стоит этот элемент, причем к этому определителю присоединяется множитель $(-1)^{k+l}$, где $(k+l)$ — сумма номеров вычеркнутой строки и столбца. Алгебраическое дополнение элемента, рассматриваемое без множителя $(-1)^{k+l}$, называется минором этого элемента.

Пример. В определителе 5-го порядка

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}. \qquad (15, 3)$$

алгебраическим дополнением, соответствующим элементу d_3, будет определитель 4-го порядка

$$(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Здесь в показателе степени у (-1) три — номер строки, четыре — номер столбца, на пересечении которых стоит элемент d_3.

8. Определитель равен сумме произведений каждого элемента некоторой строки (или столбца) на его алгебраическое дополнение.

Условимся обозначать элементы определителя маленькими буквами, а их алгебраические дополнения — соответствующими большими буквами с теми же индексами. Так, алгебраическое дополнение элемента a_3 будем обозначать через A_3, алгебраическое дополнение элемента d_4 — через D_4 и т. д. На основании свойства (8) определитель (15, 3) может быть представлен, например, в таком виде:

$$D = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 + d_3D_3 + e_3E_3.$$

Это равенство представляет собой разложение определителя по элементам третьей строки. По свойству 8 вычисление определителя порядка n сводится к вычислению определителей порядка $(n-1)$.

9. Если все элементы какого-нибудь ряда определителя, кроме одного, равны нулю, то определитель равен этому не равному нулю элементу, умноженному на его алгебраическое дополнение.

С помощью указанных свойств можно вычислить определитель любого порядка.

Задача 15, 1. Вычислить определители

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

Решение. По формуле (15, 1) имеем

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 4\cdot 7 = -26,$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 2 = 1.$$

Задача 15, 2 (для самостоятельного решения). Вычислить определители

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -4 & -2 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ. 1) -32; 2) 3; 3) 5.

Задача 15,3. Вычислить определители

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение. С помощью формулы (15, 2) получаем

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 5 + 4\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 5 - 0\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = 4 + 0 + 12 - 40 - 0 - 1 = -25.$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot(-2) + 7\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot 4\cdot 2 - 3\cdot 3(-1) - 7\cdot 4\cdot(-2) - 2\cdot 1\cdot 2 = -12 - 7 + 24 + 9 + 56 - 4 = 66.$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-3) + 3\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 3\times 1\cdot(-3) - 2\cdot 4\cdot 1 = -12 + 12 + 1 - 2 + 9 - 8 = 0.$$

Задача 15, 4 (для самостоятельного решения).

Вычислить определители

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

На каждом из этих определителей проверить, что сумма произведений элементов какого-нибудь ряда на алгебраические дополнения, соответствующие элементам параллельного ряда, равна нулю.

Ответ. 1) 120; 2) —236; 3) 15.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{aligned}\right\}. \tag{15, 4}$$

Определителем этой системы называется определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных. Этот определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{15, 5}$$

будем обозначать буквой D.

1. Если определитель системы не равен нулю, то система (15, 4) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{15, 6}$$

В этом случае говорят, что система — совместная или определенная.

Определители, стоящие в числителях этих дробей, будем обозначать соответственно через D_x и D_y.

Итак, значение неизвестного системы (15, 4) равно дроби, знаменатель которой есть определитель системы, а числитель есть определитель, получающийся из определителя системы, заменой в нем столбца из коэффициентов при определяемом неизвестном столбцом свободных членов.

2. Если же определитель системы D равен нулю, но, по крайней мере, один из определителей D_x и D_y в числителях формул (15, 6) не равен нулю, то система решений не имеет. В этом случае говорят, что она противоречива, или несовместна.

3. Если же равен нулю не только определитель системы, но и определители D_x и D_y, а хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю, то одно из уравнений системы является следствием другого, и система (15, 4) двух линейных уравнений с двумя неизвестными приводится к одному уравнению, всякое решение которого является одновременно и решением второго уравнения. В этом случае система допускает бесконечное множество решений, и о ней говорят, что она неопределенная.

II. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}\right\} \qquad (15, 7)$$

Определитель
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (15, 8)$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы.

1. Если определитель системы $D \neq 0$, то система (15, 7) имеет решение, и притом единственное. Это решение находится по формулам

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \qquad (15, 9)$$

Из этого заключаем, что значение неизвестного системы (15, 7) равно дроби, знаменатель которой есть определитель системы, *а числитель есть определитель, получающийся из определителя системы заменой в нем столбца из коэффициентов при определяемом неизвестном столбцом свободных членов.*

Определители, стоящие в числителях дробей (15, 9), мы будем обозначать соответственно через D_x, D_y, D_z.

2. Если $D=0$, но, по крайней мере, один из его миноров и хотя бы один из определителей D_x, D_y и D_z не равен нулю, то система (15, 7) решений не имеет. В этом случае говорят, что она противоречива, или несовместна.

3. Если $D=0$ и все определители, стоящие в числителях дробей (15, 9),— D_x, D_y, D_z — равны нулю, т. е. если

$$D=D_x=D_y=D_z=0,$$

но хотя бы один из миноров в определителе D не равен нулю, то одно уравнение системы (15, 7) является следствием двух других, и система трех уравнений (15, 9) приводится к двум уравнениям, причем решения этих двух уравнений удовлетворяют третьему. В этом случае система (15, 9) имеет бесконечное множество решений и называется неопределенной.

4. Если же все миноры в определителе D равны нулю, но хотя бы один из миноров в каком-нибудь из определителей D_x, D_y, D_z не равен нулю и хотя бы один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю, то система несовместна и решений не имеет.

5. Если в определителях D, D_x, D_y, D_z все миноры равны нулю, но хотя бы один из коэффициентов при неизвестных нулю не равен, то два уравнения системы являются следствием третьего, и система трех уравнений приводится к одному уравнению, является неопределенной и имеет бесконечное множество решений, причем решения этого третьего уравнения удовлетворяют первому и второму уравнениям.

Задача 15, 5. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=8 \\ 3x-y&=3 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Прежде всего вычисляем определитель D системы, стоящий в знаменателях дробей формул (15, 6):

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-7.$$

Так как $D\neq 0$, то заданная система — совместная и определенная, т. е. допускает единственное решение. Формулы для определения x и y запишем по (15, 6) так:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}},\quad \begin{aligned} D_x&=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-14; \\ D_y&=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-21. \end{aligned}$$

Определитель, стоящий в знаменателях двух дробей, уже вычислен и равен $D=-7$;

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-14}{-7}=2; \quad x=2;$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-21}{-7}=3. \quad y=3.$$

Задача 15, 6. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{matrix} x-y=3 \\ 3x-2y=1 \end{matrix}\right\}.$$

Решение. Вычисляем определитель системы

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=1;$$

так как $D\neq 0$, то система — совместная и определенная, т. е. допускает единственное решение. Неизвестные x и y найдутся по формулам

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}; \quad \begin{matrix} D_x=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-5; \\ D_y=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-8. \end{matrix}$$

Знаменатель этих дробей $D=1$ был вычислен раньше:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-5}{1}=-5; \quad x=-5;$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-8}{1}=-8; \quad y=-8.$$

Задача 15, 7 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\left.\begin{matrix} x+3y=-2 \\ 3x-y=7 \end{matrix}\right\}.$$

Ответ. $x=1,9$; $y=-1,3$.

Задача 15, 8 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{matrix} x+4y=12 \\ 3x-2y=-6 \end{matrix}\right\}, \quad 2)\ \left.\begin{matrix} 13x-12y=-9 \\ 2x+3y=18 \end{matrix}\right\}, \quad 3)\ \left.\begin{matrix} 3x+5y=12 \\ 2x+7y=19 \end{matrix}\right\}.$$

Ответ. 1) $x=0$; $y=3$; 2) $x=3$; $y=4$; 3) $x=-1$; $y=3$.

Задача 15, 9. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{matrix} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=7 \end{matrix}\right\}.$$

Решение. Составляем определитель системы $D=\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}=0.$ Так как $D=0$, то система или несовместная, или неопределенная. Составляем определители, стоящие в числителях дробей формул (15, 6):

$$D_x=\begin{vmatrix}5&3\\7&6\end{vmatrix}=9\neq 0.$$

Так как $D=0$, а $D_x\neq 0$, то система несовместна, т. е. решений не имеет. Геометрический смысл нашего заключения состоит в том, что уравнения, входящие в систему, есть уравнения двух параллельных прямых, а так как параллельные прямые не пересекаются, то решений предложенная система не имеет (прямые $2x+3y-5=0$ и $4x+6y-7=0$ параллельны, так как коэффициенты при соответствующих текущих координатах пропорциональны: $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}\Big)$.

Задача 15, 10. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}3x-4y&=5\\6x-8y&=10\end{aligned}\right\}.$$

Решение. Составляем определитель системы

$$D=\begin{vmatrix}3&-4\\6&-8\end{vmatrix}=0.$$

Так как определитель системы равен нулю, то может оказаться, что система или вовсе не имеет решений, т. е. несовместна, или является неопределенной, т. е. допускает бесчисленное множество решений (напоминаем, что система уравнений называется совместной и определенной, когда она имеет решение, и притом единственное). В нашем случае $D=0$. Вычислим D_x и D_y:

$$D_x=\begin{vmatrix}5&-4\\10&-8\end{vmatrix}=-40+40=0;\ D_x=0;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3&5\\6&10\end{vmatrix}=30-30=0;\ D_y=0.$$

Таким образом, $D=0$, $D_x=0$ и $D_y=0$. Это значит, что система неопределенная. Действительно, если обе части второго уравнения разделить на 2, то получится первое уравнение, и система двух уравнений сводится к одному уравнению с двумя неизвестными, а именно:

$$3x-4y=5$$

и имеет бесчисленное множество решений, заключающихся в формуле

$$y = \frac{3x - 5}{4}.$$

Давая произвольные значения неизвестному x, получим соответствующие значения y.

Задача 15, 11 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned} 15x - y &= 14 \\ 12x + 13y &= 25 \end{aligned}\right\};\quad 2)\ \left.\begin{aligned} 3x - 5y &= 1 \\ 6x - 10y &= 5 \end{aligned}\right\};\quad 3)\ \left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 17 \\ 4x + 6y &= 34 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. 1) $x = y = 1$; 2) система несовместна; 3) система является неопределенной.

Задача 15, 12. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Составляем и вычисляем определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9;\ D \neq 0.$$

Это значит, что система совместна и определенна, т. е. имеет решение, и притом единственное. Формулы (15, 9) для определения неизвестных дают

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}};\quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}};\quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}.$$

Определитель, стоящий в знаменателях этих дробей, нами уже вычислен. Он равен 9. $D_x = 18$; $D_y = -18$; $D_z = 9$.

$$x_1 = \frac{D_x}{D} = \frac{18}{9} = 2;$$

$$x_2 = \frac{D_y}{D} = \frac{-18}{9} = -2;$$

$$x_3 = \frac{D_z}{D} = \frac{9}{9} = 1.$$

Задача 15, 13. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x + y + z &= -2 \\ 5x - y - z &= 10 \\ x - y + 5z &= -12 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Вычислим прежде всего определитель системы

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=-48.$$

Поскольку этот определитель не равен нулю, система имеет решение, и притом единственное.

Приступаем к определению неизвестных по формулам (15, 9):

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 10 & -1 & -1\\ -12 & -1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 10 & -1\\ 1 & -12 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}}.$$

Определитель, стоящий в знаменателях этих дробей, нами уже вычислен. Он равен -48. Вычисляем определители, стоящие в числителях этих дробей:

$$D_x=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 10 & -1 & -1\\ -12 & -1 & 5\end{vmatrix}=-48;\quad D_x=-48;$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 10 & -1\\ 1 & -12 & 5\end{vmatrix}=96;\qquad D_y=96;$$

$$D_z=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}=144;\qquad D_z=144$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-48}{-48}=1;\ x=1;$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{96}{-48}=-2;\ y=-2;$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{144}{-48}=-3;\ z=-3.$$

Задача 15, 14 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}2x_1+x_2-x_3&=0\\ x_1-x_2-3x_3&=13\\ 3x_1-2x_2+4x_3&=-15\end{aligned}\right\}$$

Ответ. $x_1=-1;\ x_2=-2;\ x_3=-4.$

Задача 15, 15 (для самостоятельного решения). Решить системы уравнений:

$$1)\ \left.\begin{aligned}x_1+3x_2-3x_3&=13\\ 2x_1-3x_2+3x_3&=-10\\ x_1+x_3&=0\end{aligned}\right\};\qquad 2)\ \left.\begin{aligned}2x_1-x_2+x_3&=-4\\ 3x_1+x_2-x_3&=-1\\ 4x_1-2x_2+3x_3&=-7\end{aligned}\right\};$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 6 \\ 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_2 &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. 1) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$; 2) $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$; 3) $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

Задача 15, 16. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 4z &= 5 \\ 2x - 3y + 6z &= 11 \\ 8x - 3y + 10z &= 21 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Вычисляем прежде всего определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 8 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, определитель системы равен нулю.

Минор этого определителя, стоящий в левом верхнем углу,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$$

Это обстоятельство указывает на то, что третья строка определителя является линейной комбинацией двух первых. И действительно, если элементы первой строки умножить на 2, а второй — на 3 и сложить, то получатся элементы третьей строки (проверьте!).

Вычислим теперь определители D_x, D_y и D_z, и если окажется, что хотя бы один из них не равен нулю, то из этого будет следовать, что система не имеет решений, т. е. она несовместна, или противоречива.

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 11 & -3 & 6 \\ 21 & -3 & 10 \end{vmatrix} = -132.$$

Таким образом, по пункту 2 (стр. 129) правил исследования системы уравнений получается, что система несовместна. Если умножить левую часть первого уравнения на 2, а второго — на 3 и полученные произведения сложить, то получим левую часть третьего уравнения

$$2(x + 3y - 4z) + 3(2x - 3y + 6z) = 8x - 3y + 10z.$$

Отсюда заключаем, что она является линейной комбинацией левых частей первого и второго уравнений. Но если правую часть первого уравнения умножить на 2, а второго — на 3, то получится $2 \cdot 5 + 3 \cdot 11 = 43$, тогда как правая часть третьего уравнения не 43, а 21. Отсюда и произошла противоречивость системы.

Итак, предложенная система уравнений решений не имеет.

Задача 15, 17 (для самостоятельного решения). Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y-3z&=7\\ 3x-y+2z&=4\\ 7x-y+z&=17 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. Система несовместна (см. п. 2, стр. 129) и решений не имеет.

Задача 15, 18. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-\ \ x_3&=0\\ 2x_1-\ \ x_2+3x_3&=1\\ 7x_1+7x_2+3x_3&=2 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Прежде всего вычисляем определитель системы и находим, что $D=0$.

Один из миноров определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7\neq 0.$$

Это указывает на то, что один из рядов определителя D является линейной комбинацией двух других рядов (проверьте, что если сложить утроенные элементы первой строки с соответствующими удвоенными элементами второй строки, то получатся соответствующие элементы третьей строки).

Теперь вычислим D_x, D_y и D_z и получим, что $D_x=D_y=$ $=D_z=0$.

Итак, не только $D=0$, но и $D_x=0$; $D_y=0$ и $D_z=0$. Из того, что все эти определители равны нулю, а минор $\Delta\neq 0$, на основании пункта 3 (стр. 129) следует, что одно из уравнений системы является следствием двух других, и система неопределенна. Действительно, третье уравнение мы получим, если первое умножим на 3, второе — на 2 и почленно сложим.

Отсюда уже заключаем, что третье уравнение удовлетворяется решениями первых двух

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-x_3&=0\\ 2x_1-x_2+3x_3&=1 \end{aligned}\right\},$$

и система приводится к двум уравнениям с тремя неизвестными. Из того, что

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\neq 0,$$

следует, что эта система может быть разрешена относительно x_1 и x_2.

Перепишем уравнения последней системы в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2&=x_3\\ 2x_1-x_2&=1-3x_3 \end{aligned}\right\}.$$

Теперь по хорошо известным формулам получаем

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & 3 \\ 1-3x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}; \quad x_1 = \frac{3-8x_3}{7};$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & 1-3x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{5x_3-1}{7}.$$

Давая неизвестному x_3 произвольные значения, будем получать соответствующие значения для x_1 и x_2. Предложенная система уравнений имеет решения, и этих решений бесконечное множество.

Задача 15, 19. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 13x_1 + 2x_2 + x_3 &= 13 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. Система неопределенна: $x_1 = \frac{5-x_3}{5}$; $x_2 = \frac{4}{5}x_3$.

Задача 15, 20. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 4z &= 3 \\ 7y - 7z &= 1 \\ 2x - y - z &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. Система неопределенна: $x = \frac{18+7z}{7}$; $y = \frac{1+7z}{7}$.

Давая неизвестному z произвольные значения, будем получать соответствующие значения x и y. Предложенная система уравнений имеет решения, и этих решений бесконечное множество.

Задача 15, 21. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - 4y + 2z &= 5 \\ 3x - 6y + 3z &= 9 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Вычисляем определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

К этому заключению мы приходим немедленно, замечая, что элементы первого столбца равны соответствующим элементам третьего столбца.

Исследуем миноры определителя D:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Из этого следует, что коэффициенты при соответствующих неизвестных первого и второго уравнений пропорциональны. Оказывается, что и

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Это показывает, что соответствующие коэффициенты при неизвестных в первом и третьем уравнениях также пропорциональны.

Определитель

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Минор же этого определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Таким образом, определитель системы D и все его миноры равны нулю, один из коэффициентов при неизвестных нулю не равен; оказалось, что и один из миноров определителя D_x не равен нулю. На основании пункта 4 (стр. 129) заключаем, что система несовместна (противоречива) и, значит, решений не имеет.

Всего этого исследования можно было бы и не производить, если заметить, что коэффициенты при неизвестных во втором уравнении получаются из коэффициентов при неизвестных в первом уравнении умножением на 2, а свободный член второго уравнения не получается из свободного члена первого уравнения умножением его на 2. Отсюда сразу можно было сделать заключение о противоречивости системы.

Задача 15, 22. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - 4y + 3z &= 5 \\ 2x - 8y + 6z &= 10 \\ 3x - 12y + 9z &= 15 \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 3 & -12 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку имеет место пропорциональность соответствующих элементов, например, первого и второго столбцов (свойство 2).

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 10 & -8 & 6 \\ 15 & -12 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

так как легко усмотреть пропорциональность соответствующих элементов, например, первой и второй строки (свойство 2).

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 6 \\ 3 & 15 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

так как сразу усматриваем, что элементы первого столбца пропорциональны соответствующим элементам второго и третьего столбцов (свойство 2).

На том же основании сразу заключаем, что

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & -8 & 10 \\ 3 & -12 & 15 \end{vmatrix} = 0.$$

Легко проверить, что все миноры определителей D, D_x, D_y, D_z также равны нулю. И так как один из коэффициентов при неизвестных нулю не равен, то система неопределенна, имеет решения, и решений будет бесконечное множество (см. пункт 5 на стр. 129).

Мы легко усматриваем, что второе и третье уравнения системы получаются из первого умножением соответственно на 2 и на 3, т. е. второе и третье уравнения являются следствиями первого, а потому решения первого уравнения удовлетворяют второму и третьему.

Значит, система трех уравнений в нашем случае приводится к одному первому уравнению

$$x - 4y + 3z = 5,$$

откуда

$$x = 5 + 4y - 3z.$$

Давая y и z произвольные значения, получим соответствующие значения x. Система имеет бесконечное множество решений.

Задача 15, 23 (для самостоятельного решения).

Решить системы уравнений:

1) $\left.\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -4 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}$; 2) $\left.\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 7x_1 - 3x_2 - x_3 &= 17 \\ 16x_1 - 11x_2 + 2x_3 &= 20 \end{aligned}\right\}$;

3) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 22 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$; 4) $\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 11 \\ 3x + 2y - 4z &= 15 \\ 4x + 3y - 7z &= 19 \end{aligned}\right\}$;

5) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= 4 \\ 4x + 6y - 10z &= 8 \\ 8x + 12y - 20z &= 16 \end{aligned}\right\}$.

Ответ. 1) $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -3$.

2) Система несовместна.

3) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

4) Система неопределенна. Она допускает бесконечное множество решений: $x=7-2z$; $y=-3+5z$.

5) Система неопределенна. Она допускает бесконечное множество решений: $x=2-\frac{3}{2}y+\frac{5}{2}z$.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Векторная алгебра.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это занятие посвящается векторной алгебре, имеющей очень большое значение для механики, электротехники и других технических дисциплин. Напомним основные сведения из векторной алгебры.

Различают два рода величин: скалярные и векторные.

Фиг. 16,1.

1. Если некоторая величина вполне определяется ее числовым значением, то ее называют скалярной. Примерами скалярных величин могут служить масса, плотность, работа, сила тока, температура. Скаляры являются алгебраическими величинами и с ними можно производить любые алгебраические действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и т. д.

2. Если при определении некоторой величины для ее полной характеристики, кроме числового значения, надо знать и ее направление, то такая величина называется векторной, или вектором. Примерами векторных величин являются скорость, ускорение, сила. Длина вектора называется также его модулем, или абсолютной величиной.

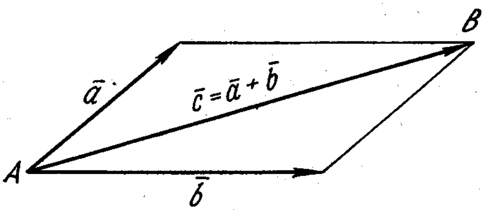
3. Вектор обозначается графически отрезком прямой, на котором ставится стрелка, указывающая направление вектора (фиг. 16, 1). Мы будем вектор обозначать одной буквой с черточкой над ней, например, $\bar{a}$, а модуль этого вектора — той же буквой, только без черточки над ней, т. е. a. Модуль вектора a часто обозначается $|\bar{a}|$.

Вектор мы будем также обозначать $\overline{AB}$, где A — начало и B — конец вектора, а его модуль — теми же буквами, но без черточки наверху.

4. Вектор равен нулю, если его модуль равен нулю. Такой вектор называется нулевым.

5. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными, если 1) равны их модули, 2) они параллельны и 3) направлены в одну и ту же сторону.

Два вектора с равными модулями, лежащие на параллельных прямых, но противоположно направленные, называются противоположными. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается через $-\bar{a}$.



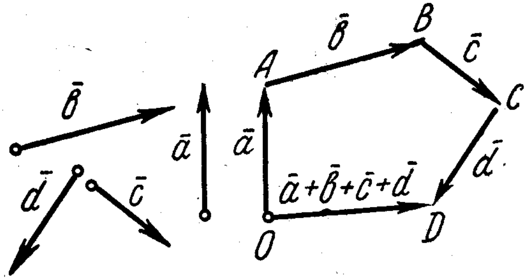
Фиг. 16,2.

6. Сложение векторных величин производится по правилу параллелограмма: сумма двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведенных к общему началу, есть третий вектор $\bar{c}$, длина которого равна длине диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а направлен он от точки A к точке B (фиг. 16,2)

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}.$$

Модуль вектора $\bar{c}$ вычисляется по формуле

$$c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\bar{a},\ \bar{b})}. \qquad (16,1)$$



Фиг. 16, 3.

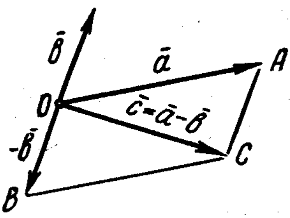
7. Сумму нескольких векторов, например $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$, строят так: берут произвольную точку O плоскости и из нее строят вектор $\overline{OA}$, равный вектору $\bar{a}$; из точки A проводят вектор $\overline{AB}$, равный вектору $\bar{b}$, из точки B — вектор $\overline{BC}$, равный вектору $\bar{c}$ и, наконец, из точки C строят вектор $\overline{CD}$, равный вектору $\bar{d}$. Вектор $\overline{OD}$, замыкающий полученную ломаную линию $OABCD$, и будет суммой векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$ (фиг. 16, 3):

$$\overline{OD}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}.$$

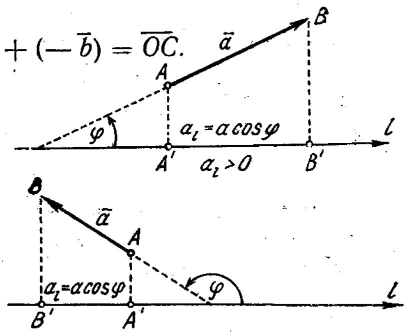
По такому же правилу строится и сумма любого числа векторов.

8. Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой третий вектор $\bar{c}$, который равен сумме векторов $\bar{a}$ и $-\bar{b}$ (фиг. 16, 4). Вектор $-\bar{b}$ параллелен вектору $\bar{b}$, равен ему по модулю, но противоположно направлен:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) = \overline{OC}.$$



Фиг. 16,4



Фиг. 16,5.

9. При умножении вектора $\bar{a}$ на скаляр k получается вектор $\bar{b}$, модуль которого равен модулю вектора $\bar{a}$, умноженному на k, т. е. $b = ak$. Направления векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ совпадают, если $k > 0$, и они противоположны, если $k < 0$. Имеем

$$k \cdot \bar{a} = \bar{b}, \text{ или } \bar{a} = \frac{1}{k}\bar{b} \quad (k \neq 0).$$

10. Два вектора, лежащие на параллельных прямых, независимо от того, направлены они одинаково или противоположно, называются коллинеарными.

11. Единичным вектором, или ортом данного вектора, называется вектор, совпадающий по направлению с данным вектором и имеющий модуль, равный единице.

12. Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось $\bar{l}$ называется длина отрезка $A'B'$, заключенного между проекциями начала и конца вектора на эту ось. Этой длине приписывается знак плюс, если направление отрезка $A'B'$ совпадает с направлением оси, и знак минус, если его направление противоположно направлению оси.

Проекция вектора на ось есть скалярная величина, равная произведению модуля проектируемого вектора на косинус угла между положительными направлениями оси и вектора (фиг. 16, 5). Проекция вектора a на ось $\bar{l}$ обозначается через a_l или $\text{пр}_l\bar{a}$, а угол между осью $\bar{l}$ и вектором $\bar{a}$ будем обозначать так: $(\bar{l}, \widehat{\ } \bar{a})$. Таким образом,

$$a_l = \text{пр}_l\bar{a} = a\cos\varphi. \tag{16, 2}$$

Если α, β и γ — углы, образованные вектором $\bar{a}$ с координатными осями Ox, Oy и Oz прямоугольной системы координат, то проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси будут равны

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a\cos\alpha \\ a_y &= a\cos\beta \\ a_z &= a\cos\gamma \end{aligned}\right\}. \qquad (16, 3)$$

В дальнейшем предполагается, что система координат — прямоугольная.

Модуль вектора через его проекции на оси прямоугольной системы координат вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \qquad (16, 4)$$

т. е. модуль вектора равен арифметическому значению квадратного корня из суммы квадратов его проекций.

Вектор равен нулю, если все три его проекции равны нулю (этим положением пользуются, например, в механике при выводе необходимых и достаточных условий равновесия тела под действием системы сил, проходящих через одну точку).

Если векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ равны, то равны и их проекции:

$$a_{1x} = a_{2x};\ a_{1y} = a_{2y};\ a_{1z} = a_{2z}. \qquad (16, 5)$$

Если для вектора $\bar{a}$ известны координаты его начала $A(x_1, y_1, z_1)$ и координаты его конца $B(x_2, y_2, z_2)$, то проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси определяются по формулам

$$a_x = x_2 - x_1;\quad a_y = y_2 - y_1;\quad a_z = z_2 - z_1, \qquad (16, 6)$$

а модуль вектора в этом случае определится по формуле

$$a = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \qquad (16, 7)$$

Очевидно, что по формуле (16, 7) следует вычислять и расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

13. Проекция суммы векторов на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций этих векторов на ту же ось.

Из векторного равенства

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \ldots + \bar{a}_n \qquad (16, 8)$$

следуют такие три скалярные равенства:

$$\begin{aligned} a_x &= a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + \ldots + a_{nx}; \\ a_y &= a_{1y} + a_{2y} + a_{3y} + \ldots + a_{ny}; \\ a_z &= a_{1z} + a_{2z} + a_{3z} + \ldots + a_{nz}. \end{aligned} \qquad (16,9)$$

14. Если $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ — векторы, по модулю равные единице и направленные по координатным осям Ox, Oy и Oz, то разло-

жение вектора $\bar{a}$ по трем координатным осям выражается формулой

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \tag{16, 10}$$

где a_x, a_y и a_z — проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси Ox, Oy и Oz.

Величины a_x, a_y и a_z — проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси — называются координатами вектора*. Если вектор $\bar{a}$ имеет начало в начале координат, а его конец A имеет координаты x, y и z, то тогда его проекции на координатые оси равны координатам его конца:

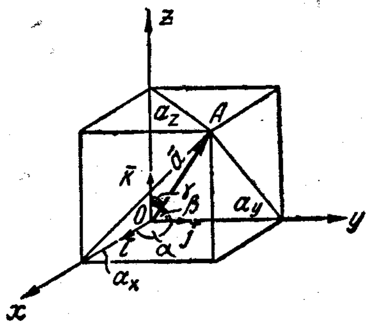
$$a_x = x; \quad a_y = y; \quad a_z = z.$$

В этом случае вектор $\bar{a}$ называется радиусом-вектором точки A. Радиус-вектор точки обозначается обыкновенно через $\bar{r}$ (фиг. 16, 6)

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \tag{16, 11}$$

а модуль радиуса-вектора точки A $(x,\ y,\ z)$ вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{16, 12}$$



Фиг. 16,6.

15. Углы, образуемые вектором $\bar{a}$ с координатными осями Ox, Oy и Oz, определяются из формул (16, 3) и (16, 4):

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \tag{16, 13}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Косинусы, определяемые по этим формулам, называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Для направляющих косинусов вектора имеет место формула

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{16, 14}$$

т. е. сумма квадратов косинусов углов, образуемых вектором с тремя взаимно-перпендикулярными осями, равна единице.

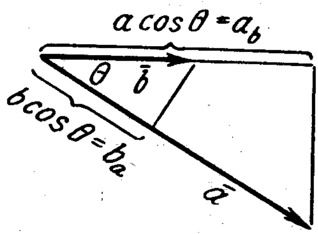
---

* Если вектор $\bar{a}$ имеет координаты a_x, a_y, a_z, то это обозначается так: $\bar{a}\ \{a_x,\ a_y,\ a_z\}$.

Если $|\bar{a}| = 1$, т. е. если $\bar{a}$ — единичный вектор, обозначаемый обыкновенно через $\bar{a}^0$, то его проекции на координатные оси вычисляются по формулам

$$a_x^0 = 1 \cdot \cos\alpha; \quad a_y^0 = 1 \cdot \cos\beta; \quad a_z^0 = 1 \cdot \cos\gamma, \qquad (16, 15)$$

т. е. проекции единичного вектора $\bar{a}^0$ на оси прямоугольной системы координат Ox, Oy и Oz равны соответственно направляющим косинусам этого вектора. Имеет место формула



Фиг. 16,7

$$\bar{a}^0 = \bar{i} \cdot \cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k} \cdot \cos\gamma. \qquad (16, 16)$$

16. Если даны два вектора

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k},$$

$$\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k},$$

то
$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$$

и

$$(\bar{a} \pm \bar{b})_x = a_x \pm b_x; \quad (\bar{a} \pm \bar{b})_y = a_y \pm b_y; \quad (\bar{a} \pm \bar{b})_z = a_z \pm b_z. \qquad (16, 17)$$

17. *Скалярным произведением* двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается символом $\bar{a} \cdot \bar{b}$. Если обозначить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ через θ, для скалярного произведения будем иметь

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\theta. \qquad (16, 18)$$

Из формулы (16, 18) следует, что скалярное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — это произведение модуля одного из них на проекцию второго на направление первого вектора (фиг. 16, 7):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a \cdot b_a = b \cdot a_b, \qquad (16, 19)$$

откуда $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{a}$; $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{b}$. Скалярное произведение двух перпендикулярных векторов равно нулю, так как в этом случае $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Скалярное произведение имеет свойства, аналогичные свойствам произведений чисел:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$

(переместительное свойство умножения);

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$$

(распределительное, или дистрибутивное свойство произведения). Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы проекциями на координатные оси

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$
$$\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$

то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{16, 20}$$

а косинус угла θ между этими векторами определяется по формуле

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}, \tag{16, 21}$$

Если углы, образуемые вектором $\bar{a}$ с координатными осями, обозначить через α, β и γ, а углы, образуемые вектором $\bar{b}$ с координатными осями, — через α_1, β_1 и γ_1, то косинус угла θ между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется по формуле

$$\cos\theta = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1. \tag{16, 22}$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, и тогда

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \tag{16,23}$$

или

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 = 0. \tag{16, 24}$$

18. *Векторным произведением* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который определяется следующими условиями:

1) Его модуль равен $ab \cdot \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2) Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к плоскости, определяемой перемножаемыми векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3) Вектор $\bar{c}$ направлен так, что наблюдателю, смотрящему с его конца на перемножаемые векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, кажется, что для кратчайшего совмещения первого сомножителя со вторым первый сомножитель нужно вращать против часовой стрелки (фиг. 16, 8). Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается символом $\bar{a} \times \bar{b}$:

$$|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = a \cdot b \sin(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}), \tag{16, 25}$$

или

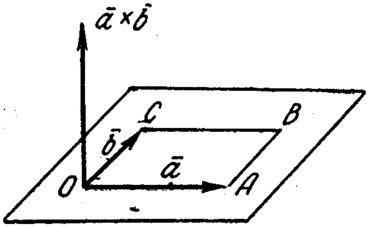
$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \text{пл. } OABC. \tag{16, 26}$$

Основные свойства векторного произведения:

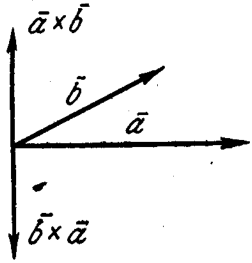
1) Векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ равно нулю, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны или какой-либо из перемножаемых векторов является нулевым.

2) При перестановке местами векторов сомножителей векторное произведение меняет знак на противоположный (фиг. 16, 9):

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$



Фиг. 16,8.



Фиг. 16,9.

Векторное произведение не обладает свойством переместительности.

3) $(\bar{a}+\bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ (распределительное свойство).

Выражение векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$ через проекции векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на координатные оси прямоугольной системы координат дается формулой

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k}, \quad (16, 27)$$

которую можно записать с помощью определителя

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (16, 28)$$

Проекции векторного произведения на оси прямоугольной системы координат вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} (\bar{a} \times \bar{b})_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ (\bar{a} \times \bar{b})_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ (\bar{a} \times \bar{b})_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned}\right\}, \quad (16, 29)$$

и тогда на основании (16, 4)

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}. \quad (16, 30)$$

Механический смысл векторного произведения состоит в следующем: если вектор $\bar{F}$ — сила, а вектор $\bar{r}$ есть радиус-вектор точки приложения силы, имеющий свое начало в точке O, то момент силы $\overline{F}$ относительно точки O $m_0(\overline{F})$ есть вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора $\bar{r}$ точки приложения силы на силу $\overline{F}$, т. е.

$$m_0(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F}.$$

19. Векторно-скалярное произведение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ или смешанное их произведение вычисляется по формуле

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{16, 31}$$

Абсолютная величина векторно-скалярного произведения равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, получим по формуле

$$V_{\text{пир}} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{16, 32}$$

причем знак перед определителем должен быть выбран так, чтобы объем V был положительным*.

20. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной и той же плоскости. Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.

Задача 16, 1. Найти равнодействующую двух сил $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, модули которых равны $F_1 = 5$, $F_2 = 7$, угол между ними $\theta = 60°$. Определить также углы α и β, образуемые равнодействующей с силами $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ (фиг. 16, 10).

Решение. По формуле (16, 1) находим

$$R = \sqrt{5^2 + 7^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 60°},$$

или

$$R = \sqrt{25 + 49 + 35} \approx 10{,}44.$$

Углы α и β находим из треугольника ABC, пользуясь теоремой синусов $(\theta = \alpha + \beta)$:

$$\frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(180° - \theta)}.$$

* Предполагается, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ не лежат в одной плоскости.

Но

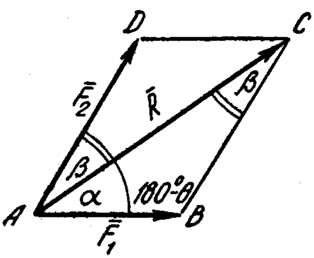
$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta,$$

и тогда

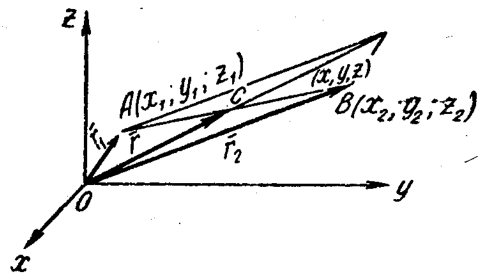
$$\sin\alpha = \frac{F_2 \cdot \sin\theta}{R} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10{,}44} = 0{,}581; \quad \alpha = 35°30';$$

$$\sin\beta = \frac{F_1 \cdot \sin\alpha}{F_2} = \frac{5 \cdot 0{,}581}{7} = 0{,}415; \quad \beta = 24°30'.$$

Контроль: $(\alpha + \beta = 60°)$.



Фиг. 16,10.



Фиг. 16,11.

Задача 16, 2. (для самостоятельного решения). Найти равнодействующую $\bar{R}$ сил $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, а также углы α и β, составляемые равнодействующей с силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, если $|\bar{F}_1| = 15$; $|\bar{F}_2| = 10$; угол между силами $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ $\theta = 45°$.

Ответ. $R = 23{,}173$; $\alpha = 17°46'$; $\beta = 27°14'$.

Задача 16, 3. Определить координаты точки C — средины вектора $\bar{a}$ по известным радиусам-векторам его концов A и B (фиг. 16, 11).

Решение. Пусть радиусы-векторы точек A и B соответственно равны $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$. Средина отрезка AB будет находиться на пересечении диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, и тогда точка C определится радиусом-вектором $\bar{r}$, который равен полусумме векторов $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, т. е.

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}. \tag{16, 33}$$

Координаты точки A обозначим через x_1, y_1 и z_1 координаты точки B — через x_2, y_2 и z_2, а координаты точки C — через x, y и z.

Спроектируем векторное равенство (16, 33) на оси координат по формулам (16, 9). Так как векторы $\bar{r}$, $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ являются радиусами-векторами точек A и B, то их проекции на координатные оси будут равны

$$r_x = x;\ r_y = y;\ r_z = z;\ r_{1x} = x_1;\ r_{1y} = y_1;\ r_{1z} = z_1;$$

$$r_{2x} = x_2;\quad r_{2y} = y_2;\quad r_{2z} = z_2.$$

Тогда векторное равенство (16, 33) заменится такими тремя скалярными равенствами, определяющими координаты средины отрезка по известным координатам его концов,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{16, 34}$$

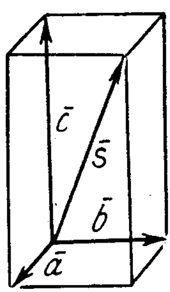
Задача 16, 4 (для самостоятельного решения). Вектор $\bar{a}$ задан координатами своих концов $A(2, 4 - 3)$ и $B(-4, 4 - 5)$. Найти координаты средины отрезка AB.

Ответ. $x = -1$; $y = 4$; $z = -4$.

Задача 16, 5 (для самостоятельного решения). Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ расположены в одной и той же плоскости. Даны их длины: $|\bar{a}| = 3$; $|\bar{b}| = 2$; $|\bar{c}| = 2$. Известно, что векторы $\bar{b}$ и $\bar{c}$ составляют с вектором $\bar{a}$ углы в $60°$. Определить угол α между векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$ и длину суммы $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

Ответ. $\alpha = 0$ или $\alpha = 120°$. В первом случае $|\bar{s}| = \sqrt{37}$, во втором $|\bar{s}| = 5$.

Задача 16, 6 (для самостоятельного решения). Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ попарно взаимно-перпендикулярны, а длина их соответственно равна 2, 3 и 6. Найти длину суммы $\bar{s}$ этих векторов и направляющие косинусы вектора $\bar{s}$ (фиг. 16, 12).



Фиг. 16, 12.

Ответ. $|\bar{s}| = 7$; $\cos(\bar{s}, \widehat{\ \bar{a}}) = \frac{2}{7}$;

$$\cos(\bar{s}, \widehat{\ \bar{b}}) = \frac{3}{7};$$

$$\cos(\bar{s}, \widehat{\ \bar{c}}) = \frac{6}{7}.$$

Задача 16, 7. Даны два вектора:

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k} \text{ и } \bar{b} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}.$$

Найти проекции на координатные оси суммы и разности этих векторов.

Решение. Составим сумму и разность этих векторов:

$$\bar{a}+\bar{b}=(2-3)\,\bar{i}+(3+2)\,\bar{j}+(-4+5)\,\bar{k}.$$

$$\bar{a}-\bar{b}=(2+3)\,\bar{i}+(3-2)\,\bar{j}+(-4-5)\,\bar{k}.$$

Ответ. $\bar{a}+\bar{b}=-\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k};\ \bar{a}-\bar{b}=5\bar{i}+\bar{j}-9\bar{k};$

$$(\bar{a}+\bar{b})_x=-1;\quad (\bar{a}+\bar{b})_y=5;\quad (\bar{a}+\bar{b})_z=1;$$

$$(\bar{a}-\bar{b})_x=5;\quad (\bar{a}-\bar{b})_y=1;\quad (\bar{a}-\bar{b})_z=-9.$$

При решении задачи можно было сразу воспользоваться формулами (16, 17).

Задача 16, 8 (для самостоятельного решения). Найти сумму и разность векторов

$$\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k} \text{ и } \bar{b}=3\bar{i}-4\bar{j}+6\bar{k},$$

а также проекции $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ на координатные оси.

Ответ. $\bar{a}+\bar{b}=5\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k};$

$$\bar{a}-\bar{b}=-\bar{i}+7\bar{j}-10\bar{k};$$

$$(\bar{a}+\bar{b})_x=5;\quad (\bar{a}+\bar{b})_y=-1;\quad (\bar{a}+\bar{b})_z=2;$$

$$(\bar{a}-\bar{b})_x=-1;\quad (\bar{a}-\bar{b})_y=7;\quad (\bar{a}-\bar{b})_z=-10.$$

Задача 16, 9. Вектор $\bar{a}$ задан координатами своих концов A и B: $A\,(2, 1 -4)$; $B\,(1, 3, 2)$.

Найти проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси и его направляющие косинусы.

Решение. Проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси находим по формулам (16, 6). $a_x=-1$; $a_y=2$; $a_z=6$;

$$a=\sqrt{(-1)^2+2^2+6^2}=\sqrt{41}.$$

Направляющие косинусы определяем по формулам (16, 13):

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{41}};\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{41}};\quad \cos\gamma=\frac{6}{\sqrt{41}}.$$

Задача 16. 10 (для самостоятельного решения). Проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси равны: $a_x=2$; $a_y=3$; $a_z=-4$. Найти направляющие косинусы вектора $\bar{a}$.

Ответ. $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}};\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{29}};\quad \cos\gamma=-\frac{4}{\sqrt{29}}.$

Задача 16, 11. Найти проекцию вектора

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$$

на ось L, которая составляет с координатными осями углы λ, μ и ν.

Решение. Обозначим через φ угол между положительными направлениями вектора $\bar{a}$ и оси проекций L, а через α, β и γ — углы, составляемые вектором $\bar{a}$ с координатными осями Ox, Oy и Oz. Тогда по формуле (16, 22), учитывая, что по условию ось L составляет с теми же координатными осями углы λ, μ и ν, можно написать, что

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu. \qquad (16, 35)$$

По формуле (16, 2) проекция

$$a_L = a\cos\varphi.$$

Подставляя сюда значение $\cos\varphi$ из (16, 35), получим

$$a_L = a(\cos\alpha \cdot \cos\lambda + \cos\beta \cdot \cos\mu + \cos\gamma \cdot \cos\nu).$$

Раскрывая в правой части этого равенства скобки и замечая, что

$$a\cos\alpha = a_x; \quad a\cos\beta = a_y; \quad a\cos\gamma = a_z.$$

получим окончательно для проекции a_L вектора на ось выражение

$$a_L = a_x\cos\lambda + a_y\cos\mu + a_z\cos\nu. \qquad (16, 36)$$

Задача 16, 12. Дан вектор $\bar{a} = 2\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$. Найти его проекцию a_L на ось L, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Решение. По условию направляющие косинусы оси проекций между собою равны:

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu.$$

Но сумма квадратов направляющих косинусов какого-либо направления равна 1, а потому

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

и так как в этой сумме все слагаемые между собой равны, то

$$3\cos^2\lambda = 1; \quad \cos^2\lambda = \frac{1}{3}; \quad \cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

тогда

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(знак плюс перед корнем взят потому, что по условию углы λ, μ и ν — острые, а значит, косинусы их положительны). Так как по условию $a_x = 2$; $a_y = 5$, $a_z = 1$, то по формуле (16, 36) получаем

$$a_L = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad a_L = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Задача 16, 13. На точку действуют три силы: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$, проекции которых на оси прямоугольной системы координат таковы:

	$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$	$\overline{F}_3$
X	2	4	—5
Y	1	—3	4
Z	5	1	2

Найти величину и направление равнодействующей.

Решение. Равнодействующая $\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\overline{F}_3$. Обозначим проекции равнодействующей через X, Y, Z, а проекции сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ — соответственно через X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 и X_3, Y_3, Z_3.

По формулам (16, 9) имеем

$$X=X_1+X_2+X_3; \qquad X=1,$$
$$Y=Y_1+Y_2+Y_3; \qquad Y=2,$$
$$Z=Z_1+Z_2+Z_3; \qquad Z=8.$$

По формуле (16, 4) величина равнодействующей R будет равна корню квадратному из суммы квадратов проекций $\overline{R}$ на координатные оси:

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{1^2+2^2+8^2}, \quad R=\sqrt{69}.$$

По формулам (16, 13) находим направляющие косинусы равнодействующей

$$\cos(R,\widehat{\ }x)=\frac{1}{\sqrt{69}}; \quad \cos(R,\widehat{\ }y)=\frac{2}{\sqrt{69}}; \quad \cos(R,\widehat{\ }z)=\frac{8}{\sqrt{69}}.$$

Задача 16, 14 (для самостоятельного решения). На точку действуют четыре силы: $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, проекции которых на координатные оси прямоугольной системы координат даны в таблице:

	$\overline{F}_1$	$\overline{F}_2$	$\overline{F}_3$	$\overline{F}_4$
X	1	—5	4	—1
Y	2	3	4	5
Z	1	—2	—3	4

Найти величину и направление равнодействующей.

Ответ. $R=\sqrt{197}$; $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{197}}$; $\cos\beta=\frac{14}{\sqrt{197}}$; $\cos\gamma=0$.

Задача 16, 15. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими проекциями $\bar{a}\{7, 2, -1\}$ и $\bar{b}\{1, 2, -3\}$. Найти скалярное произведение этих векторов и угол между ними.

Решение. По формуле (16, 20)

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

подставляя сюда проекции данных векторов, получим

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 14;$$

по формуле (16, 18)

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos\theta,$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{ab}.$$

Таким образом, для определения $\cos\theta$ нам осталось определить модули векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

По (16, 4)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2};$$

отсюда

$$a = \sqrt{54}; \quad a = 7{,}348;$$

$$b = \sqrt{14}; \quad b = 3{,}742;$$

получаем, что

$$\cos\theta = \frac{14}{27{,}496};$$

$$\cos\theta = 0{,}509; \quad \theta = 59^\circ 24'.$$

Задача 16, 16 (для самостоятельного решения). Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ заданы координатами своих концов

$$A\{1, -3, -4\}; \quad B\{-1, 0, 2\}; \quad C\{2, -4, -6\}; \quad D\{1, 1, 1\}.$$

Определить угол между этими векторами.

Ответ. $\cos\theta = 0{,}973; \quad \theta = 13^\circ 21'$.

Указание. $(\overline{AB})_x = -2; \quad (\overline{AB})_y = 3; \quad (\overline{AB})_z = 6;$

$$(\overline{CD})_x = -1; \quad (\overline{CD})_y = 5; \quad (\overline{CD})_z = 7;$$

$$AB = 7; \; CD = 8.660$$

Задача 16, 17. Определить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданными своими проекциями $\bar{a}\{2, 1, -2\}$, $\bar{b}\{1, -4, 2\}$.

Решение. По формуле (16, 21)

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}.$$

Все величины, стоящие в числителе этой дроби, известны из условия задачи. Неизвестными являются модули векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad a = \sqrt{9}; \quad a = 3.$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}; \quad b = \sqrt{21}; \quad b = 4{,}582.$$

Подставляя в (16, 21), числа получим $\cos\theta = \frac{-6}{13{,}746}$;

$$\cos\theta = -0{,}436; \quad \theta = 115^\circ 51'.$$

Задача 16, 18 (для самостоятельного решения). Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими проекциями $\bar{a}\{2, 4, -3\}$ и $\bar{b}\{6, -4, 2\}$.

Определить: 1) их скалярное произведение; 2) угол между ними; 3) проекцию вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$.

Ответ. 1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = -10$; 2) $\cos\theta = -0{,}248$; $\theta = 104^\circ 21$. 3) $a_b = -1{,}336$.

Задача 16, 19 (для самостоятельного решения) Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими проекциями $\bar{a}\{4, -1, -2\}$ и $\bar{b}\{2, 1, 2\}$; Определить: 1) скалярное произведение этих векторов; 2) угол между ними; 3) проекцию a_b вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$; 4) проекцию b_a вектора $\bar{b}$ на направление вектора $\bar{a}$.

Ответ. 1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = 3$; 2) $\theta = 77^\circ 24'$; $a_b = 1$; $b_a = 0{,}655$.

Задача 16, 20. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = 5\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k},$$

$$\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}.$$

Решение. По определению векторного произведения двух векторов модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Поэтому для решения задачи найдем сначала векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$, а потом его модуль. Согласно (16, 28) имеем

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \bar{i} + 17\bar{j} + 9\bar{k},$$

а модуль

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{1^2 + 17^2 + 9^2} = \sqrt{371};$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = 19{,}26.$$

Искомая площадь параллелограмма

$$S = 19{,}26 \text{ кв. ед.}$$

Замечание. Векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ можно было сразу определить по формуле (16, 27), в которой следует взять

$$a_x = 5; \quad a_y = -4; \quad a_z = 7;$$

$$b_x = 1; \quad b_y = 1; \quad b_z = -2.$$

Задача 16, 21 (для самостоятельного решения). Найти векторное произведение векторов

$$\bar{a} = 7\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$$

$$\bar{b} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$$

и его модуль.

Ответ. $\bar{a} \times \bar{b} = 2\bar{i} - 34\bar{j} - 18\bar{k}; \quad |\bar{a} \times \bar{b}| = 38{,}52.$

Задача 16, 22 (для самостоятельного решения). Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определены своими проекциями $\bar{a}\{-1,\ 2,\ 4\}$ и $\bar{b}\{2, -1, -4\}$. Определить их векторное произведение и его модуль.

Ответ. $\bar{a} \times \bar{b} = -4\bar{i} + 4\bar{j} - 3\bar{k}; \ |\bar{a} \times \bar{b}| = 6{,}4.$

Задача 16, 23. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ определены координатами своих концов: $A(2, 4, 5)$; $B(-1, -3, -2)$; $C(4, 1, 7)$; $D(-2, 3, 10)$. Найти: 1) векторное произведение $\overline{AB} \times \overline{CD}$; 2) его модуль; 3) направляющие косинусы векторного произведения.

Решение. 1) Найдем прежде всего проекции векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на координатные оси по формулам (16, 6):

$$(\overline{AB})_x = -3; \quad (\overline{CD})_x = -6;$$

$$(\overline{AB})_y = -7; \quad (\overline{CD})_y = 2;$$

$$(\overline{AB})_z = -7; \quad (\overline{CD})_z = 3.$$

Итак, $\overline{AB}\{-3, -7, -7\}$; $\quad \overline{CD}\{-6, 2, 3\}$.

Тогда по формуле (16, 27)

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = [-7 \cdot 3 - (-7) \cdot 2]\,\bar{i} + [-7 \cdot (-6) - (-3) \cdot 3]\,\bar{j} + \\ + [-3 \cdot 2 - (-7) \cdot (-6)]\,\bar{k}.$$

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = -7\bar{i} + 51\bar{j} - 48\bar{k}.$$

2) Модуль векторного произведения по его известным проекциям найдем по формуле (16, 4):

$$|\overline{AB} \times \overline{CD}| = \sqrt{(-7)^2 + 51^2 + (-48)^2};$$

$$|\overline{AB} \times \overline{CD}| = \sqrt{4954} = 70{,}3847.$$

3) Направляющие косинусы векторного произведения найдем по формулам (16, 13):

$$\cos\alpha = \frac{-7}{70{,}3847}; \quad \cos\beta = \frac{51}{70{,}3847}; \quad \cos\gamma = \frac{-48}{70{,}3847};$$

$$\cos\alpha = -0{,}099; \quad \cos\beta = 0{,}724; \quad \cos\gamma = -0{,}682.$$

Задача 16, 24. Найти площадь треугольника, координаты вершин которого известны:

$$A(-2, 1, 2); \quad B(3, -3, 4); \quad C(1, 0, 9).$$

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Площадь треугольника ABC есть половина площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, есть, модуль векторного произведения $\overline{AB} \times \overline{AC}$, а потому площадь треугольника ABC есть

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Найдем векторное произведение $\overline{AB} \times \overline{AC}$, а потому половину его модуля.

Проекции векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ на координатные оси найдем по формулам (16, 6),

$$(\overline{AB})_x = 5; \qquad (\overline{AC})_x = 3;$$

$$(\overline{AB})_y = -4; \qquad (\overline{AC})_y = -1;$$

$$(\overline{AB})_z = 2; \qquad (\overline{AC})_z = 7.$$

$$AB = \sqrt{45}; \quad AB = 6{,}708;$$

$$AC = \sqrt{59}; \quad AC = 7{,}681.$$

По формуле (16, 27) для векторного произведения векторов найдем, что

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = -26\bar{i} - 29\bar{j} + 7\bar{k}.$$

Модуль вектора $\overline{AB} \times \overline{AC}$ найдем по формуле (16, 4):

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{1566}; \quad |\overline{AB} \times \overline{AC}| = 39{,}573;$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 39{,}573;$$

$$S_{ABC} = 19{,}787 \text{ кв. ед.}$$

Задача 16, 25. Дана сила $\bar{F}\{3, 4, -2\}$ и точка ее приложения $A(2, -1, 3)$. Найти момент силы относительно начала координат и углы, составляемые им с координатными осями.

Решение. Момент силы относительно начала координат равен векторному произведению радиуса-вектора точки A приложения силы на силу $\bar{F}$, т. е. $m_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$.

Проекции радиуса-вектора точки A на координатные оси равны координатам точки A — формула (16, 11):

$$r_x = x = 2;\ r_y = y = -1;\ r_z = z = 3;$$
$$\bar{r} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}.$$

Проекции X, Y, Z силы $\bar{F}$ на координатные оси нам также известны из условия задачи:

$$X = 3;\ Y = 4;\ Z = -2,$$

и тогда формула (16, 27) даёт

$$m_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = [-1\cdot(-2) - 3\cdot 4]\,\bar{i} + [3\cdot 3 - 2\cdot(-2)]\cdot\bar{j} + $$
$$+ [2\cdot 4 - (-1)\cdot 3]\,\bar{k};$$
$$m_0(\bar{F}) = -10\bar{i} + 13\bar{j} + 11\bar{k}.$$

Отсюда

$$m_x = -10;\ m_y = 13;\ m_z = 11;$$

и модуль момента

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \sqrt{(-10)^2 + 13^2 + 11^2};\ m = \sqrt{390};$$
$$m = 19{,}748.$$

Направляющие косинусы вектора $m_0(\bar{F})$ равны

$$\cos\alpha = \frac{-10}{19{,}748} = -0{,}506;\quad \cos\beta = \frac{13}{19{,}748} = 0{,}658;$$
$$\cos\gamma = \frac{11}{19{,}748} = 0{,}557,$$

а углы, составляемые моментом силы с координатными осями, следующие:

$$\alpha = 120^\circ 24';\ \beta = 48^\circ 51';\ \gamma = 56^\circ 9'.$$

Контроль: должно быть $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. У нас $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0{,}999$.

Задача 16, 26 (для самостоятельного решения). Найти момент силы $\bar{F}\{5, 6, -7\}$ относительно начала координат, если точка ее приложения $A(1, 1, 1)$. Определить также направляющие косинусы момента.

Ответ.

$$m_0(\bar{F}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix};\ m_x = -13;\ m_y = 12;\ m_z = 1;$$

$$m = \sqrt{314};\ \cos\alpha = -\frac{13}{\sqrt{314}};\quad \cos\beta = \frac{17}{\sqrt{314}};\quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{314}}.$$

Задача 16, 27. Найти объем пирамиды, если координаты ее вершин

$$A_1(x_1, y_1, z_1); \quad A_2(x_2, y_2, z_2); \quad A_3(x_3, y_3, z_3);$$
$$A_4(x_4, y_4, z_4).$$

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$, на которых построена пирамида.

Зная координаты начала и конца каждого вектора, найдем проекции этих векторов на оси прямоугольной системы координат:

$$\overline{A_1A_2}\,\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}; \quad \overline{A_1A_3}\,\{x_3 - x_1,\ y_3 - y_1, z_3 - z_1\};$$
$$\overline{A_1A_4}\,\{x_4 - x_1,\ y_4 - y_1,\ z_4 - z_1\};$$

для объема пирамиды получаем на основании формулы (16, 32)

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Задача 16, 28. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(5, 1, -4)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(3, 3, -4)$ и $A_4(2, 2, 2)$. Определить ее объем.

Решение. Рассмотрим три вектора: $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$. Поступая так же, как и при решении задачи 16, 27, по формуле (16, 32) найдем объем пирамиды, построенной на этих векторах. Для применения формулы (16, 32) нам надо знать проекции векторов на оси прямоугольной системы координат. Записывая проекции вектора рядом с его названием, получаем $\overline{A_1A_2}\{-4, 1, 3\}$; $\overline{A_1A_3}\{-2, 2, 0\}$; $\overline{A_1A_4}\{-3, 1, 6\}$; и тогда

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\cdot(-24).$$
$$V = 4 \text{ куб. ед.}$$

В правой части выбран знак минус, так как определитель отрицателен.

Задача 16, 29 (для самостоятельного решения). Найти объем пирамиды по известным координатам ее вершин:

$$A_1(2, 1, -2); \ A_2(3, 3, 3); \ A_3(1, 1, 2); \ A_4(-1, -2, -3).$$

Ответ. $\frac{1}{6}$ куб. ед.

СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Основные задачи на плоскость.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие посвящается основным задачам, связанным с плоскостью. Напомним основные формулы.

1. Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{17, 1}$$

Если в этом уравнении $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат, и ее уравнение будет таким

$$Ax + By + Cz = 0. \tag{17, 2}$$

При $C = 0$ уравнение (17, 1) примет вид

$$Ax + By + D = 0, \tag{17, 3}$$

и плоскость параллельна оси Oz. При $B = 0$ уравнение (17, 1) запишется в виде

$$Ax + Cz + D = 0. \tag{17, 4}$$

В этом случае плоскость параллельна оси Oy, а при $A = 0$ уравнение (17, 1) приобретает вид

$$By + Cz + D = 0, \tag{17, 5}$$

и плоскость параллельна оси Ox.

Вообще следует запомнить, что если плоскость параллельна какой-нибудь координатной оси, то в ее уравнении отсутствует член, содержащий координату, одноименную с этой осью. Если в уравнениях (17, 3), (17, 4) и (17, 5) окажется, что $D = 0$, то эти уравнения имеют вид

$$Ax + By = 0; \tag{17, 6}$$

$$Ax + Cz = 0; \tag{17, 7}$$

$$By + Cz = 0. \tag{17, 8}$$

Уравнение (17, 6) — уравнение плоскости, проходящей через координатную ось Oz; (17, 7) — уравнение плоскости, проходящей через ось Oy, а (17, 8) — уравнение плоскости, проходящей через ось Ox. Если в уравнении (17, 1) $A = 0$ и $B = 0$, то оно приобретет вид

$$Cz + D = 0, \tag{17, 9}$$

и плоскость параллельна координатной плоскости xOy. При $B = 0$ и $C = 0$ уравнение (17, 1) запишется в виде

$$Ax + D = 0, \tag{17, 10}$$

а определяемая им плоскость, параллельна координатной плоскости yOz. При $A=0$ и $C=0$ получаем из (17, 1)

$$By+D=0, \tag{17, 11}$$

и плоскость (17, 11) параллельна координатной плоскости xOz.

Если окажется, что в уравнениях (17, 9), (17, 10) и (17, 11) $D=0$, то эти уравнения примут вид

$$z=0, \tag{17, 12}$$

$$x=0, \tag{17, 13}$$

$$y=0 \tag{17, 14}$$

и будут уравнениями самих координатных плоскостей, соответственно xOy, yOz и xOz.

2. Уравнение плоскости в нормальном виде

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{17, 15}$$

где α, β и γ — углы между координатными осями Ox, Oy и Oz и перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость, а p — длина этого перпендикуляра.

3. Для приведения общего уравнения плоскости (17, 1) к нормальному виду (17, 15) обе его части следует умножить на нормирующий множитель

$$N=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{17, 16}$$

выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в уравнении (17, 1).

4. Уравнение плоскости в отрезках на осях

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{17, 17}$$

где a, b и c — величины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях.

5. Уравнение связки плоскостей, проходящей через точку $M(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{17, 18}$$

Давая коэффициентам A, B и C в уравнении (17, 18) различные значения, мы получим различные плоскости, проходящие через точку $M(x_1, y_1, z_1)$.

6. Угол между двумя плоскостями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{17, 19}$$

определяется по формуле

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{17, 20}$$

7. Условие перпендикулярности двух плоскостей (17, 19) имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (17,21)$$

8. Условие параллельности двух плоскостей (17, 19) имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (17,22)$$

9. Расстояние от точки $N(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|. \qquad (17,23)$$

10. Нам часто придется решать систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (17,24)$$

В учебнике Привалова решение этой системы подробно разобрано (см. ч. I, гл. VI).

Мы же для ссылок приведем относящиеся сюда формулы:

$$x = \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot t; \quad y = \begin{vmatrix} c & a \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix} \cdot t; \quad z = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \cdot t, \qquad (17,25)$$

где t — произвольное число, а, по крайней мере, один из определителей, входящих в (17, 25), не равен нулю.

11. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (17,26)$$

Прежде всего решим ряд задач, связанных с исследованием общего уравнения плоскости.

Задача 17, 1. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $A(2, 3, -1)$ и $B(-1, 2, 4)$.

Решение. Уравнение плоскости, параллельной оси Oz, имеет вид (17, 3)

$$Ax + By + D = 0$$

(так как плоскость по условию задачи параллельна оси Oz, то в ее уравнении отсутствует координата z).

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляя координаты точек A и B в уравнение (17, 3), получим два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 2A + 3B + D &= 0 \\ -A + 2B + D &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Для определения коэффициентов A, B и D мы имеем систему двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными. Составляем матрицу коэффициентов этих уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формулам (17, 25) получаем

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot t; B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot t; D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t;$$

$$A = t; \ B = -3t; \ D = 7t.$$

Подставляя найденные значения A, B и C в (17, 3), получим

$$tx - 3ty + 7t = 0.$$

После сокращения на t уравнение искомой плоскости приобретет вид

$$x - 3y + 7 = 0.$$

Проверьте правильность решения подстановкой в полученное уравнение сначала координат точки A, а потом координат точки B. Каждый раз в левой части должен получиться нуль.

Задача 17, 2 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, -3, 2)$ и $B(7, 1, 0)$ и параллельной оси Ox.

Ответ. $y + 2z - 1 = 0$.

Задача 17, 3 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через точки $A(2, 1, -2)$ и $B(-7, -2, 1)$.

Ответ. $x + 3z + 4 = 0$.

Задача 17, 4. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости xOy и проходящей через точку $A(1, 2, -4)$.

Решение. Уравнение плоскости, параллельной плоскости xOy, имеет вид (17, 9): $Cz + D = 0$

Подставляя в него координаты точки A, получим $-4C + D = 0$, или $D = 4C$. Подставляя это значение в (17, 9), получим

$$Cz + 4C = 0,$$

а сокращая на C, будем иметь окончательно

$$z + 4 = 0.$$

Задача 17, 5. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $A(3, 7, -1)$.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна оси Ox, то она параллельна плоскости yOz, а потому ее уравнение имеет вид (17, 10)

$$Ax + D = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки A, получим, что $D = -3A$. Это значение D подставим в (17, 10) и, сокращая на A, будем иметь окончательно $x - 3 = 0$.

Задача 17, 6 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости xOz и проходящей через точку A (2, —3, 4).

Ответ. $y + 3 = 0$.

Постройте эту плоскость.

Задача 17, 7. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку A (2, 1, 3).

Так как искомая плоскость проходит через ось Ox, то ее уравнение имеет вид $By + Cz = 0$ (17,8). Подставим в это уравнение координаты точки A, через которую плоскость проходит. Получаем $B + 3C = 0$, откуда $B = -3C$.

Это значение B подставляем в (17, 8) и получаем, сокращая на C, $3y - z = 0$.

Задача 17, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку A (—2, 4, —4).

Ответ. $2x + y = 0$.

Задача 17, 9 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A (2, —5, 4) и через ось Oy.

Ответ. $2x - z = 0$.

Задача 17, 10. Какие отрезки на координатных осях отсекает плоскость

$$2x + 3y - 5z + 30 = 0?$$

Решение. У точки, лежащей на оси Ox, координаты y и z равны нулю.

Полагая в уравнении плоскости $y = z = 0$, получим для определения величины отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Ox, уравнение $2x + 30 = 0$, или $x = -15$.

Для определения величины отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Oy, полагаем в уравнении плоскости $x = 0$ и $z = 0$ и получаем $3y + 30 = 0$, или $y = -10$. Наконец, величину отрезка, отсекаемого на оси Oz, найдем, положив в уравнении плоскости $x = 0$ и $y = 0$. Получим $-5z + 30 = 0$ и $z = 6$.

Этим заканчивается решение задачи. Можно было бы поступить и проще, преобразовав данное уравнение к виду в отрезках на осях (17, 17). Для этого перенесем в правую часть равенства свободный член. Данное уравнение запишется в виде $2x + 3y - 5z = -30$. Разделим теперь обе его части на —30 и получим

$$\frac{x}{-15} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{6} = 1.$$

Величины отрезков, отсекаемых на координатных осях, равны: $a = -15$; $b = -10$; $c = 6$.

Задача 17, 11 (для самостоятельного решения). Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $x-10y+2z-12=0$ на координатных осях.

Ответ. $a=12$; $b=-\frac{6}{5}$ и $c=6$.

Задача 17, 12. Уравнение плоскости $2x+3y-4z+24=0$ преобразовать к виду (17, 17) в отрезках на осях.

Решение. Перенесем свободный член 24 в правую часть уравнения и получим $2x+3y-4z=-24$. Разделим теперь обе части уравнения на -24 и получим

$$\frac{x}{-12}+\frac{y}{-8}+\frac{z}{6}=1.$$

Задача 17, 13 (для самостоятельного решения). Уравнение плоскости $3x-4y+5z-24=0$ преобразовать к виду в отрезках на осях.

Ответ. $\frac{x}{8}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{4{,}8}=1$.

Задача 17, 14. Уравнение плоскости $5x+7y-34z+5=0$ привести к нормальному виду.

Решение. Для приведения общего уравнения плоскости (17, 1) к нормальному виду (17, 15) надо обе его части умножить на нормирующий множитель (17, 16), выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в общем уравнении плоскости. В нашем случае перед корнем следует выбрать знак минус. У нас $A=5$; $B=7$; $C=-34$, и для N получаем

$$N=-\frac{1}{\sqrt{5^2+7^2+(-34)^2}};\quad N=-\frac{1}{\sqrt{1230}},$$

а уравнение принимает вид

$$-\frac{5}{\sqrt{1230}}x-\frac{7}{\sqrt{1230}}y+\frac{34}{\sqrt{1230}}z-\frac{5}{\sqrt{1230}}=0.$$

Задача 17, 15 (для самостоятельного решения). Привести к нормальному виду уравнение плоскости $2x+9y-6z+33=0$.

Ответ. $-\frac{2}{11}x-\frac{9}{11}y+\frac{6}{11}z-3=0$.

Задача 17, 16. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $10x+15y-6z-380=0$, и углы, образуемые этим перпендикуляром с координатными осями.

Решение. Приведем уравнение плоскости к нормальному виду. По формуле (17, 16) находим, что нормирующий множитель $N=\frac{1}{19}$. Обе части уравнения данной плоскости умножим на $\frac{1}{19}$ и получим уравнение плоскости в нормальном виде

$$\frac{10}{19}x+\frac{15}{19}y-\frac{6}{19}z-20=0,$$

из которого усматриваем, что $p = 20$; косинусы же углов образуемых этим перпендикуляром с координатными осями, будут

$$\cos\alpha = \frac{10}{19};\ \cos\beta = \frac{15}{19};\ \cos\gamma = -\frac{6}{19}.$$

Дроби в правых частях последних равенств превратим в десятичные и получим, что

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= 0{,}5263;\ \alpha = 58°15';\\ \cos\beta &= 0{,}7895;\ \beta = 37°52';\\ \cos\gamma &= -0{,}3158;\ \gamma = 108°25'. \end{aligned}$$

Контроль: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (значения углов найдены с помощью таблиц тригонометрических функций).

Задача 17,17 (для самостоятельного решения). Привести к нормальному виду уравнение плоскости

$$3x - 4y + 5z - 14 = 0.$$

Ответ. $\frac{3}{\sqrt{50}}x - \frac{4}{\sqrt{50}}y + \frac{5}{\sqrt{50}}z - \frac{14}{\sqrt{50}} = 0.$

Задача 17, 18 (для самостоятельного решения). На плоскость $5x - y + 3z + 12 = 0$ из начала координат опущен перпендикуляр. Найти его длину и углы, образованные им с координатными осями, а также координаты основания этого перпендикуляра.

Ответ. $p = \frac{12}{\sqrt{35}}$; $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{35}}$; $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{35}}$; $\cos\gamma = -\frac{3}{\sqrt{35}}$. Координаты основания перпендикуляра $\left(-\frac{12}{7}, \frac{12}{35}, -\frac{36}{35}\right)$.

Указание. Координаты основания перпендикуляра найдите по формулам

$$x_1 = p\cos\alpha;\ y_1 = p\cos\beta;\ z_1 = p\cos\gamma.$$

Задача 17, 19. Найти расстояние от точки $A(2,\ 3,\ -1)$ до плоскости $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

Решение. Расстояние от точки до плоскости определяется по формуле (17,23,) в которой следует положить $A = 7$; $B = -6$; $C = -6$; $x_1 = 2$; $y_1 = 3$; $z_1 = -1$. Подставляя эти значения в формулу (17, 23), будем иметь

$$d = \left|\frac{7\cdot 2 + (-6)\cdot 3 + (-6)\cdot(-1) + 42}{\sqrt{7^2 + (-6)^2 + (-6)^2}}\right| = \left|\frac{14 - 18 + 6 + 42}{11}\right| = 4.$$

Задача 17, 20 (для самостоятельного решения). Найти расстояние от точки $A(2,\ -4,\ 2)$ до плоскости $2x + 11y + 10z - 10 = 0$.

Ответ. $d = 2$.

Задача 17, 21 (для самостоятельного решения). Найти расстояние от точки $A(3,\ +4,\ -1)$ до плоскости $3x + 4y - 5 = 0$.

Ответ. $d = 4$.

Задача 17, 22. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$5x + 3y - 4z + 15 = 0;$$
$$15x + 9y - 12z - 5 = 0.$$

Решение. Возьмем на какой-нибудь из этих плоскостей произвольную точку. Например, на первой плоскости возьмем точку, для которой $y = 0$; $z = 0$, и определим абсциссу x этой точки. Получим $5x + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 15 = 0$; $x = -3$. Итак, на первой плоскости взята точка $(-3,0,0)$. Определив ее расстояние до второй плоскости по формуле (17, 23), получим

$$d = \frac{5}{3}\sqrt{2}.$$

Найденное расстояние d и будет расстоянием между данными плоскостями.

Задача 17, 23 (для самостоятельного решения). Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$2x - 3y + 6z - 14 = 0$$

$$2x - 3y + 6z + 28 = 0.$$

Ответ. $d = 6$.

Задача 17, 24. Через точку $M(2, 3, -1)$ провести плоскость, параллельную плоскости

$$2x - 3y + 5z - 4 = 0.$$

Решение. Уравнение связки плоскостей, проходящих через данную точку, имеет вид (17, 18). В нашем случае оно будет таким:

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z+1) = 0.$$

Из условия (17, 22) параллельности двух плоскостей получаем

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{5} \; (= k).$$

Заменяя в последнем уравнении A, B и C величинами, им пропорциональными, будем иметь

$$2k(x-2) - 3k(y-3) + 5k(z+1) = 0.$$

или окончательно после упрощений

$$2x - 3y + 5z + 10 = 0.$$

Можно решить задачу и иначе: если плоскости параллельны, то их уравнения можно преобразовать так, что они будут отличаться только свободным членом. Тогда уравнение семейства плоскостей, параллельных данной плоскости, запишется так:

$$2x - 3y + 5z + D = 0. \qquad (A)$$

Подставляя в это уравнение вместо текущих координат x, y и z координаты точки $M(2, 3, -1)$, через которую проходит плоскость, получим уравнение, содержащее одно неизвестное D: $2\cdot 2-3\cdot 3+5\cdot(-1)+D=0$, $D=10$. Это значение подставляем в (A) и получаем то же, что и раньше:

$$2x-3y+5z+10=0.$$

Задача 17, 25 (для самостоятельного решения). Через точку $M(-4, -1, 2)$ провести плоскость, параллельную плоскости

$$3x+4y-z-8=0.$$

Ответ. $3x+4y-z+18=0$.

Задача 17, 26 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, 5, -1)$ и параллельной плоскости

$$x+3y-4z+5=0.$$

Ответ. $x+3y-4z-21=0$.

Задача 17, 27 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, -3, 2)$ параллельно плоскости

$$7x-4y+z-4=0.$$

Ответ. $7x-4y+z-21=0$.

Задача 17, 28. Через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-2, -1, 3)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости

$$x+4y-2z+5=0.$$

Решение. Уравнение связки плоскостей, проходящих через точку, имеет вид (17, 18).

Подставляя в (17, 18) вместо x_1, y_1 и z_1 координаты точки M, получим

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0. \qquad (A)$$

Определению подлежат A, B и C.

Так как данная плоскость проходит и через точку $N(-2, -1, 3)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставим в (A) координаты точки N вместо текущих координат и получим

$$A(-2-1)+B(-1-2)+C(3-3)=0,$$

откуда

$$-3A-3B=0, \text{ или } A+B=0. \qquad (B)$$

Используем теперь то, что искомая плоскость перпендикулярна данной. Условие перпендикулярности двух плоскостей

(17, 21) с учетом того, что из данного уравнения $A_1 = 1$, $B_1 = 4$, $C_1 = -2$, запишется так:

$$1 \cdot A + 4 \cdot B - 2 \cdot C = 0.$$

Соединяя (A) и (B), получим систему двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = 0 \\ A + 4B - 2C = 0 \end{array}\right\}.$$

Решаем эту систему по формулам (17, 25) и получаем

$$A = -2t; \quad B = 2t; \quad C = 3t.$$

Подставляя эти значения A, B и C в (A) и сокращая на t, будем иметь

$$-2(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0.$$

Откроем скобки, сделаем приведение подобных членов и окончательно получим искомое уравнение в виде

$$2x - 2y - 3z + 11 = 0.$$

Задача 17, 29 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-1, 2, -3)$ и $N(1, 4, -5)$ и перпендикулярной плоскости $3x + 5y - 6z + 1 = 0$.

Указание. Для определения коэффициентов A, B и C получится система уравнений

$$\left.\begin{array}{l} A + B - C = 0 \\ 3A + 5B - 6C = 0 \end{array}\right\},$$

из которой на основании формул (17, 25) $A = -t$; $B = 3t$; $C = 2t$.

Ответ. $x - 3y - 2z + 1 = 0$.

Задача 17, 30. Найти острый угол между двумя плоскостями:

$$5x - 3y + 4z - 4 = 0, \qquad \text{(I)}$$

$$3x - 4y - 2z + 5 = 0, \qquad \text{(II)}$$

Решение. По формуле (17, 20) получим, если учесть, что на основании (I) $A_1 = 5$; $B_1 = -3$; $C_1 = 4$, а из (II) $A_2 = 3$; $B_2 = -4$; $C_2 = -2$,

$$\cos\varphi = \left|\frac{15 + 12 - 8}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}}\right|; \quad \cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}};$$

$$\cos\varphi = 0{,}4990; \quad \varphi = 60°04'.$$

В формуле (17, 20) следует взять абсолютную величину правой части, так как надо найти острый угол между плоскостями и, значит, $\cos\varphi > 0$.

Задача 17, 31 (для самостоятельного решения). Найти острый угол между плоскостями

$$5x-3y+5z+5=0 \text{ и } x-2y+3z-5=0.$$

Ответ. $\cos\varphi=0{,}9046$; $\varphi=25°14'$.

Задача 17, 32. Выяснить геометрический смысл коэффициентов A, B и C в общем уравнении плоскости (17, 1)

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (A)$$

Решение. 1. Рассмотрим вектор $\bar{n}$ с проекциями на координатные оси, соответственно равными A, B и C, т. е. $\bar{n}\{A, B, C\}$.

2. Возьмем на плоскости (A) две произвольные точки: $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ и рассмотрим вектор $\overline{MN}$. Этот вектор лежит в плоскости (A). Его проекции на координатные оси соответственно равны x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 и $\overline{MN}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$.

3. Так как точки M и N лежат в плоскости (A), то имеют место равенства

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

и

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0.$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0. \qquad (B)$$

Скалярное произведение вектора $\bar{n}\{A, B, C\}$ на вектор $\overline{MN}\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ равно

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1).$$

Так как на основании (B) это скалярное произведение равно нулю, то вектор $\bar{n}$ перпендикулярен вектору $\overline{MN}$, а тем самым и той плоскости, в которой лежит этот вектор, т. е. вектор $\bar{n}\{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Заключение. Геометрическое значение коэффициентов A, B и C в общем уравнении плоскости (17, 1) состоит в том, что они являются проекциями на координатные оси Ox, Oy, Oz вектора, перпендикулярного этой плоскости.

Задача 17, 33. Найти следы плоскости $3x+2y-4z+5=0$ на координатных плоскостях.

Решение. Уравнение прямой, по которой данная плоскость пересекается с плоскостью xOy, мы получим как уравнение геометрического места точек, координаты которых одновременно удовлетворяют уравнению данной плоскости и уравнению плоскости xOy. Так как плоскость xOy имеет уравнение $z=0$, то уравнение искомого следа получим, положив в уравнение данной плоскости $z=0$.

Окончательно уравнения искомого следа данной плоскости на плоскости xOy имеют вид

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 5 = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Первое из этих уравнений изображает плоскость, параллельную оси Oz, а второе указывает на то, что на этой плоскости рассматриваются точки, принадлежащие плоскости xOy (в плоскости xOy первое из этих уравнений определяет прямую линию).

Уравнение искомого следа на плоскости yOz получим, учитывая, что плоскость yOz имеет уравнение $x = 0$. Положив в данном уравнении $x = 0$, получим уравнения следа плоскости на плоскости yOz

$$\left.\begin{aligned} 2y - 4z + 5 = 0 \\ x = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Первое из этих уравнений есть уравнение плоскости, параллельной оси Ox, а второе указывает на то, что в этой плоскости рассматриваются только точки, принадлежащие плоскости yOz (в плоскости yOz первое из уравнений определяет прямую линию).

Наконец, след данной плоскости на плоскости xOz, уравнение которой $y = 0$, мы получим, положив $y = 0$ в уравнении данной плоскости. Уравнения этого следа

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4z + 5 = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\},$$

причем первое из них — уравнение плоскости, параллельной оси Oy, а второе указывает на то, что на этой плоскости рассматриваются только точки, лежащие в плоскости xOz (первое уравнение в плоскости xOz определяет прямую линию).

Задача 17, 34 (для самостоятельного решения). Найти следы плоскости $5x + 3y + 2z - 12 = 0$ на координатных плоскостях и построить эти следы.

Ответ. Уравнение следа на плоскости xOy

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y - 12 = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\};$$

уравнение следа на плоскости yOz

$$\left.\begin{aligned} 3y + 2z - 12 = 0 \\ x = 0. \end{aligned}\right\};$$

уравнение следа на плоскости xOz

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2z - 12 = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Задача 17, 35. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,\ 2,\ -1)$; $M_2(-1,\ 0,\ 4)$; $M_3(-2,\ -1,\ 1)$.

Решение. На основании уравнения (17, 26) можно уравнение искомой плоскости написать в виде

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя этот определитель, получим

$$-4(x-1)-15(y-2)+6(z+1)+15(x-1)+$$
$$+4(y-2)-6(z+1)=0.$$

Раскрывая скобки, делая приведение подобных членов и сокращая на 11, получим окончательно $x-y+1=0$. Это уравнение определяет плоскость, параллельную оси Oz.

Задача 17, 36 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1, -3, 4)$; $M_2(0, -2, -1)$; $M_3(1, 1, -1)$.

Ответ. $15x-5y-4z-14=0$.

Задача 17, 37 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\left(1, -2, -\frac{1}{2}\right)$; $M_2(2, 1, 3)$; $M_3(0, -1, -1)$.

Ответ. $5x+3y-4z-1=0$.

ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Основные задачи на прямую в пространстве.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие посвящается прямой линии в пространстве. Напомним основные формулы:

1. Канонические уравнения прямой линии в пространстве, или уравнения прямой с направляющими коэффициентами, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{18, 1}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки, через которую проходит прямая, а m, n и p — направляющие коэффициенты прямой, которые являются проекциями на координатные оси Ox, Oy, Oz направляющего вектора прямой.

Если α, β и γ — углы между прямой и координатными осями Ox, Oy и Oz, то

$$\cos\alpha=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\quad \cos\beta=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \tag{18, 2}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами прямой. Направляющие коэффициенты m, n и p можно рассматривать как проекции на координатные оси вектора, параллельного прямой, причем m, n и p не могут быть одновременно равны нулю. Уравнения (18,1) могут быть записаны также в виде

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}; \tag{18, 3}$$

2. В параметрическом виде уравнения прямой линии в пространстве записываются так:

$$x=x_0+mt;\quad y=y_0+nt;\quad z=z_0+pt, \tag{18, 4}$$

где t — параметр.

3. Общие уравнения прямой:

$$\left.\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}\right\}. \tag{18, 5}$$

Каждое из уравнений (18, 5) — уравнение плоскости, и таким образом прямая в пространстве может рассматриваться как пересечение двух плоскостей, причем плоскости эти предполагаются непараллельными, т. е. соотношение

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

не имеет места.

4. Условие параллельности двух прямых в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{18, 6}$$

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

имеет вид

$$\frac{m}{m_1}=\frac{n}{n_1}=\frac{p}{p_1}. \tag{18, 7}$$

5. Условие перпендикулярности двух прямых (18, 6) имеет вид

$$mm_1+nn_1+pp_1=0 \tag{18, 8}$$

6. Угол между двумя прямыми (18, 6) определяется по формуле

$$\cos\varphi=\pm\frac{mm_1+nn_1+pp_1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}. \tag{18, 9}$$

7. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$, запишутся в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{18, 10}$$

Задача 18, 1. Найти углы, которые прямая

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{6}$$

составляет с координатными осями.

Решение. По формулам (18, 2), полагая в них $m=2$, $n=3$, $p=6$, будем иметь

$$\cos\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\pm\frac{2}{\sqrt{49}}, \text{ или } \cos\alpha=\pm\frac{2}{7};$$

$$\cos\beta=\pm\frac{3}{7};\quad \cos\gamma=\pm\frac{6}{7}.$$

Проверьте, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Острые углы, составляемые прямой с координатными осями, равны: $\alpha=73°24'$; $\beta=64°37'$; $\gamma=31°1'$ (эти значения определены по таблицам тригонометрических функций),

Задача 18, 2. Общие уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned}x+3y-4z+5&=0\\2x-\ y+\ z-4&=0\end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

преобразовать к каноническому виду (18, 1).

Наметим такой план решения задачи: из системы (A) исключим сначала y и выразим z через x, потом исключим x и выразим z теперь уже через y.

1) Для того, чтобы из системы (A) исключить y, умножим второе из уравнений системы (A) на 3 и сложим его почленно с первым. Получим, что $7x-z-7=0$, откуда $z=7x-7$,

$$z=\frac{x-1}{\frac{1}{7}}.$$

2) Умножая первое уравнение из (A) на -2 и складывая почленно со вторым, получим, исключая x из системы (A),

$$-7y+9z-14=0,$$

откуда

$$9z=7y+14;$$

$$z=\frac{7(y+2)}{9},$$

или

$$z=\frac{y+2}{\frac{9}{7}}.$$

Сравнивая найденные значения z, получаем уравнения прямой в каноническом виде

$$z=\frac{x-1}{\frac{1}{7}}=\frac{y+2}{\frac{9}{7}},\quad \text{или}\quad \frac{x-1}{\frac{1}{7}}=\frac{y+2}{\frac{9}{7}}=\frac{z-0}{1}.$$

Умножая теперь все знаменатели на 7, окончательно получим

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{9}=\frac{z-0}{7}.$$

В учебнике Привалова указан и другой способ преобразования общих уравнений прямой (18, 5) к каноническому виду (стр. 250).

Рекомендуем внимательно изучить этот способ. В связи с тем, что в учебнике не указаны окончательные результаты, приведем их здесь.

Если общие уравнения прямой записываются в виде (18, 5)

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array}\right\},$$

то уравнения прямой с направляющими коэффициентами имеют вид

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \qquad (18, 11)$$

где x_0, y_0 и z_0 — координаты одной из точек, через которую проходит прямая (18,5)

Из уравнений (18, 11) усматриваем, что направляющие коэффициенты прямой m, n и p определяются по формулам

$$m=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}\cdot t; \quad n=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}\cdot t; \quad p=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\cdot t, \qquad (18, 12)$$

в которых можно положить $t=1$ (на основании указаний в учебнике эти формулы рекомендуется получить самостоятельно).

Решим нашу задачу по этому способу. Определим одну из точек, через которую проходит данная прямая (A). Дадим координате z значение нуль ($z=0$). Для определения абсциссы x и ординаты y этой точки получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+5=0 \\ 2x-\ y-4=0 \end{array}\right\},$$

или

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=-5 \\ 2x-\ y=\ \ 4 \end{array}\right\},$$

из которой $x=1$; $y=-2$. Итак, одна из точек, через которую проходит прямая, известна. Ее координаты (1, —2, 0). Чтобы определить направляющие коэффициенты прямой по формулам (18, 12) в которых взято $t=1$, составляем матрицу из коэффициентов уравнений системы (A):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и получаем

$$m = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$m = -1; \; n = -9; \; p = -7.$$

Уравнения прямой (A) в каноническом виде с учетом того, что прямая проходит через точку (1, —2, 0), примут вид

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-9} = \frac{z-0}{-7}.$$

Умножая все знаменатели на —1, получим окончательно

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{9} = \frac{z-0}{7}.$$

Задача 18, 3 (для самостоятельного решения). Уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} x-4y+5z-1&=0 \\ 2x+3y+\ z+9&=0 \end{aligned}\right\}$$

преобразовать к каноническому виду и определить углы, образуемые этой прямой с координатными осями.

Указание. Воспользоваться вторым способом, указанным в предыдущей задаче.

1. Определите одну из точек, принадлежащую данной прямой. Координате z этой точки дайте произвольное значение, например, $z=0$. Для определения координат x и y получите систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x-4y&=1 \\ 2x+3y&=-9 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x=-3$; $y=-1$.

Итак, определена точка (— 3, — 1, 0), через которую проходит прямая.

Воспользовавшись для определения m, n и p формулами (18, 12) при $t=1$, получим

$$m = -19; \; n = 9; \; p = 11.$$

Искомое уравнение в виде (18, 1) запишется так:

$$\frac{x+3}{-19} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-0}{11}. \qquad (A)$$

Углы, образованные этой прямой с координатными осями, определяем по формулам (18, 2), в которых m, n и p имеют только что найденные значения:

$$\cos\alpha = \pm\frac{-19}{\sqrt{563}} = \mp 0{,}801, \quad \cos\beta = \pm\frac{9}{\sqrt{563}} = \pm 0{,}379;$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{11}{\sqrt{563}} = \pm 0{,}464.$$

Контроль: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. По известным косинусам углов находим углы $\alpha = 143°14'$; $\beta = 67°44'$; $\gamma = 62°21'$ (при определении углов из двух возможных знаков у косинусов выбран верхний знак).

Уравнения прямой получились бы в другом виде, если бы вместо точки $(-3, -1, 0)$ на прямой взяли какую-либо другую точку. Числители дробей в (A) изменились бы, но знаменатели остались теми же. Если же решать эту задачу по способу первому, указанному в предыдущем номере, то в знаменателях могли бы получиться числа, пропорциональные тем, которые стоят в знаменателях дробей (A).

Задача 18, 4 (для самостоятельного решения). Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$x - 2y + 3z - 4 = 0,$$
$$2x + 3y - 4z + 5 = 0.$$

Ответ. Один из возможных видов канонических уравнений прямой

$$\frac{x - \frac{2}{7}}{-1} = \frac{y + \frac{13}{7}}{10} = \frac{z - 0}{7}.$$

Задача 18, 5 (для самостоятельного решения). Преобразовать к каноническому виду уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 2z + 8 &= 0 \\ x - y - z - 9 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. Один из возможных видов канонических уравнений прямой

$$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-1}{-5}.$$

Задача 18, 6 (для самостоятельного решения). Найти углы которые прямая

$$\left.\begin{aligned} 5x + 3y - 4z + 2 &= 0 \\ x + y + z - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

образует с координатными осями.

Ответ. $\cos\alpha = \pm 0{,}60470$; $\cos\beta = \mp 0{,}77747$; $\cos\gamma = \pm 0{,}17277$.

Контроль: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Задача 18, 7. Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y + 5z + 7 &= 0 \\ x + 2y + 3z + 11 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

на координатные плоскости.

Чтобы найти уравнение плоскости, проектирующей прямую (A) на плоскость xOy, надо из системы (A) исключить координату z. Умножая первое уравнение этой системы на -3, а второе на 5 и складывая полученные уравнения, будем иметь $-4x+22y+34=0$, а сокращая на -2, получим искомое уравнение в виде $2x-11y-17=0$.

Уравнение плоскости, проектирующей прямую (А) на плоскость xOz, получим, исключая из системы (A) координату y. Умножая второе уравнение в системе (A) на 2 и складывая с первым, получим искомое уравнение в виде

$$5x+11z+29=0.$$

Уравнение плоскости, проектирующей прямую (A) на плоскость yOz, получим, исключая из системы (A) координату x. Умножая второе уравнение в системе (A) на -3 и складывая с первым, получим искомое уравнение в виде

$$5y+2z+13=0.$$

Задача 18, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\left.\begin{aligned} x-2y-z-1&=0\\ 3x-\ y+z-2&=0 \end{aligned}\right\}$$

на координатные плоскости.

Ответ. Уравнение плоскости, проектирующей прямую на плоскость yOz,

$$5y+4z+1=0.$$

Уравнение плоскости, проектирующей прямую на плоскость xOz,

$$5x+3z-3=0.$$

Уравнение плоскости, проектирующей прямую на плоскость xOy,

$$4x-3y-3=0.$$

Задача 18, 9. Определить следы прямой

$$\left.\begin{aligned} 5x+3y-4z+8&=0\\ x-y+z+5&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

на координатных плоскостях (следом прямой на плоскости называется точка пересечения прямой с плоскостью).

Решение. Уравнение плоскости $xOy: z=0$. Положив в системе (A) $z=0$, получим систему из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} 5x+3y+8&=0\\ x-y+5&=0 \end{aligned}\right\}.$$

Решая эту систему, найдем x и y:

$$x=-\frac{23}{8};\quad y=\frac{17}{8};$$

и след прямой (A) на плоскости xOy имеет координаты $\left(-\frac{23}{8},\ \frac{17}{8},\ 0\right)$. Следы прямой на плоскостях yOz и xOz найдите самостоятельно.

Координаты следа прямой на плоскости yOz будут (0, 28, 23).

Координаты следа прямой на плоскости xOz — $\left(-\frac{28}{9},\ 0,\ -\frac{17}{9}\right)$.

Задача 18, 10 (для самостоятельного решения). Найти координаты следов прямой

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{4}$$

на координатных плоскостях.

Ответ. $(1,\ -5,\ 0)$; $\left(\frac{7}{2},\ 0,\ 10\right)$; $(0,\ -7,\ -4)$.

Задача 18, 11. Найти острый угол между двумя прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2},$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{-2}.$$

Решение. Угол φ между двумя прямыми определяется по формуле (18, 9), в которой надо взять

$$\begin{aligned} m&=3; & n&=-1; & p&=2;\\ m_1&=2; & n_1&=4; & p_1&=-2. \end{aligned}$$

$$\cos\varphi=\pm\frac{3\cdot 2+(-1)\cdot 4+2\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}};$$

$$\cos\varphi=\pm\frac{-2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{24}};\quad \cos\varphi=\mp\frac{1}{2\sqrt{21}}=\mp 0{,}1091.$$

Так как нас по условию интересует острый угол между этими прямыми, мы должны $\cos\varphi$ взять положительным: $\cos\varphi=0{,}1091$. Теперь, пользуясь таблицами тригонометрических функций, находим, что $\varphi=83°44'$.

Задача 18, 12. Найти острый угол между прямыми

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-4z+5&=0\\ x-y+z&=0 \end{aligned}\right\}\qquad (A)$$

и

$$\left.\begin{aligned} x-y+2z-4&=0\\ 2x+y-z-5&=0 \end{aligned}\right\}\qquad (B)$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (18, 9) приведем заданные уравнения прямых к каноническому виду (18, 1) и получим

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-0}{5}, \qquad (A)$$

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-0}{3}. \qquad (B)$$

Пользуясь этими уравнениями прямых, по формуле (18, 9) определим, что $\cos\varphi = 0{,}9445$, а $\varphi = 19°11'$

Задача 18, 13. Через точку $A(3, -1, 4)$ привести прямую, параллельную оси Oz.

Решение. Уравнения оси Oz можно записать в виде

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{1}$$

(ось Oz проходит через начало координат, а ее направляющие косинусы равны $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$; $\cos\gamma = 1$). Так как прямая проходит через точку $A(3, -1, 4)$, то ее уравнения запишутся в виде

$$\frac{x-3}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-4}{p}.$$

Числа m, n и p в этих уравнениях из условия (18, 7) параллельности двух прямых должны быть пропорциональны числам 0,0 и 1 в уравнениях оси Oz. Заменяя поэтому в последних уравнениях числа m, n и p им пропорциональными, получим искомые уравнения в виде

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-4}{1}^{*}.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\left.\begin{matrix} x-3=0 \\ y+1=0 \end{matrix}\right\}$$

и искомая прямая может быть определена и этими уравнениями.

Задача 18, 14. Через точку $A(1, -1, 2)$ провести прямую, параллельную прямой

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}.$$

Решение. Напишем уравнение прямой, проходящей через точку A:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-2}{p}.$$

---

* Эту запись, содержащую нули в знаменателях, понимают условно, так, как это указано в учебнике Привалова (см. § 13 гл. 11, а также разъяснения на стр. 247).

Из условия (18, 7) параллельности двух прямых m, n и p в этих уравнениях должны быть пропорциональны направляющим коэффициентам 1, 3 и 2 данной прямой. Заменяя m, n и p числами, им пропорциональными, получим уравнения прямой в виде

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}.$$

Задача 18, 15 (для самостоятельного решения). Через точку (2, —1, 3) провести прямую, параллельную оси Ox.

Ответ. $\left.\begin{array}{l} y+1=0 \\ z-3=0 \end{array}\right\}$ или $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{0}$.

Задача 18, 16. Найти уравнения прямой, проходящей через точки $A(1, 2, -1)$ и $B(0, 3, -4)$.

Решение. Согласно (18, 10) имеем

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-3},$$

или, умножая все знаменатели на —1,

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3}.$$

Задача 18, 17 (для самостоятельного решения). Найти уравнения прямой, проходящей через точки $A(3, 0, 4)$ и $B(-1, -2, 3)$.

Ответ. $\frac{x-3}{4}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-4}{1}$.

ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Задачи на прямую и плоскость.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие содержит упражнения по разделу «плоскость и прямая». Приводим основные формулы.

1. Острый угол между прямой

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

и плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0$$

определяется по формуле

$$\sin\varphi=\left|\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right|. \qquad (19, 1)$$

2. Условие параллельности прямой и плоскости имеет вид

$$Am+Bn+Cp=0.$$

3. Условие перпендикулярности прямой и плоскости имеет вид

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (19,3)$$

4. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{array}\right\},$$

имеет вид

$$Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0, \qquad (19,4)$$

где λ — любое действительное число.

Задача 19, 1. Найти острый угол между прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$$

и плоскостью

$$2x+y-z+4=0.$$

Указание. Задача решается с помощью формулы (19, 1), в которой надо положить $A=2$; $B=1$; $C=-1$; $m=2$; $n=1$; $p=2$.

Ответ. Угол $\varphi=24°5'$.

Задача 19, 2. Найти острый угол между прямой

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z-4=0 \\ 2x-y+4z+5=0 \end{array}\right\} \qquad (A)$$

и плоскостью $x+y+3z-1=0$.

Решение. Уравнения прямой нет надобности преобразовывать к каноническому виду. Достаточно определить направляющие коэффициенты m, n и p этой прямой (см. задачу (18, 2)). Составляем матрицу из коэффициентов уравнений (A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и, полагая $t=1$ в формулах (18, 12), получаем

$$m=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5; \quad n=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-2; \quad p=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3.$$

Из уравнения плоскости заключаем, что $A=1$, $B=1$, $C=3$, и тогда для определения острого угла φ между прямой и плоскостью по формуле (19, 1) получаем

$$\sin\varphi=\left|\frac{-6}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{38}}\right|=\frac{6}{\sqrt{418}}=0{,}2935; \quad \varphi=17°4'.$$

Задача 19, 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1,\ 2,\ -1)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}.$$

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1,\ 2,\ -1)$, напишем на основании уравнения (17, 18) в виде

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0.$$

Пользуясь условием (19, 3) перпендикулярности прямой и плоскости, заменив в последнем уравнении величины A, B и C им пропорциональными величинами m, n и p из уравнений прямой, т. е. числами 1, —3 и 4, и получим

$$1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0,$$

а после упрощений будем иметь

$$x-3y+4z+9=0.$$

Задача 19, 4 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2,\ -4,\ -2)$ перпендикулярно прямой

$$\left.\begin{array}{r}x-4y+5z-1=0\\ 2x+\ y\qquad +3=0\end{array}\right\}.$$

Ответ. $5x-10y-9z-68=0$.

Задача 19,5. Через точку (2, 1, 6) провести прямую, перпендикулярную плоскости $x-4y+5z-1=0$, и определить направляющие косинусы этой прямой.

Решение. Напишем прежде всего уравнения прямой, проходящей через данную точку:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-6}{p}.$$

На основании формул (19, 3) числа m, n и p пропорциональны числам A, B и C из уравнения плоскости, а потому, заменяя в последнем уравнении m, n и p соответственно числами 1, —4, 5, получим искомые уравнения в виде

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-6}{5}.$$

Направляющие косинусы этой прямой определим по формулам (18, 2):

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}};\quad \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{42}};$$

$$\cos\beta=\mp\frac{4}{\sqrt{42}};\quad \cos\gamma=\pm\frac{5}{\sqrt{42}}.$$

Задача 19, 6 (для самостоятельного решения). Найти уравнение перпендикуляра к плоскости

$$3x - y - 5z - 8 = 0,$$

проходящего через точку (1, —1, 2).

Ответ. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-5}$.

Задача 19, 7. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{+5}$$

с плоскостью

$$x + y - 2z - 4 = 0.$$

Решение. Представим уравнение прямой в так называемом параметрическом виде. Пусть каждое из отношений, входящих в уравнение прямой, равно t:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{5} (= t),$$

или

$$\frac{x-1}{3} = t; \quad \frac{y+1}{-1} = t; \quad \frac{z-2}{5} = t,$$

откуда

$$x = 3t + 1; \quad y = -t - 1; \quad z = 5t + 2. \qquad (A)$$

Это и есть параметрические уравнения данной прямой. Так как координаты точки пересечения прямой и плоскости должны удовлетворять уравнениям прямой и уравнению плоскости, то, подставив значения x, y и z из (A) в уравнение плоскости, будем иметь

$$3t + 1 + (-t - 1) - 2(5t + 2) - 4 = 0.$$

Из него следует, что $t = -1$. Это значение t есть значение параметра в точке пересечения прямой и плоскости. Подставим это значение в уравнения прямой (A) и получим: $x = -2$, $y = 0$; $z = -3$. Итак, координаты точки пересечения данных прямой и плоскости будут (—2, 0, 3).

Задача 19, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнения перпендикуляра к плоскости

$$x + 3y - 4z - 13 = 0,$$

проходящего через точку (2, —1, 3), и определить координаты основания этого перпендикуляра.

Ответ. Уравнения перпендикуляра к плоскости

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

Координаты основания этого перпендикуляра (3, 2, —1).

Задача 19, 9 (для самостоятельного решения). Найти координаты основания A перпендикуляра к плоскости $x-3y+4z+$ $+5=0$, проходящего через точку $(2,\ 1,\ -1)$.

Ответ. $A(2,\ 1,\ -1)$.

Задача 19, 10. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-1}$$

и плоскости

$$3x-4y-z+5=0.$$

Решение. Поступаем, как обычно: уравнения прямой запишем в параметрическом виде:

$$\frac{x-1}{5}=t;\quad \frac{y+2}{4}=t;\quad \frac{z-1}{-1}=t.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} x&=5t+1,\\ y&=4t-2,\\ z&=-t+1. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения x, y и z в уравнение плоскости, будем иметь

$$3(5t+1)-4(4t-2)-(-t+1)+5=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим $15t-16t+t+15=0$, что можно представить в виде

$$0\cdot t+15=0.$$

Конечного значения t, удовлетворяющего этому уравнению, не существует. Значит, наша прямая не пересекает плоскости. Легко проверить, что прямая параллельна плоскости. Действительно, условие (19, 2) параллельности прямой и плоскости здесь выполняется. У нас $A=3$; $B=-4$; $C=-1$; $m=5$; $n=4$; $p=-1$ и $Am+Bn+Cp=3\cdot 5+(-4)\cdot 4+(-1)\cdot(-1)=0$.

Если бы это было замечено сразу, можно было бы не решать задачу.

Задача 19, 11 (для самостоятельного решения). Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$$

и плоскости

$$x+y-z+5=0.$$

Ответ. Прямая параллельна плоскости.

Перед тем как решать следующую задачу, усвойте по учебнику условия, при которых прямая $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ лежит в плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Эти условия имеют вид

$$\begin{cases} Aa+Bb+Cc+D=0, & (19,5)\\ Am+Bn+Cp=0. & (19,6) \end{cases}$$

Задача 19, 12. Проверить, что прямая

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{3} \qquad (A)$$

лежит в плоскости

$$x+y-z-6=0. \qquad (B)$$

Решение. Здесь $a=2,\ b=3,\ c=-1;$

$$m=2, \quad n=1, \quad p=3;$$

$$A=1, \quad B=1, \quad C=-1, \quad D=-6.$$

Проверьте, что условия (19, 5) и (19, 6) здесь выполнены, а это значит, что прямая (A) лежит в плоскости (B).

Задача 19, 13 (для самостоятельного решения). Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{9}$$

и плоскости

$$2x-3y+z-3=0.$$

Ответ. Прямая лежит в плоскости.

Задача 19. 14. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y-4z+5=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{array}\right\}$$

и точку $M(1, -1, 2)$.

Решение. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, на основании (19, 4) может быть записано так:

$$3x+y-4z+5+\lambda(x-y+2z-1)=0. \qquad (A)$$

Из этого пучка плоскостей нам требуется выбрать ту, которая проходит через точку $M(1, -1, 2)$.

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставляя в уравнение (A) координаты точки M, получим уравнение для определения λ: $5\lambda-1=0$; $\lambda=\frac{1}{5}\cdot$ Подставляя это значение λ в уравнение (A), получим

$$8x+2y-9z+12=0.$$

Задача 19, 15 (для самостоятельного решения). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, -1, 0)$ и прямую

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3z-1=0 \\ 2x+y-z+2=0 \end{array}\right\}.$$

Ответ. $x-7y+17z-9=0.$

Задача 19, 16 (для самостоятельного решения). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 1, -2)$ и прямую

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{5}.$$

Ответ. $2x+y-z-5=0$.

Задача 19, 17. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\left.\begin{array}{r}3x-y+z-5=0\\ x+2y-z+2=0\end{array}\right\} \qquad (A)$$

параллельно прямой

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}. \qquad (B)$$

Решение. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (A), имеет вид

$$3x-y+z-5+\lambda(x+2y-z+2)=0,$$

или иначе

$$(3+\lambda)x+(2\lambda-1)y+(1-\lambda)z-5+2\lambda=0. \qquad (C)$$

Из этого пучка плоскостей должна быть отобрана плоскость, параллельная прямой (B), и потому должно выполняться условие (19, 2) параллельности прямой и плоскости. На основании уравнения (C) $A=3+\lambda$, $B=2\lambda-1$, $C=1-\lambda$, а из уравнения (B) следует, что $m=-1$, $n=2$, $p=2$. Тогда условие параллельности прямой и плоскости запишется в виде

$$(3+\lambda)(-1)+(2\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot 2=0,$$

или

$$-3-\lambda+4\lambda-2+2-2\lambda=0; \quad \lambda=3.$$

Подставляя это значение λ в (C), получаем

$$6x+5y-2z+1=0.$$

Задача 19, 18. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2} \qquad (A)$$

перпендикулярно плоскости

$$3x-y+2z-2=0. \qquad (B)$$

Решение Уравнения прямой запишем в виде

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z}{2}\end{array}\right\}, \text{ или после упрощений } \left.\begin{array}{r}x-2y-5=0\\ x-z-1=0\end{array}\right\}.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид

$$x-2y-5+\lambda(x-z-1)=0,$$

или

$$(1+\lambda)x-2y-\lambda z-5-\lambda=0. \qquad (C)$$

Из этого пучка плоскостей отберем ту плоскость, которая перпендикулярна плоскости (B). Условие перпендикулярности двух плоскостей имеет вид (17, 21). В нашем случае

$$A_1=3;\quad B_1=-1;\quad C_1=2;$$
$$A_2=1+\lambda;\quad B_2=-2;\quad C_2=-\lambda;$$

а потому указанное условие примет вид

$$3(1+\lambda)+(-1)(-2)+2(-\lambda)=0.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$3+3\lambda+2-2\lambda=0$$

и

$$\lambda=-5.$$

Подставляя это значение λ в (C), получаем уравнение искомой плоскости в виде

$$4x+2y-5z=0.$$

Задача 19, 19 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$3x+2y+3z-5=0,$$
$$x+y+z-4=0$$

параллельно прямой

$$\left.\begin{aligned} x-y+2z+1&=0\\ 2x+y-3z+2&=0\end{aligned}\right\}.$$

Ответ. $7x-4y+7z+49=0$.

Задача 19, 20 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3z-1&=0\\ x-y+z+5&=0\end{aligned}\right\}$$

перпендикулярно плоскости $2x+2y-z+5=0$.

Ответ. $4x-3y+2z+26=0$.

Задача 19, 21. Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{4};$$
$$\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}.$$

Решение. Уравнения первой прямой запишем в виде

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}\\ \frac{x-1}{2}=\frac{z}{4}\end{array}\right\},$$

или после упрощений

$$\begin{cases}3x-2y+3=0,\\ 2x-z-2=0.\end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, запишется так:

$$3x-2y+3+\lambda(2x-1z-2)=0,$$

или

$$(3+2\lambda)x-2y-\lambda z+3-2\lambda=0. \qquad (A)$$

Из этого пучка выделим ту плоскость, которая проходит через вторую прямую. Вторая прямая, как видно из ее уравнения, проходит через точку $M(-2, -1, 1)$, а потому и плоскость, проходящая через вторую прямую, должна содержать эту точку. Подставляя в (A) координаты точки $M(-2, -1, 1)$ вместо текущих координат, получим для определения λ уравнение

$$(3+2\lambda)(-2)-2\cdot(-1)-\lambda\cdot 1+3-2\lambda=0; \qquad \lambda=-\frac{1}{7}.$$

Подставляя это значение λ в уравнение (A), получим

$$19x-14y+z+23=0.$$

Задача 19, 22 (для самостоятельного решения). Найти уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3},$$

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

Ответ. $4x+13y-z-5=0$.

ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Поверхности второго порядка.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Это практическое занятие является последним по курсу аналитической геометрии. Оно посвящается поверхностям второго порядка.

Поверхностью называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению вида $F(x, y, z)=0$.

Если это уравнение можно разрешить относительно z, то получим уравнение поверхности в виде $z = f(x, y)$. Уравнение поверхности может и не содержать всех трех переменных: x, y и z.

1. Сфера. Сферой называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной и той же точки, называемой центром сферы.

а) Уравнение сферы имеет вид.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \tag{20, 1}$$

где a, b и c — координаты центра сферы, а R — ее радиус.

б) Уравнение сферы с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{20, 2}$$

Задача 20, 1. Составить уравнение сферы радиуса $R = 5$ с центром в начале координат.

Решение. Подставляя в уравнение сферы (20, 2) $R = 5$, получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25.$$

Задача 20, 2. Составить уравнение сферы радиуса $R = 3$ с центром в точке $C(-1, 2, -3)$.

Решение. Подставляя в (20, 1) $a = -1$, $b = 2$, $c = -3$ и $R = 3$, будем иметь

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9,$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 5 = 0.$$

Задача 20, 3 (для самостоятельного решения). Написать уравнение сферы радиуса $R = 8$ с центром в точке $C(1, 1, -1)$.

Ответ. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 61 = 0$.

Задача 20, 4 (для самостоятельного решения). Составить уравнение сферы радиуса $R = 6$ с центром в точке $C(-1, -2, -4)$.

Ответ. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 8z - 15 = 0$.

Задача 20, 5. Определить координаты центра сферы и ее радиус.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 25 = 0.$$

Решение. Представим это уравнение в виде (20, 1) для чего

1) объединим в группы члены, содержащие одноименные координаты;

2) выделим в этих группах полные квадраты (мы так же поступали и при определении координат центра окружности и ее радиуса). Поступая, как указано, получим

$$\underbrace{x^2 - 6x}_{\mathrm{I}} + \underbrace{y^2 + 8y}_{\mathrm{II}} + \underbrace{z^2 + 10z}_{\mathrm{III}} + 25 = 0.$$

Выделяя полные квадраты в подчеркнутых группах, получим

$$\underbrace{(x-3)^2-9}_{\mathrm{I}}+\underbrace{(y+4)^2-16}_{\mathrm{II}}+\underbrace{(z+5)^2-25}_{\mathrm{III}}+25=0,$$

а упрощая, будем иметь

$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2-25=0.$$

и окончательно

$$(x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=25.$$

Сравнивая с (20, 1), имеем

$$a=+3,\ b=-4;\ c=-5;\ R^2=25.$$

Итак, центр сферы — точка $C(3, -4, -5)$, $R=5$.

Задача 20, 6. Определить координаты центра и радиус сферы

$$4x^2+4y^2+4z^2-4x+12y-16z+1=0.$$

Решение. Для приведения этого уравнения к виду (20, 1) разделим обе части данного уравнения на коэффициент при x^2 и получим

$$x^2+y^2+z^2-x+3y-4z+\frac{1}{4}=0.$$

Будем следовать плану, намеченному в предыдущей задаче. Объединяя в группы члены, содержащие одноименные координаты, и выделяя в каждой такой группе полный квадрат, получим

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+(z-2)^2-4+\frac{1}{4}=0.$$

Отсюда уже получаем уравнение сферы в виде

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{25}{4}.$$

Центр сферы C имеет координаты $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2\right)$, а ее радиус $R=\frac{5}{2}$.

Задача 20, 7 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра и радиус сферы

$$x^2+y^2+z^2+x-y+z=0.$$

Ответ. $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 20, 8 (для самостоятельного решения). Найти радиус и координаты центра сферы

$$x^2+y^2+z^2-4x-5=0.$$

Ответ. $C(2, 0, 0)$; $R=3$.

Задача 20, 9 (для самостоятельного решения). Определить координаты центра и радиус сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

Ответ. $C(-a, -b, -c)$; $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

При этом предполагаем, что $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Если бы оказалось, что $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, то сфера называлась бы мнимой; при $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ сфера имела бы радиус $R = 0$.

Задача 20, 10. Сфера проходит через точку $A(-2, 3, 5)$, а ее центр находится в начале координат. Составить уравнение сферы.

Решение. Радиус сферы легко определить, как расстояние от центра сферы (начала координат) до точки A на сфере. По формуле для определения расстояния между двумя точками в пространстве получаем

$$R = \sqrt{38}.$$

Подставляя это значение R в уравнение (20, 1), будем иметь искомое уравнение сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 38.$$

Задача 20, 11 (для самостоятельного решения). Сфера имеет центр в точке $C(5, 7, -1)$ и проходит через начало координат. Найти ее уравнение.

Ответ. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 14y + 2z = 0$.

2. Цилиндрические поверхности. Цилиндрической поверхностью, или цилиндром, называется поверхность, описанная бесконечной прямой (образующей), которая движется, оставаясь все время параллельной данной прямой и пересекая данную кривую (направляющую).

Мы будем рассматривать только такие цилиндрические поверхности, у которых образующие параллельны одной из координатных осей, а направляющей является плоская кривая, лежащая в одной из координатных плоскостей.

Уравнения таких цилиндрических поверхностей содержат только две переменные величины. В них будет отсутствовать переменная, одноименная с той координатной осью, которой параллельны образующие цилиндрической поверхности.

Так, всякое уравнение вида

$$F(x, y) = 0 \text{ или } y = f(x), \tag{20,3}$$

содержащее только две переменные x и y, определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны координатной оси Oz, а направляющая лежит в плоскости xOy, причем ее уравнение есть одно из уравнений (20,3). Всякое уравнение вида

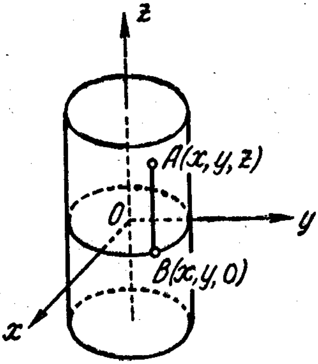
$$z = f(x) \text{ или } F(x, z) = 0, \tag{20,4}$$

содержащее только две переменные x и z и не содержащее переменной y, определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Oy, а направляющей является линия, лежащая в плоскости xOz и имеющая своим уравнением одно из уравнений (20,4).

Точно так же всякое уравнение вида

$$F(y,\ z) = 0 \text{ или } z = f(y), \tag{20,5}$$

содержащее только две переменные y и z и не содержащее переменной x, определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Ox, а направляющей служит линия, лежащая в плоскости yOz и имеющая своим уравнением одно из уравнений (20,5).



Фиг. 20,1.

Задача 20, 12. Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2?$$

Решение. Данное уравнение содержит только две переменные x и y и определяет в пространстве на основании уравнений (20,3) цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит окружность $x^2 + y^2 = r^2$, лежащая в плоскости xOy.

Приводим более подробные разъяснения полученного заключения. В плоскости xOy данное уравнение определяет окружность радиуса r с центром в начале координат. Пусть эта окружность является направляющей цилиндра, а его образующие параллельны оси Oz. Возьмем на цилиндре (фиг. 20,1) любую точку A с координатами $x,\ y,\ z$ — $A(x,\ y,\ z)$ и спроектируем ее на плоскость xOy. Ее проекция — точка B с координатами $x,\ y$ и 0 находится на окружности, которая служит направляющей, а поэтому координаты x и y точки B удовлетворяют уравнению окружности $x^2 + y^2 = r^2$. Но так как абсцисса и ордината точки $A(x,\ y,\ z)$ на цилиндрической поверхности такие же, как абсцисса и ордината точки $B(x,\ y,\ 0)$ на окружности, то, учитывая, что уравнение окружности $x^2 + y^2 = r^2$ не содержит переменной z, можно сказать, что этому уравнению удовлетворяют и координаты любой точки $A(x,\ y,\ z)$, лежащей на цилиндре.

Таким образом, данное уравнение $x^2 + y^2 = r^2$ определяет в пространстве прямой круговой цилиндр, у которого образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит эта окружность, лежащая в плоскости xOy.

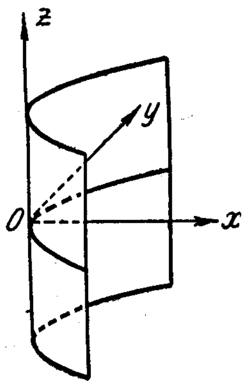
Задача 20, 13. Какую поверхность определяет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

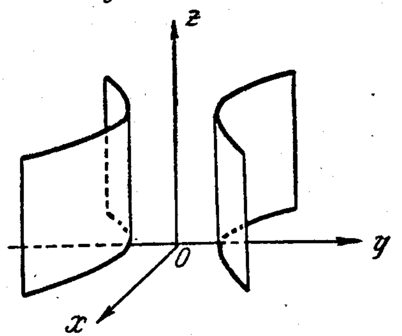
Решение. Данное уравнение содержит только две переменные x и y и на основании (20,3) определяет в пространстве цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей является эллипс. Такой цилиндр называется эллиптическим. К этому же выводу можно прийти, повторяя рассуждения предыдущей задачи.

Задача 20, 14 (для самостоятельного решения). Какую поверхность определяет уравнение $y^2 = 2px$ (фиг. 20,2)?

Ответ. Уравнение $y^2 = 2px$ определяет параболический цилиндр с образующим, параллельными оси Oz. Направляющей цилиндра служит парабола $y^2 = 2px$, лежащая в плоскости xOy.



Фиг. 2,02



Фиг. 20,3.

Задача 20, 15. Какую поверхность определяет уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1?$$

Ответ. $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ — уравнение цилиндра, образующие которого параллельны оси Oz, а направляющей служит данная гипербола, лежащая в плоскости xOy (фиг. 20, 3). Такой цилиндр называется гиперболическим.

Задача 20, 16. Какие поверхности определяют уравнения

1) $x^2 + z^2 = 16$; 2) $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$; 3) $x = 2z^2$; 4) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$?

Решение. Каждое из этих уравнений содержит только две переменные x и z и определяет на плоскости xOz кривые: 1) окружность; 2) эллипс; 3) параболу; 4) гиперболу.

В пространстве же каждое из них определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, так как эти уравнения не содержат переменной y. Направляющими этих цилиндрических поверхностей служат указанные кривые:

1) $x^2 + z^2 = 16$ — уравнение прямого кругового цилиндра;

2) $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$ — уравнение эллиптического цилиндра;

3) $x=2z^2$ — уравнение параболического цилиндра;

4) $\frac{z^2}{5}-\frac{x^2}{7}=1$ — уравнение гиперболического цилиндра.

Задача 20, 17. Какие поверхности определяют уравнения 1) $yz=5$, 1) $y=6z^2$, 3) $y^2+z^2=9$, 4) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$?

Ответ. 1) $yz=5$ — уравнение гиперболического цилиндра; 2) $y=6z^2$ — уравнение параболического цилиндра; 3) $y^2+z^2=9$ — уравнение прямого кругового цилиндра; 4) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — уравнение эллиптического цилиндра.

Образующие всех этих цилиндрических поверхностей параллельны оси Ox.

Задача 20, 18 (для самостоятельного решения). Какую поверхность определяет уравнение

$$x^2+y^2-4y=0?$$

Ответ. В пространстве уравнение определяет прямой круговой цилиндр, для которого данная окружность служит направляющей. Образующие цилиндра параллельны оси Oz, причем сама ось является одной из образующих, так как данная окружность проходит через начало координат. Постройте эскиз цилиндра.

Задача 20, 19. Какую поверхность определяет уравнение

$$y^2+z^2-2az=0?$$

Ответ. Прямой круговой цилиндр, образующие которого параллельны оси Ox.

Задача 20, 20. Какую поверхность определяет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0?$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0,$$

что в свою очередь может быть записано так:

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0, \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0.$$

Каждое из этих уравнений определяет плоскость, проходящую через ось Oy, причем ось Oy является прямой пересечения этих плоскостей.

3. **Линия в пространстве.** Линия в пространстве может рассматриваться как пересечение двух поверхностей. Если уравне-

ния этих поверхностей $F(x, y, z)=0$ и $F_1(x, y, z)=0$, то эти два уравнения

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)=0 \\ F_1(x, y, z)=0 \end{aligned}\right\} \qquad (20, 6)$$

и являются уравнениями линии в пространстве. Таким образом, линия в пространстве есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе (20, 6).

Решим несколько задач, связанных с линиями в пространстве.

Задача 20, 21. Какая линия изображается системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+(z-7)^2=16 \\ z=6 \end{aligned}\right\}$$

Решение. Первое из уравнений системы определяет сферу, а второе — плоскость, параллельную плоскости xOy. Так как данная плоскость пересекает данную сферу, то линией пересечения будет окружность. Значит, линия, о которой идет речь в задаче, — окружность лежащая в плоскости $z=6$.

Запишем уравнение этой окружности в другом виде. Исключим z из данной системы уравнений. Сделать это надо так: в первое уравнение системы подставить значение $z=6$. Получим

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+(6-7)^2=16 \\ z=6 \end{aligned}\right\},$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+1=16 \\ z=6 \end{aligned}\right\}.$$

Окончательно

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2=15 \\ z=6 \end{aligned}\right\}.$$

Первое уравнение определяет в пространстве прямой круговой цилиндр, у которого осью служит ось Oz, а второе — плоскость, параллельную плоскости xOy. Первое уравнение этой системы $x^2+y^2=15$ на плоскости xOy определяет окружность, являющуюся прямоугольной проекцией той окружности, которая определяется заданной системой уравнений.

Задача 20, 22. Какую линию определяет система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \\ z=5 \end{aligned}\right\}?$$

Решение. Первое уравнение этой системы определяет в пространстве эллиптический цилиндр, а второе — плоскость, параллельную плоскости xOy. Линией их пересечения будет эллипс, лежащий в данной плоскости. Его прямоугольной проекцией на плоскость xOy будет эллипс, определяемый первым из уравнений системы.

Задача 20, 23. Какая линия определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= z \\ x &= 5 \end{aligned}\right\}?$$

Решение. Первое из данных уравнений определяет в пространстве параболический цилиндр, а второе — плоскость, параллельную плоскости yOz. Эта плоскость пересечет параболический цилиндр по параболе. Итак, линия, определяемая заданной системой уравнений,— парабола, лежащая в плоскости $x = 5$. Проекцией этой параболы на плоскость yOz будет парабола, определяемая первым уравнением данной системы.

Задача 20, 24 (для самостоятельного решения). Какая линия определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ z &= 9 \end{aligned}\right\}?$$

Ответ. Окружность, лежащая в плоскости $z = 9$, параллельной плоскости xOy. Проекцией этой окружности на плоскость xOy будет окружность

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Второе из этих уравнений указывает на то, что окружность, определяемая первым уравнением, лежит в плоскости xOy, уравнение которой $z = 0$.

4. **Поверхность вращения.** В учебнике Привалова на странице 269 выведено простое правило, позволяющее по известному уравнению вращающейся линии получить уравнение поверхности вращения.

Приведем здесь это правило и дадим к нему разъяснения.

Правило. *Чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости yOz, вокруг оси Oy, нужно в уравнении этой линии заменить z на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$.*

Разъясним это правило.

Уравнение линии, лежащей в плоскости yOz, содержит в общем случае две переменные величины: y и z и имеет вид

$$f(y, z) = 0.$$

Уравнение же поверхности в общем случае содержит три текущих координаты: x, y и z.

Уравнение вращающейся линии надо преобразовать так, чтобы оно стало уравнением поверхности вращения. Правило указывает, что в уравнении вращающейся линии $f(y, z) = 0$ текущая координата z должна быть заменена на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$. Это надо понимать так, что в этом уравнении вторая текущая *координата y, одноименная с осью вращения Oy, должна быть оставлена без изменения.*

Таким образом, преобразованное уравнение в общем случае будет содержать три текущих координаты: x, y и z.

Если бы вращение линии $f(y, z)=0$ происходило не вокруг оси Oy, а вокруг оси Oz, то, чтобы получить уравнение поверхности вращения, следовало бы в уравнении кривой текущую *координату z, соответствующую оси вращения Oz, оставить без изменения*, две же другие текущие координаты x и y ввести, заменив в уравнении кривой y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Аналогично поступают в случаях, когда происходит вращение линии, лежащей в плоскостях xOy и xOz. Ниже рассматривается ряд задач на применение этого правила.

Задача 20, 25. Окружность $x^2+y^2=r^2$ вращается вокруг оси Ox. Найти уравнение поверхности вращения (сферы).

Решение. Чтобы написать уравнение поверхности вращения, полученной от вращения заданной окружности вокруг оси Ox, следует в уравнении окружности переменную x, соответствующую оси вращения, оставить без изменения. Вторую же переменную y в уравнении окружности заменить на $\pm$ корень квадратный из суммы квадратов двух остальных переменных — y и z, т. е. на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$; тогда уравнение поверхности вращения запишется так:

$$x^2+(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=r^2,$$

т. е. в виде

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \text{ (сфера).}$$

Задача 20, 26. Прямая $x=z$ вращается вокруг оси Oz. Найти уравнение поверхности вращения (конуса).

Решение. Так как в уравнение линии входят только переменные x и z, то линия лежит в плоскости xOz.

Для написания уравнения поверхности вращения в уравнении прямой переменная z должна остаться без изменения, так как она соответствует оси вращения Oz. Вторая же переменная x в уравнении прямой должна быть заменена $\pm$ корнем квадратным из суммы квадратов двух остальных переменных x и y, т. е. $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Уравнение поверхности вращения запишется так:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=z.$$

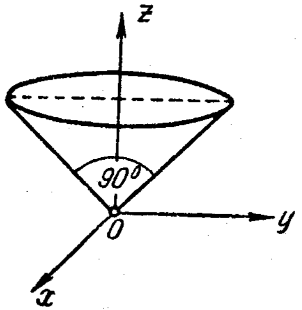
Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим окончательно уравнение поверхности вращения в виде

$$x^2+y^2=z^2,$$

или

$$x^2+y^2-z^2=0 \text{ (конус).}$$

Вершина этого конуса находится в начале координат, а так как прямая $x=z$ является биссектрисой координатного угла xOz, то угол в осевом сечении этого конуса равен 90° (фиг. 20, 4). Следует запомнить, что уравнение $x^2+y^2-z^2=0$ определяет конус с вершиной в начале координат и углом в осевом сечении, равным 90°. Осью этого конуса является ось Oz. Если бы вращение прямой $x=z$ происходило не вокруг оси Oz, а вокруг оси Ox, то мы получили бы уравнение поверхности вращения, оставив в этом уравнении без изменения переменную x и заменив переменную z на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$. Уравнение поверхности вращения приняло бы вид



Фиг. 20,4.

$$x=\pm\sqrt{y^2+z^2},$$

а после возведения обеих частей равенства в квадрат $x^2=y^2+z^2$, или окончательно $y^2+z^2-x^2=0$.

Задача 20, 27 (для самостоятельного решения). Прямая $y=z$ вращается вокруг оси Oy. Найти уравнение поверхности вращения (конуса).

Ответ. $x^2+z^2-y^2=0$.

Задача 20, 28 (для самостоятельного решения). Определить уравнение поверхности вращения, образованной вращением прямой $y=3x$ вокруг оси Ox (конус).

Ответ. $y^2+z^2-9x^2=0$.

Задача 20, 29. Определить уравнение поверхности вращения, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

1) вокруг оси Ox;
2) вокруг оси Oy.

Решение. 1) Уравнение кривой содержит координаты x и y, значит, кривая лежит в плоскости xOy.

Для определения уравнения поверхности, образованной вращением эллипса вокруг оси Ox, надо в уравнении эллипса переменную x, соответствующую оси вращения, оставить без изменения, а вторую переменную y в уравнении эллипса заменить на $\pm$ корень квадратный из суммы квадратов двух остальных переменных, т. е. на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$.

Искомое уравнение поверхности вращения будет выглядеть так:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2}{b^2}=1,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

Эта поверхность называется эллипсоидом вращения.

2) Если же вращать данный эллипс вокруг оси Oy, то переменную y, соответствующую оси вращения, в уравнении эллипса следует оставить без изменения, а переменную x заменить на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

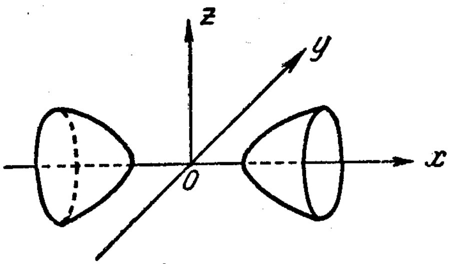
В этом случае уравнение поверхности вращения будет таким:

$$\frac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

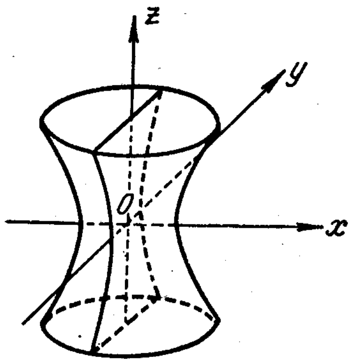
или

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Эта поверхность также называется эллипсоидом вращения.



Фиг. 20,5.



Фиг. 20.6.

Задача 20, 30 (для самостоятельного решения). Найти уравнение поверхности, образованной вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг 1) оси Ox; 2) оси Oz.

Ответ. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2+y^2}{c^2}=1$ — эллипсоид вращения;

2) $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — эллипсоид вращения.

Задача 20, 31. Найти уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг 1) оси Ox; 2) оси Oz.

Ответ. 1) $\frac{y^2+z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1$ (двухполостный гиперболоид вращения, фиг. 20, 5).

2) $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (однополостный гиперболоид вращения, фиг. 20, 6).

Задача 20, 32 (для самостоятельного решения). Парабола $y^2 = 2pz$ вращается вокруг оси Oz. Написать уравнение поверхности вращения.

Ответ. Полагая $\frac{1}{2p} = a$, получим $z = a(x^2 + y^2)$. Эта поверхность называется параболоидом вращения.

Задача 20, 33 (для самостоятельного решения). Найти уравнение поверхности, полученной от вращения параболы $y^2 = x$ вокруг оси Ox.

Ответ. $x = y^2 + z^2$ (параболоид вращения).

Задача 20, 34 (для самостоятельного решения). Найти уравнение поверхности, образованной вращением прямой $x + z = 1$ вокруг оси Oz.

Ответ. $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0$.

Поверхность — конус с вершиной в точке $C(0, 0, 1)$. Угол в осевом сечении этого конуса равен $90°$.

В заключение решим несколько простых задач, связанных с поверхностями второго порядка, заданными простейшими уравнениями. Приводим для справок простейшие уравнения поверхностей второго порядка.

1. Трехосный эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (20, 7)$$

(a, b и c — полуоси эллипсоида).

2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (20, 8)$$

В пересечении поверхности однополостного гиперболоида с координатными плоскостями получаются кривые:

1) с плоскостью xOy $(z = 0)$ — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, который называется главным;

2) с плоскостью xOz — гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

3) с плоскостью yOz — гипербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Вершины главного эллипса (иногда он называется горловым) называются вершинами гиперболоида, а оси этого эллипса — поперечными осями гиперболоида. Их длины равны $2a$ и $2b$. Ось гиперболоида (20, 8), расположенная по оси Oz и равная по длине $2c$, называется его продольной осью.

В случае, когда продольная ось однополостного гиперболоида расположена по оси Ox, уравнение его поверхности запишется в виде

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \qquad (20, 9)$$

для случая же, когда продольная ось однополостного гиперболоида находится на оси Oy, его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{20, 10}$$

3) Двухполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{20, 11}$$

Плоскость xOy не пересекает поверхности двуполостного гиперболоида (20, 11). Плоскости xOz и yOz пересекают поверхность (20, 11) соответственно по гиперболам

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

которые называются главными гиперболами. Отрезок длиною $2c$, расположенный по оси Oz, называется продольной осью двуполостного гиперболоида (20, 11), а отрезки длиною $2a$ и $2b$, расположенные соответственно по осям Ox и Oy, называются его поперечными осями.

У двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \tag{20, 12}$$

продольная ось расположена по оси Oy, а у двуполостного гиперболоида

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1 \tag{20, 13}$$

она расположена по оси Ox.

4. Действительный конус второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{20, 14}$$

Вершина этого конуса находится в начале координат, он состоит из двух частей, расположенных по обе стороны от вершины. Одной из возможных направляющих этого конуса является эллипс

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{array}\right\}.$$

У конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \tag{20, 15}$$

вершина находится в начале координат, он состоит из двух частей, расположенных по разные стороны плоскости xOz. Одной из возможных его направляющих является эллипс

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=b\end{array}\right\}.$$

У конуса же

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=0 \tag{20, 16}$$

вершина находится в начале координат, а две его части расположены по разные стороны плоскости yOz. Одной из возможных его направляющих является эллипс

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1\\ x&=a\end{aligned}\right\}.$$

5. Эллиптический параболоид

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}. \tag{20, 17}$$

Ось Oz называется его осью.

У эллиптического параболоида

$$y=\frac{x^2}{2p}+\frac{z^2}{2r} \tag{20, 18}$$

осью служит ось Oy, а у эллиптического параболоида

$$x=\frac{y^2}{2q}+\frac{z^2}{2r} \tag{20, 19}$$

осью служит ось Ox.

6. Гиперболический параболоид

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}. \tag{20, 20}$$

Задача 20, 35. Найти главные сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1,$$

определить координаты их вершин и длину осей.

Решение. Главными сечениями эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ называются линии, по которым эллипсоид пересекается с координатными плоскостями. Плоскость xOy имеет уравнение $z=0$. Полагая в уравнении эллипсоида $z=0$, получим уравнение линии пересечения эллипсоида с плоскостью xOy

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}&=1\\ z&=0\end{aligned}\right\},$$

которое в плоскости xOy определяет эллипс. В сечении данного эллипсоида плоскостью $y=0$ (координатная плоскость xOz) получается эллипс

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{4}&=1\\ y&=0\end{aligned}\right\}.$$

Координатная же плоскость yOz, уравнение которой $x=0$, пересекает данный эллипсоид по эллипсу

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}&=1\\ x&=0\end{aligned}\right\}.$$

Таким образом, главные сечения данного эллипсоида определены: это эллипсы, лежащие в координатных плоскостях.

Координаты вершин этих эллипсов и определят координаты вершин эллипсоида. Вершины эллипсоида, лежащие в плоскости xOy, имеют координаты (5, 0, 0), (—5, 0, 0), (0, 4, 0) и (0, —4, 0); вершины эллипсоида, лежащие в плоскости xOz, имеют координаты (5, 0, 0) (—5, 0, 0) (0, 0, 2) и (0, 0, —2); вершины эллипсоида, лежащие в плоскости yOz, имеют координаты (0, 4, 0), (0, —4, 0); (0, 0, 2) и (0, 0, —2). Соединяя эти результаты, приходим к такому заключению: у эллипсоида всего 6 вершин и их координаты: $A_1(5,\ 0,\ 0)$, $A_2(-5,\ 0,\ 0)$, $A_3(0,\ 4,\ 0)$, $A_4(0,\ -4,\ 0)$, $A_5(0,\ 0,\ 2)$ и $A_6(0,\ 0,\ -2)$.

Сравнивая уравнение данного эллипсоида с уравнением эллипсоида (20, 7), заключаем следующее:

$a^2=25$; полуось $a=5$, а ось эллипсоида, расположенная вдоль оси Ox, будет $2a=10$;

$b^2=16$; полуось $b=4$, а ось эллипсоида, расположенная вдоль оси Oy, будет $2b=8$;

$c^2=4$; полуось $c=2$, а ось эллипсоида, расположенная по оси Oz, равна $2c=4$.

Задача 20, 36 (для самостоятельного решения). Определить главные сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{25}=1,$$

а также координаты его вершин и длину осей.

Ответ.

1) Уравнения главных сечений:

а) $\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{49}&=1\\ z&=0\end{aligned}\right\}$; б) $\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{64}+\frac{z^2}{25}&=1\\ y&=0\end{aligned}\right\}$; в) $\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{25}&=1\\ x&=0\end{aligned}\right\}$.

2) Длина осей: $2a=16$; $2b=14$; $2c=10$.

3) Вершины эллипсоида: $A_1(8,\ 0,\ 0)$, $A_2(-8,\ 0,\ 0)$, $A_3(0,\ 7,\ 0)$, $A_4(0,\ -7,\ 0)$, $A_5(0,\ 0,\ 5)$ и $A_6(0,\ 0,\ -5)$.

Задача 20, 37. Найти линии пересечения поверхности гиперболоида

$$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{9}=1$$

с координатными плоскостями и с плоскостями

$$z=2,\ x=3,$$

Ответ. а) Уравнение линии пересечения данного гиперболоида с координатной плоскостью xOy

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}&=1\\ z&=0\end{aligned}\right\}\text{ (эллипс);}$$

б) с плоскостью yOz гиперболоид пересекается по линии

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{9}&=1\\ x&=0\end{aligned}\right\}\text{ (гипербола);}$$

в) с плоскостью xOz — по линии

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{27}-\frac{z^2}{9}&=1\\ y&=0\end{aligned}\right\}\text{ (гипербола).}$$

Уравнение линии пересечения гиперболоида с плоскостью $z=2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{39}+\frac{y^2}{26}&=1\\ z&=2\end{aligned}\right\}\text{ (эллипс, лежащий в плоскости } z=2)$$

Уравнение линии пересечения с плоскостью $x=3$

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{6}&=1\\ x&=3\end{aligned}\right\}\text{ (гипербола).}$$

Задача 20, 38. Какие поверхности определяются уравнениями

1) $x^2+y^2-z^2=0$; 2) $z=x^2+y^2$;

3) $y^2+z^2-\frac{x^2}{4}=0$; 4) $\frac{x^2+z^2}{6}-\frac{y^2}{15}=-1$;

5) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{1}-1=0$; 6) $-x^2+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{7}=0$;

7) $z=-(x^2+y^2)$; 8) $z=1-x^2-y^2$.

Ответ. 1) Круговой конус, у которого осью является ось Oz.
2) Параболоид вращения, у которого осью является ось Oz.
3) Круговой конус, у которого ось вращения совпадает с осью Ox.
4) Двухполостный гиперболоид вращения, у которого ось вращения совпадает с осью Oy.
5) Из сравнения с (20, 10) заключаем, что это однополостный гиперболоид, ось которого совпадает с осью Oy.
6) Конус, у которого ось совпадает с осью Ox.
7) Параболоид вращения.
8) Параболоид вращения.

Задача 20, 39. Какие поверхности определяются уравнениями
1) $2x^2 - 5y^2 - 8 = 0$;
2) $4x^2 - 8y^2 + 16z^2 = 0$;
3) $8x^2 - 4y^2 + 24z^2 - 48 = 0$;
4) $y^2 = 6x - 4$;
5) $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$;
6) $3x^2 + 5y^2 = 12z$;
7) $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$;
8) $z^2 - 4x = 0$;
9) $2x^2 - 3z^2 = -12y$;
10) $4x^2 - 12y^2 - 6z^2 = 12$.

Ответ. 1) Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

2) Из сравнения с (20, 15) очевидно, что это конус.

3) Из сравнения с (20, 10) заключаем, что это однополостный гиперболоид, продольная ось которого расположена по оси Oy.

4) Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

5) Перепишем уравнение в виде

$$y^2 + z^2 - 2x^2 = 0,$$

или

$$\frac{y^2 + z^2}{2} - x^2 = 0,$$

откуда видно, что это круговой конус, у которого ось совпадает с осью Ox.

6) Переписав уравнение в виде

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{\frac{12}{5}},$$

можем заключить, что это эллиптический параболоид (20, 17).

7) Эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

8) Уравнение содержит две координаты. Это цилиндрическая поверхность. Перепишем уравнение в виде

$$z^2 = 4x \qquad \text{(парабола)}.$$

Уравнение определяет параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy.

9) Уравнение перепишем в виде

$$y = \frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{6}.$$

Из сравнения с (20, 20) заключаем, что это гиперболический параболоид.

10) Перепишем уравнение в виде

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{2}=1,$$

или

$$\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{2}-\frac{x^2}{3}=-1.$$

Из сравнения с (20, 13) заключаем, что это двуполостный гиперболоид, ось которого совпадает с осью Ox.

ЧАСТЬ II

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Указатель параграфов, которые должны быть изучены перед каждым практическим занятием

Номер практического занятия	Автор и название учебника			
	В. И. Смирнов. Курс высшей математики	А. Ф. Бермант. Курс математического анализа, ч. I	Г. П. Толстов. Курс математического анализа, т. I	Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления
1	§ 1, пункт 1, 2, 3	Введение § 3, пункты 1, 2, 3, 6, 7	Глава I, § 1, 2, 3, 4, 12, 13	Глава I, § 1, 2
2	§ 1, пункты 5, 6, 7, 8	Глава I, § 1, 2	Глава II, § 1, 2, 3	Глава I, § 3, 4, 6, 7
3	§ 1, пункты 9, 10, 12, 16, 18, 19, 22, 23, 24	Глава I, § 2, 3	Глава II, § 1, 2, 3	Глава I, § 3, 4, 6, 7
4	§ 1, пункты 10, 11, 14, 19	Глава I, § 4	Глава II, § 4	Глава I, § 8, 9, 10
5	§ 1, пункты 20, 21, 22	Глава I, § 5	Глава II, § 4	Глава I, § 8, 9, 10
6	§ 1, пункты 23, 24	Глава I, § 6	Глава II, § 4	Глава I, § 8, 9, 10
7	§ 1, пункты 23, 24	См. два предыдущих занятия	Глава II, § 4	Те же параграфы, что и к предыдущим двум занятиям
8	То же	См. предыдущие практические занятия	Глава I, § 3	Те же параграфы, что и к занятиям шестому и седьмому
9	§ 1, пункт 20	Глава I, § 5; § 3 пункт 15	Глава II, § 16	Глава III, § 13, 14
10	§ 2, пункт 25	Глава II, § 1	Глава I, § 7, 8, 9	Глава II, § 1, 2, 3, 4, 5
11	§ 2, пункты 25, 26, 27, 28, 29	Глава II, § 2	Глава II, § 8	Глава II, § 1, 2, 3, 4, 5
12	§ 2, пункты 25, 26, 27, 28, 29	Глава II, § 1 и 2	Глава II, § 8	Глава II, § 1, 2, 3, 4, 5
13	Те же параграфы, что и для предыдущего практического занятия	Глава II, § 1 и 2	См. предыдущее практическое занятие	Глава II, § 1, 2, 3, 4, 5
14	Глава 1, § 2, пункт 32	Глава II, § 2, пункты 32, 33, 34	Глава II, § 7, 8, 9, 10	Глава II, § 1, 2, 3, 4

(Продолжение указателя)

Номер практического занятия	Автор и название учебника			
	В. И. Смирнов. Курс высшей математики	А. Ф. Бермант. Курс математического анализа, ч. I	Г. П. Толстов. Курс математического анализа, т. I	Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления
15	То же, что и на предыдущем практическом занятии	Глава II § 1, 2	Глава II, § 7, 8, 9, 10	Глава II, § 1, 2, 3, 4, 5
16	Глава I, § 2, пункт 33	Глава II, § 4, пункт 40	Глава II, § 11	Глава II, § 6
17	Глава I, § 2, пункт 38	Глава II, § 4, пункт 41	Глава II, § 11	Глава II, § 7, 8
18	Глава I, § 2, пункты 32, 33, 39	См. предыдущее занятие	Глава II, § 10, 11	Глава II, § 7, 8
19	Глава I, § 2, пункты 36, 37	Глава II, § 4, пункт 39	Глава II § 22	Глава II, § 11
20	Глава I, § 2, пункты 34, 35	Глава II, § 3	Глава II, § 12, 13, 14, 15	Глава II, § 9, 10
21	Глава II, § 3, пункты 45, 46	Глава III, § 1, пункты 42, 43, 44	Глава III, § 1, 2, 3, 4, 5, 6	Глава III, § 1—3
22	Глава II, § 3, пункты 47, 48, 49	Глава III, § 2, пункты 46, 47, 48, 49	Глава III, § 1, 2, 3, 4, 5, 6	Глава III, § 4—9
23	Глава II, § 3, пункты 47, 48, 49	Глава III, § 2, пункты 46, 47, 48, 49	Глава III, § 1, 2, 3, 4, 5, 6	Глава III, § 6, 10
24	Глава II, § 3, пункты 47, 48, 49	Глава III, § 2, пункты 46, 47, 48, 49	Глава III, § 1—6	Глава III, § 14
25	Глава II, § 3, пункты 47, 48, 49	Глава III, § 2, пункты 46, 47, 48, 49	Глава III, § 1—6	Глава III, § 8, 12
26	Глава II, § 3, пункт 50	Глава III, § 2	Глава III, § 1—6; § 19	Глава III, § 11
27	Глава II, § 4, пункты 53, 54, 55	Глава III, § 3, 4	Глава III, § 9, 10, 11	Глава III, § 20, 21
28	Глава II, § 4	Глава III, § 5	Глава III, § 15, 16, 17	Глава III, § 22, 23, 25

29	Глава II, § 4, пункты 65, 66	Глава IV, § 4 пункт 73	Глава IV, § 7	Глава IV, § 4, 5
30	Глава II, § 4, пункты 65, 66	Глава IV, § 4 пункт 73	Глава IV, § 7	Глава IV, § 4, 5
31	Глава II, § 5, пункт 57	Глава IV, § 1	Глава IV, § 12	Глава V, § 1, 2
32	Глава II, § 5, пункты 58, 59, 60, 61	Глава IV, § 1, пункт 62; § 3, пункт 70	Глава IV, § 13, 14	Глава V, § 3, 4, 5, 6, 7
33	Глава II, § 5, пункты 58, 59, 60, 61	Глава IV, § 1, пункт 62; § 3, пункт 70	Глава IV, § 13, 14	Глава V, § 3, 4, 5, 6, 7
34	Глава II, § 6, пункты 71, 72, 73	Глава IV, § 3, пункты 71, 74	Глава IV, § 15, 16	Глава V, § 9, 10
35	Глава II, § 5, пункты 58, 59, 60, 61; § 6, пункты 71, 72, 73	Глава IV, § 4, пункт 35	Глава IV, § 17	Глава V, § 11, 12
36	Глава II, § 6, 71, 77, 78, 79. 80, 81, 82, 83, 84, 85	Глава IV, § 6	Глава V, § 1—9	Глава VI, § 1—7
37	Глава II, § 6, пункты 67, 68	Часть II, глава X, § 1, 2, 3	Часть II, глава XI, § 1—6; глава XII, § 1, 2, 3	Глава VIII, § 1, 2, 3, 4, 5, 7
38	Глава II, § 6, пункт 69, глава V, пункты 151, 152, 153	Часть II, глава X, § 4	Часть II, глава XII, § 6, 7	Глава VIII, § 10
39	Глава VI, § 15, пункты 155, 156	Часть II, глава X, § 5	Часть II, глава XII, § 10	Глава VIII, § 12
40	То же	Часть II, глава X, § 3	Часть II, глава XIV	Глава VIII, § 13, 14, 15
41	Глава VI, § 15, п. 157	Часть II, глава X, § 4	Часть II, глава XIII, § 1	Глава VIII, § 11
42	Глава VI, § 16, п. 162	Часть II, глава XI, § 1	Часть II, глава XIV, § 1, 2	Глава VIII, § 17, 18
43	Глава VI, § 15, п. 160	Часть II, глава XI, § 3, пункт 166	Часть II, глава XII, § 5	Глава IX, § 6

ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интервал, отрезок, промежуток. Абсолютная величина числа. Свойства абсолютных величин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Интервал, отрезок, промежуток

1. *Если* a и b — *действительные числа* и a *меньше* b $(a < b)$, *то совокупность всех действительных чисел* x, *подчиняющихся условию* $a < x < b$, *образует интервал. Левым концом интервала является число* a, а *правым его концом — число* b. Обозначается интервал символом (a, b).

С геометрической точки зрения интервал (a, b) представляет собой совокупность всех точек прямой, находящихся между точками a и b, причем концы этого отрезка a и b в интервал не включаются.

На фиг. 1,1 представлен интервал. Стрелки показывают, что точки a и b не принадлежат интервалу (a, b).

Фиг. 1,1.

2. *Если к интервалу* (a, b) *присоединить числа* a и b, *то получим отрезок* ab, *который обозначается символом* $[a, b]$. Таким образом, под отрезком $[a, b]$ понимается совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $a \leqslant x \leqslant b$.

Геометрически отрезок $[a, b]$ есть отрезок прямой с концами в точках a и b.

Различие между интервалом (a, b) и отрезком $[a, b]$ состоит в том, что в случае интервала (a, b) числа a и b ему не принадлежат, а в случае отрезка $[a, b]$ числа a и b ему принадлежат.

На фиг. 1,2 представлен отрезок $[a, b]$.

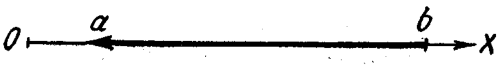
Фиг. 1,2.

3. *Под символом $[a, b)$ следует понимать совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $a \leqslant x < b$, т. е. рассматриваются все действительные числа, содержащиеся между числами a и b, причем число a рассматривается, а число b — нет (фиг. 1,3).*

Под символом же $(a, b]$ понимается совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $a < x \leqslant b$, т. е.

Фиг. 1,3.

рассматриваются все действительные числа, содержащиеся между числами a и b, причем число a не рассматривается, а число b рассматривается (фиг. 1,4).



Фиг. 1,4.

Каждая из совокупностей чисел $(a, b]$ и $[a, b)$ называется полуотрезком*.

4. *В том случае, когда безразлично, принадлежат ли граничные точки a и b рассматриваемым совокупностям или нет, вместо терминов «интервал» и «отрезок» употребляется термин «промежуток».*

Пример 1. Интервал $(5,9)$ есть совокупность всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $5 < x < 9$.

Пример 2. Отрезок $[-1, +2]$ есть совокупность всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant x \leqslant +2$.

Пример 3. Совокупность всех действительных чисел x, для которых $-1 \leqslant x < 1$, есть полуотрезок $[-1,1)$.

Пример 4. Совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $-2 < x \leqslant 2$, есть полуотрезок $(-2, +2]$.

5. *Если рассматривается совокупность всех действительных чисел, то это записывается так: $-\infty < x < +\infty$ или $(-\infty, +\infty)$.*

Под записью $a < x < +\infty$, или $(a, +\infty)$ следует понимать, что рассматривается совокупность всех действительных чисел x, бо́льших, чем a, а под записью $a \leqslant x < +\infty$, или $[a, +\infty)$, понимается совокупность всех действительных чисел x, не меньших a (когда мы говорим «число, не меньшее числа a», то это значит, что это число или больше, или равно a).

* Некоторые авторы, например Г. П. Толстов в учебнике «Курс математического анализа», называют эти совокупности чисел не «полуотрезками» а «полуинтервалами».

Запись $-\infty < x < b$ *или* $(-\infty, b)$ *означает, что рассматриваются все действительные числа* x, *меньше числа* b, *а запись* $-\infty < x \leqslant b$ *или* $(-\infty, b]$ *следует понимать так, что рассматривается совокупность всех действительных чисел* x, *не больших числа* b (когда говорят, что число не больше числа b, то это означает, что оно или меньше, или равно числу b). *Интервалы, рассмотренные в этом пункте, называются бесконечными.*

2. Свойства абсолютных величин

С абсолютными величинами чисел в математическом анализе приходится часто встречаться. Мы напомним относящиеся сюда определения и теоремы и сделаем ряд упражнений.

1. Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$. Пусть a — действительное число. Если оно положительно или равно нулю ($a \geqslant 0$), то его абсолютной величиной называется оно само, а если оно отрицательно ($a < 0$), то его абсолютной величиной называется число $-a$.

Итак, если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$.

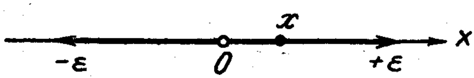
Чтобы перейти к абсолютной величине числа, имеющего в цифровой записи знак минус, надо этот знак отбросить.

Если $a = 5$, то $|a| = |5| = 5$; если $a = 0$, то $|a| = 0$.

Если $a = -3$, то $|a| = |-3| = -(-3) = 3$.

2. Если $|x| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то это означает, что x удовлетворяет неравенствам (фиг. 1,5);

$$-\varepsilon < x < +\varepsilon. \tag{1,1}$$

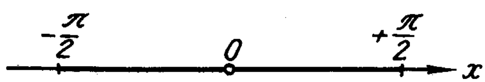


Фиг. 1,5.

Пример 1. Если $|a| < 3$, то имеют место неравенства

$$-3 < a < +3.$$

Пример 2. Если $|y| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то y удовлетворяет неравенствам $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$ (фиг. 1,6).



Фиг. 1,6.

Задача 1,1. Определить числовую величину выражения $\left|\frac{2x+5}{7-2x^2}\right|$ при $x = 2$.

Решение. При $x = 2$

$$\left|\frac{2x+5}{7-2x^2}\right| = \left|\frac{2\cdot 2+5}{7-2\cdot 2^2}\right| = \left|\frac{4+5}{7-8}\right| = \left|\frac{9}{-1}\right| = |-9| = 9.$$

Задача 1,2. Определить числовую величину выражения $\left|\frac{2x^3-4}{5-x}\right|$ при $x = 0$.

Решение. При $x = 0$ имеем

$$\left|\frac{2x^3-4}{5-x}\right| = \left|\frac{2\cdot 0-4}{5-0}\right| = \left|\frac{-4}{5}\right| = \left|-\frac{4}{5}\right| = -\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

Задача 1,3 (для самостоятельного решения). Определить при $x = 4$ числовую величину выражения $\left|\frac{x-8}{5-x^2}\right|$.

Ответ. $\frac{4}{11}$.

Задача 1,4 (для самостоятельного решения). Найти числовую величину выражения $\left|\frac{5-x^3}{1-x}\right|$ при: 1) $x = 0$; 2) $x = 2$; 3) $x = -3$.

Ответ. 1) 5; 2) 3; 3) 8.

Задача 1,5. Определить, при каких значениях x будет справедливо неравенство $|x-3| < 2$.

Решение. Согласно формуле (1,1) данное неравенство может быть записано так: $-2 < x-3 < 2$. К каждой части этих неравенств прибавим по 3 и получим $-2+3 < x < 2+3$, откуда следует, что $1 < x < 5$.

Заключение: неравенство $|x-3| < 2$ выполняется для всех значений x из интервала (1,5).

Задача 1,6. Определить, при каких значениях x выполняется неравенство $|x-a| < \varepsilon$.

Решение. Поступая так же, как и в предыдущей задаче, получаем, что $-\varepsilon < x-a < +\varepsilon$, а отсюда, прибавляя a к каждой части этих неравенств, имеем $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$.

Заключение: неравенство $|x-a| < \varepsilon$ выполняется для всех значений x из интервала $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$.

Задача 1,7 (для самостоятельного решения). Определить, при каких значениях x выполняются неравенства: 1) $|x-1| < 3$; 2) $|x+3| < 1$; 3) $|x+1| > 3$.

Ответ. 1) $-2 < x < 4$; 2) $-4 < x < -2$; 3) $x < -4$ и $x > 2$.

Указание к третьему примеру: из того, что $|x| > a\ (a > 0)$, следует, что $x > +a$ и $x < -a$. В нашем случае из того, что $|x+1| > 3$, заключаем, что $x+1 > 3$ и $x+1 < -3$; отсюда и следует указанный ответ.

Задача 1,8. При каких значениях x корень $\sqrt{9-x^2}$ будет иметь действительные значения?

Решение. Корень $\sqrt{9-x^2}$ будет иметь действительные значения, если подкоренное выражение не является отрицательным, т. е. когда $9-x^2 \geqslant 0$, а $x^2 \leqslant 9$.

Многие совершают грубую ошибку, делая на основании неравенства $x^2 < 9$ заключение, что $x < \pm 3$, т. е. $x < +3$ и $x < -3$. В действительности же верно только, что $x < +3$, а неравенство $x < -3$ является в данном случае ошибочным. Правильными решениями неравенства $x^2 < 9$ являются $x > -3$ и $x < +3$, т. е. $-3 < x < +3$, или $|x| < 3$, ибо для всех значений x из интервала $(-3, +3)$ выполняется неравенство $x^2 < 9$. Если же принять, что $x < -3$, то числа, удовлетворяющие этому неравенству, будучи возведены в квадрат, дадут числа бо́льшие, чем 9 (например, $-4 < -3$ и $(-4)^2 = 16 > 9$).

Итак, решением неравенства $x^2 \leqslant 9$ является $-3 \leqslant x \leqslant +3$, или $|x| \leqslant 3$.

Задача 1,9 (для самостоятельного решения). При каких значениях x корень $\sqrt{x^2-9}$ будет иметь действительные значения?

Ответ. $x \leqslant -3$ и $x \geqslant +3$, т. е. $\sqrt{x^2-9}$ имеет действительные значения для значений x, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x \leqslant -3$ и $3 \leqslant x < +\infty$.

3. Теоремы об абсолютных величинах

Теорема 1. *Абсолютная величина суммы нескольких слагаемых не больше суммы абсолютных величин этих слагаемых*, т. е. *например*, $|x+y+z| \leqslant |x|+|y|+|z|$, *причем знак равенства имеет место только в том случае, когда числа x, y и z имеют один и тот же знак.*

Теорема 2. *Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел*, т. е. $|x-y| \geqslant |x|-|y|$.

Теорема 3. *Абсолютная величина произведения нескольких сомножителей равна произведению абсолютных величин этих сомножителей. Например, в случае двух сомножителей* $|xy| = |x||y|$.

Теорема 4. *Абсолютная величина дроби равна абсолютной величине числителя, разделенной на абсолютную величину знаменателя*, т. е.

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Задача 1,10 (для самостоятельного решения). Проверить теорему 1 этого параграфа для

1) $x=-5$; $y=4$; $z=5$; $u=-1$.
2) $x=-4$; $y=5$; $z=-2$.
3) $x=4$; $y=2$; $z=7$.
4) $x=5$; $y=-3$; $z=-6$.

Задача 1,11 (для самостоятельного решения). Проверить теорему 2 этого параграфа для чисел

1) $x = 7$; $y = -4$; 3) $x = 5$; $y = 7$;
2) $x = -4$; $y = -8$; 4) $x = -10$; $y = 4$.

Задача 1,12. Решить неравенство $\left|\frac{x-1}{2(x+3)} - \frac{1}{5}\right| < 0{,}01$ $(x > -3)$.

Решение. Упростим выражение, стоящее под знаком абсолютной величины:

$$\frac{x-1}{2(x+3)} - \frac{1}{5} = \frac{5x-5-2x-6}{10(x+3)} = \frac{3x-11}{10(x+3)},$$

и данное неравенство запишется в виде $\left|\frac{3x-11}{10(x+3)}\right| < \frac{1}{100}$.

Освобождаясь от знака абсолютной величины, получаем:

$$-\frac{1}{100} < \frac{3x-11}{10(x+3)} < +\frac{1}{100},$$

а отсюда уже имеем два неравенства:

$$1)\ -\frac{1}{100} < \frac{3x-11}{10(x+3)};\quad 2)\ \frac{3x-11}{10(x+3)} < \frac{1}{100}.$$

Так как по условию $x > -3$, то $x+3$ — величина положительная, и первое неравенство после умножения обеих его частей на $x+3$ дает

$$-1\cdot(x+3) < 30x - 110;\quad -x-3 < 30x-110;\quad x > \frac{107}{31}$$

($x+3 > 0$, а поэтому смысл неравенства от умножения обеих его частей на $x+3$ сохраняется).

Из второго неравенства получаем, что $x < \frac{113}{29}$. Итак, данное неравенство выполняется, если $\frac{107}{31} < x < \frac{113}{29}$.

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Величины постоянные и переменные. Функция. Область существования функции. Основные элементарные функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Постоянные величины. Абсолютные постоянные и параметры. *Величина называется постоянной, если она всегда или только в условиях данной задачи сохраняет одно и то же числовое значение.*

Постоянные величины разделяются на абсолютные постоянные величины и параметры. Величина, которая сохраняет одно *и то же значение при всех условиях, называется абсолютной постоянной (примерами абсолютных постоянных являются: все числа, сумма внутренних углов треугольника, число π; скорость света в пустоте).*

Параметром называется такая постоянная величина, которая лишь в условиях данной задачи (данного исследования) сохраняет постоянное, вполне определенное числовое значение, но с изменением условий задачи принимает уже другое, хотя опять-таки определенное числовое значение.

2. Переменные величины. *Величина называется переменной, если она в условиях данной задачи принимает различные числовые значения.*

3. Независимые переменные. *Две переменные величины называются независимыми, если значения, принимаемые одной из них, не зависят от значений, принимаемых другой.*

(Пример: в формуле для определения объема цилиндра $V = \pi R^2 H$ величины R и H — независимые переменные, так как значения, принимаемые высотой H цилиндра, не зависят от значений R, которые принимает радиус цилиндра).

4. Функция. *Переменная величина y называется функцией от переменной величины x, если каждому рассматриваемому значению x по известному правилу или закону соответствует одно определенное значение y.** Если переменная величина y является функцией переменной величины x, то это обозначают так:*

$$y = f(x). \tag{2,1}$$

Эта запись читается: «игрек есть функция от икс», или «игрек равен эф от икс».

В записи (2,1) x называется аргументом или независимой переменной, а y — функцией, или зависимой переменной.

5. Задание функции. *Функция (2,1) считается заданной, если:*

1) Указана совокупность всех рассматриваемых значений аргумента x.

2) Указан закон, который позволяет по заданному значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции y.

6. Частным значением функции *называется то ее значение, которое соответствует частному значению аргумента $x = x_0$. Для обозначения частного значения функции при $x = x_0$ употребляется символ $f(x_0)$ или $y(x_0)$.*

7. Область существования функции. *Если функция задана аналитически, то областью существования функции (иначе, областью определения функции) называется совокупность тех действительных значений аргумента, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает только действительные значения.*

---

* Многозначные функции нами не рассматриваются.

ПЕРЕМЕННЫЕ И ПОСТОЯННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Задача 2,1. Период малых колебаний T математического маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести.

Какие из величин, входящих в эту формулу, являются абсолютными постоянными, параметрами, переменными?

Ответ. 2 и π — абсолютные постоянные; g — параметр; значение этой величины постоянно только в данной точке земной поверхности, но изменяется при переходе от одной точки земной поверхности к другой; l и T — величины переменные.

Задача 2,2. Согласно закону Бойля-Мариотта, в изотермическом процессе $pV = C$, где p — давление газа, а V — занимаемый им объем. Указать в этой формуле переменные величины и параметр.

Ответ. Величины p и V — переменные; величина C — параметр, так как она сохраняет постоянное значение только для данного газа и для данной температуры.

Задача 2,3. В случае свободного падения тела в пустоте пройденный им путь S вычисляется по формуле $S = \frac{gt^2}{2}$.

Какие из входящих в эту формулу величин являются абсолютными постоянными, параметрами, переменными?

Ответ. 2 является абсолютной постоянной величиной (следует помнить, что все числа — абсолютные постоянные величины); g — параметр (см. задачу № 2,1); s и t — переменные величины.

Задача 2,4. Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Указать, какие из величин, входящих в эту формулу, являются переменными, абсолютными постоянными, параметрами.

Ответ. Величины π и 3 — абсолютные постоянные; V, H, R и r — переменные величины.

Ни одна из величин, входящих в эту формулу, не является параметром.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Для того чтобы найти частное значение функции по заданному частному значению аргумента, надо в аналитическое выражение функции подставить вместо аргумента его частное значение.

Задача 2,5. Дана целая рациональная функция $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Вычислить: 1) $f(2)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(1)$; 4) $f(0)$; 5) $f(a+2)$; 6) $f(-x)$.

Решение. 1) $f(2)=3\cdot 2^2-2\cdot 2-1=3\cdot 4-4-1=12-$
$-4-1=7.$
2) $f(-2)=3(-2)^2-2(-2)-1=3\cdot 4+4-$
$-1=12+4-1=15.$
3) $f(1)=3\cdot 1^2-2\cdot 1-1=0.$
4) $f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0-1=-1.$
5) $f(a+2)=3(a+2)^2-2(a+2)-1=3(a^2+$
$+4a+4)-2a-4-1=3a^2+10a+7.$
6) $f(-x)=3(-x)^2-2(-x)-1=3x^2+2x-1.$

Задача 2,6 (для самостоятельного решения). Дана целая рациональная функция $f(z)=2z^3-z^2+z-1$.

Вычислить: 1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-1)$;

4) $f\left(\frac{a}{2}\right)$; 5) $f\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$.

Ответ. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 13; 3) -5; 4) $\frac{a^3-a^2+2a-4}{4}$;

5) $\frac{a^3-7a^2+3a-5}{(a+1)^3}$.

Задача 2,7. Дана дробная рациональная функция

$$f(x)=\frac{4a^2-7x+2}{3x^2+5}.$$

Вычислить: 1) $f(a)$; 2) $f\left(\frac{1}{a^2}\right)$; 3) $f(2)$; 4) $f(0)$.

Решение. 1) $f(a)=\frac{4x^2-7a+2}{3a^2+5}$; 2) $f\left(\frac{1}{a^2}\right)=\frac{4\left(\frac{1}{a^2}\right)^2-7\left(\frac{1}{a^2}\right)+2}{3\left(\frac{1}{a^2}\right)^2+5}=$

$=\frac{4-7a^2+2a^4}{5a^4+3}$; 3) $f(2)=\frac{4\cdot 2^2-7\cdot 2+2}{3\cdot 2^2+5}=\frac{16-14+2}{12+5}=\frac{4}{17}$;

4) $f(0)=\frac{2}{5}$.

Задача 2,8 (для самостоятельного решения). Дана функция $f(z)=5^{\frac{1}{z}-1}$. Вычислить: 1) $f(1)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-2)$; 4) $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Ответ. 1) $f(1)=1$; 2) $f(2)=\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $f(-2)=\frac{1}{5\sqrt{5}}$; 4) $f\left(\frac{1}{z}\right)=$
$=5^{z-1}$.

Задача 2,9. Дана дробно-линейная функция $\varphi(x)=\frac{5x+1}{2-x}$. Найти: 1) $\varphi(3x)$; 2) $\varphi(x^3)$; 3) $3\varphi(x)$; 4) $[\varphi(x)]^3$.

Решение. 1) Чтобы найти $\varphi(3x)$ следует в выражении для $\varphi(x)$ заменить x на $3x$. Получаем $\varphi(3x)=\frac{5\cdot 3x+1}{2-3x}=\frac{15x+1}{2-3x}$.

2) Заменяя в выражении для $\varphi(x)$ x на x^3, получим

$$\varphi(x^3)=\frac{5x^3+1}{2-x^3}.$$

3) Следует отличать $\varphi(3x)$ от $3\varphi(x)$, $\varphi(x^3)$ от $[\varphi(x)]^3$. Было найдено в 1), что $\varphi(3x)=\frac{15x+1}{2-3x}$, а $3\varphi(x)=3\frac{5x+1}{2-x}=\frac{15x+3}{2-x}$.

4) $[\varphi(x)]^3=\left(\frac{5x+1}{2-x}\right)^3=\frac{125x^3+75x^2+15x+1}{8-12x+6x^2-x^3}$.

Задача 2,10 (для самостоятельного решения). Дана функция $\Phi(\theta)=\lg\frac{5-\theta}{2+\theta}$.

Найти:

$$1)\ \Phi(2\theta);\quad 2)\ 2\Phi(\theta);\quad 3)\ \Phi(\theta^2);\quad 4)\ [\Phi(\theta)]^2.$$

Ответ. 1) $\Phi(2\theta)=\lg\frac{5-2\theta}{2+2\theta}$; 2) $2\Phi(\theta)=\lg\left(\frac{5-\theta}{2+\theta}\right)^2$;

3) $\Phi(\theta^2)=\lg\frac{5-\theta^2}{2+\theta^2}$; 4) $[\Phi(\theta)]^2=\lg^2\frac{5-\theta}{2+\theta}$.

Задача 2,11 (для самостоятельного решения). $\varphi(x)=\lg\sin x$. Доказать, что $\varphi(a)+\varphi(b)=\lg(\sin a\cdot\sin b)$.

Задача 2,12 (для самостоятельного решения). $F(x)=\sin x$. Доказать, что $F(3x)=3F(x)-4[F(x)]^3$.

Задача 2,13. Доказать, что если $f(x)=\frac{\cos x}{x}$, то $f(-x)=-f(x)$.

Решение. $f(-x)=\frac{\cos(-x)}{-x}=-\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{f(x)}=-f(x)$.

Задача 2,14 (для самостоятельного решения). $f(\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$. Доказать, что $f(2\alpha)=\frac{2f(\alpha)}{1-f^2(\alpha)}$.

Задача 2,15 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, то $f(-x)=f(x)$.

Задача 2,16. Вычислить $f(x)=\frac{36}{x^2}+x^2$ в точках, где $\frac{6}{x}+x=5$.

Решение. $\frac{36}{x^2}+x^2=\left(\frac{6}{x}+x\right)^2-12$, а так как по условию $\frac{6}{x}+x=5$, то $\frac{36}{x^2}+x^2=5^2-12=13$.

Задача 2,17. Дано, что $\varphi(x)=x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$. Доказать, что $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\varphi(x)$.

Решение. $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+x+x^2=$
$=\varphi(x)$.

Задача 2,18 (для самостоятельного решения). Дана функция $\varphi(x)=\frac{7-x^2}{5-x+x^2}$. Вычислить: $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\frac{1}{\varphi(x)}$.

Ответ. $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{7x^2-1}{5x^2-x+1}$; $\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{5-x+x^2}{7-x^2}$.

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Задача 2,19. Найти область существования функции

$$\varphi=3x^3+5x^2-7x+2.$$

Решение. Заданная функция — целая рациональная функция. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$, или в другой записи $-\infty<x<+\infty$.

Задача 2,20. Найти область существования функций:

$$1)\ y=\frac{1}{x};\quad 2)\ y=\frac{5}{1-x};\quad 3)\ y=\frac{1}{7x-2}.$$

Решение. 1) Функция $y=\frac{1}{x}$ — дробная рациональная функция. Она существует при всех значениях независимой переменной x, кроме тех, которые обращают в нуль ее знаменатель, т. е. в данном случае кроме $x=0$. Область существования этой функции состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, или в другой записи $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$.

2) Функция $y=\frac{5}{1-x}$ также определена при всех значениях x, кроме того его значения, при котором $1-x=0$, т. е. кроме $x=1$. Область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$, или в другой записи $(-\infty<x<1)$; $(1<x<+\infty)$.

3) Решив уравнение $7x-2=0$, найдем, что $x=\frac{2}{7}$. Область существования функции $y=\frac{1}{7x-2}$ состоит из двух бесконечных интервалов $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$; $\left(\frac{2}{7}, +\infty\right)$, или в другой записи $\left(-\infty<x<\frac{2}{7}\right)$ и $\left(\frac{2}{7}<x<+\infty\right)$.

Задача 2,21 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y=\frac{x-1}{x+1};\quad 2)\ y=\frac{x^2-1}{2x-4}.$$

Ответ. 1) $(-\infty,\ -1)$; $(-1,\ +\infty)$, или $-\infty<x<-1$ и $-1<x<+\infty$.
2) $(-\infty,\ 2)$; $(2,\ +\infty)$,
или $-\infty<x<2$ и $2<x<+\infty$.

Задача 2,22. Найти область существования функции $y=\frac{x-1}{x^2-7x+12}$.

Решение. Заданная функция — дробная рациональная функция. Она определена при всех действительных значениях x, кроме тех, при которых знаменатель дроби $x^2-7x+12$ равен нулю, т. е. кроме значений $x=3$ и $x=4$ (эти значения найдены из уравнения $x^2-7x+12=0$). Область существования заданной функции состоит из трех интервалов: $(-\infty,\ 3)$; $(3,4)$ и $(4,\ +\infty)$, или в другой записи: $-\infty<x<3$; $3<x<4$; $4<x<+\infty$.

Задача 2,23 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y=\frac{5x^2-7x+12}{x^2-1};\quad y=\frac{7x^2+x-1}{3x^2-8x+4}.$$

Ответ. 1) Область существования состоит из трех интервалов:

$(-\infty,\ -1)$; $(-1,\ +1)$; $(+1,\ +\infty)$.

2) Область существования состоит из трех интервалов:

$$\left(-\infty,\ \frac{2}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3},\ 2\right);\ (2,\ +\infty).$$

Задача 2,24. Найти область существования функции $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}$.

Решение. Приравняв нулю знаменатель дроби x^2+x+1 и решив квадратное уравнение $x^2+x+1=0$, убедимся, что его корни — комплексные числа: $x=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ни при одном действительном значении x многочлен x^2+x+1 в нуль не обращается. Поэтому заданная функция определена при всех действительных значениях x. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty,\ +\infty)$.

Задача 2,25 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y=\frac{x^3-x+2}{2x^2+x+5};\quad 2)\ y=\frac{5}{x^2+1}.$$

Ответ. 1) Бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

2) Бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

Задача 2,26 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y=-\frac{x+5}{x^3-1}$$

(знаменатель дроби x^3-1 имеет один действительный корень $x=1$);

$$2)\ y=\frac{2x^3-1}{x^3+1}.$$

Ответ. 1) Функция существует в двух бесконечных интервалах: $(-\infty, +1)$ и $(+1, +\infty)$, т. е. при любом значении x, кроме $x=1$. 2) Знаменатель дроби x^3+1 имеет один действительный корень $x=-1$. Функция существует в двух бесконечных интервалах: $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$, т. е. при любом значении x, кроме $x=-1$.

Задача 2,27. Найти область существования функций:

$$1)\ y=\sqrt{2-x};\quad 2)\ y=\sqrt{x+4}.$$

Решение. 1) Для того чтобы функция y принимала только действительные значения, величина $2-x$, стоящая под корнем, не должна принимать отрицательных значений, т. е. должно быть $2-x\geqslant 0$, откуда $x\leqslant 2$. Областью существования функции является совокупность действительных значений x, меньших или равных 2, т. е. полуотрезок $-\infty<x\leqslant 2$.

2) Чтобы определить область существования функции, составим неравенство $x+4\geqslant 0$, из которого получаем, что $x\geqslant -4$. Область существования функции полуотрезок $-4\leqslant x<+\infty$ $[-4, +\infty)$.

Задача 2,28 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций 1) $y=\sqrt{5-x}$ и 2) $y=\sqrt{x-3}$.

Ответ. 1) Полуотрезок $-\infty<x\leqslant 5$.

2) Полуотрезок $3\leqslant x<+\infty$.

Задача 2,29. Найти область существования функций

$$1)\ y=\frac{1}{\sqrt{x-2}};\quad 2)\ y=\frac{5}{\sqrt{4-x}};\quad 3)\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}.$$

Решение. 1) Выражение $\sqrt{x-2}$ принимает действительные значения, когда $x-2\geqslant 0$, т. е. когда $x\geqslant 2$. Но при $x=2$ имеем $x-2=0$, знаменатель дроби обращается в нуль, дробь теряет числовой смысл, а потому значение $x=2$ не может входить в область существования функции. Значит, функция существует при значениях $x>2$, область существования представляет собой бесконечный интервал $(2, +\infty)$.

2) Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty, 4)$.

3) Область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 8)$ и $(8, +\infty)$. Это же заключение можно записать с помощью неравенств: $-\infty < x < 8$ и $8 < x < +\infty$.

Задача 2,30 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}};\quad 2)\ y = \frac{1}{\sqrt{7-2x}};\quad 3)\ y = \frac{4}{\sqrt{x-5}}.$$

Ответ. 1) Два бесконечных интервала $(-\infty, 3)$; $(3, +\infty)$
2) Бесконечный интервал $(-\infty; 3{,}5)$.
Бесконечный интервал $(5, +\infty)$.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в определении области существования функции.

Задача 3,1. Найти область существования функций 1) $y = \sqrt{x^2-1}$; 2) $y = \sqrt{4-x^3}$.

Решение. 1) Для того чтобы функция $y = \sqrt{x^2-1}$ принимала только действительные значения, надо, чтобы $x^2 - 1 \geqslant 0$, т. е. $x^2 \geqslant 1$. Это неравенство выполняется тогда, когда $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$, и, таким образом, область существования функции состоит из двух полуотрезков: $(-\infty, -1]$ и $[+1, +\infty)$, или в другой записи $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x + \infty$.

2) Должно выполняться неравенство $4 - x^2 \geqslant 0$, т. е. $x^2 \leqslant 4$. Отсюда следует, что $x \geqslant -2$ и $x \leqslant +2$.

Областью существования функции является отрезок $[-2, +2]$. Это можно записать иначе: $-2 \leqslant x \leqslant +2$.

Задача 3,2 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \sqrt{9-x^2};\quad 2)\ y = \sqrt{x^2-6};\quad 3)\ y = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}};$$

$$4)\ y = \frac{3}{\sqrt{x^2-16}}.$$

Ответ. 1) Отрезок $[-3, +3]$, иначе $-3 \leqslant x \leqslant +3$. 2) Два полуотрезка $(-\infty, -\sqrt{6}]$ и $[+\sqrt{6}, +\infty)$, иначе $-\infty < x \leqslant -\sqrt{6}$ и $+\sqrt{6} \leqslant x < +\infty$. 3). Интервал $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, или $(-\sqrt{5} < x < \sqrt{5})$ (значения $x = \pm\sqrt{5}$ отбрасываются, так как при $x = \pm\sqrt{5}$ знаменатель дроби обращается в нуль и дробь теряет числовой смысл). 4) Два иетервала $(-\infty, -4)$ и $(4, +\infty)$, или $-\infty < x < -4$ и $4 < x < +\infty$ (значения $x = \pm 4$

отбрасываются, так как при $x = \pm 4$ знаменатель дроби обращается в нуль и тем самым дробь теряет числовой смысл).

Задача 3,3 (для самостоятельного решения). Определить область существования функции $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Указание. Должно выполняться неравенство $\frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$. Для определения тех значений x, при которых это имеет место следует решить системы неравенств:

$$1)\ \left.\begin{matrix} x+1 \geqslant 0 \\ x-1 > 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{и } 2)\ \left.\begin{matrix} x+1 \leqslant 0 \\ x-1 < 0 \end{matrix}\right\}.$$

Из решения этих неравенств следует, что областью существования является полуотрезок $(-\infty, -1)$ и интервал $(1, +\infty)$. Это можно записать иначе: $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 < x < +\infty$. Значение $x = 1$ рассматриваться не может, так как тогда $x - 1 = 0$ и дробь $\frac{x+1}{x-1}$ теряет числовой смысл.

Задача 3,4 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$.

Указание. Рассмотреть неравенство $(x-2)(x+3) \geqslant 0$.

Ответ. $-\infty < x \leqslant -3$ и $2 \leqslant x < +\infty$.

Задача 3,5. Найти область существования функции $y = \lg(x - 5)$.

Решение. Учитывая, что если основание логарифмов положительно, то ни нуль ни отрицательные числа логарифмов не имеют, область существования данной функции найдем из требования, чтобы $x - 5 > 0$, откуда следует, что должно быть $x > 5$. Функция существует для значений $5 < x < +\infty$, т. е. на бесконечном интервале $(5, +\infty)$.

Задача 3,6 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \lg(2 - x); \quad 2)\ y = \lg(x^2 - 3).$$

Ответ. 1) $-\infty < x < 2$; 2) $-\infty < x < -\sqrt{3}$ и $\sqrt{3} < x < +\infty$.

Указание. В случае 2) рассмотреть неравенство $x^2 - 3 > 0$.

Задача 3,7 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \lg x^4$.

Ответ. $(-\infty < x < 0)$ и $(0 < x < +\infty)$, т. е. функция определена при любом значении x, кроме $x = 0$.

Задача 3,8. Найти область существования функции $y = \sin(2x + 3)$.

Решение. Функция $y = \sin x$ определена при любом значении аргумента x. Значит, выражение $2x + 3$, стоящее под знаком синуса, может принимать любое значение, откуда следует, что

x может принимать любое значение. Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Это заключение можно написать и иначе: $-\infty < x < +\infty$.

Задача 3,9 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sin\frac{1}{x}$.

Ответ. Все действительные числа, кроме $x = 0$: $(-\infty < x < 0)$ и $(0 < x < +\infty)$.

Задача 3,10. Найти область существования функции $y = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при всех действительных значениях x, кроме $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. Значит, в нашем случае величина $2x$, стоящая после знака тангенса, не должна быть равна $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, т. е. $2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, а $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$. Таким образом, область существования функции $y = \operatorname{tg} 2x$ состоит из всех действительных чисел, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, где k — любое целое число.

Задача 3,11 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций: 1) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; 2) $y = \operatorname{tg} 4x$; 3) $y = \sec\frac{x}{5}$ и $y = \operatorname{cosec} 3x$.

Ответ. 1) Множество всех действительных чисел, кроме значений $x = 3k\pi$. 2) Множество всех действительных чисел, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$. 3) Множество всех действительных чисел, кроме $x = (2k+1)\frac{5\pi}{2}$. 4) Множество всех действительных чисел кроме $x = \frac{k\pi}{3}$ (всюду k — любое целое число).

Задача 3,12. Найти область существования функции $y = \arcsin(5x - 8)$.

Решение. Областью существования функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1, +1]$. Поэтому область существования данной функции указывается неравенствами $-1 \leqslant 5x - 8 \leqslant +1$.

Прибавляя ко всем частям этих неравенств по 8, получаем $7 \leqslant 5x \leqslant 9$, откуда уже следует, что функция существует для значений $\frac{7}{5} \leqslant x \leqslant \frac{9}{5}$.

Задача 3,13 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right);\quad 2)\ y = \arccos(3x - 6).$$

Ответ. 1) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$.

Задача 3,14 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \operatorname{arctg}(2x - 5);\quad 2)\ y = \arcsin\sqrt{4x - 3}.$$

Ответ. 1) $-\infty < x < +\infty$; 2) $\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1$.

Задача 3,15 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \arcsin(x^2 + 2)$.

Ответ. Данное аналитическое выражение не определяет никакой функции, так как ни при одном значении x не имеют место неравенства $-1 \leqslant x^2 + 2 \leqslant +1$.

Указание к решению задач 3,16—3,23.

Если требуется найти область существования алгебраической суммы нескольких функций, то надо поступить так:

1) Определить область существования каждой из слагаемых функций:

2) Определить часть, общую для всех найденных областей. Эта общая часть и будет искомой.

Если такой общей части у областей, найденных в п. 1), не окажется, то заданное аналитическое выражение, представляющее алгебраическую сумму нескольких функций, не определяет никакой функции в области действительных чисел.

Это указание распространяется также на произведение нескольких функций и на частное двух функций, причем при определении области существования частного двух функций должны быть исключены точки, в которых знаменатель дроби обращается в нуль.

Задача 3,16. Найти область существования функции $y = \log_2(x - 1) + x^2$.

Решение. Областью существования функции $y_1 = \log_2(x - 1)$ является совокупность всех значений x, удовлетворяющих неравенству $x - 1 > 0$, т. е. интервал $(1, +\infty)$.

Областью существования степенной функции $y_2 = x^2$ является интервал $(-\infty, +\infty)$.

Общей частью этих двух интервалов является интервал $(1, +\infty)$. Таким образом, данная функция существует для значений $1 < x < +\infty$.

Задача 3,17. Найти область существования функции $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 3}$.

Решение. Функция $y_1 = \sqrt{5 - x}$ существует для значений $-\infty < x \leqslant 5$. Функция $y_2 = \sqrt{x + 3}$ существует для значений $-3 \leqslant x < +\infty$.

Общей частью найденных двух областей является отрезок $[-3, +5]$, а поэтому данная функция существует для значений $-3 \leqslant x \leqslant +5$.

Задача. 3,18 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y=\sqrt{4-x}-\sqrt{x+2}$.

Ответ. $-2\leqslant x\leqslant 4$, т. е. отрезок $[-2,4]$.

Задача 3,19 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y=\sqrt{4+x}-\sqrt{x+2}+\sqrt{15-x}$.

Ответ. $[-2,15]$, т. е. $-2\leqslant x\leqslant 15$.

Задача 3,20 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y=2x^3+\lg(x-1)+\frac{1}{x-3}$.

Ответ. Функция существует для значений $1<x<3$ и $3<x<+\infty$, т. е. в интервалах $(1,3)$ и $(3,+\infty)$.

Задача 3,21 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y=2^x\operatorname{tg}x$.

Ответ. Функция существует при всех значениях x, кроме значений $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число.

Задача 3,22. Найти область существования функции $y=\frac{\sin x}{\lg(x^2-4)}$.

Решение. Функция $y_1=\sin x$ существует в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Функция $y=\lg(x^2-4)$ существует в интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$. Но следует иметь в виду, что функция $\lg(x^2-4)$ стоит в знаменателе дроби, а потому из этих двух интервалов надо исключить точки, в которых эта функция обращается в нуль, т. е. точки, для которых $\lg(x^2-4)=0$, или $x^2-4=1$, а $x=\pm\sqrt{5}$. Таким образом, функцию $\lg(x^2-4)$ следует рассматривать в интервалах: 1) $(-\infty, -\sqrt{5})$; 2) $(-\sqrt{5}, -2)$; 3) $(2, \sqrt{5})$ и 4) $(\sqrt{5}, +\infty)$.

Общей частью, принадлежащей бесконечному интервалу $(-\infty, +\infty)$, в котором определена функция $\sin x$, и только что найденным интервалам являются именно эти интервалы, а потому данная функция существует в интервалах: 1) $(-\infty, -\sqrt{5})$; 2) $(-\sqrt{5}, -2)$; 3) $(2, \sqrt{5})$; 4) $(\sqrt{5}, +\infty)$.

Задача 3,23 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y=\lg\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$.

Ответ. Два бесконечных интервала: $(-\infty, 2)$ и $(3, +\infty)$.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков функций.

Это практическое занятие посвящается упражнениям на построение графиков функций, заданных аналитически.

В инженерной практике с построением графиков функций приходится встречаться очень часто. При изучении таких предметов, как сопротивление материалов, теория упругости, гидравлика, электротехника, радиотехника, к построению графиков функций приходится прибегать буквально на каждом шагу.

Поэтому студенту следует с исключительной серьезностью отнестись к этому практическому занятию.

К построению графиков более сложных функций мы еще возвратимся на практическом занятии № 35 и используем для этого уже аппарат дифференциального исчисления.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Графиком функции $y = f(x)$ называется совокупность всех точек плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента, взятые из области существования функции, а ординаты, соответствующие этим значениям аргумента, — значения функции.*

Согласно этому определению, для построения точного графика функции нам следовало бы построить все точки, принадлежащие графику, а это, как правило, сделать невозможно так как, вообще говоря, график функции содержит бесконечное множество точек.

Для построения графика функции $y = f(x)$ обычно поступают так: дают аргументу несколько частных значений и пользуясь аналитическим выражением функции, вычисляют соответствующие значения функции. Если, например, взяты значения аргумента $x = x_1$; $x = x_2$; $x = x_3$, ..., $x = x_n$, то соответствующими им значениями функции будут

$$y_1 = f(x_1);\ y_2 = f(x_2);\ y_3 = f(x_3);\ \ldots;\ y_n = f(x_n).$$

Эти значения сводят в таблицу такого вида:

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

После этого берут прямоугольную систему координат, выбирают масштабную единицу и строят точки

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n).$$

Полученные точки соединяют плавной кривой. Эта кривая дает эскиз графика функции (приближенный график). Прежде чем приступить к составлению таблицы числовых значений функции, очень полезно выяснить вопрос о симметрии графика функции.

Если функцию можно отнести к классу четных или нечетных функций, то построение ее графика значительно облегчится. Приведем относящиеся сюда определения.

Определение 2. *Область существования функции называется симметричной, если вместе с числом x этой области принадлежит и число $-x$* (на геометрическом языке это значит, что симметричная область существования функции расположена симметрично относительно начала координат).

Определение 3. *Функция $y = f(x)$ называется четной на симметричной относительно начала координат области, если для каждого значения аргумента x из этой области имеет место равенство*

$$f(-x) = f(x). \tag{4,1}$$

Таким образом, если функция — четная, то изменение знака у аргумента не меняет значения функции, а потому в случае четной функции каждой точке ее графика с абсциссой x и ординатой y соответствует точка, имеющая абсциссу $-x$ и ту же ординату y.

Это приводит к выводу, **что график четной функции расположен симметрично относительно оси Oy.**

Таким образом, если функция четная, то ее график мы будем строить так:

1) Построим только часть графика этой функции, расположенную справа от оси Oy, т. е. при составлении таблицы числовых значений функции будем давать аргументу только положительные значения и значение, равное нулю, если это значение принадлежит области существования функции.

2) Построим «зеркальное отображение» относительно оси Oy графика, полученного в п. 1).

Определение 4. *Функция $y = f(x)$ называется нечетной на симметричной относительно начала координат области, если для каждого значения аргумента x из этой области имеет место равенство*

$$f(-x) = -f(x). \tag{4,2}$$

Таким образом, у нечетной функции изменение на противоположный знака аргумента изменяет на противоположный и знак функции, не изменяя ее абсолютной величины.

Поэтому **график нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат,** так как если графику принадлежит точка $A(x, y)$, то ему же принадлежит и точка B, $(-x, -y)$.

Для построения графика нечетной функции надо: 1) построить только ту часть графика, которая расположена справа от оси Oy, т. е. часть, соответствующую положительным значениями аргумента (и значению $x = 0$, если нуль принадлежит области существования функции); 2) построить кривую, симметричную относительно начала координат кривой построенной в п. 1).

Эти свойства четных и нечетных функций будут использованы при построении графиков функций.

Задачи 4,1—4,12 являются упражнениями, связанными с определениями четной и нечетной функций.

Укажем приемы, облегчающие построение графика функции в ряде случаев, которые часто встречаются в практике

4,1. *Для того чтобы по известному графику функции* $y = f(x)$ *построить график функции* $y = f(-x)$, *надо построить линию, симметричную линии* $y = f(x)$ *относительно* Oy.

4,2. *Для того чтобы по известному графику функции* $y = f(x)$ *построить график функции* $y = -f(x)$, *надо построить линию, симметричную линии* $y = f(x)$ *относительно оси* Ox.

4,3. *Если известен график функции* $y = f(x)$, *то, чтобы построить график функции* $y = f(x + c)$, *надо перенести график функции* $y = f(x)$ *вдоль оси* Ox *на* c *единиц масштаба вправо, если* $c < 0$, *и влево, если* $c > 0$ *(предполагается, что ось* Ox *направлена вправо).*

4,4. *График функции* $y = f(x) + B$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *переносом этого графика на* B *единиц масштаба вверх, если* $B > 0$, *и вниз, если* $B < 0$ *(предполагается, что ось* Oy *направлена вверх).*

4,5 *График функции* $y = Af(x)$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *умножением всех его ординат на* A *при сохранении величины соответствующих абсцисс.*

4,6. *График функции* $y = f(kx)$ $(k > 0)$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *делением всех абсцисс этого графика на* k, *если* $k > 1$, *и умножением их на* $\frac{1}{k}$, *если* $0 < k < 1$, *при сохранении величин соответствующих ординат.*

Применяя последовательно эти приемы, можно, зная график функции $y = f(x)$, построить график более сложной функции вида

$$y = Af(kx + c) + B.$$

Упражнения, связанные с понятиями четной и нечетной функции.

Задача 4,1. Доказать, что функция $f(x) = 2x^4$ — четная.

Решение. Вычислим $f(-x)$. Если окажется, что $f(-x) = f(x)$, то из определения 3 будет следовать, что функция $f(x) = 2x^4$ — четная:

$$f(-x) = 2(-x)^4 = 2x^4 = f(x).$$

Равенство (4,1) выполняется, а потому заданная функция — четная.

Задача 4,2. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ — нечетная.

Решение. Вычислим, $f(-x)$ и если окажется, что $f(-x) = -f(x)$, то из определения 4 будет следовать, что заданная функция действительно нечетная:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Задача 4,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \frac{(1+3^x)^2}{3^x}$ — четная.

Задача 4,4 (Для самостоятельного решения). Доказать нечетность функций: 1) $f(x) = \frac{x^2}{2+x^2}$; 2) $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{2x^2+7}$.

Задача 4,5 (для самостоятельного решения). Доказать четность функций: 1) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; 2) $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{2x^2+7}$.

Задача 4,6. Выяснить, является ли функция $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ четной или нечетной.

Решение. Вычислим $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Отсюда заключаем, что изменение знака у аргумента изменило абсолютную величину функции; ни равенство (4,1), ни равенство (4,2) не выполняются, а потому данная функция не может быть отнесена ни к числу четных, ни к числу нечетных функций.

Читателю необходимо уяснить, что функция не обязательно должна быть либо четной, либо нечетной.

Задача 4,7 (для самостоятельного решения). Показать, что функции $f(x) = \sin x + \cos x$ и $\varphi(x) = 2x + 7$ нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным функциям.

Задача 4,8. Доказать, что сумма или разность двух четных функций есть функция четная.

Решение. Пусть $\varphi(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, причем функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четные. Тогда $f_1(-x) = f_1(x)$, а $f_2(-x) = f_2(x)$ (4,3). Вычислим $\varphi(-x)$: $\varphi(-x) = f_1(-x) \pm f_2(-x)$.

На основании равенств (4,3) $\varphi(-x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, и требуемое доказано: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Доказанное предложение распространяется на алгебраическую сумму любого конечного числа слагаемых (предполагалось, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ рассматриваются в одной и той же симметричной области).

Задача 4,9 (для самостоятельного решения). Доказать, что сумма или разность двух нечетных функций есть функция нечетная (предполагается, что функции рассматриваются в одной и той же симметричной области).

Задача 4,10. Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная.

Решение. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четные. Тогда $f_1(-x) = f_1(x)$, а $f_2(-x) = f_2(x)$. Составим их произведение: $\varphi(x) = f_1(x) f_2(x)$, и тогда $\varphi(-x) = f_1(-x) f_2(-x) = f_1(x) f_2(x) = \varphi(x)$; тем самым доказано, что произведение двух четных функций — функция четная.

Теперь самостоятельно докажите, что произведение двух нечетных функций есть тоже функция четная.

Задача 4,11 (для самостоятельного решения). Доказать, что произведение функции четной на нечетную есть функция нечетная.

Задача 4,12 (для самостоятельного решения). Выяснить, какая из функций 1) $f(x) = x^4 + \sec x$; 2) $y = x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 3) $f(x) = x^2 \cos x$; 4) $f(x) = x \sin x$; 5) $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$; 6) $f(x) = x^3 \sin x$; 7) $y = x^5 \sin x$ является четной, а какая нечетной.

Ответ. Функции 1), 2), 3), 4), 6), 7) — четные, 5) — нечетная.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Графики целых рациональных функций

Задача 4,13. Построить графики функций: 1) $y = 3x - 5$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = 4x - 1$; 4) $y = -3x + 1$.

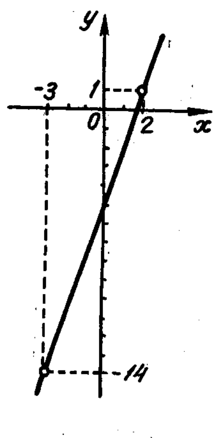
Решение. 1) Данную функцию нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным функциям: $y(-x) = -3x - 5$.

Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Функция — линейная (это хорошо известно читателю из аналитической геометрии). Ее графиком является прямая линия, для построения которой достаточно знать только две ее точки. Возьмем два произвольных значения аргумента x и вычислим соответствующие им значения функции y.

x	y
2	1
−2	−14

Построим на плоскости точки $A_1(2,1)$ и $A_2(-3, -14)$. Прямая изображена на фиг. 4,1.

Графики остальных функций постройте самостоятельно.



Фиг. 4,1.

Задача 4,14. Построить график функции $y = x^2$.

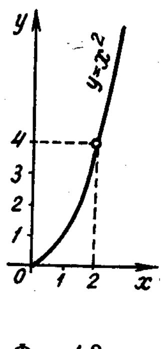
Решение. Заданная функция — четная. Ее график симметричен относительно оси Oy. Поэтому достаточно построить часть графика для значений $x \geqslant 0$, а потом дополнить эту часть ее «зеркальным отображением» относительно оси Oy. Так будет получен полный график этой функции. Так как функция определена при любом значении x, составим таблицу ее значений при произвольных значениях $x \geqslant 0$ и построим на плоскости точки $A_1(0, 0)$; $A_2(1, 1)$; $A_3(2, 4)$; $A_4(3, 9)$.

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

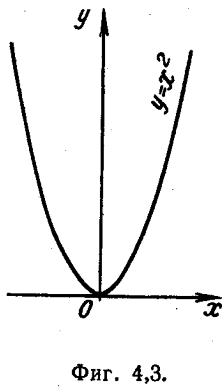
Соединим эти точки плавной кривой (фиг. 4,2).

Построим теперь «зеркальное отображение» этой кривой относительно оси Oy и получим полный приближенный график данной функции (фиг. 4,3). Очевидно, что графиком функции является парабола.

Задача 4,15. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций: 1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$; 3) $y = \frac{1}{3}x^2$; 4) $y = -x^2$; 5) $y = -3x^2$.



Фиг. 4,2.



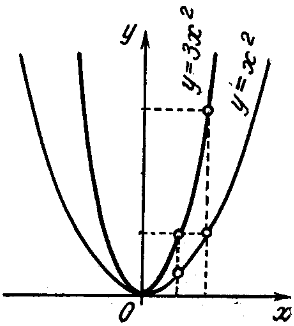
Фиг. 4,3.

Указание. Учесть указание 4,5 (стр. 232). Пользуясь графиком функции $y = x^2$ (фиг. 4,3), сохраняя величины абсцисс, в первом случае надо увеличить все ординаты в 3 раза (фиг. 4,4), во втором случае уменьшить все ординаты в 2 раза (фиг. 4,5), в третьем — уменьшить их в 3 раза (фиг. 4,6). В случаях четвертом и пятом использовать указание 4,2 стр. 232 (фиг. 4,7 и 4,8).

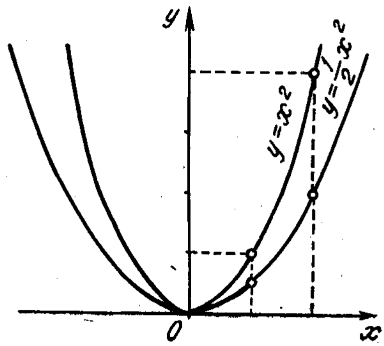
Задача 4,16 (для самостоятельного решения). По известному графику функции $y = 2x^2$ построить графики функций: $y = 2x^2 + d$ при $d = 1, 2, -1, -3$.

Указание. 1) Построить график функции $y = 2x^2$, использовав график функции $y = x^2$. Учесть указание 4,4 (стр. 232). Графики этих функций показаны на фиг. 4,9 — 4,12.

Например, график функции $y = 2x^2 - 3$ получается из графика функции $y = x^2$ так: увеличив все ординаты этого графика

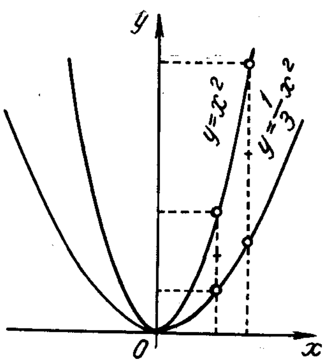


Фиг. 4,4.

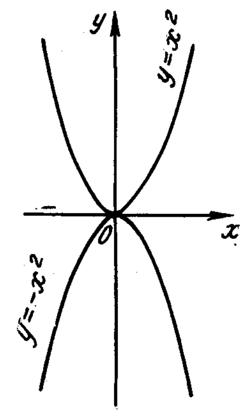


Фиг. 4,5.

в два раза при сохранении величины соответствующих абсцисс, получим график функции $y = 2x^2$. Если этот график опустить на 3 ед. масштаба, то получим график функции $y = 2x^2 - 3$.



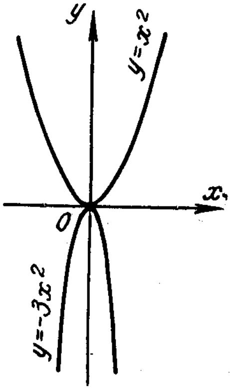
Фиг. 4,6.



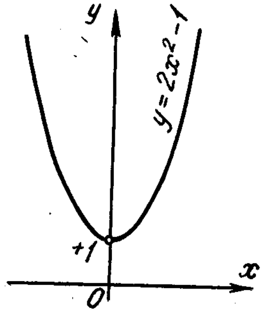
Фиг. 4,7.

Задача 4,17. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций: 1) $y = (x + 1)^2$, $y = (x - 2)^2$.

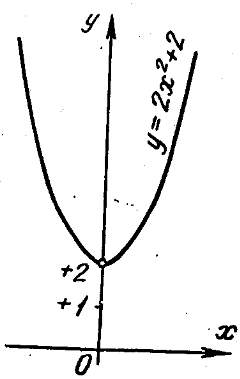
Решение. 1) График функции $y = (x + 1)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ переносом его на 1 ед. масштаба вдоль оси Ox влево — фиг. 4,13*а* и 4,13*б* (см. указание 4,3, стр. 232).



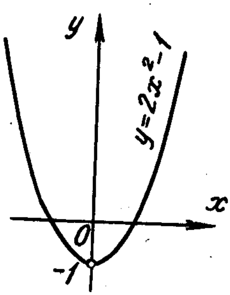
Фиг. 4,8.



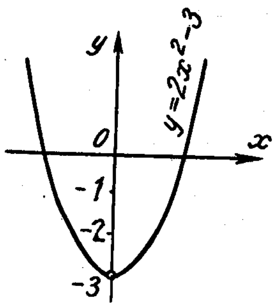
Фиг. 4,9.



Фиг. 4,10.

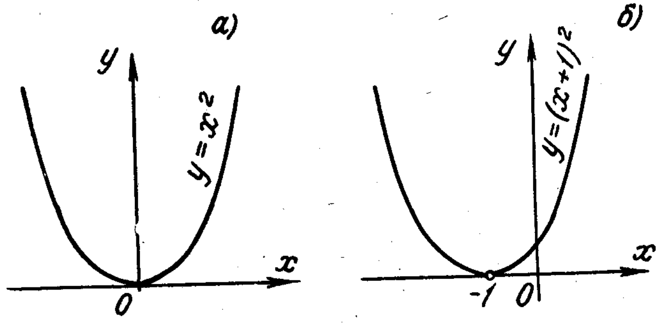


Фиг. 4,11.



Фиг. 4,12.

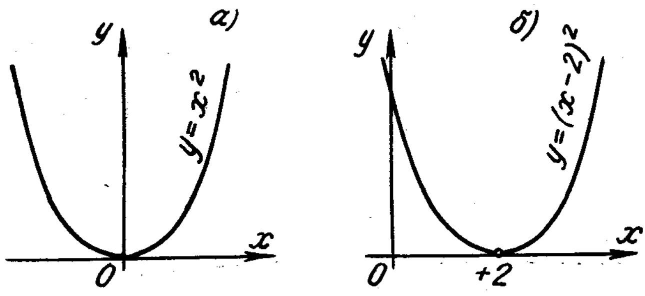
2) График функции $y = (x-2)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ переносом его вдоль оси Ox на 2 ед. масштаба вправо — фиг. 4,14*а* и 4,14*б* (использовать то же указание).



Фиг. 4,13.

Задача 4,18 (для самостоятельного решения). По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций:

1) $y = 2(x+2)^2$; 2) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$.



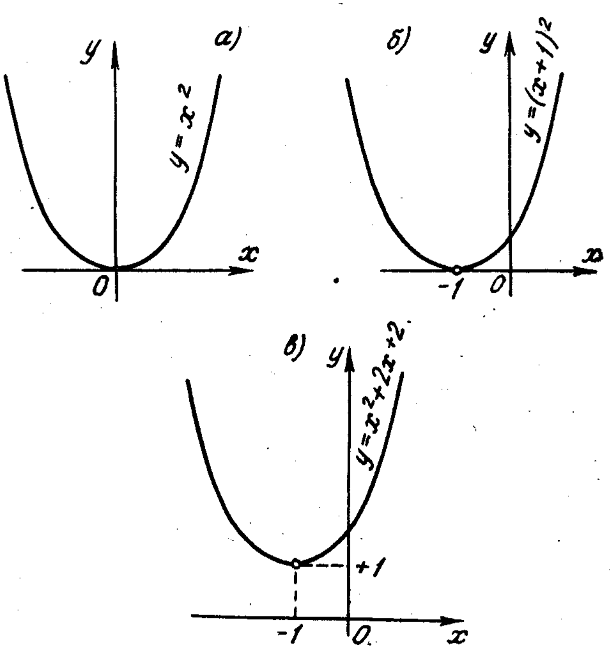
Фиг. 4,14.

Задача 4,19. Пользуясь графиком функции $y = x^2$, построить график функции $y = x^2 + 2x + 2$.

Решение. Заданную функцию представим в виде $y = (x + 1)^2 + 1$. Исходя из графика функции $y = x^2$, построим сначала график функции $y = (x+1)^2$, а потом этот график перенесем на 1 ед. масштаба вверх (фиг. 4,15) — см. указание 4,4 стр. 232.

Задача 4,20 (для самостоятельного решения). Пользуясь графиком функции $y = x^2$, построить график функции $y = 4x^2 + 8x + 12$.

Указание. Заданную функцию записать в виде $y = 4(x + 1)^2 + 8$ и вести построение в такой последовательности: 1) $y = x^2$; 2) $y = (x+1)^2$; 3) $y = 4(x+1)^2$; 4) $y = 4(x+1)^2 + 8$.



Фиг. 4,15.

Задача 4,21 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = -x^2 + 2x + 2$; 2) $y = -2x^2 + 3x - 4$;
3) $y = 5x^2 + 4x + 7$; 4) $y = 2x^2 + 4x$;
5) $y = -3x^2 - x$.

Найти также точки пересечения этих парабол с осью Ox.

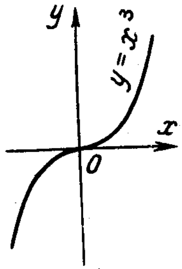
ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в построении графиков функций. Графики показательной и логарифмической функции.

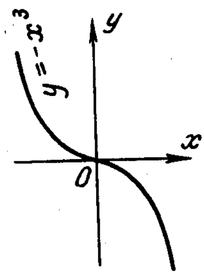
Задача 5,1. Построить график кубической параболы $y = x^3$ (график этой функции, так же как и график параболы второй степени, надо хорошо запомнить).

Решение. Функция $y = x^3$ определена при всех значениях x $(-\infty < x < +\infty)$. Функция эта нечетная $(y(-x) = -x^3 = -y(x))$

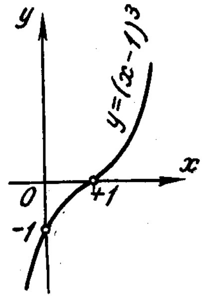
Поэтому мы построим сначала ту часть ее графика, которая соответствует значениям $x \geqslant 0$, а затем для построения полного графика воспользуемся указанием к построению графика нечетной функции (стр. 231). Так как данная функция определена при



Фиг, 5,1.



Фиг. 5,2.



Фиг. 5,3.

любом значении x, то мы можем составить таблицу числовых значений функции для нескольких произвольных значений аргумента.

1) Построим точки $A_1(0, 0)$, $A_2(1, 1)$, $A_3(2, 8)$, $A_4(3, 27)$ и соединим их плавной кривой. Построим после этого кривую, симметричную этой кривой относительно начала координат.

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27

Вся полученная кривая и будет приближенным графиком функции $y = x^3$ (фиг. 5,1).

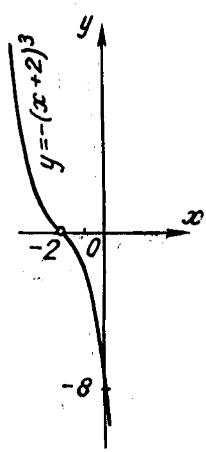
Задача 5,2 (для самостоятельного решения). Зная график функции $y = x^3$, построить графики функций:

1) $y = -x^3$; 2) $y = (x-1)^3$; 3) $y = -(x+2)^3$; 4) $y = 2x^3$; 5) $y = -\frac{1}{2}x^3$; 6) $y = x^3 + 2$; 7) $y = x^3 - 1$; 8) $y = -x^3 + 3$; 9) $y = 2(x+1)^3 + 2$.

Указание. Построение этих графиков следует выполнить на основании указаний 4,1 — 4,6 стр. 232 (см. фиг. 5,2 — 5,6).

Задача 5,3 (для самостоятельного решения). Построить график параболы четвертой степени $y = x^4$ и, пользуясь им, построить графики функций:

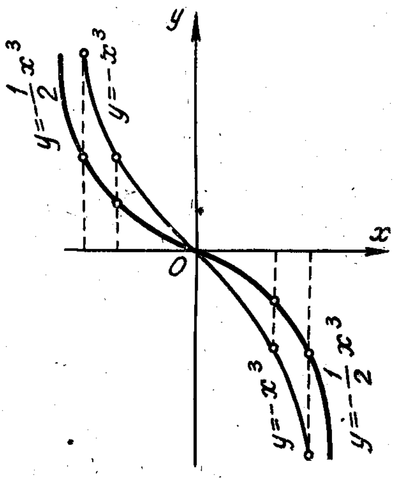
1) $y = 2x^4$; 2) $y = x^4 + 1$; 3) $y = -x^4$; 4) $y = -2x^4$; 5) $y + \frac{1}{2}x^4$; 6) $y = (x-1)^4$; 7) $y = 2(x+1)^4 - 2$



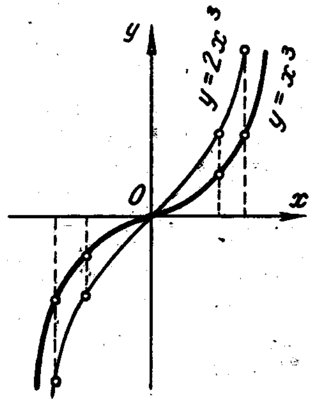
Фиг. 5,4.

(графики удобно строить на одном чертеже, используя указания 4,3—4,7 стр.).

Задача 5,4. Построить график функции $y = \frac{1}{x}$ (функция $y = \frac{m}{x}$ выражает закон обратной пропорциональности между пере-



Фиг. 5,5.



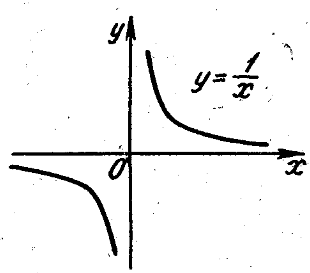
Фиг. 5,6.

менными x и y, а ее график называется графиком обратной пропорциональности).

Решение. Прежде всего замечаем, что заданная функция — нечетная, так как $y(-x) = -\frac{1}{x} = -y(x)$.

Функция $y = \frac{1}{x}$ определена при всех значениях x, кроме $x = 0$. Её область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Построим часть графика для значений $x > 0$, а полный график функции получим на основании указания для построения графика нечетной функции (стр. 231). Составим таблицу числовых значений функции для положительных значений аргумента.



Фиг. 5,7.

x	y
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

Построим на плоскости точки $A_1\left(\frac{1}{4},\ 4\right)$, $A_2\left(\frac{1}{3},\ 3\right)$ $A_3\left(\frac{1}{2}.\ 2\right)$, $A_4(1,1)$ $A_5\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$, $A_6\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$, $A_7\left(4,\ \frac{1}{4}\right)$, соединим их плавной кривой линией. Теперь построим кривую, симметричную ей относительно начала координат, и получим приближенный полный график функции (фиг. 5,7)

$$y=\frac{1}{2}.$$

Эта кривая, как известно читателю из аналитической геометрии,— равнобочная гипербола (иногда говорят равноосная гипербола).

График этой функции был уже рассмотрен в первой части этого пособия. Там же был рассмотрен и график дробнолинейной функции вида

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

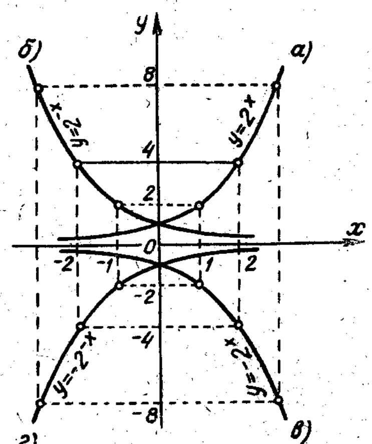
Числителю рекомендуется повторить 'относящиеся сюда вопросы.

ГРАФИКИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

Задача 5,5. Построить график функции $y=2^x$.

Считая этот график исходным, построить график функций:

1) $y=2^{-x}$; 2) $y=-2^x$;
3) $y=-2^{-x}$.



Фиг. 5,8

Решение. Показательная функция $y=2^x$ определена при всех значениях x. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty,\ +\infty)$. Составим таблицу числовых значений функции, давая аргументу произвольные значения.

Построим на плоскости эти точки, соединим их плавной кривой линией и получим приближенный график данной функции (фиг. 5,8a).

1) График функции $y=2^{-x}$ симметричен графику функции

$y = 2^x$ относительно оси Oy (фиг. 5,8б), т. к. если $y(x) = 2^x$, то $y(-x) = 2^{-x}$ (см. указание 4,1 на стр. 232).

x	y
-5	$\frac{1}{32}$
-4	$\frac{1}{16}$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

2) График функции $y = -2^x$ симметричен графику функции $y = 2^x$ относительно оси Ox — см. указание 4,2, стр. 232 (фиг. 5,8в).

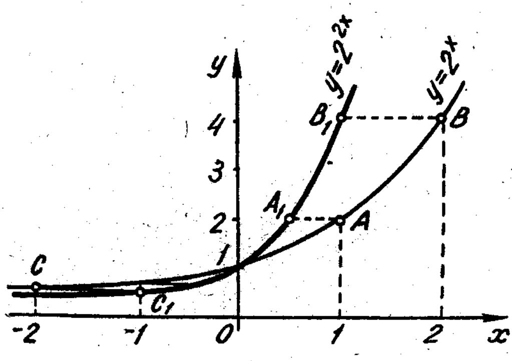
3) График функции $y = -2^{-x}$ симметричен графику функции $y = 2^{-x}$ относительно оси Ox (фиг. 5,8г) — см. указание 4,2, стр. 232.

Задача 5,6 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и, считая его исходным, построить графики функций: 1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$, 2) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$, 3) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

Задача 5,7. Построить график функции $y = 2^{2x}$, считая исходным график функции $y = 2^x$.

Решение. Для построения графика функции $y = 2^{2x}$ по исходному графику $y = 2^x$ следует воспользоваться указанием 4,6 (стр. 232).

Сначала построим график функции $y = 2^x$. На этом графике выбираем несколько точек. На том же чертеже построим точки, ординаты которых равны ординатам выбранных точек, но с абсциссами в два раза меньшими, чем у них (на фиг. 5,9 на графике функции $y = 2^x$ выбраны точки A, B и C). Полученные точки соединим плавной кривой линией, которая и будет приближенным графиком функции $y = 2^{2x}$.



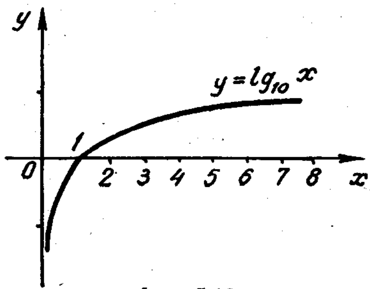
Фиг. 5,9.

Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Считая исходным график функции $y = 2^x$, построить график функции $y = 2^{\frac{x}{2}}$.

Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y = 3^x$ и, считая его исходным, построить графики функций:

1) $y = 1 + 3^x$; 2) $y = 3^x - 2$; 3) $y = 3^{x-2}$;

4) $y = 3^{\frac{1}{3}x}$.



Фиг. 5,10.

Указание. При построении графиков функций 1) и 2) использовать указание 4,4 (стр. 232), а при построении графика функции 4) использовать указание 4,6 стр. 232.

Задача 5.10. Построить график функции $y = \log_{10} x$.

Решение. Заданная функция определена только для значений $x > 0$. Составим таблицу числовых значений функции при нескольких произвольно выбранных положительных значениях аргумента. Построим на плоскости точки, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим им значениям функции.

x	y
$\frac{1}{100}$	-2
$\frac{1}{10}$	-1
1	0
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021

Построенные точки соединим плавной кривой линией и получим приближенный график данной функции (фиг. 5,10).

Задача 5,11 (для самостоятельного решения). Зная график функции $y = \log_{10} x$, построить графики функций 1) $y = \log_{10} x^3$; 2) $y = \log_{10}(x-1)$; 3) $y = \log_{10}(-x)$; 4) $y = \log_{10}\frac{1}{x}$.

Указание к 4): $\log_{10}\frac{1}{x} = \log_{10} 1 - \log_{10} x = -\log_{10} x$.

Использовать также указание 4,2 (стр. 232).

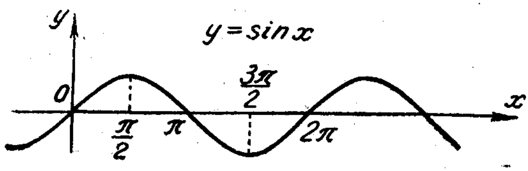
ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

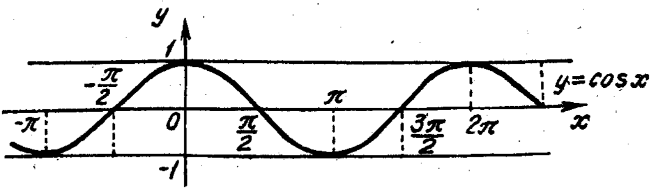
ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Задача 6,1. Исходя из графика функции $y = \sin x$, построить график функции $y = \cos x$.

Решение. Функцию $y = \cos x$ представим в виде $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. График этой функции получится из графика функции $y = \sin x$ (фиг. 6,1), перенесением его вдоль оси Ox влево на $\frac{\pi}{2}$ ед. масштаба (фиг. 6,2).

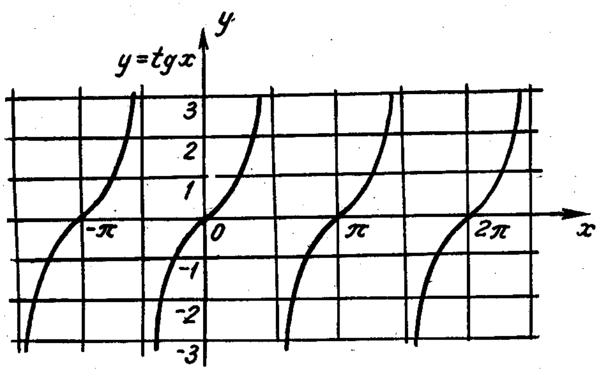


Фиг. 6,1.



Фиг. 6,2.

Задача 6,2 (для самостоятельного решения). Считая известным график функции $y = \cos x$ (фиг. 6,2), построить график функции $y = \sin x$.



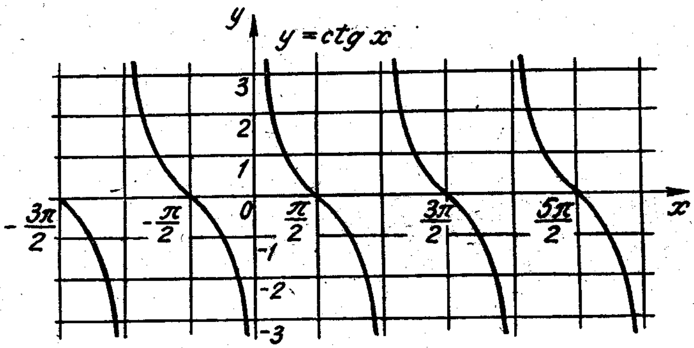
Фиг. 6,3.

Задача 6,3 (для самостоятельного решения). Исходя из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Указание. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 1) Построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ (фиг. 6,3);

2) Пользуясь им, получить график функции $y = \operatorname{tg}(-x)$ и потом с помощью сдвига вдоль оси Ox получить график функции $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$.

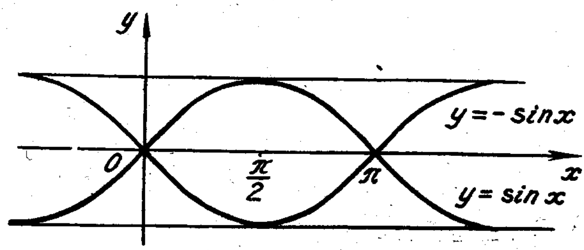
График функции $y = \operatorname{ctg} x$ представлен на фиг. 6,4.



Фиг. 6,4.

Задача 6,4. Исходя из графика функции $y = \sin x$, построить график функции $y = -\sin x$.

Решение. Если построить кривую, симметричную относительно оси Ox графику функции $y = \sin x$, то она и будет являться



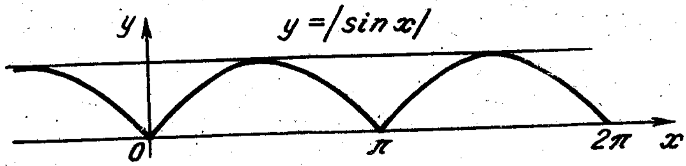
Фиг. 6,5.

графиком функции $y = -\sin x$ (фиг. 6,5). График функции $y = \sin(-x)$ совпадает с графиком функции $y = -\sin x$. Почему?

Задача 6,5 (для самостоятельного решения). Начертить график функции $y = |\sin x|$ (фиг. 6,6).

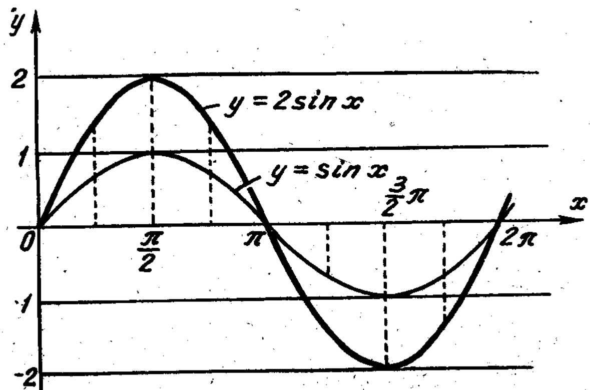
Задача 6.6. Начертить график функции $y = 2\sin x$, исходя из графика функции $y = \sin x$.

Решение. Начертим одну волну графика функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ (график этой функции можно срисовать из учебника). Выберем на этом графике несколько точек. Построим теперь на том же чертеже точки с абсциссами, равными абсциссам выбранных точек, но с ординатами, увеличенными в два раза. Соединив эти точки плавной кривой линией, получим приближенный график функции $y = 2\sin x$ (фиг. 6,7).



Фиг. 6,6.

Теперь, пользуясь периодичностью этой функции (ее период равен 2π), продолжим построенный график в соседние интервалы.



Фиг. 6,7.

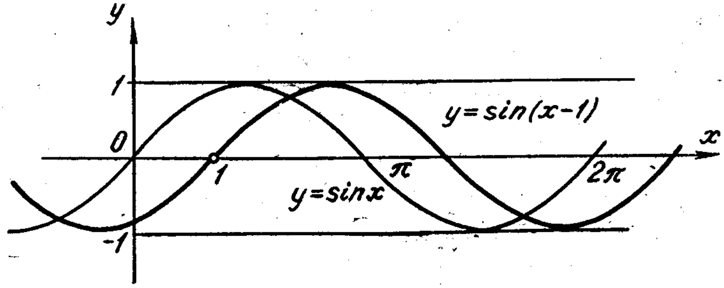
Задача 6,7 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

$$1)\ y = 3\cos x; \qquad 2)\ y = \frac{1}{2}\sin x.$$

Задача 6,8. Построить график функции $y = \sin(x - 1)$, исходя из графика функции $y = \sin x$.

Решение. Чтобы построить график функции $y = \sin(x - 1)$, начертим сначала одну волну графика функции $y = \sin x$ на отрезке $[0,2\pi]$ и перенесем ее вправо на 1 ед. масштаба. Зная, что заданная функция имеет период, равный 2π, продолжим построенный график в соседние интервалы (фиг. 6,8).

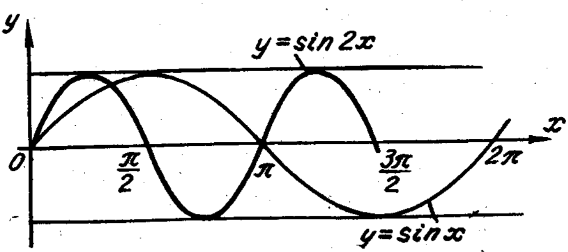
Задача 6,9 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y = \cos(x+2)$ и 2) $y = \sin(x+3)$, исходя из графиков функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$.



Фиг. 6,8.

Задача 6,10. Построить график функции $y = \sin 2x$.

Решение. Используем указание 4,6, стр. 232. Чтобы построить график функции $y = \sin 2x$, построим сначала одну волну синусоиды $y = \sin x$ на отрезке $[0,2\pi]$.



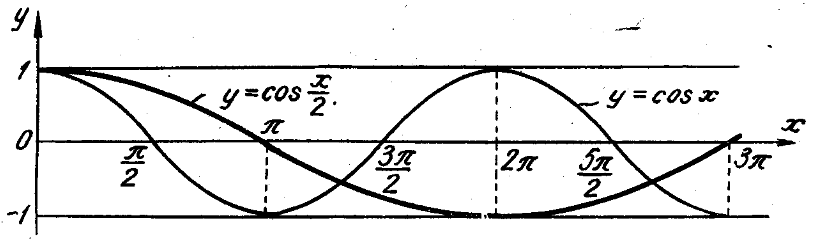
Фиг. 6,9.

Выберем на построенной кривой несколько точек и построим точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, но с абсциссами, уменьшенными в два раза. Полученные точки соединим плавной кривой. Пользуясь периодичностью заданной функции $y = \sin 2x$ (фиг. 6,9) (ее период $T = \pi$) продолжим полученный график в соседние интервалы $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(-\pi, 0)$, $(-2\pi, -\pi)$, находящиеся справа и слева от интервала $(0, \pi)$.

Задача 6,11 (для самостоятельного решения). Исходя из графиков функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$, построить графики функций: 1) $y = \sin 3x$ и 2) $y = \cos\frac{1}{3}x$.

Задача 6,12. Построить график функции $y = \cos\frac{1}{2}x$.

Решение. Построим на отрезке $[0, 2\pi]$ сначала график функции $y = \cos x$ (фиг. 6,10). Используем указание 4,6 стр. 232. Выберем на этом графике несколько точек и построим точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, но с абсциссами, в два раза бо́льшими, чем абсциссы выбранных точек.



Фиг. 6,10.

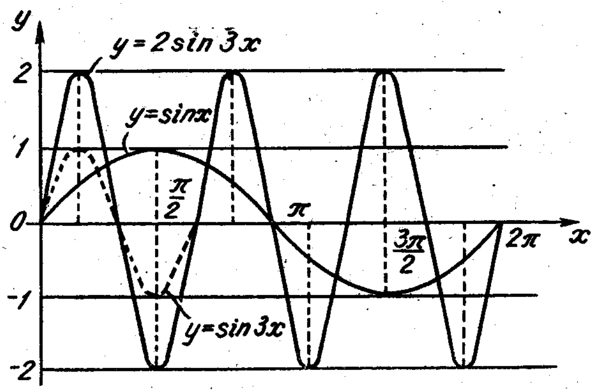
Построение кривой показано на фиг. 6,10. Функция $y = \cos\frac{1}{2}x$ — периодическая. Ее период равен 4π. Пользуясь периодичностью этой функции, ее график, построенный на отрезке $[0, 4\pi]$, продолжим в соседние интервалы $(4\pi, 8\pi)$; $(8\pi, 12\pi)$; $(-4\pi, 0)$; $(-8\pi, -4\pi)$.

Задача 6,13 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y = \sin\frac{x}{2}$; 2) $y = \cos\frac{2x}{3}$; 3) $y = \sin\frac{x}{3}$.

Задача 6,14. Построить график функции $y = 2\sin 3x$.

Решение. Будем исходить из графика функции $y = \sin x$. Построим одну волну этого графика на отрезке $[0, 2\pi]$. Пользуясь этим графиком, построим график функции $y = \sin 3x$. Для этого, как уже известно читателю, следует на кривой $y = \sin x$ выбрать несколько точек и построить точки с ординатами, равными ординатам этих точек, но с абсциссами в три раза меньшими, чем абсциссы выбранных точек. Построенные точки соединим плавной кривой линией.

После того как построена кривая $y = \sin 3x$, на основании указания 4,5 стр. 232 построим кривую $y = 2\sin 3x$. Это надо сделать так: оставив абсциссы построенных точек без изменения, построить точки, ординаты которых в два раза больше, чем ординаты построенных точек. Построения показаны на фиг. 6,11. После этого построенную кривую следует продолжить в соседние интервалы $\left(\frac{2}{3}\pi;\ \frac{4}{3}\pi\right)$; $\left(\frac{4}{3}\pi;\ \frac{6}{3}\pi\right)$; $\left(-\frac{2}{3}\pi;\ 0\right)$ $\left(-\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$ и т. д., используя то, что заданная функция — периодическая с периодом $T = \frac{2}{3}\pi$.



Фиг. 6,11.

Задача 6,15 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$; 2) $y = 3\cos 2x$; 3) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

Указание. При построении графика функции $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ следует исходить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$. Пользуясь этим графиком, построить график функции $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, а потом уже кривую $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

Задача 6,16 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y = -\sin 2x$; 2) $y = -3\cos\frac{x}{3}$; 3) $y = -2\sin\frac{x}{2}$.

Задача 6,17 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y = 2\sin(x-1)$.

Указание. 1) Исходя из графика функции $y = \sin x$ построить график функции $y = \sin(x-1)$. 2) Зная график функции $y = \sin(x-1)$, построить график данной функции $y = 2\sin(x-1)$.

Задача 6,18. Построить график функции $y = \sin(2x+3)$.

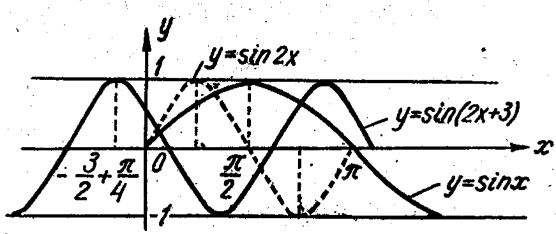
Решение. Представим заданную функцию в виде $y = \sin 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$ и будем вести построение графика в таком порядке:

1) Построим на отрезке $[0,2\pi]$ график функции $y = \sin x$.

2) Выберем на этом графике несколько точек и построим точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, но с абсциссами, уменьшенными в 2 раза. Построенные точки соединим плавной кривой линией. Эта кривая линия будет графиком функции $y = \sin 2x$.

3) Перенесем этот график влево вдоль оси Ox на $\frac{3}{2}$ ед. масштаба и получим график функции $y = \sin 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$, т. е. график заданной функции $y = \sin(2x + 3)$ (фиг. 6,12).

Следует предостеречь читателя от одной распространенной ошибки. Эта ошибка состоит в том, что для построения графика



Фиг. 6,12.

функции $y = \sin(\omega x + \varphi)$ иногда поступают так: из графика функции $y = \sin x$ получают график функции $y = \sin \omega x$, и этот график переносят вдоль оси Ox на φ ед. масштаба, вместо того, чтобы его перенести на $\frac{\varphi}{\omega}$ ед. масштаба.

Чтобы избежать этой ошибки, надо функцию вида $y = \sin(\omega x + \varphi)$ представить в виде $y = \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$, т. е. сделать так, чтобы в скобках под знаком синуса коэффициент при x был равен 1. Из рассмотрения функции $y = \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ сразу видно, что перенос вдоль оси Ox должен быть сделан не на φ ед. масштаба, а на $\frac{\varphi}{\omega}$ ед. масштаба.

Задача 6,19 (для самостоятельного решения). Построить графики функции: 1) $y = \sin(4x + 8)$; 2) $y = \sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$; 3) $y = -\sin(2x - 4)$.

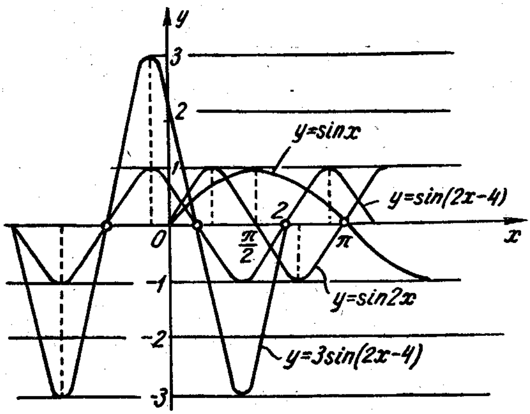
Задача 6,20. Построить график функции $y = 3\sin(2x - 4)$.

Решение. Представим заданную функцию в виде $y = 3\sin 2(x - 2)$. Построим одну волну синусоиды на отрезке $[0,2\pi)$.

Считая этот график исходным, построим график функции

$$y = \sin 2x.$$

Если перенести эту кривую вдоль оси Ox на 2 ед. масштаба вправо, то получим график функции $y = \sin 2(x - 2)$. Выберем на этом графике несколько точек и, не изменяя абсцисс этих точек, увеличим их ординаты в три раза. Соединив полученные точки плавной кривой линией, получим приближенный график данной функции $y = 3\sin 2(x - 2)$. Зная, что заданная функция перио-

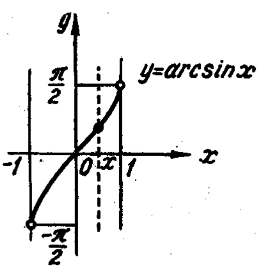


Фиг. 6,13.

дическая и что ее период $T = \pi$, продолжим полученный график в соседние интервалы, как мы это делали в предыдущих задачах (фиг. 6,13*а*)

Задача 6,21 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = 2\cos(3x + 1)$; 2) $y = 2\cos 3x = 1$;
3) $y = -2\sin(2x - 1)$; 4) $y = -3\cos(3x + 1)$;
5) $y = |\sin 2x|$.



Фиг. 6,14.

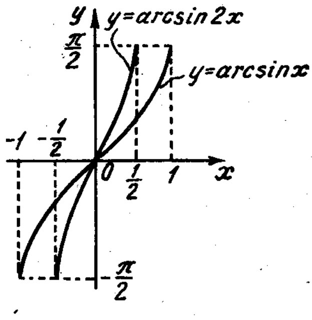
Задача 6.22. Построить график функции $y = \arcsin 2x\, 2x$, считая исходным график функции $y = \arcsin x$.

Решение. График функции $y = \arcsin x$ представлен на фиг. 6,13, перечертите этот график. Выберите на нем несколько точек.

Постройте точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, то с абсциссами, уменьшенными в два раза. Построенные точки соедините плавной кривой линией, которая и будет приближенным графиком функции $y = \arcsin 2x$ (фиг. 6,15).

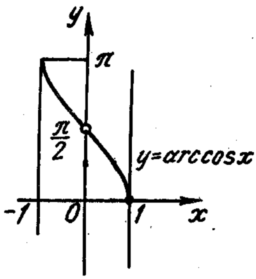
Задача 6,23 (для самостоятельного решения). Пользуясь графиком функции $y = \arcsin x$ (фиг. 6,14), постройте графики функций: 1) $y = \arcsin \frac{x}{2}$; 2) $y = \arcsin(x+1)$; 3) $y = \arcsin(x-1)$; 4) $y = 2\arcsin x$; 5) $y = \arcsin x - 1$; 6) $y = -\arcsin x$.

Задача 6,24 (для самостоятельного решения). Пользуясь графиком функции $y = \arccos x$ (фиг. 6,16), построить графики функций: 1) $y = -\arccos x$; 2) $y = \arccos(-x)$; 3) $y = \arccos \frac{x}{3}$; 4) $y = \arccos\left(\frac{x}{3}+1\right)$; 5) $y = 2\arccos 2x$.

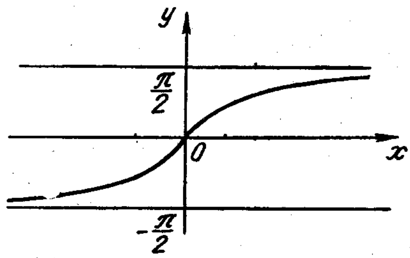


Фиг. 6,15.

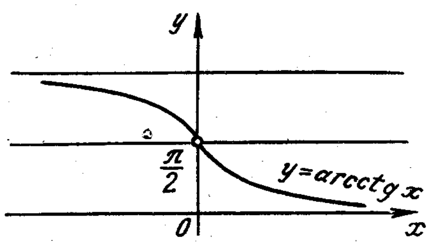
Задача 6,25 (для самостоятельного решения). Исходя из графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ (фиг. 6,17 и 6,18), построить графики функций: 1) $y = 2\operatorname{arctg} x$; 2) $y = -\operatorname{arctg} x$; 3) $= \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$; 4) $y = \operatorname{arcctg} x + 2$; 5) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x$.



Фиг. 6,16.



Фиг. 6,17.



Фиг. 6,18.

СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков функций, заданных несколькими аналитическими выражениями. Построение графика суммы, разности и произведения нескольких функций.

Определение функции, данное в кратких сведениях по теории предпосланных второму практическому занятию, не предполагает, что функция обязательно задается одной формулой. Может оказаться, что на различных участках изменения аргумента функция задана различными формулами.

С таким способом задания функции приходится встречаться и в математических исследованиях, и в таких науках, как сопротивление материалов, теплотехника, радиотехника и др. Поэтому этот способ не следует считать чем-то надуманным.

Задача 7,1. Функция задана следующими равенствами:

$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x+3, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x+3, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Построить график.

Решение. Если $x \leqslant -1$, то функция задана равенством $y = 2$ и ее графиком будет полупрямая, параллельная оси Ox (фиг. 7,1*а*). На участке $-1 \leqslant x \leqslant 0$ функция задана равенством $y = x + 3$. Графиком этой функции является прямая линия, на которой надо взять отрезок ее, соответствующий значениям аргумента x из отрезка $[-1,0]$ (фиг. 7,1*б*).

На участке $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция $y = -x + 3$, ее график — прямая линия, на которой следует взять отрезок, соответствующий значениям аргумента из отрезка $[0,1]$ (фиг. 7,1 *в*) и для значений $x \geqslant 1$ функция $y = 2$ и ее графиком будет полупрямая, параллельная оси Ox (фиг. 7,1 *г*).

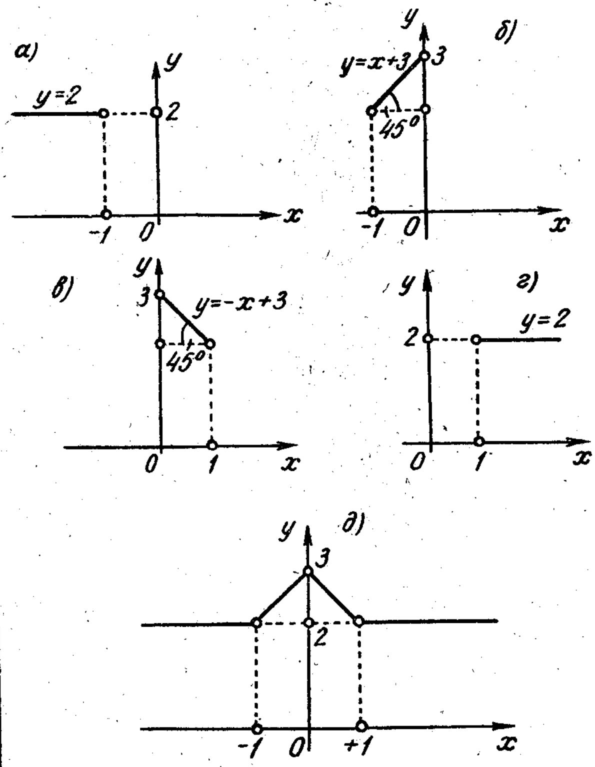
В «собранном» виде график заданной функции представлен на фиг. 7,1 *д*.

Задача 7,2. Построить график функции, определяемой равенствами

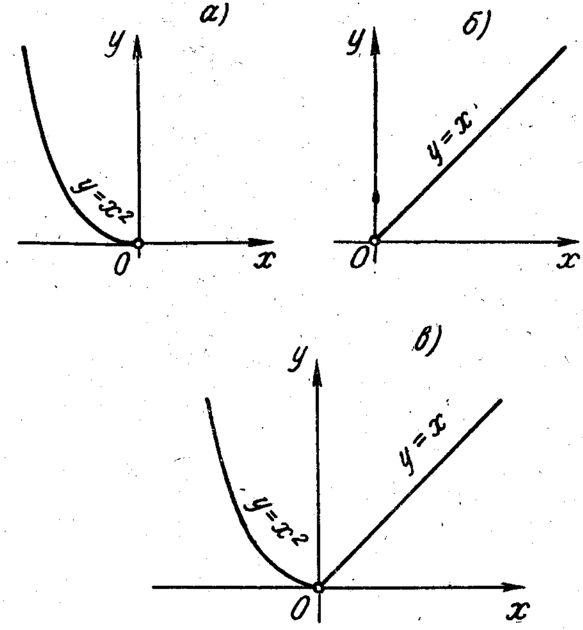
$$y = x^2, \text{ если } x \leqslant 0;$$
$$y = x, \text{ если } x \geqslant 0.$$

Решение. Графиком функции $y = x^2$ для значений $x \leqslant 0$ является часть параболы, расположенная во втором квадранте (фиг. 7,2 *а*).

Графиком функции $y = x$ для значений $x \geqslant 0$ является полупрямая — биссектриса первого координатного угла (фиг. 7,2 *б*). На фиг. 7,2 *в* график заданной функции представлен в «собранном» виде.


а)
y=2
y
2
-1
0
x
б)
y
y=x+3
3
45°
-1
0
x
в)
y
3
y=-x+3
45°
0
1
x
г)
y
y=2
2
0
1
x
д)
y
3
2
-1
0
+1
x

Фиг. 7,1.


а)
y
y=x²
0
x
б)
y
y=x
0
x
в)
y
y=x²
y=x
0
x

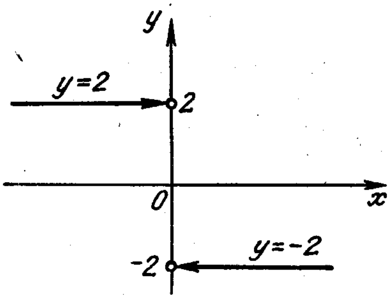
Фиг. 7,2.

Перед решением приведенных ниже задач введем такое условие: если на кривых линиях или на полупрямых поставлены стрелки, то это означает, что концы этих линий, на которых находятся стрелки, не принадлежат графику функции.

Задача 7,3. Построить график функции

$$y=\begin{cases}+2 \text{ для } x<0;\\ -2 \text{ для } x>0.\end{cases}$$

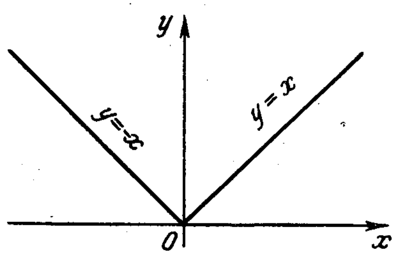
Решение. См. фиг. 7,3.



Фиг. 7,3.

Задача 7,4 (для самостоятельного решения). Построить график функции, определяемой равенствами

$$y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\leqslant 0,\\ x, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$$



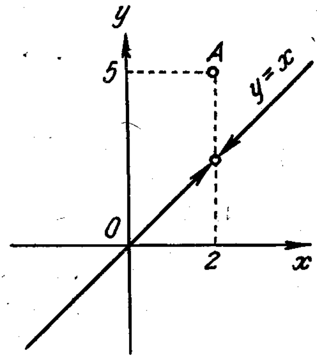
Фиг. 7,4.

(график этой функции представлен на фиг. 7,4). Эта функция может быть задана одним аналитическим выражением: $y=|x|$, где $|x|$ — абсолютная величина x.

Задача 7,5. Построить график функции

$$y=\begin{cases}x, \text{ если } x\neq 2,\\ 5, \text{ если } x=2,\end{cases}$$

Решение. График функции состоит из всех точек прямой $y=x$, кроме точки (2,2). Эта точка удалена из прямой («изъята», «вырвана»). Она помещена в гочку (2,5). Это изолированная точка графика функции (фиг. 7,5).



Фиг. 7,5.

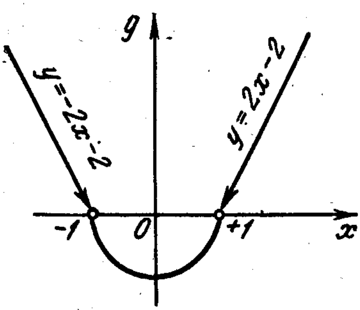
Задача 7,6 (для самостоятельного решения). Построить графики функций, определяемые равенствами:

$$1)\ y=\begin{cases}2x+2 \text{ для } 0\leqslant x\leqslant 3\\ 8 \text{ для } 3\leqslant x\leqslant 6\\ x+2 \text{ для } x\geqslant 6\end{cases}$$

$$2)\ y=\begin{cases}x-1 \text{ для } x<0\\ 3x \text{ для } x>0\end{cases}$$

(не забывайте на прямых проставлять стрелки, если они нужны на основании сделанного выше условия. В примере 2) они нужны).

$$3)\ y=\begin{cases}-2x-1 \text{ для } x<2\\ 3 \text{ для } x=2\\ 2x-9 \text{ для } x>2\end{cases}\qquad 4)\ y=\begin{cases}x+1 \text{ для } x<0\\ 0 \text{ для } x=0\\ x-1 \text{ для } x>0\end{cases}$$



Фиг. 7,6

Задача 7,7 (для самостоятельного решения). Построить графики функций, определяемых равенствами

1)

$$y=\begin{cases}-2x-2, \text{ если } x<-1;\\ -\sqrt{1-x^2}, \text{ если } -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x-2, \text{ если } x>1.\end{cases}$$

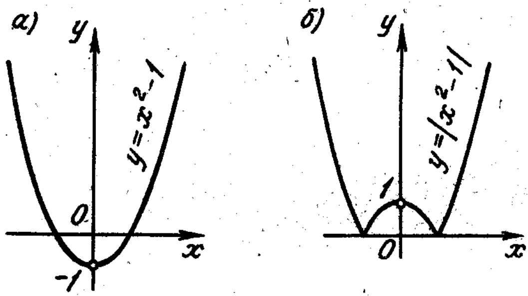
Указание. График функции $y=-\sqrt{1-x^2}$ — часть окружности $x^2+y^2=1$, лежащая в нижней полуплоскости (фиг. 7,6).

$$2)\ y=\begin{cases}x, \text{ если } <-2;\\ 3, \text{ если } -2\leqslant x\leqslant 2;\\ x^2, \text{ если } x>2.\end{cases}$$

$$3)\ y=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{ если } 0<x\leqslant\frac{1}{2};\\ 2, \text{ если } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 6;\\ \sqrt{-32+12x-x^2}, \text{ если } 6\leqslant x\leqslant x\leqslant 8.\end{cases}$$

Задача 7,8 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

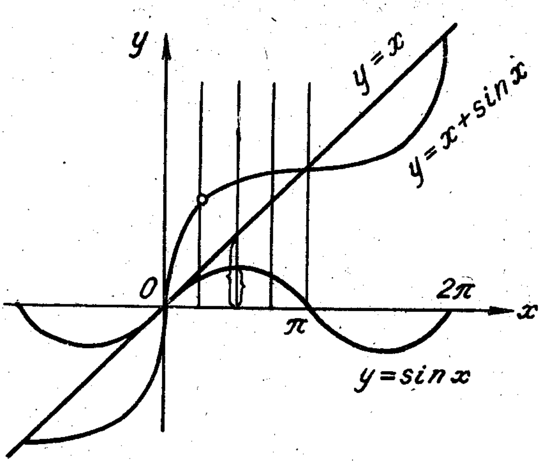
1) $y = |x^2 - 1|$; (фиг. 7,7 *а* и 7,7 *б*)
2) $y = 2 - |x|$;
3) $y = |x^2 - 7x + 12|$.



Фиг. 7,7.

Задача 7,9. Построить график функции $y = x + \sin x$.

Решение. Построим на одном чертеже графики слагаемых функций (фиг. 7,8): $y = x$ и $y = \sin x$.



Фиг. 7,8.

Проведем ряд вертикальных прямых, пересекающих графики этих функций, и пометим на них точки, ординаты которых равны сумме ординат слагаемых функций. Каждая из точек, построенных на этих вертикальных прямых, имеет абсциссу такую же, как и соответствующие точки обоих графиков. Соединяя полученные точки плавной кривой, получим график данной функции $y = x + \sin x$ (конечно, полученный график будет приближенным).

Задача 7,10 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = 2^x + \sin x$;
2) $y = 3^x + \cos x$;
3) $y = \sin x + \cos x$;
4) $y = \sin 2x + 2\cos x$;
5) $y = x \sin x$.

Указание. При построении графика функции $y = x\sin x$ (пример 5) учесть, что: 1) эта функция четная, а потому ее график симметричен относительно оси Oy. 2) Учитывая, что x умножается на $\sin x$, который по абсолютной величине не больше единицы, заключаем, что абсолютная величина произведения $x \sin x$, т. е. $|x \sin x|$, не больше $|x|$, т. е. $|x \sin x| \leqslant |x|$, а потому график функции $y = x \sin x$ расположен между двумя биссектрисами координатных углов $y = x$ и $y = -x$. В точках $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, ..., $\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}$ график функции $y = x \sin x$ касается этих биссектрис, а в точках O, $\pm\pi$; $\pm 2\pi$..., график пересекает ось Ox.

Задача 7,11 (для самостоятельного решения). Построить графики функций

1) $y = x^3 + 2x^2$;
2) $y = x + \cos x$;
3) $y = x^2 - \frac{1}{2}x^3$;
4) $y = x^3 \cos x$;
5) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

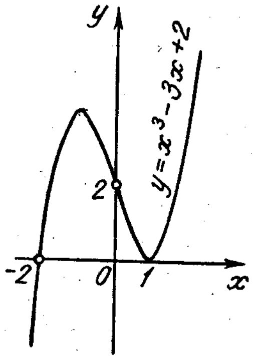
ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Решение уравнений с помощью графиков (графическое решение уравнений).

Если не требуется большой точности, то можно корни различных уравнений находить при помощи графиков функций. Для этого поступают так:

Способ 1. *Все члены уравнения переносят в его левую часть (правая часть оказывается при этом равной нулю), обозначают левую часть через $f(x)$, и тогда уравнение приобретает вид $f(x) = 0$. После этого строят график функции $y = f(x)$, где $f(x)$ — левая часть уравнения. Абсциссы точек пересечения этого графика с осью Ox и будут корнями уравнения, так как в этих точках $y = 0$.*

Способ 2. *Члены уравнения разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую — в правой. Уравнение приобретает вид $f(x) = f_1(x)$. После этого строят графики двух функций $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$. Корнями данного уравнения будут абсциссы точек пересечения этих графиков. Так, если точка пересечения графиков имеет абсциссу x_0, то в этой точке ординаты графиков между собой равны, и тогда $f(x_0) = f_1(x_0)$. Это равенство показывает, что x_0 — корень уравнения. Второй из указанных способов предпочтительнее первого; он особенно удобен, когда одна из частей уравнения является линейной функцией.*

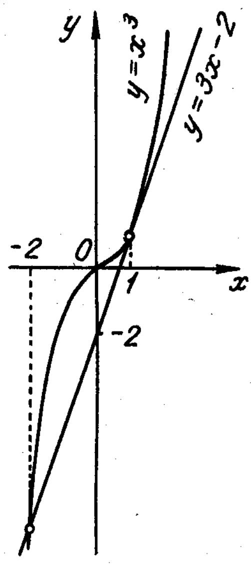


Фиг. 8,1.

Задача 8,1. Решить графически уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$ первым и вторым из указанных способов.

Решение. ***1-й способ.*** Построим график функции $y = x^3 - 3x + 2$ (фиг. 8,1) и определим абсциссы точек пересечения этого графика с осью $Ox : x_1 = -2;\ x_2 = x_3 = 1$. Кривая касается оси Ox в точке $x = 1$, а потому уравнение имеет кратный корень $x = 1$ (следует иметь в виду, что уравнение третьей степени с действительными коэффициентами имеет или один действительный корень или все три его корня — действительны. Так как кривая пересекла ось Ox в одной точке и коснулась ее в другой, то в той точке, где имеет место касание, будет кратный корень. В данном случае таким двукратным корнем является 1).

2-й способ. Перепишем данное уравнение в виде $x^3 = 3x - 2$. Построим графики функций $y = x^3$ и $y = 3x - 2$ (фиг. 8,2). Найдем абсциссы точек пересечения этих графиков. Получим $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. В точке $x_2 = 1$ прямая $y = 3x - 2$ касается графика функции $y = x^3$.



Фиг. 8,2.

Задача 8,2 (для самостоятельного решения). Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Задачу решить двумя способами.

Ответ. Один действительный корень $x = 1$.

Указание. Прежде чем решать заданное уравнение вторым способом его выгодно сначала упростить. Общий вид кубического уравнения записывается так:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \qquad (A)$$

После деления обеих частей равенства на a_0 оно преобразуется к виду $x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$.

Если теперь сделать подстановку

$$x = y - \frac{b_1}{3}, \qquad (B)$$

то оно приведется к виду

$$y^3 + py + q = 0. \qquad (C)$$

Этот вид кубического уравнения называется приведенным. Оно не содержит квадрата неизвестной величины. Уравнение (C) решить графически проще, чем исходное уравнение (A), т. к. здесь дело сведется к построению графика кубической параболы и прямой (см. предыдущую задачу), в то время как графическое решение уравнения (A) потребовало бы построения графиков кубической параболы и параболы второй степени (уравнение (A) следовало бы переписать так: $a_0x^3 = -a_1x^2 - a_2x - a_3$).

После того как решено уравнение (C), надо воспользоваться подстановкой (B) и найти неизвестное данного уравнения (A).

Задача 8,3 (для самостоятельного решения). Решить графически уравнения:

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$;
2) $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$.

Указание. Перейти к приведенному виду (C) кубического уравнения, использовав указание предыдущей задачи.

Ответ. 1) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$;
2) $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$.

Задача 8,4. Найти графически вторым способом положительный корень уравнения $x^4 - x - 1 = 0$.

Указание. При построении графиков функций $y = x^4$ и $y = x + 1$ масштабную единицу по оси Oy уменьшить в 5 раз.

Ответ. 1,22.

Задача 8,5. Найти графически наименьший положительный корень уравнения $x - \operatorname{tg} x = 0$.

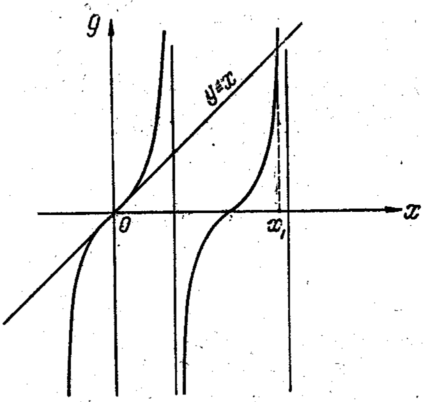
Указание. 1) Переписать уравнение в виде $\operatorname{tg} x = x$. 2) Начертить графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$ (фиг. 8,3). Графики пересекаются в бесконечном множестве точек. Уравнение имеет бесчисленное множество корней.

Ответ. Наименьший положительный корень $x_1 \approx 4{,}5$ (более точное вычисление дает $x_1 = 4{,}4934$).

Задача 8,6 (для самостоятельного решения). Найти графически наименьший корень уравнения $\operatorname{tg} x - 0{,}5x = 0$.

Ответ. $x \approx 4{,}3$.

Задача 8,7 (для самостоятельного решения). Найти графически наименьший положительный корень уравнения $0{,}2x - \sin x = 0$.



Фиг. 8,3.

Указание. Искомый корень является наименьшей положительной абсциссой точки пересечения прямой $y = 0{,}2x$ и синусоиды $y = \sin x$.

Ответ. $x \approx 2{,}6$.

Задача 8,8 (для самостоятельного решения). Найти наименьший положительный корень уравнения $x \operatorname{tg} x = 0{,}3$.

Указание. Переписать уравнение в виде $\operatorname{tg} x = \frac{0{,}3}{x}$ и построить графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \frac{0{,}3}{x}$ (равноосная гипербола).

Ответ. 0,52.

Задача 8,9 (для самостоятельного решения). Найти наименьший положительный корень уравнения $x \sin x = 1$.

Ответ. $x \approx 1{,}1$.

Задача 8,10 (для самостоятельного решения). Решить графически уравнения:

1) $x - 2\sin x = 0$ (найти положительный корень).

2) $\cos x - x^2 = 0$.

Ответ. 1) $x \approx 1{,}9$; 2) $x = \pm 0{,}824$.

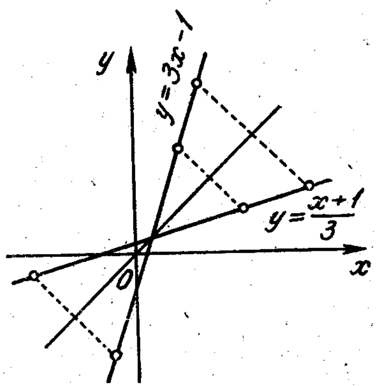
ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Обратная функция и ее график. Периодические функции.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Обратная функция и ее график

Если функциональная зависимость y от x задана аналитически уравнением $y = f(x)$, из которого можно определить x как функцию от y уравнением $x = \varphi(y)$ так, что каждому значению y соответствует единственное значение x, то функция, определяемая уравнением $x = \varphi(y)$, называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$, которая в этой связи называется прямой. В уравнении $y = f(x)$ величина x — независимая переменная, а y — функция. Для того чтобы сохранить стандартные обозначения, в которых x обозначает независимую переменную, а y — функцию, в уравнении $x = \varphi(y)$ следует заменить y буквой x, а x — буквой y. Именно так полученную функцию $y = \varphi(x)$ мы и будем считать обратной по отношению к функции $y = f(x)$. График обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен графику прямой функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.



Фиг. 9,1.

Задача 9,1. Найти функцию, обратную функции $y = 3x - 1$, и построить ее график.

Решение. Находим из данного уравнения x в зависимости от y:

$$x = \frac{y+1}{3}.$$

Заменяя в этом равенстве x на y, а y на x, получаем окончательно

$$y = \frac{x+1}{3}.$$

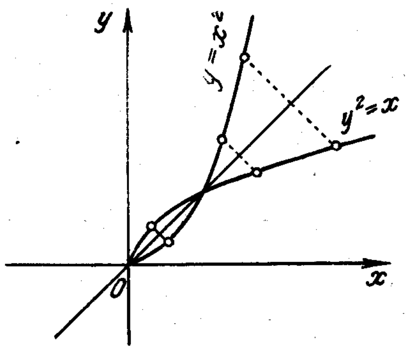
Графики заданной функции и ей обратной представлены на фиг. 9,1.

Задача 9,2. Найти функцию, обратную функции $y = x^2$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Решение. Из уравнения $y = x^2$ видно, что значения функции y заполняют полуотрезок $[0, +\infty)$. Если это уравнение разрешить относительно x, то получим уравнение $x = \pm\sqrt{y}$, из которого видно, что каждому значению y из полуотрезка $[0, +\infty)$ соответствует не одно, а два значения x из интервала

$(-\infty, +\infty)$. Отсюда мы заключаем, что если функцию $y = x^2$ рассматривать на интервале $(-\infty, +\infty)$, то для нее обратной функции не существует (x через y выражается не однозначно).

Если будем рассматривать данную функцию $y = x^2$ только для положительных значений x и $x = 0$, т. е. значений x из полуотрезка $[0, +\infty)$, тогда $x = +\sqrt{y}$, и каждому значению $y \geqslant 0$ соответствует не два, а только одно значение x, обратная функция теперь существует и определяется уравнением $y = +\sqrt{x}$ (фиг. 9,2).



Фиг. 9,2.

Если данную функцию $y = x^2$ рассматривать только для значений $x \leqslant 0$, то она и в этом случае будет иметь обратную функцию. Действительно, в этом случае $x = -\sqrt{y}$, каждому значению $y \geqslant 0$ соответствует единственное значение x, и обратная функция определяется уравнением $y = -\sqrt{x}$.

Задача 9,3 (для самостоятельного решения). Убедиться, что на интервале $(-\infty, +\infty)$ функция $y = \sin x$ не имеет обратной функции, а на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ — имеет.

Задача 9,4. Найти функцию, обратную функции $y = \lg\frac{x}{5}$ $(x > 0)$.

Решение. 1) Находим x в зависимости от y:

$$\frac{x}{5} = 10^y; \quad x = 5 \cdot 10^y.$$

2) Заменим в последнем выражении x на y, а y на x и получим $y = 5 \cdot 10^x$. Это и есть функция, обратная данной.

Задача 9,5 (для самостоятельного решения). Найти функции, обратные данным:

1) $y = \sin(3x - 1)$, где $-\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\right) \leqslant x \leqslant +\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\right)$;

2) $y = \arcsin\frac{x}{3}$ где $-3 \leqslant x \leqslant 3$;

3) $y = 5\,\mathrm{arctg}\,x$, где $(-\infty < x < +\infty)$.

Ответ. 1) $y = \frac{1}{3}(1 + \arcsin x)$;

2) $y = 3\sin x$;

3) $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{5}$.

При каких значениях x могут рассматриваться эти функции?

Задача 9,6 (для самостоятельного решения). Найти функцию, обратную функции $y = x^3$, и построить ее график, пользуясь свойством графика обратной функции.

Задача 9,7 (для самостоятельного решения). Определить функции, обратные следующим функциям:

1) $y = x^2 - 2x + 4$; 2) $y = \frac{x-1}{2-3x}$; 3) $y = 2^{\frac{x}{x-1}}$;

4) $y = 5^{\lg x}$; 5) $y = 3^{\sin x}$; 6) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Указание. Заданную функцию 1) рассмотреть сначала для значений $x \geqslant 1$, а потом для значений $x \leqslant 1$.

Ответ. 1) $y = 1 + \sqrt{x-3}$, $y = 1 - \sqrt{x-3}$ $(x \geqslant 3)$;

2) $y = \frac{2x+1}{3x+1}$, область существования — два бесконечных интервала: $\left(-\infty < x < -\frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{3} < x < +\infty\right)$;

3) $y = \frac{\log_2 x}{\log_2 x - 1}$, область существования — интервалы $(0 < x < 2)$ и $(2 < x < +\infty)$;

4) $y = 10^{\frac{\lg x}{\lg 5}}$, область существования — $(0 < x < +\infty)$;

5) $y = \arcsin \frac{\lg x}{\lg 3}$, $\left(\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3\right)$;

6) $y = \frac{1}{2} \arccos x$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Основные сведения из теории

Определение. *Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, отличное от нуля, что для всех значений x, принадлежащих области существования функции, выполняется равенство $f(x) = f(x+T)$.*

Обыкновенно наименьшее из чисел T, обладающее таким свойством, называется периодом функции.

Если T — период функции, то ее периодом будут также и числа kT, где k — любое целое число.

Из определения периодической функции следует, что если точка x принадлежит области определения функции, то ей принадлежат также и точки $x + kT$, где k — любое целое число $(k = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3; \ldots)$.

Построение графика периодической функции облегчается тем, что можно ограничиться построением его части только для тех точек области определения функции, которые находятся на полу-

отрезках $[x_0, x_0+T)$ или $(x_0, x_0+T]$, и последующим периодическим повторением построенной части графика.*

Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\sec x$ и $y=\operatorname{cosec} x$ имеют период $T=2\pi$: $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $\sec(x+2\pi)=\sec x$, $\operatorname{cosec}(x+2\pi)=\operatorname{cosec} x$.

Кроме числа 2π периодом этих функций являются также и числа вида $2\pi k$, где k — любое целое число. Число 2π — наименьший период этих функций.

Функции же $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ имеют период $T=\pi$.

Число π является наименьшим периодом этих функций. Вообще же периодом этих функций являются числа вида πk, где k — любое целое число.

Задача 9,8. Доказать, что функция $y=\sin(\omega x+\varphi)$, где ω и φ — действительные числа и $\omega \neq 0$, имеет наименьший период $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Решение. Прибавим к аргументу x данной функции число $T=\frac{2\pi}{\omega}$ $\left(\text{здесь следует уяснить, что } \frac{2\pi}{\omega} \text{ прибавляется не к } \omega x, \text{ а к } x\right)$ и покажем, что функция от этого своей величины не изменит. Этим мы и докажем, что число $\frac{2\pi}{\omega}$ является периодом этой функции:

$$\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=\sin(\omega x+2\pi+\varphi)=$$
$$=\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi]=\sin(\omega x+\varphi).$$

Таким образом, требуемое доказано.

Следует запомнить, что функция $\sin \omega x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{\omega}$ $(\omega \neq 0)$. Примеры:

1) функция $y=\sin\frac{x}{3}$ имеет период $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$;

2) функция $y=\sin 2x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$;

3) функция $y=\sin 4x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

Задача 9,9 (для самостоятельного решения). Доказать, что если функция $f(x)$ имеет наименьший период, равный T, то функция $f(ax)$, где a — любое действительное, не равное нулю число, имеет наименьший период $T_1=\frac{T}{a}$ (предполагается, что точки x и ax принадлежат области определения функции).

Указание. Использовать определение периодической функции.

---

* Здесь x_0 — произвольная точка области определения функции, а T — период функции.

Задачи 9,10 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $y = \cos^2 x$ имеет период $T = \pi$.

Задача 9,11. Показать, что если функции u и v — периодические функции x с одним и тем же периодом T, то и $u + v$, uv и $\frac{u}{v}$ периодические функции с тем же периодом.

Указание. Удобно, например, ввести обозначение

$$\varphi(x) = u(x) \pm v(x); \quad \varphi(x + T) = u(x + T) \pm v(x + T)$$

и использовать свойство периодичности данных функций: $u(x + T) = u(x)$; $v(x + T) = v(x)$.

ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Если функция рассматривается только при целых и положительных значениях аргумента, то она называется функцией натурального аргумента. Множество ее значений образует числовую последовательность: каждому целому положительному числу соответствует число x_n — член последовательности, имеющий номер n. Это значит, что

$$x_n = f(n).$$

Определение. *Числовой последовательностью называется множество значений функции $f(n)$, определенной на множестве натуральных чисел.*

Член x_n называется общим членом последовательности.

Последовательность с общим членом x_n содержит бесконечное множество чисел и обозначается $\{x_n\}$.

Последовательность считается заданной, если дан способ вычисления любого ее члена по его известному номеру.

Задача 10,1. Зная общий член последовательности $x_n = n$, написать ее первые десять членов.

Решение. Давая n значения 1, 2, 3, ... , 10 получим:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3; \quad x_4 = 4; \quad x_5 = 5; \quad x_6 = 6;$$
$$x_7 = 7; \quad x_8 = 8; \quad x_9 = 9; \quad x_{10} = 10.$$

Эта последовательность из 10 членов запишется так 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Вообще же последовательность с общим членом $x_n = n$ запишется так: 1, 2, 3, ... , n, ...

Задача 10,2. Написать первые десять членов последовательности, если ее общий член $x_n = \frac{n}{n+2}$.

Решение. Вычисляя значение дроби $\frac{n}{n+2}$ при значениях n, равных 1, 2, 3, ... , 10, получим:

$$x_1=\frac{1}{3};\quad x_2=\frac{2}{4};\quad x_3=\frac{3}{5};\quad x_4=\frac{4}{6};\quad x_5=\frac{5}{7};\quad x_6=\frac{6}{8};$$

$$x_7=\frac{7}{9};\quad x_8=\frac{8}{10};\quad x_9=\frac{9}{11};\quad x_{10}=\frac{10}{12}.$$

Вообще же последовательность с общим членом $x=\frac{n}{n+2}$ запишется так:

$$\frac{1}{3},\quad \frac{2}{4},\quad \frac{3}{5},\ \ldots,\ \frac{n}{n+2},\ \ldots$$

Задача 10,3 (для самостоятельного решения). Написать последовательности с общими членами:

1) $x_n=\frac{2n}{3n-2}$; 2) $x_n=n!$; 3) $x_n=\frac{1}{n}$;

4) $x_n=-2^n$; 5) $x_n=\frac{1}{2^n}$; 6) $x_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}$;

7) $x_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+1)}$; 8) $x_n=\frac{\frac{\sin n\pi}{2}}{n}$;

9) $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{для } n \text{ нечетных;}\\ \frac{n}{n+1} & \text{для } n \text{ четных;}\end{cases}$ 10) $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$.

Задача 10,4. По данным первым членам последовательности

$$\frac{6}{7},\quad \frac{9}{10},\quad \frac{14}{15},\quad \frac{21}{22},\quad \frac{30}{31},\quad \ldots$$

написать ее общий член.

Решение. Прежде всего отметим, что заданием нескольких первых членов последовательности не определяется вся последовательность. Однако условимся считать, что как написанные члены последовательности, так и все следующие за ними составлены по одному и тому же закону соответствия между натуральными числами и членами последовательности.

В нашем случае нетрудно усмотреть, что числитель каждой дроби равен квадрату номера плюс пять, т. е. n^2+5, а знаменатель каждой дроби на единицу больше числителя, т. е. равен n^2+6. Итак,

$$x_n=\frac{n^2+5}{n^2+6}.$$

Задача 10,5 (для самостоятельного решения). Написать формулу общего члена последовательности по данным ее первым членам:

1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \ldots;$

2) $\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{5\cdot 6}, \frac{1}{7\cdot 8}, \frac{1}{9\cdot 10}, \ldots;$

3) $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \ldots;$

4) $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{11}, \frac{15}{14}, \frac{19}{17}, \ldots;$

5) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729} \ldots;$

6) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots;$

7) $\frac{3}{5}, \frac{12}{17}, \frac{27}{37}, \frac{48}{65}, \frac{75}{101}, \ldots.$

Ответ. 1) $x_n = \frac{1}{3n}$; 2) $x_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$;

3) $x_n = \frac{3n-2}{5n+1}$; 4) $x_n = \frac{4n-1}{3n+2}$; 5) $x_n = \frac{1}{3^n}$;

6) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$; 7) $x_n = \frac{3n^2}{4n^2+1}$.

Монотонные последовательности

Последовательность называется монотонно возрастающей, если при всех n каждый ее член больше предшествующего, т. е. если $x_{n+1} > x_n$, и монотонно убывающей, если каждый ее член меньше предшествующего, т. е. если $x_{n+1} < x_n$.

Примеры монотонных последовательностей:

1) Последовательность натуральных чисел

$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ — монотонно возрастающая.

2) Последовательность чисел $x_n = \frac{1}{n}$, обратных натуральным,

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ — монотонно убывающая.

Если переменная величина x_n изменяется не монотонно, то ее называют колеблющейся.

Ограниченные последовательности

Последовательность называется ограниченной, если все ее члены находятся в конечном интервале $(-M, +M)$ и $M > 0$, т. е., если $|x_n| < M$ для любого номера n.

Примеры ограниченных последовательностей:

1) Последовательность $\{x_n\}$, где x_n есть n-й десятичный знак числа $\sqrt{5}$, ограничена, так как $|x_n| \leqslant 9$.

2) Последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ограничена, так как $|x_n| < 1$.

Замечание. Ограниченная последовательность не обязательно монотонна, а монотонная последовательность не обязательно ограничена.

Последовательность с общим членом $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, в которой $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, ... ограничена, но не монотонна, а последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, ... , n, ... монотонна, но не ограничена.

Задача 10,6 (для самостоятельного решения). Привести примеры:

1) возрастающей ограниченной последовательности;

2) возрастающей неограниченной последовательности;

3) убывающей ограниченной последовательности;

4) убывающей неограниченной последовательности.

Задача 10,7. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{2n+1}$ — монотонно возрастающая.

Решение. Найдем x_{n+1}, заменив n на $(n+1)$ в выражении x_n:

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}, \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Сравним величину дробей $x_n = \frac{n}{2n+1}$ и $x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$, для чего приведем эти дроби к большему знаменателю:

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+3)(2n+1)}, \quad x_n = \frac{n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Теперь знаменатели дробей равны.

Числитель первой дроби равен $2n^2+3n+1$, а числитель второй дроби $2n^2+3n$ и ясно, что $2n^2+3n+1 > 2n^2+3n$. Мы знаем, что из двух положительных дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой числитель больше. Значит, $x_{n+1} > x_n$ и данная последовательность — возрастающая.

Задача 10,8 (для самостоятельного решения). Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{4n-3}$ — монотонно убывающая, а с общим членом $x_n = \frac{n-1}{n}$ — монотонно возрастающая.

Задача 10,9 (для самостоятельного решения). Доказать, что последовательность $\left\{\frac{3n}{n+1}\right\}$ — ограниченная и монотонно возрастающая, а последовательность $\left\{\frac{2^n+1}{2^n}\right\}$ — ограниченная и монотонно убывающая.

Задача 10,10 (для самостоятельного решения). Показать, что последовательность с общим членом $x_n = 2^n$ — неограниченная и монотонно возрастающая.

ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Предел последовательности.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с определением понятия предела последовательности. Отыскивать предел последовательности на этом занятии не придется.

В задачах предел последовательности будет задан, а учащийся на основании определения предела последовательности должен доказать, что заданное число действительно является пределом этой последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение предела последовательности

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{11,1}$$

(пределом переменной x_n или пределом функции $f(n)$), если каково бы ни было наперед заданное положительное число ε, всегда можно найти такое натуральное число N, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ будет выполняться неравенство*

$$|a - x_n| < \varepsilon. \tag{11,2}$$

Это неравенство равносильно таким двум неравенствам:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Число N зависит, вообще говоря, от выбранного ε.

Если уменьшить число ε, то соответствующий ему номер N увеличится.

Для последовательности (или для переменной x_n) необязательно иметь предел, но если этот предел есть, то он единственный.

Если число a есть предел последовательности $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = f(n)$ или переменной величины x_n, то это символически записывается так:

$$\lim x_n = a. \tag{11,3}$$

Вместо записи (11,3) употребляется также запись

$$x_n \to a,$$

которая читается так: «x_n стремится к a».

* Натуральными числами называются все целые положительные числа.

В том случае, когда переменная величина x_n (последовательность (11,1) имеет предел, равный a, говорят, что эта переменная величина или что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Последовательность, не имеющую предела, называют расходящейся.

Переменная величина x_n может стремиться к своему пределу различными способами: 1) оставаясь меньше своего предела, 2) оставаясь больше своего предела, 3) колеблясь около своего предела и 4) принимая значения, равные своему пределу.

Выбор числа ε произволен, но после того как оно выбрано, никаким изменениям в дальнейшем оно не должно подвергаться.

Задача 11,1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{n+1}$ имеет предел, равный 1.

Решение. Выберем произвольно положительное число ε и покажем, что для него можно определить такое натуральное число N, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство (11,2), в котором надо взять $a = 1$; $x_n = \frac{n}{n+1}$, т. е. неравенство

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| < \varepsilon. \tag{11,4}$$

После приведения в скобках к общему знаменателю получим

$$\left|\frac{n+1-n}{n+1}\right| < \varepsilon, \quad \text{или} \quad \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon.$$

Но если $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$, то и $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $n + 1 > \frac{1^*}{\varepsilon}$, $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Значит, если номер N больше, чем $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, то неравенство (11,4) будет выполняться. Теперь надо решить вопрос о числе N, о котором идет речь в определении. За число N можно принять наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Наибольшее целое число, содержащееся в числе x, обозначается знаком $E(x)$.

На основании этого наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, надо обозначить так: $E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$.

Итак, можно принять

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \tag{11,5}$$

---

* Если $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(предполагается, что $E\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)>0$, иначе N не будет натуральным и его надо брать равным 1).

Заключение: По произвольно заданному положительному числу ε мы нашли такое натуральное число N, что для всех номеров $n>N$ неравенство (11,4) действительно выполняется, а этим и доказано, что 1 является пределом последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{n}{n+1}.$$

Теперь приведенные вычисления проиллюстрируем числовым примером.

Пусть, например, $\varepsilon=\frac{1}{100}$. Тогда при $\varepsilon=\frac{1}{100}$ получаем из (11,5)

$$N = E\left(\frac{1}{\frac{1}{100}}-1\right)=E(100-1)=99;\ N=99.$$

Таким образом, для членов последовательности с номером бо́льшим, чем 99, выполняется неравенство

$$|1-x_n|<\frac{1}{100}, \qquad (11,6)$$

Пусть $n=97$; тогда, так как $x_n=\frac{n}{n+1}$, $x_{97}=\frac{97}{98}$,

$$\left|1-\frac{97}{98}\right|=\frac{1}{98},\ \text{а}\ \frac{1}{98}>\frac{1}{100};$$

если $n=98$, то

$$x_{98}=\frac{99}{99},\ \text{и}\ \left|1-\frac{98}{99}\right|=\frac{1}{99};\ \frac{1}{99}>\frac{1}{100}.$$

Из этих расчетов видно, что когда номер n члена последовательности меньше 99 ($n=97$, $n=98$) неравенство (11,6) не выполняется: вместо того чтобы $|1-x_n|$ была меньше $\frac{1}{100}$, мы получали, что $|1-x_n|>\frac{1}{100}$. Если взять $n>99$, т. е., например, $n=100$, тогда $x_n=\frac{100}{101}$ и $|1-x_n|=\left|1-\frac{100}{101}\right|=\left|\frac{101-100}{101}\right|=\frac{1}{101}$, а $\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$. Неравенство (11.6) будет выполняться для всех номеров n, которые больше, чем 99. Так как $\varepsilon=\frac{1}{100}$, а $n>99$, то все члены последовательности, начиная с сотого, будут лежать на интервале $\left(1-\frac{1}{100},\ 1+\frac{1}{100}\right)$, т. е. на интервале (0,99; 1,01) (теперь возьмите для ε значение, меньшее $\frac{1}{100}$, например, $\varepsilon=\frac{1}{1000}$. Найдите N и убедитесь, что оно увеличится).

Полученный результат можно записать так: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Иначе можно сказать, что последовательность $\{x_n\}=\frac{n}{n+1}$ сходится к 1.

Мы употребили запись $n\to\infty$, которую следует понимать так: переменная величина n становится все большей и большей и не существует предела для ее возрастания.

Какое бы большое число мы не задали, n в процессе своего возрастания его превзойдет. Для того чтобы коротко описать этот характер изменения n, принято говорить «n стремится к бесконечности» и записывать это так: $n\to\infty$. Символ ∞ произносится «бесконечность» и применяется для сокращенной записи слова «бесконечность».

Символ ∞ ни в коем случае не может рассматриваться как число, а потому бессмысленной является запись $n=\infty$, так как n может равняться числу и не может быть равно символу, введенному только для сокращенной записи и сокращённого произношения фразы, которой заранее был придан определенный, указанный выше, смысл.

Очевидно, что последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ может быть записана так:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{90}{100},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$$

и легко усмотреть, что она стремится к своему пределу 1, возрастая и оставаясь меньше 1.

Задача 11,2. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n=\frac{4n}{2n+1}$ имеет предел, равный 2.

Решение. Повторим подробно все рассуждения, приведенные в предыдущей задаче. Выберем произвольно положительное число ε и покажем, что для него можно подобрать такое число N, что для всех значений номера n, больших этого числа N, будет выполняться неравенство (11,2), в котором надо взять $a=2$, $x_n=\frac{4n}{2n+1}$, т. е. будет выполняться неравенство

$$\left|2-\frac{4n}{2n+1}\right|<\varepsilon. \tag{11,7}$$

Из этого неравенства после приведения в скобках к общему знаменателю получаем

$$\left|2-\frac{4n}{2n+1}\right|=\left|\frac{4n+2-4n}{2n+1}\right|=\left|\frac{2}{2n+1}\right|=\frac{2}{2n+1},$$

и неравенство (11,7) запишется так: $\frac{2}{2n+1}<\varepsilon$.

Отсюда следует, что $\frac{2n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$ (см. сноску на стр. 272) или $n+\frac{1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$, $n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$.

Таким образом, если номер n больше, чем $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, то неравенство (11.7) будет выполняться.

За N примем наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, т. е.

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right). \tag{11,8}$$

Таким образом, мы сумели по произвольно заданному положительному ε определить такое натуральное N, что неравенство (11,7) выполняется для всех номеров $n > N$. Этим и доказано, что 2 есть предел последовательности с общим членов $x_n = \frac{4n}{2n+1}$ (предполагается, что $E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) > 0$, так как иначе N не будет натуральным числом. Если $E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right)$ окажется отрицательным то следует взять $N = 1$).

Теперь, чтобы лучше уяснить приведенные рассуждения, приведем числовой пример: пусть выбрано $\varepsilon = \frac{1}{50}$. Тогда из (11,8) следует, что

$$N = E\left(\frac{1}{\frac{1}{50}} - \frac{1}{2}\right) = E\left(50 - \frac{1}{2}\right) = 49,$$

так как наибольшее целое число содержащееся в $49\frac{1}{2}$, есть 49. Значит, для всех номеров n, больших, чем 49 при $\varepsilon = \frac{1}{50}$, неравенство (11,7) будет выполняться. Начиная с пятидесятого члена все члены последовательности будут лежать в интервале $\left(2 - \frac{1}{50},\ 2 + \frac{1}{50}\right)$, т. е. в интервале (1,98; 2,0 2). Убедимся сначала, что при $n < 49$ неравенство (11,7) не выполняется. Пусть, например, $n = 47$. Тогда, так как $x_n = \frac{4n}{2n+1}$, получим, что $x_{47} = \frac{4 \cdot 47}{2 \cdot 47 + 1} = \frac{188}{95}$ и левая часть неравенства (11,7) $\left|2 - \frac{188}{95}\right| = \frac{2}{95}$. На основании (11,7) $\frac{2}{95}$ должно быть меньше, чем $\varepsilon = \frac{1}{50}$, а фактически $\frac{2}{95}$ не меньше $\frac{1}{50}$, а больше $\frac{1}{50}$ и, значит, неравенство (11,7) не выполняется.

При $n = 48$ имеем $x_n = \frac{4 \cdot 48}{2 \cdot 48 + 1} = \frac{192}{97}$; $\left|2 - \frac{192}{97}\right| = \frac{2}{97}$ и опять неравенство (11,7) не выполняется, т. к. и $\frac{2}{97} > \frac{1}{50}$, а не меньше $\frac{1}{50}$.

Если же взять, например, $n = 50$, то $x_n = \frac{200}{101}$ и $\left|2 - \frac{200}{101}\right| = \frac{2}{101}$, а $\frac{2}{101} < \frac{1}{50}$, и неравенство (11,7) выполнено. Так будет и для всех номеров n, которые больше, чем 49.

Теперь примите, за ε число, меньшее, чем $\frac{1}{50}$, например $\frac{1}{200}$, и убедить, что N увеличится.

Итак, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4n}{2n+1} = 2$ (можно сказать иначе: последовательность $\left\{\frac{4n}{2n+1}\right\}$ сходится к 2).

Замечание 1. В решенных двух задачах мы находили наименьший номер N, фигурирующий в определении предела последовательности, такой, что начиная с него, неравенство (11,2) выполняется. Однако учащийся должен уяснить, что 1) если это неравенство выполняется, начиная с номера N, то оно будет выполняться и подавно при всех номерах N_1, больших, чем N; 2) заданием число ε номер N определяется неоднозначно и 3) для доказательства того, что $\lim x_n = a$, вовсе нет необходимости среди всех номеров N искать наименьший. Так, в задаче 11,1, установив, что неравенство (11,4) выполняется для всех $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, мы могли дальше не вести никаких рассуждений.

Замечание 2. Выше было указано, что если последовательность имеет предел, то этот предел — единственный: двух различных пределов последовательность иметь не может.

В последней задаче мы доказали, что пределом последовательности $\left\{\frac{4n}{2n+1}\right\}$ является 2.

Покажем, что, например, число 3 не может быть пределом этой последовательности.

Рассмотрим абсолютную величину разности

$$\left|3 - \frac{4n}{2n+1}\right| = \left|\frac{6n+3-4n}{2n+1}\right| = \left|\frac{2n+3}{2n+1}\right| = \frac{2n+3}{2n+1}$$

и решим относительно n неравенство $\frac{2n+3}{2n+1} < \varepsilon$.

При любом целом и положительном n (а номер n может быть только числом целым и положительным) число $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$, а поэтому оно не может быть меньше **произвольно** заданного положительного числа ε. Этим мы показали, что число 3 не может служить пределом последовательности $\left\{\frac{4n}{2n+1}\right\}$.

Теперь самостоятельно решите простую задачу.

Задача 11,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что переменная $x_n = \frac{1}{n}$ имеет предел, равный нулю (следует запомнить, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$).

Произносится эта запись так: «предел $\frac{1}{n}$, когда n стремится к бесконечности, равен нулю». Вместо того чтобы писать $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$. можно употребить запись $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, которую следует читать так: «$\frac{1}{n}$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности». Из того, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, следует, что

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Сокращенно это можно записать так:

$$1 + \frac{1}{n} \to 1 \text{ при } n \to \infty, \quad 1 - \frac{1}{n} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Задача 11,4. Доказать, что последовательность $q, q^2, q^3, \ldots, q^n \ldots$ сходится к нулю, если абсолютная величина q меньше 1, т. е. если $|q| < 1$.

Решение. Чтобы доказать требуемое, возьмем произвольное положительное число ε и убедимся, что можно будет определить такое N, что для всех номеров n, больших N будет выполняться неравенство

$$|0 - q^n| < \varepsilon \tag{11,9}$$

(в неравенстве (11,2) надо взять $a = 0$, $x_n = q^n$).

Учитывая, что по условию $|q| < 1$ можно заключить, что $\frac{1}{|q|} > 1$, т. е. можно полагать, что $\frac{1}{|q|}$ равно $1 + \alpha$, где α — число положительное.

$$\frac{1}{|q|^n} = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n;$$
$$1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n \geqslant 1 + n\alpha,$$

а потому $\frac{1}{|q|^n} \geqslant 1 + n\alpha$, или $|q|^n \leqslant \frac{1}{1 + n\alpha}$.

Выберем n так, чтобы знаменатель дроби $1 + n\alpha$ стал больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда окажется, что и подавно $|q|^n < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}$, т. е. $|q^n| < \varepsilon$, и неравенство (11,9) будет выполняться, так как из него следует, что $|q|^n < \varepsilon$. Но если $1 + n\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$, то $n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}$. Значит, можно в качестве N выбрать наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}$, т. е. взять $N = E\left(\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}\right)$, и при этом неравенство (11,9) будет выполняться при всех номерах $n > N$. Таким образом доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Надо запомнить, что если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, когда $|q| \geqslant 1$ вычислен в задаче 13,1).

Если, например, $q = \frac{1}{3} < 1$, то последовательность запишется так: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots \frac{1}{3^n} \ldots$, и переменная $\frac{1}{3^n} \to 0$, монотонно убывая (здесь каждое следующее значение переменной меньше предыдущего).

Если $q = -\frac{1}{2}$, то последовательность запишется так:

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots .$$

И эта последовательность, как доказано, сходится к нулю ($|q| < 1$). Однако здесь уже переменная величина $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ стремится к своему пределу — нулю, принимая значения, то меньшие нуля, то бо́льшие его. Можно сказать, что переменная в данном случае колеблется около нуля.

Запишем эту последовательность в виде

$$-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, 0, \ldots$$

Ясно, что и эта последовательность сходится к нулю, но теперь она содержит бесконечное множество членов, равных нулю. Это тот случай, когда переменная, стремясь к пределу, становится равной ему, причем это имеет место бесконечное множество раз.

Задача 11,5. Доказать, что последовательность 3, 3^2, 3^3, 3^4, ..., 3^n ... не имеет предела.

Решение. Мы докажем требуемое, если установим, что общий член этой последовательности $x_n = 3^n$ превзойдет любое наперед заданное число.

Пусть A такое число. Возьмем $n > A - 1$. Тогда $n + 1 > A$; $3^n = (1+2)^n \geqslant 1 + 2n$, и подавно $3^n > n + 1$, или $3^n > A$. Тем самым показано, что 3^n может превзойти любое число А. Если бы существовал предел переменной $x_n = 3^n$, и был бы равен a, то для любого $\varepsilon > 0$ можно было бы подобрать такое N, что при номерах $n > N$ выполнялись бы неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т. е.

$a-\varepsilon<3^n<a+\varepsilon$, а это противоречит доказанному, так как 3^n при $n>A-1$ превзойдет любое число A, а тем самым и число $a+\varepsilon$, меньше которого оно должно оставаться. Это противоречие и доказывает, что последовательность $\{3^n\}$ предела не имеет. Этот пример иллюстрирует утверждение: **не всякая последовательность имеет предел.**

Задача 11,6. Доказать, пользуясь определением предела последовательности, что последовательность с общим членом $x_n=\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}$ имеет предел $a=1$.

Решение. Подставим значения a и x_n в неравенство (11,2) и получим

$$\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|<\varepsilon. \tag{11,10}$$

$$\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+1}-1-\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|=$$

$$=\left|\frac{-2}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}-1}.$$

Вместо неравенства (11,10) теперь имеем неравенство $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}-1}<\varepsilon$. Решим это неравенство относительно n:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{2}>\frac{1}{\varepsilon},\ \sqrt{n^2+1}-1>\frac{2}{\varepsilon},\ \sqrt{n^2+1}>\frac{2}{\varepsilon}+1;$$

$$n^2+1>\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2;\ n>\sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2-1}.$$

Таким образом, если n удовлетворяет последнему неравенству, то неравенство (11,10) будет выполняться при любом $\varepsilon>0$. Тем самым мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}=1$, а за N можно принять $N=E\left(\sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2-1}\right)$.

Определим из этого равенства значение N при $\varepsilon=0{,}01$ и $\varepsilon=0{,}001$. Если $\varepsilon=0{,}01$, то $N=E\left(\sqrt{\left(\frac{2}{0{,}01}+1\right)^2-1}\right)=$ $=E(\sqrt{201^2-1})=200$.

Значит, при всех номерах $n>200$ будет выполняться неравенство $\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right|<0{,}01$, т. е. при $n>200$ все числа заданной последовательности будут лежать на интервале $(0{,}99;\ 1{,}01)$. Если $\varepsilon=0{,}001$, то $N=E(\sqrt{2001^2-1})=E(\sqrt{4\,04\,000})=2000$ и для всех членов последовательности с номерами $n > 2000$ будет выполняться неравенство $\left|1 - \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right| < 0{,}001$, а для номеров $n > 2000$ все члены последовательности будут лежать на интервале (0,999; 1,001).

Задача 11,7 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{2n+1} = \frac{5}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n^2-1} = 0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n-1}{2n^2+n-1} = \frac{1}{2}$.

Задача 11,8 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2} = \frac{1}{3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} = 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$;

Задача 11,9 (для самостоятельного решения). Составить последовательности: 1) возрастающую и сходящуюся к нулю; 2) убывающую и сходящуюся к 3; 3) колеблющуюся и сходящуюся к 1; 4) колеблющуюся и расходящуюся; 5) убывающую и расходящуюся.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Дальнейшие упражнения в определении предела последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

На предыдущем занятии мы задавали число и проверяли, является ли оно пределом переменной величины x_n (последовательности $\{x_n\}$).

Теперь мы займемся отысканием числа, являющегося пределом переменной величины (последовательности).

Вычисление предела переменной величины основывается на определениях и теоремах, помещенных ниже.

Бесконечно малые величины

12,1. *Если переменная величина x_n имеет своим пределом нуль $\lim x_n = 0$, то она называется бесконечно малой. Это же определение можно высказать и в другой формулировке:*

Переменная величина x_n называется бесконечно малой, если для всякого наперед заданного положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что $|x_n| < \varepsilon$ для всех номеров n, которые больше N.

Ни одно число, кроме нуля, не может быть отнесено к бесконечно малым величинам.

12,2. *Алгебраическая сумма нескольких бесконечно малых величин есть также величина бесконочно малая. (Алгебраической суммой называется такая сумма, члены которой присоединяются друг к другу не только при помощи знака плюс, но и при помощи знака минус).*

12,3. *Разность двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая:*

12,4. *Произведение ограниченной переменной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.*

Отсюда следует:

A. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть также бесконечно малая величина.

B. Произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

C. Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

12,5. Отношение двух бесконечно малых величин не обязательно есть величина бесконечно малая.

Отношение двух бесконечно малых величин может быть величиной конечной, бесконечно малой и даже бесконечно большой величиной.

Об отношении двух бесконечно малых величин иногда говорят, что оно представляет собой «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$.

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых часто называется также раскрытием «неопределенности» вида $\frac{0}{0}$.

Бесконечно большие величины

12,6. *Переменная величина x_n называется бесконечно большой, если для любого наперед заданного числа $M > 0$ можно указать такое натуральное число N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $|x_n| > M$. Короче: переменная величина x_n называется бесконечно большой, если, начиная с некоторого номера, она становится и остается при всех последующих номерах по абсолютной величине больше любого наперед заданного положительного числа M. Если x_n есть величина бесконечно большая, то это записывается так:* $\lim x_n = \infty$, *или* $x_n \to \infty$.

Следует обратить внимание, что из определения бесконечно большой величины следует, что знак x_n роли не играет, а требуется лишь, чтобы абсолютная величина x_n, т. е. $|x_n|$, могла быть сделана больше любого наперед заданного положительного числа.

Бесконечно большая величина x_n называется ***положительной бесконечно большой*** *величиной, если, начинная с некоторого номера, она становится положительной. В этом случае уже нет надобности писать $|x_n| > M$, знак абсолютной величины (прямые скобки) можно опустить и писать $x_n > M$. В случае, когда x_n — положительная бесконечно большая величина, пишут $\lim x_n = +\infty$, или $x_n \to +\infty$, и произносят: «x_n стремится к плюс бесконечности».*

12,7. *Переменная величина x_n называется* ***отрицательной бесконечно дольшой*** *величиной, если для любого числа $M < 0$ можно указать такое натуральное число N, что для всех номеров n больших N, выполняется неравенство $x_n < M$. В случае, когда x_n — отрицательная бесконечно большая величина, пишут $\lim x_n = -\infty$, или $x_n \to -\infty$, и произносят «x_n стремится к минус бесконечности».*

12,8. *Надо помнить, что символы ∞, $+\infty$, $-\infty$ отнюдь не являются числами, а вводятся только для упрощения записи и для сокращенного словесного выражения того факта, что переменная величина является босконечно большой, положительной бесконечно большой и отрицательной бесконечно большой. Следует твердо запомнить, что никаких арифметических действий над этими символами производить нельзя.*

12,9 *Бесконечная большая величина предела не имеет.*

12,10. *Переменная, принимающая значения, обратные по величине соответственным значениям бесконечно малой величины, есть величина бесконечно большая.*

12,11. *Переменная, принимающая значения, обратные по величине соответственным значениям бесконечно большой величины, есть величина бесконечно малая* (хотя в некоторых учебниках и применяются условные записи $\frac{1}{\infty} = 0$ и $\frac{1}{0} = \infty$, но их следует **всячески избегать,** так как 1) делить на нуль запрещено, 2) делить же на ∞ тоже нельзя, ибо ∞ не число, а символ, делить же на символы бессмысленно).

12,12. *Если A постоянная величина,* ***не равная нулю,*** *то произведение A на бесконечно большую величину есть величина бесконечно большая.*

12,13. *Произведение двух бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.*

12,14. *Отношение бесконечно большой величины к бесконечно малой есть величина бесконечно большая.*

12,15. *Сумма двух бесконечно больших величин одинакового знака есть бесконечно большая величина того же знака.*

12,16. Отношение двух бесконечно больших величин не обязательно есть бесконечно большая величина.

Это отношение может быть 1) величиной бесконечно большой, 2) величиной конечной и даже 3) величиной бесконечно малой (см. задачи 12,1—12,9). Об отношении двух бесконечно больших величин говорят, что оно представляет собой «неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$, а отыскание этого отношения называется «раскрытием неопределенности».

Действия над сходящимися последовательностями

12,17. *Последовательности складываются, вычитаются или умножаются путем сложения, вычитания или умножения их соответствующих членов. Если есть две последовательности:*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \qquad \{a_n\}$$

и

$$b_0,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ b_n,\ \ldots, \qquad \{b_n\}$$

то получим их сумму в виде

$$(a_1+b_1),\ (a_2+b_2),\ (a_3+b_3),\ \ldots,\ (a_n+b_n),\ \ldots,\ \{a_n\}+\{b_n\}$$

разность в виде

$$(a_1-b_1),\ (a_2-b_2),\ (a_3-b_3),\ \ldots,\ (a_n-b_n)\ \ldots,\ \{a_n\}-\{b_n\}$$

а их произведение в виде

$$(a_1\,b_1),\ (a_2\,b_2),\ (a_3\,b_3),\ \ldots,\ (a_n\,b_n),\ \ldots \qquad \{a_n\}\cdot\{b_n\}$$

Частное от деления двух последовательностей получим как частное от деления членов последовательности $\{a_n\}$ на соответствующие члены последовательности $\{b_n\}$ при условии, что в последовательности $\{b_n\}$ нет членов равных нулю.

Предел суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей

12,18. *Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеет пределы, равные соответственно a и b, то:*

А) Последовательность $\{x_n \pm y_n\}$ имеет предел равный $a \pm b$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b.$$

Это свойство распространяется на случай любого фиксированного числа слагаемых.

В) Последовательность $\{x_n\ y_n\}$ имеет предел, равный ab, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab.$$

Это свойство распространяется также на случай любого фиксированного числа сомножителей.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = k\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *при любом постоянном* k.

С) Последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ *имеет предел, равный* $\frac{a}{b}$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$$

при условии, что все y_n *не равны нулю и* $\lim y_n = b \neq 0$.

Теоремы о последовательностях, расходящихся к $\pm\infty$

Если для последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *то говорят, что последовательность* $\{x_n\}$ *расходится к плюс бесконечности.*

Если для последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *то говорят, что последовательность* $\{x_n\}$ *расходится к минус бесконечности. Символы* $+\infty$ *и* $-\infty$ *имеют смысл, о котором было сказано в п. 12,8.*

12,19. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена, а последовательность* $\{y_n\}$ *расходится к* $+\infty$: $\lim y_n = +\infty$, *то*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0$ *при условии, что* $y_n \neq 0$ *для всех* n.

12,20. *Если последовательности* $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ *расходятся к плюс бесконечности:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty, \text{ то}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty;\quad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty.$$

12,21. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *то*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = +\infty$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = -\infty$.

12.22. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a \neq 0$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *и* a — *действительное число, а не один из символов* $+\infty$ *или* $-\infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 0; \\ -\infty, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

12,23. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\,(a \neq 0)$, *а* $\lim y_n = 0$ *и* $y_n > 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 0; \\ -\infty, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Теоремы о предельном переходе

12,24. *Если переменная* x_n *(последовательность* $\{x_n\}$*) имеет конечный предел, то для любого действительного* α *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^\alpha) = (\lim_{n\to\infty} x_n)^\alpha \tag{12,1}$$

в предположении, что степени x_n^α *и* $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^\alpha$ *имеют смысл. Короче: можно переходить к пределу в основании степени с любым действительным показателем.*

12,25. *Если переменная* x_n *имеет конечный предел, то имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} x_n}, \tag{12,2}$$

т. е. можно переходить к пределу под знаком корня (в случае четного m *предполагается, что* $x_n \geqslant 0$ *и корень берется арифметический).*

12,26. *Если* $a > 0$, *а* x_n *принимает только положительные значения и имеет предел, не равный нулю, то имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty}\log_a x_n = \log_a (\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{12,3}$$

Короче: можно переходить к пределу под знаком логарифма.

12,27. *Если* $a > 0$, *а переменная* x_n *имеет конечный предел, то имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}. \tag{12,4}$$

Короче: при фиксированном основании можно переходить к пределу в показателе степени.

Теперь приступим к решению типовых задач на отыскание предела переменной x_n *(предела последовательности* $\{x_n\}$*).*

Задача 12,1. Найти предел переменной

$$x_n = \frac{1+3n+2n^2}{1-n^2}. \tag{12,5}$$

Последовательность $\{n^2\}$ расходится к $+\infty$, а значит и последовательность $\{2n^2\}$ расходится к $+\infty$, (п. 12,22). На том же основании последовательность $\{3n\}$ расходится к $+\infty$, а потому последовательность $\{3n+2n^2\}$ расходится к $+\infty$ и на основании п. 12,19 последовательность $(1+3n+2n^2)$ также расходится к $+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3n+2n^2) = +\infty$. Можно было бы рассуждать и иначе: при $n\to\infty$ величина n — бесконечно большая, ее квадрат, как произведение двух бесконечно больших величин, есть величина бесконечно большая (п. 12,13). На основании п. 12,12 произведение $2n^2$ есть бесконечно большая величина, как произведение постоянной, не равной нулю, на бесконечную большую величину.

На том же основании величина $3n$ — бесконечно большая. Так как $3n$ и $2n^2$ — бесконечно большие одного и того же знака, то и сумма их $(3n+2n^2)$ есть величина бесконечно большая того же знака, потому и $1+(3n+2n^2)$ — бесконечно большая величина, как сумма постоянной величины 1 с бесконечно большой и снова $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3n+2n^2)=+\infty$. Что касается знаменателя $1-n^2$, при $n\to\infty$ последовательность $\{n^2\}$ расходится к $+\infty$, и на основании п. 12,19, *б* получаем, что последовательность $\{1-n^2\}$ расходится к $-\infty$ и знаменатель дроби (12,5) — тоже бесконечно большая величина.

Таким образом, дробь (11,5) есть отношение двух бесконечно больших величин, о котором без исследования ничего определенного сказать нельзя. Здесь также нельзя применить теорему о пределе частного, так как в условии этой теоремы предполагается, что пределы числителя и знаменателя существуют, а в нашем случае ни числитель, ни знаменатель дроби предела не имеют (см. п. 12,9). Данную переменную (12,5) преобразуем, чтобы к ней можно было применить теоремы о пределах. Обыкновенно в этом случае поступают так: числитель и знаменатель дроби делят на наивысшую степень n, встречающуюся в членах дроби*. Тогда

$$\frac{1+3n+2n^2}{1-n^2}=\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2}{\frac{1}{n^2}-1}. \qquad (12,6)$$

Отыскивая теперь предел последней дроби, мы сможем применить теорему о пределе частного, так как теперь числитель и знаменатель дроби имеют пределы: величины $\frac{1}{n^2}$ и $\frac{1}{n}$ есть величины бесконечно малые, как величины обратные бесконечно большим n^2 и n, а потому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Величина $\frac{3}{n}$ есть тоже бесконечно малая, как произведение постоянной величины 3 на бесконечно малую $\frac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$ (п. 12 4А), и тогда существует предел числителя:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\frac{3}{n}+\lim_{n\to\infty}2=0+0+2=2$$

(предел постоянной величины 2 равен ей самой).

---

* Деление на n допустимо, так как предполагается, что $n\neq 0$.

Предел знаменателя $\frac{1}{n^2}-1$ дроби (12,6) также существует и равен -1, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim_{n\to\infty}1=0-1=-1;\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{-1}=-2.$$

После этих подробных рассуждений укажем, как следует расположить записи:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3n+2n^2}{1-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2}{\frac{1}{n^2}-1}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}2}=$$

(Здесь применена теорема о пределе дроби. Это можно было сделать только после, того, как мы убедились, что существуют пределы числителя и знаменателя).

$$=\frac{0+0+2}{0-1}=\frac{2}{-1}=-2.$$

Такие подробные записи в последующем, когда выработается определенный навык, можно сократить.

Задача 12,2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n+2n-3}{5n^2-4n+4}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2+2n-3}{5n^2-4n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{5-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}=$

(числитель и знаменатель данной дроби разделен на n^2)

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}7+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}=\frac{7+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{5-4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{7}{5}$$

(применена теорема о пределе дроби).

Задача 12,3 (для самостоятельного решения). Найти

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2-n+1}{5n^3-4n+17}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-4n+2}{n^3-4n+1}$.

Ответ. 1) $\frac{3}{5}$; 2) 0.

Задача 12,4 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)(2n+4)(n-1)}{n^2+n+1}.$$

Ответ. Последовательность расходится к $+\infty$. Можно употребить символическую запись и написать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)(2n+4)(n-1)}{n^2+n+1} = +\infty.$$

Указание. В числителе перемножить двучлены, разделить числитель и знаменатель на n^3 и воспользоваться п. 12,23.

Задача 12,5 (для самостоятельного решения). Найти предел переменной $x_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{3n^3+n+1}$.

Указание. Известно, что сумма квадратов чисел натурального ряда $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ответ. $\frac{1}{9}$.

Задача 12,6 (для самостоятельного решения). Найти

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+7}{3-4n}$; 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{3n^2-5n+2}$;

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^2-1}$; 4) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n^2+n-1}$.

Ответ. 1) $-\frac{5}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) ∞; 4) 0.

Задача 12,7. Доказать, что если $n\to\infty$, то 1) $n^k\to+\infty$, когда $k>0$; 2) $n^k\to 0$, когда $k<0$; 3) $n^k\to 1$, когда $k=0$.

Решение. 1) Пусть $k>0$, а M — любое заданное положительное число.

Чтобы доказать, что $n^k\to+\infty$, мы должны показать, что можно найти такое натуральное число N, что $n^k>M$ при $n>N$.

Так как n^k должно быть бо́льшим, чем M, то это равносильно тому, что должно быть $n>\sqrt[k]{M}$, и за N можно принять $N>\sqrt[k]{M}$; тем самым доказано, что $n^k\to+\infty$ при $k>0$. Например, если $k=3$, а $M=1000$, то должно выполняться неравенство $n^3>1000$ для всех $n>N$, причем следует взять $N>\sqrt[3]{1000}$, т. е. принять $N>10$. Значит, начиная с $n=11$, неравенство $n^3>1000$ будет выполняться.

Если взять $M=1\,000\,000$, то должно выполняться неравенство $n^3>1\,000\,000$ для всех $n>N$, и следует взять $N>\sqrt[3]{1\,000\,000}=100$ $(N>100)$ и при $n>100$, т. е. начиная с $n=101$ неравенство $n^3>1\,000\,000$ будет выполняться.

Доказательство пунктов 2) и 3) предоставляется читателю. При доказательстве п. 2) и 3) выгодно взять $k = -l\ (l > 0)$, и тогда $n^k = \frac{1}{n^l}$; при доказательстве п. 3) учесть, что если $k = 0$, то всегда $n^k = 1$ при любом n.

Результат проведенных вычислений можно записать и так:

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} +\infty, & \text{если } k > 0, \\ 0, & \text{если } k < 0, \\ 1, & \text{если } k = 0. \end{cases} \tag{12,7}$$

В задачах 12,1—12,6 мы рассматривали пределы отношения двух целых рациональных функций от n в частных случаях. После решения предыдущей задачи мы можем рассмотреть вопрос об отношении двух целых рациональных функций в общем виде.

Задача 12,8. Найти предел при $n \to \infty$

$$x_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \cdots + b_q}, \tag{12,8}$$

причем $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Решение. Перепишем (12,8) в виде

$$x_n = \frac{n^p\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}\right)}{n^q\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_q}{n^q}\right)};$$

$$x_n = n^{p-q}\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n_2} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}.$$

Теперь предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n^{p-q}\frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_p}{n^p}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \cdots + \frac{b_q}{n^q}}.$$

Предел второго сомножителя равен $\frac{a_0}{b_0}$, так как в числителе и знаменателе предел каждого слагаемого, кроме первых (a_0 и b_0), равен нулю. Что касается первого сомножителя, то его предел зивисит от знака разности $p - q$:

1) Если $p - q > 0$, т. е. $p > q$, то на основании (12,7) $\lim n^{p-q} = +\infty$, и тогда, в соответствии с п. 12,22, заключаем, что $\lim x_n = +\infty$.

2) Если $p - q < 0$, т. е. $p < q$, то из (12,7) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q} = 0$; тогда искомый предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

3) Если же $p-q=0$, т. е, $p=q$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q}=1$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a_0}{b_0}$. Соединяя полученные результаты, приходим к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\dots+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+b_2n^{q-2}+\dots+b_q}=\begin{cases}+\infty, & \text{если } p>q;\\ 0, & \text{если } p<q;\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } p=q.\end{cases} \qquad (12{,}9)$$

Таким образом, при $n\to\infty$ предел отношения двух целых рациональных функций от n равен 1) отношению коэффициентов при высших степенях n, если степени этих функций между собою равны; 2) нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя и 3) $+\infty$, если степень числителя больше степени знаменателя.

Заключения, полученные при решении задач 12,1—12,6, совпадают с только что сделанным.

Задача 12,9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2$.

Решение. Воспользуемся указанием п. 12.24, заметив, что основание степени имеет предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{5-\frac{7}{n}+\frac{12}{n^2}}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}.$$

Задача 12,10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-4n^2+5n}{4n^3-2n-7}\right)^3.$$

Ответ. $\frac{27}{64}$.

Задача 12,11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(2-\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{5}{n^2}-1\right)$.

Решение. Применяя теорему о пределе произведения (это мы имеем право сделать, так как каждый сомножитель имеет предел) получаем последовательно:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(2-\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{5}{n^2}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{4}{n}\right)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}-1\right)=$$

$$=1\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{4}{n}\right)\right]^2(-1)=1\cdot 4\cdot(-1)=-4,$$

т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3\cdot 0=0$, ибо если $n\to\infty$, то величина ей обратная $\frac{1}{n}$ — бесконечно малая $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)$.

Задача 12,12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{6n+2}{3n-4}}$.

Решение. Воспользуемся указанием п. 12,27 о переходе к пределу в показателе степени $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{6n+2}{3n-4}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+2}{3n-4}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+\frac{2}{n}}{3-\frac{4}{n}}}=$

$$=3^{\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right)}}=3^{\frac{6}{3}}=3^2=9.$$

Задача 12,13 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}7^{\frac{3n}{6n-5}};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}};\quad \lim_{n\to\infty}5^{\frac{n-1}{n^2+2}}.$$

Ответ. 1) $\sqrt{7}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1.

Задача 12,14. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_a\frac{3n}{6n+5}\right)$.

Решение. На основании формулы (12,3), допускающей переход к пределу под знаком логарифма, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_a\frac{3n}{6n+5}\right)=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{6n+5}\right)=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3}{6+\frac{5}{n}}\right)=$$

$$=\log_a\frac{3}{6}=\log_a\frac{1}{2}=-\log_a 2.$$

Задача 12,15 (для самостоятельного решения). Найти:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{3n^2+n-10}.$$

Ответ. $-\lg 3$.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение предела последовательности (задачи повышенной трудности).

Задача 13,1. Найти $\lim q^n$, если 1) $q>1$; 2) $q<-1$,3) $q=1$, 4) $q=-1$.

Решение. 1) Если $q>1$, то $0<\frac{1}{q}<1$, и тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=0$ (см. задачу 11,4 — основание степени $\frac{1}{q}$ по абсолютной величине меньше 1).

Значит, $\frac{1}{q^n}$ — бесконечно малая величина, а потому обратная ей величина q^n — бесконечно большая величина; так как при $q > 1$ и n, стремящемся к $+\infty$, переменная величина q^n принимает только положительные значения, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

2) Если же $q < -1$, то переменная величина q^n при $n \to +\infty$ делается попеременно то положительной, то отрицательной, неограниченно возрастая по абсолютной величине, а потому

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty, \text{ если } q < -1.$$

3) Если $q = 1$, то $q^n = 1$, при каждом n, а потому при $q = 1$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

4) Если же $q = -1$, то переменная величина q^n не стремится ни к какому пределу, потому что когда n пробегает значения 1, 2, 3, 4, ... величина $(-1)^n$ делает скачки от -1 к $+1$ и обратно.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{если } q > 1; \\ 0, & \text{если } |q| < 1; \\ 1, & \text{если } q = 1; \\ \text{не существует,} & \text{если } q = -1; \\ \infty & \text{если } q < -1. \end{cases} \qquad (13,1)$$

Прежде чем решать следующие задачи, укажем на очень важные теоремы, выражающие признаки существования предела переменной величины.

Теорема 13,1. Если переменная величина x_n монотонно возрастает вместе с n, но остается меньше некоторого числа K, то x_n стремится к пределу, и этот предел не больше K, т. е. меньше или равен K.

Теорема 13,2. Если переменная величина x_n монотонно убывает с возрастанием n, но остается больше некоторого числа L, то x_n стремится к пределу и этот предел не меньше L, т. е. больше или равен L. Теорема 13,1 и 13,2 можно объединить в одну, которая коротко формулируется так:

Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Эти теоремы будут использованы в задачах 13,2—13,4 которые будут решаться по такому общему плану:

1) прежде всего мы докажем, что данные последовательности монотонны;

2) после этого установим, что они ограничены.

Убедившись в выполнении этих двух требований, и тем самым в существовании предела последовательности, мы будем отыскивать этот предел.

Задача 13,2. Доказать, что если a — ***любое положительное число,*** то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{13,2}$$

Решение. Допустим сначала, что число $a > 1$. Тогда последовательность a, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ ... является монотонно убывающей. Но эта последовательность и ограничена, так как $\sqrt[n]{a} > 1$. Поэтому на основании теоремы 13,2 эта последовательность имеет предел L, и этот предел не может быть меньше, 1, т. е. $L \geqslant 1$. Покажем, что предположение $L > 1$ приводит к противоречию. Действительно, так как рассматриваемая последовательность — монотонно убывающая, то даже при сколь угодно большом n имеем, что

$$\sqrt[n]{a} > L.$$

Отсюда $a > L^n$. Так как $L > 1$, то при $n \to \infty$ величина L^n — бесконечно большая. Но это **противоречит условию** задачи, согласно которому a — число и тем самым не может быть величиной бесконечно большой. Таким образом, предположение что $L > 1$ привело нас к противоречию и должно быть отброшено и остается только заключить, что $L = 1$.

Читателю предлагается самостоятельно доказать что и при c положительном, но меньшем I имеет место соотношение (13,2).

Указание. Воспользоваться теоремой 13,1. В этом случае последовательность a, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ... — возрастающая (и ограниченная, т. к. $\sqrt[n]{a} < 1$). Пределом будет число $K \leqslant 1$. Доказательство должно привести к тому, что случай $K < 1$ является невозможным. Останется единственно возможное заключение $K = 1$, а это и требуется.

Задача 13,3. Показать, что если $l > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{l^n}{n} = +\infty$, т. е. что последовательность $\{x_n\} = \frac{l^n}{n}$ расходится к $+\infty$.

Решение. Так как $l > 1$, то можно записать, что $l = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$l^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 + n\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 + \cdots + \alpha^n;$$

$$\frac{l^n}{n} = \frac{1}{n} + \alpha + \frac{n-1}{2!}\alpha^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^3 + \cdots + \alpha^n\frac{1}{n}.$$

Теперь переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \alpha + \frac{n-1}{2!}\alpha^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^3 + \cdots \frac{a^n}{n}\right) = +\infty,$$

т. е. переменная $x_n = \frac{l^n}{n}$ при $l > 1$ — бесконечно большая.

Поэтому можно также утверждать, что для достаточно больших n $l^n > n$, если $l > 1$. Результат этой задачи приводит также к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{l^n} = 0 \text{ при } l > 1.$$

Задача 13,4. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \qquad (13,7)$$

Решение. При вычислениях, связанных с числом e, получается заключение, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ при любом n. Значит, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ меньше любого числа, которое больше 3 или равно 3, т. е. для всех чисел $n \geqslant 3$ имеет место неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$. Из этого следует, что

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n, \quad \frac{(n+1)^n}{n^n} < n, \quad (n+1)^n < nn^n, \quad (n+1)^n < n^{n+1}.$$

Извлекая теперь из обеих частей неравенства корень степени $n(n+1)$, получаем, что

$$\sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n} < \sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}},$$

или

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

Мы установили это неравенство для того, чтобы показать, что последовательность $\{\sqrt[n]{n}\}$ — убывающая, когда n возрастает от значения, равного 3, т. е. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[6]{6}$, ... — убывающая последовательность. А так как при любом целом $n > 0$ всегда $\sqrt[n]{n} > 1$, то эта убывающая последовательность ограничена. Значит, последовательность $\{\sqrt[n]{n}\}$, будучи убывающей и ограниченной, необходимо стремится к пределу, причем этот предел не меньше I. Обозначим этот предел через L. Так как этот предел не меньше I, то $L \geqslant 1$. Покажем, что предположение $L > 1$ приводит к противоречию и тем самым для L останется единственная возможность быть равным I. Действительно, так как рассматриваемая последовательность — монотонно убывающая, то даже при сколько угодно больших n будет $\sqrt[n]{n} > L$, а потому $n > L^n$. Это неравенство находится в противоречии с неравенством $L^n > n$ полученном в последнем абзаце предыдущей задачи при тех же условиях: $L > 1$, а n достаточно велико.

Таким образом предположение $L > 1$ привело к противоречию и должно быть отброшено. Для L остается только одна возможность быть равным I и тем самым соотношение (13,7) доказано.

Отсюда можно получить следствие:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1, \qquad (13,3)$$

т. к.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Задача 13,5 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{9n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^7}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n}$.

Указание. 1) $\sqrt[n]{5n} = \sqrt[n]{5}\sqrt[n]{n}$. Применить теорему 12,18 п. *В* о пределе произведения и использовать задачи 13,2 и 13,4. 2) $\sqrt[n]{n^4} = (\sqrt[n]{n})^4$. Использовать задачу 13,4.

Ответ. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 0.

Для решения дальнейших задач полезна

Теорема 13,3. Если для трех переменных x_n, y_n и z_n, начиная с некоторого номера n, выполняется соотношение

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n,$$

а x_n и y_n имеют равные пределы, то тот же предел имеет и z_n.

Задача 13,6. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2}$.

Решение. Для $n > 2$ выполняются неравенства

$$\sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{3n+2} < \sqrt[n]{4n},$$

но

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n} = 1,$$

а поэтому на основании последней теоремы 13,3 заключаем, что искомый предел равен 1:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2} = 1.$$

Задача 13,7 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}(n+2)}$.

Ответ. 1) 1; 2) 1.

Задача 13,8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$. При вычислении этого предела мы не можем применить теорему 12,18 п. *А* о пределе разности двух переменных, ибо эта теорема верна только в том случае, когда обе переменные имеют предел. В нашем случае ни $\sqrt{n+2}$, ни $\sqrt{n}$ предела не имеют, так как на основании соотношений (12,7) при $n \to \infty$ $\sqrt{n} \to \infty$, а вместе с ним и $\sqrt{n+1} \to +\infty \left(k = +\frac{1}{2} > 0\right)$.

Здесь мы имеем дело с разностью двух положительных бесконечно больших величин. Без специального исследования об этой разности нельзя сказать ничего определенного. Такие разности называют «неопределенностями» вида $\infty - \infty$ (запись $\infty - \infty$ — есть символическое обозначение «неопределенности» такого вида, а не вычитание символов). Данную переменную преобразуем, умножив и разделив ее на $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$. Это преобразование мы делаем для того, чтобы перенести иррациональность в знаменатель:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} =$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 2.0 = 0,$$

ибо $\sqrt{n+2}$ и $\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ есть положительные бесконечно большие величины, их сумма $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$ есть тоже положительная бесконечно большая величина, а величина, обратная ей, $\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$ есть величина бесконечно малая. Предел же бесконечно малой величины равен нулю.

Задача 13.9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})$.

Решение. Здесь снова мы имеем дело с разностью двух босконечно больших величин (см. 12,7) («неопределенность» вида $\infty - \infty$), и без специального исследования никакого заключения о пределе их разности мы сделать не можем.

Как и в предыдущих двух задачах, перенесем иррациональность в знаменатель, и тогда

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{n-1}} =$$

разделим числитель и знаменатель на n

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \infty,$$

так как при $n \to \infty$ предел числителя равен 1, а знаменатель есть величина бесконечно малая, как сумма двух бесконечно малых величин. Значит, мы имеем дело с величиной, которая обратна бесконечно малой, а такая величина — бесконечно большая.

Задача 13,10 (для самостоятельного решения). Определить

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Указание. Здесь снова фигурирует разность двух бесконечно больших величин $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, а множитель $\sqrt{n}$ предела не имеет. Поэтому теорему 12,18 (пункты A и B) применить нельзя. Для решения задачи надо выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ и в полученном выражении $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ произвести деление числителя и знаменателя дроби на $\sqrt{n}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 13,11 (для самостоятельного решения). Определить

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}.$$

Указание. Здесь мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших величин, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Также нельзя применить и теорему о пределе частного (12,18 пункт C), так как для ее применения требуется, чтобы числитель и знаменатель дроби имели пределы, а в данном случае ни числитель, ни знаменатель дроби предела не имеют (они величины бесконечно большие). Для решения задачи следует числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Ответ. 1.

Задача 13,12 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}.$$

Указание. Здесь мы опять-таки встречаемся с отношением двух бесконечно больших величин. Теорему 12,18 (пункт C) применить нельзя (числитель и знаменатель дроби предела не имеют). Для решения задачи числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Ответ. 1.

Задача 13,13 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$.

Ответ. 1) 1; 2) $\frac{a+b}{2}$.

Указание. При решении каждого из этих примеров мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин. Теорема о пределе разности и в первом и во втором случае неприменима, так как переменные не имеют предела. Перенести иррациональность в знаменатель, после чего числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Задача 13,14. Найти:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}};$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5n}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Указание. 1) Воспользоваться формулой (12,2), переписать данное выражение в виде

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}$$

и учесть результат задачи 12,8.

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5n}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{4n+3}\right)^{-\frac{1}{6}}.$$

Ответ. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{6}}$.

Задача 13,15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+5n}}{3n+2}.$$

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на n. Можно поступить и иначе: представить данную дробь в виде.

$$\sqrt[3]{\frac{n^2+5n}{(3n+2)^3}};$$

воспользоваться формулами (12,2) и (12,9).

Ответ. 0.

Задача 13,16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+5-6+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}}.$$

Указание. Числитель дроби записать так:

$$1-2+3-4+5-6+\cdots-2n=[1+3+5+\cdots+(2n-1)]-$$
$$-[2+4+6+\cdots+2n].$$

Каждую из сумм, стоящую в скобках, вычислить как сумму членов арифметической прогрессии. После этого числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Ответ. $-\frac{1}{3}$.

Решение трех следующих задач основано на применении формул $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ и $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

Задача 13,17. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}+n)$.

Решение. Здесь в скобках стоит разность двух бесконечно больших величин. Полагая $\sqrt[3]{1-n^3}=a$; $n=b$, умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на a^2-ab+b^2 и получим

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}+n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{1-n^3}+n)\,[(\sqrt[3]{1-n^3})^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2]}{(\sqrt[3]{1-n^3})^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3+n^3}{(\sqrt[3]{1-n^3})^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[3]{1-n^3})^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=0,$$

так как знаменатель дроби при $n\to\infty$ есть сумма трех положительных бесконечно больших величин, а потому на основании п. 12,20 заключаем, что это величина положительная, бесконечно большая. Величина же обратная бесконечно большой есть величина бесконечно малая, и ее предел равен нулю.

Задача 13,18 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}[(n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}}].$$

Указание. Здесь мы снова имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин. Полагая $(n+1)^{\frac{2}{3}}=a$, $(n-1)^{\frac{2}{3}}=b$ умножить и разделить на a^2+ab+b^2. После приведения подобных членов в числителе получится $4n$. После этого числитель и знаменатель дроби разделить на наивысшую степень n, встречающуюся в членах дроби, т. е. на $n^{\frac{4}{3}}$.

Ответ. 0.

Этим заканчиваются упражнения, связанные с определением предела последовательности.

Задачи для дополнительных упражнений учащийся может взять из хорошо зарекомендовавшего себя задачника для втузов под редакцией Б. П. Демидовича «Задачи и упражнения по математическому анализу».

ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Предел функции.

Определение предела функции.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа ε (хотя бы и как угодно малого) можно найти такое положительное число δ, что для всех значений x, входящих в область определения функции, ***отличных от a*** *и удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

Короче: число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если выполнение неравенства $0<|x-a|<\delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x)-A|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — наперед заданное число, а δ соответствующим образом подобрано.

В определении предела функции следует обратить внимание на то, что вовсе не требуется, чтобы функция $f(x)$ была непременно определена в точке a. Для того чтобы функция $f(x)$ имела возможность стремиться к пределу при $x\to a$, необходимо лишь чтобы в области ее существования были точки, как угодно близкие к a и отличные от a.

Прежде чем приступить к непосредственному вычислению предела функций, приведем основные сведения из теории:

14,1. *Бесконечно малые и бесконечно большие функции.*

a) Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=0. \tag{14,1}$$

b) Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ если имеет место одно из равенств

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty;\quad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty;\quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty.$$

c) Функция $f(x)$ называется ограниченной при $x\to a$, если существует такое положительное число A, что для всех значений x из окрестности числа a выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant A$.

14,2. *Свойства бесконечно малых функций.*

a) Если функция $f(x)$ бесконечно мала при $x\to a$, то и $-f(x)$ также бесконечно мала при $x\to a$.

b) Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бесконечно малы при $x\to a$, то сумма их, а также и разность их: $f_1(x)+f_2(x)$ и $f_1(x)-f_2(x)$ бесконечно малы при $x\to a$ (это утверждение распространяется на любое фиксированное число функций).

c) Если при $x \to a$ функция $f(x)$ бесконечно мала, а функция $\varphi(x)$ — ограничена, то их произведение $f(x)\varphi(x)$ есть функция бесконечно малая.

14,3. *Свойства бесконечно больших функций.*

Если при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет конечный предел ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$), а функция $\varphi(x)$ — бесконечно велика ($\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$), то

a) сумма их — бесконечно велика, т. е. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + \varphi(x)] = \infty$, предел отношения $f(x)$ к $\varphi(x)$ равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

b) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ $(b > 0)$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, причем $\varphi(x)$ положительна в окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$.

c) При положительном k, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x\to a}[kf(x)] = +\infty,$$

d) Произведение двух бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая, т. е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, то и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

14,4. *Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями:*

a) Если $f(x)$ при $x \to a$ — бесконечно большая функция, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно мала.

b) Если при $x \to a$ функция $\varphi(x)$ бесконечно мала, то функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно большая, причем предполагается, что в окрестности точки a функция $\varphi(x)$ в нуль не обращается.

14,5. *Правила предельного перехода.*

a) Еули при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы, то и алгебраическая сумма их $f(x) \pm \varphi(x)$ имеют предел, который равен сумме их пределов, т. е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b_1$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b \pm b_1$.

Короче (но не совсем точно): предел алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих функций.

b) Если при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы, то их произведение $f(x)\varphi(x)$ также имеет предел, который равен *произведению их пределов, т. е. если* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, *а* $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b_1$, *то* $\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} \varphi(x) = bb_1$.

Короче (но не совсем точно): предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций. Свойства а) и b) распространяются на любое фиксированное число функций.

c) Если при $x \to a$ *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *имеют пределы и предел функции* $\varphi(x)$ *не равен нулю, то предел их частного существует и равен частному от деления их пределов, т. е. если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \text{ а } \lim_{x\to a} \varphi(x) = b_1 \ (b_1 \neq 0),$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)} = \frac{b}{b_1}.$$

Короче (но не совсем точно): предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю.

14,6. *Предел целой рациональной функции.*

Если

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

то

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a), \tag{14,2}$$

т. е. ***при отыскании предела целой рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением.***

14,7. *Предел дробно-рациональной функции.*

Если

$$F(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} F(x) = \frac{P(a)}{Q(a)} = F(a), \text{ если } Q(a) \neq 0, \tag{14,3}$$

т. е. ***при отыскании предела дробно-рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением, если при этом предельном значении знаменатель не обращается в нуль.***

Задача 14,1. Найти $\lim_{x\to 3} (x^2 - 7x + 4)$.

Решение. Функция $f(x) = x^2 - 7x + 4$ — целая рациональная. Для отыскания ее предела применима формула (14,2). Заменим в аналитическом выражении функции x его предельным значением и получим

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8.$$

Задача 14,2 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^3-7x^2+4x+2); \qquad 2)\ \lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x^3-x+2\right).$$

Ответ. 1) -2, 2) 30.

Указание. Воспользоваться формулой (14,2).

Задача 14,3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$.

Решение. Здесь отыскивается предел дробно-рациональной функции. Прежде чем применить (14,3), надо проверить, не обращается ли в нуль знаменатель дроби при $x=3$. Проверяем: $3^2+2\cdot 3+8=23\neq 0$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}=\frac{3^2+3+2}{3^2+2\cdot 3+8}=\frac{14}{23}.$$

Задача 14,4 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}; \quad 2)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{2x^3-x^2+x+2}.$$

Указания: 1) Проверить, что знаменатель дроби в первом примере при $x=1$, а во втором при $x=-1$ не обращается в нуль; 2) воспользоваться формулой (14,3).

Ответ. 1) 0; 2) $-\dfrac{3}{2}$.

Задача 14,5. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Решение. Знаменатель дроби $\dfrac{x^3-8}{x-2}$ обращается в нуль при $x=2$, а потому функция $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ при $x=2$ не существует.

Теорему о пределе дроби (14,5 п. c) применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. По той же причине нельзя применить и формулу (14,3). Но определение предела функции содержит существенную оговорку: при отыскании предела функции $f(x)$ при $x\to a$ значение функции $f(a)$ при $x=a$ может не рассматриваться. От функции $f(x)$ это определение не требует, чтобы точка $x=a$ входила в область существования функции. Поэтому значение $x=a$ может нами не приниматься во внимание. Именно эти соображения и дадут возможность решить задачу. В нашем случае мы должны считать, что x, стремясь к 2, никогда не становится равным 2, а потому значение функции $\frac{x^3-8}{x-2}$ при $x=2$ нас не интересует.

При $x=2$ и числитель, и знаменатель дроби обращаются в нуль. Мы имеем в данном случае отношение двух бесконечно малых функций, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Для решения задачи разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{x^3-8}{x-2}$ на $x-2$. Мы имеем право это сделать потому, что значение $x=2$ не рассматривается и, значит, $x-2 \neq 0$.

Если бы указанной оговорки в определении предела функции не было и мы должны были бы рассматривать и значение $x=2$, то разделить числитель и знаменатель дроби на $x-2$ мы не смогли бы, так как такое деление означало бы деление числителя и знаменателя дроби на нуль, что, конечно, недопустимо. После сокращения дроби на $x-2$ получим

$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4,$$

и нам придется отыскивать предел не данной функции, а функции x^2+2x+4. Тогда перед учащимся должен возникнуть такой вопрос: тождественны ли функции $\frac{x^3-8}{x-2}$ и x^2+2x+4. Этот вопрос имеет положительный ответ: функции тождественны, если не рассматривать значения $x=2$. Следует иметь в виду, что две функции тождественны, если они удовлетворяют таким двум требованиям:

1) их области существования совпадают и

2) при одном и том же значении аргумента, взятом из области существования функции, численные значения функций равны.

В нашем случае эти два требования будут выполнены, если не рассматривать значения $x=2$, но ведь оно и не рассматривается. Таким образом,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=$$
$$=2^2+2\cdot 2+4=12,$$

так как функция x^2+2x+4 — целая рациональная функция и для определения ее предела на основании формулы (14,2) следует в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением.

Можно указать такое

***Правило.* Для того чтобы определить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to a$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $x-a$ и перейти к пределу.**

Если и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю при $x \to a$, то надо произвести повторное деление на $x-a$ (это правило основывается на известном из элементарной алгебры следствии из теоремы Безу, согласно котерому, если многочлен обращается в нуль при $x=a$, то он делится без остатка на $x-a$).

Теперь для самостоятельного решения будет предложен ряд задач на определение предела дробно-рациональной функции.

Задача 14.6 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}.$$

Указание. При $x=3$ числитель и знаменатель дроби — функции бесконечно малые, пределы их равны нулю. Об их отношении без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Теорему 14,5 п. *с* о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Следует применить указанное правило; разделить числитель и знаменатель дроби на $x-3$. Повторить рассуждения предыдущей задачи о допустимости такого деления.

Ответ. $\frac{7}{3}$.

Следует не только запомнить тот или иной прием, но главное — понять, на чем основано его применение, и каждое действие проводить совершенно сознательно, а не автоматически, «по правилам». Применяя правило, надо понимать те положения, из которых оно выведено.

Задача 14,7 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}.$$

Указание. Здесь опять-таки функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, бесконечно малы при $x\to 1$. Для решения вопроса о пределе их отношения следует разделить числитель и знаменатель дроби на $x-1$. Полученные после этого деления функции при $x\to 1$ будет опять-таки бесконечно малыми. Снова каждую из них следует разделить на $x-1$. Этим указанием воспользуетесь и при решении двух следующих задач.

Ответ. $\frac{2}{3}$

Задача 14,8 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3-6x^2}{4x^5+2x^3+x^2}.$$

Ответ. -6.

Задача 14 4 (для самостоятельного решения).

$$\text{Найти}\quad \lim_{x\to -3}\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}.$$

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 14,10. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n — целые положительные числа).

Решение. При $x\to 1$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю, а поэтому это функции бесконечно малы. Для решения вопроса о пределе их отношения следует числитель и знаменатель дроби разделить на $x-1$. Допустимость такого деления подробно была объяснена в задаче 14,5. Повторяем, что x, стремясь к 1, не становится равным 1, а потому $x-1\neq 0$, и деление на $x-1$ имеет смысл.

Функция $\frac{x^m-1}{x^n-1}$ при $x=1$ не существует, но значение $x=1$ нашему рассмотрению и не должно подлежать. Воспользуемся известной формулой алгебры

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}). \quad (14,4)$$

Полагая здесь $a=x$, а $b=1$, в нашем случае получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{m\text{ раз}}}{\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{ раз}}}=\frac{m}{n}.$$

Задача 14,11. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

Решение. При $x\to -1$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, а потому это функции — бесконечно малые. Чтобы можно было применить формулу (14,4), с помощью которой была решена предыдущая задача, следует сделать подстановку $x=y^{35}$, где показатель степени 35 — наименьшее кратное показателей корней.

Если $x=y^{35}$, то $\sqrt[7]{x}=y^5$, а $\sqrt[5]{x}=y^7$, и тогда $\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\frac{1+y^5}{1+y^7}$ причем $y\to -1$, когда $x\to -1$, и задача перепишется так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{y\to -1}\frac{1+y^5}{1+y^7}.$$

Теперь следует разделить числитель и знаменатель дроби на $1+y$ применить формулу (14,3).

Ответ. $\frac{5}{7}$.

Задача 14, 12 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}.\qquad 2)\ \lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}.$$

Ответ. 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{5}{3}$.

Задача 14, 13. Найти $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-5}{x^2-7x+12}$.

Решение. При $x\to3$ имеем предел числителя:

$$\lim_{x\to3}(2x-5)=1;$$

предел знаменателя:

$$\lim_{x\to3}(x^2-7x+12)=0$$

Теорема (14,5 п. *с.*) о пределе дроби неприменима. Рассмотрим обратную дробь $\frac{x^2-7x+12}{2x-5}$, и ее предел при $x\to3$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-7x+12}{2x-5}=\frac{0}{1}=0$$

(здесь теорема о пределе дроби применима, так как предел знаменателя $2x-5$ не равен нулю). Так как предел функции $\frac{x^2-7x+12}{2x-5}$ равен 0, то эта функция при $x\to3$ бесконечно малая, а потому функция $\frac{2x-5}{x^2-7x+12}$ при $x\to3$ — бесконечно большая, и тогда ее предел $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-5}{x^2-7x+12}=\infty$ (мы воспользовались теоремой 14,4 пункт (*б*.).

Задача 14, 14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x^1-3x+2}.$$

Ответ. ∞

Задача 14,15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^n-1}{x}.$$

Ответ. n.

Задача 14, 22 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right).$$

Указание. Произвести вычитание дробей.

Ответ. ∞.

Задача 14, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

Ответ. -1.

Указание. После приведения к общему знаменателю окажется, что при $x \to -1$ числитель и знаменатель — функции бесконечно малые. Воспользоваться указанным на стр. 304 правилом.

ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений на нахождение предела функции.

Решим несколько задач на нахождение предела дробно-рациональной функции при $x \to \infty$.

Задача 15,1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}$.

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему о пределе дроби, надо, чтобы числитель и знаменатель дроби имели пределы и чтобы предел знаменателя не был равен нулю. В данном случае эта теорема неприменима, так как пределы числителя и знаменателя дроби не существуют. При $x \to \infty$ и числитель, и знаменатель дроби функции бесконечно большие (см. теоремы 14,4 о свойствах бесконечно больших функций. Рекомендуется еще раз повторить эти теоремы). Значит, мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших функций. Об этом отношении, так же как и об отношении двух бесконечно малых функций, ничего определенного без специального исследования сказать нельзя. Для решения задачи следует применить прием, знакомый из решения задачи 12,1 (полезно также возвратиться к задаче 12,8): дроби разделить на высшую степень x, встречающуюся в членах дроби, а после этого перейти к пределу.

Итак,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{3},$$

так как при $x\to\infty$ $\frac{1}{x}$ — величина бесконечно малая, а потому и $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ и $\frac{5}{x^3}$ — величины бесконечно малые (см. теоремы 14,4); $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x}\frac{1}{x}\frac{1}{x}$, а $\frac{5}{x^3}=5\frac{1}{x^3}$ и пределы этих величин равны нулю, когда $x\to\infty$.

После деления числителя и знаменателя на x^3 оказалось возможным применить теорему о пределе дроби, так как теперь и числитель, и знаменатель дроби имеют пределы, равные соответственно 2 и 3, и предел знаменателя не равен нулю.

Для самостоятельного решения предлагается несколько аналогичных задач.

Задача 15,2 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-7x^2+5x-4}{x^4+x^2+x+1};$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11};$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+2}{x^2-x+1};$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x}{2x^3+x-1};$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3-14}{5x^4+x^3+x^2+x-1}.$$

Ответ. 1) 5; 2) 0; 3) ∞; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{7}{5}$.

Задача 15.3 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right).$$

Указание. Произвести вычитание дробей.

Ответ. $\frac{1}{75}$.

Задача 15,4 (Для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3.$$

Ответ. $\frac{1}{8}$.

Задача 15,5 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-x}{x^2-3}-\frac{3x^3-4}{x^3-x}\right)^4.$$

Ответ. 16.

Решение остальных задач этого практического задания основано на применении теоремы:

При постоянном показателе степени можно переходить к пределу в основании степени при условии, что предел основания степени существует, т. е.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^k=[\lim_{x\to a}f(x)]^k; \qquad (15,1)$$

где k — постоянная величина (для случая, когда k — целое число, мы этой теоремой пользовались неоднократно, так как она прямо следует из теоремы о пределе произведения).

Из формулы (15,1) следует, что при любом нечетном m всегда

$$\lim_{x\to a}\sqrt[m]{f(x)}=\sqrt[m]{\lim_{x\to a} f(x)}. \qquad (15,2)$$

Если же m — четное число, то эта формула верна только тогда, когда функция $f(x)$ — неотрицательна, т. е. когда $f(x)\geqslant 0$.

Выполним сначала ряд простых упражнений на применение этой теоремы.

Задача 15,6. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 27}\sqrt[3]{x}$; $\lim\limits_{x\to -243}\sqrt[5]{x}$.

Решение. На основании формулы (15,2) имеем:

1) $\lim\limits_{x\to 27}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 27} x}=\sqrt[3]{27}=3$;

2) $\lim\limits_{x\to -243}\sqrt[5]{x}=\sqrt[5]{\lim\limits_{x\to -243} x}=\sqrt[5]{-243}=-3$.

Задача 15,7. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+7}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+7}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+7)}=\sqrt{2\cdot 2^2+7}=$
$=\sqrt{15}$.

Задача 15,8. Найти при нечетном m

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[m]{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[m]{x}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{\lim\limits_{x\to 0} x}=\sqrt[m]{0}=0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[m]{\dfrac{1}{x}}=\sqrt[m]{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}=\sqrt[m]{0}=0$,

т. е. при $x\to\infty$ функция $\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}$ бесконечно мала;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[m]{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}}=\infty$,

так как по результатам второго примера этой задачи при $x\to\infty$ функция $\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}$ бесконечно мала, потому функция $\sqrt[m]{x}$ — бесконечно велика.

Задача 15,9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Решение. Когда $x\to 0$, числитель и знаменатель имеют своим пределом нуль, а потому они бесконечно малы:

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1)=\sqrt{\lim_{x\to 0}(1+x)}-1=1-1=0.$$

Для того чтобы решить вопрос о пределе их отношения, перенесем иррациональность в знаменатель, умножив для этого числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{1+x}+1)$. Будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}+1}=\frac{1}{2}.$$

Так как $x\to 0$, не становясь равным нулю, то деление на x числителя и знаменателя дроби возможно.

При решении задачи мы вместо предела функции $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ отыскали предел функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$; здесь должен быть затронут вопрос о тождественности этих функций (подобно тому как этот вопрос возник при решении задачи 14,5). О функциях $\varphi(x)$ и $f(x)$ мы можем сказать, что они тождественны $(x\neq 0)$.

Таким образом, замена функции $f(x)$ при отыскании предела функцией $\varphi(x)$ является законной.

При отыскании предела дроби, содержащей иррациональные выражения, в большом числе случаев приходится с помощью преобразований переходить от заданной функции к другой функции, и у учащегося должен возникнуть вопрос о тождественности заданной функции и той, которая получается в результате преобразований. Во всех дальнейших примерах исследованием этого вопроса мы заниматься не будем, предоставляя это читателю.

Теперь, после решения этой задачи, укажем правило для решения задач, в которых требуется определить предел дроби, содержащей иррациональные выражения в случае, когда ее числитель и знаменатель — бесконечно малые функции, т. е. когда их пределы равны нулю.

Правило. **Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения в случае, когда предел и числителя, и знаменателя дроби равен нулю, надо перенести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и после этого сделать необходимые упрощения, (приведение подобных членов, сокращение и т. д.) и перейти к пределу.**

Задача 15, 10. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Решение. При $x\to 2$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю. Перенесем иррациональность в знаменатель, для чего умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x^2+5}+3$.

Получим

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{3+3}=\frac{2}{3}.$$

Задача 15,11 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{1}{2}$;

Задача 15,12. Найти $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$.

Р е ш е н и е. При $x\to3$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю. В этой задаче придется сначала числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}$, а потом на $\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}$ или сразу умножить числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+$ $+\sqrt{x+22})$. Используя это указание, получаем:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3x+7-2x-10)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(4x+13-x-22)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(3x-9)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{3(x-3)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\frac{5}{12}$$

Задача 15,13 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$; 2) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x^2-39}}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2-19}}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

Ответ. 1) $\frac{7}{12}$; 2) 0; 3) $\frac{23\sqrt{13}}{24}$; 4) $-\frac{3}{2}$.

Указание. В третьем примере одним из множителей числителя будет $3x^2-x-44$. Корни этого квадратного трехчлена $x_1=4$; $x_2=-\frac{11}{3}$, вследствие чего $3x^2-x-44=3(x-4)\left(x+\frac{11}{3}\right)$.

Задача 15,14. Найти $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$.

Решение. Здесь и предел числителя, и предел знаменателя равен нулю. Перенесем иррациональность из числителя в знаменатель. Воспользуемся известной формулой алгебры $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+b^3$. Положим $a=\sqrt[3]{x-6}$, $b=1$. Значит, для того, чтобы получить в числителе разность кубов, надо его умножить на $\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1$. Умножая и знаменатель на эту величину, получаем

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt[3]{x-6}-1)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-6-1}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}.$$

Задача 15,15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{3x+1}}{6x}.$$

Ответ. $-\frac{1}{9}$.

Задача 15,16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}.$$

Ответ. $-\frac{1}{6}$.

Задача 15,17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}.$$

Ответ. $\frac{21}{8}$.

Теперь мы рассмотрим задачи, в которых требуется определить предел функции, содержащей корни в том случае, когда аргумент стремится к ∞ или к $\pm\infty$.

Задача 15,18. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$.

Решение. Здесь непосредственно теорема 14,5 не может быть применена, так как при $x\to+\infty$ пределы слагаемых не существуют: мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин, о которой ничего определенного без специального исследования сказать нельзя.

Умножим и разделим данное выражение на сопряженное с ним и получим

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=0,$$

так как при $x\to+\infty$ знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, есть функция бесконечно большая (см. задачу 15,8(3)), а потому дробь $\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$ есть величина бесконечно малая, а ее произведение на -2 есть также бесконечно малая величина.

Задача 15,19. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. Когда $x\to+\infty$, выражение, стоящее в скобках, есть разность двух бесконечно больших величин, о которой без специального исследования нельзя сказать ничего определенного. Умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела, на выражение, сопряженное с $\sqrt{x^2+1}-x$, т. е. на $\sqrt{x^2+1}+x$, и получим

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $x\to-\infty$. Выражение, стоящее в скобках, имеет в этом случае положительное значение и неограниченно возрастает по абсолютной величине, множитель же x, стоящий за скобкой, неограниченно возрастает по абсолютной величине, но сохраняет отрицательное значение. Поэтому все выражение

$x(\sqrt{x^2+1}-x)$ при $x \to -\infty$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, сохраняя отрицательное значение и

$$\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = -\infty.$$

Задача 15,20 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}).$$

Ответ. При $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ искомый предел равен 0.

Задача 15,21. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$.

Решение. 1) Рассмотрим сначала случай $x \to +\infty$:

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Так как $x > 0$ при $x \to +\infty$, а мы рассматриваем арифметическое значение корня, то $\sqrt{x^2} = +x$ и $\sqrt{x^2+4} = +x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$,

а потому $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = 1.$

2) Пусть $x \to -\infty$. По-прежнему $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$, но теперь $\sqrt{x^2} = -x$, так как $x < 0$, а мы рассматриваем арифметическое значение корня, и $\sqrt{x^2+4} = -x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$, а

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = -1.$$

Задача 15,22 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}).$$

Указание. Учесть, что при $x > 0$ имеем $\sqrt{x^2} = x$, а при $x < 0$ тот же $\sqrt{x^2} = -x$.

Ответ. При $x \to +\infty$ искомый предел равен $+1$, а при $x \to -\infty$ искомый предел равен -1.

Задача 15,23 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+2}-x).$$

Ответ. 0 при $x \to +\infty$; $+\infty$ при $x \to -\infty$.

Задача 15,24 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}$, чтобы получить в числителе разность кубов. После упрощений под знаком предела будет находиться выражение

$$\frac{4x}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}.$$

Знаменатель дроби представить в виде

$$x^{\frac{4}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\right]$$

и сократить дробь на x.

Ответ. 0.

Задача 15,25 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^{\frac{4}{3}}-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $x^{\frac{8}{3}}+x^{\frac{4}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x^2-1)^{\frac{4}{3}}$ и полученную дробь сократить на x^2.

Ответ. 0.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение пределов тригонометрических функций и упражнения на использование предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При определении предела тригонометрической функции можно независимую переменную заменить ее предельным значением, если оно принадлежит области существования функции:

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a;\qquad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a;\qquad \lim_{x\to a}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}a;$$
$$\lim_{x\to a}\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}a;\qquad \lim_{x\to a}\sec x=\sec a;\qquad \lim_{x\to a}\operatorname{cosec}x=\operatorname{cosec}a.$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$.

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x$ — не существует, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ нельзя приписать никакого числового значения.

Задача 16,1. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

Решение. На основании приведенного выше правила для отыскания предела тригонометрических функций $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1$, а потому, когда $x\to\frac{\pi}{2}$, $1-\sin x\to 0$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos^2 x=\cos^2\frac{\pi}{2}=0$ и мы имеем дело с отношением двух бесконечно малых функций. Требуется, как уже хорошо известно читателю, специальное исследование, чтобы решить вопрос о пределе. Зная, что $\cos^2 x=1-\sin^2 x=(1-\sin x)(1+\sin x)$, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}=$$

$$=\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x}=\frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Задача 16,2 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos y-\sin y}{1-\operatorname{tg}^2 y}.$$

Ответ. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 16,3 (для самостоятельного решения). Найти:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}.$$

Указание. Под знаком предела находится при $x\to\frac{\pi}{6}$ отношение двух бесконечно малых функций. Следует числитель разложить на множители:

$$1-4\sin^2 x=4\left(\frac{1}{4}-\sin^2 x\right)=4\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\left(\frac{1}{2}+\sin x\right).$$

Знаменатель дроби

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right) =$$
$$= 4\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Если под знаком предела имеется сумма или разность тригонометрических функций, часто бывает полезным преобразовать их в произведение по известным формулам тригонометрии.

Учесть, что $\frac{1}{2} = \sin 30°$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$.

Ответ. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 16,4. Найти $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin\alpha}}$.

Решение. При $x\to\alpha$ и числитель, и знаменатель дроби — функции бесконечно малые:

$$\lim_{x\to\alpha}(\sqrt{\operatorname{tg} x}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}) = \lim_{x\to\alpha}\sqrt{\operatorname{tg} x} - \lim_{x\to\alpha}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\lim_{x\to\alpha}\operatorname{tg} x} -$$
$$-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}\lim_{x\to\alpha} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = 0\,*.$$

Аналогичные рассуждения провести и по отношению к знаменателю. Имеем

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin\alpha}} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{(\sqrt{\operatorname{tg} x}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2\alpha})}{(\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2\alpha})} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{(\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\alpha)(\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\sin x\cdot\sin\alpha}+\sqrt[3]{\sin^2\alpha})}{(\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sin x-\sin\alpha)} =$$
$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}+\sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin x}+\sqrt[3]{\sin^2\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg} x}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x\cos\alpha\, 2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}} =$$

---

* $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. Если не сделать этой оговорки, то, например, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ будет $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не имеет числового смысла.

$$= \frac{3\sqrt[3]{\sin^2 \alpha}}{2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha}} \lim_{x \to \alpha} \frac{2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \quad \cos \frac{x-\alpha}{2}}{\cos x \cos \alpha \, 2 \cos \frac{x+\alpha}{2} \sin \frac{x-\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 \alpha}}{2\sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \quad \cos^3 \alpha}.$$

Задача 16,5 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\sin \alpha}}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin \alpha}}.$$

Ответ. $\frac{2}{3} \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \alpha}} \frac{1}{\cos^3 \alpha}$.

При решении остальных задач этого практического занятия, следует иметь в виду, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{16,1}$$

Задача 16,6. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}$, ($k$ — величина постоянная).

Решение. Иногда при отыскании предела полезно произвести замену переменной с тем, чтобы упростить отыскание предела и использовать уже известные пределы.

Если под знаком предела делается замена переменной, то все величины, входящие под знак предела должны быть выражены через эту новую переменную, и из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

Для решения предложенной задачи сделаем такую подстановку: $kx = y$. Из этого равенства следует, что $y \to 0$, когда $x \to 0$, а $x = \frac{y}{k}$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{k}} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{k \sin y}{y} = k \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = k$,

так как $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

Следует запомнить, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \tag{16,2}$$

Задача 16,7. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{\sin lx}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{\sin lx} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin kx}{x}}{\frac{\sin lx}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin lx}{x}} = \frac{k}{l}$.

Мы разделили числитель и знаменатель дроби на x. Это можно было сделать, так как значение $x = 0$ не должно рассматриваться. При вычислении предела числителя и знаменателя последней дроби использована формула (16,2).

Задача 16,8 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

Ответ. $\frac{5}{6}$.

Задача 16,9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\cos kx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=$

$$=k\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos kx}=k\frac{1}{\cos(\lim\limits_{x\to 0}kx)}=k\frac{1}{\cos 0}=k\frac{1}{1}=k.$$

Задача 16,10 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg} lx}$.

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на x и перейти к пределу. Использовать решение предыдущей задачи.

Ответ. $\frac{k}{l}$.

Задача 16,11 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}$.

Указание. Дробь, стоящую под знаком предела, записать так:

$$\frac{\sin^2\alpha x}{x^2}=\frac{\sin\alpha x}{x}\frac{\sin\alpha x}{x}.$$

Использовать теорему о пределе произведения *.

Ответ. α^2.

Задача 16,12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}$.

Решение. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби — бесконечно малые функции. Воспользуемся тем, что $1-\cos mx=$ $=2\sin^2\frac{mx}{2}$ и тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}=2\frac{m}{2}\frac{m}{2}=\frac{m^2}{2}$$

(мы использовали формулу (16,2). В нашем случае $k=\frac{m}{2}$).

Задача 16,13. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)$.

Решение. При $x\to\frac{\pi}{2}$ функции $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ — бесконечно большие функции; таким образом, под знаком предела находится

---

* Можно поступить и так: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2=\alpha^2$

разность двух бесконечно больших функций. Теорему (14,5а) о пределе разности применить нельзя, так как не существует конечных пределов каждой из функций $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Преобразуем эту разность так:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)} =$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\cos x}{1+\sin x}.$$

После этого получаем

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} = 0.$$

К последней дроби можно было применить теорему о пределе дроби, так как предел знаменателя равен 2, а числитель дроби имеет конечный предел 0.

Задача 16, 14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos kx - \cos lx}{x^2}.$$

Указание. Числитель дроби равен $-2\sin\frac{k+l}{2}x \cdot \sin\frac{k-l}{2}x$; использовать также формулу. (16,2).

Ответ. $\frac{l^2-k^2}{2}$.

Задача 16, 15 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} x$.

Указание. При $x \to 0$ функция $\operatorname{ctg} x$ — бесконечно большая, а x — величина бесконечно малая. Значит, мы имеем произведение функции бесконечно большой на величину бесконечно малую и требуется специальное исследование, чтобы определить предел этого произведения.

Учесть, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, а поэтому $x \operatorname{ctg} x = x\frac{\cos x}{\sin x}$. На основании формулы (16, 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Ответ 1.

Задача 16, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}.$$

Указание. $\sin(a+x) - \sin(a-x) = 2\cos a \sin x$.

Ответ. $2\cos a$.

Задача 16, 17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}.$$

Указание. Представить числитель в виде

$$2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right),$$

а знаменатель

$$1-2\cos x = 2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right) =$$

$$= -4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right).$$

Сократить дробь и перейти к пределу

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 16, 18. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. При $x\to 1$ не существует предела $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$, а потому нельзя применить теорему (14, 5 *в*) о пределе произведения. Сделаем в нашем примере подстановку: $1-x=y$. Когда $x\to 1$, то новая переменная $y\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$. Если $1-x=y$, то $x=1-y$; выражение, стоящее под знаком предела, перепишется так:

$$(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y) = y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right) = y\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y =$$

$$= y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y} = \frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cos\frac{\pi}{2}y,$$

поэтому

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi}{2}y =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}\right)} = \frac{2}{\pi}.$$

Задача 16, 19 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}.$$

Указание. 1) $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Преобразовать дробь к виду

$$\frac{\lg x-\sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 16, 20 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos x}; \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

Указания. 1) В первом примере умножить числитель и знаменатель дроби на $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$, сократить дробь и перейти к пределу. 2) Во втором примере перенести иррациональность в знаменатель, сократить дробь на $\sin x$ и перейти к пределу.

Ответ. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1.

Задача 16,21 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 5x}{2x + \sin 3x}; \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x}; \qquad 3)\ \lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}.$$

Ответ. 1) $-\frac{4}{5}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$.

Указание. В первом примере числитель и знаменатель дроби разделить на x, во втором положить $\arcsin x = z$, в третьем примере $1 + \cos \pi x = 2\cos^2\frac{\pi x}{2}$; $\operatorname{tg} \pi x = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x}$.

СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Число e.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с числом e.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \tag{17,1}$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e; \tag{17,2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k; \tag{17,3}$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + kx)^{\frac{1}{x}} = e^k. \tag{17,4}$$

Нам придется также пользоваться теоремой о переходе к пределу в показателе степени при постоянном основании. Эта теорема формулируется так:

Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, то при постоянном b имеет место формула

$$\lim_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x \to a} f(x)} \qquad (17,5)$$

Короче (но менее точно): *при постоянном основании можно переходить к пределу в показателе степени.*

При отыскании пределов вида $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ в случае, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$, имеет место формула

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{x \to a} f(x)]^{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}. \qquad (17,6)$$

Замечание. В формуле (17,6) a может обозначить и число, и один из символов ∞, $+\infty$ и $-\infty$.

Если в этой формуле $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \pm\infty$, а $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ конечен, но не равен 1, то вопрос о пределе $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ затруднений не вызывает (см. например, задачу 17,10). Случай, когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \pm\infty$, рассмотрен в задачах 17,13—17,25, а соответствующие указания даны на стр. 326.

Сначала мы выполним упражнения, связанные с применением формулы (17,5).

Задача 17, 1. Найти $\lim\limits_{x \to 2} 4^{\frac{2x}{x+1}}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 2} 4^{\frac{2x}{x+1}} = 4^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x}{x+1}} = 4^{\frac{2 \cdot 2}{2+1}} = 4^{\frac{4}{3}} = 4\sqrt[3]{4}.$

Задача 17,2. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\frac{3x}{x+2}}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\frac{3x}{x+2}} = 2^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x}{x+2}} = 2^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3}{1+\frac{2}{x}}} = 2^3 = 8.$

Задача 17,3 Найти $\lim\limits_{x \to 2} a^{\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}}$ $(a > 0)$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 2} a^{\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}} = a^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}} = a^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{2+x-4}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}} =$

$= a^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{2+x}+2}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}.$

Задача 17,4 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2^{\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}}.$$

Указание. Ввести замену переменной: положить $\frac{\pi}{2}-x=z$. При $x\to\frac{\pi}{2}$ переменная $z\to 0$. Перейти к пределу в показателе степени.

Ответ. 2.

Задача 17,5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

Решение. Полагая в формуле (17,3) $k=-1$, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Задача 17,6 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{k}{x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^x$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$.

Ответ. На основании формулы (17,3) получаем:

1) e^{-k}; 2) $e^{\frac{2}{3}}$;

на основании формулы (17,4):

3) e^2; 4) $e^{\frac{1}{3}}$.

Задача 17.7 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Ответ. e^x (здесь n — величина переменная, а x — постоянная).

Задача 17,8 Найти 1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5\,\mathrm{tg}^2 x)^{3\,\mathrm{ctg}^2 x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin x)^{3\,\mathrm{cosec}\,x}$.

Решение. 1) Для того чтобы решение первого примера свести к известной формуле (17,4), сделаем замену переменной, положив $\mathrm{tg}^2 x=z$.

Теперь следует и $\mathrm{ctg}^2 x$, стоящий в показателе степени, выразить через z. Так как $\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$, то $\mathrm{ctg}^2 x=\frac{1}{z}$. Таким образом, и $\mathrm{ctg}^2 x$ выражен через новую переменную. Осталось решить вопрос о пределе новой переменной, когда старая переменная x стремится к нулю. Из равенства $\mathrm{tg}^2 x=z$ следует, что $\lim\limits_{x\to 0} z=$

$= \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}^2 x = 0$, а потому новая переменная $z \to 0$, когда $x \to 0$. Записи расположатся так:

$$\lim_{x\to 0}(1+5\operatorname{tg}^2 x)^{3\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{z\to 0}(1+5z)^{3\frac{1}{z}} = \underbrace{[\lim_{z\to 0}(1+5z)^{\frac{1}{z}}]}_{\text{применить формулу (17,4).}}{}^3 = (e^5)^3 = e^{15}.$$

2) При решении второго примера сделать подстановку $\sin x = z$. Из этого равенства следует, что новая переменная $z \to 0$, когда $x \to 0$.

Ответ. e^6.

Теперь выполним ряд упражнений, связанных с использованием формулы (17,6).

Задача 17,9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}$.

Решение. На основании формулы (17,6)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}}; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = 0; \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = 1;$$

поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 0^1 = 0.$$

Задача 17,10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^x.$$

Ответ. 0 $\left(\text{воспользоваться формулой (17,6); } \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}\right)$.

Задача 17,11 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{\frac{2x-1}{x+2}}.$$

Ответ. $\frac{4}{25}$ (предел основания степени равен $\frac{2}{5}$, а предел показателя степени равен 2).

Задача 17,12 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{3x^2+2x+7}\right)^{\frac{2x^2+5}{x^2-1}}.$$

Ответ. $\frac{1}{9}$ (воспользоваться формулой (17,6)).

В формуле (17,6) мы исключили из рассмотрения случай, когда $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty$, а $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ (см. замечание к этой формуле).

Теперь выполним несколько упражнений, связанных с отысканием $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ в случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty$.

В этом случае формула (17,6) неприменима, так как выражение 1^{∞} не имеет смысла («неопределенность» вида 1^{∞}). Существует общий прием для отыскания предела в этом случае. Прием этот состоит в следующем: функцию $f(x)$ представляют в виде $f(x) = 1 + [f(x) - 1]$. Показатель степени $\varphi(x)$ запишем в виде:

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)-1}[f(x) - 1]\,\varphi(x),$$

и тогда

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}[1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]\varphi(x)} =$$

$$= \left\{\lim_{x\to a}[1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)}. \qquad (17,7)$$

Сделаем подстановку: $f(x) - 1 = z$. Так как по предположению при $x \to a$ $f(x) \to 1$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - 1] = 0$, т. е. $z \to 0$, когда $x \to a$. На основании предыдущего равенства

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{z\to 0}(1 + z)^{\frac{1}{z}}]^{\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-1]\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)}.$$

Следует иметь в виду, что a может быть и числом и одним из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Теперь все дело сведется к вычислению $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - 1]\,\varphi(x)$.

Это общее указание использовано при решении задач 17,20—17,25.

Этим же указанием можно воспользоваться и при решении задач 17,13—17,19. Однако в этих задачах использование общего приема приведет к ненужным осложнениям и мы их решим проще.

Задача 17,13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение. Здесь основание степени $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \to 1$, когда $x \to \infty$, а показатель степени $x \to \infty$. Здесь, таким образом, имеет место рассматриваемый случай «неопределенности» вида 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2.$$

Покажем, что применение общего приема, указанного выше, приведет к более сложным выкладкам.

У нас

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1};\ 1+[f(x)-1]=1+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)=$$

$$=1+\frac{x+1-x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}.$$

Таким образом,

$$f(x)-1=\frac{2}{x-1},$$

а потому показатель степени должен быть представлен на основании формулы (17,7) так:

$$x=\frac{x-1}{2}\,\frac{2}{x-1}\,x,$$

и теперь

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x-1}x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2.$$

Теперь ясно, что общий прием оказался сложнее.

Задача 17,14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^x.$$

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на $2x$, применить теорему о пределе дроби и формулу (17,3). В числителе в этой формуле $k=-\frac{1}{2}$, в знаменателе $k=2$.

Ответ. $\frac{1}{e^2\sqrt{e}}$.

Задача 17,15. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на x, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+4}}{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^4}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^4}=$$

$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x\right]^2\cdot 1}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x\right]^2\cdot 1}=\frac{(e^7)^2}{(e^5)^2}=\frac{e^{14}}{e^{10}}=e^4,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^4=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^4=1$.

Можно было бы сразу записать

$$\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4} = \left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x} \left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{4}$$

и, учитывая, что предел второго сомножителя

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{4} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{x+5}\right)^{4} = 1^4 = 1,$$

отыскивать только предел первого множителя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+5}\right)^{2x}$, что упростило бы записи.

Задача 17,16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}.$$

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на $3x$ и перейти к пределу. Для упрощения записей полезно представить выражение, стоящее под знаком предела, в виде

$$\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3} = \left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x} \left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{3}$$

и учесть, что предел второго сомножителя равен 1.

Ответ. $e^{-\frac{1}{3}}$.

Задача 17,17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}.$$

Указание. $\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2} = \left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x} \left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{2}$.

Учесть, что предел второго сомножителя равен 1, а для определения предела первого сомножителя числитель и знаменатель дроби нужно разделить на $4x$ и перейти к пределу в числителе и знаменателе дроби: $\dfrac{\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{3x}}{\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{3x}}$.

Ответ. e^{-3}.

Задача 17,18. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x+3}$.

Указание. $\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x+3} = \left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x} \left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{3}$.

Предел второго сомножителя равен 1, а при определении предела первого сомножителя нужно числитель и знаменатель дроби разделить на $3x$.

Ответ. $e^{-\frac{2}{3}}$.

Задача 17,19 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x+3}.$$

Ответ. e^2.

Задача 17,20. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x$.

Решение. Воспользуемся указаниями стр. 326. Здесь

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+3},$$

а

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}=1;$$

$$\varphi(x)=x,\ \text{а}\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$

Перепишем наш пример так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^x.$$

У нас $f(x)-1=\frac{2x-1}{x^2+3}$, а потому $\frac{1}{f(x)-1}=\frac{x^2+3}{2x-1}$; на основании формулы (17,7) показатель степени $x=\frac{x^2+3}{2x-1}\,\frac{2x-1}{x^2+3}x$, а потому

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}\,\frac{2x-1}{x^2+3}\,x}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}\,x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}\,x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}}=e^2,$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}=e,\ \text{а}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}=2$$

(если $\frac{2x-1}{x^2+3}=z$, то $\frac{x^2+3}{2x-1}=\frac{1}{z}$, $z\to 0$, когда $x\to\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e).$$

Задача 17,21 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1}\right)^{3x-1}.$$

Указание (см. указание на стр. 326).

$$f(x)=\frac{x^3+2x+2}{x^2+x+1};\quad f(x)-1=\frac{x+1}{x^2+x+1};$$

показатель степени

$$\varphi(x)=3x-1=\frac{x^2+x+1}{x+1}\,\frac{x+1}{x^2+x+1}(3x-1)$$

(см. пояснения к предыдущей задаче).

Ответ. e^3.

Задача 17,22. Найти $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

Решение. Предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{\sin a}=1$, а показатель степени $\dfrac{1}{x-a}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, когда $x\to a$. Решение примера проведем на основании указаний стр. 326. У нас

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sin a};\quad f(x)-1=\frac{\sin x}{\sin a}-1=\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}=\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}.$$

На основании формулы (17,7) показатель степени запишем в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{x-a}=\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\,\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a},$$

и тогда

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left[1+\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)\right]^{\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\,\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to a}\left(1+\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a}}=e^{\operatorname{ctg} a},$$

та как $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}}=e;$

$$\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}=$$

$$=\frac{2}{\sin a}\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\frac{2}{\sin a}\cdot\cos a\cdot\frac{1}{2}=\operatorname{ctg} a.$$

Объяснение: 1) постоянная величина $\frac{2}{\sin a}$ вынесена за знак предела;

2) $\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos\frac{a+a}{2}=\cos a.$

3) Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$ применена подстановка $x-a=z$ и $z\to 0$, когда $x\to a$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{z}{2}}{z}=\frac{1}{2}$$

на основании формулы (16,2).

Задача 17,23. Найти $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m.$

Решение. Здесь опять-таки следует использовать указания стр. 326, так как $f(m)=\cos\frac{x}{m}$, причем x следует рассматривать как величину постоянную. Предел

$$\lim_{m\to\infty}f(m)=\lim_{m\to\infty}\cos\frac{x}{m}=1,$$

а показатель степени m неограниченно возрастает по абсолютной величине. Составим

$$f(m)-1=\cos\frac{x}{m}-1=-2\sin^2\frac{x}{2m}.$$

Показатель степени преобразуем по формуле (17,7):

$$\varphi(m)=m=\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2m}}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m,$$

и тогда

$$\lim_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)\right]^m=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[1-2\sin^2\frac{x}{2m}\right]^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2m}}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m}=$$

$$=\left\{\lim_{m\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2m}}}\right\}^{\lim\limits_{m\to\infty}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m}=e^{-2\lim\limits_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}}=1,$$

так как $\lim\limits_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}=\lim\limits_{m\to\infty}\sin\frac{x}{2m}\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$.

Если $m\to\infty$, то $\frac{x}{2m}\to 0$ и $\sin\frac{x}{2m}\to 0$.

Для вычисления второго предела $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$ сделаем подстановку $\frac{x}{2m}=z$, тогда $z\to 0$, когда $m\to\infty$, а $\frac{1}{m}=\frac{2z}{x}$, и получим, учитывая, что x — величина постоянная

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\frac{2z}{x}}=\frac{x}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=\frac{x}{2}\cdot 1=\frac{x}{2}$$

и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}=0\cdot\frac{x}{2}=0, \text{ а } e^0=1.$$

Задача 17,24 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Ответ. e^{-1}.

Задача 17,25 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Ответ. $e^{-\frac{1}{2}}$.

ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление пределов выражений, содержащих логарифмы и показательные функции.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Теорема. *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ *и этот предел положителен* ($A>0$), *то*

$$\lim_{x\to a}[\log_b f(x)]=\log_b[\lim_{x\to a}(f(x)] \qquad (18,1)$$

Короче (но менее точно): можно переходить к пределу под знаком логарифма.

Замечание. Требование теоремы о том, что $\lim_{x\to a} f(x) = A$ должен быть положительным, связано с тем, что число A в правой части формулы (18,1) стоит под знаком логарифма, а логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента.

Между десятичными и натуральными логарифмами существует связь, выражаемая формулой

$$\lg x = M \ln x, \tag{18,2}$$

где M — модуль перехода: $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}43\,429.$

Сначала выполним упражнения на непосредственное применение формулы (18,1).

Задача 18,1. Найти $\lim_{x\to 9} \lg(x+1)$.

Решение. На основании формулы (18,1)

$$\lim_{x\to 9}\left[\lg(x+1)\right] = \lg\left[\lim_{x\to 9}(x+1)\right] = \lg 10 = 1.$$

Задача 18,2. Найти $\lim_{x\to\infty} \ln\frac{x^2+x+5}{x^2-2}$.

Решение. На основании формулы (18,1) можно записать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{x^2+x+5}{x^2-2}\right] = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+5}{x^2-2}\right] = \ln\underbrace{\left[\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}\right]}_{\text{числитель и знаменатель разделены на } x^2} =$$

$$= \ln 1 = 0.$$

Задача 18,3. Найти $\lim_{x\to 4}\left[\ln\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right]$.

Решение. Воспользуемся опять формулой (18,1):

$$\lim_{x\to 4}\left[\ln\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{8})(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}{x+4-8}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})\right] =$$

$$= \ln 2\sqrt{8} = \ln 4\sqrt{2}.$$

Перейдем теперь к вычислению пределов, которые играют важную роль в дифференциальном исчислении.

Задача 18,4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=$

$=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$

Результатом этой задачи нам придется часто пользоваться, а потому для ссылок запишем его отдельно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \tag{18,3}$$

Получите самостоятельно более общий результат:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha. \tag{18,3a}$$

Задача 18,5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, считая, что a — положительная постоянная величина, не равная 1.

Решение. Сделаем подстановку:

$$a^x-1=z. \tag{18,4}$$

На основании указания стр. 319 мы должны: 1) величину x, стоящую под знаком предела, выразить через z и 2) определить предел новой переменной z, когда старая переменная $x\to 0$.

Из подстановки (18,4) следует, что $a^x=1+z$, $x\ln a=\ln(1+z)$; $x=\frac{\ln(1+z)}{\ln a}$, а $\lim\limits_{x\to 0}z=\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0$, т. е. при $x\to 0$ и $z\to 0$.

Теперь уже $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{z}{\frac{\ln(1+z)}{\ln a}}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+z)}{z}}=\frac{\ln a}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}}=$

$=\ln a$, так как на основании (18,3) предел знаменателя равен 1, а предел $\lim\limits_{x\to 0}\ln a=\ln a$, ибо a, а вместе с ним $\ln a$ — величина постоянная. Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{18,5}$$

Если в формуле (18,5) взять $x=\frac{1}{y}$, то $a^x=a^{\frac{1}{y}}$; $y=\frac{1}{x}$ и

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty, \text{ и тогда } \lim_{y\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{y}}-1}{\frac{1}{y}}=\ln a, \text{ т. е.}$$

$$\lim_{y\to\infty}y\left(a^{\frac{1}{y}}-1\right)=\ln a. \tag{18,6}$$

Если $y \to \infty$, принимая целые и положительные значения, то это равенство можно переписать так:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a. \qquad (18,7)$$

Задача 18,6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$.

Решение. Решение этой задачи потребует некоторых искусственных преобразований для того, чтобы можно было использовать результаты двух предыдущих задач. Выражение, стоящее под знаком предела, умножим и разделим на x:

$$\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1} = \frac{\ln(1+x)}{x}\,\frac{x}{3^{2x}-1} = \frac{\ln(1+x)}{x}\,\frac{1}{\frac{9^x-1}{x}}, \text{ так как } 3^{2x} = 9^x.$$

и теперь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\substack{\text{Использовать}\\ \text{формулу (18,3)}}}\underbrace{\frac{1}{\frac{9^x-1}{x}}}_{\substack{\text{Использовать}\\ \text{формулу (18,5)}}} = \frac{1}{\ln 9}.$$

Задача 18,7 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{x}$.

Указание. $\dfrac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{x} = \dfrac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{\operatorname{tg} x}\,\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. При отыскании предела первого множителя положить $\operatorname{tg} x = z$ и воспользоваться результатом задачи 18,5.

Ответ. $\ln 3$.

Задача 18,8 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}(1+5\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Указание. Сделать подстановку $5\ln x = z$ и воспользоваться формулой (17,2).

Ответ. e^5.

Задача 18,9. (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}.$$

Указание. В числителе дроби отнять и прибавить 1, записать дробь в виде

$$\frac{a^x-1-b^x+1}{x} = \frac{a^x-1-(b^x-1)}{x} = \frac{a^x-1}{x} - \frac{b^x-1}{x}$$

и воспользоваться формулой (18,5).

Ответ. $\ln\dfrac{a}{b}$.

Задача 18,10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}.$$

Ответ. $\alpha-\beta$.

Задача 18,11. Доказать, что если

$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)]=A, \quad \text{то} \quad \lim_{x\to a} f(x)=e^A.$$

Доказательство. На основании того, что мы имеем право переходить к пределу под знаком логарифма, можно вместо $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)]$ записать $\ln[\lim\limits_{x\to a} f(x)]=A$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=e^A$.

Итак, если $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)]=A$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)=e^A. \tag{18,8}$$

Задача 18,12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение. Сделаем подстановку $(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}=y$, откуда

$$\ln y=\frac{3}{x}\ln(1+\operatorname{tg} x) \text{ и } \lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\ln(1+\operatorname{tg} x)=$$

$$=3\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}}_{\mathrm{I}}\underbrace{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}_{\mathrm{II}}.$$

При вычислении первого предела положить $\operatorname{tg} x=z$, использовать результат задачи 18,4; получится, что $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)=3\cdot 1\cdot 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)=3$, и на основании (18,8) $\lim\limits_{x\to 0} y=e^3$, а значит, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}=e^3$.*

Задача 18,13 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{5}{x}}.$$

Ответ. e^5.

---

* Задачу можно решить и иначе: $(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}=(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{3\operatorname{tg} x}{x}}=$
$=\left[(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\right]^{\frac{3\operatorname{tg} x}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg} x}{x}}=e^3$ (при вычислении предела в квадратной скобке положить $\operatorname{tg} x=z$, а $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$).

Задача 18,14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}.$$

Указание. В числителе дроби заменить 1 на $\ln e$. Тогда выражение, стоящее под знаком предела, запишется так:

$$\frac{\ln x-1}{x-e}=\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}},$$

и теперь

$$\lim_{x\to e}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim_{x\to e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}=\ln\lim_{x\to e}\left[1+\frac{x}{e}-1\right]^{\frac{1}{x-e}}=$$

$$=\ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{e}}=\ln\left[\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}}\right]^{\frac{1}{e}}=\ln e^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}.$$

Ответ. $\frac{1}{e}$.

ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Сравнение бесконечно малых величин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — *бесконечные малые функции при* $x\to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, причем a может быть как числом, так и одним из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞. Тогда имеют место приводимые ниже определения.

Определение 1. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией* $\varphi(x)$, *а функция* $\varphi(x)$ *называется бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с функцией* $f(x)$.

Определение 2. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с* $\varphi(x)$, *а* $\varphi(x)$ *называется бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией* $f(x)$.

Определение 3. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$ и $A\neq 0$, *то бесконечно малые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *называются бесконечно малыми одного и того же порядка.*

Определение 4. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$, *то бесконечно малые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *называются эквивалентными, или равносильными. В этом случае пишут:* $f(x)\sim\varphi(x)$.

Определение 5. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^k}=A$ *и* $A\neq 0$, *то бесконечно малая функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой* k*-го порядка малости, по сравнению с бесконечно малой функцией* $\varphi(x)$ (из этих определений вовсе не следует, что отношение двух бесконечно малых функций всегда имеет конечный или бесконечный предел. Может оказаться, что отношение двух бесконечно малых функций не имеет ни конечного, ни бесконечного предела).

Теорема (о замене бесконечно малых функций им эквивалентными). *Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них или какую-либо одну заменить эквивалентными им.*

Задача 19,1. Доказать, что если $x\to 0$, то функция x^k, где $k>1$, — бесконечно малая высшего порядка, чем x.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^k}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{k-1}=0$, так как по условию $k-1>0$. Этим и доказано требуемое.

Задача 19,2. Доказать, что при $x\to 0$ функции $\sin x$ и $\operatorname{tg}x$ — эквивалентные бесконечно малые.

Решение. Если мы докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=1$, то тем самым будет доказано, что $\operatorname{tg}x\sim\sin x$ при $x\to 0$.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Задача 19,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что при $x\to 0$ 1) функции $\sin x\sim x$; 2) $\ln(1+x)\sim x$; 3) $e^x-1\sim x$; 4) $\sin kx\sim kx$; 5) $\ln(1+kx)\sim kx$.

Указание. Рассмотреть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$;* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}$ и убедиться, что каждый из этих пределов равен 1. Полезно запомнить, что $\ln(1+kx)\sim kx$, $\sin kx\sim kx$ при $x\to 0$.

Задача 19,4. Доказать, что при $x\to 0$ функции $\sin kx$ и $l\cdot x\ (k\neq 0,\ l\neq 0)$ — бесконечно малые одного и того же порядка.

Доказательство. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{lx}$ и убедимся, что он равен постоянной величине, отличной от нуля (см. определение 3). Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{lx}=\frac{k}{l}\neq 0$.

---

*См. Задачу 18,4.

В частности, например, $\sin 2x$ и $3x$ при $x \to 0$ будут бесконечно малыми одного и того же порядка.

Задача 19,5. Показать, что если x — бесконечно малая первого порядка, то $1-\cos x$ — бесконечно малая второго порядка, по сравнению с x.

Решение. Чтобы показать требуемое, надо на основании определения 5 показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ есть величина постоянная, не равная нулю. Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Замечание. При решении следующих задач полезно знать, что если $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a}x^0=1$, так как переменная величина, стремясь к a, возводится в степень, равную нулю, а потому сохраняет постоянное значение, равное 1. Предел ее поэтому равен 1.

Задача 19,6. Считая, что x бесконечно малая первого порядка, определить порядок малости функции $\sin x-\operatorname{tg}x$.

Решение. Отличие этой задачи от предыдущей состоит в том, что в предыдущей задаче порядок малости функции $1-\cos x$ задавался, и требовалось только подтвердить это расчетом. В этой задаче порядок малости функции $\sin x-\operatorname{tg}x$, не задан, а подлежит определению. Будем считать, что порядок малости этой функции равен k и найдем k такое, чтобы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^k}$ имел конечное значение, отличное от нуля (см. определение 5 на стр. 339):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{\sin x}{\cos x}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x-\sin x}{x^k\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x-\sin x}{x^k}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^k}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,2\sin^2\frac{x}{2}}{x^k}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^{k-1}}=$$

$$=-2\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\frac{1}{x^{k-3}}=-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}x^{3-k}=$$

$$=-2\left(\frac{1}{2}\right)^2\lim_{x\to 0}x^{3-k}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^{3-k}.$$

Теперь дело решает предел $\lim\limits_{x\to 0}x^{3-k}$. Если предположить, что $3-k>0$, то $\lim\limits_{x\to 0}x^{3-k}=0$. Если же $3-k<0$, то $\lim\limits_{x\to 0}x^{3-k}=\infty$.

Чтобы получить конечный и отличный от нуля $\lim\limits_{x\to 0} x^{3-k}$, надо отбросить предположения $3-k>0$ и $3-k<0$, так как в первом случае искомый предел равен нулю, а во втором — бесконечности. Только тогда, когда $3-k=0$, т. е. когда $k=3$, мы получим, на основании сделанного замечания (см. задачу 19,5), что $\lim\limits_{x\to 0} x^{3-k}=1$, а искомый предел равен $-\frac{1}{2}$, т. е. имеет конечное и отличное от нуля значение. Итак, $k=3$ и при $x\to 0$ функция $\sin x-\operatorname{tg} x$ — бесконечно малая третьего порядка малости, по сравнению с x.

Задача 19,7. Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок малости бесконечно малой функции

$$\ln(1+x^2+x^3).$$

Решение. Будем считать, что искомый порядок малости равен k и определим k так, чтобы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ имел конечное значение, отличное от нуля.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^2+x^3}\,\frac{x^2+x^3}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^2+x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^k}.$$

Первый предел равен 1 (подстановка: $x^2+x^3=z$ приводит к хорошо известному пределу: $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1$).

Отыщем теперь второй предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^k}=\lim_{x\to 0}(x^{2-k}+x^{3-k})=\lim_{x\to 0}x^{2-k}(1+x).$$

Последний предел имеет конечное значение только в том случае, когда $2-k=0$, т. е. $k=2$, так как если $k<2$, то этот предел равен нулю, а если $k>2$, то при $x\to 0$ x^{2-k} — величина бесконечно большая, при $k=2$ $\lim\limits_{x\to 0}x^{2-k}=1$.

Таким образом, если $k=2$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}=1\cdot 1\neq 0$.

Итак, при $x\to 0$ бесконечно малая функция $\ln(1+x^2+x^3)$ имеет второй порядок малости относительно бесконечно малой x.

Задача 19, 8 (для самостоятельного решения). Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок бесконечно малой функции

$$\ln(1+x+x^2).$$

Ответ. Первого порядка малости ($k=1$).

Задача 19,9. Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок малости бесконечно малой функции

$$\cos 3x - \cos x.$$

Решение. Определим число k так, чтобы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^k}$ имел конечное значение, не равное нулю. Учитывая, что $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \sin x$, искомый предел перепишем в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^k} = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x \sin x}{x^k} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{k-2}} = -2\cdot 2\cdot 1\cdot \lim_{x\to 0} x^{2-k}.$$

Если взять $k<2$, то $\lim\limits_{x\to 0} x^{2-k} = 0$, и тогда весь искомый предел будет равен нулю, а мы ищем такое значение k, при котором искомый предел был бы конечен, но не равен нулю.

Если взять $k>2$, то $\lim\limits_{x\to 0} x^{2-k} = \infty$, что также не годится, так как тогда искомый предел не конечен. И только тогда, когда $k=2 \lim\limits_{x\to 0} x^{2-k} = 1$, а искомый предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^k} = -4\cdot 1 = -4$, т. е. имеет конечное и не равное нулю значение.

Итак, $k=2$. При $x\to 0$ бесконечно малая функция $\cos 3x - \cos x$ имеет второй порядок малости, по сравнению с x — бесконечно малой первого порядка.

Задача 19,10 (для самостоятельного решения). Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок босконечно малой функции $\cos 2x - \cos x$.

Ответ. $k=2$.

Теперь выполним упражнения, связанные с использованием теоремы (стр. 339) о замене бесконечно малых функций им эквивалентными. Эта теорема во многих случаях значительно упрощает определение пределов.

Задача 19,11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$.

Решение. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби — функции бесконечно малые. Из задачи 19,3 нам известно, что при $x\to 0$ бесконечно малая функция $\ln(1+3x)\sim 3x$, $\sin 4x\sim 4x$, а потому, используя эту теорему, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

Задача 19,12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^4+x^2+x}$.

Решение. Так как при $x \to 0$ бесконечно малая функция $\sin 3x \sim 3x$, то заменяя $\sin 3x$ эквивалентной ей бесконечно малой $3x$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^4+x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^4+x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x(x^3+x+1)}=3.$$

Задача 19,13 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 339), найти $\lim\limits_{x\to n}\frac{\cos ax-\cos an}{n^2-x^2}$.

Ответ. $\frac{a\sin an}{2n}$.

Задача 19,14 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 339), найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sin kx}\right)^n$.

Ответ. $\frac{1}{k^n}$.

Задача 19,15 (для самостоятельного решения). Используя ту же теорему, доказать, что

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1-x)}=-1;\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\operatorname{cosec}x\cdot\ln(1+x)=1.$$

ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Непрерывность функции. Односторонние пределы. Точки разрыва и их классификация.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Если предел функции $f(x)$ при $x\to a$ существует и равен значению функции в точке $x=a$, то функция $f(x)$ называется непрерывной при $x=a$ или в точке a, т. е. для функции $f(x)$, непрерывной при $x=a$, должно выполняться равенство*

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a). \tag{20,1}$$

При этом следует иметь в виду, что для непрерывности функции при $x=a$ равенство (20,1) должно выполняться при стремлении x к a любому закону.

Для того чтобы согласно этому определению функция была непрерывной при $x=a$, требуется выполнение таких трех условий:

1. Точка a должна принадлежать области определения функции, так как иначе о значении функции $f(a)$ в этой точке не имеет смысла говорить. Функция $f(x)$ должна быть определена не только в самой точке a, но и в некоторой ее окрестности.

2. Функция $f(x)$ должна иметь конечный предел при $x \to a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

3. Этот предел A должен быть равен значению функции в точке $x = a$, т. е. должно выполняться равенство $f(a) = A$.

Если соотношение (20,1) не имеет места для данной функции $y = f(x)$ в данной точке $x = a$, то функция называется разрывной в точке $x = a$, а сама точка $x = a$ называется точкой разрыва функций $f(x)$.

Функция непрерывная в каждой точке некоторой области (интервала, отрезка) называется непрерывной в этой области (в интервале, на отрезке).

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если в этой точке ее приращение Δy стремится к нулю, когда приращение аргумента Δx стремится к нулю, или иначе: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. если*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{20,2}$$

Односторонние пределы функции

а) Левосторонний предел функции. *Если отыскивается предел функции $f(x)$ при условии, что x, стремясь к a, может принимать только такие значения, которые меньше a, то этот предел, если он существует, называется левосторонним пределом функции $f(x)$ (или левым пределом функции). Для того чтобы показать, что x стремится к a, оставаясь меньше a, употребляется запись: $x \to a - 0$, а левосторонний предел функции обозначается символами:*

$$1)\ \lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{или} \quad 2)\ f(a-0).$$

б) Правосторонний предел функции. *Если отыскивается предел функции $f(x)$ при условии, что x, стремясь к a, может принимать только такие значения, которые больше a, то этот предел, если он существует, называется правосторонним пределом функции $f(x)$ (или правым пределом функции).*

То что x, стремясь к a, остается больше a, обозначается так: $x \to a + 0$, правосторонний предел функции обозначается одним из символов:

$$1)\ \lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{или} \quad 2)\ f(a+0).$$

*Очевидно, что предел функции при $x \to a$ существует только тогда, когда существуют и равны между собой ее левосторонний и правосторонний пределы, т. е. когда $f(a-0) = f(a+0)$. Символы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ являются только сокращенным обозначением левостороннего и правостороннего пределов и ничего другого не обозначают. Их можно применять только в случаях, когда определяющие их пределы существуют.**

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется непрерывной при $x = a$, если ее левосторонний и правосторонний пределы существуют, между собой равны и равны значению функции в этой точке, т. е. $f(a)$.*

Таким образом, для непрерывности функции в точке $x = a$ требуется, чтобы выполнялись равенства

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a). \tag{20,3}$$

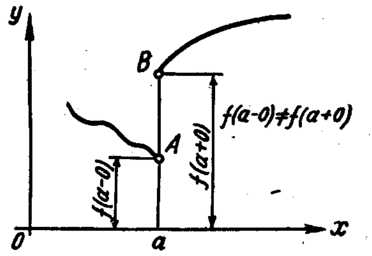
Точки разрыва и их классификация

Если равенство (20,3) в какой-либо его части не выполняется, то о точке $x = a$ говорят, что она является точкой разрыва.

1. Точка разрыва первого рода

Определение. *Если левосторонний предел функции $f(a-0)$ и ее правосторонний предел $f(a+0)$ существуют, но не равны между собой, т. е. если*

$$f(a-0) \neq f(a+0), \tag{20,4}$$



Фиг. 20,1.

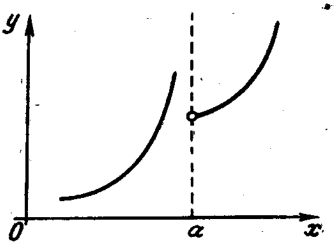
то точка a называется точкой разрыва первого рода (фиг. 20,1).

---

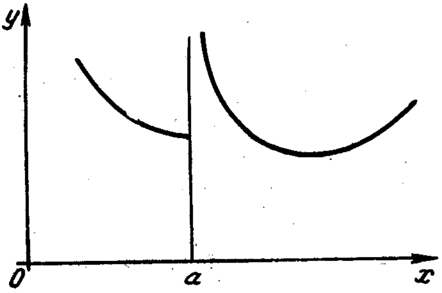
* Символ $x \to a$ означает, что x стремится к a, изменяясь по любому закону. Тем самым этот символ отличается от символов $x \to a-0$ и $x \to a+0$.

2. Точка разрыва второго рода

Определение. *Если в точке $x = a$ не существует левосторонний или правосторонний предел функции или оба одновременно, то эта точка называется точкой разрыва второго рода (фиг. 20,2; 20,3; 20,4). На фиг. 20,4 отсутствует левосторонний предел*

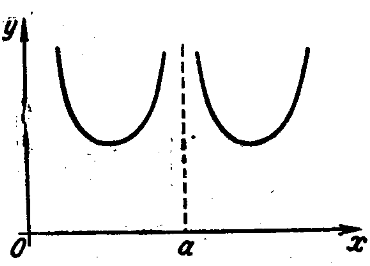


Фиг. 20,2.



Фиг. 20,3.

функции; на фиг. 20,3 нет правостороннего предела функции, а на фиг. 20,4 у функции нет ни левостороннего, ни правостороннего предела. Во всех этих случаях функция в точке $x = a$ терпит разрыв второго рода (иначе: точка $x = a$ — точка разрыва второго рода).



Фиг. 20,4.

3. Устранимый разрыв

Если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет левосторонний и правосторонний пределы и эти пределы между собой равны, но их значения не совпадают со значением функции в точке a, т. е. со значением $f(a)$, то точка $x = a$ называется точкой «устранимого» разрыва. Таким образом, в этом случае

$$f(a-0) = f(a+0) \neq f(a). \tag{20,5}$$

Разрыв «устраняется» тем, что полагают $f(a)$ равным $f(a-0)$ и $f(a+0)$, т. е. принимают, что $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Свойства непрерывных функций

Теорема. *Сумма, разность, произведение и частное двух функций, непрерывных в одной и той же точке a, есть функция непрерывная в той же точке, причем в случае частного предполагается, что функция делитель не обращается в нуль при $x = a$. (Теорема остается верной для суммы и произведения любого конечного числа функций).*

Упражнения, связанные с первым определением непрерывной функции

Задача 20,1. Доказать, что функция $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$ непрерывна при любом значении x, т. е. непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Заданная функция определена на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Возьмем из этого интервала произвольное значение $x = a$. На основании известных теорем о пределе функции мы можем написать

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(3x^3 - 4x + 5) = 3a^3 - 4a + 5.$$

Но ведь и $f(a) = 3a^3 - 4a + 5$ и, таким образом, у нас выполнено соотношение (20,1): $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, а это и значит, что рассматриваемая функция непрерывна при $x = a$. Учитывая, что a произвольное число интервала $(-\infty, +\infty)$, мы заключаем, что заданная функция непрерывна при любом значении x, т. е. на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Задача 20,2. Доказать, что любой многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

непрерывен при всех значениях x.

Решение. Пусть $x = a$ — **произвольное** значение x из бесконечного интервала $(-\infty, +\infty)$, в котором определена заданная функция.

Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Действительно, на основании известной теоремы о пределе целой рациональной функции имеем

$$\lim_{x\to a} f(x) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + a_2a^{n-2} + \cdots + a_{n-1}a + a_n.$$

Но полученное выражение есть не что иное, как значение заданной функции при $x = a$, т. е. $f(a)$, и тем самым мы убедились в том, что выполняется соотношение (20,1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, а потому и заключаем, что многочлен непрерывен всюду, т. е. при любом значении x.

Задача 20,3. Доказать, что любая дробно-рациональная функция

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна для всех значений x, за исключением тех из них, при которых знаменатель обращается в нуль.

Дробно-рациональная функция определена для всех значений x, кроме тех, которые знаменатель обращают в нуль. Пусть a — произвольное число, такое, что $Q(a) \neq 0$. Из соотношения (14,3) следует, что $\lim\limits_{x \to a} R(x) = R(a)$, т. е. соотношение (20,1) выполнено, и мы заключаем, что *дробно-рациональная функция непрерывна при всех значениях x, кроме тех из них, которые обращают знаменатель в нуль, т. е. дробно-рациональная функция непрерывна при всех значениях x, при которых она определена.*

Задача 20,4 (для самостоятельного решения). При каких значениях x непрерывна дробно-рациональная функция

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 5}{x^2 - 6x + 8}.$$

Ответ. Функция непрерывна всюду, кроме значений $x = 2$ и $x = 4$, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. О непрерывности функции в этих точках не может быть и речи, так как они не принадлежат области определения функции.

Задача 20,5 (для самостоятельного решения). Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ответ. Функция непрерывна при всех значениях x, кроме $x = 0$. Значение $x = 0$ не принадлежит области определения функции: $f(0)$ не существует.

Упражнения, связанные с определением приращения функции

Эти упражнения будут проводиться и на следующем практическом занятии. Читатель должен приобрести прочные навыки в определении приращения функции, так как с необходимостью определять приращение функции приходится очень часто встречаться.

Задача 20,6. Найти приращение Δy функции $f(x) = x^2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 3$ к новому значению $x_2 = 4$.

Решение. Приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 3 = 1$. У нас $f(x) = x^2$, а потому $f(x_2) = f(4) = 4^2 = 16$, $f(x_1) = f(3) = 3^2 = 9$, а приращение функции $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(4) - f(3) = 16 - 9 = 7$.

Задача 20,7. Найти приращение Δy функции $f(x)=x^3$ при переходе аргумента от значения x к значению $x+\Delta x$.

Решение. $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. Найдем $f(x+\Delta x)$. Так как у нас $f(x)=x^3$, то $f(x+\Delta x)$ получим заменой x на $x+\Delta x$ в выражении функции $f(x): f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3$, а потому

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3;$$

$$\Delta y=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3.$$

Пользуясь этой формулой, вычислите, чему равно приращение Δy функции, когда x от значения $x_1=2$ переходит к значению $x_2=2{,}01$.

Ответ. 0,120601.

Задача 20,8 (для самостоятельного решения). Найти приращение Δy функции $f(x)=x^3$ при переходе аргумента от значения $x_1=2$ к новому значению $x_2=3$.

Ответ. $\Delta y=19$.

Задача 20,9. Найти приращение Δy функции $f(x)=\sin x$ при переходе аргумента от значения x к значению $x+\Delta x$.

Решение. $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. У нас $f(x)=\sin x$. Мы найдем $f(x+\Delta x)$, если заменим x на $x+\Delta x$ в выражении функции $f(x)$:

$$f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x); \quad \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$$

и, применяя формулу

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

получим

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}. \tag{20,6}$$

Задача 20,10 (для самостоятельного решения). Найти приращение Δy функции $y=\cos x$ при переходе аргумента от значения x к значению $x+\Delta x$.

Ответ. $$\Delta y=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}. \tag{20,7}$$

Задача 20,11 (для самостоятельного решения). Найти приращение функции $f(x)=\sin x$ при переходе аргумента от значения $x_1=\frac{\pi}{6}$ к значению $x_2=\frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 20,12. Найти приращение функции $y=a^x$.

Решение. $f(x)=a^x$; $f(x+\Delta x)=a^{x+\Delta x}$; $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$;

$$\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1). \tag{20,8}$$

Задача 20,13. Найти приращение функции $y = \ln x$.

Решение. У нас $f(x) = \ln x$; $f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x)$;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x;$$

$$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x}; \quad \Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

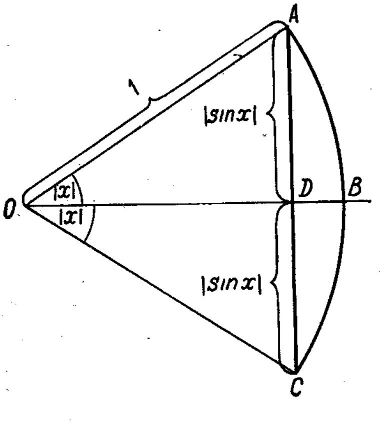
Задача 20,14 (для самостоятельного решения). Найти приращение ΔS функции $S = \frac{gt^2}{2}$ при переходе аргумента от значения t к значению $t + \Delta t$.

Ответ. $\Delta S = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}$.

Задача 20,15. Доказать, что при $x = 0$ функция $\sin x$ непрерывна.

Решение. Мы должны обнаружить, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$.

Учащийся не должен думать, что мы здесь имеем право просто подставить под знак минуса нуль вместо x. Это мы имели бы право сделать, если бы непрерывность функции $\sin x$ при $x = 0$ была бы уже доказана.



Фиг. 20,4 *а*

Рассмотрим окружность радиуса $OA = 1$ (фиг. 20,4 *а*). Тогда

$$AD = DC = |\sin x|;$$

$$\breve{AB} = \breve{BC} = |x|.$$

Отрезок AD короче дуги $\breve{AB}$, а потому $|\sin x| \leqslant |x|$. Если теперь угол x уменьшать, делая его все меньшим и меньшим по абсолютной величине, мы можем и синус этого угла сделать по абсолютному значению сколь угодно малым, а это значит, что при $x \to 0$ $\sin x$ есть величина бесконечно малая, и ее предел

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0, \text{ т. е. } \lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0.$$

И так как здесь выполняется соотношение (20,1): $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то при $x = 0$ функция $\sin x$ действительно непрерывна.

Задача 20,16. Доказать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x.

Решение. В задаче 20,9 для определения приращения $f(x) = \sin x$ была получена формула (20,6), верная при любом значении x.

Воспользуемся теперь вторым определением непрерывной функции (20,2) и докажем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

На основании результата предыдущей задачи $\sin \frac{\Delta x}{2} \to 0$, когда $\Delta x \to 0$; что касается $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, то он величина ограниченная при любом значении $x: |\cos x| \leqslant 1$. Произведение же величины бесконечной малой на ограниченную есть величина бесконечно малая, поэтому, когда $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Так как это выполняется при любом значении x, то мы теперь вправе утверждать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x (иначе говорят: «непрерывна всюду», «непрерывна на всей числовой оси»). Теперь уже, определяя предел $\sin x$ при $x \to a$, мы вправе с полным основанием писать:

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a.$$

Задача 20,17 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна при всех значениях x.

Указание. Воспользоваться формулой (20,7).

Задача 20,18 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ непрерывны в любой точке своей области существования.

Указание. Использовать непрерывность всюду функций $\sin x$ и $\cos x$ и теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций.

Упражнения, связанные со вторым определением непрерывной функции

Задача 20,19. Пользуясь вторым определением непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ непрерывна в произвольной точке x.

Решение. $f(x + \Delta x) = 5(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 2;$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 10x\Delta x - 6\Delta x + 5\Delta x^2 = \\ = (10x - 6)\Delta x + 5\Delta x^2.$$

Найдем теперь предел Δy при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [(10x - 6)\Delta x + 5\Delta x^2] = 0$$

при любом значении x, что и доказывает непрерывность заданной функции при любом значении x.

Задача 20,20 (для самостоятельного решения). Пользуясь вторым определением непрерывной функции, доказать, что функция $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ непрерывна при любом значении x.

Указание. Найти Δy, после чего перейти к пределу при $\Delta x\to 0$.

Задача 20,21 (для самостоятельного решения). Доказать, что при $x=3$ функция $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ непрерывна.

Указание. Составить $\Delta y=f(3+\Delta x)-f(3)$ и найти $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$.

Задача 20,22 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ непрерывна при любом значении x.

Указание. Определить Δy, после чего перейти к пределу при $\Delta x\to 0$,

Упражнения, связанные с классификацией точек разрыва.

Задача 20,23. Испытать на непрерывность при $x=1$ функцию

$$f(x)=2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}.$$

Решение. Так как знаменатель $1-x$ дроби равен нулю при $x=1$, то $f(x)$ разрывна при $x=1$. Установим характер этой точки разрыва. Найдем сначала левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)$. Если $x\to 1-0$, то можно положить $x=1-\alpha\ (\alpha>0)$ и считать, что α, оставаясь положительной, стремится к нулю. Заменяя x на $1-\alpha$

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-(1-\alpha)}}}\right)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=2,$$

так как при $\alpha\to+0$ величина $\frac{1}{\alpha}$ бесконечно большая, $2^{\frac{1}{2}}$ также бесконечно велика, $1+2^{\frac{1}{\alpha}}$ — бесконечно большая величина, обратная ей величина $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}$ — бесконечно мала:

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}=0,$$

а потому $\lim\limits_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=2.$

Таким образом,

$$f(1-0)=2.$$

Теперь определим правосторонний предел функции. Если $x \to 1+0$, можно положить $x = 1 + \alpha \, (\alpha > 0)$ и считать, что α, оставаясь положительной, стремится к нулю.

Тогда, заменяя x на $1+\alpha$, получим:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{\alpha\to+0}\left(2 + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-(1+\alpha)}}}\right) = \lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\alpha}}}\right) = 3,$$

так как при $\alpha \to +0$, $\frac{1}{\alpha}$ и $2^{\frac{1}{\alpha}}$ — величины бесконечно большие, то $2^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ — величина бесконечно малая, а поэтому

$$\lim_{\alpha\to+0}(1+2^{-\frac{1}{\alpha}}) = 1; \quad \lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\alpha}}} = 1; \quad \text{а} \lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\alpha}}}\right) = 3$$

и, значит, $f(1+0) = 3$.

Итак, у функции **существуют** и левосторонний предел $f(1-0) = 2$, и правосторонний предел $f(1+0) = 3$, но между собой они не равны. Из этого мы заключаем, что точка $x = 1$ является для заданной функции точкой разрыва первого рода.

Задача 20, 24 (для самостоятельного решения). Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ при $x = 2$.

Указание. 1) Найти левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$ (положить $x = 2 - \alpha \, (\alpha > 0)$ и найти предел полученной функции при $\alpha \to +0$). Получится, что $f(2-0) = \frac{2}{3}$. 2) Найти правосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$ (положить $x = 2 + \alpha \, (\alpha > 0)$ и найти предел полученной функции при $\alpha \to +0$). Получится, что $f(2+0) = 0$.

Ответ. Точка $x = 2$ — точка разрыва первого рода: $f(2-0)$ и $f(2+0)$ существуют, но между собой не равны.

Задача 20, 25 (для самостоятельного решения). Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}$ при $x = 0$.

Указание. При $x = 0$ функция терпит разрыв. Левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \frac{1}{3}$; $f(-0) = \frac{1}{3}$.

Правосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0 : f(+0) = 0$ (символы 1) $x \to -0$ и 2) $x \to +0$ означают, что: 1) x стремится к нулю, оставаясь меньше нуля; 2) x стремится к нулю, оставаясь больше нуля).

Левосторонний и правосторонний пределы функции существуют $f(-0)=\frac{1}{3}$, $f(+0)=0$, но между собою не равны: $f(-0)\neq f(+0)$.

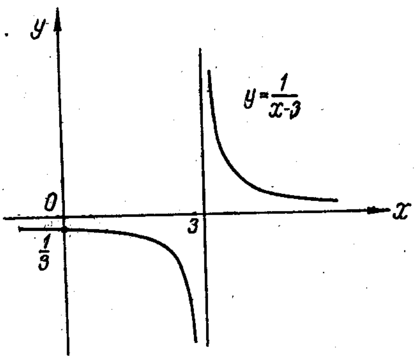
Заключение. Точка $x=0$ — точка разрыва первого рода.

Задача 20, 26 (для самостоятельного решения). Функцию $f(x)=\frac{5}{2+7^{\frac{4}{5-x}}}$ испытать на непрерывность при $x=5$.

Ответ. $f(5-0)=0$, $f(5+0)=\frac{5}{2}$: $f(5-0)\neq(5+0)$. Точка $x=5$ — точка разрыва первого рода.

Задача 20, 27 (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ в точке $x=0$. Начертить график.

Ответ. Разрыв второго рода: $f(-0)=0$, $f(+0)=+\infty$.



Фиг. 20,5

Задача 20, 28. Какого рода разрыв имеет функция $y=\frac{1}{x}$ в точке $x=0$.

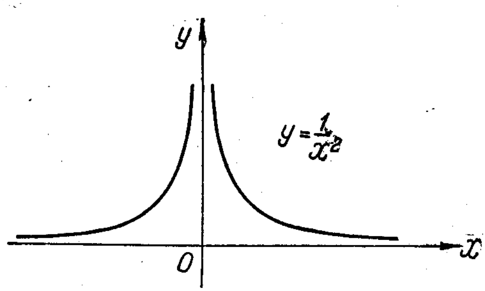
Решение. Левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$, а ее правосторонний предел $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$. Таким образом, здесь не существуют ни предел слева, ни предел справа, а потому точка $x=0$ — точка разрыва второго рода.

Задача 20, 29 (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $y=\frac{1}{x-3}$ в точке $x=3$ (фиг. 20,5).

Ответ. Второго рода: при $x\to3$ не существуют ни предел слева, ни предел справа.

Задача 20, 30 (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $y=\frac{1}{x^2}$ в точке $x=0$?

Ответ. Второго рода (фиг. 20,6).



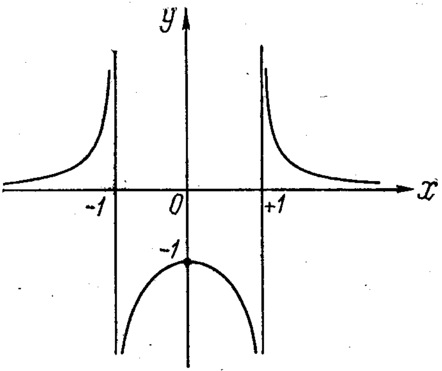
Фиг. 20,6

Задача 20, 31 (для самостоятельного решения) Определить точки разрыва функции $y=\frac{1}{x^2-1}$ и род этих точек разрыва.

Ответ. Точка $x = -1$ и $x = +1$ — точки разрыва второго рода (фиг. 20, 7).

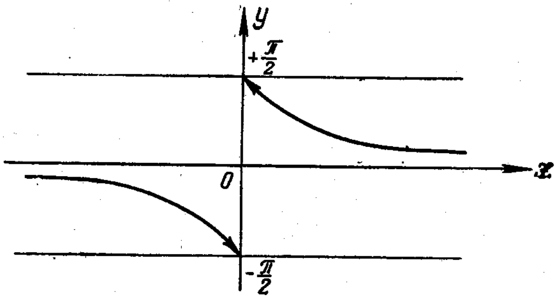
Задача 20, 32. Какого рода разрыв в точке $x = 0$ имеет функция $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Решение. В точке $x = 0$ функция $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не существует. Определим левосторонний и правосторонний пределы функции: $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, так как при $x \to -0$ величина $\frac{1}{x} \to -\infty$, а $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \to -\frac{\pi}{2}$; $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = +\frac{\pi}{2}$ потому, что при $x \to +0$ величина $\frac{1}{x} \to +\infty$, а $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \to +\frac{\pi}{2}$; $f(+0) = +\frac{\pi}{2}$.



Фиг. 20,7

Таким образом, оба предела — левосторонний и правосторонний — в точке $x = 0$ существуют, но между собою не равны: $f(-0) \neq f(+0)$, и точка $x = 0$ — точка разрыва первого рода (фиг. 20,8).



Фиг. 20,8

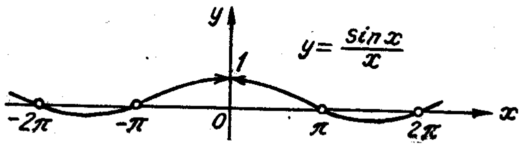
Задача 20, 33. Какого рода разрыв имеет функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$?

Решение. В этой точке функция разрывна, так как $f(0)$ не существует. Однако нам известно, что при стремлении x к нулю по любому закону $(x \to 0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и, таким образом, существуют левосторонний предел функции $f(-0)$, правосторонний предел функции $f(+0)$ и они между собою равны: $f(-0) = f(+0) = 1$. Но $f(0)$ не существует. На кривой, которая является графиком этой функции, отсутствует точка (она как бы «вырвана»), абсцисса которой равна нулю. Если условиться, что при $x = 0$ функция $\frac{\sin x}{x} = 1$, то тем самым график функции станет сплошным (непрерывным), и разрыв будет «устранен» (фиг. 20,9).

Заключение: Для функции $\frac{\sin x}{x}$ точка $x = 0$ является точкой «устранимого» разрыва, так как $f(-0) = f(+0)$, и функция



Фиг. 20,9.

в этой точке может быть доопределена так, что можно взять $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Замечание. Термин «устранимый» взят в кавычки потому, что фактически разрыв функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ ничем устранить нельзя, так как он существует в действительности. Можно только условно принять, что значение функции в этой точке равно 1. Такое соглашение восстановит на кривой отсутствующую на ней точку (0,1).

Это замечание следует иметь в виду и при решении других задач, в которых разрыв будет «устранимым».

Задача 20,34. Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ в точке $x = 2$.

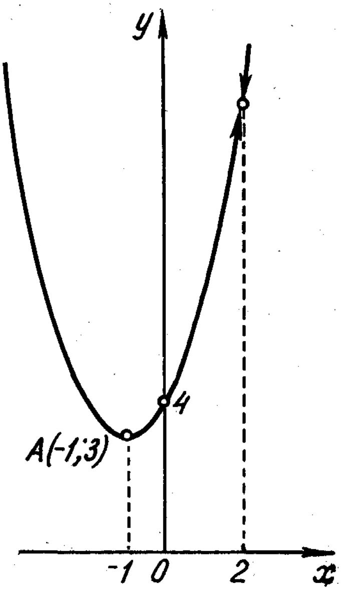
Решение. Так как при $x = 2$ функция не существует и тем самым нарушено первое условие непрерывности, то в этой точке функция терпит разрыв. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции

$$\lim_{x \to 2-0} = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2-0} (x^2 + 2x + 4) = 12, \quad f(2-0) = 12;$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2+0} (x^2 + 2x + 4) = 12; \quad f(2+0) = 12.$$

Таким образом, существует и предел этой функции при $x \to 2$, так как $f(2-0) = f(2+0)$. В точке $x = 2$ разрыв можно «устранить», если значение функции в этой точке принять равным 12, т. е. если условиться, что $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=12$.

Точка $x=2$ — точка «устранимого» разрыва. Графиком функции $f(x)=\frac{x^3-8}{x-2}$ является парабола (фиг. 20, 10), на которой нет точки с абсциссой $x=2$. На графике эта точка обозначена кружком и к ней направлены стрелки. Сплошной ход кривой в этой точке оборвался. Слева и справа от точки $x=2$ график функции — непрерывная линия.



Фиг. 20, 10.

Задача 20, 35 (для самостоятельного решения). 1) Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$ и начертить график функции. 2) Чему должно быть равно $f(-3)$, чтобы пополненная этим значением функция была непрерывна при $x=-3$?

Ответ. Точка $x=-3$ — точка «устранимого» разрыва. Следует взять $f(-3)=-6$.

Задача 20, 36 (для самостоятельного решения). 1) Исследовать на непрерывность функцию $f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$ и начертить график функции. Как следует доопределить эту функцию при $x=-1$, чтобы при $x=-1$ она была непрерывной?

Задача 20, 37. Доказать, что функция $f(x)=x^3\cos^2 x+\frac{x^4}{x^2+1}$ непрерывна при всех значениях x.

Решение. Воспользуемся теоремами о сумме произведении и частном непрерывных функций Так как функция $\cos x$ непрерывна при всех значениях x, то и ее квадрат есть функция, непрерывная при всех значениях x, как произведение двух непрерывных функций: $\cos^2 x=\cos x\cdot\cos x$.

Функция $\varphi(x)=x$ непрерывна всюду, а потому и функция $\varphi_1(x)=x^3$ также всюду непрерывна, как произведение непрерывных функций: $\varphi_1(x)=(x)^3=xxx$.

Произведение $x^3\cos^2 x$ — функция непрерывная, как произведение непрерывных функций x^3 и $\cos^2 x$.

Второе слагаемое $\frac{x^4}{x^2+1}$ — функция непрерывная, как частное двух непрерывных функций, причем знаменатель дроби не имеет действительных корней (уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных решений).

Заключение. Заданная функция непрерывна при всех значениях x.

Задача 20, 38 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремами о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, решить вопрос о непрерывности функций:

1) $f(x)=\frac{x^2}{9-x^2}$; 2) $\varphi(x)=\frac{\sin x}{1-x^3}$; 3) $\varphi(x)=\frac{x^2+x+1}{\sin x}$.

Ответ. 1) функция непрерывна при всех значениях x, кроме значений $x_1=-3$ и $x_2=3$.

2) Функция непрерывна для всех значений x, кроме $x=1$.

3) Функция непрерывна для всех x, кроме $x=n\pi$, где n — любое целое число.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Задачи, приводящие к вычислению производной. Непосредственное вычисление производной из определения. Геометрический и механический смысл производной.

Это практическое занятие является первым по разделу «производная и дифференциал функции». К вычислению производной данной функции мы приходим всякий раз, когда требуется определить скорость изменения одной величины (функции), в зависимости от изменения другой величины (независимой переменной).

Определение 1. *Средней скоростью изменения функции $y=f(x)$ при переходе независимой переменной от значения x к значению $x+\Delta x$ называется отношение приращения Δy функции к приращению Δx независимой переменной:*

$$V_{\text{ср}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (21,1)$$

Определение 2. *Истинной (мгновенной) скоростью изменения функции y при данном значении x называют предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при стремлении к нулю Δx:*

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}V_{\text{ср}};$$

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (21,2)$$

При вычислении этого предела следует x считать величиной постоянной. Переменной же величиной здесь является Δx (конечно, значение x можно выбрать произвольно из области существования функции, но после того как этот выбор сделан, значение x должно оставаться постоянным, а изменению может подвергаться только Δx).

Найденный из (21,2) предел будет являться функцией x. О скорости изменения функции при данном значении x имеет смысл говорить лишь в том случае, когда предел (21,2) существует и не зависит от того, каким способом Δx стремится к нулю.

Функция, полученная в результате определения предела (21,2), называется производной функцией от функциии $f(x)$. Сокращенно найденная из (21,2) функция называется просто производной.

Определение производной. *Производной функции $f(x)$ по независимой переменной x называется предел, к которому стремится отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю. Операция нахождения производной называется дифференцированием функции.*

Производная функции при частном значении x есть число, если при этом значении x производная имеет конечное значение.

Обозначение производной. Производная обозначается одним из символов: y'_x, y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, а ее значение при $x = x_0$ обозначается так:

$$y'_x(x_0);\ \ y'(x_0);\ \ y'_0;\ \ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0};\ \ f'(x_0).$$

Когда мы нашли производную функцию $f'(x)$, тем самым мы нашли скорость изменения данной функции в точке x.

Механическое значение производной

1. Средняя скорость. Закон движения точки считается заданным, если ее путь s* есть известная функция времени t, т. е. если

$$s = f(t) \tag{21,3}$$

(s — расстояние движущегося тела от начала отсчета). Будем считать, что $s > 0$, если оно находится справа от начала отсчета и $s < 0$, если оно находится слева от начала отсчета. Средняя скорость движения $V_{ср}$ за время от момента t до момента $t + \Delta t$ вычисляется по формуле

$$V_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{21,4}$$

Истинная скорость движения в момент времени t по определению есть предел, к которому стремится средняя скорость $V_{ср}$ за промежуток времени Δt, когда промежуток времени $\Delta t \to 0$. Или

* Предполагается, что точка движется в одном направлении.

иначе: скоростью движения в данный момент времени t называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени Δt стремится к нулю.

Скорость в момент времени t определяется равенствами

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (21,5)$$

Из сравнения (21,5) с (21,2) видно, что скорость точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t.

Геометрическое значение производной

Производная от функции $f(x)$, вычисленная при заданном значении x, равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ox и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x.*

Упражнения этого практического занятия имеют целью закрепить у студента понимание определения производной, ее механического и геометрического значения.

Мы будем решать задачи, в которых производная вычисляется не из готовой формулы, как это делается на следующих практических занятиях, а непосредственно, исходя из ее определения.

После твердого усвоения определения производной мы перейдем к упражнениям, которые помогут выработать прочные навыки вычисления производных.

Задача 21,1. Вычислить производную функции $y = x^2$ при $x = 3$.

Решение. Проведем решение этой задачи двумя способами:

1) сначала найдем производную как функцию x, а потом вычислим ее значение при $x = 3$, т. е. $y'(3)$.

2) значение производной будем вычислять, исходя из значения $x = 3$:

$$y = x^2, \text{ т. е. } f(x) = x^2;$$
$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Теперь найдем приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = (2x + \Delta x)\,\Delta x$.

Разделим теперь приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x + \Delta x)\,\Delta x}{\Delta x}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

В этом месте мы можем сказать, что найденное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть не что иное, как средняя скорость изменения данной функции $f(x) = x^2$ в промежутке $(x, x + \Delta x)$.

* Положительным направлением на касательной считается то, в котором возрастает абсцисса.

Для того чтобы найти производную y' этой функции, нужно найти предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$. Переходя к пределу, получаем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

(еще раз напоминаем, что здесь при отыскании предела величину x мы должны считать постоянной).

Итак $y' = 2x$.

При $x = 3$ значение производной $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. Найденное число 6 есть не что иное, как скорость изменения функции $f(x) = x^2$ при $x = 3$.

2) Найдем теперь значение производной данной функции при $x = 3$, минуя нахождение производной, как функции x.

У нас $f(x) = x^2$; $f(3) = 3^2$.

Перейдем от значения $x = 3$ к значению $x = 3 + \Delta x$;

$$f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2; \quad f(3) = 9;$$

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3 + \Delta x)^2 - 9 = 6\Delta x + (\Delta x)^2 = (6 + \Delta x)\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6 + \Delta x; \quad y'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Найдя производную $y'(3)$, мы нашли и тангенс угла между положительными направлениями оси Ox и касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$, т. е. угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$.

Задача 21,2 (для самостоятельного решения). Вычислить производную функции $y = x^3$ при $x = 2$.

Дать геометрическое истолкование полученного результата. Задачу решить двумя способами по примеру решения предыдущей задачи. Найти среднюю скорость изменения функции в промежутке от $x_1 = 3$ до $x_2 = 3{,}1$.

Ответ. $y'(2) = 12$; средняя скорость изменения функции на интервале (3; 3,1) $v_{\text{ср}} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$. Подставляя сюда $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, получим $v_{\text{ср}} = 27{,}91$.

Задача 21,3. Точка движется по прямой по закону $S = t^3$, где S — путь, измеряемый в сантиметрах, а t — время в секундах. Найти среднюю скорость точки за время от $t = 2$ *сек* до $t_1 = (2 + \Delta t)$ *сек*, считая, что $\Delta t = 1$; 0,5, 0,01; 0,001. Вычислить также истинную скорость точки в момент $t = 2$ *сек*.

Решение. Согласно результату предыдущей задачи, если $y = x^3$, то $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$. Так как в задаче, которую мы решаем, функция обозначена буквой S, а аргумент буквой t, то выражение для Δy надо переписать, заменив y на S, а x на t:

$$\Delta S = 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3,$$

а средняя скорость будет равна

$$V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Если $\Delta t = 1$ *сек*, то, приняв, что $t = 2$ *сек*, получим

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 19 \text{ см/сек};$$

при $t = 2$ *сек*, а $\Delta t = 0{,}01$ *сек*;

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}01 + (0{,}01)^2 = 12{,}0601 \text{ см/сек};$$

при $t = 2$ *сек*, а $\Delta t = 0{,}001$ *сек*;

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + (0{,}001)^2 = 12{,}006\,001 \text{ см/сек}.$$

Найдем теперь истинную скорость в момент времени $t = 2$ *сек*. У нас

$$V_{ср} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Истинная скорость по (21,4) будет равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} (3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2) = 3t^2.$$

При $t = 2$ *сек* получаем $V = 3 \cdot 2^2 = 12$ *см/сек*.

Все полученные нами средние скорости отличаются от истинной, но из рассмотрения полученных значений средних скоростей мы приходим к выводу, что они тем ближе к истинной скорости в момент $t = 2$ *сек*, чем меньше Δt.

Задача 21,4 (для самостоятельного решения). Точка движется по прямой по закону $S = 5t^3 - 3t^2 + 4$, где путь S измеряется в сантиметрах, а время t — в секундах. Найти среднюю скорость за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = (1 + \Delta t)$, считая $\Delta t = 0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}1$.

Определить также истинную скорость в момент $t = 1$ *сек*.

Указание. 1) Найти ΔS; 2) $V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Ответ. При $\Delta t = 0{,}5$ $V_{ср} = 15{,}25$ *см/сек*; при $\Delta t = 0{,}1$ $V_{ср} = 10{,}21$ *см/сек*; $V = 15t^2 - 6t$, $V(1) = 9$ *см/сек*.

Задача 21,5. Функция $y = \frac{2x+1}{3x+1}$. Вычислить производную при $x = 1$.

Решение. Сначала найдем производную y' как функцию x, а потом вычислим $y'(1)$.

Наращенное значение функции $y + \Delta y$ мы найдем, если заменим в аналитическом выражении функции x на $x + \Delta x$. Имеем

$$y + \Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{3(x + \Delta x) + 1}; \quad \Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{3(x + \Delta x) + 1} - \frac{2x+1}{3x+1} =$$

$$= -\frac{\Delta x}{[3(x + \Delta x) + 1](3x + 1)}, \text{ а } \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{[3(x + \Delta x) + 1](3x + 1)}.$$

Эта формула дает выражение средней скорости изменения данной функции на интервале $(x, x+\Delta x)$. Чтобы найти производную, перейдем к пределу, устремляя Δx к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{-\frac{1}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)}\right\};$$

$$y' = -\frac{1}{(3x+1)^2};\quad y'(1) = -\frac{1}{16}.$$

Найденный результат геометрически истолковывается так: угловой коэффициент касательной к графику функции $y=\frac{2x+1}{3x+1}$ в точке с абсциссой $x=1$ равен $-\frac{1}{16}$; $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{16}$.

Если точка движется по прямой по закону $y=\frac{2x+1}{3x+1}$, где x — время в секундах, а y — путь в метрах, то найденное значение производной $y'(1) = -\frac{1}{16}$ — скорость движения в момент времени $t=1$ *сек*, а знак минус у скорости показывает, что с увеличением времени расстояние движущейся точки от начала отсчета пути уменьшается.

Эту задачу можно решить и иначе: вычислить значение производной заданной функции при $x=1$, минуя определение ее производной при любом x.

Перейдем от значения $x=1$ к значению $x=1+\Delta x$. У нас $f(x)=\frac{2x+1}{3x+1}$. Тогда $f(1)=\frac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+1}=\frac{3}{4}$;

$$f(1+\Delta x) = \frac{2(1+\Delta x)+1}{3(1+\Delta x)+1} = \frac{2\Delta x+3}{3\Delta x+4};$$

в точке $x=1$ приращение функции $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1)$;

$$\Delta y = \frac{2\Delta x+3}{3\Delta x+4} - \frac{3}{4} = \frac{-\Delta x}{4(3\Delta x+4)};\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4(3\Delta x+4)};$$

а

$$y'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{4(3\Delta x+4)} = -\frac{1}{16}.$$

Таким образом, найдена производная заданной функции при $x=1$ без определения производной как функции x.

Задача 21,6 (для сомостоятельного решения). Найти производную функции $y=\sqrt{x}$ при $x=9$.

Ответ. $y'(9) = \frac{1}{6}$

Задача 21,7 (для самостоятельного решения). Доказать, что для линейной функции $y=kx+b$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть величина постоянная.

Задача 21,8 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением производной, найти производную функции $y=\sqrt{x^2-1}$ при $x=\sqrt{5}$.

Указания: 1) $\Delta y=\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}-\sqrt{x^2-1}$; 2) при определении $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}$; 3) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Ответ. $y'(\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задача 21,9 (для самостоятельного решения). Закон движения точки по прямой задан формулой $s=t^3-3t^2+3t+5$ (s — в метрах, t — в секундах). В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?

Ответ. $V=3t^2-6t+3$; $V=0$ при $t=1$ *сек.*

Задача 21,10 (для самостоятельного решения). Две точки движутся по прямой по законам $s_1=t^3-5t^2+17t-4$; $s_2=t^3-3t$. В какой момент времени их скорости равны?

Ответ. $t=2$ *сек* ($V_1=3t^2-10t+17$; $V_2=3t^2-3$).

Задача 21,11 (для самостоятельного решения). Тело, брошенное вверх, движется по закону $s=-4{,}905t^2+981t+950$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти: 1) скорость тела в любой момент времени и его начальную скорость; 2) в какой момент времени скорость тела станет равной нулю и какую наивысшую высоту в этот момент времени достигнет тело.

Ответ. 1) $V=-9{,}81t+981$; $V_0=981$ *м/сек*; 2) $t=100$ *сек*; $s(100)=50$ *км*.

ДВАДЦАТЬ ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: *Дифференцирование алгебраических функций.*

Это практическое занятие отводится для упражнений в определении производных алгебраических функций. Эти упражнения продолжаются и на следующем практическом занятии. Операция определения производной функции называется дифференцированием функции.

Вычисление производных мы будем вести не непосредственно, исходя из определения производной, а по формулам, с выводом которых читатель уже знаком. Здесь приводится для ссылок и справок

СВОДКА ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Во всех приведенных ниже формулах функции u и v считаются функциями независимой переменной x: $u=u(x)$; $v=v(x)$. Эту таблицу читатель должен твердо выучить наизусть.

$$y=c\ (c\text{ — постоянная});\ y'=0 \qquad (22,1)$$

(производная постоянной величины равна нулю);

$$y = x; \quad y' = 1 \tag{22,2}$$

(производная независимой переменной равна 1)

$$y = cu \ (c \text{ — постоянная}); \quad y' = cu' \tag{22,3}$$

(постоянный множитель можно выносить за знак производной)

$$y = u \pm v; \quad y' = u' \pm v' \tag{22,4}$$

$$y = v \cdot u; \quad y' = u'v + uv' \tag{22,5}$$

$$y = \frac{u}{v}. \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{22,6}$$

$$y = \frac{a}{u}; \quad y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u' \ (a \text{ — постоянная величина}); \tag{22,7}$$

$$y = u^n; \quad y' = nu^{n-1} \cdot u' \tag{22,8}$$

(n — любое действительное число)

$$y = \sqrt{u}; \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'; \tag{22,9}$$

$$y = a^u; \ y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \ y = e^u; \ y' = e^u u'; \ a > 0, \ a \neq 1; \tag{22,10}$$

$$y = \log_a u; \qquad y' = \frac{1}{u} u' \log_a e = \frac{u'}{u \ln a}; \tag{22,11}$$

$$y = \ln u; \qquad y' = \frac{1}{u} u'; \tag{22,12}$$

$$y = \sin u; \qquad y' = \cos u \cdot u'; \tag{22,13}$$

$$y = \cos u; \qquad y' = -\sin u \cdot u'; \tag{22,14}$$

$$y = \operatorname{tg} u; \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'; \tag{22,15}$$

$$y = \operatorname{ctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'; \tag{22,16}$$

$$y = \sec u; \qquad y' = \sec u \operatorname{tg} u \cdot u'; \tag{22,17}$$

$$y = \operatorname{cosec} u; \qquad y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u'; \tag{22,18}$$

$$y = \arcsin u; \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'; \tag{22,19}$$

$$y = \arccos u; \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'; \tag{22,20}$$

$$y = \operatorname{arctg} u; \qquad y' = \frac{1}{1+u^2} u'; \tag{22,21}$$

$$y = \operatorname{arcctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{1+u^2} u'. \tag{22,22}$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если $y = f(u)$, а u является не независимой переменной, а функцией независимой переменной $x: u = \varphi(x)$, то, таким образом, $y = f(\varphi(x))$.

Функция y называется в этом случае сложной функцией x. Переменная u называется промежуточной переменной. Производная сложной функции определяется на основании такой теоремы:

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, причем для соответствующих друг другу значений x и u существуют конечные производные y'_u и u'_x. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет конечную производную по x, и эта производная определяется по формуле

$$y'_x = y'_u u'_x{}^*, \tag{22,23}$$

причем производная y'_u вычисляется так, как если бы u было независимой переменной. Короче: производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточной переменной на производную от промежуточной переменной по независимой переменной.

Эта теорема распространяется и на сложные функции, которые задаются с помощью цепи, содержащей три и более звена. Например, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, т. е. если $y = f\{\varphi([\psi(x)]\}$, то

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x. \tag{22,24}$$

Формулы (22,23) и (22,24) дифференцирования сложной функции являются очень важными.

Прежде чем приступить к решению задач, сделаем замечание, которым нам неоднократно придется пользоваться:

Если функция, которую надо продифференцировать, не является сложной, то мы в формулах (22,3) — (22,22) будем полагать, что $u = x$, т. е. u — независимая переменная, а тогда по формуле (22,2) $u'_x = 1$ (производная независимой переменной равна единице), и поэтому, применяя указанные формулы, на u' умножать не придется, так как такое умножение равносильно умножению на единицу, а, как известно, умножение на единицу не изменяет произведения.

Сначала решим самые простые задачи.

Задача 22,1. Найти производные функций:

$$1)\ y = x^4;\quad 2)\ y = x^5;\quad 3)\ y = \sqrt{x};\quad 4)\ y = \sqrt[4]{x^3}.$$

Решение. Учитывая замечание, которое только что сделано, по формуле (22,8), полагая в ней $u = x$, имеем:

1) В этом примере показатель степени $n = 4$, а потому $y' = 4x^3$;

2) Здесь $n = 5$, а потому $y' = 5x^4$;

---

* Индексы у производных указывают на то, по какому переменному производится дифференцирование.

3) Если $y=\sqrt{x}$, то, переписав пример в виде $y=x^{\frac{1}{2}}$, полагая в формуле (22,8) $n=\frac{1}{2}$, получаем $y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=$ $=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

При решении этого примера можно было сразу воспользоваться формулой (22,9).

4) Пример можно переписать так: $y=x^{\frac{3}{4}}$. Здесь $n=\frac{3}{4}$, а $y'=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

Задача 22,2. Найти производные функций:

1) $y=5x^3$, 2) $y=-4x^2$, 3) $y=7\sqrt{x}$; 4) $y=\frac{8}{x^2}$, 5) $y=4\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. При решении всех этих примеров можно пользоваться формулой (22,8) и надо учесть, что постоянный множитель можно выносить за знак производной (формула (22,3)).

1) $y'=5(x^3)'$ (здесь постоянный множитель 5 вынесен за знак производной); $y'=5\cdot 3x^2=15x^2$ ($(x^3)'=3x^2$);

2) $y'=-4(x^2)'=-4\cdot 2x=-8x$ (постоянный множитель -4 вынесен за знак производной, а $(x^2)'=2x$);

3) $y=7x^{\frac{1}{2}}$; $y'=7(x^{\frac{1}{2}})'=7\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=7\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{7}{2\sqrt{x}}$ (Постоянный множитель 7 вынесен за знак производной, а $(x^{\frac{1}{2}})'=$ $=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$). Здесь можно было сразу воспользоваться формулой (22,9), и тогда, если $y=7\sqrt{x}$, то $y'=7\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{7}{2\sqrt{x}}$.

Учащемуся рекомендуется запомнить (это очень часто встречается), что если $y=\sqrt{x}$, то $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) Перепишем пример в виде $y=8x^{-2}$, тогда $y'=8(x^{-2})'=$ $=8(-2x^{-3})$, $y'=-\frac{16}{x^3}$ (постоянный множитель 8 вынесен за знак производной, а $(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$). Можно было сразу воспользоваться формулой (22,7), взяв в ней $a=8$; $u=x^2$, а $u'=2x$. Здесь уже на u' придется умножить, так как u — не независимая переменная, а ее функция: $u=x^2$.

Имеем $y=\frac{8}{x^2}$; $y'=-\frac{8}{x^4}\underbrace{(x^2)'}_{\text{производная знаменателя}}=-\frac{8}{x^4}2x=-\frac{16}{x^3}$, т. е. то же, что и раньше, но функцию, данную для дифференцирования, не пришлось преобразовать.

5) Данную функцию перепишем в виде $y = 4x^{\frac{2}{3}}$; тогда $y' = 4\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 4 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$.

Задача 22,3 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = 7x^6$; 2) $y = 8\sqrt{x}$; 3) $y = \frac{4}{x^5}$.

Ответ. 1) $y' = 42x^5$; 2) $y' = \frac{4}{\sqrt{x}}$; 3) $y' = -\frac{20}{x^6}$.

Задача 22,4. Найти производные функции:

1) $y = \frac{6}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $y = -\frac{5}{4x^3}$; 4) $y = \frac{7\sqrt{x}}{8}$.

Решение. Здесь для решения всех примеров удобно применить формулу (22,7):

$$1)\ y' = -\frac{6}{(\sqrt{x})^2}\underbrace{(\sqrt{x})'}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}} = -\frac{6}{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x\sqrt{x}};$$

$$2)\ y' = -\frac{4}{(\sqrt[3]{x^2})^2}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2})'}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}} = -\frac{4}{\sqrt[3]{x^4}}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{4}{x\sqrt[3]{x}}\,\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} =$$

$= -\frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ (здесь можно было также воспользоваться формулой (22,8), но данную функцию переписать в виде $y = 4x^{-\frac{2}{3}}$, тогда $y' = 4\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = 4\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{8}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}$);

$$3)\ y' = \frac{5}{(4x^3)^2}\underbrace{(4x^3)'}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}} = \frac{5}{16x^6}4(x^3)' = \frac{20}{16x^6}3x^2 = \frac{15}{4x^4}$$ (можно поступить и иначе: данную функцию переписать в виде

$$y = -\frac{5}{4}x^{-3};\quad y' = -\frac{5}{4}(x^{-3})' = -\frac{15}{4}x^{-4} = \frac{15}{4x^4}\Big);$$

$$4)\ y' = \frac{7}{8}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{16\sqrt{x}}.$$

Если дифференцируется дробь с постоянным знаменателем, то применять формулу (22,6) для дифференцирования дроби не следует, а поступить надо так: взять производную только от числителя дроби, а знаменатель оставить без изменения:

$$y = \frac{u}{c} = \frac{1}{c}u;\quad y' = \frac{1}{c}u' = \frac{u'}{c}.$$

Следует запомнить: ***производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя, разделенной на тот же знаменатель.***

Использование здесь формулы (22,6) привело бы к ненужному усложнению: $y = \frac{u}{c}$; $y' = \frac{u'c - c'u}{c^2} = \frac{u'c - 0 \cdot u}{c^2} = \frac{u'c}{c^2} = \frac{u'}{c}$ ($c' = 0$ потому, что производная постоянной величины равна нулю).

Если отыскивается производная от дроби с постоянным числителем, то также не следует применять формулу (22,6) для дифференцирования дроби, а надо воспользоваться формулой (22,7) для дифференцирования дроби с постоянным числителем;

$$y = \frac{a}{u}; \quad y' = -\frac{a}{u^2}u'.$$

Если здесь пользоваться формулой для дифференцирования дроби, то получим

$$y = \frac{a}{u}; \quad y' = \frac{a'u - au'}{u^2} = \frac{0 \cdot u - au'}{u^2} = -\frac{au'}{u^2} = -\frac{a}{u^2}u'.$$

Такой способ вычисления производной от дроби с постоянным числителем следует считать нецелесообразным.

Задача 22,5 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \frac{a}{x^n}; \quad 2)\ y = \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}; \quad 3)\ y = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{8}; \quad 4)\ y = \frac{4\sqrt{x}}{7}.$$

Ответ. 1) $y' = -\frac{an}{x^{n+1}}$; 2) $y' = -\frac{15}{4x\sqrt[4]{x^3}}$; 3) $y' = \frac{5}{48\sqrt[6]{x}}$; 4) $y' = \frac{2}{7\sqrt{x}}$.

Задача 22,6. Найти производную функции $y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Решение. Заданная функция есть алгебраическая сумма нескольких функций. Известно (формула (22,4), что производная алгебраической суммы функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций, а потому $y' = (5x^3)' - (3x^2)' + x' - (1)'$. Здесь мы дифференцирование выполним без промежуточных записей:

$$y' = 15x^2 - 6x + 1$$

(производная от x равна $1 : x' = 1$, а производная 1 равна нулю, как производная постоянной величины).

Задача 22,7 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = a\sqrt{x} + x\sqrt{a}$; 2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$; 3) $y = 9x^7 - \frac{3}{x^5} - \frac{3}{x^{11}} - \frac{a}{x^m}$;
4) $y = 3x^2\sqrt[3]{x} - 4x\sqrt[4]{x^3} + 9\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}$.

Указание. Перейти к дробным показателям степеней.

Ответ. 1) $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} + \sqrt{a}$ (при дифференцировании второго слагаемого учесть, что $\sqrt{a}$ — постоянная величина, а $x' = 1$);

2) $y' = x^2(1 - 6x + 13x^2 - 12x^3 + 4x^4)$;

3) $y' = 63x^6 + \frac{15}{x^6} + \frac{33}{x^{12}} + \frac{am}{x^{m+1}}$;

4) $y' = 7x\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[4]{x^3} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^3\sqrt[3]{x}}$.

Задача 22,8 (для самостоятельного решения). Найти производные функций 1) $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$. **Указание.** $\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} = 5x^{\frac{8}{5}}$;

2) $y = 27x^3 - \frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2}$.

Ответ. 1) $y' = 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{2\sqrt[15]{x}}{x} - \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}$; 2) $y' = (9x - 6\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})^2$.

Задача 22,9. Найти производную функции $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$.

Решение. Здесь мы имеем дело со сложной функцией. Положим $u = 5x^2 + 7x + 2$, тогда $y = u^3$. Следует писать так: $y = u^3$; $u = 5x^2 + 7x + 2$.

Для того чтобы найти производную, воспользуемся формулой (22,23) для дифференцирования сложной функции:

$$y' = 3u^2u' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2(5x^2 + 7x + 2)' = \\ = 3(5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot (10x + 7).$$

Однако можно обойтись и без промежуточных записей, т. е. без введения переменной u. Мы настоятельно рекомендуем читателю после того, как он сделает несколько упражнений, выполненных при помощи введения вспомогательной переменной, от введения такой переменной отказаться и дифференцирование выполнять сразу.

Формула (22,8) должна быть понята так: производная от степенной функции u^n, где u есть функция x, равна $nu^{n-1}u'$, т. е. равна показателю степени, умноженному на ту же функцию u, но в степени на единицу меньшей, а полученное произведение надо еще умножить на производную от основания степени u.

В нашем случае получаем: $y' = 3\underbrace{(5x^2 + 7x + 2)^2}_{\text{производная степенной функции}} \cdot \underbrace{(10x + 7)}_{\text{производная основания степени}}$

Выполним еще несколько аналогичных задач, но без столь подробных пояснений.

Задача 22,10. Найти производную функции $y = (5x^3 + 4x^2 + 8)^4$.

Решение. 1) $y = u^4$, где $u = 5x^3 + 4x^2 + 8$. По формуле (22,23) $y' = 4u^3u' = 4(5x^3 + 4x^2 + 8)^3(15x^2 + 8x)$ (производная от 8 равна 0). Проведем решение без введения промежуточной переменной: $y' = 4\underbrace{(5x^3 + 4x^2 + 8)^3}_{\text{производная степени}}\ \underbrace{(15x^2 + 8x)}_{\text{производная степени основания}}$

Задача 22,11 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = (5x^2 + 7)^3$; 2) $y = (1 + 5x - 8x^2)^5$;

3) $y = (a + bx)^m$; 4) $y = \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^4$.

Найти производные, введя сначала промежуточную переменную, а потом минуя ее введение.

Ответ. 1) $y' = 30x(5x^2 + 7)^2$;

2) $y' = 5(1 + 5x - 8x^2)^4(5 - 16x)$;

3) $y' = bm(a + bx)^{m-1}$;

4) $y' = 4\left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}\right)$.

Задача 22,12. Найти производные функций:

1) $y = \sqrt{x^2 + 2}$; 2) $y = \sqrt{3x}$; 3) $y = \frac{2}{(3x^2 - 5)^3}$.

Решение. 1) Положив $u = x^2 + 2$, получим $y = \sqrt{u}$, и поэтому на основании формулы (22,23)

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

Можно было бы сразу воспользоваться формулой (22,9) для дифференцирования квадратного корня из функции, не вводя промежуточной переменной u.

Эту формулу следует понимать так: чтобы получить производную от квадратного корня из функции, надо единицу разделить на два корня квадратных из той же функции и полученную дробь умножить на производную от функции, стоящей под корнем.

Следовало поступить так: 1) $y = \sqrt{x^2 + 2}$; $y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}}}_{\text{производная от квадратного корня из функции}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{производная от функции, стоящей под корнем}}$

2) $y=\sqrt{3x}; \quad y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3x}}}_{\substack{\text{производная квад-}\\\text{ратного корня}\\\text{из функции}}}\cdot\underbrace{3}_{\substack{\text{производная от}\\\text{функции, стоя-}\\\text{щей под корнем}}}$

3) $y=\frac{2}{(3x^2-5)^3}; \quad y'=-\underbrace{\frac{2}{(3x^2-5)^6}}_{\substack{\text{производная дро-}\\\text{би с постоянным}\\\text{числителем}}}\cdot\underbrace{3(3x^2-5)^2 6x}_{\substack{\text{производная}\\\text{знаменателя}}};$

$y'=-\frac{36}{(3x^2-5)^4}.$

Для упражнения выполним еще один совершенно аналогичный пример, но без введения переменной u.

Задача 22,13. Найти производную функции $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. По формуле (22,7) $y'=-\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\substack{\text{производная}\\\text{дроби}}}\underbrace{(\sqrt{x^2+x+1})'}_{\substack{\text{производная}\\\text{знаменателя}\\\text{дроби}}}=$

$$=-\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\substack{\text{производная}\\\text{дроби}}}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{знаменателя}}}\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\substack{\text{производная}\\\text{функции, стоящей}\\\text{под корнем}}}=-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Задача 22,14. (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y=\sqrt{3x^2+5x+1}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$; 3) $y=$ $=\frac{10}{(4x^3-5x^2+7x-1)^4}$.

Ответ. 1) $y'=\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$; 2) $y'=-\frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$;
3) $y'=-\frac{40(12x^2-10x+7)}{(4x^3-5x^2+7x-1)^5}$.

Задача 22,15. Найти производные функций: 1) $Q=\sqrt[3]{3t-2t^2}$;
2) $S=\sqrt[4]{(2t^2-t^3)^3}$.

Решение. 1) Перепишем пример в виде $Q=(3t-2t^2)^{\frac{1}{3}}$;
$Q'=\underbrace{\frac{1}{3}(3t-2t^2)^{-\frac{2}{3}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{степени}}}\underbrace{(3-4t)}_{\substack{\text{производная осно-}\\\text{вания степени}}}$. Окончательно $Q'=\frac{3-4t}{3\sqrt[3]{(3t-2t^2)^2}}$.

2) Перепишем пример в виде $S=(2t^2-t^3)^{\frac{3}{4}}$;

$$S'=\frac{3}{4}\underbrace{(2t^2-t^3)^{-\frac{1}{4}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{степени}}}\cdot\underbrace{(4t-3t^2)}_{\substack{\text{производная осно-}\\\text{вания степени}}}.$$

Окончательно $S' = \dfrac{3t(4-3t)}{4\sqrt[4]{2t^3 - t^3}}$.

Задача 22,16 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{3x} + 3x}$; 2) $y = \sqrt[4]{(3 + 4\sqrt[3]{2x})^3}$;

Ответ.

1) $y' = \dfrac{1 + \sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4 + 2\sqrt{3x} + 3x)^2}}$; 2) $y' = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{3 + 4\sqrt[3]{2x}}}$.

Теперь решим несколько задач, в которых требуется найти производную произведения и частного функций. Нам придется пользоваться формулами (22,5) и (22,6).

Задача 22,17. Найти производную функции $y = x^2(5x-4)^6$.

Решение. Здесь надо продифференцировать произведение двух функций. Будем считать, что в формуле (22,5) $u = x^2$, $v = (5x-4)^6$. Каждую из этих функций мы уже умеем дифференцировать, а потому на основании указанной формулы $y' = (x^2)' \times (5x-4)^6 + x^2[(5x-4)^6]'$. Теперь выполним дифференцирование: $y' = 2x(5x-4)^6 + x^2 \cdot 6(5x-4)^5 \cdot 5$, а после упрощений получим $y' = 8x(5x-4)^5(5x-1)$.

Задача 22,18 (для самостоятельного решения). Найти производную функции $y = (5x^2 - 7x + 2)(15x^2 + 5)^3$.

Ответ. $y = (10x - 7)(15x^2 + 5)^3 + 90x(15x^2 + 5)^2(5x^2 - 7x + 2)$.

Задача 22,19. Найти производную функции

$$y = (3x^2 + 5ax - 2a^2)\sqrt{a^2 + 3x^2}.$$

Решение. По формуле (22,5) имеем при $u = 3x^2 + 5ax - 2a^2$; $v = \sqrt{a^2 + 3x^2}$; $y' = (3x^2 + 5ax - 2a^2)' \cdot \sqrt{a^2 + 3x^2} + (3x^2 + 5ax - 2a^2)(\sqrt{a^2 + 3x^2})'$.

Выполняя дифференцирование, получим $y' = (6x + 5a) \times \sqrt{a^2 + 3x^2} + (3x^2 + 5ax - 2a^2)\underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{a^2 + 3x^2}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{6x}_{\text{производная подкоренного выражения}}$; после упрощений

$$y' = \frac{5a^3 + 30ax^2 + 27x^3}{\sqrt{a^2 + 3x^2}}.$$

Задача 22,20. Найти производную функции

$$y = (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)\sqrt[3]{(a + bx)^2}.$$

Решение. Эту задачу мы решим без промежуточных записей (формула (22,5)):

$$y' = \underbrace{(-6ab + 10b^2x)}_{\text{производная первого сомножителя}}\sqrt[3]{(a + bx)^2} + (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2) \times$$

$$\times \underbrace{\frac{2}{3}(a + bx)^{-\frac{1}{3}} \cdot b}_{\text{производная второго сомножителя}}.$$

Теперь следует сделать упрощения, после которых должно получиться

$$y' = \frac{40b^3x^2}{3\sqrt[3]{a+bx}}.$$

Задача 22,21 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \left(40 - 12x + \frac{27}{5}x^2\right)\sqrt{5+3x};$$

$$2)\ y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2};\quad 3)\ y = (8x^3 - 21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = \frac{81x^2}{2\sqrt{5+3x}};\quad 2)\ y' = \frac{2}{2x^2\sqrt{3x+x^2}};\quad 3)\ y' = \frac{160x^5}{\sqrt[3]{7+4x^3}}.$$

Задача 22,22 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \left(\frac{10}{3} - 2x + x^2\right)\sqrt{(5+2x)^3};\quad 2)\ y = (3x^4+4)\sqrt[4]{9x^4-3};$$

$$3)\ y = \left(\frac{2}{3x^3} + \frac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2-9}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = 7x^2\sqrt{5+2x};\quad 2)\ y' = \frac{135x^7}{\sqrt[4]{(9x^4-3)^3}};\quad 3)\ y' = \frac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}.$$

Задача 22,23. Найти производную функции $y = uvw$, где u, v, w — функции $x: u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$.

Решение. Запишем данную функцию в виде $y = (uv)w$ и применим к ней формулу (22,5):

$$y' = (uv)'w + uvw', \text{ но } (uv)' = u'v + uv',$$

а поэтому $y' = (u'v + uv')w + uvw'$; раскрывая скобки, будем иметь окончательно

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'. \qquad (22,24)$$

Можно указать, что вообще, если $y = u_1u_2u_3 \ldots u_n$, то

$$y' = u_1'u_2u_3 \ldots u_n + u_1u_2'u_3 \ldots u_n + u_1u_2u_3' \ldots u_n + \\ + \ldots + u_1u_2u_3 \ldots u_n'.$$

Этот результат словесно выражается так: *чтобы вычислить производную произведения любого числа функций, надо продифференцировать первую функцию и умножить полученную производную на произведение всех остальных функций, затем найти производную второй функции и умножить ее на произведение всех остальных функций. Точно так же поступить со всеми функциями-сомножителями и все полученные таким образом произведения сложить.*

Задача 22,23а. Найти производную функции

$$y = (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2 \sqrt{4a + 6bx}.$$

Решение. На основании формулы (22,24), полученной в предыдущей задаче,

$$y' = (2a + 3bx)'(2a - 3bx)^2 \sqrt{4a + 6bx} + \\ + (2a + 3bx)[(2a - 3bx)^2]' \sqrt{4a + 6bx} + \\ + (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2 (\sqrt{4a + 6bx})'.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$y' = 3b(2a - 3bx)^2 \sqrt{4a + 6bx} + (2a + 3bx) \cdot 2 \cdot (2a - 3bx) \cdot (-3b) \times \\ \times \sqrt{4a + 6bx} + (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2 \frac{1}{2\sqrt{4a + 6bx}} \cdot 6b$$

и после упрощений окончательно

$$y' = \frac{3}{2} b(3bx - 2a)(21bx + 2a)\sqrt{4a + 6bx}.$$

Задача 22,24 (для самостоятельного решения). Найти производную функции

$$y = (4x - 7)(3x + 7)\sqrt[3]{3x + 7}.$$

Ответ.

$$y' = 28x\sqrt[3]{3x + 7}.$$

Задача 22,25 (для самостоятельного решения). Найти производную функции

$$y = \frac{a - x}{a + x}.$$

Ответ.

$$y' = -\frac{2a}{(a + x)^2}.$$

Задача 22,26. Найти производную функции

$$y = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}.$$

Решение. Здесь следует применить формулу (22,6) для дифференцирования дроби. При решении этой задачи и следующей будем делать подробные записи, а в дальнейшем от них откажемся. Надо научиться дифференцировать бегло, без промежуточных записей. Здесь $u = a^2 - x^2$, $v = a^2 + x^2$;

$$y' = \frac{(a^2 - x^2)'(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)'(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}.$$

Выполняя дифференцирование в числителе, получим, что

$$y' = \frac{-2x(a^2+x^2)-2x(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2},$$

а после очевидных упрощений

$$y' = -\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2}.$$

Задача 22,27. Найти производную функции

$$y = \frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}.$$

Решение. Применяя формулу (22,6), имеем

$$y' = \frac{(5+3x+x^2)'(5-3x+x^2)-(5-3x+x^2)'(5+3x+x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$y' = \frac{(3+2x)(5-3x+x^2)-(-3+2x)(5+3x+x^2)}{(5-3x+x^2)^2},$$

а после упрощений

$$y' = \frac{6(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$$

Задача 22,28 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \frac{x}{1+x^2};\quad 2)\ y = \frac{1+x^2}{1-x^2};\quad 3)\ y = \frac{x^m}{(1-x)^n}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};\qquad 2)\ y' = \frac{4x}{(1-x^2)^2};\qquad 3)\ y' = \frac{x^{m-1}[m(1-x)+nx]}{(1-x)^{n+1}}.$$

Задача 22,29. Найти производную функции

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. По формуле (22,6), считая $u = x$, $v = \sqrt{1+x^2}$, получаем

$$y' = \frac{x'\sqrt{1+x^2}-(\sqrt{1+x^2})'x}{(\sqrt{1+x^2})^2},$$

а выполняя дифференцирование, имеем

$$y' = \frac{1\cdot\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\cdot x}{1+x^2};$$

после упрощений получим, что

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование тригонометрических функций.

Задача 23,1. Найти производные функций:

1) $y = \sin kx$; 2) $y = \cos lx$; 3) $y = \operatorname{tg} px$; 4) $y = \operatorname{ctg} qx$.

Решение. 1) По формуле (22,13), полагая $u = kx$, имеем:

$$y = \sin u; \quad u = kx; \quad y' = \cos u \cdot u'; \quad y' = \underbrace{\cos kx}_{\substack{\text{производная}\\ \text{синуса}}} \cdot \underbrace{k}_{\substack{\text{производная}\\ u\,=\,kx}}; \quad y' = k\cos kx.$$

2) По формуле (22,14), полагая

$$y = \cos u; \; u = lx; \; y' = -\sin u \cdot u'; \; y' = \underbrace{-\sin lx}_{\substack{\text{производная}\\ \text{косинуса}}} \cdot \underbrace{l}_{\substack{\text{производная}\\ u=lx}}; \; y' = -l\sin lx.$$

3) По формуле (22,15), полагая

$$y = \operatorname{tg} u; \; u = px; \; y' = \frac{1}{\cos^2 u}u'; \; y' = \underbrace{\frac{1}{\cos^2 px}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{тангенса}}} \underbrace{p}_{\substack{\text{производная}\\ u=px}}; \; y' = \frac{p}{\cos^2 px},$$

или $y' = p\sec^2 px$.

4) По формуле (22,16), полагая

$$y = \operatorname{ctg} u; \; u = qx; \; y' = -\frac{1}{\sin^2 u}u'; \; y' = -\underbrace{\frac{1}{\sin^2 qx}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{котангенса}}} \underbrace{q}_{\substack{\text{производная}\\ u=qx}}; \; y' = -\frac{q}{\sin^2 qx}.$$

или $y' = -q\operatorname{cosec}^2 qx$.

После нескольких упражнений студент сам откажется от введения промежуточной переменной u, подразумевая ее в тех местах, где она нужна.

Задача 23,2 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \sin 5x$; 3) $y = \sin 15x$; 4) $y = \cos 4x$; 5) $y = -\cos 3x$; 6) $y = \cos 9x$.

Ответ. 1) $y' = 3\cos 3x$; 2) $y' = 5\cos 5x$; 3) $y' = 15\cos 15x$; 4) $y' = -4\sin 4x$; 5) $y' = 3\sin 3x$; 6) $y' = -9\sin 9x$.

Задача 23,3. Найти производные функций:

1) $y = \sin 2x^2$; 2) $y = \sin\sqrt{x}$; 3) $y = \operatorname{tg}\frac{1+x}{x}$; 4) $y = \cos\sqrt{\frac{1}{1+x}}$.

Решение. 1) Мы прежде всего вычисляем производную синуса, а так как синус берется от $2x^2$, то вычисляем производную $2x^2$. Производная данной функции равна произведению этих производных. Пользуясь формулой (22,13), получаем

$$y' = \underbrace{\cos 2x^2}_{\substack{\text{производная}\\ \text{синуса}}} \cdot \underbrace{4x}_{\substack{\text{производная}\\ 2x^2}}; \qquad y' = 4x\cos 2x^2.$$

2) При решении этого примера мы также прежде всего должны вычислить производную синуса, а так как синус вычисляется от $\sqrt{x}$, то надо взять производную от этого корня и полученные производные перемножить. Формула (22,13) дает

$$y' = \underbrace{\cos\sqrt{x}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{синуса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{корня}}}; \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}.$$

3) Здесь прежде всего надо продифференцировать тангенс, но так как он берется от дроби, то следует найти производную дроби и эти производные перемножить. По формуле (22,15) $\left(u = \frac{1+x}{x}\right)$.

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{тангенса}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+x}{x}\right)'}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{дроби}}} = \frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}} \cdot \frac{1 \cdot x - (1+x) \cdot 1}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1+x}{x}.$$

4) В этом примере следует сначала продифференцировать косинус. Так как косинус вычисляется от квадратного корня, то вслед за этим надо продифференцировать корень. Но корень вычисляется от дроби, а поэтому надо продифференцировать дробь и все три полученные производные перемножить. Здесь цепочка из трех звеньев:

$$y = \cos u; \quad u = \sqrt{v}; \quad v = \frac{1}{1+x}.$$

Производная

$$y' = \underbrace{-\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{косинуса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{корня}}} \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]}_{\substack{\text{производная}\\ \text{дроби}}}.$$

Окончательно

$$y' = \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}.$$

Аналогичное упражнение выполните самостоятельно.

Задача 23,4 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \sin\sqrt{\frac{1}{1-x}}; \qquad 2)\ y = \sqrt{\sin x};$$

$$3)\ y = \sqrt{\frac{1}{\cos x}}; \qquad 4)\ y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}.$$

Ответы даются в таком виде, который позволяет проверить решение. Упрощение ответа сделайте сами.

Ответ.

$$1)\ y' = \cos\sqrt{\frac{1}{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1-x}}}\cdot\left[-\frac{1}{(1-x)^2}\right]\cdot(-1);$$

$$2)\ y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x;\quad 3)\ y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos x}}}\cdot\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot(-\sin x);$$

$$4)\ y' = -\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

Задача 23,5. Найти производную функции $y = 3\sin^2 x$.

Решение. Запишем пример так: $y = 3(\sin x)^2$. Если $u = \sin x$, то $y = 3u^2$, и тогда

$$y' = 6uu' = 6\sin x\underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ u}}.$$

Теперь покажем, как решить задачу, не вводя u. Прежде всего продифференцируем степень, а так как в степень возводится $\sin x$, то продифференцируем и $\sin x$. Найденные производные перемножим, постоянный множитель 3 вынесем за знак производной:

$$y' = 3\cdot\underbrace{2\sin x}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная степе-}\\ \text{ни}}}\ \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{синуса}}};\quad y' = 6\sin x\cos x,$$

или

$$y' = 3\sin 2x.$$

Задача 23,6. Найти производную функции $y = \cos^6 x$.

Решение. Запишем пример в виде $y = (\cos x)^6$ и положим $y = u^6$, а $u = \cos x$; тогда $y' = 6u^5u' = 6(\cos x)^5\cdot(-\sin x)$; $y' = -6\sin x\cos^5 x$.

Теперь ту же задачу решим без введения u.

У нас дифференцируется шестая степень косинуса: сначала продифференцируем степень, а так как в степень возводится косинус, то надо найти производную и от косинуса, а затем эти производные перемножить.

Итак,

$$y = \cos^6 x;\quad y' = \underbrace{6\cos^5 x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от шестой}\\ \text{степени ко-}\\ \text{синуса}}}\cdot\underbrace{(-\sin x)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от } \cos x}};$$

$$y = -6\sin x\cos^5 x.$$

Теперь самостоятельно, но без введения u (u держать в уме) решите несколько аналогичных примеров.

Задача 23,7 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \sin^3 x$; 2) $y = \operatorname{tg}^3 x$; 3) $y = \operatorname{ctg}^4 x$;
4) $y = 5\cos^5 x$; 5) $y = 7\operatorname{tg}^6 x$; 6) $y = 8\sin^2 x$.

Ответ. 1) $y' = 3\sin^2 x\cos x$; 2) $y' = 3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x$;
3) $y' = -4\operatorname{ctg}^3 x\operatorname{cosec}^2 x$; 4) $y' = -25\cos^4 x\sin x$;
5) $y' = 42\operatorname{tg}^5 x\sec^2 x$; 6) $y' = 16\sin x\cos x = 8\sin 2x$.

Задача 23,8. Найти производную функций:

1) $y = \sqrt{\sin x}$; 2) $y = \sqrt{\sin^2 x + 3\cos^3 4x}$; 3) $y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Решение. 1) Вычисляем производную от квадратного корня, а так как корень извлекается из $\sin x$, то следует вычислить производную от синуса и перемножить эти производные. Последовательно получаем

$$y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\\text{квадратно-}\\\text{го корня}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{от си-}\\\text{нуса}}}.$$

2) Здесь корень квадратный извлекается из суммы $\sin^2 x + 3\cos^3 4x$. Поэтому сначала вычисляем производную от квадратного корня, а потом умножаем ее на производную от подкоренного выражения:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^3 4x}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{корня}}} [\underbrace{(2\sin x\cos x)}_{\substack{\text{производная от}\\ \sin^2 x}} + 3 \cdot \underbrace{3\cos^2 4x}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от сте-}\\\text{пени cos}}} \cdot \underbrace{(-\sin 4x)}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\ \cos 4x}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{про-}\\\text{извод-}\\\text{ная от}\\ 4x}}].$$

3) Сначала возьмем производную дроби, затем вычислим производную от знаменателя дроби и перемножим эти производные:

$$y' = -\underbrace{\frac{1}{\cos^6 x}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{дроби}}} \cdot \underbrace{3\cos^2 x \cdot (-\sin x)}_{\substack{\text{производная зна-}\\\text{менателя дроби}}} = \frac{3\sin x}{\cos^4 x}.$$

Задача 23,9 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \sin(px + g)$;

2) $y = \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{3}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\sin 3x - 5\sin x$;

3) $y = \frac{1}{8}\sin 8x + \frac{2}{3}\sin 6x + \sin 4x - 2\sin 2x - 5x$;

4) $y = \frac{1}{9}\cos 9x + \frac{3}{7}\cos 7x - \frac{8}{3}\cos 3x - 6\cos x$.

Задача 23,10. Найти y', если

$$y = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x.$$

Решение. Производную от первого, второго и третьего слагаемых будем искать, как производную от произведения

$$y' = \underbrace{3x^2 \sin x + x^3 \cos x}_{\text{производная первого слагаемого}} + \underbrace{6x \cos x - 3x^2 \sin x}_{\text{производная второго слагаемого}} - \underbrace{6 \sin x - 6x \cos x}_{\text{производная третьего слагаемого}} +$$

$$+ \underbrace{6 \sin x}_{\text{производная четвертого слагаемого}};$$

после приведения подобных членов получаем $y' = x^3 \cos x$.

Задача 23,11 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$; 2) $y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) \sin x$;

3) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 2x$; 4) $y = \left(\cos^2 x + \frac{2}{3}\right) \sin^3 x$.

Указание. При дифференцировании первого сомножителя во втором примере учесть решение третьего примера задачи 23,8.

Ответ. 1) $y' = \frac{1}{\cos^4 x}$; 2) $y' = \frac{8 - 3\cos^4 x}{\cos^5 x}$;

3) $y' = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$; 4) $y' = 5 \sin^2 x \cos^3 x$.

Задача 23,12 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \frac{1}{3} \cos x \operatorname{ctg} x - \frac{1}{6} \cos 2x \sin x - \frac{3}{2} \sin x - \frac{4}{3} \operatorname{cosec} x$;

2) $y = \frac{15}{8} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$.

Ответ. 1) $y' = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$; 2) $y' = -\frac{\cos^6 x}{\sin^2 x}$.

Задача 23,13. Найти производную функции

$$y = \frac{3 \operatorname{cosec} x - 2 \sin x}{5 \cos^5 x} - \frac{16}{5} \operatorname{ctg} 2x.$$

Решение. Первое слагаемое — дробь, а потому при его дифференцировании должна быть использована формула (22,6):

$$y' = \frac{1}{5}\frac{(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)'\cos^5 x - (\cos^5 x)'(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{\cos^{10} x} -$$

$$-\frac{16}{5}\left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{(-3\operatorname{cosec} x\operatorname{ctg} x - 2\cdot\cos x)\cos^5 x - (-5\cos^4 x\sin x)\cdot(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{5\cos^{10} x} +$$

$$+\frac{32}{5}\frac{1}{\sin^2 2x},$$

а после упрощений окончательно получим $\left(\text{если заменить}\right.$

$$\left.\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},\ \text{а}\ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\right),$$

что

$$y' = \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^6 x}.$$

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание; Дифференцирование обратных тригонометрических функций.

Задача 24,1. Найти производные функций:

1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arccos x^m$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}\ (x > 0)$; 4) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x > 0)$.

Решение. 1) Задачу перепишем в виде

$$y = \arcsin u,\quad u = 2x.$$

Тогда по формуле (22,19)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}(2x)';\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\underbrace{2}_{\substack{\text{про-}\\\text{извод-}\\\text{ная}\\\text{от}\\u\,=\,2x}};\quad y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Можно было обойтись и без введения промежуточного аргумента. Присмотритесь к формуле (22,19). **Производная от функции $y = \arcsin u$ находится так: единица делится на квадратный корень из единицы минус квадрат той функции, которая стоит**

под знаком арксинуса, и эта дробь умножается на производную этой функции. Поэтому сразу можно было бы писать:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\\text{арксинуса}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\\text{функции,}\\\text{стоящей}\\\text{под зна-}\\\text{ком арк-}\\\text{синуса}}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Таким образом, мы функцию u не ввели, а держали ее в уме.

2) Здесь мы используем формулу (22,20), которая только знаком отличается от формулы (22,19) и проведем решение с введением и без введения промежуточного аргумента. Перепишем задачу так:

$$y = \arccos u; \quad u = x^m; \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (x^m)' =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \underbrace{mx^{m-1}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{функции}\\u = x^m}} = -\frac{mx^{m-1}}{\sqrt{1-x^{2m}}};$$

$$(u = x^m, \text{ а потому } u^2 = x^{2m}).$$

Теперь решим эту задачу, не вводя промежуточного аргумента.

$$y' = -\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^{2m}}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от арк-}\\\text{косинуса}}} \cdot \underbrace{mx^{m-1}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная от}\\\text{функции,}\\\text{стоящей}\\\text{под знаком}\\\text{арккосинуса}}}.$$

3) При решении этого примера будем пользоваться формулой (22,21). Опять-таки сначала введем промежуточный аргумент u, а потом проведем решение без этого осложнения.

Перепишем задачу так: $y = \operatorname{arctg} u$; $u = \sqrt{x}$;

$$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{так как } u = \sqrt{x}, \text{ то } u^2 = x).$$

Запомните, что производная функции $y = \operatorname{arctg} u$ равна дроби, у которой числитель равен 1, а знаменатель равен 1 плюс квадрат функции, стоящей под знаком арктангенса, и дробь умножается на производную этой функции:

$$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{от арк-}\\\text{тан-}\\\text{генса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{от функции,}\\\text{стоящей под}\\\text{знаком арк-}\\\text{тангенса}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

4) Здесь следует воспользоваться формулой (22,22). Поступим, как и раньше: сначала введем промежуточную функцию u, а потом проведем решение, не вводя ее.

Перепишем задачу:

$$y = \operatorname{arcctg} u, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$y' = -\frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\Big(\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{дроби}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная зна-}\\ \text{менателя}\\ \text{дроби}}}\Big).$$

Так как $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $u^2 = \frac{1}{x}$, а потому

$$y' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right),$$

и окончательно

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}.$$

Мы получили такой же ответ, как и в предыдущей задаче. Этот результат не является случайным, потому что при $\alpha > 0$ имеет место формула $\operatorname{arctg}\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\alpha}$, а в нашем случае $\operatorname{arctg}\sqrt{x} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{x}}$.

В дальнейшем нам придется ссылаться на соотношения между обратными тригонометрическими функциями.

Читателя, интересующегося относящимися сюда выводами, отсылаем к книге: С. И. Новоселов. Обратные тригонометрические функции.

Задача 24,2 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \arcsin 5x$; 2) $y = \arcsin\sqrt{x}\ (x > 0)$; 3) $y = \arcsin mx$;
4) $y = \arccos 6x$; 5) $y = \arccos(1 - x^2)$; 6) $y = \arccos\frac{1}{x}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$; 2) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;
3) $y' = \frac{m}{\sqrt{1-m^2x^2}}$; 4) $y' = -\frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}$;
5) $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$; 6) $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Задача 24,3 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \operatorname{arctg} 5x$; 2) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 3) $y = \operatorname{arctg} 3x^2$;

4) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y = \operatorname{arcctg} mx$; 6) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{1+x^2}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{5}{1+25x^2}$; 2) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$; 3) $y' = \frac{6x}{1+9x^4}$;

4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$; 5) $y' = -\frac{m}{1+m^2x^2}$;

6) $y' = \frac{2x}{2+2x^2+x^4}$.

В двух следующих задачах даны упражнения в дифференцировании степеней обратных тригонометрических функций.

Задача 24,4. Найти производные функций:

1) $y = \arcsin^2 x$; 2) $y = \arcsin^3 3x$; 3) $y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt[3]{x}$.

Решение. 1) Этот пример решим сначала с помощью введения промежуточного аргумента u. Перепишем задачу так: $y = (\arcsin x)^2$.

Пусть $y = u^2$, $u = \arcsin x$.

Поэтому $y' = 2uu' = 2(\arcsin x)(\arcsin x)'$;

$$y' = \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Этот же пример решим без введения промежуточного аргумента. У нас $y = \operatorname{arsin}^2 x$.

Прежде всего следует продифференцировать степень, а так как в степень возводится $\arcsin x$, то вслед за этим надо продифференцировать $\arcsin x$ и производные перемножить;

$$y' = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Мы настоятельно рекомендуем не вводить промежуточных аргументов.

а) продифференцируем сначала степень;

в) так как в степень возводится $\arcsin 3x$, надо взять производную от $\arcsin 3x$;

с) вычислим производную от $3x$ потому, что арксинус вычисляется от $3x$. Полученные производные перемножим.

Записи расположатся так:

$$y' = \underbrace{3\arcsin^2 3x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от степени}\\ \text{арксинуса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от арксинуса}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная } 3x}}$$

3) Этот пример также решим без введения промежуточного аргумента.

$$y' = \underbrace{4\,\mathrm{arctg}^3 \sqrt{x}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{арктангенса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{корня}}}$$

Задача 24,5 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \arcsin^3 x^2$; 2) $y = \mathrm{arctg}^2 \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \arccos^4 5x$;

4) $y = \mathrm{arcctg}\sqrt{x^3}$; 5) $y = \mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.

Ответ. 1) $y' = 3\arcsin^2 x^2 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 2) $y' = -\frac{4x}{x^4+1}\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2}$.

3) $y' = -\frac{20\arccos^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$; 4) $y' = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$;

5) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Задача 24,6. * Продифференцировать:

1) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \mathrm{tg}(\arcsin x)$;

3) $y = \mathrm{arctg}\frac{\cos x}{1+\sin x}$; 4) $y = \mathrm{arctg}\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$.

Решение. 1) При дифференцировании не будем вводить промежуточных аргументов:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}}_{\substack{\text{производная от}\\ \text{арксинуса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{корня}}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная под-}\\ \text{коренного}\\ \text{выражения}}};$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

А так как $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$

то получаем, что при $x > 0$ $y' = -\frac{x}{x\sqrt{1-x^2}}$; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

а при $x < 0$ $y' = -\frac{x}{-x\sqrt{1-x^2}}$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

В первом случае ($x > 0$) получилась производная, равная производной от $\arccos x$, а во втором ($x < 0$) производная получилась

---

* В этой и следующих задачах буквы a и b имеют такие значения, что содержащие их функции вещественны. Неоднозначность знака не указывается.

такая же, как от арксинуса. Этот результат не случаен. Из тригонометрии известно, что если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos x,$$

а при значениях $-1 \leqslant x \leqslant 0$

$$\arcsin\sqrt{1-x^2} = \pi - \arccos x.$$

2) $\underbrace{y' = \sec^2(\arcsin x)}_{\text{производная тангенса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{производная арксинуса}};$

3) $y = \underbrace{\frac{1}{1+\frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}}}_{\text{производная арктангенса}} \underbrace{\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}}_{\text{производная дроби}}; \quad y' = -\frac{1}{2}.$

4) $$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)^2} \cdot \frac{-b\sin x(b+a\cos x)-(-a\sin x)(a+b\cos x)}{(b+a\cos x)^2};$$

$$y' = \frac{-b^2\sin x + a^2\sin x}{(b+a\cos x)^2+(a+b\cos x)^2}$$ и окончательно

$$y' = \frac{(a^2-b^2)\sin x}{(a^2+b^2)+(a^2+b^2)\cos^2 x + 4ab\cos x}.$$

Задача 4,7 (для самостоятельного решения). Продифференцировать:

1) $y = \arcsin x + \arccos x$; 2) $y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x$;

3) $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{a+x}{1-ax}$

и объяснить простоту полученных результатов.

Ответ. 1) 0; 2) 0; 3) $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

Задача 24,8. Показать, что каждая из функций

1) $y = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}$; 2) $y = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}$;

3) $y = \arcsin\frac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}$

имеет производную, равную $\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$.

Решение. Дифференцирование проведем с подробными записями, но без введения промежуточных аргументов:

1) $$y' = 2\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}\right)^2}}}_{\text{производная арксинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a-b}}_{\text{производная подкоренного выражения}}.$$

В этом примере мы прежде всего дифференцируем арксинус (постоянный множитель 2 сразу вынесен за знак производной). Арксинус берется от корня и, следовательно, нужно взять производную корня. Корень извлекается из дроби, а потому следует вычислить производную дроби (дробь имеет постоянный знаменатель $a-b$, а производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя дроби, разделенной на тот же знаменатель). Производная заданной функции равна произведению полученных выше производных.

После упрощений получаем:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{x-b}{a-b}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}} \cdot \frac{1}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

$$2)\ y' = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}\right)^2}}_{\text{производная от арктангенса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\frac{(a-x)+(x-b)}{(a-x)^2}}_{\text{производная подкоренного выражения}}.$$

Упрощения проведите самостоятельно и получите, что

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

$$3)\ y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}\right)^2}} \cdot \frac{2}{a-b} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(a-x)(x-b)}} \times$$

$$\times [-1\cdot(x-b)+1\cdot(a-x)] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4(a-x)(x-b)}{(a-b)^2}}} \cdot \frac{2}{a-b} \times$$

$$\times \frac{(-2x+a+b)}{2\sqrt{(a-x)(x-b)}} = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2-4(a-x)(x-b)}} \cdot \frac{a+b-2x}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

Но выражение под корнем в знаменателе первой дроби равно $(a+b-2x)^2$, а потому получаем, что $y' = \dfrac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$,

Задача 24,9 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функцию

$$y = \arccos\sqrt{\frac{\cos 3x}{\cos^3 x}}.$$

Ответ.

$$y' = -\sqrt{\frac{3}{\cos x \cos 3x}}.$$

ДВАДЦАТЬ ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование показательной и логарифмической функций. Логарифмическое дифференцирование.

При дифференцировании показательной и логарифмической функций мы будем пользоваться формулами (22,10), (22,11) и (22,12) из основной таблицы формул.

Задача 25,1. Найти производные функций:

1) $y = a^{3x}\ (a > 0)$; 2) $y = 7^{\frac{1}{4x}}$ 3) $y = 2^{x^3}$;

4) $y = 4^{\sin^2 x}$ 5) $y = e^{x^4}$; 6) $y = e^{\sqrt{x^2+x+2}}$;

7) $y = e^{\sqrt{\sin x}}$; 8) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$;

9) $y = e^{\operatorname{tg} x}$; 10) $y = e^{\arcsin^2 x}$.

Решение. 1) По формуле (12,10), если $y' = a^u (a > 0)$, то $y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.

В нашем случае, полагая $y = a^u$, $u = 3x$, имеем $y' = a^u \ln a \cdot 3 = 3a^{3x} \ln a$.

Здесь снова возникает вопрос о целесообразности введения промежуточного аргумента u.

Можно обойтись без этого. Техника дифференцирования у читателя уже выработалась, а потому все последующие примеры должны решаться без введения вспомогательных переменных. Пример первый должен решаться так: $y' = a^{3x} \ln a\,(3x)'$;

$$y' = \underbrace{a^{3x}\ln a}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная пока-}\\\text{зательной}\\\text{функции}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{производ-}\\\text{наз пока-}\\\text{зателя}\\\text{степени}}}.$$

2) Здесь также будем пользоваться формулой (22,10):

$$y' = \underbrace{7^{\frac{1}{4x}} \cdot \ln 7}_{\substack{\text{производная}\\\text{показательной}\\\text{функции}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\substack{\text{производная}\\\text{показателя}\\\text{степени}}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}7^{\frac{1}{4x}} \cdot \ln 7.$$

3) По формуле (22,10) имеем:

$$y' = \underbrace{2^{x^3} \ln 2}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная пока-}\\\text{зательной}\\\text{функции}}} \cdot \underbrace{3x^2}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{показа-}\\\text{теля}\\\text{степени}}} = 3x^2 2^{x^3} \ln 2.$$

4) По формуле (22,10) имеем

$$y' = \underbrace{4^{\sin^2 x} \cdot \ln 4}_{\substack{\text{производная}\\\text{показательной}\\\text{функции}}} \cdot \underbrace{2\sin x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{степени}\\\text{синуса}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{синуса}}} = 4^{\sin^2 x} \sin 2x \cdot \ln 4.$$

5) Из формулы (22,10) следует, что производная от функции $y = e^{x^4}$ равна ей же самой, умноженной на производную показателя степени u. Получаем $y' = e^{x^4}(x^4)' = 4x^3e^{x^4}$.

6) $$y' = e^{\sqrt{x^2+x+2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{корня}}} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{подкоренного}\\ \text{выражения}}}.$$

7) Здесь также следует воспользоваться формулой (22,10):

$$y' = e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{корня}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{синуса}}}.$$

8) Применим формулу для дифференцирования произведения:

$$y' = (e^x)'(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)' =$$
$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(3x^2 - 6x + 6);$$
$$y' = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + 3x^2 - 6x + 6).$$

Окончательно после приведения подобных членов в скобке $y' = x^3e^x$.

9) $$y' = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x)' = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}.$$

10) $$y' = e^{\arcsin^2 x} \cdot \underbrace{2\arcsin x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}\\ \text{арксинуса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{арксинуса}}}.$$

Задача 25,2 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = a^{x^n}$ $(a > 0)$; 2) $y = (a^x)^n$ $(a > 0)$;

3) $y = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$; 4) $y = \frac{x^4}{e^x}$;

5) $y = e^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = e^{-x}$.

Ответ. 1) $y' = a^{x^n} \cdot \ln a \cdot nx^{n-1}$; 2) $y' = na^{nx} \cdot \ln a$;

3) $y' = e^{\operatorname{arc\,tg} x}\frac{1}{1+x^2}$; 4) $y' = \frac{(4x^3 - x^4)}{e^x}$;

5) $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = -e^{-x}$;

Задача 25,3. Продифференцировать функции:

1) $y = \ln(ax + b)$; 2) $y = \ln^5 x$; 3) $y = \ln \sin x$;

4) $y = \ln \operatorname{arc\,tg} x$; 5) $y = x \ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$;

7) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$; 8) $y = \ln(\ln x)$.

Решение. По формуле (22,12), если $y = \ln u$, то $y' = \frac{1}{u} u'$. Чтобы получить производную от функции $\ln u$, где u — функция x, надо единицу разделить на функцию u, стоящую под знаком логарифма; полученную дробь следует умножить на производную этой функции:

$$y' = \frac{1}{ax+b}(ax+b)' = \frac{1}{ax+b} a = \frac{a}{ax+b}.$$

2) Здесь дифференцируется степень логарифма, а потому

$$y' = \underbrace{5\ln^4 x}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{производная логарифма}}; \quad y' = \frac{5\ln^4 x}{x};$$

3) $y' = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\text{производная логарифма}} \cdot \underbrace{\cos x = \operatorname{ctg} x}_{\text{производная синуса}}$

4) Аналогично решается пример 4: $y' = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

5) Здесь следует применить формулу для дифференцирования произведения

$$y' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

6) По формуле для дифференцирования дроби имеем

$$y' = \frac{(\ln x)'x - x'\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

7) $y' = \underbrace{\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}}_{\text{производная логарифма}} \underbrace{\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}_{\text{производная от функции, стоящей под знаком логарифма}}$.

После упрощений получим, что $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

8) $y' = \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\text{производная логарифма}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{производная от функции, стоящей под знаком логарифма}}; \quad y' = \frac{1}{x \ln x}$;

Задача 25,3а (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \ln(15e^x + x^2)$; 2) $y = 5^{\ln(x^2+x+1)}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{15e^x + 2x}{15e^x + x^2}$; 2) $y' = 5^{\ln(x^2+x+1)} \ln 5 \cdot \frac{2x+1}{x^3+x+1}$.

Задача 25.4. Продифференцировать функции:

1) $y=\ln\frac{x}{1-x^4}$;

2) $y=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 3) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Во всех этих примерах прежде чем вычислить производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

1) Перепишем пример в виде $y=\ln x-\ln(1-x^4)$, а теперь

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^4}(1-x^4)'=\frac{1}{x}+\frac{4x^3}{1-x^4};$$

окончательно

$$y'=\frac{1+3x^4}{x(1-x^4)}.$$

2) Перепишем пример в виде $y=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, и тогда

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x;\quad y'=\frac{1}{x(1+x^2)}.$$

3) В преобразованном виде пример запишется так:

$$y=\ln(1+x)-\ln(1-x),$$

а поэтому

$$y'=\frac{1}{1+x}(1+x)'-\frac{1}{1-x}(1-x)',$$

или

$$y'=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\qquad y'=\frac{2}{1-x^2}.$$

Задача 25,5 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y=\ln\frac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}$; 2) $y=\ln\frac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}}\sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}}$;

3) $y=\ln\frac{x^2(2x+4)^7}{(6+7x+2x^2)(2x+3)^7}$; 4) $y=\ln\sqrt{\frac{\sqrt{3}-x\sqrt{7}}{\sqrt{3}+x\sqrt{7}}}$.

Указание. Прежде чем вычислять производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

Ответ. 1) $y'=\frac{x^3}{(x^2-2)(3-x^2)}$; 2) $y'=\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2-11x-12}$;

3) $y'=\frac{12}{x(6+7x+2x^2)}$; 4) $y'=\frac{\sqrt{21}}{7x^2-3}$.

Задача 25,6 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции;

1) $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Указание. Под знаком логарифма в первом слагаемом выгодно освободиться от иррациональности в знаменателе. После этого дробь сначала прологарифмировать и только потом приступить к дифференцированию. Производная второго слагаемого найдена в задаче 25,3 (пример 7).

2) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$; 2) $y' = \frac{2ax^2}{x^4-a^4}$.

Задача 25,7 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

2) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

3) $y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)$.

Указание. В каждом примере, прежде чем дифференцировать первую дробь, надо ее прологарифмировать.

Ответ. 1) $y' = \frac{1}{1+x^4}$; 2) $y' = \frac{x^2}{1+x^4}$; 3) $y' = \frac{1}{1+x^2+x^4}$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если требуется продифференцировать произведение нескольких функций или дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведения, часто представляется выгодным обе части данного выражения сначала прологарифмировать, по основанию e, а потом уже приступить к дифференцированию. Этот прием получил название логарифмического дифференцирования. Производная от логарифма функции называется логарифмической производной.

К этому приему удобно прибегать и при дифференцировании выражений, содержащих корни из дробей. К нему прибегают всегда, когда следует продифференцировать функцию вида

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

т. е. когда и основание степени, и показатель степени есть функции x.

Способ логарифмического дифференцирования будет подробно рассмотрен на ряде примеров.

Задача 25,8. Найти производную функций:

1) $y=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$;

2) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}$;

3) $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Решение. Во всех предложенных примерах целесообразно сначала прологарифмировать по основанию e обе части равенства, а потом уже дифференцировать.

1) Если $y=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$, то $\ln y = 2\ln(x+5)+3\ln(2x-7)+\ln(x-2)+\ln(x+3)$.

Будем считать функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x и найдем ее производную:

Производная функции $\ln y$ с учетом того, что y есть функция x, равна $\frac{1}{y}y'$, а потому, вычисляя производную левой и правой частей равенства, получим

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{x+5}+\frac{3}{2x-7}\cdot 2+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}.$$

Умножая обе части этого равенства на y и учитывая, что y есть заданная функция, получим

$$y'=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)\left[\frac{2}{x+5}+\frac{6}{2x-7}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right].$$

2) Поступая так же, как в первом примере, получим

$$\ln y=\frac{1}{4}\ln(x^2+7x-8)+\frac{1}{6}\ln(x^4-1)-\frac{1}{3}\ln(x^3-3x^2+x-4).$$

Считая функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+7x-8}(2x+7)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^4-1}4x^3-$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-3x^2+x-4}\cdot(3x^2-6x+1).$$

Умножая обе части этого равенства на y и зная, что y есть заданная функция, получаем окончательно выражение искомой производной:

$$y'=\frac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2x+7}{x^2+7x-8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4x^3}{x^4-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2-6x+1}{x^3-3x^2+x-4}\right).$$

3) Здесь опять-таки целесообразно сначала прологарифмировать по основанию e обе части равенства, а потом уже дифференцировать:

$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4).$$

Считая, как и в двух предыдущих примерах, $\ln y$ сложной функцией переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y}y' = 2\cdot\frac{1}{x+5} + 3\cdot\frac{1}{x-4} - 5\cdot\frac{1}{x+2} - 2\cdot\frac{1}{x+4},$$

а после умножения обеих частей равенства на y, учитывая, что y есть заданная функция, получаем окончательное выражение производной

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x-4}\right).$$

4) Прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(ax+b) - \ln(cx+d)].$$

Считая, что $\ln y$ есть сложная функция переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{ax+b}\cdot a - \frac{1}{cx+d}\cdot c\right].$$

Умножая обе части этого равенства на $y = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, получим, что искомая производная

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right)\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}};$$

и после очевидных упрощений окончательно

$$y' = \frac{ad-bc}{2(ax+b)(cx+d)}\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}};$$

Задача 25,9 (для самостоятельного решения). Найти производные функции:

1) $y = (5x-4)^3(x-2)^2(3-4x)$; 2) $y = \sqrt[5]{\frac{x(x^2+2)}{x-4}}$;

3) $y = \frac{5x^2}{x^2+1}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^4 x$; 4) $y = \frac{(x+5)^7(x^2-4x+2)^3}{(x^3+3x^2+5)^2}$.

Задача 25,10 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

$$1)\ y = \frac{(2x-3)^2(4x+7)^2}{\sqrt[3]{(x-2)^5(x-4)^7}};\quad 2)\ y = \sqrt{\frac{(2+x)(3-4x)}{(5-2x)(3x-4)}};$$

$$3)\ y = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x-4)^5}\sqrt{(x-1)^3}}.$$

Теперь мы займемся дифференцированием функций вида

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Читатель должен обратить внимание на тот факт, что для дифференцирования этой функции непригодна ни формула (22,8), ни (22,10), так как в первой из них основание степени u есть функция x, а показатель степени — величина постоянная, во второй основание степени — постоянная величина, а показатель степени — функция x. В рассматриваемом случае и основание степени $f(x)$, и показатель степени $\varphi(x)$ — величины переменные — функции независимой переменной.

В общем виде задача дифференцирования этой функции решается так:

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Прологарифмируем по основанию e обе части равенства и получим

$$\ln y = \varphi(x)\ln f(x).$$

Теперь, считая $\ln y$ сложной функцией переменной x, найдем производную обеих частей последнего равенства, дифференцируя правую часть, как произведение

$$\frac{1}{y}y' = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x).$$

Умножая теперь обе части этого равенства на y и учитывая, что $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$, получаем окончательно

$$y' = [f(x)]^{\varphi(x)}\left\{\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}.$$

Запоминать эту формулу не следует, а вместо этого надо хорошо усвоить метод вычисления производной от функций рассматриваемого вида.

Задача 25,11. Найти производную функции $y = x^x\ (x > 0)$.

Решение. Беря натуральные логарифмы от обеих частей равенства, получим $\ln y = x\ln x$ и дифференцируем теперь обе части равенства, считая $\ln y$ сложной функцией x:

$$\frac{1}{y}y' = \ln x + \frac{1}{x}x;\qquad \frac{1}{y}y' = \ln x + 1.$$

Умножая теперь обе части равенства на y, который по условию равен x^x, получаем окончательно $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Замечание. В условии задачи указано, что $x > 0$ потому, что x в последующем оказывается под знаком логарифма, а логарифмы можно вычислять только от положительных чисел.

Задача 25,12. Определить производную функции

$$y = (\sin x)^{\cos x}, \qquad (0 < x < \pi)$$

Решение. Беря натуральные логарифмы обеих частей равенства, получаем

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x$$

(так как $\sin x$ стоит под знаком логарифма, то является существенной оговорка в условии задачи, что x берется из интервала $(0; \pi)$, так как для значений x из этого интервала $\sin x > 0$ и $\ln \sin x$ имеет смысл). Теперь продифференцируем обе части последнего равенства, считая, что $\ln y$ — сложная функция переменной x:

$$\frac{1}{y} y' = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Умножая обе части этого равенства на y, который по условию задачи равен $(\sin x)^{\cos x}$, получаем окончательно, что

$$y' = (\sin x)^{\cos x} \left\{ -\sin x \cdot \ln \cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right\}.$$

ДВАДЦАТЬ ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Гиперболические функции. Дифференцирование гиперболических функций. Дифференцирование неявных функций.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Предыдущие практические занятия убедили читателя в широком применении при решении разобранных задач показательной функции e^x. Но кроме самой этой функции как в математике, так и в прикладных науках применяются различные комбинации ее с функцией e^{-x}.

По определению вводятся такие часто встречающиеся комбинации функций e^x и e^{-x}:

$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом x и обозначается символом $\operatorname{sh} x$;

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty); \tag{26,1}$$

$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим косинусом x и обозначается символом ch x

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty); \tag{26,2}$$

$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ называется гиперболическим тангенсом x и обозначается символом th x

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty); \tag{26,3}$$

$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ называется гиперболическим котангенсом x и обозначается символом cth x

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (-\infty < x < 0), \qquad (0 < x < +\infty). \tag{26,4}$$

Производные гиперболических функций вычисляются по формулам ($u = u(x)$):

$$y = \operatorname{sh} u; \quad y' = \operatorname{ch} u \cdot u'; \tag{26,5}$$

$$y = \operatorname{ch} u; \quad y' = \operatorname{sh} u \cdot u'; \tag{26,6}$$

$$y = \operatorname{th} u; \quad y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'; \tag{26,7}$$

$$y = \operatorname{cth} u; \quad y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'. \tag{26,8}$$

Эти формулы следует запомнить.

Задача 26,1 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции sh x, th x и cth x — нечетные, а функция ch x — четная.

Указание. В формулах (26,1)—(26,2) заменить x на $-x$ и убедиться, что $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$; $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$; $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$, а $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$;

Задача 26,2. Вычислить производные функций: 1) $y = \operatorname{sh}^2 x$; 2) $y = \operatorname{th}^3 x^2$; 3) $y = \ln \operatorname{sh} x$; 4) $y = \cos(\operatorname{ch} x)$.

Решение. 1) Используя правило дифференцирования сложной функции и формулу (26, 5), получаем, что $y' = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$ (проверьте, что из определения гиперболических функций действительно следует, что $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$);

2) $y' = \underbrace{3 \operatorname{th}^2 x^2}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x^2}}_{\text{производная гиперболического тангенса}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{производная } x^2};$

3) $y' = \frac{1}{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x = \operatorname{cth} x$; 4) $y' = -\underbrace{\sin(\operatorname{ch} x)}_{\text{производная косинуса}} \cdot \underbrace{\operatorname{sh} x}_{\text{производная гиперболического косинуса}}$

Задача 26,3 (для самостоятельного решения). Вычислить производные функций: 1) $y = \operatorname{ch}^3 x$; 2) $y = \operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^2 x$; 3) $y = \operatorname{ch}(\sin x)$; 4) $y = \sin(\operatorname{ch} x)$; 5) $y = \ln \operatorname{ch} x$; 6) $y = \ln \operatorname{th} x$; 7) $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x + \sin x \cdot \operatorname{sh} x$; 8) $y = \operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x$; 9) $y = \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\operatorname{sh} x + \sin x}$.

Ответ. 1) $y' = 3\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x$; 2) $y' = \operatorname{ch}^3 x$; 3) $y' = \operatorname{sh}(\sin x)\cdot\cos x$; 4) $y' = \cos(\operatorname{ch} x)\cdot\operatorname{sh} x$; 5) $y' = \operatorname{th} x$; 6) $y' = \frac{2}{\operatorname{sh} 2x}$; 7) $y' = 2\operatorname{sh} x \cos x$; 8) $y' = \operatorname{sch}^4 x$; 9) $y = \frac{2 \operatorname{sh} x \sin x}{(\operatorname{sh} x + \sin x)^2}$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением вида $f(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно y, то y называется неявной функцией x.

Несмотря на то, что уравнение $f(x, y) = 0$ не разрешено относительно y, оказывается возможным найти производную от y по x.

В примерах, которые рассматриваются ниже, указан прием для нахождения производной в случае, когда функция задана неявно. Прием этот состоит в том, что обе части уравнения $f(x, y) = 0$ дифференцируются по x с учетом, что y есть функция x, и из полученного уравнения определяется y'.

Задача 26,4. Найти производную от неявной функции $5x + 3y - 7 = 0$.

Решение. Дифференцируя по x обе части равенства и учитывая, что: 1) y есть функция x и что 2) производная правой части равенства равна нулю, получаем $5 + 3y' = 0$; $3y' = -5$; $y' = -\frac{5}{3}$.

Задача 26,5. Найдем производную y' неявных функций:

1) $x^2 + y^2 - 25 = 0$; 2) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Решение. 1) При дифференцировании y^2 по x получается $(y^2)'_x = 2yy'$.

Здесь сначала продифференцирована степень y, а потом дифференцируется по x основание степени y (производная от y по x есть y'). Обе эти производные на основании правила дифференцирования сложной функции перемножаются.

Дифференцируя обе части равенства, получаем $2x + 2yy' = 0$. Сокращая на 2 и перенося x в правую часть равенства, имеем $yy' = -x$; разрешая это уравнение относительно y', находим, что $y' = -\frac{x}{y}$.

2) При дифференцировании последнего слагаемого второго примера надо применить формулу для дифференцирования произ-

ведения и тогда $(3axy)'_x = 3a(y + xy')$. Поэтому получаем $3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0$.

Сокращаем на 3, раскрываем скобки, переносим члены, не содержащие y', в правую часть равенства и получаем $(y^2 - ax)y' = ay - x^2$, а отсюда $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

Задача 26,6 (для самостоятельного решения). Найти производную y' неявных функций:

1) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$;

2) $x^3 + y^3 - a = 0$.

Ответ. 1) $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$; 2) $y' = -\frac{x^2}{y^2}$.

Задача 26,7. Найти производную неявных функций:

1) $y^n - \frac{x+y}{x-y} = 0$; 2) $x^n - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 0$.

Решение. 1) Считая, что y есть функция x, производную по x от y^n находим так:

$$(y^n)' = ny^{n-1}y'.$$

Дифференцируя обе части уравнения, получаем:

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = 0.$$

Умножим теперь обе части последнего равенства на $(x-y)^2$, раскроем скобки в числителе дроби и получим

$$ny^{n-1}y'(x-y)^2 - x - xy' + y + yy' + x - xy' + y - yy' = 0.$$

У членов, содержащих y', вынесем за скобку y', а остальные члены перенесем в правую часть равенства:

$$y'\,[ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x] = -2y;$$

отсюда уже получаем, что $y' = -\frac{2y}{ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x}$.

Покажем теперь, как использовать условие задачи для того, чтобы упростить это выражение.

— У нас в знаменателе дроби есть y^{n-1}, а потому, если умножить числитель и знаменатель дроби на y, то в знаменателе окажется y^n, который можно на основании условия задачи заменить на $\frac{x+y}{x-y}$; выполним эти преобразования: $y' = -\frac{2y^2}{ny^n(x-y)^2 - 2xy}$; подставим теперь $\frac{x+y}{x-y}$ вместо y^n.

После этого окажется, что

$$y' = -\frac{2y^2}{n\frac{x+y}{x-y}(x-y)^2 - 2xy} = -\frac{2y^2}{n(x^2-y^2) - 2xy}.$$

2) **Указание.** В полученном выражении для y' на основании условия задачи заменить x^n на $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Ответ. $y' = \frac{n(x^4-y^4)+4x^2y^2}{4x^3y}$.

Задача 26,8 (для самостоятельного решения). Найти производные неявных функций: 1) $y^5 - 5axy + x^5 = 0$; 2) $a^x - e^{x-y} = 0$.

После того как производная y' будет определена, надо учесть, что из условия задачи следует равенство $a^x = e^{x-y}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{ay-x^4}{y^4-ax}$; 2) $y' = 1 - \ln a$.

Задача 26,9. Найти производную неявной функции $e^y = x^{x+y}$.

Решение. В правой части равенства переменными являются и основание степени x, и показатель степени $x+y$, а потому здесь следует сначала прологарифмировать обе части равенства, а потом уже дифференцировать.

После логарифмирования с учетом того, что $\ln e = 1$, получаем $y = (x+y)\ln x$. Отсюда $y' = (1+y')\ln x + (x+y)\frac{1}{x}$. Раскрывая скобки, имеем:

$$y' = y'\ln x + \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y' - y'\ln x = \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y'(1-\ln x) = \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y' = \frac{x\ln x + x + y}{x(1-\ln x)};$$

и окончательно:

$$y' = \frac{x(\ln x + 1) + y}{x(1-\ln x)}.$$

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Параметрическое представление функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В геометрии и механике часто употребляется так называемый параметрический способ задания уравнения кривой. Кривую линию можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений движущейся точки, а координаты x и y этой точки выразить в виде непрерывных функций вспомогательной переменной t, которая называется параметром. Плоская кривая в этом случае определяется двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \tag{27,1}$$

причем параметр t должен изменяться в таком промежутке, чтобы при изменении его в этом промежутке точка с координатами (x, y) описывала всю кривую или ее рассматриваемую часть.

Предполагается, что каждому значению t соответствует только по одному значению x и y.

Задание кривой уравнениями (27, 1) ***называется параметрическим.***

Если из уравнений (27,1) можно исключить параметр t, то y определится как явная или неявная функция x. Однако читатель должен знать, что исключение параметра t из уравнений (27,1) является в большом числе случаев задачей трудной, а иногда и просто неразрешимой.

Задачи (27,1) — (27,9) отводятся для упражнений в исключении параметра.

В механике уравнения (27,1) называются уравнениями движения точки. Если из этих уравнений исключить t, то получится уравнение траектории точки.

Задача 27,1. Исключить параметр t из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= 8t^2 - 7 \\ y &= 16t^2 + 4 \end{aligned}\right\}$$

и определить линию, определяемую полученным уравнением.

Решение. Из первого уравнения определим t^2 в зависимости от x:

$$t^2 = \frac{x+7}{8}.$$

Подставим это значение t^2 во второе уравнение, и тогда $y = 16 \cdot \frac{x+7}{8} + 4$; $y = 2x + 18$. Линия, определяемая этим уравнением, — прямая. Значит, заданные уравнения определяют прямую.

Задача 27,2. Какую линию определяют уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t - 4t^2 \\ y &= t - 2t^2 \end{aligned}\right\}?$$

Решение. Если второе уравнение умножить на 2 и вычесть его почленно из первого, то получим $x - 2y = 0$. Это уравнение определяет прямую, а потому и заданные уравнения есть параметрические уравнения этой прямой.

Задача 27,3 (для самостоятельного решения). Линия задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y &= 3t^2 \\ x &= 5t^2 \end{aligned}\right\}.$$

Определить вид линии.

Ответ. Прямая линия $3x - 5y = 0$.

Задача 27,4. Даны уравнения движения точки:

$$\left.\begin{aligned} x &= 5t^2 \\ y &= 3t \end{aligned}\right\}.$$

Определить траекторию точки.

Решение. Исключим из уравнений параметр t. Найдем из второго уравнения t и подставим найденное значение в первое уравнение:

$$t = \frac{y}{3};\ x = 5\cdot\frac{y^2}{9};\ y^2 = \frac{9}{5}x;$$

траектория — парабола. Заданные уравнения — параметрические уравнения параболы.

Задача 27,5. Какую линию определяют уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}\ (0 \leqslant t \leqslant \pi)?$$

Решение. Для исключения параметра t возведем обе части каждого уравнения в квадрат и сложим почленно полученные уравнения:

$$+\begin{aligned} x^2 &= r^2\cos^2 t, \\ y^2 &= r^2\sin^2 t, \end{aligned}$$

$$\overline{x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t);}\quad x^2 + y^2 = r^2;\ y = \sqrt{r^2 - x^2}. \qquad (27,2)$$

Перед корнем выбран знак плюс потому, что когда t изменяется на отрезке $[0, \pi]$, то $y = r\sin t$ не принимает отрицательных значений. Кривая — полуокружность с центром в начале координат, расположенная в верхней полуплоскости.

Если бы параметр t изменился на отрезке $[\pi, 2\pi]$, то в (27,2) следовало бы у корня взять знак минус $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, так как в этом случае $y = r\sin t$ положительных значений не принимает.

Уравнение $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ определяет полуокружность с центром в начале координат, расположенную в нижней полуплоскости.

Если же считать, что параметр t изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$, то уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}$$

определяют две функции: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

Графики этих двух функций в совокупности образуют целую окружность.

Задача 27,6. Кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Исключить параметр t из этих уравнений.

Решение. Обе части первого уравнения разделим на a, а второго на b:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos t \\ \frac{y}{b} &= \sin t \end{aligned}\right\}.$$

Обе части каждого из этих уравнений возведем в квадрат и почленно сложим:

$$+\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \\ \dfrac{y^2}{a^2} = \sin^2 t \\ \hline \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}$$

кривая — эллипс. Итак, заданные уравнения — уравнения эллипса в параметрической форме. Когда параметр t изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$, точка на эллипсе описывает всю кривую.

Задача 27,7 (для самостоятельного решения). Исключить параметр t из уравнений и определить вид кривой:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x &= 6\sin\frac{\pi}{3}t \\ y &= 3\cos\frac{\pi}{3}t \end{aligned}\right\}, \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} x &= 4\sin t \\ y &= 4\cos t \end{aligned}\right\}$$

$$3)\ \left.\begin{aligned} x &= 3\cos t^2 \\ y &= 3\sin t^2 \end{aligned}\right\}, \qquad 4)\ \left.\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 4 - 3\sin t \end{aligned}\right\}.$$

Ответ. 1) Кривая — эллипс, определяемый уравнением $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$. 2) Кривая — окружность $x^2 + y^2 = 16$. 3) Кривая — окружность $x^2 + y^2 = 9$. 4) Кривая — окружность $x^2 + (y-4)^2 = 9$.

Задача 27,8. Исключить параметр t из уравнений:

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3\cos t, \\ y &= -3 + 4\sin t, \end{aligned}$$

Решение. В первом уравнении из правой части в левую перенесем 2, а во втором —3. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x - 2 &= 3\cos t \\ y + 3 &= 4\sin t \end{aligned}\right\}.$$

Обе части первого уравнения разделим на 3, а второго — на 4, после этого обе части каждого уравнения возведем в квадрат и сложим их почленно:

$$+\left.\begin{aligned}\frac{(x-2)^2}{9}&=\cos^2 t\\ \frac{(y+3)^2}{16}&=\sin^2 t\end{aligned}\right\},$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Кривая эллипс, центр которого находится в точке (2, —3).

Задача 27,9. Исключить параметр t из уравнений

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}\right\}.$$

Решение. Обе части каждого уравнения возведем в степень $\frac{2}{3}$ и почленно их сложим:

$$+\left.\begin{aligned}x^{\frac{2}{3}}&=a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t\\ y^{\frac{2}{3}}&=a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t\end{aligned}\right\}$$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

Кривая — астроида.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Производная функции

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\},$$

заданной параметрически, вычисляется по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (27,3)$$

Ниже предлагаются задачи, в которых требуется найти производную от функций, заданных параметрически, минуя определение y как функции x.

Эти задачи не должны вызвать у читателя затруднений, так как предполагается, что техника дифференцирования у него выработана хорошо на большом количестве примеров, решенных на предыдущих практических занятиях.

Поэтому подробно мы рассмотрим решение только двух задач, а остальные должны быть решены самостоятельно. Формула (27,3) используется при решении задач (27,9) — (27,13).

Задача 27,9 а. Найти производную y'_x от функций, заданных параметрически:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x &= \frac{a\sin t}{1+b\cos t} \\ y &= \frac{c\cos t}{1+b\cos t} \end{aligned}\right\}. \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} x &= \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y &= \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}\right\}.$$

Решение. 1) Находим x'_t и y'_t и полученные значения подставляем в формулу (27, 3):

$$x'_t = a\frac{\cos t\,(1+b\cos t)-(-b\sin t)\sin t}{(1+b\cos t)^2};\quad x'_t = \frac{a(\cos t+b)}{(1+b\cos t)^2}.$$

$$y'_t = c\frac{-\sin t\,(1+b\cos t)-(-b\sin t)\cos t}{(1+b\cos t)^2};\quad y'_t = c\frac{-\sin t}{(1+b\cos t)^2}.$$

Теперь по формуле (27, 3) имеем:

$$y'_x = -c\frac{\sin t}{a(b+\cos t)};$$

$$2)\ x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{1+t^2}\,(1+t^2-t^2)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2};$$

находим далее, что и $y'_t = \frac{1}{1+t^2}$, потому $y'_x = 1$.

Замечание. Из тригонометрии известно, что

$$\operatorname{arc\,tg} t = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

и, таким образом, у нас в задаче

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{arc\,tg} t \\ y &= \operatorname{arc\,tg} t \end{aligned}\right\},$$

т. е. $y = x$, а потому и $y'_x = 1$.

Если бы это сразу было замечено, то не было бы необходимости находить x'_t и y'_t.

Задача 27,10. Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически,

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t - \cos 2t \\ y &= 2\sin t - \sin 2t \end{aligned}\right\}$$

в точке, где $t = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

$$x'_t = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2};$$

$$y'_t = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2},$$

а потому

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}};\quad y'_x=\operatorname{tg}\frac{3t}{2};\quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\frac{\pi}{6}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1;$$

Задача 27,11 (для самостоятельного решения). Найти при $t=\frac{\pi}{8}$ производные функций, заданных параметрически:

$$1)\ \left.\begin{array}{l}x=a(1-t)\\ y=at\end{array}\right\},\quad 2)\ \left.\begin{array}{l}x=\sin 2t\\ y=\sin^2 t\end{array}\right\},$$

$$3)\ \left.\begin{array}{l}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{array}\right\},\quad 4)\ \left.\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}\\ y=\frac{1}{2}t^2\end{array}\right\}.$$

Ответ. 1) $y'_x=-1$; 2) $y'_x=\frac{1}{2}$; 3) $y'_x=0{,}414$; 4) $y'_x=0{,}833$.

Задача 27,12 (для самостоятельного решения). Найти производные функций, заданных параметрически:

$$1)\ \left.\begin{array}{l}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{array}\right\},\quad 2)\ \left.\begin{array}{l}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{array}\right\},$$

$$3)\ \left.\begin{array}{l}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{array}\right\},\quad 4)\ \left.\begin{array}{l}x=\frac{1-t}{1+t}\\ y=\frac{2t}{1+t}\end{array}\right\}.$$

Ответ. 1) $y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$; 2) $y'_x=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$;
3) $y'_x=-\operatorname{ctg}t$; 4) $y'_x=-1$.

Задача 27,13 (для самостоятельного решения). Найти производные функций, заданных параметрически:

$$1)\ \left.\begin{array}{l}x=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}\\ y=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}\end{array}\right\},\quad 2)\ \left.\begin{array}{l}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{array}\right\}.\quad 3)\ \left.\begin{array}{l}x=\frac{3a-2t}{at}\\ y=\frac{4(a-t)^3}{a^2t^2}\end{array}\right\}.$$

Ответ. 1) $y'_x=-\operatorname{tg}3t$; 2) $y'_x=-\operatorname{tg}t$; 3) $y'_x=\frac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2t}$.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференциал функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1) Если дана дифференцируемая функция $y=f(x)$, то ее приращение

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x, \tag{28,1}$$

где, $\alpha\to 0$, когда $\Delta x\to 0$.

2 При $\Delta x \to 0$ величина $\alpha\Delta x$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем Δx.

3) Из формулы (28,1) следует, что приращение функции, которая имеет производную в точке x, не равную нулю, может быть представлено в виде суммы двух слагаемых. В первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ приращение Δx независимой переменной входит в первой степени, т. е. оно, как говорят, линейно относительно Δx. Это слагаемое является главной частью приращения функции и называется дифференциалом функции.

Определение. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на приращение независимой переменной. Дифференциал функции обозначается символом dy, и, таким образом, дифференциал функции*

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{28,2}$$

Определение. *Дифференциалом независимой переменной называется ее приращение: $dx = \Delta x$, и поэтому можно сказать, что* ***дифференциалом функции называется произведение ее производной на дифференциал независимой переменной:***

$$dy = f'(x)\,dx, \tag{28,3}$$

а формула (28, 1) может быть переписана в виде

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{28,4}$$

4) Второе слагаемое $\alpha\Delta x$ в (28,1) при $\Delta x \to 0$ есть величина бесконечно малая высшего порядка малости чем Δx. Из этого следует, что разность $\Delta y - dy$ между приращением функции и ее дифференциалом, равная $\alpha\Delta x$, есть величина бесконечно малая высшего порядка, по сравнению с Δx.

5) Для вычисления дифференциала функции необходимо задать начальное значение независимой переменной x и ее приращение Δx.

6) Если Δx мало, а $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$, входящая в приращение функции, значительно меньше, чем дифференциал функции dy, причем тем меньше, чем меньше Δx.

Поэтому вычисление Δy приращения функции может быть с хорошим приближением заменено вычислением дифференциала функции dy, ***а вычислить дифференциал функции значительно проще, так как для этого требуется только найти производную этой функции и умножить ее на приращение независимой переменной:***

$$\Delta y \approx dy \tag{28,5}$$

7) Из формулы (28,5), учитывая, что

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \tag{28,6}$$

следует, что $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x$, *а отсюда заключаем, что наращенное значение функции*

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{28,7}$$

Эта формула позволяет по известному значению функции и ее производной в точке x найти приближенное значение функции в точке $x+\Delta x$, *близкой к x, и тем самым дает возможность использовать дифференциал функции для приближенных вычислений.*

8) Таблица для вычисления дифференциалов основных элементарных функций получается из таблицы для вычисления производных этих функций путем умножения соответствующей производной на дифференциал независимой переменной dx.

9) Правила дифференцирования:

$$d(cu) = c\,du, \tag{28,8}$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{28,9}$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \tag{28,10}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{28,11}$$

Задача 28,1. Определить приращение и дифференциал функции $y = x^3$ при переходе x от значения $x = 2$ к значению $x_1 = 2{,}01$.

Решение. Решим задачу сначала в общем виде, т. е. определим приращение заданной функции при произвольных значениях x и Δx, а потом уже при заданных.

У нас $y = x^3$, а потому, так как $y' = 3x^2$, то

$$dy = y'dx = 3x^2dx; \quad \Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= x^3 + 3x^3\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3;$$
$$\Delta y = \underbrace{3x^2\Delta x}_{dy} + \underbrace{3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}_{\alpha\Delta x}.$$

Таким образом, дифференциал функции и ее приращение найдены при произвольных значениях x и Δx.

Подчеркнутое слагаемое $3x^2\Delta x$, линейное относительно Δx, и есть dy — дифференциал функции.

Теперь определим Δy и dy при заданных числовых значениях. Начальное значение $x = 2$. Приращение аргумента

$$\Delta x = x_1 - x = 2{,}01 - 2 = 0{,}01,$$

а потому приращение функции

$$\Delta y = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 2(0{,}01)^2 + (0{,}01)^3; \tag{28,12}$$
$$\Delta y = \underbrace{0{,}12}_{dy} + \underbrace{0{,}0006 + 0{,}000\,001}_{\alpha\Delta x} = 0{,}120601$$

Дифференциал же функции — первое слагаемое в равенстве (28,12); $dy = 3 \cdot 2^3 \cdot 0{,}12$.

Теперь определим погрешность, которую мы допустим, если приращение функции заменим дифференциалом функции dy. Эта погрешность равна $\Delta y - dy = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, и мы усматриваем, что она при $\Delta x \to 0$ есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

При числовых данных задачи абсолютная величина погрешности от замены приращения функции ее дифференциалом

$$|\Delta x - dy| = |0{,}120\,601 - 0{,}12| = 0{,}000\,601.$$

Относительная погрешность

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}000\,601}{0{,}120\,601} = 0{,}00498 \approx 0{,}005$$

в процентах это составляет всего около $\frac{1}{2}$ % . Подчеркнем еще раз, что ***определение дифференциала функции вместо ее приращения дает значительную экономию в вычислениях, а допускаемая при этом погрешность будет тем меньше, чем меньше приращение аргумента.***

Мы очень подробно разобрали эту задачу и теперь предложим ряд аналогичных задач для самостоятельного решения.

Задача 28,2 (самостоятельного решения). Дано $y = 3x^2 + 5x - 4$. Определить Δy и dy при произвольных значениях x и Δx, а потом при переходе x 1) от значения $x = 2$ к значению $x_3 = 1{,}98$; 2) от значения $x = 4$ к значению $x_1 = 4{,}03$.

Ответ. $\Delta y = (6x + 5)\Delta x + 3(\Delta x)^2$; $dy = (6x + 5)\,dx$; при числовых данных: 1) $\Delta y = -0{,}3388$; $dy = -0{,}34$; 2) $\Delta y = 0{,}8727$; $dy = 0{,}87$. Относительная погрешность в процентах: 1) 0,3; 2) 0,3.

Задача 28,3 (для самостоятельного решения). Вычислить приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 - x^2 + 3$ сначала при произвольных значениях x и Δx, а затем:

1) при переходе x от значения $x = 3$ к значению $x_1 = 3{,}01$ и
2) при переходе x от значения $x = 3$ к значению $x_1 = 3{,}001$.

Найти в этих двух случаях абсолютную и относительную погрешности.

Ответ. $\Delta y = (6x^2 - 2x)\Delta x + (6x - 1)(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$;
$dy = (6x^2 - 2x)\,dx$

при числовых данных: 1) $\Delta y = 0{,}481\,702$; $dy = 0{,}48$; 2) $\Delta y = 0{,}048\,017\,002$; $dy = 0{,}048$; абсолютная погрешность: 1) 0,001702; 2) 0,000 017 002; относительная погрешность в процентах: 1) 0,35; 2) 0,03.

Задача 28,4. Показать, что при $\Delta x \to 0$ с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^n$. Тогда $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$; $dy=nx^{n-1}\Delta x$, а так как на основании (28,5) с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\Delta y\approx dy$, то

$$(x+\Delta x)^n-x^n\approx nx^{n-1}\Delta x, \text{ а } (x+\Delta x)^n\approx x^n+nx^{n-1}\Delta x.$$

Полагая здесь $x=1$, получаем, что для достаточно малых Δx имеет место приближенное равенство

$$(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x. \tag{28,13}$$

Числовые примеры для приближенных вычислений по формуле (28,13):

1) $(1{,}03)^5\approx 1+5\cdot 0{,}03=1{,}15$ $(\Delta x=0{,}03;\ n=5)$;

2) $\sqrt{1{,}005}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}005=1{,}0025$ (здесь $n=\frac{1}{2}$, а $\Delta x=0{,}005$);

3) $\sqrt[3]{0{,}998}=\underbrace{\sqrt[3]{1-0{,}012}}_{\left(n=\frac{1}{3};\ \Delta x=-0{,}012\right)}=1+\frac{1}{3}(-0{,}012)=1-0{,}004=0{,}996.$

4) $$\sqrt[4]{267}=\sqrt[4]{256+11}=\sqrt[4]{256\left(1+\frac{11}{256}\right)}=$$
$$=4\sqrt[4]{1+\frac{11}{256}}\approx 4\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{11}{256}\right)=4(1+0{,}0107)=4{,}0428$$
$$\left(n=\frac{1}{4};\ \Delta x=\frac{11}{256}\right).$$

Задача 28,5 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой (28,13), вычислить:

1) $\frac{1}{1{,}0005}$; 2) $\frac{1}{0{,}9988}$; 3) $\frac{1}{(1{,}003)^3}$;

4) $\frac{5}{0{,}9997}$; 5) $\frac{37}{1{,}004}$; 6) $\frac{15{,}23}{0{,}999}$.

Указание. 4) $\frac{5}{0{,}9997}=5\cdot\frac{1}{1-0{,}0003}=5(1-0{,}0003)^{-1}$; теперь надо взять в (28,13) $n=-1$: $\Delta x=-0{,}0003$.

Ответ. 1) 0,9995; 2) 1,0012; 3) 0,991; 4) 5,0015; 5) 36,852; 6) 15,246.

Задача 28,6 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой (28,13), вычислить:

1) $\sqrt{4{,}012}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{4{,}028}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt[3]{1{,}002}}$; 4) $\sqrt[3]{0.9843}$.

Ответ. 1) 2,003; 2) 0,498; 3) 4,997; 4) 0,995.

Задача 28,7. При нагревании объем твердого тела растет пропорционально кубу его линейного расширения. Если α — коэффициент линейного расширения, β — коэффициент объемного расширения, а t — температура, то имеет место формула $1+\beta t = (1+\alpha t)^3$.

Пользуясь формулой (28,13), доказать что имеет место приближенное равенство $\beta \approx 3\alpha$.

Решение. При малых α $(1+\alpha t)^3 \approx 1+3\alpha t$ и значит, $1+\beta t \approx 1+3\alpha t$; $\beta t \approx 3\alpha t$; $\beta \approx 3\alpha$, т. е. коэффициент объемного расширения твердого тела приближенно равен утроенному коэффициенту его линейного расширения.

Задача 28,8. Высота ртутного столба в барометре при температура $t°$ приводится к $0°$ по формуле $p_0 = p\frac{1+\alpha' t}{1+\alpha t}$, где α — коэффициент расширения ртути, а α' — коэффициент расширения латунной шкалы. Упростить эту формулу так, чтобы она не содержала дробей.

Решение. По формуле (28,13) $\frac{1}{1+\alpha t} = (1+at)^{-1} \approx 1-\alpha t$, а потому $p_0 = p(1+\alpha' t)(1-\alpha t) = p(1+a't-\alpha t-\alpha\alpha' t)$. Так как α и α' — малы, то последним произведением в скобке можно пренебречь; окончательно получаем упрощенную формулу

$$p_0 \approx p[1-(\alpha-\alpha')t].$$

Задача 28,9 (для самостоятельного решения). Ускорение силы тяжести g_h на высоте h над уровнем моря определяется по формуле

$$g_h = g\frac{R^2}{(R+h)^2},$$

где g — ускорение силы тяжести на уровне моря, а R — радиус земли. Считая, что h мало по сравнению с R, доказать, что имеет место приближенная формула

$$g_h \approx g\left(1-\frac{2h}{R}\right),$$

Указание. $R+h = R\left(1+\frac{h}{R}\right)$.

Задача 28,10. Доказать, что если Δx — бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\sin\Delta x \approx \Delta x$ (Δx — выражается в радианах).

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sin x$. Приращение этой функции $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$, а ее дифференциал $dy = \cos x\Delta x$. На основании формулы (28,5) с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, а потому $\sin(x+\Delta x)-\sin x \approx \cos x \cdot \Delta x$, или $\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$. Полагая здесь $x=0$ и учитывая, что $\sin 0=0$, а $\cos 0=1$, получаем требуемое приближенное равенство

$$\sin \Delta x \approx \Delta x. \tag{28,14}$$

Эта формула показывает, что для малых углов (выраженных в радианах) синус равен числу радианов, содержащихся в угле. Например, так как $4°=0{,}0698$ радиана, то $\sin 0{,}0698 \approx 0{,}0698$. Это же значение для $\sin 4°$ дают и четырехзначные таблицы (не забудьте, что при использовании формулы (28,14) следует градусы переводить в радианы).

Заметим, что формула (28,14) для углов, не больших $3°$, дает величину синуса с четырьмя верными десятичными знаками (для перевода градусов в радианы и обратно следует пользоваться справочниками). Для углов же, не превышающих $7°$, эта формула дает значение синуса с тремя верными десятичными знаками.

Задача 28,11 (для самостоятельного решения). Доказать, что если Δx — величина бесконечно малая, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$\operatorname{tg} \Delta x \approx \Delta x. \tag{28,15}$$

Применить это равенство к вычислению $\operatorname{tg} 3°$ и сравнить полученное число со значением $\operatorname{tg} 3°$ из четырехзначных таблиц.

Задача 28,12 (для самостоятельного решения). Доказать, что если Δx — бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \approx \frac{\Delta x}{x}. \tag{28,16}$$

Указание. Рассмотреть функцию $y=\ln x$. Приращение этой функции

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{\Delta}\right); \quad dy=\frac{1}{x}\,dx.$$

Из формулы (28,16) следует, что, например,

$$\ln 1{,}007=\ln(1+0{,}007) \approx 0{,}007;$$
$$\ln 1{,}008=\ln(1+0{,}008) \approx 0{,}008.$$

Задача 28,13 (для самостоятельного решения). Доказать, что если Δx — бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$e^{\Delta x} \approx 1+\Delta x. \tag{28,17}$$

Получить это же равенство из формулы (28,16).

Указание. Рассмотреть функцию $y = e^x$.

$$\Delta y = e^x(e^{\Delta x} - 1),$$
$$dy = e^x \Delta x.$$

Пользуясь формулой (28,17), можно получить приближенные значения $e^{\Delta x}$ при малых значениях Δx. Например, $e^{0{,}003} \approx 1 + 0{,}003 = 1{,}003$; $e^{0{,}009} \approx 1 + 0{,}009 = 1{,}009$; $e^{0{,}04} \approx 1 + 0{,}04 = 1{,}04$ (все десятичные знаки верны).

Приведем сводку полученных приближенных формул (28,13), (28,14), (28,15), (28,16), (28,17), причем во всех этих формулах заменим для удобства Δx, а в последней $\frac{\Delta x}{x}$, буквой α:

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha; \quad e^\alpha \approx 1 + \alpha.$$
$$\sin \alpha \approx \alpha;$$
$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha;$$
$$\ln(1 + \alpha) \approx \alpha;$$

Задача 28,14. Составить таблицу для вычисления значений функции $y = \sin x$ при значениях x, равных $30° 1'$; $30° 2'$; $30° 3'$, имея в виду, что $1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0{,}00029$ радиана.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. При переходе аргумента от значения x к значению $x + \Delta x$ наращенное значение функции определяется из приближенного равенства (28,7). У нас $f(x) = \sin x$. Поэтому $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$, а $f'(x) = \cos x$. Для заданной функции $f(x) = \sin x$ приближенное равенство (28,7) запишется так:

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x. \tag{28,18}$$

Полагая в этой формуле $x = 30° = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1' = 0{,}00029$, а $\sin 30° = 0{,}50000$; учитывая, что $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86602$, получим

$$\sin 30° 1' = 0{,}50000 + 0{,}86602 \cdot 0{,}00029 = 0{,}50025,$$

что совпадает точно со значением $\sin 30° 1'$ по пятизначным таблицам.

Из формулы (28,18) найдем и $\sin 30° 2'$, учитывая, что теперь $\Delta x = 2' = 2 \cdot 0{,}00029 = 0{,}00058$ радиана и по-прежнему $x = 30°$.

$$\sin 30° 2' = 0{,}50000 + 0{,}86602 \cdot 0{,}00058 = 0{,}50050$$

(все десятичные знаки верны).

При вычислении $\sin 30° 3'$ воспользуемся той же формулой, взяв $\Delta x = 3' = 3 \cdot 0{,}00029 = 0{,}00087$;

$$\sin 30° 3' = 0{,}50000 + 0{,}86602 \cdot 0{,}00087 = 0{,}50075$$

(это значение отличается от табличного на 0,00001 (по пятизначным таблицам $\sin 30°3' = 0{,}50076$).

Задача 28,15 (для самостоятельного решения). Составить таблицу для вычисления функции $\cos x$ при значениях x, равных $60°1'$; $60°2'$; $60°3'$ (для справок $\sin 60° = 0{,}86602$; $\cos 60° = 0{,}50000$; $1' = 0{,}00029$ радиана).

Полученные значения сравнить со значениями из пятизначных таблиц тригонометрических функций.

Задача 28,16 (для самостоятельного решения). Вычислить $\operatorname{tg} 45°1'$, $\operatorname{tg} 45°2'$, $\operatorname{tg} 45°3'$ и сравнить полученные значения со значениями из пятизначных таблиц тригонометрических функций.

Задача 28,17. Вычислить натуральные логарифмы чисел 2,001; 2,002; 2,003; 2,004 и сравнить их с табличными значениями по пятизначным таблицам натуральных логарифмов (для справки: $\ln 2 = 0{,}69315$).

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Чтобы применить формулу (28,7) надо определить $f(x + \Delta x)$ и $f'(x)$:

$$f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x);\quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Подставляя эти значения в (28,7), получаем

$$\ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{1}{x}\Delta x. \tag{28,19}$$

Чтобы найти $\ln 2{,}001$, возьмем в формуле (28,19) $x = 2$, а $\Delta x = 0{,}001$:

$$\ln 2{,}001 = \ln(2 + 0{,}001) \approx \ln 2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}001 =$$
$$= 0{,}69315 + 0{,}00050 = 0{,}69365.$$

Аналогично по формуле (28,19) вычисляется $\ln 2{,}002$; $\ln 2{,}003$ и $\ln 2{,}004$: берем по-прежнему $x = 2$, а Δx надо взять равным соответственно 0,002; 0,003; 0,004. Имеем

$$\ln 2{,}002 = \ln(2 + 0{,}002) \approx 2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}002 = 0{,}69315 +$$
$$+ 0{,}001 = 0{,}69415;\ \ln 2{,}003 = \ln(2 + 0{,}003) \approx 2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}003 =$$
$$= 0{,}69315 + 0{,}0015 = 0{,}69465;\ \ln 2{,}004 = \ln(2 + 0{,}004) \approx 2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot 0{,}004 = 0{,}69315 + 0{,}0020 = 0{,}69515.$$

Пятизначные таблицы логарифмов дают значения, равные найденным. Решение последних задач показало читателю, как дифференциал функции может быть использован для составления таблиц тригонометрических функций и логарифмов. Формула (28,7) позволяет составлять таблицы и других функций.

Мы считаем необходимым обратить внимание на то, что заменяя во всех предыдущих задачах приращение функции Δy ее дифференциалом dy, мы не интересовались оценкой погрешности, которую мы при этом допускаем. В последующем, при изучении раздела «Бесконечные ряды», будут указаны более совершенные приемы составления таблиц функций и там же указаны формулы, оценивающие погрешность, возникающую при замене точного значения функции ее приближенным значением.

Задача 28.18. Прямым измерением найдено, что диаметр круга равен 6,7 *см*, причем максимальная погрешность измерения составляет 0,03 см. Найти приближенную относительную и процентную погрешности в вычисленной площади этого круга.

Решение. Относительная погрешность вычисленной площади $\delta_s = \frac{\Delta s}{s}$, а ее приближенное значение мы получим, заменив в этом равенстве Δs на ds. В таком случае $\delta_s \approx \frac{ds}{s}$. Но площадь круга $s = \frac{1}{4}\pi x^2$ (x — диаметр), а поэтому $ds = \frac{1}{2}\pi x\,dx$. Таким образом,
$$\delta_s \approx \frac{\frac{1}{2}\pi x\,dx}{\frac{1}{4}\pi x^2} = 2 \cdot \frac{dx}{x}.$$
У нас $x = 6{,}7$ *см*; $dx = 0{,}03$ *см*, а потому $\delta_s \approx 2 \cdot \frac{0{,}03}{6{,}7} \approx 0{,}009$, а умножая эту величину на 100, получим процентную погрешность, которая равна $(0{,}009 \cdot 100)\% = 0{,}9\%$.

Задача 28.19. Доказать, что приближенная относительная погрешность вычисленного объема шара равна утроенной относительной погрешности в измерении его диаметра.

Решение. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{1}{6}\pi x^3$, где x — диаметр шара. Приближенно погрешность ΔV вычисленного объема равна $dV = \frac{1}{2}\pi x^2\,dx$. Относительная погрешность
$$\delta_V \approx \frac{dV}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2\,dx}{\frac{1}{6}\pi x^3} = 3 \cdot \frac{dx}{x}.$$
Но относительная погрешность измерения диаметра $\delta_x \approx \frac{dx}{x}$, а потому $\delta_V \approx 3\delta_x$, что и требовалось.

Задача 28,20 (для самостоятельного решения). С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 2%.

Ответ. $\delta_R = 0{,}66\%$.

Задача 28,21. Период малых колебаний маятника (в секундах) определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{28,20}$$

где l — длина маятника в сантиметрах, а $g = 981$ *см/сек*^{2} — ускорение силы тяжести.

Доказать, что приближенная относительная погрешность измеренного периода колебания маятника равна половине относительной погрешности его измеренной длины.

Решение. Приближенно абсолютная погрешность периода колебания $\Delta T \approx dT = \frac{\pi dl}{\sqrt{gl}}$, а потому относительная погрешность

$$\delta_T \approx \frac{dT}{T} = \frac{\frac{\pi dl}{\sqrt{gl}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l},$$ а так как относительная погрешность

измерения длины маятника $\delta_l = \frac{dl}{l}$, то $\delta_T \approx \frac{1}{2}\delta_l$, и требуемое доказано.

Задача 28,22 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой (28,20), установить, насколько следует изменить длину маятника $l = 25$ *см*, чтобы его период T увеличился на 0,05 *сек*.

Ответ. $dl = \frac{\sqrt{g}}{\pi}\sqrt{l}\,dT$; $dl = 2{,}49$ *см*.

Задача 28,23 (для самостоятельного решения). Из формулы (28, 20) следует, что определение ускорения силы тяжести с помощью колебания маятника может быть сделано по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Определить относительную погрешность в определении g, если известны:

1) относительная погрешность в измерении l (T вычислено точно);

2) относительная погрешность в измерении T (l вычислено точно).

Ответ. 1) $\delta_g = \delta_l$; $\delta_g = 2\delta_T$;

ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Производные высших порядков. Формула Лейбница.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Производная от функции $y = f(x)$ в общем случае является функцией x. Если от этой функции вычислить производную, то получим производную второго порядка, или, короче, вторую производную функции $y = f(x)$. Таким образом, вторая производная от первоначальной функции есть производная от первой производной.

Производная от второй производной называется третьей производной. Производная от третьей производной называется четвертой производной и т. д.

Обозначения. *Вторая производная функции $y = f(x)$ обозначается одним из символов: y'' (читается: игрек два штриха); $\frac{d^2y}{dx^2}$ (читается: де два игрек по де икс дважды); $f''(x)$ (читается: эф два штриха от икс).*

Третья производная функции $y = f(x)$ обозначается одним из символов: y''' (читается: игрек три штриха); $f'''(x)$ (читается: эф три штриха от x); $\frac{d^3y}{dx^3}$; $y^{(3)}$.

Производная порядка n есть производная от производной порядка $(n-1)$. Эта производная обозначается одним из символов: $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Для обозначения последовательных производных нами приняты обозначения: y'', y^3, $y^{(4)}$, ... $y^{(n)}$.

Задача 29,1. Найти третью производную функции $y = 5x^4$.

Решение. $y' = 20x^3$; $y'' = 60x^2$; $y''' = 120x$.

Задача 29,2. $y = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$. Найти $y^{(4)}$.

Решение. $y' = 12x^3 + 15x^2 - 8x$; $y'' = 36x^2 + 30x - 8$; $y^{(3)} = 72x + 30$; $y^{(4)} = 72$.

Задача 29,3. $y = \sin^2 x$. Найти $y^{(5)}$.

Решение. $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$; $y'' = 2\cos 2x$;

$$y^{(3)} = -4\sin 2x; \quad y^{(4)} = -8\cos 2x; \quad y^{(5)} = 16\sin 2x.$$

Задача 29,4. $y = \sqrt{x+5}$. Найти $y^{(4)}$.

Решение. Запишем заданную функцию в виде $y = (x+5)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $y' = \frac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}}$; $y'' = -\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}$; $y^{(3)} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}$; $y^{(4)} = -\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}$.

Задача 29,5. Найти $y^{(4)}$ от функции $y = \ln \sin x$.

Решение. $y' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x$; $y'' = -\operatorname{cosec}^2 x$,

$y^{(3)} = -2\operatorname{cosec} x(-\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x) = 2\operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{ctg} x$;

$y^{(4)} = 4\operatorname{cosec} x(-\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x) \quad \operatorname{ctg} x + 2\operatorname{cosec}^2 x(-\operatorname{cosec}^2 x) =$

$= -4\operatorname{cosec}^2 x \operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{cosec}^4 x = -2\operatorname{cosec}^2 x(2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)$.

Задача 29,6 (для самостоятельного решения).

1) $y = \arcsin x$; найти y''. 2) $y = \operatorname{arctg} x$; найти y''.

3) $y = \ln x$; найти $y^{(4)}$. 4) $y = \frac{1+x}{1-x}$; найти $y^{(3)}$.

Ответ. 1) $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; 2) $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; 3) $-3!x^{-4}$; 4) $\frac{12}{(1-x)^4}$.

Задача 29,7 (для самостоятельного решения).

1) $y = \sqrt{x}$; найти $y^{(3)}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, найти $y^{(3)}$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; найти $y^{(4)}$

Ответ. 1) $\frac{3\sqrt{x}}{8x^3}$; 2) $-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot x^3\sqrt{x}}$; 3) $-\frac{80}{81x^3\sqrt[3]{x^2}}$.

Определить от заданной функции производную порядка n — значит найти формулу, по которой можно определить производную любого порядка этой функции. Вообще говоря, для этого надо вычислить все последовательные производные до n-й включительно. Однако этого можно избежать, пользуясь методом математической индукции. На практике поступают так: находят несколько последовательных производных, подмечают закономерность, по которой они все образовываются, и, считая, что эта закономерность выполняется для производной любого порядка, составляют выражение для производной порядка n (заметим, что нулевая производная означает саму функцию).

Мы прежде всего определим производные порядка n основных элементарных функций.

Задача 29,8. Найти $y^{(n)}$ функции $y = x^m$.

Решение. $y' = mx^{m-1}$; $y'' = m(m-1)x^{m-2}$.

$$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}.$$

Здесь нетрудно усмотреть закономерность, которая состоит в следующем: 1) число множителей перед x равно порядку производной; 2) первый множитель равен показателю степени m, а каждый следующий — на единицу меньше; 3) в последнем множителе из m вычитается число, на единицу меньшее порядка производной; 4) показатель степени буквы x равен m минус порядок производной. Полагая, что для производной порядка n эта закономерность сохраняется, получаем

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)x^{m-n}.$$

Задача 29,9. Найти $y^{(n)}$ функции $y = a^x$.

Решение. $y' = a^x \ln a$; $y'' = a^x (\ln a)^2$; $y^{(3)} = a^x (\ln a)^3$; $y^{(4)} = a^x (\ln a)^4$.

Здесь уже нетрудно подметить, что каждая из найденных производных равна произведению a^x на $\ln a'$ в степени, равной порядку производной. Полагая, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

Задача 29,10. Найти $y^{(n)}$ функции $y = e^x$.

Решение. $y' = e^x$; $y'' = e^x$; $y^{(3)} = e^x$; ... ; $y^{(n)} = e^x$.

Задача 29,11. Найти $y^{(n)}$ функции $y = \ln x$.

Решение. $y' = \frac{1}{x} = (-1)^\circ \cdot \frac{1}{x}$; $y'' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \cdot \frac{1}{x^2}$, $y^{(3)} = \frac{2}{x^3} = (-1)^2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{x^3}$; $y^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = (-1)^3 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$.

Усмотрим закономерность, по которой составлена каждая из этих производных: 1) все производные содержат множителем число -1 в степени, которая на единицу меньше порядка производной; 2) числитель дроби есть произведение натуральных чисел, начиная с единицы и кончая числом, на единицу меньшим порядка производной; 3) знаменатель дроби есть x в степени, равной порядку производной. Считая, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{x^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n};$$

по этой формуле, например, $y^{(7)} = (-1)^6 \frac{6!}{x^7}$.

Задача 29,12. Найти $y^{(n)}$ функции $y = \sin x$.

Решение. $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$;

$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$; $y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Легко усматривается закономерность, по которой образованы все эти производные: у каждой из них под знаком синуса к x прибавляется произведение $\frac{\pi}{2}$ на порядок производной. Считая что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем, что $y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 29,13 (для самостоятельного решения). Найти $y^{(n)}$ функции $y = \cos x$.

Ответ. $y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 29,14 (для самостоятельного решения). Найти $y^{(n)}$ функции $y = \frac{1}{x}$.

Ответ. $y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Задача 29,15. Вычислить $y^{(n)}$ функции $y = \sqrt{x}$, пользуясь формулой, полученной в задаче 29,8 при $m = \frac{1}{2}$, а затем эту же производную вычислить непосредственно.

Ответ. $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n-1)\,2^n} \frac{\sqrt{x}}{x^n}$ *).

Задача 29,16 (для самостоятельного решения). Найти $y^{(n)}$ функции $y = (a + bx)^m$;

Ответ. $y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)\,b^n (a+bx)^{m-n}$;

Задача 29,17 (для самостоятельного решения). Доказать на основании формулы, полученной при решении предыдущей задачи, что

1) $\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{n} = \frac{(-1)^n n!\, b^n}{(a+bx)^{n+1}}$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!\, b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}$.

Задача 29,18. (для самостоятельного решения). Доказать, что

1) $(\sin px)^{(n)} = p^n \sin\left((px + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $(\cos px)^{(n)} = p^n \cos\left(px + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 29,19 (для самостоятельного решения). Показать, что функции $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (c_1 и c_2 — постоянные величины) удовлетворяет уравнению $y'' + y = 0$.

Задача 29,20. (для самостоятельного решения). Показать, что функция $u = c_1 r + c_2 \frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} u = 0$$

(c_1 и c_2 — постоянные величины).

Задача 29,21 (для самостоятельного решения). Показать, что функция $V = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + c_3 x + c_4$ удовлетворяет уравнению $V^{(4)} + a^2 V'' = 0$ (c_1, c_2, c_3, c_4, — постоянные величины).

МЕХАНИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Если точка движется по прямой и задан ее закон движения $s = f(t)$ (s — путь, t — время), то ускорение точки равно второй производной от пути по времени.

Задача 29,22. Найти ускорение точки, совершающей простые гармонические колебания по закону $s = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Решение. $\frac{ds}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$; $\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$, но так как $s = A\sin(\omega t + \varphi)$, то $\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s$.

---

* Символ $(2n-1)!!$ означает произведение нечетных натуральных чисел от 1 до $(2n-1)$ включительно. Например, $9!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9$.

Задача 29,23 (для самостоятельного решения). Доказать, что если точка совершает затухающие колебания по закону $x = Ae^{-kt}\sin\omega t$, то ее ускорение $\frac{d^2x}{dt^2} = -(\omega^2 + k^2)x - 2kv$; где v — скорость точки $\left(v = \frac{dx}{dt}\right)$.

Формула Лейбница. Эта формула дает возможность вычислить производную любого порядка от произведения двух функций, минуя последовательное применение формулы для вычисления производной от произведения двух функций. Формула Лейбница записывается так:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}. \quad (29{,}1)$$

Задача 29,24. Найти $y^{(5)}$, если $y = e^{4x}\sin 3x$.

Решение. Если $y = uv$, то на основании (29,1)

$$y^{(5)} = u^{(5)}v + c_5^1 u^{(4)}v' + c_5^2 u^{(3)}v'' + c_5^3 u''v^{(3)} + c_5^4 u'v^{(4)} + uv^{(5)} \quad (29{,}2)$$

Полагая в заданной функции $u = e^{4x}$, $v = \sin 3x$, для применения формулы (29,2) нам следует найти первые пять последовательных производных каждой функции u и v:

$u' = 4e^{4x}$; $u'' = 16e^{4x}$; $u^{(3)} = 64e^{4x}$; $u^{(4)} = 256e^{4x}$; $u^{(5)} = 1024e^{4x}$;
$v' = 3\cos 3x$; $v'' = -9\sin 3x$; $u^{(3)} = -27\cos 3x$; $v^{(4)} = 81\sin 3x$;
$v^{(5)} = 243\cos 3x$.

Подставляя эти производные в (29,2), получим

$$y^{(5)} = 1024e^{4x}\cdot\sin 3x + 5\cdot 256e^{4x}\cdot 3\cos 3x + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}64e^{4x}(-9\sin 3x) + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}16e^{4x}(-27\cos 3x) + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}4e^{4x}\cdot 81\sin 3x + e^{4x}\times$$
$\times 243\cos 3x$; и после упрощений $y^{(5)} = -e^{4x}(3116\sin 3x + 237\cos 3x)$.

Задача 29,25 (для самостоятельного решения). $y = x^4e^{2x}$; найти $y^{(6)}$.

Ответ. $y^{(6)} = 64e^{2x}(x^4 + 12x^3 + 45x^2 + 60x + 22{,}5)$.

Задача 29,26 (для самостоятельного решения). Найти производную порядка n от функции $y = x^2e^x$.

Ответ. $y^{(n)} = [x^2 + 2nx + n(n-1)]\,e^x$.

Задача 29,27 (для самостоятельного решения). Определить $y^{(4)}$ от функции $y = x^3\ln\frac{x}{a}$.

Ответ. $y^{(4)} = \frac{6}{x}$.

Задача 29,28 (для самостоятельного решения). $y = e^x \cos x$. Найти $y^{(5)}$.

Ответ. $y^{(5)} = 4\sqrt{2}e^x \cos\left(x + \frac{5}{4}\pi\right)$.

ТРИДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Правило Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых и двух бесконечно больших величин $\left(\text{раскрытие «неопределенностей» видов: } \frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty} \text{ и приводящихся к ним}\right)$.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При вычислении предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ может оказаться, что при $x \to a$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, т. е. являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими величинами. Говорят, что в этих случаях мы имеем дело с «неопределенностями» вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Вычисление предела в этом случае называется «раскрытием неопределенности» и производится по правилу, указанному французским математиком Гильомом Лопиталем (1661—1704 гг.)

Правило Лопиталя. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ таковы, что:*

1) $$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ и } \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0;$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ и } \lim_{x\to a} \varphi(x) = \pm\infty;$$

2) они имеют первые производные в окрестности точки $x = a$ (за возможным исключением самой точки a);

3) существует $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, тогда существует также и $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и имеем место равенство $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Сущность этого правила состоит в том, что в случае «неопределенностей» вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ вычисление предела отношения функций, при соблюдении указанных требований, заменяется вычислением предела отношения их производных, которое в большом числе случаев оказывается проще.

В случае, когда и отношение производных приводит к одному из этих видов «неопределенностей» $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, можно уже к этому *отношению применить правило Лопиталя и тем симым исследовать отношение вторых производных. Может оказаться, что и отношение вторых производных дает опять-таки какую-либо из этих «неопределенностей». Тогда следует перейти к отношению третьих производных и т. д. Укажем, что если понадобится прибегнуть к отношению вторых, третьих и т. д. производных то прежде чем это делать, следует провести все возможные упрощения в выражении, полученном на предыдущем этапе.*

1. Предел отношения двух бесконечно малых величин

(«неопределенностй» вида $\frac{0}{0}$)

Задача 30,1. Найти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

Если в заданное отношение подставить вместо x число a, то получим «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя, т. е. заменим отношение функций отношением их производных.

Следует предостеречь читателя от распространенной ошибки: надо дифференцировать не дробь, а отдельно ее числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}.$$

Задача 30,2. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}$.

Решение. Если в данную дробь подставить -1 вместо x, то получится «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}.$$

Задача 30,3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a-\sqrt[n]{a^n-x^n}}{x^n}$.

Решение. Если заменить в данной дроби x нулем, то получится «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя: заменим числитель и знаменатель дроби их производными и будем отыскивать предел этого нового отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a-\sqrt[n]{a^n-x^n}}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{n}(a^n-x^n)^{\frac{1}{n}-1}\cdot(-nx^{n-1})}{nx^{n-1}}.$$

Сокращая дробь на nx^{n-1} и подставляя после этого $x=0$, получим, что искомый предел равен $\frac{1}{n}(a^n)^{\frac{1}{n}-1}=\frac{a^{1-n}}{n}$.

Если бы мы не произвели сокращения на nx^{n-1}, то снова имели бы «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Еще раз напоминаем, что прежде чем решить вопрос о необходимости перехода к следующим производным, надо сделать все возможные упрощения.

Задача 30,4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

Решение. Если подставить в числитель и знаменатель 1 вместо x, то получится «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{2(1-x)x}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-x^2}=-1.$$

И здесь были сделаны необходимые упрощения. Если бы мы их не сделали, а в полученную дробь подставили бы $x=1$, то снова получили бы «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$.

Задача 30,5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Подставляя в данную дробь $x=0$, получим «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}_{\substack{\text{Снова «неопределенность» вида } \frac{0}{0};\ \frac{1}{3} \text{ выносим за знак}\\ \text{предела, вторично применяем правило Лопиталя.}}}=\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}}_{\substack{\text{Снова «неопределенность» вида } \frac{0}{0}.\\ \text{В третий раз применяем правило Лопиталя.}}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Теперь предлагается ряд задач для самостоятельного решения.

Задача 30,6 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$ и $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-4x^2+x+6}$; 5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

Указание. В числителе сначала вынести x за скобку, и тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}x\frac{x^{x-1}-1}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}x\lim_{x\to 1}\frac{x^{x-1}-1}{1-x+\ln x};$$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x+e^{-x}-e^x-xe^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Указание. Разложить числитель на множители и сократить дробь.

Ответ. 1) 2; 2) $\frac{3}{29}$; 3) $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$; 4) 0; 5) $\sqrt{\frac{3}{8}}$; 6) $a\sqrt{3}$; 7) $\ln\frac{a}{b}$; 8) $\sqrt{a}$; 9) -2; 10) -1.

Задача 30,7 (для самостоятельного решения). Для вычисления пределов в этой задаче правило Лопиталя придется применять не менее двух раз. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos x}$.

Указание. Искомый предел равен:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2;$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}$.

Ответ. 1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 4; 5) $\frac{1+a^2}{\cos^2 a}$; 6) ∞.

Задача 30,8 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}$$

Указание. Здесь «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1;\quad \ln 1=0;\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ. -1.

2. Предел отношения двух бесконечно больших величин («неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$)

Задача 30,9. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Замечание. В условии задачи подчеркнуто, что $x\to+0$; это указание является существенным, потому что при $x\to-0$, так же как при $x\to 0$, $\ln x$ не существует, так как отрицательные числа логарифмов не имеют.

Решение. При $x\to+0$ числитель и знаменатель данной дроби — величины бесконечно большие, и мы имеем здесь случай «неопределенности» вида $\frac{\infty}{\infty}$.

На основании правила Лопиталя заменяем отношение функций отношением их производных и отыскиваем предел этого нового отношения:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Задача 30,10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

Решение. При $x\to\frac{\pi}{2}$ функции $\operatorname{tg}3x$ и $\operatorname{tg}5x$ — величины бесконечно большие, т. е. мы имеем «неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя, т. е. заменим отношение функций отношением их производных и будем отыскивать предел этого нового отношения:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}}_{\substack{\text{Здесь имеет место}\\ \text{«неопределенность»}\\ \text{вида } \frac{0}{0}.\ \text{Прежде}\\ \text{чем применять пра-}\\ \text{вило Лопиталя,}\\ \text{преобразуем дробь.}}}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2 = \underbrace{\frac{3}{5}\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}\right)^2}_{\substack{\text{Предел степени равен} \\ \text{степени предела. При-} \\ \text{меняем теперь прави-} \\ \text{ло Лопиталя.}}} = \frac{3}{5}\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-5 \sin 5x}{-3 \sin 3x}\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{9}\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2 = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)^2 = \frac{5}{3}.$$

Задача 30,11 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Ответ. 0.

Задача 30,12. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Решение. Здесь имеет место «неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\substack{\text{Здесь «неопре-} \\ \text{деленность» ви-} \\ \text{да } \frac{\infty}{\infty}\text{. Вторич-} \\ \text{но применим} \\ \text{правило Лопи-} \\ \text{таля.}}} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2}}_{\substack{\text{Здесь уже} \\ \text{никакой} \\ \text{«неопреде-} \\ \text{ленности»} \\ \text{нет.}}} = +\infty.$$

Задача 30,13 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1) \lim_{x \to 0} \frac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x}; \quad 2) \lim_{x \to +0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x}.$$

Ответ. 1) 1; 2) 1.

Задача 30,14 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1) \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x}; \quad 2) \lim_{x \to a-0} \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{a}}; \quad 3) \lim_{x \to 1+0} \frac{\ln(x-1) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{ctg} \pi x},$$

Ответ. 1) $+\infty$; 2) 0; 3) -2.

3. Разность двух бесконечно больших величин («неопределенность» вида $\infty - \infty$)

Если

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \ \text{и} \ \lim_{x \to a} \varphi(x) = +\infty, \qquad (30,1)$$

то для определения предела $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]$ *надо преобразовать эту разность* $f(x)-\varphi(x)$ *к такому виду:*

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}};\ \text{тогда}\ \lim_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}.$$

Учитывая (30,1), заключаем, что теперь мы должны исследовать «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$, *которую мы умеем раскрывать с помощью правила Лопиталя.*

Задача 30,15. Найти: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Решение. При $x\to 1$ $\frac{1}{\ln x}$ и $\frac{1}{x-1}$ — бесконечно большие величины одного и того же знака, а потому мы имеем здесь разность двух бесконечно больших величин («неопределенность» вида $\infty-\infty$). Разность $\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$;

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}}_{\substack{\text{«неопределенность»}\\ \text{вида } \frac{0}{0}.}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=$$

$$=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Задача 30,16. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

Решение. При $x\to 1$ дроби $\frac{2}{x^2-1}$ и $\frac{1}{x-1}$ — величины бесконечно большие одного и того же знака, а потому их разность приводит к «неопределенности» вида $\infty-\infty$. Выражение, стоящее в скобках, приводим к общему знаменателю и получаем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1}}_{\substack{\text{«неопределенность»}\\ \text{вида } \frac{0}{0};}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2\cdot 1}=-\frac{1}{2}.$$

Задача 30,17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

Ответ. 0.

Задача 30,18 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x\operatorname{tg} x}\right);\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right);\quad 3)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg} x-\frac{\pi}{2}\sec x\right).$$

Ответ. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -1.

Задача 30,19. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)$.

Решение. При $x\to 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2x^2}=-\infty\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x(e^{2x}-1)}=+\infty.$$

Значит, мы имеем «неопределенность» вида $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(e^{2x}-1)+2x}{2x^2(e^{2x}-1)}}_{\text{«Неопределенность» вида }\frac{0}{0}\text{; в числителе раскрываем скобки и делаем приведение подобных членов.}}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^{2x}+x+1}{x^2(e^{2x}-1)}}_{\text{Применяем правило Лопиталя.}}=\underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2(x-1)e^{2x}+1}{2x(e^{2x}-1)+2x^2e^{2x}}}_{\text{Опять «неопределенность» вида }\frac{0}{0}\text{. Прежде чем вторично применять правило Лопиталя, упростим числитель и знаменатель дроби.}}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(2x-1)+1}{e^{2x}(x+x^2)-x}}_{\text{Снова применяем правило Лопиталя}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}(2x-1)+2e^{2x}}{2e^{2x}(x+x^2)+e^{2x}(1+2x)-1}}_{\text{«Неопределенность» вида }\frac{0}{0}\text{.}}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}(2x-1)+4e^{2x}+4e^{2x}}{4e^{2x}(x+x^2)+2e^{2x}(1+2x)+2e^{2x}(1+2x)+2e^{2x}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2+2+2}=\frac{1}{6}.$$

4. Произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую («неопределенность» вида $0\cdot\infty$)

«Неопределенности» этого вида могут быть сведены к «неопределенности» вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Действительно, пусть

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\ \text{а}\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty. \tag{30,2}$$

Записав

$$f(x)\varphi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{f(x)}},\quad \text{или}\quad f(x)\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},\tag{30,3}$$

мы получим, что

$$\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)}_{\substack{\text{«Неопределенность»}\\ \text{вида } 0\cdot\infty}}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}}_{\substack{\text{На основании}\\ \text{(30,2) здесь}\\ \text{«неопределен-}\\ \text{ность» вида } \frac{0}{0}.}}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}}_{\substack{\text{На основании}\\ \text{(30,2) здесь}\\ \text{«неопределен-}\\ \text{ность» вида } \frac{\infty}{\infty}.}}.$$

При решении задач в этом случае следует выражение $f(x)\cdot\varphi(x)$ записать в одном из видов (30,3).

Задача 30,20. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$ (см. замечание в задаче 30,9).

Решение. При $x\to+0$ $\ln x$ — величина бесконечно большая, а x — бесконечно малая. Поэтому здесь имеет место «неопределенность» вида $0\cdot\infty$. Применяем преобразование, указанное в (30,3):

$$\lim_{x\to+0} x\ln x=\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\substack{\text{Неопределен-}\\ \text{ность вида } \frac{\infty}{\infty};\\ \text{применяем пра-}\\ \text{вило Лопиталя.}}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0.$$

Задача 30,21. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

Решение. При $x\to+\infty$ имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, а потому при $x\to+\infty$ выражение xe^{-x} — произведение величины бесконечно большой на бесконечно малую («неопределенность» вида $0\cdot\infty$). Так как $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, то

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}}_{\substack{\text{Неопреде-}\\ \text{ленность}\\ \text{вида } \frac{\infty}{\infty}.\\ \text{Применяем}\\ \text{правило}\\ \text{Лопиталя.}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Задача 30,22 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x;\qquad 2)\ \lim_{x\to+0} x^n\ln x\ (n>0).$$

Ответ. 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) 0.

Задача 30,23 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x);\quad 2)\ \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right);$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\sec\frac{\pi}{2}x\cdot\ln\frac{1}{x}.$$

Ответ. 1) 0, 2) $-\frac{4}{\pi}$; 3) $\frac{2}{\pi}$.

5. «Неопределенности» видов 1^∞; ∞^0, 0^0

«Неопределенности» этих видов сводятся к «неопределенности» вида $0\cdot\infty$, *которая была рассмотрена в предыдущем параграфе. Это достигается с помощью тождества*

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)} \tag{30,4}$$

в предположении, что $f(x)>0$ *(это предположение необходимо сделать, так как в показателе степени в правой части равенства* $f(x)$ *стоит под знаком логарифма). Теперь можно написать, что*

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} e^{\varphi(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)}$$

и дело сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

Задача 30,24. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$ («неопределенность» вида 0^0).

Решение. На основании (30,4) можем записать, что $x^x = e^{x\ln x}$, а потому

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x}. \tag{30,5}$$

Найдем теперь $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$ (здесь «неопределенность» вида $0\cdot\infty$):

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\substack{\text{Неопределен-}\\ \text{ность вида } \frac{\infty}{\infty}.\\ \text{Применяем}\\ \text{правило Лопи-}\\ \text{таля.}}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0$$

Подставляя этот результат в (30,5), получим, что

$$\lim_{x\to+0} x^x = e^0 = 1.$$

Задача 30,25. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}$ («неопределенность» вида 1^∞)

Решение. На основании (30,4) имеем $(1+mx)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)}$, а потому

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+mx)}; \qquad (30,6)$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+mx)}_{\text{«неопределенность» вида } 0,\ \infty;}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x}}_{\text{«неопределенность» вида } \frac{0}{0}.}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{1}=m.$$

Подставляя найденное значение в (30,6), получим, что

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}=e^m.$$

Задача 30,26 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$ («неопределенность» вида ∞^0);

2) $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$ («неопределенность» вида ∞^0).

Ответ. 1) 1; 2) 1.

Задача 30,27. Найти $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ («неопределенность» вида 1^∞).

Решение. На основании (30,4) $\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}$, а потому

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}};$$

$$\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}_{\substack{\text{«неопределенность» вида}\\ 0\cdot\infty,\text{ т. к. } \frac{\operatorname{tg}x}{x}\to 1,\\ \text{когда } x\to 0}}=\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}{x^2}}_{\text{«неопределенность» вида } \frac{0}{0}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{tg}x-\ln x}{x^2}=\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\sec^2x-\frac{1}{x}}{2x}}_{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\sec^2x=\frac{2}{\sin 2x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{x}}{x}=\underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2x-\sin 2x}{x^2\cdot\sin 2x}}_{\text{Применяем правило Лопиталя}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2-2\cos 2x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sin 2}{\sin 2x + 2x\cos 2x + 2x\cos 2x - 2x^2 \sin 2x}}_{\substack{\text{«Неопределенность» вида } \frac{0}{0}.\text{ Вторично применяем пра-}\\ \text{вило Лопиталя}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to+0} \frac{4\cos 2x}{2\cos 2x + 4\cos 2x - 8x\sin 2x - 4x\sin 2x - 4x^2\cos 2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2+4} = \frac{1}{3}.$$

И тогда $\lim\limits_{x\to+0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$.

Задача 30,28 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$ (0^0)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^{x}$ (0^0)

3) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞)

Ответ. 1) 1; 2) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; 3) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{a^2}{2}}$.

Задача 30,29 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx}$ (1^∞);

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ (1^∞);

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ (1^∞);

4) $\lim\limits_{x\to+0} (-\ln x)^{x}$ (∞^0);

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$ (∞^0).

Ответ. 1) $e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$; 2) e; 3) e^{-1}; 4) 1; 5) 1.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Возрастание и убывание функций.

Краткие сведения из теории

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется возрастающей в некотором интервале, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.*

Если же из неравенства $x_2 > x_1$ следует нестрогое * неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, то функция называется неубывающей в этом интервале.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется убывающей в некотором интервале, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.*

Если же из неравенства $x_2 > x_1$ следует нестрогое неравенство $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, то функция называется невозрастающей в этом интервале. Функции возрастающие и убывающие, а также функции невозрастающие и неубывающие называются монотонными.

ПРИЗНАКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Следующая теорема выражает важный для практических целей признак строгого возрастания и строгого убывания функции и указывает правило для определения интервалов, в которых функция возрастает и убывает (иначе, интервалов монотонности функции).

Теорема. *Если во всех точках некоторого интервала первая производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ в этом интервале возрастает. Если же во всех точках некоторого интервала первая производная $f'(x) < 0$, то функция в этом интервале убывает.*

Эта теорема выражает достаточный признак возрастания и убывания функции на интервале.

Замечание. *Строгое возрастание или строгое убывание функции на интервале не исключает возможности обращения в нуль первой производной функции в некоторых* ***отдельных точках*** *этого интервала. Слова «отдельных точках» подчеркнуты потому, что в случае строгого возрастания или строгого убывания функции точки, в которых первая производная обращается в нуль, не должны сплошь заполнять никакого частичного интервала, даже малого, ибо если бы это имело место, то функция в этих частичных интервалах сохраняла бы постоянное значение и тем самым не была бы строго возрастающей или строго убывающей на всем рассматриваемом интервале.*

Правило. *Для определения интервалов строгого возрастания и строгого убывания функции следует решить неравенства:*

$$f'(x) > 0 \text{ и } f'(x) < 0. \tag{31,1}$$

Следует также рассмотреть, как располагаются в этих интервалах точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль. Если окажется, что эти точки не заполняют сплошь какого-либо частичного интервала, то неравенства (31,1) укажут интервалы строгого возрастания и строгого убывания функции.

---

* Неравенства вида $a < b$ и $a > b$ называются строгими, а неравенства вида $a \leqslant b$ и $a \geqslant b$ — нестрогими.

При решении задач, в которых требуется определить интервалы возрастания и убывания функции, следует прежде всего определить область существования этой функции.

Задача 31,1. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = x^3 - 12x + 11.$$

Решение. Областью существования данной функции является вся ось Ox (функция существует при любом значении x). Ее производная $f'(x) = 3x^2 - 12$. Чтобы найти интервалы возрастания функции, решим неравенство $3x^2 - 12 > 0$. Деля на 3 обе его части, получаем $x^2 - 4 > 0$. Отсюда следует, что $x^2 > 4$, а $x < -2$ и $x > 2$, т. е. $|x| > 2$. Следовательно, данная функция возрастает в двух бесконечных интервалах: $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$. Чтобы определить интервалы убывания функции, решим неравенство $3x^2 - 12 < 0$ или $x^2 - 4 < 0$, из которого следует, что $x^2 < 4$, а $x < 2$, или $x > -2$, т. е. $|x| < 2$. Отсюда заключаем, что функция убывает на интервале $(-2, 2)$. Производная функция $3x^2 - 12$ обращается в нуль при $x = -2$ и $x = +2$. В точке $x = -2$ функция переходит от возрастания к убыванию, а в точке $x = +2$ она от убывания переходит к возрастанию.

Легко усмотреть, что $f(1) = 0$, а $f(0) = 11$. Так как $f(1) = 0$, то $x^3 - 12x + 11$ делится без остатка на $x - 1$ и мы получаем, что

$$x^3 - 12x + 11 = (x - 1)(x^2 + x - 11).$$

Приравняв последнее выражение нулю и решая уравнение $x^2 + x - 11 = 0$, найдем и другие два значения x, при которых $f(x) = 0$. Этими значениями являются

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{45}}{2}; \quad x_1 \approx -3{,}85; \quad x_2 \approx 2{,}85.$$

Полученных данных достаточно, чтобы составить представление о графике функции. Постройте его эскиз.

Задача 31,2 (для самостоятельного решения). Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Построить эскиз графика.

Ответ. Функция возрастает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; $f(2) = 0$; $f(-1) = 0$; $f(0) = -2$; $f'(x) = 0$ при $x = -1$ и $x = 1$.

Задача 31,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = x^3$ возрастает на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$, а ее производная обращается в нуль при $x = 0$.

Задача 31,4. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$y = \sin x.$$

Решение. Область определения функции — вся ось Ox. Находим $y' = \cos x$. Решаем неравенство $\cos x > 0$.

Это неравенство, выполняясь на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, выполняется также и на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где k — любое целое положительное или отрицательное число, так как функция $\cos x$ — периодическая, а ее период $T = 2\pi$.

Заключение. Функция $y = \sin x$ возрастает на интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \text{ где } k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots$$

Решая неравенство $\cos x < 0$, получаем, что оно выполняется в интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где k — любое целое положительное или отрицательное число, а потому приходим к заключению, что функция $y = \sin x$ убывает в этих интервалах.

Задача 31,4а (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ возрастает во всех интервалах, в которых она существует.

Задача 31,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{ctg} x$ убывает во всех интервалах, в которых она существует.

Задача 31,6. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 - x^2}.$$

Решение. Функция существует при всех значениях x, кроме $x = -1$ и $x = +1$, т. е. областью ее существования являются интервалы: $(-\infty, -1)$; $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$.

Находим производную функции

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2}; \quad f'(x) = \frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби положительны при всех значениях x (значения $x = -1$ и $x = +1$ не должны рассматриваться, так как при этих значениях не существует и заданная функция). Значит, во всех интервалах, в которых функция определена, она возрастает.

Задача 31,7 (для самостоятельного решения). Определить интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$. Начертить эскиз графика функции.

Ответ. Функция возрастает в интервале $(-1, +1)$, убывает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; $f'(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$.

Задача 31,8. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20.$$

1) **Решение.** Функция существует при всех значениях x:

$$y' = 12x^2 - 42x + 18 = 6(4x^2 - 7x + 3); \quad y' = 6(2x-1)(x-3).$$

Решаем неравенства: 1) $y' > 0$ и 2) $y' < 0$.

1. Решаем неравенство $y' > 0$; $6(2x-1)(x-3) > 0$.

Произведение двух множителей положительно тогда, когда они оба имеют один и тот же знак, т. е. когда они одновременно положительны или одновременно отрицательны. Эти соображения приводят к двум системам неравенств:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \quad (A) \qquad\qquad \begin{cases} 2x-1<0 \\ x-3<0 \end{cases} \quad (B)$$

Первое из неравенств (A) дает $x > \frac{1}{2}$, а второе $x > 3$; поэтому неравенства (A) приводят к заключению, что $x > 3$. Из неравенств (B) получаем: из первого $x < \frac{1}{2}$, из второго $x < 3$; приходим к заключению, что эти неравенства выполняются при $x < \frac{1}{2}$.

Таким образом, функция возрастает в интервалах $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и $(3, +\infty)$.

2) Теперь решим неравенство $y' < 0$; $6(2x-1)(x-3) < 0$ или $(2x-1)(x-3) < 0$. Произведение двух сомножителей отрицательно тогда, когда эти сомножители имеют разные знаки. Это приводит к двум системам неравенств:

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x-3<0 \end{cases} \quad (C) \qquad\qquad \begin{cases} 2x-1<0 \\ x-3>0 \end{cases} \quad (D)$$

В системе (C) из первого неравенства $x > \frac{1}{2}$, из второго $x<3$; на основании этого заключаем, что (C) выполняется для значений x из интервала $\frac{1}{2} < x < 3$. Система неравенств (D) дает: из первого $x < \frac{1}{2}$, из второго $x > 3$, что противоречиво, так как не может быть, чтобы одновременно x было меньше $\frac{1}{2}$ и больше трех.

Заключение. Неравенство $y' < 0$ выполняется для значений $\frac{1}{2} < x < 3$; таким образом, данная функция убывает на интервале $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. В точке $x = \frac{1}{2}$ функция сменяет возрастание на убывание, а в точке $x = 3$ убывание прекращается и сменяется возрастанием.

Задача 31,9 (для самостоятельного решения). Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1.$$

Указание. $y' = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$. Так как $x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$, то $y' > 0$, когда $x^2 - 4x + 3 > 0$, и $y' < 0$ при

$$x^2 - 4x + 3 < 0; \; x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

Функция возрастает в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$, а убывает в интервале $(1,3)$. Производная обращается в нуль при $x = 0$, но это значение содержится в интервале $(-\infty, 1)$ где функция возрастает. Это пример показывает, что хотя в интервале $(-\infty, 1)$ функция строго возрастает, но ее первая производная обратилась в нуль в отдельной точке $(0, 0)$.

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение максимума и минимума функций. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение максимума. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ максимум, если значение функции в этой точке больше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_0.*

Иначе: функция $f(x)$ имеет максимум при $x = x_0$, если

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$$

для любых Δx — как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по абсолютной величине.

Определение минимума. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ минимум, если значение функции в этой точке меньше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_0.*

Иначе: функция $f(x)$ имеет минимум при $x = x_0$, если

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$$

для любых как положительных, так и отрицательных Δx, достаточно малых по абсолютной величине.

Если в некоторой точке функция имеет максимум или минимум, то говорят, что в этой точке имеет место экстремум, а значение функции в этой точке называется экстремальным.

Замечание. *Следует помнить: 1) Максимум (минимум) не является обязательно наибольшим (наименьшим) значением, принимаемым функцией. Вне рассматриваемой окрестности точки x_0 функция может принимать бо́льшие (меньшие) значения, чем в этой точке. 2) Функция может иметь несколько максимумов и минимумов. 3) Функция, определенная на отрезке, может достигнуть экстремума только во внутренних точках этого отрезка.*

Необходимое условие экстремума. *Если функция $f(x)$ имеет экстремум при $x = x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю, или ∞ или вовсе не существует.*

Из этого следует, что точки экстремума функции следует разыскивать только среди тех, в которых ее первая производная $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ или не существует. *Исследование остальных точек отпадает. Точки, в которых первая производная функции равна нулю, бесконечности, а также те, в которых она не существует, но функция сохраняет непрерывность, называются критическими.*

Следует уяснить, что указанный признак экстремума является только необходимым, но отнюдь не достаточным: производная функции может быть равна нулю, ∞ или не существовать не только в тех точках, в которых функция достигает экстремума. Поэтому, определив критические точки, в которых функция может достигать экстремума, надо каждую из точек в отдельности исследовать на основании достаточных условий существования экстремума. Укажем два таких достаточных условия.

ПЕРВОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

Пусть точка $x = x_0$ является критической точкой функции $f(x)$, а сама функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема во всех точках некоторого интервала, содержащего эту точку (за исключением возможно самой этой точки). Тогда: 1) если при $x < x_0$ производная функции $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то при $x = x_0$ имеет место максимум, т. е. если при переходе слева направо через критическую точку первая производная функции меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция достигает максимума; 2) если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то при $x = x_0$ имеет место минимум; иначе: если при переходе слева направо через критическую точку первая производная функции меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция достигает минимума; 3) если же при переходе через критическую точку первая производная функции не меняет знак, то экстремума нет.

ВТОРОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА

Если в точке $x = x_0$ *первая производная функции* $f(x)$ *равна нулю:* $f'(x_0) = 0$, *то при* $x = x_0$ *имеет место максимум, если* $f''(x_0) < 0$, *и минимум, если* $f''(x_0) > 0$. *Если же* $f''(x_0) = 0$, *то для заключения об экстремуме в этой точке требуется дальнейшее исследование (предполагается, что функция* $f(x)$ *в окрестности точки* $x = x_0$ *имеет непрерывную вторую производную).*

Способ, которым функция исследуется на экстремум с помощью первого достаточного условия (по первой производной), мы будем называть первым, а способ исследования функции на экстремум на основании второго достаточного условия (по второй производной) — вторым.

Правило для исследования функции на экстремум при помощи первой производной (первый способ)

Для исследования функции на экстремум по первой производной следует:

1. Найти $f'(x)$ ***— первую производную функции.***

2. Решить уравнение $f'(x) = 0$, ***а также определить те значения*** x, ***при которых*** $f'(x) = \infty$ ***или не существует (короче: найти критические точки функции*** $f(x)$***). Пусть этими точками будут точки с абсциссами*** x_1, x_2, x_3 ..., x_n, ***которые находятся в интервале*** (a, b).

3. Все критические точки расположить в порядке возрастания их абсцисс в интервале (a, b).

$$a < x_1 < x_2 < x_3 <, \cdots < x_n < b.$$

4. Внутри каждого из интервалов (a, x_1); (x_1, x_2); (x_2, x_3); ... (x_n, b) ***взять любую точку и установить в этой точке знак первой производной функции (производная сохраняет знак в каждом интервале между двумя соседними критическими точками).***

5. Рассмотреть знаки $f'(x)$ ***в двух соседних интервалах, переходя последовательно слева направо от первого интервала к последнему. Если при таком переходе знаки*** $f'(x)$ ***в двух соседних интервалах различны, то экстремум в критической точке есть: максимум будет, если знак поменяется с + на —, а минимум, если он поменяется с — на +. Если же в двух соседних интервалах имеет место сохранение знака первой производной, то экстремума в рассматриваемой критической точке нет.***

6. Найти значения функции в точках, где она достигает экстремума (экстремальные значения функции).

Правило для исследования функции на экстремум по второй производной (второй способ)

Для того чтобы исследовать функцию на экстремум по второй производной, следует:

1. Найти $f'(x)$ — первую производную функции.

2. Решить уравнение $f'(x) = 0$.

3. Исследовать знак $f''(x)$ — второй производной функции — в каждой точке, найденной в п. 2. Если окажется, что в рассматриваемой точке $f''(x) > 0$, то в этой точке будет минимум, а если $f''(x) < 0$, то в ней будет максимум. Если же окажется, что в рассматриваемой точке $f''(x) = 0$, то исследование надлежит провести по первому правилу.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или в критических точках, или на концах отрезка $[a, b]$. Поэтому, ***чтобы определить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, надо: 1) определить критическое точки функции; 2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка $[a, b]$; 3) наибольшее из значений, найденных в п. 2, будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции на отрезке $[a, b]$.***

Задача 32,1. Найти экстремум функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$, а также определить ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-2, 4]$.

Решение. Проведем решение сначала по первому правилу, а потом по второму. Областью существования функции является весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

1. Находим, что

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 3x. \tag{32,1}$$

2. Решаем уравнение $f'(x) = 0$, т. е. уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0. \tag{32,2}$$

Разлагаем левую часть уравнения на множители:

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0,$$

откуда $x_1 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$, а $x_2 = 3$; $x_3 = -1$.

Производная конечна при любом x (говорят в этом случае, что производная конечна всюду). Поэтому критическими точками будут только найденные из (32,2).

3. Располагаем критические точки в порядке возрастания абсцисс: -1; 0; 3.

4. Рассмотрим интервалы

$$(-\infty, -1);\ (-1,0);\ (0,3),\ (3, +\infty) \qquad (32,3)$$

Выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак первой производной по выражению (32,1). В интервале $(-\infty, -1)$ возьмем, например, точку $x=-2$; $f'(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-3(-2)=-10<0$; в интервале $(-1,0)$ возьмем точку $x=-\frac{1}{2}$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}>0$; в интервале $(0,3)$ возьмем точку $x=1$ и вычислим в ней $f'(x):f'(1)=$ $=-4<0$; в интервале $(3, +\infty)$ возьмем точку $x=4:f'(4)=$ $=20>0$ (вместо этих точек читатель может в каждом из интервалов (32,3) взять любые другие). Таким образом, в интервалах (32,3) первая производная имеет такую последовательность знаков:

$$\underbrace{-,\ +}_{\min},\ \underbrace{-}_{\max},\ \underbrace{+}_{\min},$$

и мы приходим к заключению, что в критической точке $x=-1$ имеет место минимум, в критической точке $x=0$ — максимум; а в критической точке $x=3$ — минимум. Найдем теперь экстремальные значения функции

$$f(-1)=\frac{17}{12};\ f(0)=2;\ f(3)=-\frac{37}{4}. \qquad (32,4)$$

Эскиз графика представлен на фиг. 32,1.

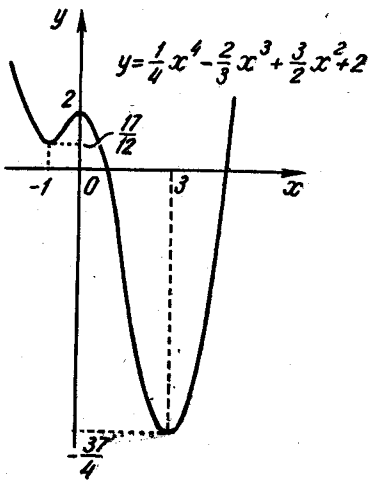
Теперь проведем решение по второму правилу, т. е. исследуем функцию на экстремум с помощью второй производной.

У нас критические точки уже определены: $x_1=-1$; $x_2=0$ и $x_3=3$. Найдем вторую производную функции. Дифференцируя первую производную, получаем $f''(x)=3x^2-4x-3$, и согласно второму правилу определяем знак второй производной в каждой критической точке:

$f''(-1)=4>0$; при $x=-1$ функция имеет минимум,

$f''(0)-3<0$; при $x=0$ функция имеет максимум,

$f''(3)=12>0$; при $x=3$ функция имеет минимум.



Фиг. 32,1.

Читатель должен отметить, что исследование, проведенное по второму способу, было значительно проще. Однако от исследования функции на экстремум по первому правилу при помощи первой производной отказываться не следует, так как может оказаться, что в критической точке вторая производная окажется равной нулю, а в этом случае нельзя сделать никакого заключения о наличии экстремума.

Поэтому упражнения в нахождении экстремума функции по первой производной необходимы. Теперь ответим на второй вопрос задачи: определим наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-2,4]$. Этот отрезок содержит внутри себя все критические точки. Так как значения функции в критических точках мы уже вычислили (32,4), то нам осталось вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. $f(-2)$ и $f(4): f(-2)=\frac{16}{3}$; $f(4)=-\frac{2}{3}$. Сравнивая эти значения со значениями (32,4) функции в критических точках, мы видим, что наибольшим из них является $f(-2)=\frac{16}{3}$, а наименьшим — $f(3)=-\frac{37}{4}$, т. е. наибольшего значения функция достигает на левом конце отрезка при $x=-2$, а наименьшего — в критической точке $x=3$. Решим подробно еще одну аналогическую задачу.

Задача 32,2. Определить экстремум функции $y=x^3-3x^2+3x+2$ и найти ее наименьшее и наибольшее значение на отрезке $[2,5]$.

Решение. Сначала решим задачу по первому способу, а потом — по второму. Областью существования функции является весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Находим первую производную функции: $f'(x)=3x^2-6x+3$. Решим уравнение $3x^2-6x+3=0$. Это уравнение имеет только один корень $x=1$. Производная конечна при любом значении x, а потому $x=1$ является единственной критической точкой.

Рассмотрим интервалы $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

Внутри каждого из этих интервалов выберем произвольную точку и определим в ней знак первой производной. Например, в первом интервале возьмем точку $x=0$, во втором $x=2$.

$$f'(0)=3>0; \quad f'(2)=3>0$$

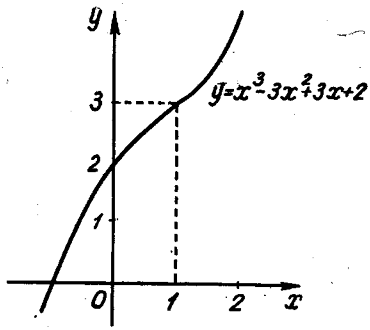
(читатель вместо этих точек может в каждом из этих интервалов взять любые другие).

Таким образом, в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$ имеет место такая последовательность знаков первой производной: $+$, $+$. Из этого мы заключаем, что первая производная знака не поменяла, а потому в точке $x=1$ экстремума нет.

Если первую производную записать в виде $f'(x)=3(x-1)^2$, то можно сразу заключить, что она положительна при любом значении $x \neq 1$, а потому рассматриваемая функция возрастает на всем бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,2.

Покажем, что по второму правилу с помощью второй производной исследование провести нельзя. Действительно, $f''(x) = 6x - 6$, и в критической точке $x = 1$ имеем, что $f''(1) = 0$. Таким образом, исследование следует вести по первому правилу, а на основании его мы уже заключили, что экстремума нет.

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Так как отрезок $[2,5]$ не содержит критической точки, то для определения наименьшего и наибольшего значения функции на этом отрезке следует определить только значения ее на концах отрезка: $f(2) = 4$, $f(5) = 67$. Наименьшего значения на отрезке $[2,5]$ функция достигает на левом конце при $x = 2$, и это наименьшее значение $f(2) = 4$. Наибольшего значения функция достигает при $x = 5$ — на правом конце отрезка; это значение $f(5) = 67$.



Фиг. 32,2.

Задача 32,3 (для самостоятельного рошения). Найти сначала по первому, а потом по второму правилу экстремум функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 24x + 1$, а также наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[-5,2]$.

Указание. Уравнение $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ имеет корни: $x_1 = -4$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Эти корни могут быть легко найдены на основании следствия теоремы Безу, известной из алгебры. Можно также уравнение представить в виде

$$x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24 = 0,$$

а тогда его левая часть равна $(x-2)(x^2+x-12)$.

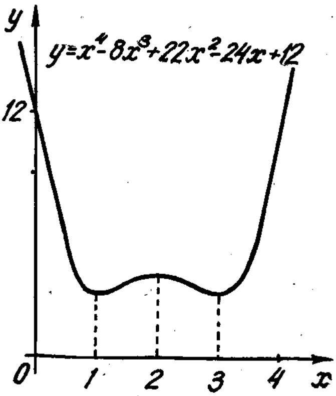
Ответ. При $x = -4$ минимум; $f(-4) = -\frac{365}{3}$; при $x = 2$ — максимум; $f(2) = \frac{67}{3}$; при $x = 3$ — минимум; $f(3) = \frac{85}{4}$; на отрезке $[-5,2]$: $y_{\text{наиб.}} = y(2) = \frac{67}{3}$; $y_{\text{наим.}} = y(-4) = -\frac{365}{3}$, т. е. функция достигает наибольшего значения в критической точке $x = 2$, которая является правым концом отрезка, а наименьшего значения — в критической точке $x = -4$ внутри рассматриваемого отрезка (в этой точке функция достигает также и минимума).

Задача 32,4 (для самостоятельного решения). Найти сначала по первому правилу, а потом по второму экстремум функции

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12.$$

Указание. Уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ может быть переписано так: $x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0$, или $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Ответ. При $x = 1$ — минимум; $f(1) = 3$; при $x = 2$ — максимум; $f(2) = 4$; при $x = 3$ — минимум; $f(3) = 3$ (см. фиг. 32,3).



Фиг. 32,3.

Задача 32,5. Исследовать на экстремум функцию $y = x^4 + 8x^3 + 16x^2$, а также найти ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-3,1]$.

Решение. Область существования — бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Первая производная $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 32x$. Для определения критических точек решаем уравнение

$$4x^3 + 24x^2 + 32x = 0.$$

Перепишем его в виде $x(x^2 + 6x + 8) = 0$, откуда $x = 0$; $x^2 + 6x + 8 = 0$. Критические точки: $x_1 = -4$; $x_2 - 2$; $x_3 = 0$.

Применим первое правило. Критические точки разбивают область существования функции на интервалы:

$$(-\infty, -4);\ (-4;\ -2);\ (-2,\ 0);\ (0,\ +\infty).$$

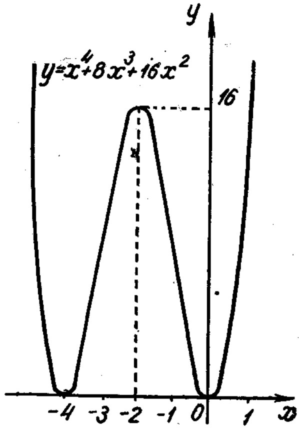
В каждом из этих интервалов первая производная сохраняет знак. Поэтому для исследования в них знака первой производной можно в каждом интервале выбрать произвольную точку. В первом интервале возьмем точку $x = -5$, $f'(-5) = -60 < 0$; во втором интервале возьмем точку $x = -3$; $f'(-3) = +12 > 0$; в третьем интервале выберем точку $x = -1$; $f'(-1) = -12 < 0$; в четвертом интервале — точку $x = +1$; $f'(1) = 60 > 0$.

Последовательность знаков первой производной в рассмотренных интервалах запишется так:

$$\underbrace{-,\ +}_{\min},\ \underbrace{+,\ -}_{\max},\ \underbrace{-,\ +}_{\min}.$$

Следовательно, при $x = -4$ имеем минимум, а $f(-4) = 0$; при $x = -2$ — максимум и $f(-2) = 16$, а при $x = 0$ — минимум, причем $f(0)=0$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,4. Вторым способом задачу решите самостоятельно.

Найдем теперь наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-3,1]$. На этом отрезке имеются две критические точки: $x=-2$ и $x=0$; $f(-2)=16$, $f(0)=0$. Для решения вопроса о наибольшем и наименьшем значении в нем функции надо еще рассмотреть значения функции на концах отрезка: $f(-3)$ и $f(1)$. Подсчет показывает, что $f(-3)=9$, а $f(1)=25$. Сравнивая эти значения функции с ее значениями в критических точках, приходим к заключению, что наименьшее значение функции в точке $x=0$, и оно равно 0, а наибольшее значение функция имеет на правом конце рассматриваемого отрезка в точке $x=1$, и оно равно 25.



Фиг. 32,4.

Задача 32,6 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум по второму правилу функцию $f(x)=x^4-\frac{20}{3}x^3+8x^2$. Начертить эскиз графика функции.

Ответ. Критические точки: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=4$. При $x_1=0$ — минимум; при $x_2=1$ — максимум; при $x_3=4$ — минимум.

Задача 32,7 (для самостоятельного решения). По второму правилу исследовать на экстремум функцию

$$y=4x^3-21x^2+18x+20.$$

Ответ. Критические точки: $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=3$; при $x=\frac{1}{2}$ — максимум, при $x=3$ — минимум;

$$y_{\max}=\frac{97}{4};\quad y_{\min}=-7.$$

Задача 32,8. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x)=(x-1)^3(x+1)^2.$$

Решение. Функция определена при всех значениях x. Проведем решение по первому и второму правилам. Начнем с определения первой производной:

$$f'(x)=3(x-1)^2(x+1)^2+2(x+1)(x-1)^3=$$
$$=(x-1)^2(x+1)(5x+1).$$

Так как производная имеет конечное значение при любом x, то критическими точками будут только те, в которых первая производная равна нулю. Решая уравнение $(x-1)^2(x+1)(5x+1)=0$, находим критические точки: $x_1=-1$; $x_2=-\frac{1}{5}$; $x_3=1$.

Эти точки разбивают интервал $(-\infty, +\infty)$, в котором существует заданная функция, на интервалы.

$$(-\infty, -1);\ \left(-1, -\frac{1}{5}\right);\ \left(-\frac{1}{5}, 1\right);\ (1, +\infty).$$

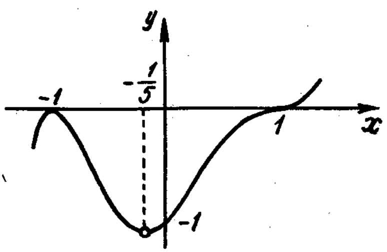
Теперь мы должны исследовать знак первой производной в каждом из этих интервалов. Учитывая, что в каждом из этих интервалов первая производная сохраняет знак, мы можем в каждом из них рассмотреть любую точку. Возьмем в первом интервале $x=-2$; $f'(-2)=81>0$. Во втором интервале берем $x=-\frac{1}{2}$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}<0$. В третьем интервале берем $x=0$;

$$f'(0)=1>0.$$

В четвертом интервале возьмем $x=2$; $f'(2)=33>0$ (вместо этих точек читатель может в каждом из этих интервалов взять любые другие). Последовательность знаков первой производной будет такой:

$$\underbrace{+, -}_{\max}\!\!\!\!\underbrace{\ , +}_{\min}, +.$$

Из рассмотрения этой последовательности знаков заключаем, что в точке $x=-1$ — максимум, а $f(-1)=0$; в точке $x=-\frac{1}{5}$ — минимум, а $f\left(-\frac{1}{5}\right)=-1\frac{331}{3125}$; в точке $x=1$ экстремума нет: $f(1)=0$; в интервале $\left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$ функция возрастает, так как ее первая производная в этом интервале положительна (эскиз графика представлен на фиг. 32,5). Теперь решим эту же задачу по второму правилу. Находим, что



Фиг. 32,5.

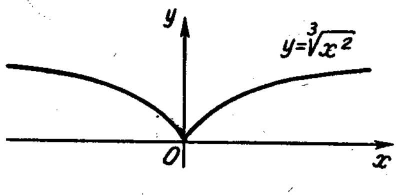
$f''(x)=2(x-1)(x+1)(5x+1)+(x-1)^2(5x+1)+5(x-1)^2(x+1)$. Поскольку нас интересует только знак второй производной в критических точках, то нет надобности упрощать это выражение). Подставляя в это выражение критические значения x, получим:

$f''(-1) = -16 < 0$. Значит, при $x = -1$ функция имеет максимум; $f''\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{143}{25} > 0$. Это означает, что при $x = -\frac{1}{5}$ минимум; $f''(1) = 0$. Для заключения о поведении функции в этой точке надо прибегнуть к исследованию по первой производной (оно уже было проведено выше: в этой точке экстремума нет).

Задача 32,9. Определить экстремум функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Легко находим, что $f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.

Уравнение $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$ не удовлетворяется ни одним конечным значением x. Рассмотрим значения x, при которых $f'(x) = \infty$ или не существует. Ясно, что таким единственным значением будет $x = 0$. Таким образом, имеется только одна критическая точка $x = 0$, которая весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$ существования функции разбивает на 2 интервала: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Исследуем знак первой производной в любой точке каждого из этих интервалов. Возьмем, например, в первом интервале точку $x = -1$; $f'(-1) = -\frac{2}{3} < 0$; во втором интервале возьмем точку $x = 1$; $f'(1) = \frac{2}{3} > 0$. Последовательность знаков первой производной:



Фиг. 32,6.

$$\underbrace{-,\ +}_{\min}$$

Так как производная меняет знак с $-$ на $+$, то в критической точке $x = 0$ функция имеет минимум, и $f(0) = 0$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,6.

Исследование заданной функции во второй производной провести нельзя, так как $f''(x)$ не существует в точке $x = 0$.

ТРИДЦАТЬ ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений на определение максимума и минимума функций и их наибольшего и наименьшего значения на отрезке (необходимые краткие сведения из теории помещены в тридцать втором практическом занятии).

Задача 33,1. Определить экстремум квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Решение. Прежде всего находим первую производную функции

$$y' = 2ax + b$$

и решаем уравнение $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$. Бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$ существования заданной функции разбивается на два:

$$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right); \quad \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right). \tag{33,1}$$

Для исследования вопроса о знаке первой производной в этих интервалах возьмем в каждом из них произвольную точку: например, в первом — точку $-\frac{b}{2a} - 1$, а во втором $-\frac{b}{2a} + 1$, и вычислим первую производную функции в этих точках:

$$y'\left(-\frac{b}{2a} - 1\right) = 2a\left(-\frac{b}{2a} - 1\right) + b = -2a;$$

$$y'\left(-\frac{b}{2a} + 1\right) = 2a\left(-\frac{b}{2a} + 1\right) + b = 2a.$$

Таким образом мы получаем такую последовательность знаков первой производной:

$$\text{при } a > 0 \ \underbrace{-, +}_{\min}, \ \text{при } a < 0 \ \underbrace{+, -}_{\max}$$

Заключение. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке $x = -\frac{b}{2a}$ достигает: минимума, если $a > 0$, максимума при $a < 0$. Значение ординаты в этой точке:

$$y\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Исследование во второй производной значительно проще приводит к этому же результату ($y'' = 2a$), и сразу видно, что в критической точке $x = -\frac{b}{2a}$ при $a < 0$ — максимум, а при $a > 0$ — минимум. Читателю известно, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ определяет параболу с осью, параллельной оси Oy. В первой части этой книги вершину параболы мы определяли выделением в правой части уравнения $y = ax^2 + bx + c$ полного квадрата и последующим параллельным переносом координатных осей. После разбора этой задачи учащийся получает более простой способ определения координат вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$: надо просто определить экстремум этой функции. Числовые примеры:

1) Найти вершину параболы $y = 2x^2 + 6x - 7$.

Решение. $y' = 4x + 6$; $4x + 6 = 0$; $x = -\frac{3}{2}$ — абсцисса вершины.

Так как $a = 2 > 0$, то в этой точке функция имеет минимум. Ордината вершины равна

$$y\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{3}{2}\right) - 7 = -11\frac{1}{2},$$

а координаты вершины этой параболы

$$\left(-\frac{3}{2},\ -11\frac{1}{2}\right);$$

2) Найти вершину параболы $y = -5x^2 - 4x + 2$.

Решение. $y' = -10x - 4$; $-10x - 4 = 0$; $x = -\frac{2}{5}$. Так как здесь $a = -5 < 0$, то в этой точке функция имеет максимум, а $y\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{14}{5}$. Координаты вершины параболы $\left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

Несколько аналогичных задач решите самостоятельно. Найти координаты вершины парабол и начертить эскизы их графиков:

1) $y = x^2 + x + 1$; 2) $y = -4x^2 + 9x - 1$;
3) $y = -2x^2 + 2x + 3$; 4) $y = 4x^2 + 6x - 4$;
5) $y = 6x^2 + 2x$.

Ответ. 1) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{9}{8}, \frac{65}{16}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{4}\right)$; 5) $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$.

Задача 33,2 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ и начертить эскиз графика этой функции.

Указания. 1) Функция периодическая, а ее период $T = 2\pi$; $f(x + 2\pi) = f(x)$. Поэтому при определении экстремума можно ограничиться определением экстремума на отрезке $[0; 2\pi]$;

2) $y' = 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x)$. На отрезке $[0,2\pi]$ уравнение $3\sin x \cos x (\sin x - \cos x) = 0$ имеет такие корни: 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2π, а потому критическими точками будут 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

3) Дальнейшее исследование выгоднее провести по второй производной, знак которой следует определить во всех критических точках.

Ответ. Максимум в точках: 0; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5}{4}\pi$; 2π; $f(0) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(2\pi) = 1$.

Минимум в точках: $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, а $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$, $f(\pi)=-1$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Задача 33,3 (для самостоятельного решения) Исследовать на экстремум функцию $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$.
Сделать эскиз графика функции.

Указания. 1) Область определения функции — интервал $(-\infty, +\infty)$, 2) первая производная обращается в нуль при $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $f'(x)=\infty$ при $x=-1$; $x=0$; $x=+1$; 4) критические точки -1; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1.

Ответ. При $x=\pm 1$ экстремума нет; при $x=0$ — минимум; при $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ — максимум.

В следующих четырех задачах, которые должны быть решены самостоятельно, надо иметь в виду, что ***если в рассматриваемом интервале имеется единственный экстремум, то в критической точке функция достигает наименьшего, или наибольшего значения, смотря по тому, будет ли в этой точке минимум или максимум.***

Задача 33,4 (для самостоятельного решения). Найти наименьшее значение функции $y=x^2\ln x$.

Указание. 1) Область существования функции — интервал $(0, +\infty)$; производная существует во всем этом интервале; 2) критическая точка $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Других критических точек нет. 3) $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)>0$, и тогда при $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ — минимум. Так как заданная функция имеет на интервале $(0, +\infty)$ единственный минимум, то при $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ функция достигает наименьшего значения, и это наименьшее значение $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$.

Задача 33,5. Найти наибольшее значение функции $y=x^{1-\ln x}$.

Указание. $y'=x^{1-\ln x}\frac{1}{x}(1-2\ln x)$.

Для всех значений x из интервала $(0, +\infty)$, в котором определена заданная функция, производная имеет конечное значение и обращается в нуль, когда $1-2\ln x=0$, т. е. при $\ln x=\frac{1}{2}$, и тогда $x=\sqrt{e}$ — единственная критическая точка.

Докажите, что в этой точке функция достигает максимума. Так как эта точка — единственная критическая точка функции, а в ней достигается максимум, то в ней достигается и наибольшее значение заданной функции:

$$y_{\text{наиб}} = y(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^{1-\ln\sqrt{e}} = (\sqrt{e})^{1-\frac{1}{2}} = (\sqrt{e})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{e}.$$

Задача 33,6 (для самостоятельного решения). Найти наименьшее значение функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

Ответ. $y_{\text{наим}} = e$ при $x = e$.

Указание. $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. Область существования функции состоит из двух интервалов: $(0,1)$ и $(1, +\infty)$. В каждом из этих интервалов производная имеет конечное значение, причем $y' = 0$ при $\ln x - 1 = 0$, т. е. когда $\ln x = 1$, а $x = e$.

Задача 33,7 (для самостоятельного решения). Найти наименьшее значение функции $y = x^x$.

Ответ. Наименьшего значения функция достигает при $x = e^{-1}$ и $y_{\text{наим}} = \sqrt[e]{e^{-1}}$.

Указание. $y' = x^x(\ln x + 1)$ и имеет конечное значение при всех $x > 0$.

Задача 33,8 (сля самостоятельного решения). Определить экстремум функции $u = 2x + 3\sqrt[3]{(2-x)^2}$.

Указания: 1) $u' = \dfrac{2(2-x)^{\frac{1}{3}} - 2}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}$;

2) критических точек две: $x = 1$ и $x = 2$;

3) рассмотреть знак первой производной в интервалах $(-\infty, 1)$; $(1, 2)$; $(2, +\infty)$.

Ответ. При $x = 1$ функция имеет максимум: $y_{\max} = 5$; при $x = 2$ — минимум, $y_{\min} = 4$. В интервале $(2, +\infty)$ функция возрастает.

Задача 33,9 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $u = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2ax - x^2)^4}$.

Ответ. При $x = 0$ и $x = 2a$ функция имеет минимум: $u(0) = 0$; $u(2a) = 0$; при $x = a$ — максимум и $u(a) = \frac{3}{2}a^2\sqrt[3]{a^2}$.

Указание к решению задач 33,10 и 33,11. В этом случае, когда первая производная представляет собой отношение двух функций, а исследование на экстремум ведется при помощи второй производной, полезно для упрощения вычислений иметь в виду следующее: пусть $y' = \frac{u}{v}$, где u и v — функция x.

Тогда

$$y'' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{v\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)}{v^2}.$$

Сокращая последнюю дробь на v и принимая во внимание, что $\frac{u}{v}=y'$, получим $y''=\frac{u'-y'v'}{v}$.

Так как при исследовании функции на экстремум по второй производной мы определяем знак второй производной при тех значениях x, которые обращают в нуль первую производную, то в предыдущей формуле окажется, что $y'=0$, и тогда $y'v'=0$, а знак y'' будет таким же, как и знак $\frac{u'}{v}$. Поэтому нет надобности в рассматриваемом случае отыскивать полностью вторую производную для определения знака второй производной при значениях x, найденных из уравнения $y'=0$, а надо эти значения подставить в выражение $\frac{u'}{v}$. Составить же это выражение значительно проще, чем отыскивать вторую производную. Если окажется, что $v>0$, то придется исследовать знак только u'.

Задача 33,10. Исследовать на экстремум по второй производной функцию

$$y=\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1}.$$

Решение. Находим прежде всего первую производную:

$$y'=\frac{1+4x^2-4x^4-x^6}{(x^4-x^2+1)^2}.$$

При всех действительных значениях x производная имеет конечное значение. Критические точки найдем из уравнения $y'=0$. Приравнивая числитель дроби нулю, имеем $1+4x^2-4x^4-x^6=0$, откуда $1-x^6+4x^2(1-x^2)=0$. Рассматривая $1-x^6$ как разность кубов, получаем $1-x^6=(1-x^2)(1+x^2+x^4)$, а уравнение перепишется в виде:

$$(1-x^2)(1+x^2+x^4)+4x^2(1-x^2)=0,$$

или

$$(1-x^2)(1+5x^2+x^4)=0;$$

отсюда получаем два уравнения: 1) $1-x^2=0$; 2) $1+5x^2+x^4=0$.

Корнями первого уравнения будут числа $x=-1$; $x=+1$, а второе уравнение имеет только комплексные корни, а потому критическими точками будут только точки $x=-1$ и $x=+1$. Для определения знака второй производной при этих значениях составим, согласно сделанному указанию, выражение $\frac{u'}{v}$. У нас $u=1+4x^2-4x^4-x^6$; $v=(x^4-x^2+1)^2$;
а так как $v>0$ при любом x, то надо исследовать знак только $u'=8x-16x^3-6x^5$; $u'(-1)=14>0$.

Значит, при $x = -1$ функция имеет минимум, и $y_{\min} = -2$. При $x = +1$ имеем $u'(+1) = -14 < 0$ и, значит, при $x = +1$ функция имеет максимум, а $y_{\max} = +2$.

Задача 33,11 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $u = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$.

Указание. $u' = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$. Корнями уравнения $u' = 0$ будут $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $u' = \infty$ при $x = -2$. Но при $x = -2$ заданная функция не существует, а потому значение $x = -2$ рассмотрению не подлежит. Критическими точками, подлежащими рассмотрению, являются $x_1 = -3$ и $x_2 = 0$.

Ответ. При $x = -3$ экстремума нет; при $x = 0$ функция имеет минимум, а $u_{\min} = u(0) = 6\frac{3}{4}$.

Теперь мы решим несколько задач, в которых требуется определить наибольшее или наименьшее значение функции, причем, в отличие от предыдущих задач, эта функция не дается в готовом виде, а определяется из условия задачи.

Общее указание. *Во всех случаях, когда функция, определенная из условия задачи, окажется функцией двух независимых переменных, надо, используя известные теоремы, одну из этих переменных исключить.*

Задача 33,12. Доказать, что из всех прямоугольников, имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решение. Обозначим длину одной стороны прямоугольника через x. Тогда длина другой его стороны будет $p - x$, а его площадь $s = x(p - x)$ $(0 < x < p)$. Эта функция и есть та, которая получена из условия задачи и наибольшее значение которой должно быть найдено:

$$\frac{ds}{dx} = p - 2x; \quad \frac{d^2s}{dx^2} = -2.$$

Приравняем первую производную нулю. Из уравнения $p - 2x = 0$ находим, что $x = \frac{p}{2}$. Так как вторая производная отрицательна, то при этом значении x функция достигает максимума, а поскольку в интервале $0 < x < p$ имеется единственный максимум, то он будет и наибольшим значением функции в этом интервале.

Мы нашли, что наибольшего значения площадь прямоугольника достигает, когда одна его сторона $x = \frac{p}{2}$, его другая сторона равна $p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$, т. е. стороны его равны, а прямоугольник — квадрат: $S_{\text{наиб}} = \frac{p^2}{4}$ кв. ед.

Итак, из всех прямоугольников, имеющих один и тот же периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.

Задача 33,13 (для самостоятельного решения). Доказать, что из всех прямоугольников, имеющих данную площадь a^2, квадрат имеет наименьший периметр.

Указание. Если обозначить длину одной стороны прямоугольника через x, то его другая сторона равна $\frac{a^2}{x}$, а периметр

$$p = 2\left(\frac{a^2}{x} + x\right).$$

Это и есть составленная из условия задачи функция, наименьшее значение которой требуется определить.

Найти $\frac{dp}{dx}$ и решить уравнение $\frac{dp}{dx} = 0$.

Ответ. $x = a$, т. е. прямоугольник — квадрат.

Задача 33,14. Основание треугольника равно a, а его периметр $2p$. Определить его две другие стороны так, чтобы площадь его была наибольшей.

Решение. Пусть вторая сторона треугольника $b = x$. Тогда его третья сторона $c = 2p - a - x$. Известно, что площадь треугольника определяется по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. а в наших обозначениях $S = \sqrt{p(p-a)(p-x)[p-(2p-a-x)]}$, т. е.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}. \quad (0 < x < p)$$

Таким образом из условия задачи определена функция, наибольшее значение которой требуется найти. Очевидно, что эта функция достигает наибольшего значения, когда ее подкоренное выражение будет наибольшим. В подкоренном выражении первые два постоянные множителя можно не учитывать, а потому требуется определить наибольшее значение произведения $f(x) = (p-x)(a+x-p)$. Находим, что $f'(x) = -(a+x-p) + (p-x) = 2p - a - 2x$. Решая уравнение $2p - a - 2x = 0$, находим, что $x = p - \frac{a}{2}$, т. е. $b = p - \frac{a}{2}$. Третья сторона $c = 2p - a - \left(p - \frac{a}{2}\right) = p - \frac{a}{2}$, т. е. $b = c$, и рассматриваемый треугольник — равнобедренный. Так как $f''(x) = -2 < 0$, то отсюда заключаем, что при $x = p - \frac{a}{2}$ площадь достигает наибольшего значения (при $x = p - \frac{a}{2}$ функция s имеет максимум, но так как в интервале $(0, p)$ он единственный, то $x = p - \frac{a}{2}$ доставляет функции наибольшее значение в этом интервале.

Задача 33,15 (для самостоятельного решения). В треугольнике одна сторона a, а противолежащий ей угол α. Определить два других угла так, чтобы площадь его была наибольшей.

Указание. Второй угол треугольника обозначить через x, тогда его третий угол $\pi-(\alpha+x)$. Площадь треугольника $S_\Delta = \frac{1}{2}ay\sin x$, где x — угол, образуемый сторонами a и y. Функция S — функция двух переменных x и y. Используем теперь известную из тригонометрии теорему синусов

$$\frac{a}{y}=\frac{\sin\alpha}{\sin[\pi-(\alpha+x)]},$$

откуда

$$y=\frac{a\sin(\alpha+x)}{\sin\alpha},$$

а

$$S=\frac{1}{2}\,\frac{a^2\sin(\alpha+x)\sin x}{\sin\alpha}.$$

Теперь уже S — функция одной независимой переменной.

Наибольшего значения S достигнет тогда, когда его достигнет множитель числителя $f(x)=\sin(\alpha+x)\sin x$, производная $f'(x)=\sin(2x+\alpha)$.

Уравнение $\sin(2x+\alpha)=0$ имеет решение $2x+\alpha=\pi k$. Значения $k=0$ и $k>1$ не должны рассматриваться. Остается одно решение:

$$2x+\alpha=\pi, \text{ а } x=\frac{1}{2}(\pi-\alpha).$$

Если $x=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$, то третий угол равен $\pi-\alpha-\frac{1}{2}(\pi-\alpha)=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ и, таким образом, углы, прилежащие к стороне a, между собою равны, и искомый треугольник — равнобедренный. Решите самостоятельно вопрос о том, доставляет ли значение $x=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ наибольшее значение функции S $\left(\text{докажите, что } f''(x)<0, \text{ когда } x=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)\right)$.

Задача 33,16. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Решение. В задаче требуется определить, в каком отношении должны находиться радиус и высота цилиндра, чтобы при заданном объеме V его полная поверхность была наименьшей. Полная поверхность цилиндра

$$S=2\pi RH+2\pi R^2. \quad (R>0)$$

Наименьшее значение этой функции и следует определить. Но легко усмотреть, что S является функцией двух независимых переменных. На основании указания стр. 455 следует одну из этих переменных исключить. Известно, что объем цилиндра $V = \pi R^2 H$.

В задаче V — величина известная. Выразим H через V:

$$H = \frac{V}{\pi R^2}. \qquad \text{(A)}$$

С этим значением H полная поверхность цилиндра

$$S = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2, \text{ или } S = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2.$$

Теперь уже S — функция только одной независимой переменной R:

$$S'(R) = \frac{-2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2};$$

$$S''(R) = \frac{4V}{R^3} + 4\pi \quad (R \neq 0),$$

и при любом R имеем, что $S''(R) > 0$. Из уравнения $S'(R) = 0$ следует что

$$4\pi R^3 - 2V = 0, \text{ а } R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Так как $S''(R) > 0$, то это значение R доставляет функции S минимум, а вместе с тем и наименьшее значение.

Подставив в равенство (А) это значение R, получим, что

$$H = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \text{ т. е. } H = 2R.$$

Таким образом, на изготовление цилиндра заданного объема будет употреблено наименьшее количество материала, если взять высоту цилиндра равной диаметру.

Задача 33,17 (для самостоятельного решения). Требуется изготовить цилиндрический сосуд заданного объема V, открытый сверху. Определить его радиус и высоту так, чтобы поверхность была наименьшей.

Ответ.

$$R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Задача 33,18 (для самостоятельного решения). Какие размеры должен иметь цилиндр, поверхность которого равна S, чтобы его объем был наибольшим?

Указание. Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H \tag{A}$$

— функция двух независимых переменных R и H. Чтобы одну из них исключить, воспользуемся формулой для вычисления полной поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

из которой следует, что

$$H = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}. \tag{A}$$

Это значение H подставим в формулу (А) и получим, что

$$V = \frac{SR - 2\pi R^3}{2}.$$

Ответ. $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$; $H = 2R$, т. е. высота цилиндра должна быть равна диаметру его основания.

Задача 33,19 (для самостоятельного решения). Доказать, что прямой круговой конус при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность тогда, когда $R^2 : H^2 : l^2 = 1:2:3$.

Указание. $S_{\text{бок. конуса}} = \pi Rl$; $l = \sqrt{H^2 + R^2}$; тогда $S = \pi R\sqrt{H^2 + R^2}$. Наименьшее значение этой функции требуется найти. Но она — функция двух независимых переменных. Одну из них можно исключить с помощью формулы для объема конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \text{ откуда } H = \frac{3V}{\pi R^2},$$

и тогда

$$S = \frac{1}{R}\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}.$$

Ответ. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$; $H = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$; $l = \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$, откуда следует, что $R^2 : H^2 : l^2 = 1:2:3$.

Задача 33,20 (для самостоятельного решения). Чему должны быть равны радиус основания R, высота H и образующая l прямого кругового конуса для того, чтобы при заданном объеме V он имел наименьшую полную поверхность?

Указание. Учесть указание, данное в предыдущей задаче.

Ответ. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sqrt{2}}}$; $H = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$; $l = 3\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sqrt{2}}}$.

Задача 33,21 (для самостоятельного решения). Чему должны быть равны высота H, радиус оснований R и образующая l прямого кругового конуса, чтобы при заданной боковой поверхности S он имел наибольший объем?

Указание. Объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi R^3 H$.

Из этой формулы одну независимую переменную следует исключить. Используем с этой целью формулу для вычисления боковой поверхности прямого кругового конуса $S=\pi Rl$, или, так как образующая конуса $l=\sqrt{H^2+R^2}$, то $S=\pi R\sqrt{H^2+R^2}$, откуда $H=\frac{\sqrt{S^2-\pi^2R^4}}{\pi R}$, а объем V с этим значением H становится функцией одной независимой переменной:

$$V=\frac{1}{3}R\sqrt{S^2-\pi^2R^4}.$$

Ответ. Объем конуса будет наибольшим при

$$R=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{S}{\pi}};\quad H=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{2S}{\pi}};\quad l=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{3S}{\pi}},$$

откуда следует, что $R^2:H^2:l^2=1:2:3$.

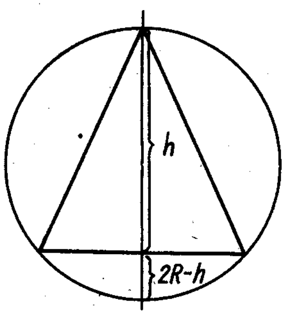
Задача 33,21а (для самостоятельного решения). При данной длине прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна ширине и квадрату высоты.

Из цилиндрического ствола дерева диаметром d надо вырезать балку наибольшей прочности. Определить ширину и высоту балки.

Указание. $h^2=d^2-x^2$. Прочность $y=kx(d^2-x^2)$, где k — коэффициент пропорциональности.

Ответ. Ширина балки $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$, а ее высота $h=\sqrt{\frac{2}{3}}d$.

Задача 33,22 (для самостоятельного решения). Найти радиус основания r и высоту h прямого кругового конуса, вписанного в шар радиуса R так, чтобы его объем был наибольшим.



Фиг. 33,1

Указание. Объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Исключим одну из переменных, например r^2. На фиг. 33,1 изображено сечение фигуры плоскостью, проходящей через ось конуса. Известно, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы. Поэтому $\frac{r}{2R-h}=\frac{h}{r}$ и $r^2=h(2R-h)$, а объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi h^2(2R-h)$.

Ответ. $h=\frac{3}{4}R$; $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

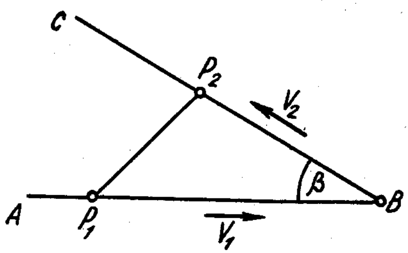
Задача 33,23 (для самостоятельного решения). На какой высоте следует поместить источник света над освещенной поверхностью, чтобы освещение на расстоянии a от основания перпендикуляра, опущенного из источника света на освещенную поверхность, было наибольшим?

Известно, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна синусу угла между лучом и освещенной поверхностью.

Указание. Освещенность $E = k\frac{\sin\varphi}{a^2+h^2}$, где k — коэффициент пропорциональности, h — высота источника света над освещенной поверхностью, φ — угол между лучом и освещенной поверхностью. Так как $\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$, то $E = k\frac{h}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Ответ. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; максимальная освещенность $E_{\max} = \frac{2k\sqrt{3}}{9a^2}$.

Задача 33,24 (для самостоятельного решения). Точка P_1 движется в направлении от A к B с постоянной скоростью V_1. В тот момент, когда P_1 проходит через A, другая точка P_2 выходит из B и движется с постоянной скоростью V_2 по направлению к C. В какой момент времени t расстояние P_1P_2 между этими двумя точками будет наименьшим, если принять $AB = a$, $\angle ABC = \beta$ (фиг. 33,2).



Фиг. 33,2

Указание. За время t первая точка, двигаясь с постоянной скоростью V_1, пройдет расстояние V_1t и в треугольнике P_1P_2B сторона $P_1B = a - V_1t$; вторая точка, вышедшая из B, за то же время t пройдет расстояние $P_2B = V_2t$, а потому по известной формуле геометрии квадрат стороны P_1P_2 треугольника P_1P_2B равен

$$(P_1P_2)^2 = (a - V_1t)^2 + (V_2t)^2 - 2(a - V_1t)V_2t\cos\beta.$$

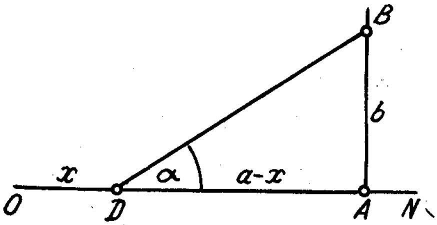
Ответ. Момент времени t, в который расстояние P_1P_2 между точками будет наименьшим, определится по формуле

$$t = \frac{a(V_1 + V_2\cos\beta)}{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\beta}.$$

Задача 33,25. На расстоянии $AB = b$ от прямолинейной магистрали ON находится завод B. От какого места D магистрали надо сделать прямолинейное ответвление DB, чтобы стоимость проводки водопровода к заводу была наименьшей, если известно, что стоимость единицы длины водопровода по направлениям OD, DN и DB равна соответственно k_1, k_2 и k_3 рублей, $OA = a$,

$ON = l$ (фиг. 33,3).

Указание. Стоимость водопровода: 1) на участке OD равна $k_1 x$; 2) на участке DN равна $k_2(l-x)$; 3) на участке DB она равна $k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}$.



Фиг. 33,3.

Общая стоимость $k = k_1 x + k_2(l-x) + k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}$. Убедиться, что $\frac{dk}{dx} = k_1 - k_2 - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$, определить x из уравнения

$$k_1 - k - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0 \qquad (A)$$

и показать, что при найденном x

$$\frac{d^2k}{dx^2} > 0.$$

Выгодно ввести в рассмотрение угол $BDA = \alpha$. Из фиг. 33,3 видно, что $\cos\alpha = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$. Из уравнения (A) следует, что

$$\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = \frac{k_1-k_2}{k_3}, \qquad (B)$$

т. е.

$$\cos\alpha = \frac{k_1-k_2}{k_3}, \quad (k_1 - k_2 < k_3) \qquad (33,23)$$

и, значит, ответвление DB следует вести под углом α, определяемым из равенства (33,23). Выражение для x получается очень просто:

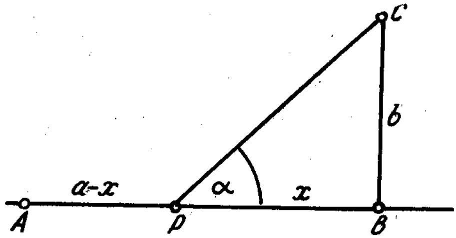
$$\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2+b^2} = \cos^2\alpha; \quad \frac{(a-x)^2+b^2}{(a-x)^2} = \sec^2\alpha; \quad 1 + \frac{b^2}{(a-x)^2} = \sec^2\alpha;$$

$$\frac{b^2}{(a-x)^2} = \operatorname{tg}^2\alpha; \quad \left(\frac{a-x}{b}\right)^2 = \operatorname{ctg}^2\alpha; \quad \frac{a-x}{b} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

и x определяется равенством $x = a - b \operatorname{ctg} \alpha$, в котором α уже известно из (33, 23).

Задача 33,26 (для самостоятельного решения). Стоимость перевозки груза на один километр по железной дороге AB равна k_1 рублей, а по шоссе PC — k_2 рублей ($k_1 < k_2$). С какого места P надо начать шоссе, чтобы возможно дешевле доставить груз из A в C. Известно, что $AB = a$; $BC = b$ (фиг. 33,4).

Ответ. $AP = a - b \operatorname{ctg} \alpha$, а угол α определяется из соотношения $\cos \alpha = \frac{k_1}{k_2}$. Из последнего равенства усматриваем, что на-



Фиг. 33,4.

правление, в котором надо вести шоссе, зависит только от отношения стоимостей и не зависит от положения точки P. Если, например, $k_2 = 4k_1$, то $\cos \alpha = \frac{k_1}{4k_1} = \frac{1}{4}$, а $\alpha \approx 75^\circ$.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Точки перегиба. Асимптомы.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Говорят, что на интервале (a, b) кривая обращена выпуклостью вниз, если она лежит выше касательной, проведенной в любой ее точке.*

Определение 2. *Говорят, что на интервале (a, b) кривая обращена выпуклостью вверх, если она лежит ниже касательной, проведенной в любой ее точке.*

Дуги кривой, обращенные выпуклостью вверх, в дальнейшем будем называть выпуклыми, а обращенные выпуклостью вниз,— вогнутыми.

Дуга кривой $y = f(x)$ выпукла на интервале (a, b), если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, и вогнута на этом интервале, если во всех его точках $f''(x) > 0$.

Правило. *Интервалы, в которых дуги кривой выпуклы, определяются из неравенства $f''(x) < 0$, а интервалы, в которых дуги этой кривой вогнуты,— из неравенства $f''(x) > 0$.*

Определение 3. *Точка кривой, отделяющая ее выпуклую дугу от вогнутой, называется точкой перегиба.*

Определение 4. *Точки кривой, в которых $f''(x)=0$ или $f''(x)=\infty$, а также те из них, в которых $f''(x)$ не существует, называются критическими точками второго рода.*

Точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода.

В критической точке второго рода $x=x_0$ перегиб будет только в том случае, когда при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак.

Правило. *Для определения точек перегиба кривой надо определить все критические точки второго рода и рассмотреть знаки $f''(x)$ в каждых двух соседних интервалах, на которые эти точки делят область существования функции. В случае, если знаки $f''(x)$ в двух соседних интервалах различны, критическая точка второго рода является точкой перегиба. Если же в двух соседних интервалах $f''(x)$ имеет один и тот же знак, то в рассматриваемой критической точке второго рода перегиба нет. В точке перегиба кривая пересекает касательную.*

Задача 34,1. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

$$y=5x^2+20x+9.$$

Решение. Область существования функции — интервал

$$(-\infty,\ +\infty);\ y'=10x+20;\ y''=10>0,$$

и так как $y''>0$ при любом значении x, то кривая вогнута на всем интервале $(-\infty,\ +\infty)$. Точек перегиба нет.

Задача 34,2. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

$$y=-6x^2+8x-11.$$

Решение. Область существования функции — интервал $(-\infty$ $+\infty)$.

$$y'=-12x+8;\quad y''=-12<0.$$

Так как неравенство $y''<0$ выполняется при любом x из области существования функции, то кривая на всем интервале $(-\infty,\ +\infty)$ выпукла. Точек перегиба нет.

Задача 34,3 (для самостоятельного решения). Определить интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба кривых:

$$1)\ y=3x^2+x+1;\ \ 2)\ y=-2x^2+8x-9;\ \ 3)\ y=x^2+x.$$

Ответ. На всем бесконечном интервале $(-\infty,\ +\infty)$ кривая 1) вогнута, 2) выпукла, 3) вогнута. Ни одна из этих кривых точек перегиба не имеет.

Задача 34,4. Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3$.

Решение. Область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$; $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$. Решаем уравнение $6x = 0$ и находим, что $x = 0$. Вторая производная конечна и существует при любом x, а потому $x = 0$ — единственная критическая точка второго рода. Область существования функции она разделяет на два интервала:

$$1)\ (-\infty,\ 0)\ и\ 2)\ (0,\ +\infty).$$

В каждом из этих интервалов y'' сохраняет знак. При любом значении x из первого интервала $y'' < 0$, а при любом x из второго интервала $y'' > 0$. Таким образом при переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет знак. Эта точка является точкой перегиба. Ее координаты $(0, 0)$. В первом интервале $(-\infty, 0)$ кривая выпукла $(y'' < 0)$, а во втором — вогнута $(y'' > 0)$.

Задача 34,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что кривая $y = x(x^2 - b^2)$ имеет точку перегиба в начале координат.

Задача 34,6. Определить точку перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3 - 12x^2 + x - 1$.

Решение. Область существования функции — бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Находим y'': $y' = 3x^2 - 24x + 1$; $y'' = 6x - 24$.

При любом x вторая производная конечна и существует. Критическую точку второго рода найдем из уравнения $y'' = 0$, т. е. из уравнения $6x - 24 = 0$. Такой точкой будет $x = 4$. Интервал существования функции она разделяет на два:

$$1)\ (-\infty,\ 4)\ и\ 2)\ (4,\ +\infty).$$

В каждом из этих интервалов y'' сохраняет знак. При любом x из первого интервала $y'' < 0$, а при любом x из второго интервала $y'' > 0$, а потому точка с абсциссой $x = 4$ — точка перегиба, а так как в первом интервале $y'' < 0$, то дуга кривой на нем — выпукла, а во втором интервале $y'' > 0$, и дуга кривой вогнута. Координаты точки перегиба $(4, -125)$.

Задача 34,7 (для самостоятельного решения). Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$.

Ответ. Точка перегиба $(5, -5)$; слева от точки перегиба кривая вогнута $(y'' > 0)$, справа от нее — выпукла $(y'' < 0)$.

Задача 34,8 (для самостоятельного решения). Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой

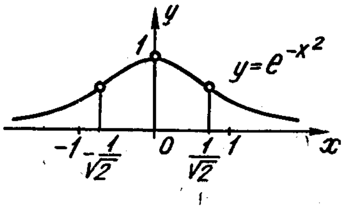
$$y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2.$$

Ответ. Точки перегиба при $x = -2$ и $x = 1$; на интервалах $(-\infty, -2)$ и $(1, +\infty)$ кривая вогнута, на интервале $(-2, 1)$ — выпукла.

Задача 34,9 (для самостоятельного решения). Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой

$$y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 45x - 14.$$

Ответ. Точки перегиба $(-1, -72)$ и $(3, -68)$. На интервале $(-\infty, -1)$ кривая вогнута; на интервале $(-1, 3)$ кривая выпукла; на интервале $(3, +\infty)$ кривая вогнута.



Фиг. 34,1.

Задача 34,10 (для самостоятельного решения). Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = (x-1)^4$.

Ответ. Кривая на всем бесконечном интервале вогнута $(y'' > 0)$.

Задача 34,11 (для самостоятельного решения). Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса, или кривая вероятностей)

Ответ. Точек перегиба две: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. Слева от точки $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ кривая вогнута, на интервале $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ кривая выпукла, а справа от точки $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — вогнута (фиг. 34,1).

Асимптоты

Определение. *Если расстояние d от точки кривой $y = f(x)$, имеющей бесконечную ветвь, до некоторой определенной прямой по мере удаления точки по этой кривой в бесконечность стремится к нулю, то прямая называется асимптотой кривой.*

Различают асимптоты: 1) горизонтальные, 2) вертикальные и 3) наклонные.

1. *Кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$ только в том случае, когда существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, и этот предел равен b, т. е. если*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b. \tag{34,1}$$

2. *Кривая $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = a$, если при $x \to a$, $x \to a - 0$ или при $x \to a + 0$, $f(x) \to \infty$. Для определения вертикальных асимптот надо отыскать те значения аргумента, вблизи которых $f(x)$ неограниченно возрастает по абсо-*

лютной величине. Если такими значениями аргумента являются $a_1, a_2, \ldots$, то уравнения вертикальных асимптот будут

$$x = a_1; \quad x = a_2; \ \ldots$$

3. Для определения наклонной асимптоты $y = kx + b$ кривой $y = f(x)$ надо найти числа k и b из формул

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{34,2}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] \tag{34,3}$$

(следует отдельно рассматривать случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$). Наклонные асимптоты у кривой $y = f(x)$ существуют в том и только в том случае, когда пределы (34,2) и (34,3) имеют конечное значение (если окажется, что $k = 0$, а b имеет конечное значение, то асимптота будет горизонтальной). При определении пределов (34,2) и (34,3) удобно пользоваться правилом Лопиталя.

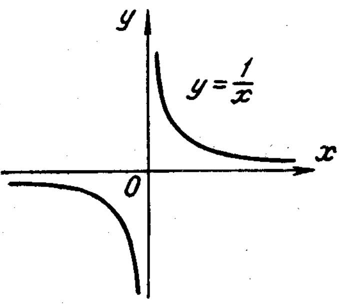
Задача 34,12. Найти асимптоты кривой $y = \frac{1}{x}$ (равноосная гипербола).

Решение. 1) Находим горизонтальные асимптоты по формулам (34,1):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

и кривая имеет единственную горизонтальную асимптоту $y = 0$, т. е. горизонтальной асимптотой является ось Ox.

2) Определяем вертикальную асимптоту; для этого находим те значения x, вблизи которых $f(x) = \frac{1}{x}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Таким значением будет $x = 0$. Вертикальная асимптота имеем уравнение $x = 0$, т. е. это ось Oy (фиг. 34,2).



Фиг. 34,2.

Задача 34,13. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2}{x^2 - 4}$.

Решение. 1) Для определения горизонтальных асимптот находим по (34,1)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2 - 4} = 0 \text{ и } \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2 - 4} = 0.$$

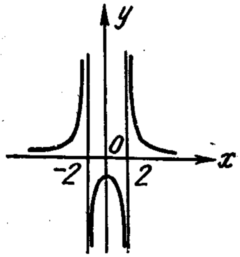
Горизонтальная асимптота одна: $y = 0$ (ось Ox).

2) Для определения вертикальных асимптот находим те значения x, вблизи которых $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$ неограниченно возрастает

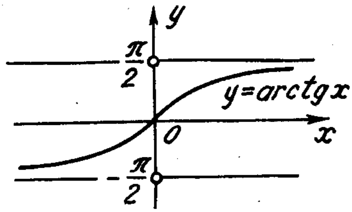
по абсолютной величине. Такими значениями являются $x=-2$ и $x=+2$, и вертикальными асимптотами будут прямые $x=-2$ и $x=+2$. Эскиз графика показан на фиг. 34,3.

Задача 34,14 (для самостоятельного решения). Определить асимптоты графика функции $y=\frac{3}{x-2}$.

Ответ. Вертикальная асимптота $x=2$, горизонтальная асимптота $y=0$ (ось Ox); наклонных асимптот нет.



Фиг. 34,3.



Фиг. 34,4.

Задача 34,15 (для самостоятельного решения). Определить асимптоты графика функции $y=\frac{x-2}{x+4}$.

Ответ. Горизонтальная асимптота $y=1$;
вертикальная асимптота $x=-4$;
наклонных асимптот нет.

Задача 34,16. Найти асимптоты кривой $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$.

Решение. Находим горизонтальные асимптоты по формулам (34,1) полагая в них $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}.$$

Горизонтальные асимптоты имеют уравнения $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=-\frac{\pi}{2}$.

Вертикальных асимптот нет, так как нет значений x, вблизи которых функция $f(x)=\operatorname{arctg} x$ неограниченно возрастает по абсолютной величине (фиг. 34,4).

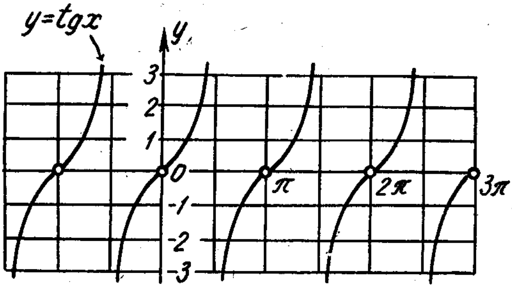
Задача 34,17 (для самостоятельного решения). Найти асимптоты кривой $y=\operatorname{tg} x$.

Ответ. Вертикальных асимптот бесконечно много. Их уравнения

$$x=\frac{\pi}{2}(2k+1),$$

где $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$ (фиг. 34,5) (это следует из того, что вблизи точек $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ функция $\operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает по абсолютной величине). Других асимптот нет.

Задача 34,18 (для самостоятельного решения). Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2-1}{x^4}$.

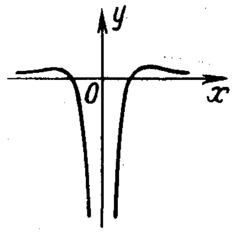


Фиг. 34,5.

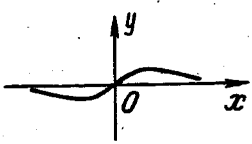
Ответ. Горизонтальная асимптота $y = 0$; вертикальная асимптота $x = 0$ (фиг. 34,6).

Задача 34,19 (для самостоятельного решения). Найти асимптоты кривой $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Ответ. Горизонтальная асимптота $y = 0$ (фиг. 34,7).



Фиг. 34,6



Фиг. 34,7.

Задача 34,20. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2+1}{2x+3}$.

Решение. Горизонтальных асимптот нет. Так как y неограниченно возрастает, когда $x \to -\frac{3}{2}$ $\left(2x+3=0 \text{ при } x = -\frac{3}{2}\right)$, то имеется вертикальная асимптота: ее уравнение $x = -\frac{3}{2}$, при этом $y \to -\infty$, когда $x \to -\frac{3}{2} - 0$ и $y \to +\infty$, когда $x \to -\frac{3}{2} + 0$ (эти сведения мы используем в дальнейшем при построении эскиза графика).

Теперь определим наклонные асимптоты, уравнение которых имеет вид $y = kx + b$, а k и b определяются по формулам (34,2) и (34,3), в которых надо взять $f(x) = \frac{x^2+2}{2x+3}$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{2x+3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3x} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+1}{2x+3} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x+2}{4x+6} = -\frac{3}{4}.$$

Так как k и b имеют конечные значения и равные между собой при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, то имеется единственная наклонная асимптота, уравнение которой

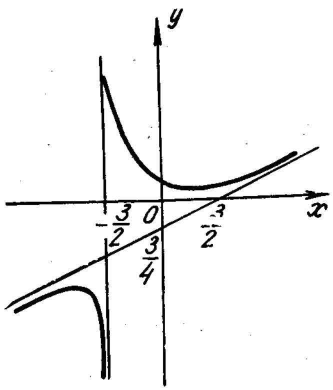
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

Чтобы сделать заключение об интервалах, на которых кривая находится над асимптотой и под ней, надо составить разность $\delta = y_{\text{кр}} - y_{\text{ас}}$. На тех интервалах, где $\delta > 0$, кривая лежит над асимптотой, а на тех, где $\delta < 0$, кривая лежит под асимптотой.

В нашем случае $y_{\text{кр}} = \dfrac{x^2+1}{2x+3}$; $y_{\text{ас}} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$;

$$\delta = \frac{x^2+1}{2x+3} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right); \quad \delta = \frac{13}{4(2x+3)}.$$

Знак δ такой же, как и знак двучлена $2x+3$. Решая неравенства 1) $2x+3>0$ и 2) $2x+3<0$, находим, что первое выполняется при $x > -\dfrac{3}{2}$, а второе — при $x < -\dfrac{3}{2}$; поэтому: 1) $\delta > 0$, когда $x > -\dfrac{3}{2}$, а значит на интервале $\left(-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$ кривая лежит над асимптотой; 2) $\delta < 0$, когда $x < -\dfrac{3}{2}$, а это значит, что на интервале $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$ кривая лежит под асимптотой.



Фиг. 34,8.

Набросок графика функции сделан на фиг. 34,8.

Задача 34,21 (для самостоятельного решения). Определить асимптоты кривой $y = \dfrac{2x^2+x+3}{x+6}$.

Ответ. Уравнения асимптот: 1) $x = -6$; 2) $y = 2x - 11$.

Самостоятельно решить вопрос об интервалах, в которых кривая лежит над асимптотой и под ней.

Замечание. Следует иметь в виду, что когда k имеет конечное значение, а b — бесконечное, то наклонной асимптоты нет. Этот случай имеет место в следующей задаче.

Задача 34,22. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{2x^2 + 4x\sqrt{x} + 2}{2x+4}$.

Ответ. Вертикальная асимптота $x = -2$. Так как $b \to +\infty$ когда $x \to +\infty$, то наклонной асимптоты нет. Так как при $x < 0$ не существует $\sqrt{x}$, то пределы (34,2) и (34,3) при $x \to -\infty$ не должны рассматриваться.

ТРИДЦАТЬ ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Общее исследование функции.

Приобретенные на предыдущих занятиях навыки в определении интервалов монотонности функции, экстремума функции, интервалов выпуклости и вогнутости графика функции, его точек перегиба и асимптот позволяют провести полное исследование функции и построить эскиз графика функции, который, хотя и не будет отличаться большой точностью, но все же даст возможность усмотреть характерные свойства и особенности исследуемой функции.

Под полным исследованием функции обычно понимается решение таких вопросов:

1) Определение области существования функции.

2) Выяснение вопроса о четности и нечетности функции.

3) Определение точек разрыва функции.

4) Определение асимптот графика функции.

5) Определение интервалов возрастания и убывания функции.

6) Определение экстремума функции.

7) Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции.

8) Определение точек перегиба.

Полученные данные следует использовать для построения графика функции. Для бóльшей точности эскиза графика рекомендуется построить еще и отдельные точки графика, давая значения независимой переменной и определяя соответствующие значения функции. Полезно также получаемые данные сразу наносить на чертеж.

Учитывая, что на предыдущих занятиях все элементы этой схемы были полно изучены, мы дадим подробное решение только трех задач, после чего остальные задачи должны быть решены самостоятельно. Эти задачи снабжены ответами и необходимыми указаниями.

Задача 35,1. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. 1. Определим область существования этой функции. Функция существует при всех значениях x, кроме $x = -1$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль. Значит, функция определена в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$.

2. Исследуем вопрос о наличии центра симметрии и оси симметрии. Проверим для этого выполняются ли равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$.

Непосредственная подстановка убеждает нас, что ни одно из этих равенств не выполняется, так что ни центра, ни оси симметрии график функции не имеет.

3. Числитель и знаменатель дроби $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ непрерывные функции и, следовательно, функция y будет непрерывной при всех значениях x, кроме $x = -1$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль.

4. Переходим к определению асимптот графика.

а) Вертикальные асимптоты найдем, приравняв знаменатель нулю: $2(x+1)^2 = 0$; $x = -1$.

Вертикальная асимптота одна: ее уравнение $x = -1$.

б) Горизонтальные асимптоты находим так: отыскиваем $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \pm\infty,$$

а это означает, что горизонтальных асимптот нет.

в) Наклонные асмиптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x \cdot 2(x+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \pm \infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x\right] = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1;$$

Наклонная асимптоты одна: $y = \frac{1}{2}x - 1$.

5 и 6. Определяем интервалы возрастания и убывания функции и экстремум функции.

Находим первую производную $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$.

Определим критические точки: 1) Решаем уравнение $y' = 0$, т. е. ~~уравнение~~ $\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = 0$ и находим, что $x_1 = -3$; $x_2 = 0$.

2) Определяем значения x, при которых $y' = \infty$. Таким значением является $x = -1$. Но это значение рассмотрению не должно подлежать, так как оно не входит в область определения функции. Критические точки, подлежащие рассмотрению: $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ и точка $x = -1$ — разделяют интервалы существования функции на такие интервалы:

1) $(-\infty, -3)$; 2) $(-3, -1)$; 3) $(-1, 0)$; $(0, +\infty)$.

В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом — плюс, во втором — минус, в третьем — плюс, в четвертом —

плюс (в этом можно убедиться, взяв в каждом интервале произвольное значение x и вычислив при нем значение y'). Последовательность знаков первой производной запишется так: $+$, $-$, $+$, $+$.) Значит, в интервале $(-\infty, -3)$ функция возрастает, в интервале $(-3, -1)$ — убывает, в интервалах $(-1,0)$ и $(0, +\infty)$ функция возрастает.

При $x=-3$ функция имеет максимум и $y_{\text{макс.}} = -\frac{27}{8}$. Так как знак во втором и третьем интервалах различны, то можно было бы предположить, что при $x=-1$ есть экстремум. Но такое предположение неверно, так как при $x=-1$ заданная функция не существует. Итак, функция имеет единственный экстремум (максимум) при $x=-3$.

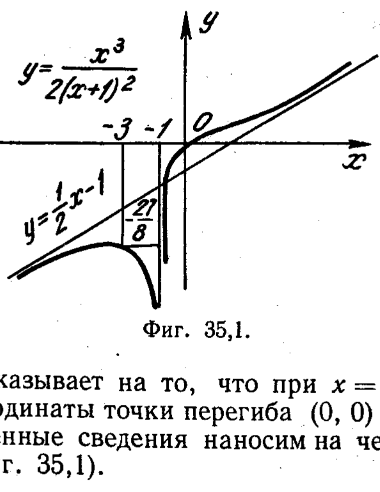
7 и 8. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции и точек перегиба.

Находим, что $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$ и определяем критические точки второго рода: 1) решаем уравнение $\frac{3x}{(x+1)^4} = 0$ и находим, что $x=0$; 2) определяем значения x, при котором $y''=\infty$. Таким значением является $x=-1$). Как уже было отмечено выше, это значение рассматриваться не должно, так как при нем не существует заданной функции.

Критическая точка второго рода $x=0$ разделяет интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$ существования функции на интервалы:

$$1)\ (-\infty, -1);\quad 2)\ (-1, 0);\quad 3)\ (0, +\infty).$$

В каждом из этих интервалов вторая производная конечна и сохраняет знак: в первом — минус, во втором — минус, в третьем — плюс, и мы имеем такое чередование знаков второй производной в этих интервалах: $-$, $-$, $+$.



Фиг. 35,1.

Значит, в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ кривая выпукла, а в интервале $(0, +\infty)$ — вогнута. При $x=0$ вторая производная равна нулю, а при переходе из второго интервала в третий она поменяла знак. Это указывает на то, что при $x=0$, кривая имеет точку перегиба. Координаты точки перегиба $(0, 0)$ — это начало координат. Все полученные сведения наносим на чертеж и получаем эскиз кривой (фиг. 35,1).

Задача 35,2. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^2+2x+3}$.

1. Определим область существования функции. Прежде всего, определим, при каких значениях x знаменатель x^2+2x+3 обращается в нуль. Приравняем знаменатель нулю и решим уравнение $x^2+2x+3=0$; получим, что $x=-1\pm i\sqrt{2}$. Корни знаменателя комплексны. Значит, ни при одном вещественном значении x знаменатель дроби в нуль не обращается. Дробь, представляющая собой отношение двух непрерывных функций, будет функцией непрерывной при всех значениях x, за исключением тех, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. В нашем случае числитель и знаменатель — функции, непрерывные на всей оси. Следовательно, заданная функция непрерывна при любом x (мы выяснили, что ни при одном вещественном x знаменатель в нуль не обращается), и областью ее определения является вся ось Ox, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$.

2. Определим, нельзя ли отнести данную функцию к классу четных или нечетных функций. Для этого вычислим $f(-x)$: $f(-x)=\frac{-x^3}{x^2-2x+3}$. Мы заключаем, что $f(x)$ не равно ни $f(-x)$, ни $-f(x)$, т. е. нашу функцию нельзя отнести ни к классу четных, ни к классу нечетных функций, и график функции не имеет ни оси, ни центра симметрии.

3. Определим теперь асимптоты графика: а) вертикальных асимптот нет, так как нет тех конечных значений x, при которых $y\to\infty$; б) найдем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2+2x+3}=\pm\infty.$$

Так как конечный предел отсутствует, то горизонтальных асимптот нет; в) находим наклонные асимптоты, уравнение которых $y=kx+b$:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+2x+3}=1;$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x(x^2+2x+3)}=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+3}-x\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2+2x+3}=-2;$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+3}-x\right)=-2.$$

Значения k и b как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$ одни и те же. Наклонная асимптота одна; $y=x-2$.

4. Теперь определим интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремум $y'=\frac{x^2(x^2+4x+9)}{(x^2+2x+3)^2}$.

Определим критические точки функции: 1) Решаем уравнение $y' = 0$, т. е. уравнение $\frac{x^2(x^2+4x+9)}{(x^2+2x+3)^2} = 0$. Из него следует, что $x = 0$ и $x^2 + 4x + 9 = 0$, т. е. $x = -2 \pm i\sqrt{5}$. Значит, производная имеет один действительный корень $x = 0$.

2) Ни при одном действительном значении x первая производная не принимает бесконечно больших значений (из уравнения $x^2 + 2x + 3 = 0$ следует, что $x = -1 \pm i\sqrt{2}$). Таким образом, имеется одна критическая точка $x = 0$. Область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$ она разделяет на два интервала: 1) $(-\infty, 0)$ и 2) $(0, +\infty)$. Выбирая в каждом из них произвольные значения x и вычислив при нем y', мы получим такую последовательность знаков первой производной: $+$, $+$.

Так как в рассматриваемых двух соседних интервалах y' имеет один и тот же знак, то в критической точке $x = 0$ экстремума нет: во всей области существования функция возрастает.

5. Определяем точки перегиба: $y'' = \frac{2x(x^2+18x+27)}{(x^2+2x+3)^3}$. Приравниваем y'' нулю:

$$\frac{2x(x^2+18x+27)}{(x^2+2x+3)^3} = 0;$$

$$2x(x^2+18x+27) = 0;\ x = 0;\ x^2 + 18x + 27 = 0;$$

$$x = -9 \pm \sqrt{54};\ x_2 \approx -16{,}2;\ x_3 \approx -1{,}8.$$

Ни при одном значении x знаменатель дроби в нуль не обращается; таким образом, критическими точками второго рода будет

$$x_1 \approx -16{,}2; \quad x_2 \approx -1{,}8; \quad x_3 = 0.$$

Эти точки разделяют область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$ на интервалы 1) $(-\infty;\ -16{,}2)$; $(-16{,}2;\ -1{,}8)$; 3) $(-1{,}8;\ 0)$ и 4) $(0;\ +\infty)$.

Для определения знака второй производной в каждом из этих интервалов достаточно определить ее знак в произвольной точке этого интервала, так как при всех значениях x из данного интервала она имеет один и тот же знак. Последовательность знаков второй производной записывается так: $-$, $+$, $-$, $+$, и так как в каждом из двух соседних интервалов вторая производная имеет различные знаки, то найденные три критические точки второго рода — точки перегиба графика функции. Их координаты: 1) $(-16{,}2;\ -18{,}2)$; 2) $(-1{,}8;\ -2{,}64)$; 3) $(0,\ 0)$.

Прежде чем приступить к построению эскиза графика функции, определим взаимное расположение кривой и асимптоты.

Выясним, не пересекает ли кривая асимптоту. Для этого решим совместно их уравнения:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{x^2+2x+3} \\ y &= x-2 \end{aligned}\right\}. \tag{35,1}$$

Исключая y, получим, что $x-2=\frac{x^2}{x^2+2x+3}$, откуда

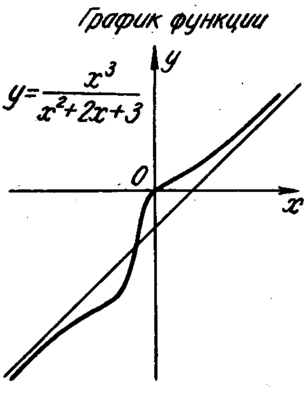
$$(x-2)(x^2+2x+3)=x^2;\ x=-6.$$

Подставляя это значение во второе уравнение системы (35,1), получим, что $y=-8$. Асимптота пересекает кривую в точке $(-6,\ -8)$.

У нас $y_{\text{кр.}}=\frac{x^3}{x^2+2x+3}$; $y_{\text{ас}}=x-2$;

$$\delta=y_{\text{кр.}}-y_{\text{ас}}=\frac{x^3}{x^2+2x+3}-(x-2)=\frac{x+6}{x^2+2x+3}.$$

Так как знаменатель положителен при любом x (корни его комплексны), то знак дроби зависит от знака числителя. Он будет положительным при $x+6>0$, т. е. при $x>-6$. Значит, при $x>-6$ кривая располагается над асимптотой.



Фиг. 35,2.

Разность δ будет отрицательной, когда числитель дроби отрицательный, $x+6<0$, т. е. при $x<-6$, а кривая расположена ниже асимптоты при $x<-6$.

Теперь достаточно данных, чтобы начертить эскиз кривой (фиг. 35,2).

Задача 35,3. Исследовать функцию $y=\frac{e^x}{x}$.

1. Определим область существования функции:

Функция существует при всех значениях x, кроме $x=0$. т. е. в интервалах $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$. В этих интервалах функция и непрерывна.

2. Исследуем вопрос об оси и центре симметрии кривой.

У нас $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$, а $f(-x)=\frac{e^{-x}}{-x}$ (ни одно из равенств $f(x)=f(-x)$ и $f(-x)=-f(x)$ не имеет места, т. е. у кривой не существует ни оси, ни центра симметрии).

3. Определим асимптоты графика функции;

а) Значение $x=0$ является точкой разрыва функции. Вертикальная асимптота имеет уравнение $x=0$ и, таким образом, ось Oy является вертикальной асимптотой кривой. При этом

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} \frac{e^x}{x} = -\infty; \qquad \lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

б) Определяем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0,$$

и горизонтальная асимптота имеет уравнение $y=0$ (ось Ox является горизонтальной асимптотой).

в) Определим наклонные асимптоты, уравнение которых $y = kx + b$. По формуле (34,2)

$$k_1 = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{x} = +\infty.$$

При $x \to +\infty$ наклонной асимптоты нет.

При $x \to -\infty$, $k_2 = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\frac{e^x}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0$, а это опять-таки говорит о том, что наклонной асимптоты у кривой нет.

4. Определяем интервалы монотонности функции:

$$y' = \frac{e^x (x-1)}{x^2}.$$

Находим критические точки:

1) Из уравнения $y' = 0$, т. е. $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$, следует, что $x - 1 = 0$, а $x = 1$;

2) $y' = \infty$ при $x = 0$, но при $x = 0$ функция не определена.

Таким образом, функция имеет критическую точку: $x = 1$. Область существования функции она разделяет на интервалы: 1) $(-\infty, 0)$; 2) $(0, 1)$; 3) $(1, +\infty)$. В каждом из этих интервалов y' сохраняет знак. Беря в них произвольные значения x и вычислив при них y', получаем такую последовательность знаков производной: $-$, $-$, $+$.

Заключение. В первых двух интервалах функция убывает, в третьем возрастает. При $x = 1$ функция достигает минимума, а $y_{\min} = y(1) = e$. Координаты точки экстремума $(1, e)$.

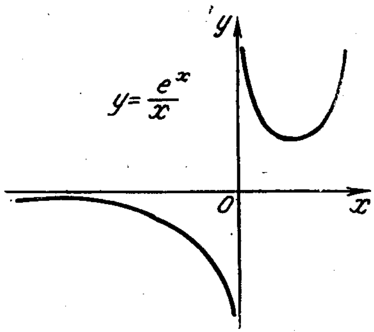
5. Теперь определим точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции:

$$y'' = \frac{e^x (x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

Определим критические точки второго рода:

Из уравнения $\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}=0$, учитывая, что $e^x \neq 0$ ни при одном конечном значении x, должно быть $x^2-2x+2=0$, т. е. $x=1 \pm i$. Значит, нет действительных значений x, при которых вторая производная равна нулю.

Определим те значения x, при которых $y''=\infty$. Таким единственным значением является $x=0$. Значит, имеется одна критическая точка второго рода $x=0$. Но точки перегиба при $x=0$ не может быть, так как при $x=0$ заданная функция не существует. Итак, точек перегиба график функции не имеет.



Фиг. 35,3.

Для определения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции рассмотрим знак y'' на интервалах $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$. Выбрав в каждом из них произвольное значение x и вычислив при нем y'', получим такую последовательность знаков второй производной: $-,\ +$. Значит, на интервале $(-\infty,\ 0)$ кривая выпукла, а на интервале $(0,\ +\infty)$ кривая вогнута.

Еще раз подчеркиваем, что несмотря на то, что переходя через $x=0$ вторая производная поменяла знак, точка $x=0$ не является точкой перегиба, так как при $x=0$ не существует заданная функция (фиг. 35,3).

Задача 35,4 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\frac{3x^3}{3x^2+4x+4}$ и построить эскиз графика.

Ответ. 1) Область существования функции — бесконечный интервал $(-\infty,\ +\infty)$; 2) функция непрерывна при любом x; 3) центра симметрии и оси симметрии нет; 4) вертикальных и горизонтальных асимптот нет; наклонная асимптота $y=x-\frac{4}{3}$; 5) экстремума нет, функция возрастает на всем интервале существования; 6) критические точки второго рода: а) $x_1=-6-2\sqrt{6}$, $y_1 \approx -4{,}5$; б) $x_2=-6+2\sqrt{6}$; $y^2 \approx -1{,}5$; в) $x_3=0$; $y_3=0$ является точками перегиба; 7) на интервале $(-\infty,\ -6-2\sqrt{6})$ кривая выпукла; на интервале $(-6-2\sqrt{6};\ -6+2\sqrt{6})$ кривая вогнута; на интервале $(-6+2\sqrt{6};\ 0)$ кривая выпукла, на интервале $(0,\ +\infty)$ кривая вогнута.

Задача 35,5 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\frac{x}{e^x}$ и построить эскиз графика.

Ответ. 1) Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$; 2) функция не относится ни к четным, ни к нечетным: график функции не имеет ни центра, ни оси симметрии; 3) в интервале $(-\infty, 0)$ $y<0$ кривая находится под осью Ox, в интервале $(0, +\infty)$ кривая расположена над осью Ox, а в точке $(0, 0)$ она пересекает координатные оси; 4) вертикальных и наклонных асимптот нет. Горизонтальная асимптота $y=0$ — ось Ox; 5) на интервале $(-\infty, 1)$ функция возрастает; на интервале $(1, +\infty)$ — убывает. При $x=1$ максимум, $y_{\max}\approx 0{,}37$; 6) на интервале $(-\infty, 2)$ $y''<0$ кривая выпукла, на интервале $(2, +\infty)$ $y''>0$ кривая вогнута. Точка перегиба: $x=2$; $y\approx 0{,}3$.

Задача 35,6 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ и построить эскиз кривой.

Ответ. 1) Область определения — два бесконечных интервала: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$; 2) точка разрыва одна: $x=1$; 3) функция не принадлежит ни к четным, ни к нечетным: кривая не имеет ни оси, ни центра симметрии; 4) асимптоты: верикальная $x=1$; наклонная $y=x-1$; 5) критические точки первого рода: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$. В интервале $(-\infty, 0)$ $y'>0$ функция возрастает; в интервале $(0,1)$ $y'<0$ функция убывает; в интервале $(1,2)$ $y'<0$ функция убывает; в интервале $(2, +\infty)$ $y'>0$ функция возрастает. При $x=$ $=0$ функция имеет максимум: $y_{\max}=-2$; при $x=2$ функция имеет минимум: $y_{\min}=2$. Экстремальные точки $(0, -2)$ и $(2,2)$; 6) $y''=$ $=\dfrac{2}{(x-1)^3}$. Критическая точка второго рода $x=1$. Перегиба в ней быть не может, так как в этой точке функции не существует: точки перегиба нет. При $x<1$ $y''<0$: на интервале $(-\infty, 1)$ кривая выпукла; при $x>1$ $y''>0$: на интервале $(1, +\infty)$ кривая вогнута.

Задача 35,7 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$ и построить эскиз ее графика.

Ответ. 1) Интервалы существования функции $(-\infty, -1)$; $(-1, +\infty)$;

2) ни оси, ни центра симметрии кривая не имеет;

3) кривая пересекает ось Ox в точке $x=1$. В интервале $(-\infty, -1)$ кривая лежит над осью Ox, в интервале $(-1,1)$ — под осью Ox, а в интервале $(1, +\infty)$ — над осью Ox;

4) асимптоты: $x=-1$ — вертикальная, $y=1$ — горизонтальная;

5) критические точки первого рода; $x_1=-1$ и $x_2=1$. Значение $x=-1$ не должно рассматриваться, так как оно не принадлежит области существования функции; функция возрастает в интервалах, где она определена; экстремума нет;

6) критические точки второго рода: $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=3$. Значение $x_1=-1$ не должно рассматриваться: $y(-1)$ не сущест-

вует. В интервале $(-\infty, -1)$ кривая вогнута, в интервале $(-1, 1)$ — выпукла, в интервале $(1, 3)$ — вогнута, а интервале $(3, +\infty)$ — выпукла. Точки перегиба: $x = 1$ и $x = 3$; их координаты: $(1, 0)$; $\left(3, \frac{1}{8}\right)$.

Задача 35,8 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y = \frac{2x}{1+x^2}$ и построить эскиз графика.

Ответ. 1) Область определения — вся числовая ось.

2) функция — нечетная, кривая симметрична относительно начала координат;

3) горизонтальная асимптота $y = 0$ — ось Ox. Других асимптот нет;

4) критические точки первого рода: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$; в интервале $(-\infty, -1)$ функция убывает, в интервале $(-1, 1)$ — возрастает, в интервале $(1, +\infty)$ убывает; при $x = -1$ — минимум, $(y_{\min} = -1)$; при $x = 1$ — максимум, $y_{\max} = 1$. Экстремальные точки $(-1, -1)$ и $(1, 1)$;

5) критические точки второго рода

$$x_1 = -\sqrt{3}, \ x_2 = 0, \ x_3 = \sqrt{3}$$

являются точками перегиба.

В интервале $(-\infty, -\sqrt{3})$ $y'' < 0$ — кривая выпукла, в интервале $(-\sqrt{3}, 0)$ $y'' > 0$ кривая вогнута, в интервале $(0, \sqrt{3})$ $y'' < 0$ — кривая выпукла, в интервале $(\sqrt{3}, +\infty)$ $y'' > 0$ кривая вогнута;

6) при $x < 0$ кривая расположена под осью Ox, а при $x > 0$ — над осью Ox.

Задача 35,9 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y = x \ln x$ и построить эскиз ее графика.

Ответ. 1) Область существования функции — интервал $(0, +\infty)$: функция определена только при положительных значениях x;

2) ни оси симметрии, ни центра симметрии нет;

3) асимптот нет;

4) критическая точка первого рода $x = e^{-1}$. В интервале $(0, e^{-1})$ функция убывает, в интервале $(e^{-1}, +\infty)$ — возрастает. При $x = e^{-1}$ минимум: $y_{\min} = -e^{-1}$ 5) $y'' = \frac{1}{x}$. Критическая точка второго рода $x = 0$ не принадлежит области существования функции. Точек перегиба нет. Во всей области существования функции $y'' > 0$. Кривая выпукла. 6) Кривая пересекает ось Ox в точке $x = 1$. При $0 < x < 1$ кривая находится под осью Ox, а при $x > 1$ — над осью Ox.

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Геометрические приложения производной: уравнения касательной и нормали к плоской кривой. Длины касательной и нормали. Подкасательная и нормаль и их длины. Кривизна, радиус кривизны. Центр кривизны. Соотношение между радиусом кривизны и длиной нормали. Эволюта кривой.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Касательная к кривой

а) Если кривая определена уравнением $y = f(x)$, то уравнение касательной к ней в точке M с координатами (x_1, y_1) имеет вид

$$y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1). \tag{36,1}$$

б) Если кривая задана уравнением $f(x, y) = 0$, то уравнение касательной, проведенной в точку $M(x_1, y_1)$ на ней, имеет вид

$$y - y_1 = y'(x_1, y_1)(x - x_1), \tag{36,2}$$

где $y'(x_1, y_1)$ есть производная неявной функции $f(x, y) = 0$, в которой буквы x и y заменены числами x_1 и y_1 — координатами точки касания.

в) Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{36,3}$$

то касательная к этой кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_1$, определяется уравнением

$$y - y_1 = y'_x(t_1)(x - x_1), \tag{36,4}$$

причем $y'_x(t_1)$ определяется по формуле (27,3), и в полученном выражении буква t заменяется числом t_1. Числа же x_1 и y_1 находятся из (36,3), если там заменить букву t числом t_1.

2. Нормаль к кривой

а) Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то нормаль к ней в точке $M(x_1, y_1)$ имеет уравнение

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1). \tag{36,5}$$

б) Если кривая задана уравнением $f(x, y) = 0$, то уравнение нормали записывается так:

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1, y_1)}(x - x_1). \tag{36,6}$$

в) В случае, если кривая задана параметрическими уравнениями, то нормаль к ней в точке, где параметр $t = t_1$, имеет уравнение

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'_x(t_1)}(x - x_1). \tag{36,6a}$$

3. Длины касательной и нормали. Подкасательная и поднормаль

Определение. *Длиною касательной или нормали к кривой в точке $M(x_1, y_1)$ называется длина отрезка этих прямых от точки касания до точки их пересечения с осью Ox. Эти длины обозначаются соответственно буквами T и N. Подкасательная и поднормаль являются соответственно проекциями отрезков T и N на ось Ox.* Их длины будем обозначать: S_T и S_N. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то для определения длин этих отрезков служат формулы:

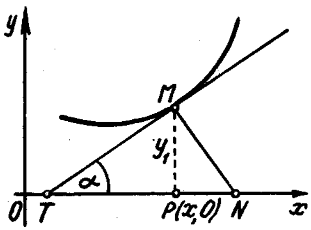
$$T = \left|\frac{y'}{y'(x_1)}\sqrt{1 + [y'(x_1)]^2}\right|; \tag{36,7}$$

$$S_T = \left|-\frac{y_1}{y'(x_1)}\right|; \tag{36,8}$$

$$N = \left|y_1\sqrt{1 + [y'(x_1)]^2}\right|; \tag{36,9}$$

$$S_N = |y_1 \cdot y'(x_1)|. \tag{36,10}$$

Касательную и нормаль легко построить, если соединить конец подкасательной T и конец поднормали N с точкой касания M на кривой. Но для определения положения на оси Ox точек T и N — концов подкасательной и поднормали (фиг. 36) недостаточно знать длины этих отрезков, определяемые по формулам (36,8) и (36,10), а необходимо еще знать направление, в котором надо отложить длины этих отрезков от точки P для получения точек T и N. Условимся считать подкасательную PT и поднормаль PN положительными или отрицательными, смотря по тому, будут ли направления от P к T и от P к N совпадать с положительным или отрицательным направлением оси Ox. По величине и по знаку $PN = y_1y'(x_1)$, а $PT = -\frac{y_1}{y'(x_1)}$.



Фиг. 36.

Отсюда следует, что PT и PN имеют противоположные знаки, так как произведение $y_1y'(x_1)$ и частное $\frac{y_1}{y'(x_1)}$ имеют один и тот же знак.

Если окажется, что $PT > 0$, то точка T лежит с положительной стороны, а точка N — с отрицательной стороны от P. Противоположное расположение получим, когда $PT < 0$. Иначе: точка T лежит с положительной стороны от P, а точка N — с отрицательной, если y_1 и $y'(x)$ имеют разные знаки, а противоположное расположение этих точек имеет место тогда, когда y_1 и $y'(x_1)$ имеют одинаковые знаки.

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями, для определения величин T, N, S_T и S_N следует сначала по заданному в точке касания значению параметра $t = t_1$ определить координаты точки касания x_1 и y_1, вычислить y'_x в точке касания при $t = t_1$, а затем воспользоваться формулами (36,7) — (36,10), причем в них следует заменить $y'(x_1)$ на $y'_x(t_1)$.

В случае, если уравнение кривой задано в виде $f(x, y) = 0$, в тех же формулах надо значение производной $y'(x_1)$ заменить на $y'(x_1, y_1)$ где x_1 и y_1 — по-прежнему координаты точки касания.

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$, то длиной ее касательной и нормали считается длина отрезков этих линий от точки касания $M(r_1, \varphi_1)$ до точки пересечения их с прямой, проходящей через полюс перпендикулярно к радиусу-вектору, проведенному в точку касания. Эти отрезки называются полярной касательной и полярной нормалью. Проекции этих отрезков на указанную прямую называются полярной подкасательной и полярной поднормалью. Длины этих четырех отрезков вычисляются по формулам:

$$T = \left|\frac{r_1}{r'(\varphi_1)}\sqrt{r_1^2 + [r'(\varphi_1)]^2}\right|; \qquad (36{,}11)$$

$$N = \left|\sqrt{r_1^2 + [r'(\varphi_1)[^2}\right|; \qquad (36{,}12)$$

$$S_T = \frac{r_1^2}{|r'(\varphi_1)|}; \qquad (36{,}13)$$

$$S_N = |r'(\varphi_1)|. \qquad (36{,}14)$$

Во всех этих формулах r_1 и φ_1 — полярные координаты точки касания.

4. Кривизна и радиус кривизны

а) Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то ее кривизна K и радиус кривизны R определяются по формулам

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (36{,}15)$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}. \qquad (36{,}16)$$

Входящий в эти формулы $\sqrt{1+y'^2}$ берется со знаком плюс. Кривизна и радиус кривизны кривой, по определению — величины не отрицательные.

б) В случае, если кривая задана параметрическими уравнениями (36,3), то в точке, для которой параметр $t = t_1$,

$$K = \frac{|y''(t_1)\,x'(t_1) - x''(t_1)\,y'(t_1)|}{[x'^2(t_1) + y'^2(t_1)]^{\frac{3}{2}}}, \tag{36,17}$$

$$R = \frac{[x'^2(t_1) + y'^2(t_1)]^{\frac{3}{2}}}{|y''(t_1)\,x'(t_1) - x''(t_1)\,y'(t_1)|}, \tag{36,18}$$

причем берется только положительное значение корня $\sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1)}$.

в) Если кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r = f(\varphi),$$

$$K = \frac{|r_1^2 + 2r'^2(\varphi_1) - r_1 r''(\varphi_1)|}{[r_1^2 + r'^2(\varphi_1)]^{\frac{3}{2}}}; \tag{36,19}$$

$$R = \frac{[r_1^2 + r'^2(\varphi_1)]^{\frac{3}{2}}}{|r_1^2 + 2r'^2(\varphi_1) - r_1 r''(\varphi_1)|}, \tag{36,20}$$

где r_1 и φ_1 — полярные координаты точки, в которой вычисляются K и R, а $\sqrt{r_1^2 + r'^2(\varphi_1)}$ следует брать со знаком плюс.

5. Круг кривизны. Центр кривизны. Эволюта и эвольвента

Координаты α и β центра кривизны в точке $M(x_1, y_1)$ кривой определяются по формулам

$$\begin{cases} \alpha = x_1 - \dfrac{y'(x_1)\,(1 + y'^2(x_1))}{y''(x_1)}, \\ \beta = y_1 + \dfrac{1 + y'^2(x_1)}{y''(x_1)}. \end{cases} \tag{36,21}$$

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями (36,3), координаты центра кривизны в ее точке M, соответствующей значению параметра $t = t_1$, определяются по формулам

$$\begin{cases} \alpha = x(t_1) - \dfrac{y'_t(t_1)\,[x'^2_t(t_1) + y'^2_t(t_1)]}{x'_t(t_1)\,y''_{t^2}(t_1) - x''_{t^2}(t_1)\,y'_t(t_1)}; \\ \beta = y(t_1) + \dfrac{x'_t(t_1)\,[x'^2_t(t_1) + y'^2_t(t_1)]}{x'_t(t_1)\,y''_{t^2}(t_1) - x''_{t^2}(t_1)\,y'_t(t_1)}. \end{cases} \tag{36,22}$$

Формулы (36,22) применимы и тогда, когда кривая задана полярным уравнением $r = f(\varphi)$. Так как в полярных координатах

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то, подставляя сюда $r = f(\varphi)$, получим $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$, и параметром теперь является полярный угол φ.

Определение. *Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется ее эволютой. По отношению к своей эволюте исходная кривая называется эвольвентой.*

Если в формулах (36,21) опустить индекс у x_1 и y_1 и заменить y на $f(x)$, а в формулах (36,22) опустить индекс у t, то эти формулы можно считать параметрическими уравнениями эволюты, причем в первом случае параметром является x, во втором — t.

Исключение параметра x из уравнений (36,21) или параметра t из уравнений (36,22) определит эволюту неявным уравнением

$$F(\alpha,\ \beta) = 0.$$

Задача 36,1. Для параболы $y^2 = 2px$ в произвольной ее точке $M(x_1,\ y_1)$ найти уравнение касательной и нормали, длины подкасательной и поднормали, длины касательной и нормали, радиус кривизны, координаты центра кривизны и эволюту.

Решение. Прежде всего из уравнения параболы определим y' и y'' в точке с координатами $(x_1,\ y_1)$: $2yy' = 2p$; $y' = \frac{p}{y}$; $y'(x_1,\ y_1) = \frac{p}{y_1}$; $y'' = -\frac{p}{y^2}y'$.

Подставляя сюда найденное значение y', получим $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$, $y''(x_1, y_1) = -\frac{p^2}{y_1^3}$. Подставляя $y'(x_1,\ y_1)$ в уравнение касательной (36,1), получим

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1), \text{ или } yy_1 - y_1^2 = px - px_1. \qquad (36,23)$$

Так как точка $M(x_1,\ y_1)$ лежит на параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, а потому

$$y_1^2 = 2px_1. \qquad (36,24)$$

Используем эту зависимость для упрощения уравнения (36,23) касательной. Для этого в его правой части прибавим и отнимем px_1 и получим

$$yy_1 - y_1^2 = px + px_1 - px_1 - px_1,$$

или

$$yy_1 - y_1^2 = p(x + x_1) - 2px_1,$$

а с учетом того, что $y_1^2 = 2px_1$, уравнение касательной запишется в виде

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Подставляя значение производной $y'(x_1y_1)$ в уравнение (35,5), получим уравнение нормали

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{p}{y_1}}(x - x_1),$$

которое после упрощений запишется так:

$$y_1(x - x_1) + p(y - y_1) = 0.$$

Формула (36,8) дает для длины подкасательной

$$S_T = \left| -\frac{y_1}{\frac{p}{y_1}} \right|; \quad S_T = \left| -\frac{y_1^2}{p} \right|. \tag{36,25}$$

Используя равенство (36,24), получим, что $S_T = |-2x_1|$, т. е. длина подкасательной параболы равна удвоенной абсциссе точки касания. Так как в (36,25) $-\frac{y_1^2}{p}$ отрицательное число, то для построения подкасательной ее длину $2x_1$ надо отложить от основания ординаты точки касания в отрицательном направлении оси Ox. Соединив конец подкасательной с точкой касания, получим касательную к параболе.

Из того, что $y' = \frac{p}{y_1}$, следует, что $y_1y'(x_1, y_1) = p$.

Так как левая часть этого равенства, взятая по абсолютной величине, на основании (36,10) есть длина поднормали, то мы заключаем, что у параболы длина поднормали есть величина постоянная, равная параметру параболы. Так как $p > 0$, то мы получим поднормаль, если отложим по оси Ox в положительном ее направлении от основания ординаты точки касания отрезок, равный параметру параболы. Соединив конец этого отрезка с точкой касания, получим нормаль к параболе. Получить самостоятельно по формулам (36,6) и (36,9), что длины касательной и нормали равны

$$T = \left| \frac{y_1}{p} \sqrt{y_1^2 + p^2} \right|; \quad N = \sqrt{y_1^2 + p^2}.$$

Радиус кривизны определим по формуле (36,16), подставив в нее y' и y'':

$$R = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left| -\frac{p^2}{y_1^3} \right|}; \quad R = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Самостоятельно докажите, что радиус кривизны в любой точке параболы $y^2 = 2px$ равен кубу длины нормали, проведенной в эту точку, разделенному на квадрат ее параметра, т. е.

$$R = \frac{N^3}{p^2}.$$

Координаты центра кривизны находим по формулам (36,21) с учетом найденных значений y' и y'':

$$\alpha = x_1 - \frac{\frac{p}{y_1}\left[1 + \frac{p^2}{y_1^2}\right]}{-\frac{p^2}{y_1^3}}; \quad \beta = y_1 + \frac{1 + \frac{p^2}{y_1^2}}{-\frac{p^2}{y_1^3}},$$

и после упрощений

$$\alpha = \frac{px_1 + y_1^2 + p^2}{p}; \quad \beta = -\frac{y_1^3}{p^2}.$$

Эволюта параболы. В последних уравнениях опустим индексы у x и y и, учитывая, что из уравнения параболы $y^2 = 2px$, а $y = \pm\sqrt{2px}$, получим

$$\alpha = \frac{px + 2px + p^2}{p}; \quad \alpha = 3x + p; \quad \beta = -\frac{\pm 2px\sqrt{2px}}{p^2};$$

$$\beta = \pm\frac{2px\sqrt{2px}}{p^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}(\alpha - p)^3 &= 27x^3\\ \beta^2 &= \frac{8x^3}{p}\end{aligned}\right\}.$$

Это и есть параметрические уравнения эволюты параболы, а параметром является x. Чтобы исключить параметр x, разделим почленно первое уравнение на второе и получим, что

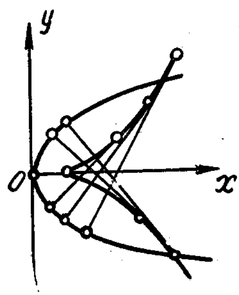
$$\frac{(\alpha - p)^3}{\beta^2} = \frac{27p}{8},$$

а отсюда получается уравнение эволюты в виде

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

Текущими координатами здесь являются α и β. Обозначая их, как обычно, через x и y, получим

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3.$$



Фиг. 36,1.

Это полукубическая парабола, вершина которой находится в точке $(p, 0)$ (фиг. 36,1).

Задача 36,2. Для эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

найти в произвольной точке на нем $M(x_1, y_1)$:

1) уравнения касательной и нормали;
2) длины подкасательной и поднормали;
3) радиус кривизны;
4) координаты центра кривизны;
5) эволюту.

Решение. Запишем уравнение эллипса в неявном виде:

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

и найдем y' и y'' по правилу дифференцирования неявных функций:

$$2b^2x+2a^2yy'=0; \quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}; \quad y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

В точке касания $M(x_1, y_1)$

$$y'(x_1, y_1)=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}; \quad y''(x_1, y_1)=-\frac{b^4}{a^2y_1^3}.$$

Уравнение касательной по формуле (36,2) запишется так:

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

или

$$b^2x_1x+a^2y_1y=b^2x_1^2+a^2y_1^2.$$

Так как точка $M(x_1, y_1)$ лежит на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса, а потому $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$, и уравнение касательной запишется так:

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2,$$

или после деления обеих частей этого уравнения на a^2b^2

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

Уравнение нормали получите самостоятельно по формуле (36,6). Оно будет таким:

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=c^2 \quad (c^2=a^2-b^2).$$

Длина подкасательной найдется по формуле (36,8):

$$S_T=\left|-\frac{y_1}{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}}\right|=\left|\frac{a^2y_1^2}{b^2x_1}\right|,$$

но $a^2y_1^2 = a^2b^2 - b^2x_1^2 = b^2(a^2 - x_1^2)$, а потому

$$S_T = \left|\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}\right|,$$

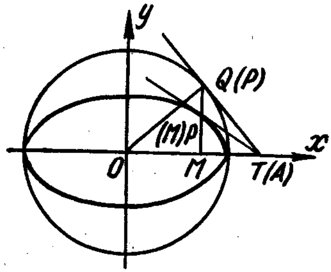
и, таким образом, длина подкасательной не зависит от b — малой полуоси эллипса. Это значит, что у эллипсов, имеющих одну общую ось $2a$, их подкасательные в точках с одинаковыми абсциссами, равны между собой (фиг. 36,2).

Длина поднормали на основании формулы (36,10)

$$S_N = \left|y_1\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)\right| = \left|-\frac{b^2}{a^2}x_1\right|.$$

По формуле (36,16) определится радиус кривизны

$$R = \frac{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$



Фиг. 36,2

а по формулам (36,21) координаты центра кривизны

$$\alpha = x_1 - \frac{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\left(1 + \frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2}\right)}{-\frac{b^4}{a^2y_1^3}} = x_1 - \frac{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)\,x_1}{a^4b^2};$$

$$\beta = y_1 + \frac{1 + \frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2}}{-\frac{b^4}{a^2y_1^3}} = y_1 - \frac{(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)\,y_1}{a^2b^4}.$$

Теперь получим уравнение эволюты эллипса: в последних двух формулах для вычисления α и β опустим индекс у x и y и получим, что

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,x}{a^4b^2}, \\ \beta = y - \dfrac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}. \end{cases}$$

Постараемся с помощью уравнения эллипса исключить из последних двух равенств x и y. Из уравнения эллипса следует, что

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2,$$
$$b^2x^2 = a^2b^2 - a^2y^2.$$

В выражениях для α и β заменим a^2y^2 и b^2x^2 по этим формулам, в правых частях выполним вычитание, раскроем скобки и, учитывая, что у эллипса $a^2-b^2=c^2$, получим после очевидных сокращений, что

$$\alpha=\frac{c^2x^3}{a^4};\quad \beta=-\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

Перепишем их в виде

$$a\alpha=\frac{c^2x^3}{a^3};\quad b\beta=-\frac{c^2y^3}{b^3}$$

и возведем каждое из этих равенств в степень $\frac{2}{3}$.

Получаем

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}=\frac{c^{\frac{4}{3}}x^2}{a^2};\quad (b\beta)^{\frac{2}{3}}=\frac{c^{\frac{4}{3}}y^2}{b^2}$$

и сложим их почленно:

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Но из уравнения эллипса следует, что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

а потому

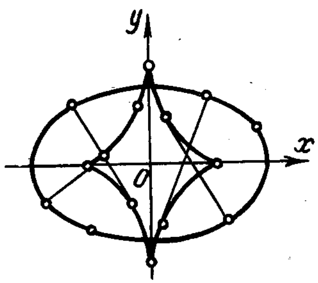
$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$

Это и есть уравнение эволюты эллипса. Здесь α и β — текущие координаты.

Если их обозначить через x и y, то уравнение эволюты перепишется в виде

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$

Кривая, определяемая этим уравнением, напоминает астроиду и получается из нее растяжением по вертикали (см. фиг. 36,3).



Фиг. 36,3.

Задача 36,3 (для самостоятельного решения). Взять параметрические уравнения эллипса в виде

$$x=a\cos t;\quad y=b\sin t$$

и доказать, что в точке, соответствующей значению параметра $t = t_1$, имеют место следующие равенства:

$$S_T = |a \sin t_1 \cdot \operatorname{tg} t_1|; \quad S_N = \left|-\frac{b^2}{a} \cos t_1\right|;$$

$$T = \left|-\operatorname{tg} t_1 \sqrt{a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1}\right|;$$

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1};$$

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1)^{\frac{3}{2}}}{ab};$$

$$\alpha = \frac{c^2}{a} \cos^3 t_1; \quad \beta = -\frac{c^2}{b} \sin^3 t_1.$$

Пользуясь выражением для радиуса кривизны, доказать, что в вершинах эллипса $\left(t = 0 \text{ и } t = \frac{\pi}{2}\right)$ радиус кривизны

$$(R)_{t=0} = \frac{b_2}{a}; \quad (R)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{b},$$

а координаты центра кривизны в этих точках:

$$(a)_{i=0} = \frac{c^2}{a}; \quad (\beta)_{t=0} = 0; \quad (\alpha)_{t=\frac{\pi}{2}} = 0; \quad (\beta)_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{c^2}{b}.$$

Задача 36,4 (для самостоятельного решения). Пользуясь результатами предыдущей задачи, доказать, что у эллипса радиус кривизны равен кубу нормали, разделенному на квадрат параметра эллипса.

Указание. Параметром p эллипса называется половина длины его хорды, проведенной через фокус перпендикулярно большой оси: $p = \frac{b^2}{a}$.

Задача 36,5. (для самостоятельного решения). Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = 3x^4 - 5x^2 + 4$ в точке $x = -1$, $y = 2$.

Ответ. Уравнение касательной:

$$2x + y = 0.$$

Уравнение нормали:

$$x - 2y + 5 = 0.$$

Задача 36,6. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$$

в точке $(-2,3)$.

Решение. Уравнение кривой задано в неявной форме. Находим производную по правилу дифференцирования неявной функции:

$$12x^2 - 3y^2 - 6xyy' + 12x - 5y - 5xy' - 16yy' + 9 = 0;$$

$$y' = \frac{12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y + 9}{6xy + 5x + 16y}; \quad y'(-2, 3) = -\frac{9}{2}.$$

Уравнение касательной

$$9x + 2y + 12 = 0;$$

уравнение нормали

$$2x - 9y + 31 = 0.$$

Задача 36,7. Найти уравнение касательной и нормали кривой

$$\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$$

в точке, где $t = 3$.

Решение. Для того чтобы воспользоваться формулами (36,4) и (35,6*a*), надо определить x_1, y_1 и $y'(t)$ при $t = 3$. Определим прежде всего x_1 и y_1:

$$x_1 = 3 \cdot 3 - 5 = 4,$$
$$y_1 = 3^2 - 4 = 5.$$

После этого находим y'_x производную в точке, где

$$t = 3; \quad y'_t = 2t; \quad x'_t = 3; \quad y'_x = \frac{2t}{3}; \quad y'_x(3) = 2.$$

Уравнение касательной $y - 5 = 2(x - 4)$, или $2x - y - 3 = 0$.
Уравнение нормали $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 4)$, или $x + 2y - 14 = 0$.

Задача 36,8 (для самостоятельного решения). Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = 2\cos t + 3\sin t \\ y = \cos t + 2\sin t \end{cases}$$

в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$.

Ответ. Уравнение касательной $x - 2y + 1 = 0$;
уравнение нормали $2x + y - 8 = 0$.

Задача 36,9 (для самостоятельного решения). Найти уравнение касательной и нормали к гиперболе

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

в точке на ней (x_1, y_1).

Ответ. Уравнение касательной $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$;

уравнение нормали $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = c^2 \ (c^2 = a^2 + b^2)$.

Задача 36,10. Для циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (36,26)$$

в точке, где $t = t_1$, определить:

1) уравнения касательной, нормали и длину поднормами;

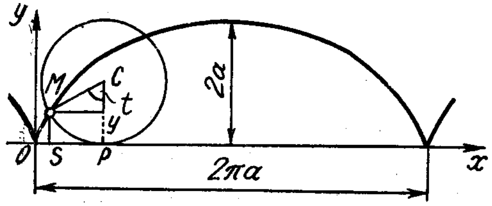
2) доказать, что нормаль в произвольной точке циклоиды проходит через точку касания производящего круга, а касательная — через соответствующую ей высшую точку этого круга;

3) доказать, что у циклоиды радиус кривизны имеет длину в два раза большую, чем соответствующая нормаль;

4) определить координаты центра кривизны и доказать, что эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная данной*, но перемещенная на отрезок $a\pi$ в положительном направлении оси Ox и на отрезок $2a$ в отрицательном направлении оси Oy.

Решение. Если круг радиуса a катится без скольжения по прямой, то всякая точка, лежащая на его окружности, описывает кривую, которая называется циклоидой. Уравнения (36,26) есть параметрические уравнения циклоиды. Примем прямую, по которой катится круг, за ось Ox.

Если в исходном положении точка, вычерчивающая циклоиду, находилась в начале координат, а центр катящегося круга был на оси Oy, то параметр t есть центральный угол, соответствующий дуге, на которую прокатился круг по оси Ox.



Фиг. 36,4.

Циклоида состоит из конгруэнтных арок, каждая из которых соответствует одному полному обороту производящего круга. Расстояние на оси Ox между началом и концом одной арки равно длине окружности производящего циклоиду круга, т. е. $2\pi a$. Когда точка описывает одну полную арку циклоиды, параметр t изменяется от $t = 0$ до $t = 2\pi$ (фиг. 36,4).

1) Пусть при $t = t_1$, $x = x_1$, $y = y_1$, причем

$$x_1 = a(t_1 - \sin t_1); \; y_1 = a(1 - \cos t_1). \qquad (36,26a)$$

---

* Две геометрические фигуры называются конгруэнтными, если одну из них можно совместить с другой, изменив только в результате некоторого движения ее положение на плоскости.

Чтобы найти уравнения касательной и нормали на основании (36,4) и (36,6а), найдем y'_x при $t = t_1$:

$$y'_t = a \sin t; \quad x'_t = a(1 - \cos t);$$

$y'_x = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$, а в точке, где $t = t_1$, $y'_x(t_1) = \operatorname{ctg} \frac{t_1}{2}$.

Уравнение касательной $y - y_1 = \operatorname{ctg} \frac{t_1}{2}(x - x_1)$;

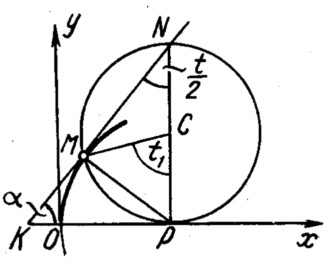
уравнение нормали $y - y_1 = -\operatorname{tg} \frac{t_1}{2}(x - x_1)$.

Длина поднормали находится по формуле (36,10):

$$S_N = \left| y_1 \cdot \operatorname{ctg} \frac{t_1}{2} \right|.$$

Но $y_1 = a(1 - \cos t_1)$, а потому

$$S_N = \left| a(1 - \cos t_1) \operatorname{ctg} \frac{t_1}{2} \right|; \quad S_N = |a \sin t_1|,$$



Фиг. 36,5.

т. е. длина поднормали равна проекции на ось Ox радиуса производящего круга (фиг. 36,4).

2) Точка P касания производящего круга с осью Ox (фиг. 36,5) имеет координаты at_1 и 0: $P(at_1, 0)$. Покажем, что нормаль в точке M проходит через эту точку. Для этого надо доказать, что координаты этой точки удовлетворяют уравнению нормали. Подставляя координаты этой точки вместо текущих координат x и y в уравнение нормали, а вместо x_1 и y_1 их выражения из (36,26а), получим в левой части уравнения

$$0 - a(1 - \cos t_1) = -2a \sin^2 \frac{t_1}{2},$$

а в правой части

$$-\operatorname{tg} \frac{t_1}{2} [at_1 - a(t_1 - \sin t_1)] = -\operatorname{tg} \frac{t_1}{2}(at_1 - at_1 + a \sin t_1) =$$

$$= -a \operatorname{tg} \frac{t_1}{2} \sin t_1 = -2a \sin^2 \frac{t_1}{2}.$$

Таким образом, координаты точки P удовлетворяют уравнению нормали и, значит, нормаль в точке M проходит через точку касания производящего круга $P(at_1, 0)$. Касательная же необходимо пройдет через противоположную точку N диаметра PN, так как касательная перпендикулярна нормали, проведенной в точку касания (в окружности вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой).

3) Найдем радиус кривизны циклоиды по формуле (36,18) и длину ее нормали по формуле (36,9). Из уравнений циклоиды (36,26) следует, что

$$x'(t) = a(1-\cos t); \quad y'(t) = a\sin t;$$
$$x''(t) = a\sin t; \qquad y''(t) = a\cos t.$$

Заменяя здесь t на t_1 и подставляя в (36,18), получим, что

$$R = \frac{[a^2(1-\cos t_1)^2 + a^2\sin^2 t_1]^{\frac{3}{2}}}{[a^2\cos t_1(1-\cos t_1) - a^2\sin^2 t_1]} = \frac{(2a^2 - 2a^2\cos t_1)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos t_1)},$$

$$R = \frac{2^{\frac{3}{2}} a^2 (1-\cos t_1)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos t_1)}; \quad R = 2\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t_1};$$

$$R = 4a\left|\sin\frac{t_1}{2}\right|. \tag{36,27}$$

По формуле (36,9), полагая в ней $y_1 = a(1-\cos t_1)$, будем иметь $y'_x(t_1) = \operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}$.

Получим, что длина нормали

$$N = a\left|(1-\cos t_1)\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{t_1}{2}}\right|;$$

$$N = 2a\sin^2\frac{t_1}{2}\left|\operatorname{cosec}\frac{t_1}{2}\right|;$$

$$N = 2a\left|\sin\frac{t_1}{2}\right|. \tag{36,28}$$

Из формул (36,27) следует, что

$$\frac{R}{N} = 2, \text{ или } R = 2N,$$

т. е. радиус кривизны в произвольной точке циклоиды равен удвоенной длине, соответствующей нормали.

4) Координаты центра кривизны определяются по формулам (36,22). Подставляя в них ранее найденные значения x'_t, x''_t, y'_t, y''_t, вычисленные в точке, где $t = t_1$, и учитывая (36,26а), получим, что

$$\alpha = a(t_1 + \sin t_1);$$
$$\beta = -a(1-\cos t_1).$$

Если в этих формулах опустить индекс у t_1, то получим уравнение эволюты циклоиды

$$\begin{cases} \alpha = a(t+\sin t), \\ \beta = -a(1-\cos t). \end{cases}$$

Если теперь взять $t = \pi + \tau$, то уравнение эволюты циклоиды запишется так:

$$\alpha = a\pi + a(\tau - \sin\tau);$$
$$\beta = -2a + a(1 - \cos\tau).$$

Из этих формул мы заключаем, что эволюта циклоиды есть циклоида такая же, как данная, но смещенная на отрезок $a\pi$ в положительном направлении оси Ox и на отрезок $2a$ в отрицательном направлении оси Oy.

Циклоида обладает замечательным механическим свойством: материальная точка, двигаясь по этой кривой, достигает заданной на ней точки, затрачивая на это одно и то же время, независимо от того, из какой исходной точки кривой началось движение.

Задача 36,11 (для самостоятельного решения). Найти радиус кривизны и эволюту астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

в произвольной ее точке, где $t = t_1$.

Указание. Астроида — кривая, описываемая точкой окружности радиуса a, которая катится без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса, в четыре раза большего, т. е. равного $4a$*.

Ответ. $R = \frac{3}{2}a\sin 2t_1$; $\alpha = a\cos t_1(1 + 2\sin^2 t_1)$; $\beta = a\sin t_1 (1 + 2\cos^2 t_1)$.

Уравнение эволюты $(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

Если повернуть координатные оси на 45° вокруг начала координат, то можно усмотреть, что эволютой астроиды является опять-таки астроида, образованная кругами, радиусы которых в два раза больше исходных. Докажите это.

Задача 36,12. Найти угол между касательной и радиусом-вектором произвольной точки спирали Архимеда

$$r = a\varphi.$$

Решение. Спираль Архимеда представляет собой траекторию точки M, которая равномерно движется по прямой ON в то время, как сама эта прямая равномерно вращается вокруг точки O (полюса). Предполагается, что в начальный момент дви-

* Уравнение астроиды в прямоугольных координатах $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

жения точка M находилась в полюсе полярной системы координат, а прямая ON совпадала с полярной осью (фиг. 36,6).

Известно, что угол μ между радиусом-вектором произвольной точки кривой $r = r(\varphi)$ и касательной к ней в этой точке определяется по формуле

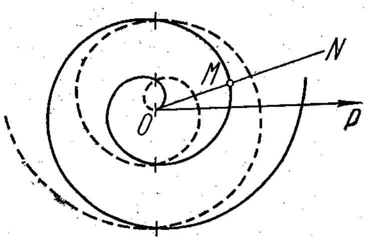
$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'}, \tag{36,29}$$

где r' есть производная от r по φ.

Подставляя в эту формулу из уравнения спирали Архимеда $r = a\varphi$ и $r' = a$, получим, что

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a\varphi}{a} = \varphi, \text{ а } \mu = \operatorname{arctg}\varphi. \tag{36,30}$$

Число a в уравнении спирали Архимеда называется параметром. Полученный результат показывает, что μ не зависит от a. Это значит, что все спирали Архимеда пересекают радиусы-векторы, соответствующие одному и тому же значению полярного угла, под одним и тем же углом. Интересно подметить и такую особенность: когда $\varphi \to \infty$, то из (36,30) следует, что $\mu \to \frac{\pi}{2}$, а это означает, что по мере развертывания спирали она стремится стать нормальной к своим радиусам-векторам.



Фиг. 36.6

Задача 36,13. Определить полярные поднормаль и подкасательную спирали Архимеда в произвольной точке спирали (r_1, φ_1).

Решение. По формулам (36,13) и (36,14) находим, что длина полярной поднормали $S_N = a$, а длина полярной подкасательной

$$S_T = a\varphi_1^2 = a\varphi_1 \cdot \varphi_1 = r_1\varphi_1.$$

Из этого заключаем, что полярная поднормаль спирали Архимеда есть величина постоянная, равная ее параметру, и что концы всех поднормалей лежат на окружности радиуса a с центром в полюсе. Рассматривая длину полярной подкасательной, приходим к выводу, что она равна длине дуги окружности радиуса r_1, соответствующей центральному углу, равному φ_1. В частности, в точке, где спираль вторично (после полюса) пересекает положительное направление полярной оси (в этой точке $\varphi_1 = 6\pi$), длина полярной подкасательной равна длине окружности, радиус которой равен радиусу-вектору этой точки.

Задача 36,14 (для самостоятельного решения). Определить радиус кривизны спирали Архимеда в произвольной ее точке.

Ответ. $R = \dfrac{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2+\varphi^2}$.

Задача 36,15 (для самостоятельного решения). Доказать, что подкасательная гиперболической спирали $r=\frac{a}{\varphi}$ имеет постоянную длину, равную a.

Задача 36,16 (для самостоятельного решения). Для логарифмической спирали $r=a^{\varphi}$ определить в ее произвольной точке:

1) угол между радиусом-вектором касательной в этой точке;
2) длину полярной подкасательной и поднормали;
3) длину полярной касательной и нормали.

Ответ. 1) Логарифмическая спираль пересекает все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом μ: $\operatorname{tg}\mu=\frac{1}{\ln a}$. Например, спираль $r=e^{\varphi}$ пересекает все свои радиусы-векторы под углом 45°. 2) $S_T=\frac{r}{\ln a}$; $S_N=r\ln a$. 3) $T=\sqrt{1+\frac{1}{\ln^2 a}}\cdot r$; $N=\sqrt{1+\ln^2 a}\cdot r$.

Задача 36,17. Доказать, что радиус кривизны в произвольной точке логарифмической спирали $r=a^{\varphi}$ пропорционален радиусу-вектору этой точки и равен $R=r\sqrt{1+\ln^2 a}$ (сопоставляя величину R с длиной полярной нормали, найденной в задаче 36,16, приходим к выводу, что радиус кривизны в произвольной точке логарифмической спирали равен полярной нормали в этой точке).

Задача 36,18 (для самостоятельного решения). Доказать, что эволюта логарифмической спирали $r=a^{\varphi}$ есть также логарифмическая спираль, конгруэнтная данной, но повернутая относительно ее на некоторый угол.

Указание. С помощью формул, связывающих прямоугольные координаты с полярными ($x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$), уравнение логарифмической спирали записать в виде

$$\begin{cases} x=a^{\varphi}\cos\varphi, \\ y=a^{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$$

и по формулам (36,22) определить координаты центра кривизны произвольной точки (r_1, φ_1) логарифмической спирали. Получится, что

$$\begin{cases} \alpha=-a^{\varphi_1}\sin\varphi_1\ln a, \\ \beta=a^{\varphi_1}\cos\varphi_1\ln a. \end{cases}$$

Радиус вектор центра кривизны

$$r_1=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{a^{2\varphi_1}\ln^2 a\,(\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1)},$$
$$r_1=a^{\varphi_1}\ln a.$$

Если взять $\ln a=a^{\varphi_0}$ и опустить индекс у, r_1 и φ_1, то получим эволюту логарифмической спирали в виде $r=a^{\varphi}a^{\varphi_0}$, или $r=a^{\varphi+\varphi_0}$. Эта кривая получается из данной логарифмической спирали $r=a^{\varphi}$ вращением ее на некоторый угол φ_0.

Задача 36,19. В какой точке кривая $y=\ln x$ имеет наименьший радиус кривизны?

Решение. Находим по формуле (36,16), что в произвольной точке $A(x, y)$ этой кривой $R=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$.

Чтобы определить наименьшее значение R, находим производную

$$\frac{dR}{dx}=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^2},$$

приравниваем ее нулю и решаем уравнение $(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}=0$, откуда $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Критической точкой является также и $x=0$. Но значения $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и $x=0$ должны быть отброшены, так как для значений $x\leqslant 0$ функция $y=\ln x$ не существует (на кривой $y=\ln x$ нет точек с абсциссами $x\leqslant 0$). Осталось исследовать значение $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Найдите R'', подставьте в полученное выражение $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и убедитесь, что $R''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)>0$. Это доказывает, что радиус кривизны кривой $y=\ln x$ будет наименьшим в точке с абсциссой $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, т. е. в точке $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2};\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

Задача 36,20 (для самостоятельного решения). Доказать, что у цепной линии $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ радиус кривизны пропорционален квадрату ординаты $\left(R=\frac{1}{a}y^2\right)$ и что он равен длине нормали N.

Указание. $y'=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$; $y''=\frac{y}{a^2}$.

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Функции многих независимых переменных. Область существования. Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал первого порядка функции нескольких независимых переменных.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Переменные $x, y, z, \ldots t$ называются независимыми между собой, если каждая из них может принимать любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные.

2. Переменная величина u называется функцией независимых переменных x, y, z, ..., t, если каждой системе значений этих переменных в области их изменения соответствует единственное определенное значение u.*

Символически функция u независимых переменных x, y, z, ..., t записывается так:

$$y = f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t). \tag{37,1}$$

3. Областью существования функции $f(x, y, z, \ldots, t)$ называется совокупность значений независимых переменных x, y, z, ..., t, при которых функция определена (т. е. принимает действительные значения). Область существования функции называется также областью определения функции.

В дальнейшем для упрощения записей все определения и формулы приводятся только для функций от трех независимых переменных.

4. Частные приращения функции. Если $u = f(x, y, z)$ и одна из независимых переменных, например x, получила приращение Δx, то частным приращением $\Delta_x u$ функции называется разность $\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)$. Соответственно

$$\Delta_y u = f(x,\ y+\Delta y,\ z) - f(x,\ y,\ z),$$

а

$$\Delta_z u = f(x,\ y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z)$$

5. Частные производные. Составим отношение $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$. Если при стремлении Δx к нулю это отношение стремится к определенному пределу, то этот предел называется частной производной функции $u = f(x, y, z)$ по независимой переменной x и обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, u'_x, f'_x.

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x},$$

или в более подробной записи

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y,\ z) - f(x,\ y,\ z)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ по независимым переменным y и z. Частная производная по y обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, u'_y, f'_y, $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y,\ z) - f(x,\ y,\ z)}{\Delta y}$, а частная производная

* Многозначные функции нами не рассматриваются.

по z — одним из символов: $\frac{\partial u}{\partial z}$; $\frac{\partial f}{\partial z}$; u'_z; f'_z

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_z u}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x, y, z+\Delta z)-f(x, y, z)}{\Delta z}\,^{*}.$$

Вычисление частных производных функции нескольких независимых переменных производится по тем же правилам, по которым вычисляются производные функции одной независимой переменной, только следует иметь в виду, что при определении частной производной надо считать постоянными все независимые переменные, кроме той, по которой вычисляется частная производная.

Задача 37,1. Найти область существования функции $u=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Решение. Представим функцию в виде $u=\sqrt{4-(x^2+y^2)}$. Очевидно, что функция определена для тех значений x и y, которые удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\leqslant 4$. На языке геометрии это означает, что функция определена в точках, лежащих внутри окружности $x^2+y^2=4$ и на ее границе, так как для всех точек, лежащих вне ее, имеет место неравенство $x^2+y^2>4$.

Задача 37,2. Найти область существования функции $z=\ln(x-y)$.

Решение. Так как отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют, то должно выполняться неравенство $x-y>0$, т. е. $y<x$.

Точки плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, расположены под прямой $y=x$, причем точки, лежащие на этой прямой, рассматриваться не могут. Короче: область определения функции — полуплоскость, расположенная под прямой $y=x$, причем сама прямая $y=x$ при рассмотрении не учитывается.

Задача 37,3 (для самостоятельного решения). $u=\frac{z}{x+y}$. Найти область существования функции.

Ответ. Функция определена во всех точках пространства, кроме точек плоскости $x+y=0$, так как в точках этой плоскости знаменатель дроби у заданной функции обращается в нуль.

Задача 37,4 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций: 1) $z=xy$ и 2) $z=x^2+y^2$.

Ответ. Обе функции определены во всей плоскости xOy, т. е. при любых значениях x и y.

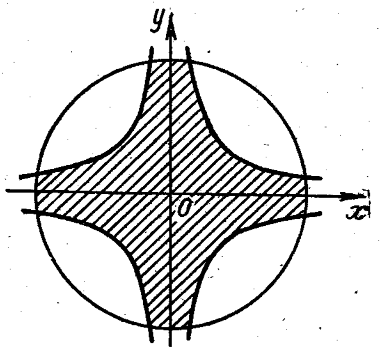
---

*) Следует иметь в виду, что символы $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ... нельзя рассматривать как частные от деления, например ∂f на ∂x, так как ни ∂f, ни ∂x в отдельности смысла не имеют.

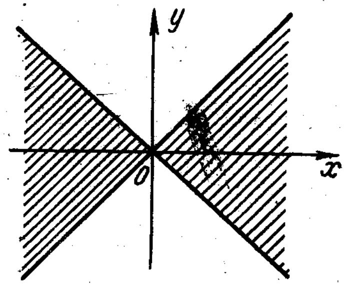
Задача 37,5. Найти область существования функции $z = \arcsin(3 - x^2 - y^2)$.

Решение. Так как функция $u = \arcsin t$ определена для значений аргумента t из отрезка $[-1, +1]$, то искомая область существования найдется из условия $-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$, откуда следует, что $2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ и область существования функции заключена между двумя концентрическими окружностями: $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, причем могут рассматриваться и точки, принадлежащие этим окружностям.

Задача 37,6 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $z = \arcsin 3xy$.



Фиг. 37,1



Фиг. 37,2

Ответ. Область существования ограничена двумя сопряженными гиперболами:

$$y = \frac{1}{3x} \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{3x}.$$

Задача 37,7 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $f(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$.

Ответ. Областью существования является общая часть областей существования слагаемых функций: 1) $\arcsin(1 - x^2 - y^2)$ и 2) $\arcsin 2xy$, т. е. область, изображенная на фиг. 37,1.

Задача 37,8. Найти область существования функции $u = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

Решение. Должно выполняться требование: $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} > 0$. Эта дробь положительна, когда положителен ее знаменатель, т. е. когда $x^2 - y^2 > 0$, или $y^2 < x^2$, а это влечет за собой неравенство $|y| < |x|$.

Рассмотрим два случая: 1) $x > 0$, 2) $x < 0$. 1) Если $x > 0$, то $|x| = x$, и тогда $|y| < x$, или $-x < y < x$. На языке геометрии это означает, что область определения есть часть правой полуплоскости (т. к. рассматриваются значения $x > 0$), ограниченная прямыми $y = x$ и $y = -x$, причем точки, лежащие на этих прямых, рассматриваться не могут. 2) Если $x < 0$, то $|x| = -x$, и тогда $|y| < -x$, или $x < y < -x$.

Последние неравенства определяют ту часть левой полуплоскости, которая находится между прямыми $y = -x$ и $y = x$, причем опять-таки точки, принадлежащие этим прямым, не должны рассматриваться (фиг. 37,2).

Задача 37,9 (для самостоятельного решения). $u = \ln x + \ln y$. Найти область определения функции.

Ответ. Первый квадрант ($x > 0$, $y > 0$), причем оси Ox и Oy исключаются.

Задача 37,10 (для самостоятельного решения). $u = \sqrt{\ln x + \ln y}$. Найти область определения функции.

Ответ. $x > 0$; $y > 0$; $xy \geqslant 1$. Область состоит из точек первого квадранта, лежащих над гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и на ней.

Задача 37,11. Найти частные производные функций: 1) $u = x^2 + 3xy + 4y^2$; 2) $u = \sin(3x + 5y - 4z)$; 3) $u = e^{\frac{x}{y}}$.

Решение. 1) Функция u — функция двух независимых переменных — x и y. При определении частной производной функции u по независимой переменной x вторая независимая переменная должна рассматриваться как величина постоянная. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y$, так как производная по x от $4y^2$ равна нулю, как производная от постоянной величины.

При отыскании $\frac{\partial u}{\partial y}$ независимая переменная x рассматривается как величина постоянная, а потому $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + 8y$.

2) Функция u — функция трех независимых переменных: x, y и z. При определении частной производной по каждой из этих переменных две других следует считать величинами постоянными. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = 3\cos(3x + 5y - 4z)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 5\cos(3x + 5y - 4z)$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -4\cos(3x + 5y - 4z)$.

3) Заданная функция есть функция двух независимых переменных x и y. При дифференцировании по каждой из них вторая переменная должна рассматриваться как величина постоянная.

Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$, так как $\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}$, ибо производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя, разделенной на тот же знаменатель, а производная по y от дроби $\frac{x}{y}$ есть производная от дроби с постоянным числителем x и переменным знаменателем y. Как известно, в таком случае

$$\left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}.$$

Задача 37,12 (для самостоятельного решения). Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ функций:

$$1)\ z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x};\quad 2)\ z = x^n + y^n;\quad 3)\ z = \cos(ax + by).$$

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = ny^{n-1}$

(при дифференцировании по x производная от y^n равна нулю, так как y^n рассматривается как величина постоянная, а при дифференцировании по y производная от x^n равна нулю, так как x^n считается теперь величиной постоянной).

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = -a\sin(ax + by)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -b\sin(ax + by)$.

Задача 37,13 (для самостоятельного решения). Найти частные производные функций: 1) $u = ax + by + cz$; 2) $u = y\sin x + \sin y$; 3) $u = x^{\sin y}$ $(x > 0)$; 4) $u = z^{xy}$ $(z > 0)$; 5) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ. 1) $\frac{\partial u}{\partial x} = a$; $\frac{\partial u}{\partial y} = b$; $\frac{\partial u}{\partial z} = c$ (при дифференцировании по x две другие независимые переменные считаются постоянными, а потому производная по x от by и от cz, как производная от постоянных, равна нулю. Аналогично при дифференцировании по y независимые переменные x и z считаются постоянными, и поэтому производная по y от ax и cz равна нулю и т. д.)

2) $\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y$;

3) $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{\sin y} \cdot \cos y \cdot \ln x$

(здесь при дифференцировании по x заданную функцию следует рассматривать как степенную. Основание степени x — величина переменная, а показатель степени $\sin y$ — величина постоянная.

При дифференцировании по y величину x следует рассматривать как постоянную, а $\sin y$ — как величину переменную, а потому в этом случае функцию $x^{\sin y}$ следует рассматривать как показательную).

4) $\frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z$; $\frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy}\ln z$;

5) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Задача 37,14 (для самостоятельного решения). Найти частные производные функций: 1) $z = e^x \cos y - e^y \sin x$;

$$2)\ z = \sqrt{x^2 + y^2};\ 3)\ z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y};$$

$$4)\ z = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}};\qquad 5)\ u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y - e^y \cos x;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y - e^y \sin x;$

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2};$

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2};$

5) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}};\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}};$

$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}};$

Задача 37,15 (для самостоятельного решения). Известно, что сторона треугольника a определяется через две другие стороны и угол α между ними по формуле

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

Найти $\frac{\partial a}{\partial b}$, $\frac{\partial a}{\partial c}$ и $\frac{\partial a}{\partial \alpha}$.

Ответ. $\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{b - c\cos\alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}} = \frac{b - c\cos\alpha}{a};$

$$\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{c - b\cos\alpha}{a};\quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{bc\sin\alpha}{a}.$$

Задача 37,16 (для самостоятельного решения). Сила тока согласно закону Ома вычисляется по формуле $I = \frac{V}{R}$. Найти $\frac{\partial I}{\partial V}$ и $\frac{\partial I}{\partial R}$.

Ответ. $\frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{V}{R^2};\quad \frac{\partial I}{\partial V} = \frac{I}{R}.$

Задача 37,17 (для самостоятельного решения). Формула Клапейрона $pV = RT$, где R — величина постоянная, связывает для идеального газа его объем V, давление p и абсолютную температуру T.

Считая каждую из этих величин V, p и T функцией, а две другие — независимыми переменными, определить частные производные этих функций.

Решение. 1) $V=\frac{RT}{p}$; $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$; $\frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2}$; 2) $p=\frac{RT}{V}$; $\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V}$; $\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$; 3) $T=\frac{pV}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{R}$.

Докажите, что $\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=-1$.

Задача 37,18. Доказать, что функция $z=y^2\sin(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\underbrace{\cos(x^2-y^2)}_{\substack{\text{производная функции}\\ \sin(x^2-y^2)}}\cdot\underbrace{2x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{по } x \text{ функции}\\ x^2-y^2,\ \text{стоящей}\\ \text{под знаком синуса}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\underbrace{2y}_{\substack{\text{производная}\\ \text{по } y \text{ первого}\\ \text{сомножителя}}}\cdot\sin(x^2-y^2)+y^2\cdot\underbrace{\cos(x^2-y^2)}_{\substack{\text{производная функ-}\\ \text{ции } \sin(x^2-y^2)}}\cdot\underbrace{(-2y)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{по } y \text{ функции}\\ x^2-y^2}}$$

Умножая обе части первого равенства на y^2, а второго — на xy и почленно складывая, получим

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xy^2\sin(x^2-y^2).$$

Но так как $z=y^2\sin(x^2-y^2)$, то правая часть последнего равенства есть $2xz$, и тем самым требуемое доказано.

Задача 37,19 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Задача 37,20 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, то имеет место равенство

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Полный дифференциал и полное приращение функции. Связь между полным дифференциалом функции и ее полным приращением

Полное приращение функции $u=f(x,\ y,\ z)$ определяется по формуле

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(x,\ y,\ z). \qquad (37,2)$$

где Δx, Δy, Δz — приращения независимых переменных.

По определению приращения независимых переменных Δx, Δy, Δz и их дифференциалы dx, dy и dz — числа, между собою равные:

$$\Delta x=dx;\ \Delta y=dy;\ \Delta z=dz.$$

Полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ обозначается символом du и вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial y}{\partial z} dz \tag{37,3}$$

и аналогично, если $z = f(x, y)$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{37,4}$$

Полный дифференциал du функции есть главная часть ее приращения Δu, линейная относительно Δx, Δy и Δz, т. е. $\Delta u \approx du$, причем при бесконечно малых Δx, Δy и Δz разность $\Delta u - du$ — величина бесконечно малая высшего порядка малости, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Приближенное равенство $\Delta u \approx du$ на основании формулы (37,3) может быть записано так:

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \tag{37,5}$$

или более подробно:

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \tag{37,6}$$

Это приближенное равенство тем более точно, чем меньше величины dx, dy, dz.

Вычисление Δu приращения функции представляет собой задачу, значительно более сложную, чем вычисление ее дифференциала du, а потому в практических вычислениях с достаточной точностью при малых приращениях независимых переменных заменяют вычисление приращения функции вычислением ее дифференциала.

Задачи 37,21—37,22 являются упражнениями в вычислении полного приращения и полного дифференциала функции, а также в применении формулы (37,6) для приближенных вычислений.

Задача 37,21. Найти полное приращение Δu и полный дифференциал du функции $u(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 + 1$.

Решение. $\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 + 1 - (3x^2 + xy - y^2 + 1)$;

$$\Delta u = \underline{3x^2} + 6x\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 + xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y - y^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2 + 1 - \underline{3x^2} - xy + y^2 - 1;$$

$$\Delta u = \underbrace{(6x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y}_{du} + \underbrace{3(\Delta x^2) + \Delta x\,\Delta y - (\Delta y)^2}_{\substack{\text{при бесконечно малых } \Delta x \text{ и } \Delta y \text{—} \\ \text{величина бесконечно малая} \\ \text{высшего порядка по} \\ \text{сравнению с} \\ \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}} \tag{37,7}$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + y$, а $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$, то на основании формулы (37,4)

$$du = (6x + y)\,dx + (x - 2y)\,dy; \quad (\Delta x = dx;\ \Delta y = dy). \qquad (37{,}8)$$

Разность

$$\Delta u - du = 3(\Delta x)^2 + \Delta x \cdot \Delta y - (\Delta y)^2 *$$

представляет собой погрешность, которая возникает от замены приращения Δu функции ее дифференциалом du. В связи с этим примером решим такой числовой пример; найти для заданной функции ее полное приращение и полный дифференциал в точке (1,2), если: 1) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$; 2) $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$; 3) $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$.

1) Подставляя в (37,7) значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$, находим, что

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,1 + (1 - 2 \cdot 2)\,2 + 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 - 2^2 = \\ = 8 - 6 + 3 + 2 - 4 = 3;$$

подставляя эти же значения в (37,8), получаем, что

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,1 + (1 - 2 \cdot 2)\,2 = 8 - 6 = 2,$$

а разность

$$\Delta u - du = 3 - 2 = 1. \qquad (37{,}9)$$

2) Подставим теперь в (37,7) и (37,8) значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$, получим:

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}2 + 3(0{,}1)^2 + \\ + 0{,}1 \cdot 0{,}2 - (0{,}2)^2 = 0{,}8 - 0{,}6 + 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}04; \\ \Delta u = 0{,}21,$$

а

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}2 = 0{,}8 - 0{,}6 = 0{,}20; \\ \Delta u - du = 0{,}21 - 0{,}20 = 0{,}01. \qquad (37{,}10)$$

3) Подставим теперь в (37,7) и (37,8) те же значения x и y, но возьмем $\Delta x = 0{,}01$, а $\Delta y = 0{,}02$;

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}02 + 3(0{,}01)^2 + \\ + 0{,}01 \cdot 0{,}02 - (0{,}02)^2 = 0{,}08 - 0{,}06 + 0{,}0003 + 0{,}0002 - \\ - 0{,}0004 = 0{,}0201;$$

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}02 = 0{,}08 - 0{,}06 = 0{,}02,$$

а

$$\Delta u - du = 0{,}0201 - 0{,}02 = 0{,}0001. \qquad (37{,}11)$$

* В выражениях $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ скобки могут быть опущены, так как Δx, Δy рассматриваются как единый символ.

Сравнивая разности (37,10), (37,11) и (37,12) между полным приращением функции и ее полным дифференциалом, мы усматриваем, что они уменьшаются вместе с уменьшением приращений Δx и Δy независимых переменных.

Этот пример иллюстрирует высказанное выше утверждение, что равенство (37,5) тем более точно, чем меньше приращения независимых переменных.

Задача 37,22 (для самостоятельного решения). Найти полное приращение функции $u = x^3y^2$ и ее полный дифференциал в точке (2,1) при: 1) $\Delta x = -0,1$; $\Delta y = -0,1$; 2) $\Delta x = -0,01$; $\Delta y = -0,01$. В обоих случаях сравнивать разности $\Delta u - du$.

Ответ. 1) $\Delta u = -2,4442$; $du = -2,8$; $\Delta u - du = 0,3558$; 2) $\Delta u = -0,2762$; $du = -0,2800$; $\Delta u - du = 0,0038$.

Задача 37,23. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Решение. Полный дифференциал функции находится по формуле (37,4). Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Поэтому

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx + \frac{y}{(x + \sqrt{y^2 + x^2})\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy.$$

Задача 37,24 (для самостоятельного решения). Найти полный дифференциал функций: 1) $z = \frac{ay - bx}{by - ax}$; 2) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 3) $z = x\sin y + y\sin x$; 4) $u = x + ye^{\frac{x}{y}}$.

Ответ. 1) $dz = \frac{(b^2 - a^2)(x\,dy - y\,dx)}{(by - ax)^2}$; 2) $dz = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$; 3) $dz = (\sin y + y\cos x)\,dx + (x\cos y + \sin x)\,dy$; 4) $du = (1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\,dy$.

Задача 37,25 (для самостоятельного решения). Найти полный дифференциал функций: 1) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 2) $u = \frac{\operatorname{arctg} y}{1 + x^2}$; 3) $u = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$; 4) $u = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 5) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$.

Ответ. 1) $du = -\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$;

2) $du = \dfrac{(1+x^2)\,dy - 2x(1+y^2)\operatorname{arctg} y\,dx}{(1+x^2)^2(1+y^2)}$;

3) $du = \dfrac{2}{y\sin\dfrac{2x}{y}}\,dx - \dfrac{2x}{y^2\sin\dfrac{2x}{y}}\,dy$;

4) $du = \dfrac{x\sqrt{2}\,(y\,dx - x\,dy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$;

5) $du = \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\,dx - \left(e^{\frac{x}{y}}\cdot\dfrac{x}{y^2} + e^{\frac{z}{y}}\cdot\dfrac{z}{y^2}\right)dy + e^{\frac{z}{y}}\cdot\dfrac{1}{y}\,dz.$

Задача 37,26. Для вычисления объема цилиндра были вычислены его высота и диаметр основания. При этом оказалось, что высота $h = 60$ *см*, а диаметр $D = 50$ *см*, и границы ошибок, допущенных при измерении, $\Delta h = \Delta D = 0{,}1$ *см*. Найти границу ошибки ΔV в объеме цилиндра, вычисленном по этим данным.

Решение. Объем цилиндра $V = \dfrac{\pi D^2 h}{4}$.

Считая, что $\pi \approx 3{,}14$ и подставляя сюда числовые данные задачи, получим, что $V = 117{,}75$ *дм*^{3}. Чтобы вычислить границу ошибки в полученном числе, примем, что $\Delta V \approx dV$.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial D}\,dD + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi D h}{2}, \text{ а } \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi D^2}{4},$$

получаем, что

$$dV = \frac{\pi D h}{2}\,dD + \frac{\pi D^2}{4}\,dh.$$

Оценим абсолютную величину dV:

$$|dV| = \left|\frac{\pi D h}{2}\,dD + \frac{\pi D^2}{4}\,dh\right| \leqslant \frac{\pi D h}{2}|\Delta D| + \frac{\pi D^2}{4}|\Delta h|.$$

Подставляя числовые данные из условия задачи, получим, что граница ошибки равняется $0{,}7$ *дм*^{3}. Таким образом, $\Delta V \approx$ $\approx 0{,}7$ *дм*^{3}.

Следует иметь в виду, что мы приняли $\pi = 3{,}14$, что также внесло ошибку в результат вычислений. Однако ошибка, возникшая из-за этого, значительно меньше той, которая возникла от неточности в измерении D и h.

Задача 37,27. Для вычисления удельного веса тела его взвешивают и измеряют его объем. Оказывается, что вес $P = 326$ *г*, а объем $V = 126$ *см*^{3}; при этом границы ошибок величин P и V равны $\Delta P = 0{,}5$ *г*, $\Delta V = 1$ *см*^{3}.

Определить границу ошибки ΔD в удельном весе D, вычисленном по этим данным.

Решение. Удельный вес $D = \frac{P}{V} = \frac{326}{126} = 2{,}59\ \frac{г}{см^3}$. Теперь положим, что $\Delta D \approx dD$;

$$dD = \frac{\partial D}{\partial P} dP + \frac{\partial D}{\partial V} dV = \frac{1}{V} dP - \frac{P}{V^2} dV = \frac{V\,dP - P\,dV}{V^2};$$

$$|dD| = \left|\frac{V\,\Delta P - P\,\Delta V}{V^2}\right| = \frac{|V\,\Delta P - P\,\Delta V|}{V^2} \leqslant \frac{V\,|\Delta P| + P\,|\Delta V|}{V^2}.$$

Подставляя сюда числовые данные задачи, найдем, что граница ошибки $AD \approx 0{,}024\ \frac{г}{см^3}$.

Задача 37,28 (для самостоятельного решения). Даны две точки $P(x, y)$ и $P_1(x_1, y_1)$. Насколько изменится расстояние S между ними, если координаты точек получат приращения dx, dy и dx_1, dy_1, и сколько процентов p от длины S составит это изменение.

Ответ. $dS = (dx - dx_1)\cos\alpha + (dy - dy_1)\sin\alpha_1$, где α — угол, образуемый с положительным направлением оси Ox прямой, проведенной из P_1 по направлению к P

$$\left(\frac{x - x_1}{S} = \cos\alpha;\quad \frac{y - y_1}{S} = \sin\alpha\right).$$

Количество процентов $p = \frac{dS}{S} \cdot 100$.

Задача 37,29 (для самостоятельного решения). Решить предыдущую задачу с такими числовыми данными:

$$S = 4200\ м; \quad \alpha = 34^\circ 17' 25''; \quad dx = -1\ м;$$
$$dy = 3\ м; \quad dx_1 = 4\ м; \quad dy_1 = 2\ м.$$

Ответ. Расстояние S уменьшится на 3,65 $м$, или на 0,087%.

Задача 37,30. Даны две точки $P(x, y)$ и $P_1(x_1, y_1)$. Расстояние между ними равно S, а угол α определяется, как и в задаче 37,29. Точка P_1 неподвижна. Насколько изменится угол α, если координаты точки P станут равными $x + dx$, $y + dy$.

Указание. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}$; $\ln\operatorname{tg}\alpha = \ln(y - y_1) - \ln(x - x_1)$.

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha} d\alpha = \frac{dy}{y - y_1} - \frac{dx}{x - x_1}$$

(x_1 и y_1 по условию — постоянные величины). Так как $y - y_1 = S\sin\alpha$, а $x - x_1 = S\cos\alpha$, то отсюда получается ответ

$$d\alpha = \frac{\cos\alpha}{S} \cdot dy - \frac{\sin\alpha}{S} dx.$$

Задача 38,31 (для самостоятельного решения). Решить предыдущую задачу при таких числовых данных: $S = 3500$ *м*; $\alpha = 52^\circ 13' 24''$; $dx = 1$ *м*; $dy = 2$ *м*. Выразить $d\alpha$ в секундах.

Указание. В формуле, полученной в ответе предыдущей задачи, $d\alpha$ измеряется в радианах. Чтобы получить $d\alpha$ в секундах, следует полученное число умножить на 206 264,8, т. е. на число секунд в одном радиане.

Ответ. 25″,6.

Задача 37,32. Вычислить приближенно величину $(1{,}03)^{3{,}001}$.

Решение. Мы знаем, что $1^3 = 1$. Нам следует теперь произвести вычисления для того случая, когда основание степени 1 получит приращение 0,03, а показатель степени 3 — приращение 0,001. Будем исходить из функции $f(x, y) = x^y$ и воспользуемся формулой (37,6).

Учитывая, что в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$, получим $(x + \Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \,\Delta y$.

У нас $x = 1$; $y = 3$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = 0{,}001$, а потому $(1{,}03)^{3{,}001} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}03 + 1^3 \ln 1 \cdot 0{,}001 = 1 + 0{,}09 = 1{,}09$, т. к. $\ln 1 = 0$.

Задача 37,33 (для самостоятельного решения). Вычислить приближенно: 1) $(0{,}97)^{2{,}02}$; 2) $(1{,}003)^{2{,}07}$; 3) $\sqrt{(6{,}03)^2 + (8{,}04)^2}$.

Указание. В последнем примере следует исходить из функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ. 1) 0,94; 2) 1,006; 3) 10,05.

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференцирование сложной функции от одной и нескольких независимых переменных.

1. Дифференцирование сложной функции от одной независимой переменной

Формула полной производной. *Если $z = f(u, v)$, а u и v являются функциями независимой переменной x: $u = \varphi(x)$ $v = \psi(x)$, то и z является функцией x.*

В таком случае говорят, что z есть сложная функция аргумента x. Производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (38,1)$$

Вычисленная по этой формуле производная называется полной производной от функции z по независимой переменной x.

Аналогично, если $z = f(u, v, w)$, а $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \omega(x)$, *то полная производная от функции* z *по независимой переменной* x *вычисляется по формуле*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \tag{38,2}$$

Частный случай. *Если* $z = f(x, u, v)$ а u и v, *в свою очередь, также являются функциями* x, *т. е.* $u = \varphi(x)$; $v = \psi(x)$, *то*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \tag{38,3}$$

Читатель должен обратить внимание на то, что в правой части формулы (38,3) стоит частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, *вычисленная в предположении, что* u и v — *величины постоянные. Эту производную следует отличать от полной производной* $\frac{dz}{dx}$, *которая вычисляется в предположении, что* u и v *являются функциями* x. *Различие в этих двух производных объясняет также и различие в их обозначениях.*

Задача 38,1. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, а $u = 2x^3$; $v = 3x^2$; $w = x^4$.

Решение. Здесь следует воспользоваться формулой (38,2). Определим производные, входящие в эту формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3\cos(3u + 2v - 4w); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2\cos(3u + 2v - 4w);$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = -4\cos(3u + 2v - 4w); \quad \frac{du}{dx} = 6x^2; \quad \frac{dv}{dx} = 6x; \quad \frac{dw}{dx} = 4x^3.$$

Подставляя эти величины в (38,2), получим

$$\frac{dz}{dx} = [3\cos(3u + 2v - 4w)]\,6x^2 + [2\cos(3u + 2v - 4w)]\,6x - 4\cos(3u + 2v - 4w)\,4x^3.$$

Вынося в правой части за скобку $\cos(3u + 2v - 4w)$ и заменяя под знаком косинуса u, v и w их выражениями через x, получим окончательно

$$\frac{dz}{dx} = (18x^2 + 12x - 16x^3)\cos(6x^3 + 6x^2 - 4x^4).$$

Задача 38,2 (для самостоятельного решения). Найти полную производную $\frac{du}{dt}$ функции $u = \sin\frac{x}{y}$, где $x = e^t$; $y = t^2$.

Указание. Формулу (38,1) следует переписать в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Ответ. $\frac{du}{dt} = (t - 2)\cdot\frac{e^t}{t^3}\cdot\cos\frac{e^t}{t^2}$.

Задача 38,3 (для самостоятельного решения). 1) $u = z^2 + y^2 + zy$; $z = \sin x$; $y = e^x$. Определить полную производную $\frac{du}{dx}$.

Указание. На основании формулы (38,1)

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

2) $u = v^2 + vy$; $v = \ln x$; $y = e^x$.

Найти полную производную $\frac{du}{dx}$.

Указание. Применить формулу (38,1), переписав ее в виде

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

3) Найти полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(u, v)$ $u = ax^2 + bx + c$; $v = ax + b$.

Ответ. 1) $\frac{du}{dx} = 3e^{3x} + e^x(\sin x + \cos x) + \sin 2x$; 2) $\frac{du}{dx} = \frac{2v + y}{x} + ve^x$; $\frac{du}{dx} = \frac{2\ln x + e^x}{x} + e^x \ln x$; 3) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}(2ax + b) + \frac{\partial z}{\partial v} a$.

Задача 38,4 Определить полную производную функции

$$u = e^{ax}(y - z); \quad y = a \sin x; \quad z = \cos x.$$

Решение. Здесь следует применить формулу (38,3), так как функция u зависит от x как непосредственно, так и через посредство функций y и z. Определим производные, входящие в правую часть этой формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}(y - z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{ax}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -e^{ax}; \quad \frac{dy}{dx} = a\cos x; \quad \frac{dz}{dx} = -\sin x;$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dx} = ae^{ax}(y - z) + e^{ax}a\cos x - e^{ax}(-\sin x) =$$
$$= e^{ax}(a^2 + 1)\sin x.$$

Задача 38,5 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(x, u, v)$, $u = \frac{1}{x}$; $v = \ln x$.

Указание. Применить формулу (38,3).

Ответ. $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{x}$.

Задача 38,6 (для самостоятельного решения). $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $y = \sin^2 x$. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Указание. $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$.

Ответ. $\frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin 2x$.

Задача 38,7 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если 1) $z=u^v$, где $u=\sin x$; $v=\operatorname{tg} x$; 2) $z=uvw$, где $u=\sin x$; $v=\ln x$; $w=\operatorname{tg} x$.

Ответ. 1) $\frac{dz}{dx}=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1+\sec^2 x\ln\sin x)$;

2) $\frac{dz}{dx}=\sin x\ln x+\frac{\sin^2 x}{x\cos x}+\frac{\sin x\ln x}{\cos^2 x}$.

Задача 38,8 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=x^y$, где $y=\ln x$.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{dz}{dx}=x^y\left(\frac{y}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$.

Задача 38,9 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=e^{\frac{x}{y}}$, где $y=\sin^3 x$.

Ответ. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{3x}{y}\sin^2 x\cos x\right)$.

Задача 38,10 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если 1) $z=\ln(x^2+y^2)$, где $y=e^{x^2}$; 2) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, где $y=\cos x$.

Ответ. 1) $\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{x^2+y^2}(1+2ye^{x^2})$, а вместо y можно подставить e^{x^2}; 2) $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\sin x$.

Задача 38,11. Движение точки задано уравнениями

$$x=3t^2;\quad y=2t^4;\quad z=4t^6.$$

С какой скоростью возрастает ее расстояние от начала координат?

Решение. Расстояние r точки от начала координат определяется формулой $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где x, y и z — координаты точки.

Для решения задачи следует найти $\frac{dr}{dt}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dz}{dt}$;

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{dx}{dt}=6t;\quad \frac{dy}{dt}=8t^3;\quad \frac{dz}{dt}=24t^5.$$

Ответ. $\frac{dr}{dt}=\frac{18t+16t^5+96t^9}{\sqrt{9+4t^4+16t^8}}$.

2. Дифференцирование сложной функции от нескольких независимых переменных

Если $z = f(u, v)$ — функция от двух переменных u и v, а каждая из них есть в свою очередь функция двух независимых переменных x и y, то и z есть функция независимых переменных x и y, а ее частные производные по этим переменным вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (38,4)$$

Частный случай. Если функция z зависит от x и y не только через посредство u и v, но и явно, т. е. $z = f(x, y, u, v)$, то имеют место формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (38,5)$$

причем следует иметь в виду, что производные $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ от функции z вычисляются в предположении, что u и v — величины постоянные.

Задача 38,12. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(u^2 + v^2)$, а

$$u = x\cos y; \quad v = y\sin x.$$

Решение. Следует воспользоваться формулами (38,4). Определим частные производные, входящие в эти формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u^2+v^2}\cdot 2u; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v^2}\cdot 2v; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x.$$

Подстановка этих производных в (38,4) дает

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v^2}\cos y + \frac{2v}{u^2+v^2}y\cos x = \frac{2}{u^2+v^2}(u\cos y + vy\cos x) =$$

$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}(x\cos^2 y + y^2\sin x\cos x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2u}{u^2+v^2}x\sin y + \frac{2v}{u^2+v^2}\sin x = \frac{2}{u^2+v^2}(v\sin x - ux\sin y) =$$

$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}(y\sin^2 x - x^2\sin y\cdot\cos y).$$

Задача 38,13. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, а $u = x\sin y$, $v = x\cos y$.

Решение. Здесь опять-таки следует применить формулы (38,4). Определяем частные производные, входящие в эти формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\frac{1}{v} = \frac{v}{u^2+v^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{u}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x\sin y.$$

Пэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v}{u^2+v^2}\sin y - \frac{u}{u^2+v^2}\cos y = \frac{1}{u^2+v^2}(v\sin y - u\cos y) =$$

$$= \frac{1}{x^2\sin^2 y + x^2\cos^2 y}(x\sin y\cos y - x\sin y\cos y) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Задача 38,14 (для самостоятельного решения). Определить $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial u}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial w}$, если $u = \ln\cos\frac{xy}{\sqrt{z}}$, где $x = tvw$; $y = e^{\frac{t}{v}}$; $z = \sqrt{\frac{tv}{w}}$.

Указание. Формулы (38,4) в данном случае для определения, например, $\frac{\partial u}{\partial t}$ запишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

и аналогично для $\frac{\partial u}{\partial v}$ и $\frac{\partial u}{\partial w}$.

Ответ. $\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{tg}\frac{xy}{\sqrt{z}}\left(\frac{yvw}{\sqrt{z}} + \frac{xe^{\frac{t}{v}}}{v\sqrt{z}} - \frac{xyv}{4z\sqrt{z}\sqrt{tvw}}\right)$.

Задача 38,15. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$ а $u = x + y$; $v = x - y$.

Решение. Применяя формулы (38,4), получаем, учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 1 = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}(-1) = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Задача 38,16 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, а $u = x^2 + y^2$; $v = xy$.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}$.

Задача 38,17. Доказать, что функция $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Решение. Обозначим $x^2 - y^2 = u$. Тогда заданная функция

$$z = y\varphi(u). \tag{38,6}$$

Легко усмотреть, что z зависит от x только через посредство u, а от y — как непосредственно, так и через посредство u. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = y\varphi'(u)\,2x = 2xy\varphi'(u).$$

Производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ должна быть определена по второй из формул (38,5). Входящая в эту формулу производная $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \varphi(u)$, а потому, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(u) + y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(u) - 2y^2\varphi'(u).$$

Подставляя найденные выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в левую часть заданного уравнения, получим

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}2xy\varphi'(u) + \frac{1}{y}[\varphi(u) - 2y^2\varphi'(u)] =$$

$$= 2y\varphi'(u) + \frac{1}{y}\varphi(u) - 2y\varphi'(u) = \frac{1}{y}\varphi(u) = \frac{1}{y}\frac{z}{y} = \frac{z}{y^2},$$

так как на основании (38,6) $\varphi(u) = \frac{z}{y}$.

Задача 38,18. Доказать, что функция $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Решение. Обозначим $\frac{y}{x} = u$. Тогда заданная функция перепишется в виде

$$z = xy + x\varphi(u) \tag{38,7}$$

и очевидно, что z зависит от x и y как непосредственно, так и через посредство u. Поэтому частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следует отыскивать по формулам (38,5). Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y + \varphi(u), \text{ а } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi(u) + x\varphi'(u)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\varphi'(u);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\varphi'(u)\frac{1}{x} = x + \varphi'(u).$$

Подставляя значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в левую часть заданного уравнения, получим

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left[y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\varphi'(u)\right] + y[x + \varphi'(u)] = xy + x\varphi(u) -$$

$$- y\varphi'(u) + xy + y\varphi'(u) = xy + \underbrace{x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + xy}_{z} = xy + z.$$

Задача 38,19 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = x + y + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

Указание. Обозначить $\frac{x}{y} = u$ и воспользоваться формулами (38,5). Учесть, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$.

Задача 38,20 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

Указание. Обозначить $x - y = u$ и воспользоваться формулами (38,5), в которых $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = y$.

Задача 38,21 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

Указание. Положить $ye^{\frac{x^2}{2y^2}} = u$, воспользоваться формулами (38,5) и учесть, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = e^y$.

Задача 38,22 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Производные и дифференциалы высших порядков функций нескольких независимых переменных.

1. Производные высших порядков

Если задана функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ *и вычислены ее частные производные* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *то они, вообще говоря, также являются функциями независимых переменных* x *и* y, *а потому от каждой из них можно вычислить производные как по* x, *так и по* y.

Если вычислить частную производную по x *от* $\frac{\partial z}{\partial x}$, *то получим частную производную второго порядка от функции* z, *взятую два раза по* x. *Эта производная обозначается символом* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *и, таким образом,* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Если вычислить частную производную по y *от* $\frac{\partial z}{\partial x}$, *то получим частную производную второго порядка функции* z, *взятую сначала по* x, *а потом по* y. *Эта производная обозначается символом* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *и, таким образом,* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Подобно этому частная производная по x *от* $\frac{\partial y}{\partial y}$ *даст вторую частную производную функции* z, *вычисленную сначала по* y, *а потом по* x. *Она обозначается символом* $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

а частная производная по y *от* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *есть вторая частная производная от функции* z, *взятая два раза по* y. *Она обозначается символом* $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Также вводятся частные производные порядка более высокого, чем второй.

Например, символ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ *обозначает производную третьего порядка функции* $z = f(x, y)$, *вычисленную три раза по* x.

Символ же $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ *обозначает, что от функции* z *взята производная третьего порядка, причем она вычислялась два раза по* x *и от полученной производной* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *вычислена один раз производная по* y *и т. д.*

Задача 39,1. Найти частные производные третьего порядка функции $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3;$ (39,1)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3. \tag{39,2}$$

Если взять производную по x от $\frac{\partial z}{\partial x}$ (выражение (39,1)), то получим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 18xy - 8y^2$; если то же выражение (39,1) продифференцировать по y, то получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2 - 16xy + 15y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -8x^2 + 30xy - 12y^2.$$

Продифференцируем теперь по x производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ (выражение (39,2) и получим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 9x^2 - 16xy + 15y^2$$

Читатель должен усмотреть разницу в обозначениях $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$ и $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)$. Символ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ означает, что от функции z сначала была взята производная по x, а результат был продифференцирован по y. Символ же $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ показывает, что от функции z была сначала вычислена производная по y, а полученный результат продифференцирован по x. Таким образом, производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}$ отличаются порядком, в котором велось дифференцирование.

Если продифференцировать по y производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то получим третью производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 18x - 16y$.

Продифференцировав же по x производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, получим

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} = 18x - 16y.$$

Если вычислить производную по y от $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, получим

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x + 30y.$$

Производная по x от $\frac{\partial^2 z^3}{\partial y \partial x}$ даст $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2} = 18x - 16y$.

Производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = -16x + 30y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -16x + 30y,$$

наконец, если взять производную по x от $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то получим $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x + 18y$, а если взять производную по y от $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, то получим $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 30x - 24y$.

Здесь опять-таки следует подметить, что производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},$$

а также производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$$

отличаются только порядком дифференцирования.

Оказалось, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \tag{39,3}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x y y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \tag{39,4}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}. \tag{39,5}$$

Это совпадение не является случайным. Имеет место такая важная теорема: ***если частные производные непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования.***

Задача 39,2 (для самостоятельного решения). Найти частные производные второго порядка функций:

1) $z = xy$; 2) $z = e^{ax+by}$; 3) $z = \ln(x^2 + y^2)$; 4) $z = e^{xy}$.

Ответ. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 e^{ax+by}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = abe^{ax+by}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = b^2 e^{ax+by}$;

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = -4\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$;

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy}(xy + 1)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$.

Задача 39,3. Определить производную $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ функции $u = \sin(xyz)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz\cos(xyz); \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \cos(xyz) - xyz\sin(xyz) - 2xyz\sin(xyz) - x^2y^2z^2\cos(xyz);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 - x^2y^2z^2)\cos xyz - 3xyz\sin(xyz).$$

Задача 39,4. Показать, что функции: 1) $z = \ln r$, где $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$ и 2) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Решение. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}$. Но так как

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} = \frac{x-x_1}{r},$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x - x_1)\frac{1}{r^2}.$$

Теперь вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, рассматривая правую часть последнего равенства как произведение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2r}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}(x - x_1).$$

Подставляя сюда найденное выше значение $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_1}{r}$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(x-x_1)^2}{r^4}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(y-y_1)^2}{r^4}.$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$ в левую часть уравнения Лапласа и учитывая, что если

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2},$$

то $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$, получим

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2(x-x_1)^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2(y-y_2)^2}{r^4} =$$

$$= \frac{2}{r^2} - \frac{2[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]}{r^4} = \frac{2}{r^2} - \frac{2r^2}{r^4} = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} = 0,$$

и тем самым доказано требуемое.

2) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{(x^2+y^2)^2}2x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^2}2y.$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в левую часть уравнения Лапласа, получим

$$\frac{y}{(x^2+y^2)^2}2x-\frac{x}{(x^2+y^2)^2}2y=0,$$

и требуемое доказано.

Задача 39,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $\varphi=\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Задача 39,6 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции 1) $v=r\cos\theta$ и 2) $v=\frac{\cos\theta}{r^2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа в сферических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0.$$

Задача 39,7. Доказать, что если функция $u=u(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

то и функция

$$v=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

также удовлетворяет этому уравнению.

Указание. Подставить в заданное уравнение вместо u функцию v и доказать, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right);\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\cdot$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$
$$+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

так как по условию

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Поэтому $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$, что и требовалось.

Задача 39,8. Известно, что $z=f(u, v)$, а переменные u и v являются функциями независимых переменных x и y.

$$u=\varphi(x, y);\quad v=\psi(x, y).$$

Определить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение. На основании формулы (38.4)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Учитывая, что производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ являются, вообще говоря, функциями u и v, имеем, опять-таки на основании формул (38,4),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим окончательно, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Этим же путем найдем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Задача 39,9 (для самостоятельного решения). Вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Функции $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$; $v = \psi(x, y)$.

Указание. Воспользоваться методом, с помощью которого была найдена производная $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ в предыдущей задаче, и учесть, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Ответ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Замечание. Формулы, полученные в последних двух задачах, не должны запоминаться. Читатель должен усвоить метод, с помощью которого эти формулы были получены.

На применение этого метода предлагается задача 39,10.

Задача 39,10 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = f(u, v)$; $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

Указание.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}2x + \frac{\partial z}{\partial v}y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}2x + \frac{\partial z}{\partial v}y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}2x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}y\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)2x + \frac{\partial z}{\partial u}2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)y = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\cdot 2x +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2 + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]y = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)2x + 2\frac{\partial z}{\partial u} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)y.$$

Подставляя сюда значения частных производных функций u и v по x, получим окончательно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u}$$

$\left(\text{учтено, что } \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\right)$.

Ответ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Задача 39,11 (для самостоятельного решения). Определить частные производные второго порядка функции $z=\varphi(u, v)$, где $u=x+y$; $v=x-y$.

Ответ. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Задача 39,12 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции 1) $u=e^{kn^2t}\sin nx$ и 2) $u=e^{-kn^2t}\cdot\cos nx$ удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Задача 39,13. Показать что функция

$$z=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$$

удовлетворяет уравнению колебания струны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(функции φ и ψ — какие угодно дважды дифференцируемые функции).

Решение. Введем обозначения $x-at=u$; $x+at=v$. Тогда заданная функция перепишется так: $z=\varphi(u)+\psi(v)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Но так как функция φ не зависит от v, а функция ψ — от u, то $\frac{\partial \varphi}{\partial v}=0$ и $\frac{\partial \psi}{\partial u}=0$.

Если учесть, что $\frac{\partial u}{\partial x}=1$ и $\frac{\partial v}{\partial x}=1$, то $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial v}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2},$$

так как $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)=0$ и $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)=0$; $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$ $\Big($учтено, что $\frac{\partial \varphi}{\partial v}=0$ и $\frac{\partial \psi}{\partial u}=0\Big)$.

Учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial t}=-a$, а $\frac{\partial v}{\partial t}=a$, имеем $\frac{\partial z}{\partial t}=-a\frac{\partial \varphi}{\partial u}+a\frac{\partial \psi}{\partial v}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial \varphi}{\partial u}+a\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)=-a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)=$$
$$=-a\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+a^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right).$$

Умножая $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ на a^2, убеждаемся, что действительно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

что и требовалось.

Задача 39,14 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция

$$z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Указание. Положить $x + y = u$.

Задача 39,15 (для самостоятельного решения). Показать, что функция

$$z = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Указание. Ввести замену; $xy = u$; $\frac{y}{x} = v$.

2. Дифференциалы высших порядков

Аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ — независимые переменные.

Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка; он обозначается через d^2z. Таким образом $d^2z = d(dz)$.

Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{39,6}$$

Дифференциал третьего порядка функции $z = f(x, y)$ есть дифференциал ее дифференциала второго порядка; обозначается он символом d^3z, т. е. $d^3z = d(d^2z)$.

Дифференциал третьего порядка вычисляется по формуле

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \tag{39,7}$$

Если условиться над символами $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ производить все арифметические действия по тем же правилам, по которым они производятся над числами, а произведение

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n}u$$

заменять частной производной $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$, то формулы для вычисления d^2z и d^3z можно в символической записи переписать так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z, \qquad (39,8)$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z \qquad (39,9)$$

и вообще для дифференциала порядка n функции $z = f(x, y)$ имеет место символическая формула

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z. \qquad (39,10)$$

При вычислении по формуле (39,10) следует применить известную из алгебры формулу Ньютона для возведения бинома в целую и положительную степень.

Например, выражение $\frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 \cdot z$ следует заменить выражением $\frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2}dx^3\,dy^2$, а выражение $\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 \frac{\partial}{\partial y}dy \cdot z$ выражением $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy$ и т. д. ...

Вычисление дифференциалов любого порядка функции $z=f(x, y)$, где x и y — независимые переменные, по формулам, приведенным в этом параграфе, не может вызвать у читателя никаких затруднений, так как по существу все вычисления сводятся к определению частных производных высших порядков, которые читатель уже умеет находить.

Мы разъясним при решении задач другой способ нахождения дифференциалов высших порядков, который даст возможность определять их, минуя вычисление частных производных, а по известному выражению дифференциала мы сможем находить и частные производные.

Задача 39,16. Найти d^2z функции $z = x^2y^2$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся формулой (39,6), для чего определим все частные производные, входящие в нее:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2.$$

Подставляя вторые производные в (39,6), находим, что

$$d^2z = 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2.$$

Второй способ. Определим сначала дифференциал первого порядка заданной функции, опираясь на основные формулы:

$$dz = y^2d(x^2) + x^2d(y^2) = y^2 \cdot 2xdx + x^2 \cdot 2ydy = 2xy^2dx + 2x^2ydy =$$
$$= 2xy(ydx + xdy).$$

Для определения d^2z дифференцируем dz, но при этом следует иметь в виду, что так как x и y — независимые переменные, то их дифференциалы dx и dy — величины постоянные, которые при дифференцировании выносятся за знак дифференциала. Учитывая это, получим

$$\begin{aligned} d^2z = d(dz) = d\,[2xy\,(ydx + xdy)] = 2\,[d(xy)\,(ydx + xdy) + \\ + xy \cdot d\,(ydx + xdy)] = 2\,[(ydx + xdy)\,(ydx + xdy) + \\ + xy \cdot (dydx + dxdy)] = 2[(ydx + xdy)^2 + xy \cdot 2dxdy] = \\ = 2\,[(y^2dx^2 + 2xydxdy + x^2dy^2) + 2xydxdy] = \\ = 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2. \end{aligned} \qquad (39{,}11)$$

Теперь уже, зная дифференциал второго порядка, можно найти частные производные второго порядка. Легко усмотреть, что коэффициент при dx^2 равен $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, коэффициент при $dxdy$ есть $2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, а коэффициент при dy^2 есть $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Это следует из того, что при произвольных dx и dy равенство

$$Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

имеет место только при условии, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A; \quad 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C.$$

Таким образом, из (39,11) заключаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$$

и совпадает с ранее найденными значениями этих производных.

Сейчас подробно двумя способами будет решена еще одна задача.

Задача 39,17. Найти дифференциал третьего порядка d^3z функции $z = \cos(x + 2y^2)$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся формулой (39,7), для чего прежде всего определим частные производные третьего порядка, входящие в эту формулу.

Производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x + 2y^2); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4y\sin(x + 2y^2).$$

Производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(x + 2y^2); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4y\cos(x + 2y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4\sin(x + 2y^2) - 16y^2\cos(x + 2y^2). \qquad (39{,}12)$$

Производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \sin(x + 2y^2); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 4y \sin(x + 2y^2);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -4\cos(x + 2y^2) + 16y^2 \sin(x + 2y^2);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -16y\cos(x + 2y^2) - 32y\cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2) =$$
$$= -48y\cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2). \qquad (39,13)$$

Подставляя значения третьих частных производных в (39,7), получим, что

$$d^3 z = \sin(x + 2y^2)\,dx^3 + 3 \cdot 4y \sin(x + 2y^2)\,dx^2 dy +$$
$$+ 3[-4\cos(x + 2y^2) + 16y^2 \sin(x + 2y^2)]\,dx dy^2 +$$
$$+ [-48y\cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2)]dy^3.$$

Второй способ. Теперь мы вычислим третий дифференциал $d^3 z$ тремя последовательными дифференцированиями:

$$dz = -\sin(x + 2y^2)\,dx - 4y\sin(x + 2y^2)\,dy;$$
$$dz = -\sin(x + 2y^2) \cdot (dx + 3ydy).$$

Дифференцируя второй раз, следует помнить, что дифференциалы dx и dy независимых переменных должны рассматриваться как величины постоянные, а потому они должны выноситься за знак дифференциала

$$d^2 z = d(dz) = d[-\sin(x + 2y^2) \cdot (dx + 4ydy)] =$$
$$= d[-\sin(x + 2y^2)] \cdot (dx + 4ydy) + [-\sin(x + 2y^2)]\,d(dx + 4ydy) =$$
$$= [-\cos(x + 2y^2)\,dx - 4y\cos(x + 2y^2)dy] \cdot (dx + 4ydy) +$$
$$+ [-\sin(x + 2y^2)]\,4dydy = -\cos(x + 2y^2)\,dx^2 -$$
$$-4y\cos(x + 2y^2)\,dydx - 4y\cos(x + 2y^2)\,dxdy -$$
$$-16y^2\cos(x + 2y^2)\,dy^2 - 4\sin(x + 2y^2)\,dy^2 = -\cos(x + 2y^2)\,dx^2 -$$
$$-8y\cos(x + 2y^2)\,dxdy - [16y^2\cos(x + 2y^2) + 4\sin(x + 2y^2)]\,dy^2.$$

Читатель легко заметит, что коэффициенты при dx^2, $dxdy$ и dy^2 равны соответственно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, которые были найдены выше в выражениях (39,12).

Чтобы упростить определение дифференциала третьего порядка, выражение дифференциала второго порядка перепишем в виде

$$d^2 z = -\cos(x + 2y^2)(dx^2 + 8ydxdy + 16y^2 dy^2) - 4\sin(x + 2y^2)\,dy^2.$$

Тогда

$$d^3z = d(d^2z) = d[-\cos(x+2y^2)(dx^2+8y\,dx\,dy+16y^2dy^2]+$$
$$+d[-4\sin(x+2y^2)\,dy^2] = d[-\cos(x+2y^2)](dx^2+8y\,dx\,dy+$$
$$+16y^2dy^2)+[-\cos(x+2y^2)]\,d(dx^2+8y\,dx\,dy+16y^2dy^2)+$$
$$+d[-4\sin(x+2y^2)]\,dy^2 = [\sin(x+2y^2)\,dx+$$
$$+4y\sin(x+2y^2)\,dy](dx^2+8y\,dx\,dy+16y^2\,dy^2)+$$
$$+[-\cos(x+2y^2)](8dy\,dx\,dy+32y\,dy\,dy^2)+$$
$$+[-4\cos(x+2y^2)\,dx-16y\cos(x+2y^2)\,dy]\,dy^2 =$$
$$=\sin(x+2y^2)\,dx^3+4y\sin(x+2y^2)\,dx^2dy+8y\sin(x+2y^2)\,dx^2dy+$$
$$+32y^2\sin(x+2y^2)\,dx\,dy^2+16y^2\sin(x+2y^2)\,dx\,dy^2+$$
$$+64y^3\sin(x+2y^2)\,dy^3-8\cos(x+2y^2)\,dx\,dy^2-$$
$$-32y\cos(x+2y^2)\,dy^3-4\cos(x+2y^2)\,dx\,dy^2-$$
$$-16y\cos(x+2y^2)\,dy^3 = \sin(x+2y^2)\,dx^3+12y\sin(x+2y^2)\,dx^2dy+$$
$$+[48y^2\sin(x+2y^2)-12\cos(x+2y^2)]\,dx\,dy^2+$$
$$+[64y^3\sin(x+2y^2)-48y\cos(x+2y^2)]\,dy^3.$$

Теперь легко усмотреть, что коэффициенты при dx^3, dx^2dy, $dxdy^2$ и dy^3 равны соответственно: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, $3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, значения которых были найдены выше (выражения (39,13)).

Задача 39,18 (для самостоятельного решения). Найти двумя способами d^2z функции $z=x^3y^3$.

Ответ. $d^2z = 6xy^3dx^2+18x^2y^2dxdy+6x^3ydy^2$.

Задача 39,19 (для самостоятельного решения). Найти двумя способами дифференциал третьего порядка функции $z=\sin(2x+y)$ при $x=\frac{\pi}{2}$; $y=0$.

Ответ. $d^3z = 8dx^3+12dx^2dy+6dxdy^2+dy^3$.

Задача 39,20 (для самостоятельного решения). Найти дифференциал второго порядка функций:

1) $z=e^{x-y^2}+\cos x$; 2) $z=y\ln x$;

3) $z=xy$; 4) $z=e^{ax+by}$; 5) $y=e^{xy}$.

Ответ.

1) $d^2z=(e^{x-y^2}-\cos x)\,dx^2-4ye^{x-y^2}\,dxdy+2e^{x-y^2}(2y^2-1)\,dy^2$;

2) $d^2z=-\frac{y}{x^2}\,dx^2+\frac{2}{x}\,dxdy$;

3) $d^2z=2dxdy$; 4) $d^2z=e^{ax+by}(adx+bdy)^2$;

5) $d^2z=e^{xy}y^2dx^2+2e^{xy}(xy+1)\,dxdy+x^2e^{xy}dy^2$.

Задача 39,21 (для самостоятельного решения). Найти дифференциалы третьего порядка функций:

1) $z=x^4y-xy^4$;

2) $z=x\sin y+y\cos x$;

определить все частные производные третьего порядка.

Ответ.

1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24xy$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 12x^2$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -12y^2$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -24xy$;

2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y \sin x$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -\cos x$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\sin y$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -x \cos y$.

б) Аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ являются функциями одной или нескольких независимых переменных.

Задача 39,22. Вычислить дифференциал второго порядка функции $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

Решение. Здесь уже x и y — не независимые переменные, а функции независимых переменных u и v, т. е. заданная функция является сложной.

Если при вычислении дифференциала первого порядка функции $z = f(x, y)$ совершенно безразлично, будут ли аргументы независимыми переменными или функциями других независимых переменных (свойство инвариантности дифференциала первого порядка), то при вычислении дифференциалов высших порядков надо строго различать эти два случая.

Так как $z = f(x, y)$, то $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

При повторном дифференцировании мы теперь не можем уже, как это делалось раньше, считать дифференциалы dx и dy величинами постоянными, потому что x и y — не независимые переменные, а функции независимых переменных u и v. Поэтому

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d(dx) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d(dy);$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy;$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy;$$

$$d(dx) = d^2 x; \quad d(dy) = d^2 y.$$

Подставляя только что найденные величины в предыдущее равенство, получим, что

$$d^2 z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y.$$

Окончательно после приведения подобных членов получаем

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y,$$

или в другой записи (символической):

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y. \qquad (39,14)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (39,6) или (39,8) для вычисления второго дифференциала функции $z = f(x, y)$ в том случае, когда аргументы x и y являются независимыми переменными, мы видим, что в рассматриваемом случае появились два дополнительных слагаемых $\frac{\partial z}{\partial x} d^2x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} d^2y$.

Заметим что формула (39,6) является частным случаем формулы (39,14), так как если x и y — независимые переменные, то dx и dy — величины постоянные, а потому их дифференциалы $d^2x = 0$ и $d^2y = 0$, добавочные слагаемые становятся равными нулю и мы получаем из (39,14) формулу (39,6).

Формулу (39,6) вряд ли имеет смысл запоминать. Значительно важнее уяснить метод, с помощью которого она была получена.

Задача 39,23. Определить d^2z, если $z = x^y$, где $x = uv$; $y = u + v$.

Решение. Дифференциал первого порядка

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy;$$

$$d^2z = d(dz) = d(yx^{y-1}dx) + d(x^y \ln x\, dy) = d(yx^{y-1})\, dx + \\ + yx^{y-1} d(dx) + d(x^y \ln x)\, dy + x^y \cdot \ln x \cdot d(dy) = \\ = [dy \cdot x^{y-1} + y d(x^{y-1})]\, dx + yx^{y-1} d^2x + \\ + [d(x^y) \ln x + x^y d(\ln x)]\, dy + x^y \ln x \cdot d^2y.$$

Нам осталось вычислить дифференциалы $d(x^{y-1})$; $d(x^y)$ и $d(\ln x)$:

$$d(x^{y-1}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^{y-1})\, dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^{y-1})\, dy = \\ = (y-1)\, x^{y-2} dx + x^{y-1} \ln x dy;$$

$$d(x^y) = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy;$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx.$$

Подставляя эти величины в предыдущее равенство, имеем

$$d^2z = \{x^{y-1}\, dy + y\,[(y-1)\, x^{y-2}\, dx + x^{y-1} \ln x\, dy]\}\, dx + \\ + yx^{y-1}\, d^2x + \left[(yx^{y-1}\, dx + x^y \ln x\, dy) \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x}\, dx\right] dy + \\ + x^y \ln x \cdot d^2y = y\,(y-1)\, x^{y-2}\, dx^2 + 2\,(x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x)\, dx\, dy + \\ + x^y \ln^2 x \cdot dy^2 + yx^{y-1}\, d^2x + x^y \ln x \cdot d^2y. \qquad (39,14)$$

На основании данных задачи надо в последнее выражение подставить $x = uv$; $y = u + v$; $dx = udv + vdu$; $dx^2 = (udv + vdu)^2$; $dy = du + dv$; $dy^2 = (du + dv)^2$; $d^2x = du\, dv + dv\, du = 2\, du\, dv$; $d^2y = 0$, так как du и dv, как дифференциалы независимых переменных,— величины постоянные, а значит, их дифференциалы равны нулю.

Решение задачи можно, конечно, провести сразу по формуле (39,14), и тогда было бы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x.$$

Подставляя эти значения в (39,14), получим выражение d^2z, уже ранее найденное. В нем следует сделать замены, указанные выше.

Задача 39,24 (для самостоятельного решения). Найти дифференциал второго порядка функции $z = f(u, v)$, где $u = x^2 + y^2$; $v = xy$.

Указание. Здесь u и v — промежуточные переменные, а x и y — независимые переменные.

Формула (39,14) должна быть переписана в виде

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial z}{\partial u} d^2u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2v;$$

$$du = 2x\,dx + 2y\,dy; \; du^2 = 4(x^2\,dx^2 + 2xy\,dx\,dy + y^2\,dy^2);$$

$$d^2u = 2\,dx^2 + 2\,dy^2; \quad d^2v = 2\,dx\,dy.$$

Ответ.

$$d^2z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot 4x^2 + 4xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot y^2\right) dx^2 +$$

$$+ 2\left(4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} + 2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) dx\, dy +$$

$$+ \left(4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} + 2\frac{\partial z}{\partial v} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) dy^2.$$

Задача 39,25 (для самостоятельного решения). Использовать результат, полученный в предыдущей задаче, если $z = e^u \cos v$, а u и v имеют те же значения, что и в задаче (39,24).

СОРОКОВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Линии и поверхности уровня. Производная функции по заданному направлению. Градиент функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Физическим полем называется часть пространства, в которой происходит физическое явление.

1. Скалярное поле

Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f = f(x, y, z)$, зависящей ***только от координат*** *точек пространства, в кото-*

ром это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных.*

Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x_1, y_1, z_1)$ пространства, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее это явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x, y, z)$, вычисленное в точке $P(x_1, y_1, z_1)$ (примерами скалярного поля являются: поле электрического потенциала, давление в атмосфере).

2. Поверхность уровня

Если однозначная функция $f(x, y, z)$ соответствует скалярному полю, образованному физическим явлением, то ***поверхностью уровня*** *(иначе эквипотенциальной поверхностью) этого поля называется поверхность, во всех точках которой функция $f(x, y, z)$ сохраняет одно и то же значение.*

Поверхности уровня имеют уравнение

$$f(x, y, z) = c, \qquad (40,1)$$

где c — постоянная величина.

Придавая постоянной c различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня.

Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково.

Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1). \qquad (40,2)$$

3. Производная по направлению

Производная от функции $f(x, y, z)$ по направлению $(\bar{l})$ характеризует скорость изменения функции $f(x, y, z)$ по этому направлению.

Эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(l, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(l, y) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(l, z). \qquad (40,3)$$

* Предполагается, что функция $f(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция x, y, z, имеющая непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ равна нулю по любому направлению, касательному к поверхности уровня. Она достигает своего наибольшего значения по направлению нормали к поверхности уровня.

4. Градиент функции

Градиентом скалярной функции $f(x, y, z)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно равны $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$, т. е.

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}. \qquad (40,4)$$

На основании этого определения проекции вектора grad f *на координатные оси запишутся так:*

$$(\operatorname{grad} f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad (\operatorname{grad} f)_y = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad (\operatorname{grad} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (40,5)$$

(предполагается при этом, что $f(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные).

Модуль вектора grad f *вычисляется по формуле*

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \qquad (40,6)$$

Если $\bar{\tau}$ — единичный вектор направления $(\bar{l})$,

$$\bar{\tau} = \cos(l, x)\bar{i} + \cos(l, y)\bar{j} + \cos(l, z)\bar{k},$$

то формула (40,3) запишется так:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f \cdot \tau). \qquad (40,7)$$

Вектор grad f в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания функции. Скорость изменения скалярной функции f по некоторому *направлению $(\bar{l})$ равна проекции вектора* grad f *на это направление, т. е.*

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f)_l. \qquad (40,8)$$

В этом состоит основное свойство градиента функции.

Задача 40,1. Скалярное поле образовано функцией

$$V = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Найти поверхности уровня этого поля.

Решение. На основании формулы (40,1) уравнение семейства поверхностей уровня найдем в виде

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} = c,$$

или

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2.$$

Отсюда уже получаем окончательно $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - c^2$. Поверхностями уровня является семейство концентрических сфер.

Задача 40,2. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$v = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Решение. По формуле (40,1) уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид

$$\operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c.$$

Отсюда

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{tg} c,$$

и окончательно

$$z^2 = \operatorname{tg}^2 c\, (x^2 + y^2).$$

Это уравнение семейства круговых конусов с общей вершиной в начале координат. Их общей осью является ось Oz.

Задача 40,3. Найти производную функции $f(x, y) = x^3 - y^3$ в точке $M(1,1)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox.

Решение. В формуле (40,3)

$$\cos(l, x) = \cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\cos(l, y) = \cos(90 - \alpha) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos(l, z) = 0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2.$$

Подстановка в (40,3) дает

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 3x^2 \cdot \frac{1}{2} - 3y^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В точке $M(1,1)$ имеем $x = 1$, $y = 1$. Подставляя эти значения x и y в последнее равенство, будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

Итак, искомая производная

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}).$$

Задача 40,4. Найти производную функции $f(x, y)=3x^2-6xy+y^2$ в точке $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox. В каком направлении эта производная имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) значение, равное нулю?

Найти также градиент этой функции, его модуль и его направляющие косинусы.

Решение. По условию задачи $\cos(l, x)=\cos\alpha$, и тогда

$$\cos(l, y)=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$$

Дальше: $\frac{\partial f}{\partial x}=6x-6y;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y-6x.$

Подстановка в формулу (40,3) дает

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(6x-6y)\cos\alpha+(2y-6x)\sin\alpha;$$

в точке $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\left[6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cos\alpha+\left[2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\sin\alpha,$$

т. е. $\frac{\partial f}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha.$

Теперь нам надо найти те значения α, при которых $\frac{\partial f}{\partial l}$ имеет значения: а) наибольшее, б) наименьшее, в) равное 0.

Обозначим $u=\cos\alpha+\sin\alpha$ и найдем экстремум этой функции $u'=-\sin\alpha+\cos\alpha$. Из уравнения $-\sin\alpha+\cos\alpha=0$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha=1$, а $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Считая, что α может изменяться от 0 до 2π, из последней формулы получаем

при $k=0$ $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$ при $k=1$ $\alpha_2=\frac{5\pi}{4}$, $u''=-\cos\alpha-\sin\alpha$, и так как $u''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$, то при $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$ функция u достигает максимума, а вместе с тем и наибольшего значения.

Таким образом, производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ нашей функции имеет наибольшее значение по направлению, составляющему с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

При $\alpha=\frac{5}{4}\pi$ имеем $u''\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\sqrt{2}>0$. Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ имеет наименьшее значение по направлению, составляющему с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=\frac{5}{4}\pi$.

Ответим теперь на последний вопрос задачи: надо найти то значение α, при котором $\frac{\partial f}{\partial l}=0$, т. е. при котором $\cos\alpha+\sin\alpha=0$. Решая это уравнение, имеем $\cos\alpha=-\sin\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha=-1$ и для α, содержащегося между 0 и 2π, получаем

$$\alpha=\frac{3}{4}\pi \quad \text{и} \quad \alpha=\frac{7}{4}\pi.$$

Другое решение этой же задачи: мы нашли, что направление наибыстрейшего роста функции составляет с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Известно, что **направление наибыстрейшего роста функции в данной точке совпадает с направлением вектора, являющегося градиентом этой функции,** который определяется формулой (40,4), а длина его находится по формуле (40,6).

Для нашей функции $f(x, y)=3x^2-6xy+y^2$

$$\operatorname{grad} f=(6x-6y)\cdot\bar{i}+(2y-6x)\cdot\bar{j},$$

а в точке $A\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$ $(\operatorname{grad} f)_{\substack{x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}}}=\bar{i}+\bar{j}$.

Длина вектора $\operatorname{grad} f$ в этой точке

$$|\operatorname{grad} f|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},$$

а его проекция на оси прямоугольной системы координат равна

$$(\operatorname{grad} f)_x=1; \quad (\operatorname{grad} f)_y=1.$$

Известно, что направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ находятся по формулам

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\bar{a}|}; \quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\bar{a}|};$$

в нашем случае вектор $\operatorname{grad} f$ в точке $A\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$ имеет направляющие косинусы $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, вектор $\operatorname{grad} f$ составляет в точке $A\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$ с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Этого и следовало ожидать потому, что этот вектор указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке, а мы нашли, что производная $\frac{\partial f}{\partial l}$, определяющая скорость изменения функции, достигает своего наибольшего значения именно по направлению $\bar{l}$, составляющему угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси Ox.

Задача 40,5. Определить производную функции

$$f(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$$

в точке $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем с осями прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz углы, соответственно равные α, β и γ, градиент этой функции, его величину и направляющие косинусы.

Решение 1. По формуле (40,3) находим производную $\frac{\partial f}{\partial l}$ по указанному в задаче направлению. Чтобы воспользоваться этой формулой, найдем частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial z}$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y^2 + z^2)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2 + z^2)$; $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z(y^2 + x^2)$.

Подставляя эти значения производных в (40,3), получим

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 2x(y^2 + z^2)\cos\alpha + 2y(x^2 + z^2)\cos\beta + 2z(x^2 + y^2)\cos\gamma.$$

В точке $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ значение $\frac{\partial f}{\partial l}$ найдем, подставив в предыдущее равенство $x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_A = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

2. По формуле (40,4)

$$\operatorname{grad} f = 2x(y^2 + z^2)\bar{i} + 2y(x^2 + z^2)\bar{j} + 2z(x^2 + y^2)\bar{k}.$$

В точке A $(\operatorname{grad} f)_A = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, а его проекции на координатные оси и его модуль в этой точке равны:

$$(\operatorname{grad} f)_x = (\operatorname{grad} f)_y = (\operatorname{grad} f)_z = 1,$$

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Направляющие косинусы вектора $\operatorname{grad} f$ в точке A равны:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Контроль: $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$).

Эти направляющие косинусы определяют направление наибыстрейшего роста нашей функции в точке A.

Если направление $\bar{l}$, о котором шла речь в задаче, совпадало бы с направлением вектора $\operatorname{grad} f$, то производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ достигла бы своего наибольшего значения в этом направлении, и тогда в точке A

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Задача 40,6. Найти $|\operatorname{grad} u|$ и направляющие косинусы градиента в точке $A(x_0, y_0, z_0)$, если функция $u=\frac{1}{r}$,

где
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (40,6) для определения $\operatorname{grad} u$, нам надо найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$. У нас $u=\frac{1}{r}$, а потому проекция градиента этой функции на оси Ox

$$\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x},\quad \text{но}\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

а потому $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$, и тогда $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}$,

или $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$.

Аналогично $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$; $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z=\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$.

Пользуясь формулой (40,6), получаем, что

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\frac{x^2}{r^6}+\frac{y^2}{r^6}+\frac{z^2}{r^6}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{r^6}}=\sqrt{\frac{r^2}{r^6}}=\frac{1}{r^2}.$$

В точке A $|\operatorname{grad} u|=\frac{1}{r_0^2}$, где

$$r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2.$$

Направляющие косинусы вектора $a=\operatorname{grad}\frac{1}{r}$ найдем по формулам

$$\cos(a,x)=\frac{a_x}{|\bar{a}|}=\frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|};\quad \cos(\bar{a}\ y)=\frac{a_y}{|\bar{a}|}=$$

$$=\frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|};\quad \cos(\bar{a},z)=\frac{a_z}{|\bar{a}|}=\frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|}.$$

Подставляя в эти формулы найденные значения $\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y$ и $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z$, получим

$$\cos(\bar{a},\ x) = -\frac{x}{r^5};\ \cos(\bar{a},\ y) = -\frac{y}{r^5};\ \cos(\bar{a},\ z) = -\frac{z}{r^5}.$$

Чтобы найти значения направляющих косинусов градиента нашей функции в точке A, надо в последних формулах заменить x, y и z соответственно на x_0, y_0 и z_0, а r — на

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

СОРОК ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование неявных функций.

1. Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением

$$f(x,\ y) = 0, \tag{41,1}$$

неразрешенным относительно y, то говорят, что y есть неявная функция x (или функция y от x задана неявно). Для того чтобы, не решая уравнение (41,1) относительно y, найти производную от y по x, пользуются формулой

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{41,2}$$

Чтобы определить вторую производную от y по x, надо переписать (41,2) в виде $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$, продифференцировать его по x и в полученном выражении заменить y' уже найденным значением (41,2). Точно так же определяется y''' и т. д.

Запоминать достаточно громоздкие формулы для определения y'' и y''' не имеет смысла. На примерах будет показан метод определения производных высших порядков в рассматриваемом случае.

Задача 41,1. Определить y' и y'', если функция y от x задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, где a — величина постоянная.

Решение. Обозначим левую часть этого уравнения через $f(x,\ y)$. Чтобы воспользоваться формулой (41,2), найдем $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$$

Подставляя эти выражения в (41,2), получим после сокращения на 3

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}. \tag{41,3}$$

Чтобы определить y'', перепишем равенство (41,3) в таком виде:

$$x^2 - ay + (y^2 - ax)\,y' = 0. \tag{41,4}$$

Продифференцируем его по x, помня, что y есть функция от x. Здесь следует применить правило дифференцирования сложной функции. Получим

$$2x - ay' + (2yy' - a)\,y' + (y^2 - ax)\,y'' = 0,$$

или

$$2x - 2ay' + 2yy'^2 + (y^2 - ax)\,y'' = 0.$$

Подставляя сюда вместо y' его значение из (41,3), получим

$$2x - 2a\cdot\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) + 2y\cdot\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)^2 + (y^2 - ax)\,y'' = 0.$$

Отсюда

$$y'' = -\frac{2x + 2a\,\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax} + 2y\left(\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)^2}{y^2 - ax},$$

или

$$y'' = -\frac{2x\,(y^2 - ax)^2 + 2a\,(x^2 - ay)(y^2 - ax) + 2y\,(x^2 - ay)^2}{(y^2 - ax)^3}.$$

Если в числителе дроби раскрыть скобки и сделать приведение подобных членов, то получится выражение $2xy^4 + 2x^4y - 6ax^2y^2 + {}$ $+ 2a^3xy$, которое выгодно переписать в виде $2xy\,(x^3 + y^3 - 3axy) +$ $+ 2a^3xy$. Так как по условию $x^3 + y^3 - 3axy$ равняется нулю, то окончательно числитель дроби равен $2a^3xy$, а

$$y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}, \quad \text{или} \quad y'' = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}.$$

Задача 41,2. Функция y от x задана уравнением

$$x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 2 = 0.$$

Определить y', y'', y''' при $x = 2$; $y = 0$.

Решение. Обозначим левую часть заданного уравнения через $f(x, y)$. Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y - 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y + 3,$$

и на основании (41,2)

$$y' = -\frac{2x - 3y - 2}{-3x + 8y + 3}. \tag{41,5}$$

Подставляя вместо x и y их значения, имеем

$$y'(2,0) = -\frac{2\cdot 2 - 3\cdot 0 - 2}{-3\cdot 2 + 8\cdot 0 + 3};\ y'(2,\ 0) = \frac{2}{3}.$$

Перепишем (41,5) в виде

$$2x - 3y - 2 - (3x - 7y - 3)\,y' = 0.$$

Продифференцируем это равенство по x, имея опять-таки в виду, что y есть функция x:

$$2 - 3y' - (3 - 8y')\,y' - (3x - 8y - 3)\,y'' = 0. \qquad (41,6)$$

Подставляя сюда вместо x и y их значения, а вместо y' — найденное выше его значение $\left(y' = \frac{2}{3}\right)$, получим

$$2 - 3\cdot\frac{2}{3} - \left(3 - 8\cdot\frac{2}{3}\right)\frac{2}{3} - (3\cdot 2 - 8\cdot 0 - 3)\,y'' = 0,$$

откуда

$$+\frac{14}{9} - 3y'' = 0;\ \text{а}\ y'' = \frac{14}{27}.$$

Для определения y''' продифференцируем опять по x равенство (41,6):

$$-3y'' - (-8y'')\,y' - (3-8y')\,y'' - (3-8y')\,y'' - (3x - 8y - 3)\,y''' = 0.$$

Подставляя сюда данные значения x и y и уже найденные значения y' и y'', получим, что

$$-294 + 243y''' = 0,\ \text{а}\ y''' = \frac{98}{81}.$$

Задача 41,3 (для самостоятельного решения). Кривая определена уравнением $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

Определить, в какую сторону направлена вогнутость этой кривой в точке (1,1).

Указание. Направление вогнутости кривой в данной точке определяется знаком второй производной в этой точке. Поэтому следует найти y''.

Ответ. $y' = 0$; $1 + 2y' + y'^2 + (x + y + 1)\,y'' = 0$; $y'' = -\frac{1}{3}$. Кривая в точке (1,1) обращена вогнутостью в сторону отрицательных ординат.

Задача 41,4 (для самостоятельного решения). Найти y''' функции, заданной в предыдущей задаче при тех же значениях x и y.

Указание. Продифференцировать по x полученное при решении предыдущей задачи равенство $1 + 2y' + y'^2 + (x + y + 1)\,y'' = 0$.

Ответ. $y''' = \frac{1}{3}$.

Задача 41,5 (для самостоятельного решения). Функция y от x задана уравнениями:

$$1)\ x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0,$$

$$2)\ y\sin x - \cos(x - y) = 0,$$

$$3)\ \sin x \ln y + \cos y \ln x = 0.$$

Найти y'.

Ответ. 1) $y' = -\dfrac{\sin y}{x\cos y + \sin y - 2\sin 2y}$;

2) $y' = \dfrac{y\cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$,

3) $y' = \dfrac{\cos x \ln y + \frac{1}{x}\cos y}{\sin y \ln x - \frac{1}{y}\sin x}$.

Задача 41,6. (для самостоятельного решения). Кривая определена уравнением

$$x^2 - 2xy + 5y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

В точке $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ на ней определить уравнение касательной нормали, направление вогнутости, а также y'''.

Ответ. Уравнение касательной $2y + 1 = 0$; уравнение нормали $2x - 1 = 0$; $y'' = 1$. Кривая обращена вогнутостью в сторону положительных ординат; $y''' = -3$.

Указание 1. Касательная к кривой $f(x, y) = 0$ в точке $P(x_0, y_0)$ определяется уравнением $y - y_0 = y'(x_0, y_0)(x - x_0)$, а нормаль

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

1. Если функция z от двух независимых переменных x и y задается уравнением

$$f(x, y, z) = 0; \tag{41,7}$$

не разрешенным относительно z, то говорят, что z есть неявная функция переменных x и y. В этом случае частные производные функции z по независимым переменным x и y определяются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{41,8}$$

На примерах будет показано, как можно определить в рассматриваемом случае производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, не прибегая к готовым формулам (41,8).

На примерах будет также показан и метод определения частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Задача 41,7. Функция z независимых переменных x и y задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Первый способ. Перенесем a^2 в левую часть данного уравнения и обозначим ее через $f(x, y, z)$. Тогда $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y;\quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

Подставляя эти значения в (41,8), будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$$

Второй способ. Продифференцируем данное уравнение и получим

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = 0,$$

отсюда

$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy. \tag{41,9}$$

С другой стороны, мы знаем, что дифференциал функции $z = \varphi(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{41,10}$$

Сравнивая формулу (41,10) с выражением (41,9), мы заключаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z};$$

таким образом, мы определили искомые производные, не прибегая к готовым формулам (41,8).

Задача 41,8. Функция z независимых переменных x и y задана неявно уравнением $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$.

Решение. Первый способ. Обозначим левую часть уравнения через $f(x, y, z)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + y + 1;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + x - z;\quad \frac{\partial f}{\partial z} = -6z - y.$$

По формулам (41,8) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8x + 4y + 1}{6z + y};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + 4y - z}{6z + y}. \tag{41,11}$$

Подставляя сюда значения $x=1$; $y=1$; $z=1$, получим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{13}{7};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4}{7}.$$

Второй способ. Дифференцируя заданное уравнение, получаем

$$8x dx+4y dy-6z dz+x dy+y dx-y dz-z dy+dx=0,$$

или

$$(8x+y+1)\,dx+(4y+x-z)\,dy+(-6z-y)\,dz=0,$$

откуда

$$dz=\frac{8x+y+1}{6z+y}dx+\frac{x+4y-z}{6z+y}dy;$$

сравнение с формулой (41,10) показывает, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{8x+y+1}{6z+y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+4y-z}{6z+y},$$

что совпадает с выражениями (41,11), полученными раньше.

Задача 41,9 (для самостоятельного решения). Функция z независимых переменных x и y задана уравнениями:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0;\quad 2)\ \frac{z^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0.$$

$$3)\ xy+xz+yz=1.$$

Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Решение провести двумя способами.

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2x}{a^2z};\quad \frac{\partial z}{dy}=-\frac{c^2y}{b^2z};$

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{p};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{q};$

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y+z}{x+y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}.$

Задача 41,10. Из уравнения, заданного в задаче 41,7, определить вторые производные.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\ \text{и}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Решение. В указанной задаче было получено, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z},\ \text{а}\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1\cdot z-\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x}{z^2}.$$

Подставляя сюда значение $\frac{\partial z}{\partial x}$ получим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z - \left(-\frac{x}{z}\right)x}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^3}.$$

Дифференцируя по y выражение $\frac{\partial z}{\partial x}$ и учитывая, что при дифференцировании по y переменная x, стоящая в числителе, рассматривается как величина постоянная (так как x и y — независимые переменные, то x не зависит от y), получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z^2}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{xy}{z^3}.$$

Аналогично находим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}$.

Задачи 41,11. Из уравнения $f(x, y, z) = 0$, в котором x рассматривается как функция независимых переменных y и z, определить $\frac{\partial x}{\partial y}$ и $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

откуда следует, что

$$dx = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}dy - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}dz.$$

С другой стороны, если x есть функция y и z:

$$x = x(y, z), \text{ то } dx = \frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial z}dz.$$

Сравнивая последнее равенство с предыдущим, получим, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}; \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Задача 41,12 (для самостоятельного решения). Из уравнения $f(x, y, z) = 0$, в котором y рассматривается как функция независимых переменных x и z, определить

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Ответ. $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$

СОРОК ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Экстремум функции нескольких независимых переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух независимых переменных.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Экстремум функции

***Определение* 1.** *Функция $u = f(x, y, z, \ldots, v)$ при некоторой системе значений $x_0, y_0, z_0, \ldots, v_0$ независимых переменных имеет максимум (минимум), если приращение функции*

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, \ldots, v_0 + \Delta v) - \\ - f(x_0, y_0, \ldots, v_0)$$

отрицательно (положительно) при всевозможных, достаточно малых по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных значениях

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, \Delta v.$$

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом.

Необходимые условия экстремума

Если функция $u = f(x, y, z, \ldots, v)$ достигает экстремума при значениях независимых переменных $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\ldots$, $v = v_0$ $\ldots$, то при этих значениях или выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \ldots; \quad \frac{\partial u}{\partial v} = 0, \qquad (42,1)$$

или частные производные при этих значениях не существуют.

Иначе: ***в точке экстремума первый дифференциал функции равен нулю или не существует. Количество уравнений (42,1) равно числу независимых переменных.***

Точки, в которых выполняются равенства (42,1), называются стационарными точками функции.

Равенства (42,1) выражают необходимое, но недостаточное условие экстремума функции нескольких независимых переменных. Это значит, что не при всех тех значениях независимых переменных, при которых эти равенства выполняются, функция имеет экстремум.

Достаточные условия экстремума

Для того чтобы решить вопрос, какие из значений независимых переменных, получаемых из уравнений (42,1), доставляют функции максимум или минимум, или ни то, ни другое, обращаются к исследованию дифференциала второго порядка этой функции.

Если при значениях независимых переменных, найденных из уравнений (42,1), дифференциал второго порядка функции сохраняет постоянный знак при всевозможных достаточно малых по абсолютной величине приращениях независимых переменных, то функция при этих значениях имеет экстремум, причем максимум будет в том случае, когда дифференциал второго порядка отрицателен, а минимум — когда он положителен.

Если дифференциал второго порядка при значениях независимых переменных, найденных из системы уравнений (42,1), не сохраняет постоянного знака, то для этих значений функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Если же окажется, что при этих значениях дифференциал второго порядка обратится в нуль, то решение вопроса об экстремуме требует исследование дифференциалов порядка выше, чем второй.

Правило определения экстремума функции двух независимых переменных

Чтобы определить экстремум функции $z = f(x, y)$, двух независимых переменных следует:

1) Определить стационарные точки, в которых функция может достигать экстремума, для чего надо решить систему уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{xy} = 0;$$

Определить вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3) Вычислить значения вторых частных производных в каждой стационарной точке, а полученные числа обозначить соответственно через A, B и C.

4) Составить выражение $\Delta = AC - B^2$. При этом,

а) если $\Delta > 0$, то экстремум в стационарной точке есть: если $A > 0$, то будет минимум, а при $A < 0$ — максимум;

б) если $\Delta < 0$, то экстремума в рассматриваемой стационарной точке нет;

в) если $\Delta = 0$, то имеет место сомнительный случай, и для заключения об экстремуме надо привлечь к рассмотрению частные производные порядка выше второго (этот случай в программу не входит и нами не рассматривается).

Задача 42,1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430.$$

Решение. Прежде всего определяем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x. \qquad (42,2)$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \qquad (42,1)$$

которая в нашем случае запишется так:

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0, \\ 6y^2 - 36x = 0; \end{cases}$$

после сокращения на 6 имеем

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0, \\ y^2 - 6x = 0. \end{cases} \qquad (42,3)$$

Из первого уравнения $y = \frac{x^2}{6}$. Подставляя его во второе уравнение, получим $\frac{x^4}{36} - 6x = 0$, или $x^4 - 216x = 0$, которое перепишем так:

$$x(x^3 - 216) = 0.$$

Разлагая на множители выражение в скобках, получим уравнение $x(x-6)(x^2+6x+36) = 0$.

Отсюда следует, что $x_1 = 0$; $x_2 = 6$, а остальные два корня — комплексные, которые нас не интересуют (это корни уравнения $x^2 + 6x + 36 = 0$).

Подставляя эти значения x в равенство $y = \frac{x^2}{6}$, получаем, что $y_1 = 0$; $y_2 = 6$.

Итак, есть две пары решений системы уравнений (42,3):

$$1)\ x_1 = 0;\ y_1 = 0;\ 2)\ x_2 = 6;\ y_2 = 6.$$

Теперь определим число Δ, для чего найдем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Из (42,2) получаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y,$$

Подставим теперь сюда сначала первую пару решений, а потом вторую и определим числа A, B, C и Δ.

Для первой пары решений:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0;\quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=-36;\quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0,$$

а потому число $\Delta = AC-B^2=-36$.

Так как $\Delta<0$, то при $x=0$; $y=0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Для второй пары решений:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=6\\y=6}}=72;\quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=6\\y=6}}=-36;\quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=6\\y=6}}=72.$$

Теперь число $\Delta=AC-B^2=72\cdot 72-36^2=3888$, и так как оно положительно, то экстремум при значениях $x=6$; $y=6$ есть. Учитывая, что A — число положительное, заключаем, что при этих значениях x и y имеет место минимум. Чтобы определить минимальное значение функции, подставим в нее $x=6$, $y=6$ и получим $z_{\min}=-2$.

Замечание. Из $\Delta>0$ следует, что $AC-B^2>0$, $AC>B^2$, т. е. $AC>0$, а это означает, что A и C в случае, когда функция имеет экстремум, имеют один и тот же знак.

При решении этого примера читатель усмотрел, что не все значения независимых переменных, которые получаются при решениях системы (42,1), доставляют функции экстремум. Так, значения $x=0$ и $y=0$, хотя и являются решениями системы (42,1), но при них функция не имеет ни максимума, ни минимума (экстремума нет).

Задача 42,2. Исследовать на экстремум функцию

$$z=14x^3+27xy^2-69x-54y.$$

Решение. Находим прежде всего $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=42x^2+27y^2-69;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=54xy-54. \qquad (42,4)$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases}42x^2+27y^2-69=0,\\ 54xy-54=0.\end{cases}$$

После очевидных сокращений эта система запишется так:

$$\begin{cases}14x^2+9y^2=23,\\ xy=1.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим 4 пары решений, при которых исследуемая функция может иметь экстремум.

Первая пара: $x_1 = 1$; $y_1 = 1$; вторая пара: $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$; третья пара: $x_3 = -1$; $y_3 = -1$; четвертая пара: $x_4 = \frac{-3}{\sqrt{14}}$; $y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$.

Теперь определим, какие именно из этих значений доставляют функции экстремум.

Определим из (42,4) вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 84x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 54y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 54x.$$

Для каждой пары значений определим числа A, B и C и число Δ.

1. Для $x_1 = 1$; $y_1 = 1$ имеем

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 84; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54.$$

Число $\Delta = AC - B^2 = 84 \cdot 54 - 54^2 > 0$.

Экстремум есть, а так как $A > 0$, то имеет место минимум

$$z_{\min} = 14 \cdot 1 + 27 \cdot 1 \cdot 1 - 69 - 54 = -82.$$

2. Для $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{252}{\sqrt{14}}; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = 18\sqrt{14}$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{162}{\sqrt{14}}; \quad \Delta = AC - B^2 = \frac{252}{\sqrt{14}}\frac{162}{\sqrt{14}} - (18\sqrt{14})^2 < 0,$$

и при $x = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y = \frac{\sqrt{14}}{3}$ экстремума нет.

3. Для $x_3 = -1$; $y_3 = -1$

$$A = -84; \quad B = -54; \quad C = -54;$$
$$\Delta = AC - B^2 = (-84)(-54) - (-54)^2 > 0.$$

Экстремум есть, и именно максимум, так как $A = -84 < 0$;

$$z_{\max} = -14 - 27 + 69 + 54 = 82.$$

4. Для $x_4 = -\frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$ имеем

$$A = -\frac{252}{\sqrt{14}}; \quad B = -18\sqrt{14}; \quad C = -\frac{162}{\sqrt{14}};$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{252}{\sqrt{14}}\right)\left(-\frac{162}{\sqrt{14}}\right) - (-18\sqrt{14})^2 < 0.$$

Экстремума при значениях $x = x_4$ и $y = y_4$ нет.

Задача 42,3 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию

$$z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y.$$

Ответ. Экстремума нет.

Задача 42,4 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Указание. Система уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ приведет к системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Почленное слсжение даст уравнение $x^3 + y^3 = 0$, откуда следует, что $y = -x$.

Подставляя в первое уравнение, получим $x^3 - 2x = 0$, откуда $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$, а $y_1 = 0$; $y_2 = -\sqrt{2}$; $y_3 = \sqrt{2}$.

Имеем три пары решений: 1) $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; 2) $x_2 = \sqrt{2}$; $y_2 = -\sqrt{2}$; 3) $x_3 = -\sqrt{2}$; $y_3 = \sqrt{2}$.

Ответ. $z_{\min} = -8$ при $x_2 = \sqrt{2}$, $y_2 = -\sqrt{2}$ и при $x_3 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$. Вопрос об экстремуме при $x = 0$, $y = 0$ остается открытым.

Задача 42,5 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функции: 1) $z = x^3y^2(12 - x - y)$; 2) $z = xy(xy(x+y-1)$; 3) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

Ответ. 1) Максимум при $x = 6$; $y = 4$; $z_{\max} = 6912$;

2) минимум при $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{3}$; $z_{\min} = -\frac{1}{27}$;

3) минимум при $x = 5$; $y = 6$; $z_{\min} = -86$.

Задача 42,6. Найти экстремум функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z.$$

Решение. Здесь мы имеем дело с функцией трех независимых переменных. Определим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x + 1; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2$$

и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ 2y + x + 1 = 0, \\ 2z - 2 = 0; \end{cases}$$

получаем $x = 1$; $y = -1$; $z = 1$.

Значит, при этих значениях независимых переменных возможен экстремум.

Для того чтобы сделать заключение, будет ли он, надо обратиться к исследованию дифференциала второго порядка этой функции. Известно, что дифференциал первого порядка

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Дифференциал второго порядка читатель определит самостоятельно и получит, что

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \\ + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz.$$

У нас

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0,$$

а потому

$$d^2u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2dxdy = 2(dx^2 + dxdy + dy^2) + 2dz^2.$$

Выражение, стоящее в скобке, не отрицательно при любых dx и dy: $(a^2 + b^2) \geqslant -ab$, а последнее слагаемое положительно. Таким образом, $d^2u > 0$ при любых dx, dy и dz.

Тем самым мы доказали, что при $x = 1$; $y = -1$ и $z = 1$ функция u достигает минимума, а $u_{\min} = -2$.

Задача 42,7 (для самостоятельного решения). Определить экстремум функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Ответ. При $x = -\frac{2}{3}$; $y = -\frac{1}{3}$; $z = 1$ функция достигает минимума, а $u_{\min} = -\frac{4}{3}$.

2. Отыскание наибольших и наименьших значений функции двух независимых переменных в замкнутой области

Функция ограниченная и дифференцируемая в замкнутой области достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значения или во внутренних точках этой области, которые являются точками стационарности функции, или на ее границе.

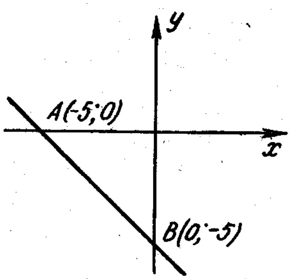
Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции, надо: 1) Найти стационарные точки функции, для чего следует решить систему уравнений $\frac{\partial z}{\partial x}=0$; $\frac{\partial z}{\partial y}=0$;

2) вычислить в стационарных точках значения функции; 3) найти наибольшее и наименьшее значение функции на каждой линии, ограничивающей область; 4) сравнить все полученные значения. Наибольшее из них будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции в замкнутой области.

Задача 42,8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$$

в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x+y+5=0$ (фиг. 42,1).



Фиг. 42,1.

Решение. 1) Находим стационарные точки функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+4y+2.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ -x+4y+2=0 \end{cases}$$

и находим, что $x=-2$; $y=-1$. Итак, имеется одна стационарная точка $(-2, -1)$.

2) Определяем значение функции в этой точке:

$$z(-2, -1)=-3$$

(запись $z(-2, -1)$ означает, что ищется значение функции $z=z(x, y)$ при $x=-2$, $y=-1$).

3) Переходим к исследованию функции на границах области, которая состоит из отрезка оси Ox, отрезка оси Oy и отрезка AB прямой.

а) На оси Ox $y=0$, а заданная функция принимает при $y=0$ такой вид: $z=x^2+3x+1$ $(-5\leqslant x\leqslant 0)$.

Эта функция должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$. Так как на этом отрезке функция z непрерывна, то она достигает на нем как наибольшего, так и наименьшего своего значения. Это может произойти или в точках стационарности функции, где $\frac{dz}{dx}=0$, или на концах рассматриваемого отрезка.

Определим прежде всего точку стационарности

$$\frac{dz}{dx}=2x+3; \quad 2x+3=0; \quad x=-\frac{3}{2}.$$

Определим значение функции при $x = -\frac{3}{2}$ и на концах отрезка $[-5,0]$:

$$z\left(-\frac{3}{2},\ 0\right) = -\frac{5}{4};\quad z[-5,0] = 11;\quad z[0,0] = 1.$$

Сравнение показывает, что $(z_{\text{наиб.}})_{OA} = 11$; $(z_{\text{наим.}})_{OA} = -\frac{5}{4}$.

б) На оси Oy: $x = 0$, а данная функция при $x = 0$ запишется так:

$$z = 2y^2 + 2y + 1 \quad (-5 \leqslant y \leqslant 0).$$

Эта функция — функция одной независимой переменной. Она должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$ (см. фиг. 42,1). Определим на этом отрезке ее наименьшее и наибольшее значения, которые в силу непрерывности должны существовать. Прежде всего определяем точки стационарности функции:

$$\frac{dz}{dy} = 4y + 2;\quad 4y + 2 = 0;\quad y = -\frac{1}{2}.$$

Определим значение функции при $y = -\frac{1}{2}$, а также на концах рассматриваемого отрезка:

$$z\left(0,\ -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};\ z(0,\ -5) = 41;\ z(0,\ 0) = 1;$$

$$(z_{\text{наиб.}})_{OB} = 41;\quad (z_{\text{наим.}})_{OB} = \frac{1}{2}.$$

в) Наконец, исследуем данную функцию на отрезке прямой AB, принадлежащем границе области.

Уравнение прямой AB $x + y + 5 = 0$. Поэтому на ней $y = -x - 5$.

Подставляя это значение y в заданную функцию, получаем

$$z = 4x^2 + 26x + 41.$$

Наибольшее и наименьшее значение этой функции должно быть определено для значений $-5 \leqslant x \leqslant 0$:

$$\frac{dz}{dx} = 8x + 26;\quad 8x + 26 = 0;\quad x = -\frac{13}{4}.$$

Находим соответствующее значение y. Из $y = -x - 5$ следует, что

$$y = -\left(-\frac{13}{4}\right) - 5 = \frac{13}{4} - 5 = -\frac{7}{4}.$$

Итак, рассмотрению подлежит точка $\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right)$ (надо следить за тем, чтобы исследуемые точки принадлежали рассматриваемой области):

$$z\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right) = -\frac{5}{4}; \quad z(-5, 0) = 11; \quad z(-5, 0) = 41;$$

$$(z_{\text{наиб.}})_{AB} = 41; \quad (z_{\text{наим.}})_{AB} = -\frac{5}{4}.$$

Сравнивая теперь значение функции z в стационарной точке $(-2, -1)$ с наибольшими и наименьшими значениями на отрезках OA, OB и AB, найденными в пунктах а), б) и в), усматриваем, что в заданной замкнутой области

$$z_{\text{наиб.}} = z(0, -5) = 41,$$
$$z_{\text{наим.}} = z(-2, -1) = -3;$$

таким образом, оказалось, что наименьшего своего значения функция достигла в стационарной точке $(-2, -1)$, а наибольшего — на границе области, в точке $(0, -5)$.

Задача 42,9 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами: $A(1, -3)$; $B(1, 2)$; $C(4, 2)$; $D(4, -3)$

$$(1 \leqslant x \leqslant 4); \quad (-3 \leqslant y \leqslant 2).$$

Указания. В стационарной точке $(3, -2)$ $z(3, -2) = -11$. Рассматривая границу области, получаем: 1) На отрезке AB: $z = z(1, y) = y^2 + 4y - 3$. Наибольшего значения на AB функция достигает в точке $B(1, 2)$ и $(z_{\text{наиб.}})_{AB} = 9$, а наименьшее ее значение на AB в точке $(1, -2)$ и $(z_{\text{наим.}})_{AB} = -7$;

2) на отрезке CD: $z = z(4, y) = y^2 + 4y - 6$. На CD наибольшего значения функция достигает в точке $C(4, 2)$ и $(z_{\text{наиб.}})_{CD} = 6$, а наименьшее ее значение в точке $(4, -2)$ и $(z_{\text{наим.}})_{CD} = -10$;

3) на отрезке $BC: z = z(x, 2) = x^2 - 6x + 14$; наибольшего значения функция достигает в точке $B(1, 2)$, а $(z_{\text{наиб.}})_{BC} = 9$; $(z_{\text{наим.}})_{BC} = 5$;

4) на отрезке AD: $z = z(x - 3) = x^2 - 6x - 1$; $(z_{\text{наиб.}})_{AD} = -6$; $(z_{\text{наим.}})_{AD} = -10$.

Сравнить полученное значение функции в стационарной точке $(3, -2)$ с ее наибольшими и наименьшими значениями на границе области.

Ответ. В рассматриваемой области функция достигает наименьшего значения в стационарной точке: $z_{\text{наим.}} = -11$. Наибольшего значения функция достигает на отрезке AB в точке $(1, 2)$ и $z_{\text{наиб.}} = 9$.

Задача 42,10 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy(x+y+1)$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$; $x = 1$; $x = 2$; $y = -\frac{3}{2}$.

Ответ. Стационарные точки: $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; $(0, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 0)$ находятся вне рассматриваемой области. Наибольшего значения функция достигает на границе области в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; а $z_{\text{наиб.}} = 3{,}5$. Наименьшего значения функция достигает в точке $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$, а $z_{\text{наим.}} = -4{,}5$.

Задача 42,11 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \cos x \cos y \cos(x+y)$ в замкнутом квадрате, ограниченном линиями $x = 0$; $x = \pi$; $y = 0$, $y = \pi$.

Указания. 1) После определения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ их выгодно представить в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}[\sin(2x+2y) + \sin 2x];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}[\sin(2x+2y) + \sin 2y].$$

2) Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}[\sin(2x+2y) + \sin 2x] = 0 \\ -\frac{1}{2}[\sin(2x+2y) + \sin 2y] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

следует, что $\sin 2x = \sin 2y$, и тогда $2\cos(x+y)\sin(x-y) = 0$. Отсюда получаем, что

$$x - y = k\pi, \qquad (B)$$

$$x + y = \frac{\pi}{2}(2k+1), \qquad (C)$$

где k — любое целое число. Но условие задачи требует, чтобы выполнялись неравенства $0 \leqslant x \leqslant \pi$; $0 \leqslant y \leqslant \pi$, а потому должно быть $-\pi \leqslant x - y \leqslant \pi$ и $0 \leqslant x + y \leqslant 2\pi$; поэтому в (B) можно брать $k = -1$; $k = 0$ и $k = 1$, а в (C) $k = 0$ и $k = 1$.

$$\left\{\begin{array}{lll} x - y = 0, & \text{откуда} & y = x; \\ x - y = -\pi, & \text{»} & y = x + \pi; \\ x - y = \pi, & \text{»} & y = x - \pi; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} x + y = \frac{\pi}{2} & \text{»} & y = \frac{\pi}{2} - x; \\ x + y = \frac{3\pi}{2} & \text{»} & y = \frac{3\pi}{2} - x. \end{array}\right.$$

Подставляя в первое уравнение системы (A) первые три значения y, получим уравнение $\sin 4x + \sin 2x = 0$, а подстановка в это же уравнение последних двух значений y приводит к уравнению $\sin 2x = 0$.

Из этих уравнений находим стационарные точки:

$$(0,\ 0)\ (0,\ \pi);\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right);\ (\pi,\ \pi);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);$$
$$\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right);\ \left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right);\ (\pi,\ 0)$$

(решения, находящиеся вне данного квадрата, отброшены).

3) Теперь следует отобрать из стационарных точек те, которые лежат внутри квадрата;

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

4) На прямой $y = 0$ имеем $f(x,\ 0) = \cos^2 x$,
» » $y = \pi$ имеем $f(x,\ \pi) = \cos^2 x$,
» » $x = 0$ имеем $f(0,\ y) = \cos^2 y$,
» » $x = \pi$ имеем $f(\pi,\ y) = \cos^2 y$.

На каждой из этих прямых наибольшее значение функции равно 1, а наименьшее — нулю. Наибольшее значение функция имеет в вершинах квадрата, а наименьшее, равное нулю, — в точках $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right);\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ. Наибольшего значения функция достигает в вершинах квадрата и $z_{\text{наиб.}} = 1$; наименьшего — в стационарных точках

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right);\ \text{и}\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right)\ \text{и}\ z_{\text{наим.}} = -\frac{1}{8}.$$

Задача 42,12. Доказать, что из всех треугольников, имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Решение. Обозначим стороны треугольника через x, y и z. По формуле Герона площадь треугольника

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Замечая, что $z = 2p - x - y$, мы получим S как функцию только двух независимых переменных,

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

Вместо того, чтобы искать экстремум этой функции, будем искать экстримум ее квадрата

$$f(x,\ y) = S^2 = p(p-x)(p-y)(x+y-p);$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = p(p-y)(2p-2x-y);\quad \frac{\partial f}{\partial y} = p(p-x)(2p-2y-x).$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} p(p-y)(2p-2x-y)=0 \\ p(p-x)(2p-2y-x)=0 \end{array}\right\}.$$

Эта система приводит к таким четырем системам:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} p-y=0 \\ p-x=0 \end{array}\right\}, \qquad 2)\ \left.\begin{array}{l} 2p-2x-y=0 \\ 2p-2y-x=0 \end{array}\right\},$$

$$3)\ \left.\begin{array}{r} 2p-2x-y=0 \\ p-x=0 \end{array}\right\}, \qquad 4)\ \left.\begin{array}{r} 2p-2y-x=0 \\ p-y=0 \end{array}\right\}.$$

Находим стационарные точки:

$$(p,\ p);\ \left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right);\ (p,\ 0);\ (0,\ p).$$

Исследованию подлежит только одна точка $M\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$, так как остальные точки не удовлетворяют смыслу задачи: не может быть треугольника, у которого сторона равна половине периметра.

Исследуем на экстремум точку $M\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2p(p-y);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2p(p-x);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=p(2x+2y-3p);$$

$$A=\left(\frac{d^2 f}{\partial x^2}\right)_M=-\frac{2}{3}p^2;\ B=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_M=-\frac{1}{3}p^2;$$

$$C=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_M=-\frac{2}{3}p^2;$$

$$\Delta=AC-B^2=\left(-\frac{2}{3}p^2\right)\left(-\frac{2}{3}p^2\right)-\left(-\frac{1}{3}p^2\right)^2p^2=$$

$$=\frac{4}{9}p^4-\frac{1}{9}p^4=\frac{1}{3}p^4>0;$$

$\Delta>0$, а так как $A<0$, то в исследуемой точке функция достигает максимума. Итак, в единственной стационарной точке функция достигает максимума, а потому и наибольшего значения: таким образом, при $x=\frac{2}{3}p$, $y=\frac{2}{3}p$ функция достигает и наибольшего значения. Но тогда $z=2p-x-y=\frac{2}{3}p$. А так как $x=y=z$, то треугольник — равносторонний.

Задача 42,13. Канал, подводящий воду к турбине, имеет в сечении равнобедренную трапецию, площадь которой задана и равна S. Определить глубину канала и угол α откоса так, чтобы периметр, смоченный водой, был наименьшим*.

---

* Периметр, смоченный водой называется «мокрым», Он влияет на трение, и от его величины зависят расходы на сооружение канала.

Решение. «Мокрый» периметр обозначим буквой L, и тогда (фиг. 42,2) $L = AB + BC + CD$. Так как $h = CD \sin\alpha$, то $CD = AB = \frac{h}{\sin\alpha}$. Учитывая, что $BC = a$, получаем, что $L = a + \frac{2h}{\sin\alpha}$.

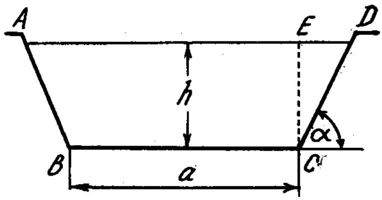
Таким образом, L есть функция трех независимых переменных: a, h и α. Условие задачи позволяет одну из переменных исключить. Требуется, чтобы площадь сечения была постоянна и равна S. В трапеции $S = \frac{BC + AD}{2} h$. Но $BC = a$, а $AD = BC + 2ED = a + 2h \operatorname{ctg}\alpha$, а потому

$$S = \frac{2a + 2h \operatorname{ctg}\alpha}{2} h;$$

$$S = (a + h \operatorname{ctg}\alpha) h;$$

откуда следует, что

$$a = \frac{S}{h} - h \operatorname{ctg}\alpha,$$



Фиг. 42,2

и для L получаем формулу

$$L = \frac{S}{h} - h \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2h}{\sin\alpha},$$

в которой только две независимых переменных — h и α. (S — величина постоянная).

Находим

$$\frac{\partial L}{\partial h} = -\frac{S}{h^2} - \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha}; \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = h \operatorname{cosec}^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

и решаем систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} - \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha} &= 0 \\ h \operatorname{cosec}^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\};$$

после упрощений эта система запишется так:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} + \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha} &= 0 \\ \frac{h(1 - 2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Из второго уравнения следует, что $h(1 - 2\cos\alpha) = 0$, откуда или $h = 0$, или $1 - 2\cos\alpha = 0$. Но глубина h не может быть равна нулю, а потому остается только $1 - 2\cos\alpha = 0$ или $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, а $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Найденное значение α подставим в первое уравнение и получим

$$-\frac{S}{h^2}+\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=0;\ \frac{S}{h^2}=\sqrt{3};\ h^2=\frac{S}{\sqrt{3}},\ \text{а}\ h=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Теперь определим значения производных второго порядка при найденных значениях α и h:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial h^2}=\frac{2S}{h^3};\quad \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}=2\,\frac{1-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\,h;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\,\partial h}=\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Находим числа A, B и C:

$$A=\frac{6}{\sqrt{S}\,\sqrt[4]{3}};\ B=0;\ C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\,\sqrt{S};$$

$$\Delta=AC-B^2=\frac{6}{\sqrt[4]{S}\,\sqrt[4]{3}}\,\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\,\sqrt{S}>0.$$

Значит, экстремум есть, а так как $A>0$, то при найденных значениях h и α функция L достигает минимума, и $L_{\min}=2\sqrt{S}\,\sqrt[4]{3}$.

Задача 42,14. Два пункта P_1 и P_2 отстоят от двух пересекающихся под прямым углом прямых, которые принимаются за оси прямоугольной системы координат Ox и Oy, на расстояния соответственно равные: $x_1=a_1$, $S_1=b_1$; $x_2=a_2$, $y_2=b_2$ (все эти числа положительны). P_1 и P_2 надо соединить телеграфным проводом так, чтобы провод сначала шел к какой-нибудь точке Q_1, на положительной части оси Ox, от нее к точке Q_2 на положительной части оси Oy, а после этого — от Q_2 к P_2 (фиг. 42,3), где на осях Ox и Oy надо поместить точки Q_1 и Q_2, чтобы длина телеграфной линии была наименьшей?

Решение. Все обозначения указаны на фиг. 42,3. Длина телеграфной линии

$$L=P_1Q_1+Q_1Q_2+Q_2P_2;$$

$$P_1Q_1=\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2};\ Q_1Q_2=\sqrt{x^2+y^2};\ Q_2P_2=\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2};$$

$$L=\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}$$

Z — функция двух независимых переменных — x и y. Приступаем к определению стационарных точек:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

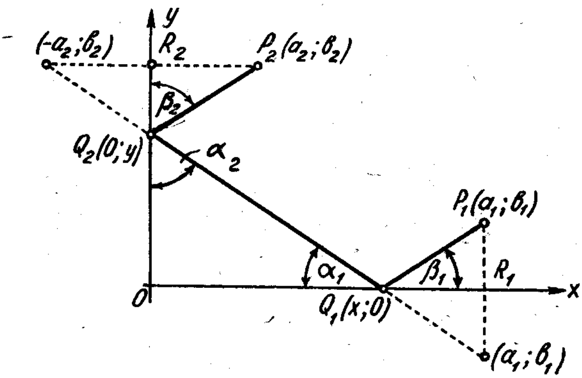
$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{b_2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}}.$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\frac{a_1 - x}{\sqrt{b_1^2 + (a_1 - x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{b^2 - y}{\sqrt{a_2^2 + (b_2 - y)^2}} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Запишем уравнения системы так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{a_1 - x}{\sqrt{b_1^2 + (a_1 - x)^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{b_2 - y}{\sqrt{a_2^2 + (b_2 - y)^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (A)$$



Фиг. 42,3

Возводя в квадрат обе части каждого уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 + y^2} &= \frac{(a_1 - x)^2}{b_1^2 + (a_1 - x)^2} \\ \frac{y^2}{x^2 + y^2} &= \frac{(b_2 - y)^2}{a_2^2 + (b_2 - y)^2} \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{x^2} &= \frac{b_1^2 + (a_1 - x)^2}{(a_1 - x)^2} \\ \frac{x^2 + y^2}{y^2} &= \frac{a_2^2 + (b_2 - y)^2}{(b_2 - y)^2} \end{aligned}\right\}.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{y^2}{x^2}&=\frac{b_1^2}{(a_1-x)^2}+1\\ \frac{x^2}{y^2}+1&=\frac{a_2^2}{(b_2-y)^2}+1 \end{aligned}\right\}.$$

После очевидных упрощений получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{x^2}&=\frac{b_1^2}{(a_1-x)^2}\\ \frac{x^2}{y^2}&=\frac{a_2^2}{(b_2-y)^2} \end{aligned}\right\},\quad \text{или}\quad \left.\begin{aligned} \frac{y}{x}&=\frac{b_1}{a_1-x}\\ \frac{x}{y}&=\frac{a_2}{b_2-y} \end{aligned}\right\}.$$

Перемножая почленно уравнения последней системы, получим

$$1=\frac{a_2b_1}{(a_1-x)(b_2-y)};\quad a_1-x=\frac{a_2b_1}{b_2-y}.$$

Отсюда

$$x=a_1-\frac{a_2b_1}{b_2-y}=\frac{a_1b_2-a_1y-a_2b_1}{b_2-y}.$$

Но из второго уравнения последней системы следует, что $x=\frac{a_2y}{b_2-y}$. Сравнивая это значение с только что полученным, имеем

$$\frac{a_2y}{b_2-y}=\frac{a_1b_2-a_1y-a_2b_1}{b_2-y},$$

откуда следует, что

$$a_2y=a_1b_2-a_1y-a_2b_1,$$

или

$$a_1y+a_2y=a_1b_2-a_2b_1;$$

$$y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1+a_2}.$$

Определите самостоятельно x; получите $x=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1+b_2}$, причем $a_1b_2-a_2b_1>0$, так как $x>0$ и $y>0$ по условию. Значения x и y можно определить значительно проще, если рассмотреть геометрическое значение уравнений системы (A) (вообще от такого истолкования никогда не следует отказываться, так как оно часто приводит к значительным упрощениям).

В первом уравнении системы (A)

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\alpha_1;\quad \frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}}=\cos\beta_1,$$

а потому

$$\cos\alpha_1=\cos\beta_1 \text{ и } \alpha_1=\beta_1.$$

Второе уравнение системы (A) дает:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\alpha_2; \quad \frac{b_2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}} = \cos\beta_2 \text{ и } \alpha_2 = \beta_2.$$

Из этого мы заключаем, что треугольники $P_1Q_1R_1$, Q_1OQ_2 и $P_2Q_2R_2$ подобны, т. к. они имеют по равному острому углу.

Из подобия треугольников следует, что $\frac{b_1}{a_1-x} = \frac{y}{x} = \frac{b_2-y}{a_2}$. Отсюда уже просто можно найти значения x и y, которые были найдены раньше.

Теперь самостоятельно докажите, что

1) найденные значения x и y доставляют функции L минимум;

2) кратчайшая длина провода $L_{\text{наим.}} = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$;

3) для построения точек Q_1 и Q_2 следует поступить так: перпендикуляры P_1R_1 и P_2R_2 продолжить за точки R_1 и R_2 на расстояния, равные этим перпендикулярам, и концы полученных отрезков соединить прямой линией. Эта линия пересечет ось Ox в точке Q_1, а ось Oy в точке Q_2 (следует написать уравнение прямой, проходящей через точки $(a_1, -b_1)$ и $(-a_2, b_2)$ и найти координаты точек пересечения этой прямой с координатными осями).

Задача 42,15 (для самостоятельного решения). Число a разделить на три слагаемых так, чтобы произведение этих трёх слагаемых было наибольшим.

Ответ. Каждое слагаемое равно $\frac{a}{3}$ (полученный результат допускает простое геометрическое истолкование: из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых сумма трех измерений есть величина постоянная, равная a, наибольший объем имеет куб с ребром, равным $\frac{a}{3}$).

Задача 42,16 (для самостоятельного решения). Требуется изготовить из жести коробку без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда заданного объема V так, чтобы затрата материала была наименьшей. Определить размеры коробки.

Ответ. Основание параллелепипеда — квадат со стороной $a = \sqrt[3]{V}$, а высота его $h = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$.

Задача 42,17. Задано n неподвижных материальных точек P_i с массами m_i и координатами $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3 \ldots, n)$. Найти координаты x и y точки $P(x, y)$, для которой сумма квадратов ее расстояний от этих неподвижных точек, помноженных на массу соответствующих точек имеет наименьшее значение.

Указание. Искомая сумма

$$S=\sum_{i=1}^{n} m_i[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2].$$

Ответ.

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n};\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

СОРОК ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Если на поверхности через точку M на ней провести всевозможные кривые и к ним в этой точке провести касательные прямые (они называются касательными к поверхности), то окажется, что все эти касательные лежат в одной плоскости, которая называется касательной плоскостью к поверхности в точке M, а перпендикуляр к касательной плоскости, восстановленный к ней в точке касания M, называется нормалью к поверхности.

1. Если поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$, разрешенным относительно z (т. е. в явной форме), а точка касания M имеет координаты (x_0, y_0, z_0), то уравнение касательной плоскости записывается так:

$$z-z_0=z'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0, y_0)(y-y_0), \tag{43,1}$$

а нормаль к поверхности в точке M определяется уравнением

$$\frac{x-x_0}{z'_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{43,2}$$

Символы $z'_x(x_0, y_0)$ и $z'_y(x_0, y_0)$ означают, что производные функции $z=f(x, y)$ вычислены при значениях $x=x_0$, $y=y_0$.

2. Если поверхность определена уравнением $f(x, y, z)=0$, неразрешенным относительно z (уравнение поверхности задано в неявной форме), а точка касания имеет координаты (x_0, y_0, z_0), то касательная плоскость определяется уравнением

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+$$
$$+f'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0, \tag{43,3}$$

а нормаль к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{43,4}$$

Символы $f'_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ означают частные производные функции $f(x, y, z)$ вычисленные для значений $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

Задача 43,1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 3y^2$ в точке, для которой $x = 1$; $y = 1$.

Решение. Прежде всего определим аппликату точки касания: $z(1,1) = 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 4$. Итак, точка касания имеет координаты $(1,\ 1,\ 4)$, т. е. $x_0 = 1$; $y_0 = 1$; $z_0 = 4$. Так как уравнение поверхности разрешено относительно z, то касательная плоскость и нормаль определяются уравнениями (43,1) и (43,2). Определяем частные производные функции $z: z'_x(x,\ y) = 2x$; $z'_y(x,\ y) = 6y$. Вычислим теперь значения частных производных в точке касания: $z'_x(1,\ 1) = 2$; $z'_y(1,\ 1) = 6$.

Подставляя эти значения и координаты точки касания в уравнения (43,1) и (43,2), получим уравнение касательной плоскости $z - 4 = 2(x - 1) + 6(y - 1)$, или $2x + 6y - z - 4 = 0$. Уравнение нормали $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}$.

Задача 43,2 (для самостоятельного решения). Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям:

1) к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + y^2$ в точке $(1,\ 1,\ 3)$;

2) к поверхности $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$ в точке $(1,\ 0,\ 2)$;

3) к гиперболическому параболоиду $z = xy$ в точке $(1,\ 2,\ 2)$.

Ответ.

1) $4x + 2y - z - 3 = 0;\ \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$;

2) $5x + y - z - 3 = 0;\ \frac{x-1}{5} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{-1}$;

3) $2x + y - z - 2 = 0;\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Задача 43,3. Определить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$ в точке $M(1,\ 2,\ 2)$.

Решение. Здесь уравнение поверхности задано в неявной форме (оно не разрешено относительно z), а потому касательная плоскость и нормаль к поверхности определяется уравнениями (43,3) и (43,4). Обозначим левую часть уравнения поверхности через $f(x,\ y,\ z)$, найдем частные производные этой функции и их значения в точке касания M: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M$,

$$f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4;\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M = 2 \cdot 1 - 4 = -2;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2y + 6;\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M = 2 \cdot 2 + 6 = 10;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 8;\quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M = 2 \cdot 2 - 8 = -4.$$

Подставляя найденные значения частных производных и координаты точек касания в уравнения (43,3) и (43,4), получим уравнение касательной плоскости

$-2(x-1)+10(y-2)-4(z-2)=0$, или $x-5y+2z+5=0$;

уравнение нормали

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-2}{2}.$$

Задача 43,4 (для самостоятельного решения). Определить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям в заданных на них точках:

1) $x^2+y^2-x+2y+4z-13=0$ в точке $(2,\ 1,\ 2)$;

2) $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точке $(1,\ 2,\ 3)$;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Ответ.

1) $3x+4y+4z-18=0$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{4}$;

2) $x-6y+9z-16=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9}$;

3) $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$; $\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$.

Указание к пункту 3). Воспользоваться тем, что $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$.

Задача 43, 5 (для самостоятельного решения). Определить уравнение той касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, которая отсекает равные отрезки на координатных осях.

Указание. Воспользоваться уравнением, полученным при решении предыдущей задачи. Отрезки, отсекаемые этой плоскостью на координатных осях, равны: $\frac{a^2}{x_0}$; $\frac{b^2}{y_0}$; $\frac{c^2}{z_0}$.

По условию задачи $\frac{a^2}{x_0}=\frac{b^2}{y_0}=\frac{c^2}{z_0}$.

Обозначив каждое из этих отношений через k, получим

$$x_0=\frac{a^2}{k};\ y_0=\frac{b^2}{k};\ z_0=\frac{c^2}{k}.$$

Так как точка $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — точка касания, то ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности, а потому, подставляя полученные значения x_0, y_0, z_0 вместо текущих в уравнение эллипсоида, получим

$$\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}+\frac{c^2}{k^2}=1, \text{ а } k=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2};$$

тогда

$$x_0=\frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ y_0=\frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ z_0=\frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение касательной плоскости к эллипсоиду, полученное в предыдущей задаче, имеем окончательно

$$x+y+z\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}=0.$$

Задача 43,6 (для самостоятельного решения). В какой точке эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

Указание. Из уравнения нормали к эллипсоиду, полученного в задаче 43,4, следует, что направляющие косинусы нормали равны:

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{a^2A};\ \cos\beta=\frac{y_0}{b^2A};\ \cos\gamma=\frac{z_0}{c^2A},$$

где

$$A=\pm\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{x_0}{a^2A}=\frac{y_0}{b^2A}=\frac{z_0}{c^2A},$$

или

$$x_0=Aa^2k;\ y_0=Ab^2k;\ z_0=Ac^2k,$$

где k — общее значение написанных выше отношений. Так как точка $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — точка касания, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипсоида, а потому

$$A^2a^2k^2+A^2b^2k^2+A^2c^2k^2=1;\ Ak=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

координаты точки, удовлетворяющей условию задачи,

$$x_0=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ y_0=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\ z_0=\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Задача 43,7. К поверхности $x^2+3y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x+4y+z=0$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде $f(x,\ y,\ z)=$ $=x^2+3y^2+z^2-1=0$. Обозначим координаты точки касания M через $x_0,\ y_0,\ z_0$. Определим значения частных производных функции $f(x,\ y,\ z)$ в этой точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x;\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M=2x_0;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=6y;\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M=6y_0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z;\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M=2z_0.$$

Уравнение касательной плоскости запишется в виде (43,3):

$$x_0(x-x_0)+3y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

Так как точка касания $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности, то $x_0^2+3y_0^2+z_0^2=1$ и уравнение касательной плоскости может быть записано так:

$$x_0x+3y_0y+z_0z-1=0 \qquad \text{(A)}$$

Из условия параллельности этой плоскости и заданной в условии задачи плоскости $2x+4y+z=0$ следует, что

$$\frac{x_0}{2}=\frac{3y_0}{4}=\frac{z_0}{1}.$$

Обозначая каждое отношение через k, получим, что

$$x_0=2k;\ y_0=\frac{4}{3}k;\ z_0=k.$$

Подставляя эти значения в уравнение поверхности, получим:

$$4k^2+3\cdot\frac{16}{9}k^2+k^2=1.$$

Откуда $k=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}$ и, значит,

$$x_0=\pm\frac{6}{\sqrt{93}};\quad y_0=\pm\frac{4}{\sqrt{93}};\quad z_0=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}.$$

Подставляя это значение в уравнение (A), получим окончательно уравнение касательной плоскости:

$$2x+4y+z=\pm\frac{\sqrt{93}}{3}.$$

Таким образом, оказалось, что условию задачи удовлетворяют две плоскости.

Задача 43,8 (для самостоятельного решения). К поверхности $x^2+2y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0$

Ответ. $x-y+2z\pm\sqrt{\frac{11}{2}}=0.$

ЧАСТЬ III

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ И ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Основной задачей дифференциального исчисления является определение для заданной функции $F(x)$ ее производной $F'(x) = f(x)$ или ее дифференциала $F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Обратная задача, состоящая в определении функции $F(x)$ по ее известным производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)\,dx$, представляет собой основную задачу интегрального исчисления.

Операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны.

Определение. *Первообразной функцией* (короче: первообразной) *функции* $f(x)$, *определенной на отрезке* $[a, b]$, *называется функция* $F(x)$, *определенная на том же отрезке и удовлетворяющая условию*

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)\,dx. \tag{1,1}$$

Процесс нахождения первообразной функции для заданной функции называется интегрированием.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная величина, также является первообразной функции $f(x)$. Таким образом, если функция $f(x)$ имеет первообразную, то она имеет их и бесчисленное множество, причем все они отличаются одна от другой только постоянным слагаемым.

Определение. *При соблюдении равенств (1,1) выражение* $F(x) + C$, *где* C — *произвольная постоянная величина, называется неопределенным интегралом функции* $f(x)$ *и обозначается символом:*

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx. \tag{1,2}$$

Здесь знак $\int$ называется интегралом, $f(x)$ — подынтегральной функцией, а произведение $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением.

Наличие в этой формуле произвольной постоянной величины C объясняет, почему интеграл $\int f(x)\,dx$ называется неопределенным.

Равенство (1,2) дает самый общий вид первообразной функции. Вопрос о том, имеет ли заданная функция $f(x)$ первообразную, решается основной теоремой интегрального исчисления:

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, то во всех точках этого отрезка она имеет первообразную, которая на этом отрезке также непрерывна.*

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Если a — постоянная величина, то

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \tag{1,3}$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx. \tag{1,4}$$

3. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$ (1,5)

т. е. знак дифференциала d и знак интеграла $\int$, когда первый помещен перед вторым, взаимно погашаются (иногда говорят взаимно сокращаются или взаимно уничтожаются).

4. $\int dF(x) = F(x) + C,$ (1,6),

т. е. знаки d и $\int$ взаимно погашаются также и тогда, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, но в этом случае к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную.

Формулу (1,6) можно переписать так: $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.

5. $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x).$ (1,6а)

ОСНОВНАЯ ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Во всех формулах под u понимается или независимая переменная, или произвольная функция любой независимой переменной, дифференцируемая в некотором промежутке.

Каждая из формул этой таблицы справедлива в любом промежутке, содержащемся в области определения соответствующей подынтегральной функции.

Интегралы, помещенные в таблице, называются табличными.

1. $\int 0 \cdot dx = C.$ (1,7)

2. $\int du = u + C.$ (1,8)

3. $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$ (1,9)

(n — постоянная величина).

Частными случаями этой формулы являются следующие две:

4. $\int \frac{du}{u^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}} + C$ (1,10)

(n — постоянная величина; $n \neq 1$).

5. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$ (1,11)

6. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$ (1,12)

7. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1).$ (1,13)

8. $\int e^u\, du = e^u + C.$ (1,14)

9. $\int \sin u\, du = -\cos u + C.$ (1,15)

10. $\int \cos u\, du = \sin u + C.$ (1,16)

11. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C.$ (1,17)

12. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C.$ (1,18)

13. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$ (1,19)

14. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$ (1,20)

15. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$ (1,21)

16. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$ (1,22)

17. $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C.$ (1,23)

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$ (1,24)

19. $\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C.$ (1,25)

20. $\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C.$ (1,26)

21. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$ (1,27)

22. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$ (1,28)

Таблицу формул читатель должен выучить наизусть. Это и следующие два практические занятия отводятся для непосредственного интегрирования, под которым понимается вычисление интегралов с помощью таблицы основных интегралов. Навыки интегрирования приобретаются опытом, а потому рекомендуется решить как можно больше задач.

1. Упражнения в применении формул (1,9) — (1,12)

Перепишем формулу (1,9) в виде, который более удобен для ее практического применения.

Если u есть функция независимой переменной x, то $du = u'\,dx$, и формула (1,9) перепишется так:

$$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1). \tag{1,29}$$

Следует обратить внимание на подынтегральную функцию $u^n u'$. Здесь n-я степень функции u умножается на u' — на производную основания степени u. Эта формула верна только при наличии множителя u'. В правой части формулы функция u находится в степени $n+1$, т. е. в степени, на единицу большей, чем под знаком интеграла, и u^{n+1} делится на ее показатель степени $n+1$. Оговорка $n \neq -1$ существенна, так как если $n = -1$, то $n+1=0$, и тогда в правой части формулы знаменатель равен нулю. Когда $n=-1$, следует пользоваться формулой (1,12). В случае, когда u — независимая переменная (например, x), $u' = 1$ и формула (1,29) переписывается в виде

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \tag{1,30}$$

Первые упражнения связаны именно с этой формулой.

Задача 1,1. Вычислить интегралы: 1) $\int x\,dx$; 2) $\int x^3\,dx$; 3) $\int x^5\,dx$; 4) $\int \sqrt{x}\,dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ и самостоятельно проверить дифференцированием полученные результаты.

Решение. По формуле (1,30) находим:

1) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$; 2) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$; 3) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$;

4) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$; 5) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx =$

$= \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5} + C$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

В пятом примере проверка дает

$$\left(\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}.$$

Как и следовало ожидать, мы получили подынтегральную функцию.

Задача 1,2. Вычислить интегралы: 1) $\int 7x^5dx$; 2) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx$; 3) $\int \frac{6}{x^2}dx$; 4) $\int \frac{4}{x^n}dx$; 5) $\int 5dx$, и проверить дифференцированием полученные результаты.

Решение. 1) Вынося за знак интеграла постоянный множитель 7, получаем: $\int 7x^5dx = 7\int x^5dx = 7\cdot\frac{x^6}{6} + C$;

$$2)\ \int 3\sqrt[4]{x^3}dx = 3\int x^{\frac{3}{4}}dx = 3\,\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{12}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C;$$

$$3)\ \int \frac{6}{x^2}dx = 6\int x^{-2}dx = 6\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{6}{x} + C.$$

Замечание. Можно было сразу применить формулу (1,10), положив в ней $u = x$, $du = dx$, $n = 2$.

$$4)\ \int \frac{4}{x^n}dx = 4\int x^{-n}dx = 4\,\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{4}{1-n}x^{1-n} + C$$

(см. замечание к предыдущей задаче);

$$5)\ \int 5dx = 5\int dx = 5x + C$$

(применена формула (1,8), в которой взято $u = x$).

Задача 1,3. Вычислить интегралы: 1) $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4)\,dx$;

2) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx.$

Указание. При решении этих примеров следует применить формулу (1,4), выражающую правило интегрирования алгебраической суммы, и формулу (1,30).

При вычислении интеграла от суммы нескольких функций сумму произвольных постоянных, которая при этом получается, заменяют одной произвольной постоянной, обозначаемой обычно буквой C.

Ответ: 1) $\frac{x^4}{4} - x^3 + 5\frac{x^2}{2} - 4x + C$;

2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} - 8\sqrt{x} - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^2} + C.$

Замечание. В этом примере при вычислении каждого интеграла можно сразу воспользоваться формулой (1,10), заменив в ней u на x.

Задача 1,4 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \sqrt[n]{x}\,dx$; 2) $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx$; 3) $\int (ax^2+bx+c)\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{n}{n+1}x\sqrt[n]{x}+C$; 2) $\frac{n}{m+n}x\sqrt[n]{x^m}+C$; 3) $\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+$ $+cx+C$.

Задача 1,5 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt[7]{x^5}}\right)dx$; 2) $\int\left(\frac{3}{x^5}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^3}\right)dx$.

Ответ. 1) $15\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+14\sqrt[7]{x^2}+C$;

2) $-\frac{3}{4}\frac{1}{x^4}+\frac{2}{3}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+C$.

Задача 1,6. Вычислить интеграл $I=\int\frac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}-7x+6}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Решение. Для вычисления интеграла следует разделить многочлен, стоящий в числителе, на знаменатель. Если это выполнить, то получится, что

$$I_1=\int\left(x^{\frac{11}{3}}-3x^{\frac{5}{3}}+5-7x^{\frac{2}{3}}+6x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}}+5x-$$

$$-\frac{21}{5}x^{\frac{5}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}+C=\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3}{14}x^4-\frac{9}{8}x^2+5\sqrt[3]{x}-\frac{21}{5}x+9\right)+C.$$

Задача 1,7 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int(3x^2-5)^3\,dx$; 2) $\int\frac{x^6+3x^5-7x^4+5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{27}{7}x^7-27x^5+75x^3-125x+C$;

2) $4\sqrt[4]{x}\left(\frac{x^6}{25}+\frac{x^5}{7}-\frac{7}{17}x^4\right)+\frac{60}{7}\sqrt[12]{x^7}+C$.

Задача 1,8. Какая функция имеет производную $5x^2-7x+4$ и принимает значение, равное 3, при $x=1$?

Решение. В задаче требуется найти функцию, для которой известна ее производная, т. е. требуется найти первообразную функцию для функции $5x^2-7x+4$.

Из бесчисленного множества первообразных, которые имеет эта функция, следует отобрать ту, которая равна 3 при $x=1$.

Если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функция, то в самом общем виде она на основании формулы (1,2) запишется так:

$$F(x) + C = \int (5x^2 - 7x + 4)\,dx;$$

$$F(x) + C = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x.$$

В условии задачи дано, что $F(1) = 3$, для того чтобы определить произвольную постоянную. Полагая в последнем равенстве $x = 1$, а $F(1) = 3$, получаем

$$3 + C = \frac{5}{3} - \frac{7}{2} + 4,$$

отсюда $C = -\frac{5}{6}$. Тогда $F(x) - \frac{5}{6} = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x$, а искомая функция $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{6}$.

Таким образом, мы нашли функцию $F(x)$, производная которой равна $5x^2 - 7x + 4$, и кроме того $F(1) = 3$.

Задача 1,9 (для самостоятельного решения). Какая функция имеет производную $3x^2 + 2x + 1$ и принимает значение, равное 2, при $x = 0$?

Ответ. Искомая функция $F(x) = x^3 + x^2 + x + 2$.

Задача 1,10 (для самостоятельного решения). Какая функция имеет производную $5 - 9x + 4x^2$, если известно, что при $x = 2$ эта функция равна 50?

Ответ. Искомая функция $F(x) = 5x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{142}{3}$.

Задача 1,11 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

$$1) \int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx; \quad 2) \int \frac{(4+2\sqrt{x})(x^3+5)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$$

Указание. В первом интеграле числитель сначала возвести в куб, полученный многочлен разделить на $\sqrt{x}$ и после этого проинтегрировать. Во втором интеграле в числителе перемножить многочлены, произведение разделить на $\sqrt[3]{x^2}$, после чего выполнить интегрирование.

Ответ. 1) $2\sqrt{x} + 3x + 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$;

2) $\frac{6}{5}x^3\sqrt[3]{x} + \frac{12}{23}x^3\sqrt[6]{x^5} + 60\sqrt[3]{x} + 12\sqrt[6]{x^5} + C$.

Задача 1,12. Вычислить интегралы: 1) $\int (x^2+5)^7\, 2x\,dx$;
2) $\int (3x^3 + 5x^2 - 8)^3 (9x^2 + 10x)\,dx$; 3) $\int \sqrt{x^2+6} \cdot 2x\,dx$;
4) $\int (2x^2+7)^3\, x\,dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^3+8}\, x^2\,dx$; 6) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, x\,dx$.

Решение. Все эти примеры решаются с помощью формулы (1,29). Прежде чем применять ее, надо выяснить: 1) какую из функций, стоящих под интегралом, следует принять равной u и 2) есть ли под интегралом множитель, равный u'.

1) В первом примере следует взять $u = x^2 + 5$. Множитель $2x$ является производной функции u, так как $(x^2 + 5)' = 2x$. Поэтому на основании (1,29) при $n = 7$ имеем

$$\int \underbrace{(x^2+5)^7}_{u^7} \cdot \underbrace{2x}_{u'} \, dx = \frac{(x^2+5)^8}{8} + C.$$

Если бы подынтегральная функция не содержала множитель $2x$, то применить формулу (1,29) было бы нельзя. В этом случае следовало бы вычислить по формуле Ньютона $(x^2 + 5)^7$ и интегрировать полученную сумму функций.

2) Пример второй решается аналогично. Считая, что $u = 3x^3 + 5x^2 - 8$, и замечая, что множитель $9x^2 + 10x$ есть производная функции u, а $n = 3$, по формуле (1,29) находим

$$\int \underbrace{(3x^3+5x^2-8)^3}_{u^3} \cdot \underbrace{(9x^2+10x)}_{u'} \, dx = \frac{(3x^3+5x^2-8)^4}{4} + C.$$

Здесь опять-таки отметим, что наличие множителя $9x^2 + 10x$, который на первый взгляд осложнил подынтегральную функцию, на самом деле облегчило интегрирование, так как если бы множитель $9x^2 + 10x$ отсутствовал, то для вычисления интеграла следовало бы возвести $3x^3 + 5x^2 - 8$ в куб, что потребовало бы значительно больших выкладок.

3) Этот пример также легко решается, так как подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$. Действительно, полагая $u = x^2 + 6$, мы замечаем, что множитель $2x$ равен u', $n = \frac{1}{2}$, а потому

$$\int \sqrt{x^2+6} \cdot 2x \, dx = \int \underbrace{(x^2+6)^{\frac{1}{2}}}_{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{2x}_{u'} \, dx = \frac{(x^2+6)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2+6)\sqrt{x^2+6} + C.$$

Если бы подынтегральная функция не содержала множитель $2x$, то вычисление интеграла $\int \sqrt{x^2+6}\, dx$ потребовало бы значительно большей работы. Еще раз напоминаем читателю, что формула (1,29) применима только тогда, когда подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$ или может быть преобразована к этому виду.

4) В этом примере подынтегральная функция равна $(2x^2+7)^3 x$. Если принять, что $u = 2x^2 + 7$, то $u' = 4x$. Множитель $4x$ отсутствует под знаком интеграла, а потому подынтегральная функция не имеет вида $u^n u'$.

К такому виду мы легко придем, если запишем подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{4}(2x^2+7)^3 4x$, т. е. если умножим и разделим подынтегральную функцию на 4, отчего ее значение не изменится. При интегрировании постоянный множитель $\frac{1}{4}$ вынесем за знак интеграла и применим формулу (1,29). Имеем

$$\int (2x^2+7)^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{(2x^2+7)^3}_{u^3} \cdot \underbrace{4x}_{u'}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{(2x^2+7)^4}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{16}(2x^2+7)^4 + C.$$

В этом примере подынтегральная функция не имела вид $u^n u'$, но умножением на постоянную величину легко была к нему приведена.

5) Подынтегральная функция в этом примере может быть записана так: $(x^3+8)^{\frac{1}{3}} x^2$. Если принять $u = x^3 + 8$, то $u' = 3x^2$. У нас же вместо множителя $3x^2$ есть множитель x^2.

Умножим на 3 подынтегральную функцию. Чтобы она не изменила своего значения, разделим ее на 3 и получим $\frac{1}{3}(x^3 + 8)^{\frac{1}{3}} 3x^2$. При интегрировании множитель $\frac{1}{3}$ вынесем за знак интеграла, а под интегралом окажется выражение вида $u^n u'$ $\left(n = \frac{1}{3}\right)$. Применяя формулу (1,29), получаем

$$\int \sqrt[3]{x^3+8}\,x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(x^3+8)^{\frac{1}{3}}}_{u^{\frac{1}{3}}} \cdot \underbrace{3x^2}_{u'}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(x^3+8)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{(x^3+8)\sqrt[3]{x^3+8}}{4} + C.$$

6) В этом примере опять-таки придется преобразовать подынтегральную функцию так, чтобы она приобрела вид $u^n u'$. Представим ее в виде $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x$. Если принять, что $u = a^2 - x^2$, то $u' = -2x$. Значит, чтобы под знаком интеграла был множитель $-2x$, подынтегральную функцию надо умножить на -2.

Выполняя это умножение и деля одновременно на -2, получаем: $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}x = -\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)$. При интегрировании множитель $-\frac{1}{2}$ вынесем за знак интеграла, тогда под интегралом окажется выражение вида $u^n u'$ и формула (1,29) может быть применена. Записи расположатся так:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,x\cdot dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}_{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{u^1} dx = -\frac{1}{2}\,\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Задача 1,13 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int (5x+4)^4\,dx$; 2) $\int (9+7x^2)^5 x\,dx$; 3) $\int (8ax^2+9bx^3)^{\frac{4}{3}} \times$ $\times (16ax+27bx^2)\,dx$; 4) $\int \sqrt{4x^2+8x}\,(2x+2)\,dx$;
5) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{7+x^3}}$; 6) $\int \sqrt{1-x}\,dx$.

Указания. В пятом интеграле: $\frac{x^2}{\sqrt{7+x^3}} = (7+x^3)^{-\frac{1}{2}}x^2 =$ $= \frac{1}{3}\underbrace{(7+x^3)}_{u}^{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{3x^2}_{u'}$.

В шестом интеграле: $\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = -\underbrace{(1-x)}_{u}^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{(-1)}_{u'}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{25}(5x+4)^5 + C$; 2) $\frac{1}{84}(9+7x^2)^6 + C$;
3) $\frac{3}{7}(8ax^2+9bx^3)^{\frac{7}{3}} + C$; 4) $\frac{1}{6}(4x^2+8x)\sqrt{4x^2+8x} + C$;
5) $\frac{2}{3}\sqrt{7+x^3} + C$; 6) $-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} + C$.

Задача 1,14. Вычислить интегралы: 1) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$;
2) $\int \cos^5 4x\sin 4x\,dx$; 3) $\int \frac{x^2\,dx}{(4x^3+9)^4}$; 4) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$; 5) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$;
6) $\int \operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\,dx$; 7) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin x\,dx$.

Решение. 1) Подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$. Действительно, если $u = \sin x$, то $u' = \cos x$, $n = 3$. Поэтому, применяя формулу (1,29), имеем

$$\int \underbrace{\sin^3 x}_{u^3} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'}\,dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

2) В этом примере подынтегральная функция $\cos^5 4x \sin 4x$ не имеет вид $u^n u'$, так как если $u = \cos 4x$, то $u' = -4\sin 4x$ $(n=5)$. Значит, недостает множителя -4. Умножая и деля на -4 и вынося $-\frac{1}{4}$ за знак интеграла, получим:

$$\int \cos^5 4x \sin 4x\, dx = -\frac{1}{4}\int \underbrace{\cos^5 4x}_{u^5} \cdot \underbrace{(-4\sin 4x)}_{u'}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\cos^6 4x}{6} + C = -\frac{1}{24}\cos^6 4x + C.$$

3) Представим подынтегральную функцию в виде $(4x^3+9)^{-4}x^2$. Возьмем $u = 4x^3 + 9$, тогда $u' = 12x^2$ $(n=-4)$. Чтобы подынтегральная функция приобрела вид $u^n u'$, её надо умножить на 12. Умножив и разделив полученное выражение на 12, вынесем множитель $\frac{1}{12}$ за знак интеграла. Тогда получим

$$\int \frac{x^2\, dx}{(4x^3+9)^4} = \frac{1}{12}\int \underbrace{(4x^3+9)^{-4}}_{u^{-4}} \cdot \underbrace{12x^2}_{u'}\, dx = \frac{1}{12}\frac{(4x^3+9)^{-4+1}}{-4+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{36}\frac{1}{(4x^3+9)^3} + C.$$

4) Представим подынтегральную функцию в виде $\operatorname{arctg}^3 x \times \times \frac{1}{1+x^2}$. Положив $u = \operatorname{arctg} x$, получим $u' = \frac{1}{1+x^2}$, и подынтегральная функция будет иметь вид $u^n u'$ $(n=3)$. Поэтому без дополнительных преобразований можем применить формулу (1,29). Найдем

$$\int \operatorname{arctg}^3 x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$$

5) Запишем подынтегральную функцию в виде $\sin^{-5} x \cos x$. Возьмем $u = \sin x$, тогда, $u' = \cos x$. В таком случае без всяких преобразований подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$, а потому на основании формулы (1,29) получаем

$$\int \underbrace{\sin^{-5} x}_{u^{-5}} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'}\, dx = \frac{\sin^{-4} x}{-4} + C = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^4 x} + C.$$

6) Положим, что $u = \operatorname{tg} x$, тогда $u' = \sec^2 x$ и подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$ $(n=2)$, никаких дополнительных преобразований делать не требуется. На основании (1,29) сразу получаем

$$\int \underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{u^2} \cdot \underbrace{\sec^2 x}_{u'}\, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

7) Представим подынтегральную функцию в виде $\cos^{\frac{2}{3}} x \sin x$. Возьмем $u = \cos x$, тогда $u' = -\sin x$, $n = \frac{2}{3}$. Чтобы получить

под знаком интеграла выражение вида $u^n u'$, но не изменить величину подынтегральной функции, умножим и разделим ее на -1. По формуле (1,29) получаем

$$\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin x\,dx = -\int \underbrace{\cos^{\frac{2}{3}} x}_{u^{\frac{2}{3}}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{u'}\,dx = -\frac{\cos^{\frac{5}{3}} x}{\frac{5}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{5}\cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Решим еще одну аналогичную задачу.

Задача 1,15. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$;

2) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$; 3) $\int \frac{dx}{x\ln^4 x}$; 4) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

5) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,dx$; 6) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}\,dx$.

Решение. 1) Представим $\frac{\ln x}{x}$ в виде $(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$. Полагая $u = \ln x$, получим $u' = \frac{1}{x}$. Подынтегральная функция $\frac{\ln x}{x}$ приобретает вид $u^n u'$ $(n = 1)$, и тогда $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C$.

2) $\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} = (\arcsin x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Считая, что $u = \arcsin x$, имеем $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, а потому по формуле (1,29)

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx = \int (\arcsin x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{\arcsin x} + C.$$

3) Выражение $\frac{1}{x\ln^4 x} = (\ln x)^{-4}\cdot\frac{1}{x}$. Если положить $u = \ln x$, то $u' = \frac{1}{x}$, и подынтегральная функция $(\ln x)^{-4}\cdot\frac{1}{x}$ приобретет вид $u^n u'$ $(n = -4)$, а потому по формуле (1,29)

$$\int \frac{dx}{x\ln^4 x} = \int \underbrace{(\ln x)^{-4}}_{u^{-4}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\,dx = \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3\ln^3 x} + C.$$

4) Подынтегральную функцию можно преобразовать так: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x$. Положим, что $u=1+x^2$, тогда $u'=$ $=2x$. Если $\frac{1}{2}$ вынести за знак интеграла, то подынтегральная функция примет вид $u^n u'$ и формулу (1,29) применить можно:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int\underbrace{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{u^{-\frac{1}{2}}}\cdot\underbrace{2x\,dx}_{u'}=\frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{1+x^2}+C.$$

При решении этого примера можно было сразу воспользоваться формулой (1,11), переписав подынтегральную функцию в виде $\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{u'\,dx}{\sqrt{u}}$.
Тогда

$$\int\frac{u'\,dx}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C. \qquad (1,31)$$

Заметьте, что числитель дроби под знаком интеграла равен производной функции, стоящей в знаменателе под квадратным корнем. Если положить $u=1+x^2$, числитель дроби переписать в виде $x=\frac{1}{2}\cdot 2x$ и вынести $\frac{1}{2}$ за знак интеграла, то окажется, что числитель дроби равен производной функции, стоящей в знаменателе под квадратным корнем. На основании формулы (1,31)

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+x^2}+C=\sqrt{1+x^2}+C.$$

5) Подынтегральную функцию перепишем так: $\frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}=$ $=-\frac{-\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}$. Теперь числитель дроби равен производной функции, стоящей под корнем в знаменателе. Поэтому на основании формулы (1,31) имеем

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx=-\int\frac{-\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx=-2\sqrt{5+\cos x}+C.$$

6) Принимая $u=3-\sin^2 x$, получаем, что $u'=-2\sin x\cos x$. Переписываем подынтегральную функцию в виде $\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}=$ $=-\frac{1}{2}\,\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}$. Теперь мы можем применить формулу (1,31), так как числитель второй дроби является производной функции, стоящей в знаменателе под квадратным корнем:

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3-\sin^2 x}+$$
$$+C=-\sqrt{3-\sin^2 x}+C.$$

Ниже предлагаются для самостоятельного решения десять примеров на применение формул (1,29) и (1,31).

Задача 1,16 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; 3) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; 6) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$; 7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7-\cos^2 x}} dx$; 8) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-3x^2}}$;

9) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\,dx$; 10) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx$.

Ответ. 1) $-\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^6 x + C$; 2) $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x} + C$;

3) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$; 4) $\frac{1}{4}\arcsin^4 x + C$;

5) $\frac{3}{4}\operatorname{arctg} x\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} + C$; 6) $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$;

7) $2\sqrt{7-\cos^2 x} + C$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x^2} + C$;

9) $\frac{1}{4}\operatorname{sh}^4 x + C$; 10) $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + C$.

Чтобы закончить это практическое занятие, нам остается выполнить упражнения на применение формулы (1,12). Полагая, что u есть функция независимой переменной x: $u = u(x)$, а $du = u'\,dx$, эту формулу можно переписать в виде, более удобном для применения:

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C. \tag{1,32}$$

Следует обратить внимание на подынтегральную функцию $\frac{u'}{u}$: числитель дроби является производной ее знаменателя, а первообразная функция равна натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя. Если $u = x$, то $u' = 1$, и формула (1,32) запишется так:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{1,33}$$

Задача 1,17. Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x+a}$;

2) $\int \frac{2x}{x^2+5} dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$; 4) $\int \frac{x}{1-x^2} dx$;

5) $\int \frac{dx}{a-x}$; 6) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 7) $\int \frac{x^2}{4+3x^3} dx$;

8) $\int \frac{x}{1+x} dx$; 9) $\int \frac{e^x}{5+e^x} dx$; 10) $\int \frac{x^3}{x+2} dx$.

Решение. 1) Подынтегральная функция $\frac{1}{x+a}$ — дробь, числитель которой является производной знаменателя $(x+a)$. Дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, а потому на основании формулы (1,32) интеграл равен натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

2) И в этом примере подынтегральная функция — дробь, числитель которой есть производная знаменателя: $u = x^2 + 5$, $u' = 2x$, дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, формула (1,32) может быть применена:

$$\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \ln(x^2+5) + C.$$

Здесь x^2+5 не следует писать под знаком абсолютной величины, так как $x^2+5>0$ при любом действительном значении x.

3) Стоящую под знаком интеграла дробь $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ можно преобразовать так, чтобы ее числитель стал равным производной знаменателя.

Действительно, $\frac{\sin x}{1+\cos x} = -\frac{-\sin x}{1+\cos x}$. Если $u = 1+\cos x$, то $u' = -\sin x$, дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, формула (1,32) применима и

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\ln|1+\cos x| + C.$$

4) Дробь $\frac{x}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{1-x^2}$. Если $u = 1-x^2$, то $u' = -2x$, и числитель второй дроби равен производной знаменателя. Эта дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$. Поэтому по формуле (1,32)

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C.$$

5) Чтобы преобразовать дробь $\frac{1}{a-x}$ к виду $\frac{u'}{u}$, перепишем ее так: $\frac{1}{a-x} = -\frac{-1}{a-x}$. Если знаменатель дроби $a-x=u$, то $u' = -1$, числитель дроби равен производной знаменателя, и по формуле (1,32) получаем

$$\int \frac{dx}{a-x} = -\int \frac{-1}{a-x}\,dx = -\ln|a-x| + C.$$

6) Перепишем подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$. Если взять $u=\ln x$, то $u'=\frac{1}{x}$, и числитель дроби равен производной ее знаменателя. Поэтому на основании (1,32) имеем

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx=\ln|\ln x|+C.$$

7) Подынтегральную функцию можно преобразовать так, чтобы ее числитель был равен производной знаменателя: $\frac{x^2}{4+3x^3}=$ $=\frac{1}{9}\frac{9x^2}{4+3x^3}$. Принимаем, что $u=4+3x^3$, тогда $u'=9x^2$. Вторая дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, и по формуле (1,32) получаем

$$\int\frac{x^2}{4+3x^3}dx=\frac{1}{9}\int\frac{9x^2}{4+3x^3}dx=\frac{1}{9}\ln|4+3x^3|+C.$$

8) Дробь $\frac{x}{1+x}$ — рациональная, неправильная: степень ее числителя равна степени знаменателя. С помощью деления можно из этой дроби выделить целую часть. Действительно, если разделить x на $x+1$, то получится $1-\frac{1}{x+1}$. Таким образом,

$$\int\frac{x}{x+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{1}{x+1}dx=x-\ln|x+1|+C$$

(применены формулы (1,8) и (1,32), при вычислении второго интеграла учтено, что числитель дроби 1 равен производной знаменателя дроби).

9) Если $u=5+e^x$, то $u'=e^x$. Дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, и по формуле (1,32) получаем

$$\int\frac{e^x}{5+e^x}dx=\ln(5+e^x)+C$$

(так как при любом значении x имеет место неравенство: $5+$ $+e^x>0$, то выражение $5+e^x$ мы не поставили под знак абсолютной величины).

10) Дробь $\frac{x^3}{x+2}$ — неправильная, так как степень числителя больше степени знаменателя. Чтобы выделить целую часть, разделим x^3 на $x+2$ и получим $\frac{x^3}{x+2}=x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}$, а потому

$$\int\frac{x^3}{x+2}dx=\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx=\int x^2\,dx-2\int x\,dx+$$
$$+4\int dx-8\int\frac{dx}{x+2}=\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln|x+2|+C.$$

В этом примере вместо деления x^3 на $x+2$ можно было представить дробь в таком виде:

$$\frac{x^3}{x+2}=\frac{x^3+8-8}{x+2}=\frac{x^3+8}{x+2}-\frac{8}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}-\frac{8}{x+2}=$$
$$=x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}.$$

Аналогично в восьмом примере дробь $\frac{x}{1+x}=\frac{x+1-1}{1+x}=1-$ $-\frac{1}{1+x}$.

Задача 1,18 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{dx}{a+bx}$; 2) $\int\frac{x\,dx}{a^2-b^2x^2}$; 3) $\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$;

4) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\operatorname{tg}x}$; 5) $\int\frac{\sin x}{5+7\cos x}dx$; 6) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;

7) $\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}$; 8) $\int\frac{\sin 2x}{b^2\cos^2 x+a^2}dx$; 9) $\int\frac{x^4}{x-1}dx$;

10) $\int\frac{3x-2}{2x+3}dx$; 11) $\int\operatorname{tg}x\,dx$; 12) $\int\operatorname{ctg}x\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$ $\left(x\neq-\frac{a}{b}\right)$;

2) $-\frac{1}{2b^2}\ln|a^2-b^2x^2|+C$; 3) $\ln|\operatorname{arctg}x|+C$;

4) $\ln|\operatorname{tg}x|+C$; 5) $-\frac{1}{7}\ln|5+7\cos x|+C$;

6) $\ln|\arcsin x|+C$ $(x\neq 0)$; 7) $-\ln|1-\ln x|+\ln C=\ln\left|\frac{C}{1-\ln x}\right|$;

8) $-\frac{1}{b^2}\ln|b^2\cos^2 x+a^2|+C$; 9) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$;

10) $\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}\ln|2x+3|+C$; 11) $-\ln|\cos x|+C$;

12) $\ln|\sin x|+C$.

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегрирование показательной и тригонометрических функций.

На этом практическом занятии мы проведем упражнения в непосредственном интегрировании по формулам (1,13) — (1,20).

1. **Интегрирование показательной функции** (упражнения в применении формул (1,13) и (1,14)).

Придадим этим формулам вид, который более удобен для применения их на практике: считая u функцией независимой переменной x: $u = u(x)$, запишем, что $du = u'\,dx$, а потому формулы (1,13) и (1,14) перепишутся в виде:

$$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1); \tag{2,1}$$

$$\int e^u u'\,dx = e^u + C. \tag{2,2}$$

Здесь следует обратить внимание на то, что подынтегральная функция в этих формулах содержит множитель u', являющийся производной функции u, стоящей в показателе степени. Без этого множителя формулы (2,1) и (2,2) не верны. Если x — независимая переменная, т. е. $u = x$, то $u' = 1$, формулы (2,1) и (2,2) перепишутся так:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1); \tag{2,3}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \tag{2,4}$$

Задача 2,1. Вычислить интегралы: 1) $\int 3^x\,dx$; 2) $\int (\sqrt{2})^x\,dx$; 3) $\int 4^{-x}\,dx$; 4) $\int e^{-x}\,dx$; 5) $\int 2^{3x}\,dx$; 6) $\int e^{5x}\,dx$.

Решение. 1) Этот пример не требует пояснений. Он решается непосредственным применением формулы (2,3). Полагая в ней $a = 3$, получаем $\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

2) Точно так же полагая в (2,3) $a = \sqrt{2}$, получаем, что

$$\int (\sqrt{2})^x\,dx = \frac{(\sqrt{2})^x}{\ln \sqrt{2}} + C = \frac{2(\sqrt{2})^x}{\ln 2} + C.$$

3) Этот интеграл не может быть вычислен по формуле (2,3), так как в показателе степени стоит не x, а $-x$. Поэтому обратимся к формуле (2,1). Перепишем подынтегральную функцию в виде $4^{-x} = -4^{-x}\cdot(-1)$. Такое преобразование нам понадобилось для того, чтобы ввести множитель -1, который является производной от показателя степени $-x$. Теперь уже подынтегральная функция содержит производную от показателя степени, и мы получаем при $a = 4$, полагая, что $u = -x$:

$$\int 4^{-x}\,dx = \int -4^{-x}(-1)\,dx = -\int \underbrace{4^{-x}}_{4^u}\cdot\underbrace{(-1)}_{u'}\,dx = -\frac{4^{-x}}{\ln 4} + C.$$

4) Запишем, что $e^{-x} = -e^{-x}(-1)$ и применим формулу (2,2). Полагая в ней $u = -x$, имеем

$$\int e^{-x}\,dx = -\int \underbrace{e^{-x}}_{e^u}\cdot\underbrace{(-1)}_{u'}\,dx = -e^{-x} + C.$$

5) При решении этого примера формула (2,1) не может быть применена, так как подынтегральная функция не содержит множителя u', являющегося производной от показателя степени $u = 3x$. Но так как $u' = 3$, введем такой множитель, умножив и разделив подынтегральную функцию на 3. Тогда можно будет применить формулу (2,1): $2^{3x} = \frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot 3$. Поэтому

$$\int 2^{3x}\,dx = \int \frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot 3\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{2^{3x}}_{2^u} \cdot \underbrace{3}_{u'}\,dx = \frac{1}{3}\frac{2^{3x}}{\ln 2} + C.$$

6) Поступая так же, как в предыдущем примере, получаем по формуле (2,2)

$$\int e^{5x}\,dx = \int \frac{1}{5} e^{5x} 5\,dx = \frac{1}{5}\int \underbrace{e^{5x}}_{e^u} \cdot \underbrace{5}_{u'}\,dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

Задача 2,2. Вычислить интегралы: 1) $\int a^{kx}\,dx$; 2) $\int e^{kx}\,dx$;

3) $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$; 5) $\int 7^{x^2} x\,dx$; 6) $\int e^{x^3} x^2\,dx$;

7) $\int 2^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x\,dx$; 8) $\int e^{-(x^3+x+3)} (3x^2+1)\,dx$; 9) $\int e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}\,dx$;

10) $\int (e^x + e^{-x})^2\,dx$.

Решение. 1) При вычислении этого интеграла следует иметь в виду, что k — любое действительное число. Подынтегральная функция a^{kx} не содержит множителя u'. Если $u = kx$, то $u' = k$. Чтобы ввести этот множитель, перепишем подынтегральную функцию так: $a^{kx} = \frac{1}{k} a^{kx} k$. Поэтому

$$\int a^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\int \underbrace{a^{kx}}_{a^u} \cdot \underbrace{k}_{u'}\,dx = \frac{1}{k}\frac{a^{kx}}{\ln a} + C.$$

2) Применим рассуждения, проведенные в предыдущем примере: $e^{kx} = \frac{1}{k} e^{kx} k$, а потому

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\int \underbrace{e^{kx}}_{e^u} \cdot \underbrace{k}_{u'}\,dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$$

Этот результат полезно запомнить. Зная его, сразу получаем, что например, $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$; $\int e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2e^{\frac{x}{2}} + C$ $\left(\text{здесь } k = \frac{1}{2},\ \frac{1}{k} = 2\right)$; $\int e^{-\frac{x}{3}}\,dx = -3e^{-\frac{x}{3}} + C$ $\left(\text{здесь } k = -\frac{1}{3},\ \frac{1}{k} = -3\right)$, и т. д.

3) Здесь показатель степени $u=\sqrt{x}$, $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Подынтегральная функция вместо этого множителя содержит множитель $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Умножая и деля на $\frac{1}{2}$, получим $5^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}=2\cdot 5^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$, а потому по формуле (2,1) при $a=5$

$$\int 5^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int\underbrace{5^{\sqrt{x}}}_{5^u}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'}dx=2\cdot\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}+C.$$

4) В примере $u=\cos x$; $u'=-\sin x$. Значит, недостает множителя -1. Подынтегральную функцию представим в виде $e^{\cos x}\sin x=$ $=-e^{\cos x}(-\sin x)$, поэтому по формуле (2,2)

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int\underbrace{e^{\cos x}}_{e^u}\underbrace{(-\sin x)}_{u'}dx=-e^{\cos x}+C.$$

5) Здесь $u=x^2$; $u'=2x$.

Подынтегральная же функция содержит множитель x. Умножая и деля ее на 2, запишем, что $7^{x^2}x=\frac{1}{2}\cdot 7^{x^2}\cdot 2x$, а $\int 7^{x^2}x\,dx=$ $=\frac{1}{2}\int\underbrace{7^{x^2}}_{7^u}\cdot\underbrace{2x}_{u'}dx=\frac{1}{2}\frac{7^{x^2}}{\ln 7}+C.$

6) В этом примере функция $u=x^3$, ее производная $u'=3x^2$. Подынтегральная же функция содержит множитель x^2. Умножая и деля ее на три, получим $e^{x^3}x^2=\frac{1}{3}e^{x^3}3x^2$. По формуле (2,2) находим

$$\int e^{x^3}x^2\,dx=\frac{1}{3}\int\underbrace{e^{x^3}}_{e^u}\cdot\underbrace{3x^2}_{u'}dx=\frac{1}{3}e^{x^3}+C.$$

7) Этот пример решается без предварительных преобразований, так как множитель $\sec^2 x$ — производная от функции $u=\operatorname{tg}x$ — входит в подынтегральную функцию. По формуле (2,1) при $a=2$ получаем

$$\int\underbrace{2^{\operatorname{tg}x}}_{2u}\cdot\underbrace{\sec^2 x}_{u'}dx=\frac{2^{\operatorname{tg}x}}{\ln 2}+C.$$

8) Полагая здесь $u=-(x^3+x+3)$, имеем $u'=-(3x^2+1)$. Вместо этого множителя подынтегральная функция содержит множитель $3x^2+1$. Чтобы получить требуемый множитель u', подынтегральную функцию представим в виде $e^{-(x^3+x+3)}(3x^2+1)=$ $=-e^{-(x^3+x+3)}[-(3x^2+1)]$ и на основании (2,2) получим

$$\int e^{-(x^3+x+1)}(3x^2+1)\,dx=-\int\underbrace{e^{-(x^3+x+1)}}_{e^u}[\underbrace{-(3x^2+1)}_{u'}]dx=$$

$$=-e^{-(x^3+x+1)}+C.$$

9) Здесь функция $u=\frac{1}{x}$, ее производная $u'=-\frac{1}{x^2}$. Подынтегральную функцию перепишем в виде $e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=-e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, и по формуле (2,2) найдем

$$\int e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}dx=-\int \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{e^u}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{u'}dx=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

10) $(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+2+e^{-2x}$. Учитывая решение второго примера, получаем

$$\int(e^x+e^{-x})^2dx=\int(e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx=\int e^{2x}\,dx+\int 2\,dx+$$
$$+\int e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C.$$

Задача 2,3 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int(e^{ks}-e^{-ks})\,ds$; 2) $\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

3) $\int e^{\sin x}\cos x dx$; 4) $\int(e^{\frac{x}{3}}+2)^3e^{-\frac{x}{4}}dx$; 5) $\int 9^{x^3+6x^2+3x}(x^2+4x+1)\,dx$;

6) $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx$; 7) $\int(e^{ay}+e^{-ay})^3\,dy$; 8) $\int\frac{e^{\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^2}dx$;

9) $\int e^{5+\sin^2 2x}\sin 4x dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{k}(e^{ks}+e^{-ks})+C$; 2) $e^{\arcsin x}+C$; 3) $e^{\sin x}+C$;

4) $\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}x}+\frac{72}{5}e^{\frac{5}{12}x}+144e^{\frac{1}{12}x}-32e^{-\frac{x}{4}}+C$; 5) $\frac{1}{3\ln 9}\cdot 9^{x^3+6x^2+3x}+C$;

6) $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]-2x+C$; 7) $\frac{1}{3a}(e^{3ay}-e^{-3ay})+\frac{3}{a}(e^{ay}-$
$-e^{-ay})+C$; 8) $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg}2x}+C$; 9) $\frac{1}{2}e^{5+\sin^2 2x}+C$.

2. Интегрирование тригонометрических функций (упражнения в применении формул (1,15) — (1,20).

Полагая, что функция u, входящая в эти формулы, есть функция независимой переменной x: $u=u(x)$, и заменяя дифференциал этой функции du по формуле $du = u'\,dx$, формулы (1,15) — (1,20) можно переписать в виде более удобном для практики:

$$\int \sin u \cdot u'\,dx = -\cos u + C; \tag{2,5}$$

$$\int \cos u \cdot u'\,dx = \sin u + C; \tag{2,6}$$

$$\int \operatorname{tg} u \cdot u'\,dx = -\ln|\cos u| + C; \tag{2,7}$$

$$\int \operatorname{ctg} u \cdot u'\,dx = \ln|\sin u| + C; \tag{2,8}$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \operatorname{tg} u + C; \tag{2,9}$$

$$\int \frac{u'}{\sin^2 u}\,dx = -\operatorname{ctg} u + C. \tag{2,10}$$

Следует обратить внимание на то, что множитель u', входящий в подынтегральную функцию во всех этих формулах, есть производная от той функции u, которая находится под знаком тригонометрической функции. Если u — независимая переменная, $u = x$, то $u' = 1$, и эти формулы перепишутся так:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C; \tag{2,11}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C; \tag{2,12}$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C; \tag{2,13}$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C; \tag{2,14}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C; \tag{2,15}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{2,16}$$

Задача 2,4. Вычислить интегралы: 1) $\int \sin mx\,dx$; 2) $\int \cos nx\,dx$; 3) $\int \operatorname{tg} kx\,dx$; 4) $\int \operatorname{ctg} lx\,dx$; 5) $\int \frac{1}{\cos^2 px}\,dx$; 6) $\int \frac{1}{\sin^2 qx}\,dx$.

Во всех примерах буквы m, n, p, q, k и l — величины постоянные, не равные нулю.

Решение. 1) Формулу (2,5) можно применить в том случае, если подынтегральная функция имеет множитель u', являющийся производной от функции, стоящей под знаком синуса.

В нашем случае функция $u = mx$, а ее производная $u' = m$. Множитель m в подынтегральной функции не содержится. Умножим и разделим подынтегральную функцию на m, т. е. представим ее в виде $\sin mx = \frac{1}{m}\sin mx \cdot m$; тогда, вынося постоянный множитель $\frac{1}{m}$ за знак интеграла, по формуле (2,5) получим

$$\int \sin mx\,dx = \frac{1}{m}\int \sin \underbrace{mx}_{u} \cdot \underbrace{m}_{u'}\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C.$$

2) Повторяя те же рассуждения, что и при решении первого примера, получим по формуле (2,6)

$$\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int \cos \underbrace{nx}_{u} \cdot \underbrace{n}_{u'}\,dx = \frac{1}{n}\sin nx + C.$$

На основании этих результатов легко вычисляются, например, такие интегралы: $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$; $\int \sin\frac{x}{3}\,dx = -\frac{1}{\frac{1}{3}}\cos\frac{x}{3} + C = -3\cos\frac{x}{3} + C$ $\left(\text{здесь } u = \frac{x}{3};\quad u' = \frac{1}{3}\right)$;

$\int \cos\sqrt{2}x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x + C$; $\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C$;

$\int \cos\frac{x}{m}\,dx = m\sin\frac{x}{m} + C$ $\left(\text{здесь } u = \frac{x}{m};\ u' = \frac{1}{m}\right)$.

3) Здесь $u = kx$; $u' = k$. Подынтегральная функция не содержит множителя k. Чтобы можно было применить формулу (2,7), преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы оно содержало множитель k: умножим и разделим его на k и представим в виде $\operatorname{tg} kx = \frac{1}{k}\operatorname{tg} kx \cdot k$. Теперь на основании (2,7) получаем

$$\int \operatorname{tg} kx\,dx = \frac{1}{k}\int \operatorname{tg}\underbrace{kx}_{u} \cdot \underbrace{k}_{u'}\,dx = -\frac{1}{k}\ln|\cos kx| + C.$$

4) Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем примере, получаем по формуле (2,8)

$$\int \operatorname{ctg} lx\,dx = \frac{1}{l}\int \operatorname{ctg} lx \cdot dx = \frac{1}{l}\ln|\sin lx| + C.$$

Используя результаты, полученные при решении этого и предыдущего примера, легко вычислим такие интегралы:

$$\int \operatorname{tg} 2x\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C;\quad \int \operatorname{tg}\frac{x}{5}\,dx = -5\ln\left|\cos\frac{x}{5}\right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} 3x\,dx = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C;\quad \int \operatorname{ctg}\frac{x}{a}\,dx = a\ln\left|\sin\frac{x}{a}\right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg}\frac{x}{7}\,dx = 7\ln\left|\sin\frac{x}{7}\right| + C.$$

5) По формуле (2,9) получаем

$$\int \frac{1}{\cos^2 px}\,dx = \frac{1}{p}\int \frac{1}{\cos^2 \underbrace{px}_{u}}\underbrace{p}_{u'}\,dx = \frac{1}{p}\operatorname{tg} px + C$$

(подынтегральную функцию мы умножили и разделили на p, а постоянный множитель $\frac{1}{p}$ вынесли за знак интеграла), поэтому, например, $\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + C$; $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{6}} = 6 \operatorname{tg} \frac{x}{6} + C$; $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

6) На основании формулы (2,10), повторяя рассуждения, проведенные при решении предыдущих примеров, получаем

$$\int \frac{1}{\sin^2 qx} dx = \frac{1}{q} \int \frac{1}{\sin^2 \underbrace{qx}_{u}} \underbrace{q dx}_{u'} = -\frac{1}{q} \operatorname{ctg} qx + C$$

(подынтегральную функцию мы умножили и разделили на q, а постоянный множитель $\frac{1}{q}$ вынесли за знак интеграла). Полученный результат позволяет легко вычислить, например, такие интегралы: $\int \frac{1}{\sin^2 5x} dx = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x + C$; $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{4}} = -4 \operatorname{ctg} \frac{x}{4} + C$; $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{b}} = -b \operatorname{ctg} \frac{x}{b} + C$.

Задача 2,5 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

Указания. 1) $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$; 2) $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$.

Ответ. 1) $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C$; 2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$.

Задача 2,6 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \sin(x^2) x dx$; 2) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; 3) $\int \operatorname{tg}(2x-3) dx$; 4) $\int \sin(\ln x) \frac{1}{x} dx$; 5) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$; 6) $\int \cos(e^x) e^x dx$; 7) $\int \cos(\ln x) \frac{1}{x} dx$; 8) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$; 9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; 10) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$.

Указания. В восьмом примере: $\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

В девятом примере: $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$.

Ответ.

1) $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$; 2) $2\sin\sqrt{x}+C$; 3) $-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x-3)|+C$;

4) $-\cos\ln|x|+C$; 5) $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)+C$; 6) $\sin(e^x)+C$;

7) $\sin\ln|x|+C$; 8) $\operatorname{tg}x-\sec x+C$; 9) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$;

10) $-\operatorname{cosec}x+C$.

Задача 2,7 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

1) $\int\sin(2x+5)\,dx$; 2) $\int\frac{dx}{\left(x\cos\frac{1}{x}\right)^2}$; 3) $\int\frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x}dx$; 4) $\int\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}dx$;

5) $\int\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\int\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$; 7) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$; 8) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$;

9) $\int\cos(ax+b)\,dx$; 10) $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx$; 11) $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$;

12) $\int\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx$.

Указания. В седьмом примере: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, после деления на $\sin^2 x$ заменить $\operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x-1$. В восьмом примере: после деления на $\cos^2 x$ заменить $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1$. В примере 10 заменить $\operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x-1$. В примере 11 числитель и знаменатель дроби разделить на $\cos^2 x$. Подынтегральная функция примет вид $\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}x}$.

Ответ.

1) $-\frac{1}{2}\cos(2x+5)\ C$; 2) $-\operatorname{tg}\frac{1}{x}+C$; 3) $-\ln|\cos(\ln x)|+C$;

4) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$; 5) $2\ln|\sin x|+C$; 6) $-2\ln|\cos x|+C$;

7) $-\operatorname{ctg}x-2x+C$; 8) $2x-\operatorname{tg}x+C$; 9) $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$;

10) $-\operatorname{ctg}x-x+C$; 11) $\ln|\operatorname{tg}x|+C$; 12) $-\ln\left|\sin\frac{1}{x}\right|+C$.

Задача 2,8 (для повторения материала первого практического занятия). Вычислить интегралы: 1) $\int\sqrt[3]{\operatorname{tg}2x}\sec^2 2x\,dx$ (воспользоваться формулой (1,29)); 2) $\int\frac{x^2}{7+3x^3}dx$ (воспользоваться формулой (1,32)); 3) $\int\frac{\operatorname{ctg}ax}{\sin^2 ax}dx$ (формула (1,29)); 4) $\int(ax^2+b)^n x\,dx$ $(n\neq-1)$ (формула (1,29)); 5) $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$ (формула (1,29)); 6) $\int\frac{e^{ax}}{e^{ax}+5}dx$ (формула (1,32)); 7) $\int\frac{\sin 2x}{\sin^n x}dx$ $(n\neq-2)$ $(\sin 2x=2\sin x\cos x,$

сократить дробь и воспользоваться формулой (1,29)); 8) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{7+\ln^2 x}}dx$ (воспользоваться формулой (1,31)); 9) $\int \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{5+\operatorname{arctg} 2x}}$; 10) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}}dx$; 11) $\int \frac{\sin x \cos x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}dx$ (воспользоваться формулой (1,32)); 12) $\int \frac{b\cos x - c\sin x}{\sqrt{a+b\sin x + c\cos x}}dx$; 13) $\int \frac{x\,dx}{a^2-x^2}$; 14) $\int \frac{3x\,dx}{4+7x^2}$; 15) $\int \frac{x^3}{\sqrt{5+4x^4}}dx$; 16) $\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}dx$; 17) $\int \frac{dx}{a+bx}$; 18) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$; 19) $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}dx$; 20) $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{9-7x^2}}$.

Указание. В примере 16 разделить e^{3x} на e^x+2, получится $e^{2x}-2e^x+\frac{4e^x}{e^x+2}$.

Ответ.

1) $\frac{3}{8}\operatorname{tg} 2x\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x}+C$;
2) $\frac{1}{9}\ln|7+3x^3|+C$;
3) $-\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}^2 ax + C$;
4) $\frac{1}{2a(n+1)}(ax^2+b)^{n+1}$;
5) $-\frac{1}{\ln x}+C$;
6) $\frac{1}{a}\ln(e^{ax}+5)+C$;
7) $-\frac{2}{(n-2)\sin^{n-2}x}+C$;
8) $\sqrt{7+\ln^2 x}+C$;
9) $\sqrt{5+\operatorname{arctg} 2x}+C$;
10) $\frac{1}{b^2}\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}+C$;
11) $\frac{1}{2(b-a)}\ln(a\cos^2 x + b\sin^2 x)+C$;
12) $2\sqrt{a+b\sin x + c\cos x}+C$;
13) $-\frac{1}{2}\ln(a^2-x^2)+C$;
14) $\frac{3}{14}\ln(4+7x^2)+C$;
15) $\frac{1}{8}\sqrt{5+4x^4}+C$;
16) $\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+4\ln(e^x+2)+C$;
17) $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$;
18) $-\frac{1}{3\ln^3 x}+C$;
19) $\frac{1}{2}[\operatorname{arctg}^2 x + \ln(1+x^2)]+C$;
20) $-\frac{3}{7}\sqrt{9-7x^2}+C$.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в непосредственном интегрировании.

1. Упражнения в применении формул (1,21) и (1,22)

Эти формулы перепишем в виде, более удобном для практики. Полагая, как и раньше, что функция u, входящая в эти формулы, есть функция независимой переменной x: $u = u(x)$, заменим ее дифференциал du по формуле $du = u'\,dx$ и перепишем эти формулы так:

$$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arctg} u + C; \tag{3,1}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arcsin u + C. \tag{3,2}$$

Следует обратить внимание на то, что в этих формулах числитель дроби u' есть производная *первой степени* функции u, которая в (3,1) находится в квадрате в знаменателе, а в (3,2) — в знаменателе под квадратным корнем.

Прежде чем начать упражнения, выведем более общие формулы, чем (3,1) и (3,2), а именно: вычислим интегралы

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx. \tag{3,3}$$

В первом интеграле преобразуем подынтегральную функцию так, чтобы можно было применить формулу (3,1):

$$\frac{u'}{a^2+u^2} = \frac{u'}{a^2\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)} = \frac{u'}{a^2\left[1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]} = \underbrace{\frac{\frac{1}{a}u'}{a^2\,\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]}}_{\boxed{\text{Числитель и знаменатель дроби умножен на } \frac{1}{a}}} = \frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{a\left[1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]}.$$

Теперь числитель дроби $\left(\frac{u}{a}\right)'$ есть производная от первой степени функции $\left(\frac{u}{a}\right)^2$, которая находится в знаменателе, и формулу (3,1) можно применить.

Поэтому, вынося за знак интеграла постоянный множитель $\frac{1}{a}$, получаем

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$$

Итак,

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C. \tag{3,4}$$

Если $u = x$, то $u' = 1$, и эта формула запишется так:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \tag{3,5}$$

Подынтегральную функцию второго интеграла (3,3) преобразуем так, чтобы можно было воспользоваться формулой (3,2).

$$\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}=\frac{u'}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)}}=\underbrace{\frac{\frac{u'}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}}_{\boxed{\text{Из-под корня вынесен множитель } a}}=\frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}.$$

Теперь числитель дроби $\left(\frac{u}{a}\right)'$ есть производная от первой степени функции $\left(\frac{u}{a}\right)^2$, которая находится под корнем в знаменателе.

На основании формулы (3,2)

$$\int\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx=\int\frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}dx=\arcsin\frac{u}{a}+C.$$

Итак,

$$\int\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx=\arcsin\frac{u}{a}+C. \qquad (3,6)$$

Если $u=x$, то $u'=1$, и эта формула запишется так:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C. \qquad (3,7)$$

Задача 3,1. Вычислить интегралы:

1) $I=\int\frac{dx}{7+x^2}$; 2) $I=\int\frac{dx}{10+x^2}$; 3) $I=\int\frac{dx}{8+5x^2}$;

4) $I=\int\frac{dx}{11+9x^2}$; 5) $I=\int\frac{3dx}{6+13x^2}$.

Решение. 1) Здесь $a^2=7$; $a=\sqrt{7}$, по формуле (3,5) получаем $I=\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C$.

2) В этом примере $a^2=10$; $a=\sqrt{10}$, по формуле (3,5) получаем $I=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}}+C$.

3) В знаменателе дроби находится не x^2, а $5x^2$. Поэтому формула (3,5) непригодна. Здесь должна быть применена формула (3,4). Для этого надо в числителе иметь производную функции u, квадрат которой $u^2=5x^2$; $u=\sqrt{5}x$. Производная $u'=\sqrt{5}$.

Формулу (3,4) можно применить в том случае, если числитель подынтегральной функции будет равен u'. Мы этого достигнем, умножив его на $\sqrt{5}$, а чтобы не изменилась величина подынтегральной функции, разделим ее на $\sqrt{5}$ и представим в виде

$$\frac{1}{8+5x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{8+(\sqrt{5}x)^2}.$$

Учитывая, что $a^2=8$, $a=2\sqrt{2}$, по формуле (3,4) получаем

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}}{8+(\underbrace{\sqrt{5}x}_{u})^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}x}{4}+C.$$

4) Этот пример ничем не отличается от предыдущего. Здесь $u^2=9x^2$; $u=3x$; $u'=3$. Чтобы можно было применить формулу (3,4), надо образовать в числителе u'. Умножим подынтегральную функцию на 3, а чтобы не изменилась ее величина, разделим ее на 3 и представим в виде $\frac{1}{11+9x^2}=\frac{1}{3}\frac{3}{11+(3x)^2}$. Теперь формулу (3,4) можно применить с учетом, что $a^2=11$; $a=\sqrt{11}$; $I=$ $=\frac{1}{3}\int\frac{3}{11+\underbrace{(3x)^2}_{u}}dx=\frac{1}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x}{\sqrt{11}}+C.$

5) Этот пример решим без подробных объяснений: $a^2=6$; $u^2=13x^2$; $u=\sqrt{13}x$; $a^2=6$; $a=\sqrt{6}$; $u'=\sqrt{13}$.

Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\frac{3}{6+13x^2}=\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{\sqrt{13}}{6+(\sqrt{13}x)^2},$$

а

$$I=\frac{3}{\sqrt{13}}\int\frac{\sqrt{13}}{6+(\sqrt{13}x)^2}dx=\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}x}{\sqrt{6}}+C.$$

Задача 3,2 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{dx}{5+16x^2}$; 2) $\int\frac{dx}{12+7x^2}$; 3) $\int\frac{dx}{14+15x^2}$; 4) $\int\frac{7dx}{15+19x^2}$; 5) $\int\frac{9dx}{5+21x^2}$.

Ответ.

1) $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{4x}{\sqrt{5}}+C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}x}{2\sqrt{3}}+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{210}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}x+C$;
4) $\frac{7}{\sqrt{285}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{15}}x+C$; 5) $\frac{9}{\sqrt{105}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{21}x}{\sqrt{5}}+C$.

Задача 3,3. Вычислить интегралы: 1) $I=\int\frac{x+3}{x^2+2}dx$; 2) $I=\int\frac{(3x+2)\,dx}{5x^2+7}$; 3) $I=\int\frac{9t+5}{8t^2+9}dt$.

Решение. 1) Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\frac{x+3}{x^2+2}=\frac{x}{x^2+2}+\frac{3}{x^2+2};$$

каждую из этих дробей проинтегрируем и интеграл представим в виде суммы двух интегралов:

$$I=\int\frac{x}{x^2+2}\,dx+3\int\frac{dx}{x^2+2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Умножая числитель на 2, получим в нем производную знаменателя	Применить формулу (3,5) $a=\sqrt{2}$

2) Подынтегральную функцию представим как сумму двух дробей:

$$\frac{3x+2}{5x^2+7}=\frac{3x}{5x^2+7}+\frac{2}{5x^2+7}.$$

Каждую из этих дробей мы умеем интегрировать. Интеграл представим как сумму двух интегралов (постоянные множители вынесены за знак интеграла):

$$I=3\int\frac{x}{5x^2+7}\,dx+2\int\frac{dx}{5x^2+7}=\frac{3}{10}\ln(5x^2+7)+$$

Здесь в числителе получится производная знаменателя, если числитель умножить на 10	Применить (3,4) при $u^2=(\sqrt{5x})^2$; $u=\sqrt{5x}$; $u'=\sqrt{5}$; $a=\sqrt{7}$

$$+\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}+C.$$ Окончательно $$I=\frac{3}{10}\ln(5x^2+7)+\frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}+C.$$

3) Этот пример следует решить самостоятельно.

Ответ. $\frac{9}{16}\ln(8t^2+9)+\frac{5}{6\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}t}{3}+C.$

Задача 3,4 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{7x+3}{10x^2+11}dx$; 2) $\int\frac{3x+8}{12x^2+23}dx$; 3) $\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ и проверить вычисления, проведенные в примерах 1 и 2, по формуле, полученной при решении примера 3.

Ответ. 1) $\frac{7}{20}\ln(10x^2+11)+\frac{3}{\sqrt{110}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{11}}+C$;

2) $\frac{1}{8}\ln(12x^2+23)+\frac{4}{\sqrt{69}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}}x+C$;

3) $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C$.

Задача 3,5. Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx$; 2) $I=\int\frac{x\,dx}{7+x^4}$; 3) $I=\int\frac{e^{2x}\,dx}{4+e^{4x}}$; 4) $I=\int\frac{dx}{x(5+\ln^2 x)}$; 5) $I=\int\frac{\sec^2 x}{9+\operatorname{tg}^2 x}dx$; 6) $I=\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Решение. 1) Если $u^2=\sin^2 x$, то $u=\sin x$; $u'=\cos x$; $a^2=5$, $a=\sqrt{5}$, а потому сразу без дополнительных преобразований получаем по формуле (3,4)

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{5}}+C.$$

2) Возьмем $u^2=x^4$, тогда $u=x^2$, а $u'=2x$.

Чтобы получить в числителе $2x$, умножим его на 2, а чтобы величина подынтегральной функции не изменилась, разделим ее на 2 и запишем в виде $\frac{x}{7+x^4}=\frac{1}{2}\frac{2x}{7+(x^2)^2}$;

$$I=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2x}{7+(x^2)^2}dx}_{\text{Применяем формулу (3,4)}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{7}}+C.$$

3) Примем $u^2=e^{4x}$; $u=e^{2x}$. Тогда $u'=2e^{2x}$. Формулу (3,4) можно применить, если в числителе находится функция u' — производная функции u. Чтобы этого достигнуть, умножим и разделим подынтегральную функцию на 2, тогда она запишется так: $\frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2x}}{4+(e^{2x})^2}$;

$$I=\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{2e^{2x}}{4+(e^{2x})^2}dx}_{a^2=4;\ a=2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2}+C.$$

4) Полагаем, что $u^2=\ln^2 x=(\ln x)^2$; $u=\ln x$; $u'=\frac{1}{x}$.

Если мы представим подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{x(5+\ln^2 x)}=\frac{\frac{1}{x}}{5+(\ln x)^2}$, то заметим, что в числителе имеется u', а потому формулу (3,4) применить можно ($a^2=5$; $a=\sqrt{5}$):

$$I=\int\frac{\frac{1}{x}}{5+(\ln x)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\ln x}{\sqrt{5}}+C.$$

5) Здесь $u^2 = \operatorname{tg}^2 x$; $u = \operatorname{tg} x$; $u' = \sec^2 x$, поэтому без дополнительных преобразований получаем ($a^2 = 9$; $a = 3$):

$$I = \int \frac{\sec^2 x}{9 + (\operatorname{tg} x)^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{3} + C.$$

6) Вычисление этого интеграла связано с некоторыми трудностями.

Здесь надо догадаться, что интеграл может быть приведен к виду (3,4), если числитель и знаменатель дроби умножить на $\sec^2 x$. Выполняя это, получим

$$\frac{1}{1+\cos^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 1} = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1 + 1} = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2}.$$

Если теперь положить $u^2 = \operatorname{tg}^2 x$; $u = \operatorname{tg} x$; $u' = \sec^2 x$, формулу (3,4) можно применить, так как числитель содержит производную функции u. Тогда

$$I = \int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

Задача 3, 6 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$.

Указание. Представить $x = (\sqrt{x})^2$, взять $u = \sqrt{x}$; $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) $\int \frac{\cos x\, dx}{a^2 + b^2 \sin^2 x}$. Указание: $u^2 = b^2 \sin^2 x$; $u = b \sin x$; $u' = b \cos x$. Умножить и разделить подынтегральную функцию на b.

3) $\int \frac{dx}{4 + \cos^2 x}$. Указание: числитель и знаменатель дроби умножить на $\sec^2 x$. Подынтегральная функция примет вид $\frac{\sec^2 x}{4 \operatorname{tg}^2 x + 5}$ (учтено, что $\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$).

4) $\int \frac{dx}{5 + \sin^2 x}$. Указание: числитель и знаменатель умножить на $\operatorname{cosec}^2 x$. В знаменателе заменить $\operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x + 1$.

Ответ. 1) $\frac{2}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5x}{7}} + C$; 2) $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \sin x\right) + C$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right) + C$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{30}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{5} \operatorname{ctg} x}{\sqrt{6}}\right) + C$.

Теперь выполним упражнения, связанные с формулами (3, 6) и (3, 7).

Напомним еще раз построение этих формул: числитель дроби есть производная от первой степени той функции, которая в квадрате стоит под корнем в знаменателе.

Задача 3, 7. Вычислить интегралы: 1) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;

2) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}$; 3) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$; 4) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{7-8x^2}}$.

Решение. 1) Здесь сразу можно применить формулу (3, 7), полагая, что $a^2=5$; $a=\sqrt{5}$. Получаем $I=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

2) Здесь также формула (3,7) может быть применена сразу: $a^2=10$; $a=\sqrt{10}$, а $I=\arcsin\frac{x}{\sqrt{10}}+C$.

3) Применить формулу (3, 7) здесь нельзя, так как u^2 равно не x^2, как в двух предыдущих примерах, а $2x^2$. Поэтому надо применить формулу (3, 6), полагая $u^2=2x^2=(\sqrt{2}x)^2$; $u=\sqrt{2}x$. Числитель дроби подынтегральной функции должен быть равен $u'=\sqrt{2}$. Но так как $\sqrt{2}$ в числителе не содержится, то мы умножим числитель на $\sqrt{2}$, а чтобы выражение не изменило своей величины, и разделим его на $\sqrt{2}$. Подынтегральная функция перепишется в виде

$$\frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-(\sqrt{2}x)^2}}, \text{ а } I=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x+C.$$

4) Здесь $u^2=8x^2$; $u^2=(2\sqrt{2}x)^2$; $u=2\sqrt{2}x$; $u'=2\sqrt{2}$. Для того чтобы можно было применить формулу (3, 6), надо, чтобы числитель дроби в этой формуле был равен производной функции u, т. е. $2\sqrt{2}$. Умножим и разделим подынтегральную функцию на это число и получим

$$\frac{1}{\sqrt{7-8x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7-(2\sqrt{2}x)^2}}.$$

Теперь уже формулу (3, 6) можно применить. Постоянный множитель $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ вынесем за знак интеграла, получим

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7-(2\sqrt{2}x)^2}}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{7}}+C.$$

$$\boxed{a^2=7;\quad a=\sqrt{7};\quad u=2\sqrt{2x}}$$

Задача 3, 8. (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{80-11x^2}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{19-17x^2}}$.

Ответ: 1) $\frac{1}{\sqrt{11}}\arcsin\frac{\sqrt{11}x}{4\sqrt{5}}+C$; 2) $\frac{1}{7}\arcsin\frac{7}{6}x+C$;
3) $\frac{1}{\sqrt{17}}\arcsin\frac{\sqrt{17}x}{\sqrt{19}}+C$.

Задача 3, 9. Вычислить интегралы:

1) $I=\int\frac{\cos x}{\sqrt{7-3\sin^2 x}}dx$; 2) $I=\int\frac{\sec^2 x}{\sqrt{11-5\operatorname{tg}^2 x}}dx$;

3) $I=\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{6-5\operatorname{arctg}^2 x}}$; 4) $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{15-7\ln^2 x}}$;

5) $I=\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Решение. 1) Здесь функция $u^2=3\sin^2 x$, $u=\sqrt{3}\sin x$, ее производная $u'=\sqrt{3}\cos x$.

Для того, чтобы числитель дроби в подынтегральной функции был равен u', умножим его на $\sqrt{3}$, а чтобы дробь не изменила своей величины, ее надо и разделить на $\sqrt{3}$. Представим подынтегральную функцию в виде $\frac{\cos x}{\sqrt{7-3\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{7-3\sin^2 x}}$. Теперь числитель второй дроби содержит производную функции $u=\sqrt{3}\sin x$, и формула (3,6) может быть применена

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{7-(\sqrt{3}\sin x)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

$$\boxed{a^2=7;\quad a=\sqrt{7};\quad u=\sqrt{3}\sin x}$$

2) Этот пример решается так же, как и предыдуший:

$$u^2=5\operatorname{tg}^2 x;\quad u=\sqrt{5}\operatorname{tg}x;\quad u'=\sqrt{5}\sec^2 x.$$

Числитель подынтегральной функции надо умножить на $\sqrt{5}$, чтобы он стал равен u'. Деля одновременно на $\sqrt{5}$, для того, чтобы не изменить величину подынтегральной функции, преобразуем ее к виду

$$\frac{\sec^2 x}{\sqrt{11-5\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}\sec^2 x}{\sqrt{11-(\sqrt{5}\operatorname{tg}x)^2}}.$$

Применяя теперь формулу (3,6), получим

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}\sec^2 x}{\sqrt{11-(\sqrt{5}\operatorname{tg}x)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}\operatorname{tg}x}{\sqrt{11}}+C.$$

$$\boxed{a^2=11;\quad a=\sqrt{11};\quad u=\sqrt{5}\operatorname{tg}x}$$

3) Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{6-5\operatorname{arctg}^2 x}}=\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\sqrt{6-(\sqrt{5}\operatorname{arctg} x)^2}}.$$

Здесь $u^2=5\operatorname{arctg}^2 x$; $u=\sqrt{5}\operatorname{arctg} x$; $u'=\frac{\sqrt{5}}{1+x^2}$.

Для того, чтобы числитель подынтегральной функции стал равен u', его надо домножить на $\sqrt{5}$. Если это сделать и одновременно разделить на $\sqrt{5}$, то подынтегральная функция не изменит своего значения и запишется так:

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{6-5\operatorname{arctg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\frac{\sqrt{5}}{1+x^2}}{\sqrt{6-(\sqrt{5}\operatorname{arctg} x)^2}}.$$

Теперь на основании (3,6)

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\frac{\sqrt{5}}{1+x^2}dx}{\sqrt{\underbrace{6}_{a^2}-(\underbrace{\sqrt{5}\operatorname{arctg} x}_{u})^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}\operatorname{arctg} x}{\sqrt{6}}\right)+C.$$

4) Перепишем подынтегральную функцию в виде $\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{15-7\ln^2 x}}$.

Полагаем $u^2=7\ln^2 x$, тогда $u=\sqrt{7}\ln x$, $u'=\sqrt{7}\cdot\frac{1}{x}$. Чтобы получить в числителе u', умножим его на $\sqrt{7}$, одновременно разделим на $\sqrt{7}$, и подынтегральную функцию представим в виде

$$\frac{1}{x\sqrt{15-7\ln^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{15-(\sqrt{7}\ln x)^2}}.$$

Теперь по формуле (3,6) находим

$$I=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{15-(\sqrt{7}\ln x)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}\ln x}{\sqrt{15}}\right)+C.$$

$$\left|a^2=15;\ a=\sqrt{15};\ u=\sqrt{7}\ln x\right|$$

5) Умножим и разделим на $1-x$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под корнем в подынтегральной функции, и получим

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}}=\sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

($\sqrt{(1-x)^2}=1-x$, так как предполагается, что $-1<x<1$).

Теперь $I=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$ | Применяем формулу (1,31) |

Задача 3,10 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{7-2x^2}}dx$; 2) $\int \frac{9-3x}{\sqrt{6-5x^2}}dx$ (см. указание к предыдущему примеру);

3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{8-5\cos^2 x}}dx$; 4) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{5-3e^{4x}}}dx$; 5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-11x^6}}dx$;

6) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{5-3\sin^4 x}}dx$; 7) $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1-15\operatorname{ch}^2 x}}dx$.

Указания. В первом примере: $\frac{5x-3}{\sqrt{7-2x^2}} = \frac{5x}{\sqrt{7-2x^2}} - \frac{3}{\sqrt{7-2x^2}}$.

Каждая из этих дробей может быть легко проинтегрирована: первая — по формуле (1,31), вторая — по формуле (3,6).

В шестом примере: $u^2 = 3\sin^4 x$; $u = \sqrt{3}\sin^2 x$; $u' = \sqrt{3}\sin 2x$.

Ответ: 1) $-\frac{5}{2}\sqrt{7-2x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}} + C$;

2) $\frac{9}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}} + \frac{3}{5}\sqrt{6-5x^2} + C$;

3) $-\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}\cos x}{2\sqrt{2}} + C$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}e^{2x}}{\sqrt{5}} + C$;

5) $\frac{1}{3\sqrt{11}}\arcsin\frac{\sqrt{11}x^3}{2} + C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\sin^2 x}{\sqrt{5}} + C$;

7) $\frac{1}{\sqrt{15}}\arcsin\sqrt{15}\operatorname{ch} x$.

2. Упражнения в применении формул (1,23) и (1,24)

Как и раньше, преобразуем эти формулы к виду, который более удобен для их применения в практике. Получим формулу (1,23) в более общем виде. Если функция u есть функция независимой переменной x: $u = u(x)$, то $du = u'dx$. Тогда вместо формулы (1,23) получим

$$\int \frac{u'}{1-u^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C, \tag{3,8}$$

а формулу (1,24) преобразуем к виду

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C. \tag{3,9}$$

Отметим построение этих формул: числитель подынтегральной функции есть производная функции u, квадрат которой находится в (3,8) в знаменателе, а в (3,9) — в знаменателе под квадратным корнем.

Обобщение формулы (1,23) состоит в том, что знаменатель дроби $1-u^2$ заменен на a^2-u^2.

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx = \int \frac{u'}{a^2\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{u'}{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{1}{a}u'}{\frac{1}{a}\left[1-\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]}dx = \frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{u}{a}}{1-\frac{u}{a}}\right| + C$$

Теперь можно применить формулу (1,23), так как числитель содержит производную функции, квадрат которой находится в знаменателе

и окончательно

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C. \tag{3,10}$$

Так как под знаком логарифма стоит абсолютная величина дроби $\left|\frac{a+u}{a-u}\right|$, то, не изменяя величины этого выражения, его можно записать и в таком виде: $\left|\frac{u+a}{u-a}\right|$, и тогда формула (3,10) перепишется в виде

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C. \tag{3,11}$$

Укажем также формулу для вычисления интеграла $\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx$:

$$\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx = -\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|^{-1} + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$$

Итак, окончательно

$$\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \tag{3,12}$$

Теперь приступим к упражнениям.

Задача 3,11. Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int \frac{dx}{5-x^2}$; 2) $I_2 = \int \frac{dx}{7-9x^2}$; 3) $I_3 = \int \frac{dx}{5x^2-7}$; 4) $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+17}}$; 5) $I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{19x^2-14}}$.

Решение. 1) Здесь $u^2 = x^2$, $u = x$, $u' = 1$. Числитель содержит u' — производную функции u, значит, формула (3,10) может быть применена. Учитывая, что $a^2 = 5$, $a = \sqrt{5}$, получаем

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x} \right| + C.$$

2) При решении этого примера следует учесть, что $u^2 = 9x^2$; $u = 3x$; $u' = 3$.

Числитель подынтегральной функции не содержит u'. Умножим и разделим подынтегральную функцию на 3 и запишем, что $I_2 = \frac{1}{3} \int \frac{3}{7-(3x)^2} dx$, $u = 3x$. Теперь применим формулу (3,10) и, учитывая, что $a^2 = 7$, $a = \sqrt{7}$, найдем

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7}+3x}{\sqrt{7}-3x} \right| + C = \frac{1}{6\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7}+3x}{\sqrt{7}-3x} \right| + C.$$

3) Этот пример отличается от предыдущего тем, что здесь на первом месте стоит в знаменателе не квадрат постоянной величины, а квадрат функции u. Поэтому должна быть применена формула (3,12): $u^2 = 5x^2$; $u = \sqrt{5}x$. Ее можно применить в том случае, если числитель будет содержать множитель $u' = \sqrt{5}$. Этот множитель получим, умножив подынтегральную функцию на $\sqrt{5}$ и одновременно, чтобы не изменилась ее величина, разделив на $\sqrt{5}$. Делая это и применяя формулу (3,12) с учетом, что $a^2 = 7$; $a = \sqrt{7}$, найдем

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5}x)^2 - 7} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x - \sqrt{7}}{\sqrt{5}x + \sqrt{7}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x - \sqrt{7}}{\sqrt{5}x + \sqrt{7}} \right| + C.$$

4) Этот пример решается сразу по формуле (3,9): $u = x$, а множитель $u' = 1$ в числителе есть.

Поэтому $I_4 = \ln \left| x + \sqrt{x^2+17} \right| + C$.

5) Здесь $u^2 = 19x^2$; $u = \sqrt{19}x$, $u' = \sqrt{19}$.

Для применения формулы (3,9), надо, чтобы в числителе был множитель $u' = \sqrt{19}$.

Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{19}$.

Тогда $I_5 = \frac{1}{\sqrt{19}} \int \frac{\sqrt{19}}{(\sqrt{19}x)^2 - 14} dx$. По формуле (3,9), учитывая, что $u' = \sqrt{19}$, найдем

$$I_5 = \frac{1}{\sqrt{19}} \ln \left| \sqrt{19}x + \sqrt{19x^2 - 14} \right| + C.$$

Задача 3,12 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{5\,dx}{8-3x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{11-6x^2}$; 3) $\int \frac{dx}{10x^2-7}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-11}}$; 5) $\int \frac{9\,dx}{\sqrt{7+5x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-12}}$.

Ответ. 1) $\frac{5}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}x} \right| + C$;

| Применена формула (3,10): $u=\sqrt{3}\,x$; $a^2=8$; $a=2\sqrt{2}$ |

2) $\frac{1}{2\sqrt{66}} \ln \left| \frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}\,x}{\sqrt{11}-\sqrt{6}\,x} \right| + C$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{70}} \ln \left| \frac{\sqrt{10}\,x-\sqrt{7}}{\sqrt{10}\,x+\sqrt{7}} \right| + C$;

| Применена формула (3,12): $u=\sqrt{10}x$; $u'=\sqrt{10}$; $a=\sqrt{7}$. |

4) $\frac{1}{2} \ln \left| 2x+\sqrt{4x^2-11} \right| + C$; 5) $\frac{9}{\sqrt{5}} \ln \left| \sqrt{5}x+\sqrt{7+5x^2} \right| + C$;

| Применена формула (3,9) |

6) $\frac{1}{\sqrt{7}} \ln \left| \sqrt{7}x+\sqrt{7x^2-12} \right| + C$.

Задача 3,13 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{12-3x^6}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{10+7x^2}}$;

4) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{5+3\,\mathrm{arctg}^2\,x}}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2ac} \ln \left| \frac{ax-c}{ax+c} \right| + C$; 2) $\frac{1}{36} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x^3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}x^3-2\sqrt{3}} \right| + C$;

3) $\frac{1}{\sqrt{7}} \ln \left| \sqrt{7}x+\sqrt{10+7x^2} \right| + C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,x + \right.$

$\left. + \sqrt{5+3\mathrm{arctg}^2 x} \right| + C$.

Проведенные упражнения позволяют предложить для самостоятельного решения задачи на применение формул (1,25) — (1,28). Перепишем эти формулы в виде, который более удобен для их практического применения. Полагая в них, что $u=u(x)$, $du = u'\,dx$, получим вместо формул (1,25) — (1,28) соответственно:

$$\int \mathrm{sh}\,u \cdot u'\,dx = \mathrm{ch}\,u + C; \tag{3,13}$$

$$\int \mathrm{ch}\,u \cdot u'\,dx = \mathrm{sh}\,u + C; \tag{3,14}$$

$$\int \frac{u'}{\mathrm{ch}^2\,u}\,dx = \mathrm{th}\,u + C; \tag{3,15}$$

$$\int \frac{u'}{\mathrm{sh}^2\,u}\,dx = -\mathrm{cth}\,u + C. \tag{3,16}$$

Задача 3,14 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \operatorname{sh} 2x\,dx$; 2) $\int \operatorname{ch}\frac{x}{3}\,dx$; 3) $\int (10x+7)\operatorname{sh}(5x^2+7x+9)\,dx$; 4) $\int \operatorname{ch}(8x+7)\,dx$; 5) $\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 6) $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^2(3x^2+5)}$; 7) $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x\,dx$; 8) $\int \operatorname{cth} x\,dx$; 9) $\int \operatorname{th} x\,dx$; 10) $\int x \operatorname{th} x^2\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + C$; 2) $3\operatorname{sh}\frac{x}{3} + C$; 3) $\operatorname{ch}(5x^2+7x+9)+C$; 4) $\frac{1}{8}\operatorname{sh}(8x+7)+C$; 5) $2\operatorname{ch}\sqrt{x}+C$; 6) $-\frac{1}{6}\operatorname{cth}(3x^2+5)+C$; 7) $\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + C$; 8) $\ln|\operatorname{sh} x| + C$; 9) $\ln|\operatorname{ch} x| + C$; 10) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{ch} x^2| + C$.

Этим заканчиваются упражнения, связанные с непосредственным применением таблицы основных интегралов.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки). Интегрирование по частям.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Метод подстановки. Два правила

Если интеграл $I = \int f(x)\,dx$ не может быть вычислен непосредственно по основным формулам (1,7) — (1,28), то введением новой независимой переменной во многих случаях удается преобразовать подынтегральное выражение $f(x)\,dx$. При этом интеграл приводится к табличному или к такому, прием вычисления которого уже известен. Замена переменной интегрирования и составляет существо метода, называемого методом подстановки. Укажем два правила подстановки.

1) Независимую переменную заменяют по формуле.

$$x = \varphi(z), \tag{4,1}$$

где $\varphi(z)$ — дифференцируемая функция.

После этого определяют $dx = \varphi'(z)\,dz$, а интеграл $\int f(x)\,dx$ приводят к виду $I = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$. Цель подстановки будет достигнута, если окажется, что вычисление этого интеграла проще, чем исходного. В результате интегрирования получится функция независимой переменной z. Чтобы возвратиться к переменной x, надо из уравнения (4,1) определить z через x и подставить это значение вместо z в найденную функцию.

Общего правила, которое указывало бы, как выбрать функцию $\varphi(z)$ в (4,1), не существует. Умение выбрать эту функцию достигается опытом. Однако для многих типов интегралов подстановка (4,1) известна и нами будет в соответствующих местах указана. Обратим внимание читателя на то, что, пользуясь подстановкой (4,1), надо найти множитель dx.

Заметим также, что функция $\varphi(z)$ в (4,1) должна иметь обратную. Это необходимо для того, чтобы из подстановки (4,1) можно было определить z как функцию x.

2) Полагают, что

$$\psi(x) = z. \tag{4,2}$$

Эта подстановка отличается от предыдущей тем, что в (4,1) сама независимая переменная x заменялась новой функцией $\varphi(z)$, а здесь не независимая переменная x, а ее функция $\psi(x)$ заменяется новой переменной z. Из уравнения (4,2) находят dx. В результате этой подстановки подынтегральное выражение заменится другой:

$$f(x)\,dx = \omega(z)\,dz.$$

Подстановка (4,2) достигнет цели, если вычисление интеграла $I = \int \omega(z)\,dz$ может быть выполнено проще, чем исходного. После интегрирования получится функция переменной z. Для того, чтобы возвратиться к переменной x, надо подставить в полученную функцию из (4,2) $\psi(x)$ вместо z.

И здесь умение выбрать функцию $\psi(x)$ так, чтобы вычисление интеграла упростилось, достигается большим числом упражнений. Для определенного класса интегралов целесообразные подстановки вида (4,2) будут указаны.

Упражнения этого практического занятия не имеют целью указать подстановки для вычисления определенного класса интегралов, а предназначены только для приобретения навыков в применении указанных двух правил подстановки.

Упражнения в применении первого правила подстановки

Задача 4,1. Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ при помощи подстановки $x = \frac{a}{t}$.

Решение. Здесь применяется правило первое. Подстановка имеет вид (4,1). Сразу находим, что $dx = -\frac{a}{t^2}\,dt$ и преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\frac{a}{t}\sqrt{\frac{a^2}{t^2} - a^2}} = \frac{t^2}{a^2\sqrt{1 - t^2}}.$$

Поэтому

$$I=\int\frac{t^2}{a^2\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{a}{t^2}\,dt\right)=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{1}{a}\arcsin t+C.$$

Чтобы перейти к переменной x, надо из подстановки $x=\frac{a}{t}$ выразить t через $x: t=\frac{a}{x}$, и тогда

$$I=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C.$$

Мы здесь заменили $-\arcsin\frac{a}{x}$ на $\arccos\frac{a}{x}$ не потому, что они равны между собой, а на основании следующих соображений: из тригонометрии известно, что

$$\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2};\qquad \frac{\pi}{2}-\arcsin\alpha=\arccos\alpha. \tag{4,3}$$

Считая, что $C=\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}+C_1$, получим

$$-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C=\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C_1=$$
$$=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{x}\right)+C_1=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C,$$

а C_1 мы снова обозначим через C, отбросив у C_1 индекс.

Ответ был преобразован путем выделения слагаемого $\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}$ из произвольной постоянной. Следует иметь в виду, что за счет тождественного преобразования ответа, а также в связи с возможностью представить произвольную постоянную интегрирования в разных видах ответы при вычислении неопределенных интегралов могут получаться различные.

Замечание. Следует иметь в виду, что можно было сразу написать: $-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{a}\arccos t+C$, так как $(\arccos t)'=$ $=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Задача 4,2. Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ при помощи подстановки $x=a(1-t)$.

Решение. Здесь опять-таки применяется правило первое. Подстановка имеет вид (4,1).

Находим, что $dx=-a\,dt$; подставляя под корень $x=a(1-t)$, имеем

$$\sqrt{2ax-x^2}=\sqrt{2a\cdot a(1-t)-a^2(1-t)^2}=$$
$$=\sqrt{a^2(1-t^2)}=|a|\sqrt{1-t^2},$$

и тогда

$$I=\int\frac{-adt}{|a|\sqrt{1-t^2}}=-\frac{a}{|a|}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{a}{|a|}\arccos t+C=$$
$$=\pm\arccos t+C.$$

Верхний знак надо взять при $a>0$, а нижний — при $a<0$, так как $|a|=a$, если $a>0$, и $|a|=-a$, если $a<0$.

Чтобы возвратиться к старой переменной, надо выразить t через x. Из $x=a(1-t)$ следует, что $t=1-\frac{x}{a}=\frac{a-x}{a}$, а потому $I=\pm\arccos\frac{a-x}{a}+C$.

Вычислим два интеграла, которые нам часто будут встречаться в дальнейшем: 1) $\int\sin^2 udu$ и 2) $\int\cos^2 udu$.

Из тригонометрии известно, что $\sin^2 u=\frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}$, поэтому

1) $$\int\sin^2 udu=\int\frac{1-\cos 2u}{2}du=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2u)\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C=\frac{1}{2}(u-\sin u\cos u)+C;$$

2) $$\int\cos^2 udu=\int\frac{1+\cos 2u}{2}du=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2u)\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)=\frac{1}{2}(u+\sin u\cos u)+C.$$

Выпишем для ссылок полученные результаты:

$$\int\sin^2 udu=\frac{1}{2}(u-\sin u\cos u)+C; \tag{4,4}$$

$$\int\cos^2 udu=\frac{1}{2}(u+\sin u\cos u)+C. \tag{4,5}$$

Задача 4,3. С помощью подстановки $x=a\sin t$ (так называемая тригонометрическая подстановка) вычислить интегралы:

$$I_1=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx;\qquad I_2=\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Решение. 1) Из подстановки

$$x=a\sin t \tag{4,6}$$

следует, что $dx=a\cos tdt$; $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=$ $=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t$, а потому

$$I_1=\int a\cos t\,(a\cos tdt)=a^2\int\cos^2 tdt=a^2\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

Применить формулу (4,5)

Чтобы возвратиться к переменной x, надо из (4,6) определить t, $\sin t$, $\cos t$: $\sin t = \frac{x}{a}$; $t = \arcsin\frac{x}{a}$; $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$; $I_1 = a^2\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C.$

Окончательно

$$I_1 = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \tag{4,7}$$

2) Из (4,6) следует, что в I_2 подынтегральная функция $\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}$ (выше было вычислено, что $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$), а потому

$$I_2 = \int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos t\,dt = a^2\int\sin^2 t\,dt = a^2\frac{1}{2}(t-\sin t\cos t) + C.$$

Применить формулу (4,4)

Возвратимся теперь к переменной x.

Подставляя значения t, $\sin t$ и $\cos t$, найденные при вычислении I_1, получим

$$I_2 = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C,$$

или

$$I_2 = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Задача 4,4 (для самостоятельного решения).

При помощи подстановки $x = \sin t$ вычислить $I = \int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$.

Ответ. $I = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Задача 4,5 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ при помощи подстановки $x = \operatorname{ctg} t$.

Указание. $dx = -\frac{1}{\sin^2 t}dt$; $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sin t}$;

$$I = -\int\frac{dt}{\sin t} = -\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + C = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^{-1} + C = \ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2} + C.$$

Но

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1+\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} + \operatorname{ctg} t;$$

$$\frac{1}{\sin t} = \sqrt{1+x^2}, \quad \operatorname{ctg} t = x,$$

значит,

$$I = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

Задача 4,6 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$ (подстановка $x=z^2$); 2) $I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ $\left(\text{подстановка } x = \frac{1}{z}\right)$.

Ответ. 1) $\frac{2}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5x}{7}} + C$; 2) $-\frac{1}{a} \ln \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$.

Указание. Во втором примере после подстановки

$$I_2 = -\int \frac{dz}{\sqrt{a^2z^2-1}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{(az)^2-1}} = -\frac{1}{a} \ln(az + \sqrt{a^2z^2-1}) + C.$$

Задача 4,7 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}\,dx}{\sqrt{e^x-1}}$ с помощью подстановки $x = 2\ln z$.

Указание. $e^x = e^{2\ln z} = e^{\ln z^2} = z^2$; $dx = \frac{2dz}{z}$.

Ответ. $2\ln(e^{\frac{x}{2}} + \sqrt{e^x-1}) + C$.

Упражнения в применении второго правила подстановки.

Задача 4,8. Интеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ вычислить подстановкой

$$\sqrt{x^2-a^2} = z. \qquad (4,8)$$

Решение. Этот интеграл был уже вычислен нами в задаче 4,1. Указанная новая подстановка имеет вид (4,2): $\psi(x) = z$. Подынтегральное выражение $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ должно быть выражено через новую переменную z. Из (4,8) следует, что

$$x^2 - a^2 = z^2; \quad x^2 = a^2 + z^2; \quad 2x\,dx = 2z\,dz; \quad x dx = z dz.$$

Деля обе части этого равенства на x^2 и заменяя в правой части равенства x^2 на a^2+z^2, получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{z\,dz}{a^2+z^2}; \quad \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{z\,dz}{(a^2+z^2)\,z} = \frac{dz}{a^2+z^2}.$$

Теперь

$$I = \int \frac{dz}{a^2+z^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C.$$

Переходим к переменной x: с помощью (4,8) получим окончательно

$$I = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C.$$

Этот ответ отличается от полученного в задаче 4,1. Однако это только кажущееся различие. Фактически же ответы тождественны: легко показать, что $\arccos \frac{a}{x} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$. Здесь мы еще раз обращаем внимание читателя на возможность различных ответов при вычислении одного и того же интеграла.

Задача 4,9 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3}$ подстановкой $\sqrt{x+2} = t$.

Решение. Из подстановки $\sqrt{x+2} = t$ следует, что $x + 2 = t^2$; $x = t^2 - 2$; $dx = 2t\,dt$, а потому подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{2t\,dt}{t+3};$$

$$I = \int \frac{2t\,dt}{t+3} = 2\int \frac{t+3-3}{t+3}\,dt = 2\int \left(1 - \frac{3}{t+3}\right) dt =$$
$$= 2\,[t - 3\ln(t+3)] + C.$$

Подставляя сюда $t = \sqrt{x+2}$, окончательно получим

$$I = 2\,[\sqrt{x+2} - 3\ln|\sqrt{x+2}+3|] + C.$$

Задача 4,10 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ подстановкой $1 + \sqrt{x} = v$.

Указание. $\sqrt{x} = v - 1$; $x = (v-1)^2$; $dx = 2(v-1)\,dv$; $I = 2\int \frac{v-1}{v}\,dv$.

Ответ. $I = 2\,[1 + \sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|] + C = 2 + 2(\sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|) + C_1$, где $C_1 = 2 + C$.

Задача 4,11. Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ при помощи подстановки

$$\sqrt{a^2 - x^2} = t\,(a - x). \tag{4,9}$$

Решение. Этот интеграл нам уже хорошо известен: $I = \arcsin \frac{x}{a} + C$. Мы предложили этот пример для упражнения, а также для того, чтобы показать еще раз, что вычисление интеграла может приводить к различным по форме ответам, в зависимости от того, какой метод применен при его вычислении. Из указанной подстановки получаем $a^2-x^2=t^2(a-x)^2$. Сокращая теперь на $a-x$, имеем $a+x=t^2(a-x)$, отсюда

$$x=a\frac{t^2-1}{t^2+1};\quad dx=\frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2};\ \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1}$$

$$I=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C.$$

Так как $\arcsin\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2}=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, то следует считать, что полученный ответ только формой отличается от уже известного, указанного выше.

Задача 4,12. Вычислить интеграл $I=\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{6-\sin^2 x}}$ (подстановка $\sin x=z$).

Ответ. $I=\arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{6}}\right)+C.$

Задача 4,13 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{3+4\sin^2 x}$ (подстановка $\operatorname{ctg}x=u$).

Указание. $-\operatorname{cosec}^2 x\,dx=du$; $\operatorname{cosec}^2 x=1+u^2$; $\sin^2 x=\frac{1}{1+u^2}$. Подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{3+4\sin^2 x}=-\frac{du}{7+3u^2}.$$

Ответ. $I=\frac{1}{\sqrt{21}}\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\operatorname{ctg}x\right)+C.$

Задача 4,14 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $I_1=\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$ (подстановка $\operatorname{tg}x=z$);

2) $I_2=\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$ (подстановка $\operatorname{tg}x=z$);

3) $I_3=\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{4\sin^2 x-9\cos^2 x}}$ (подстановка $\operatorname{ctg}x=z$).

Указания. Во втором примере: $\frac{dx}{\cos^2 x}=dz$; $\frac{1}{\sin^4 x}=\frac{1}{(1-\cos^2 x)^2}$; $\cos^2 x=\frac{1}{1+z^2}$; $\frac{1}{\sin^4 x}=\frac{(1+z^2)^2}{z^4}=\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^2}+1.$

Подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\left(\frac{1}{z^4}+\frac{2}{z^2}+1\right)dz.$$

В третьем примере: $\frac{dx}{\sin x\sqrt{4\sin^2 x-9\cos^2 x}}=\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4-9\operatorname{ctg}^2 x}}=-\frac{dz}{\sqrt{4-9z^2}}.$

Ответ. 1) $I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$;

2) $I_2 = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C$;

3) $I_3 = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} x\right) + C$.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Этот метод, так же как и метод подстановки, который мы только что разобрали, принадлежит к числу основных методов интегрирования.

Формула интегрирования по частям записывается так:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{4,10}$$

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int v\,du$ может быть вычислен легче, чем исходный интеграл.

Задача 4,15. Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int xe^x\,dx$; 2) $I_2 = \int x \sin x\,dx$; 3) $I_3 = \int \ln x\,dx$; 4) $I_4 = \int \operatorname{arctg} x\,dx$; 5) $I_5 = \int \arcsin x\,dx$.

Решение. Для вычисления всех предложенных интегралов применим формулу (4,10) интегрирования по частям. При использовании этой формулы надо прежде всего установить, какая функция принимается равной u и что относится к dv. Затем по установленному выражению u надо дифференцированием найти du, а по известному dv определить интегрированием функцию v. Таким образом, для применения формулы (4,10) потребуется выполнить одно дифференцирование для определения du и одно интегрирование для определения v. Следует помнить, что в состав dv должен обязательно входить дифференциал независимой переменной.

После этих общих указаний приступим к вычислению предложенных интегралов:

1) $I_1 = \int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$

$u = x$	$du = dx$
$dv = e^x\,dx$	$v = e^x$

Замечание. При вычислении этого интеграла нецелесообразно брать $u = e^x$; $dv = x\,dx$, так как в этом случае было бы $du = e^x\,dx$; $v = \frac{x^2}{2}$. Применяя формулу (4,10), мы получили бы

$$I_1 = \int xe^x\,dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x\,dx.$$

Совершенно очевидно, что интеграл в правой части сложнее исходного. Из этого читатель должен сделать вывод, что выбор u и dv не может быть произвольным. Он определяется требованием, чтобы интеграл, к которому приводит формула (4,10), был проще заданного.

$$2)\ I_2 = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} = -\underbrace{x \cos x}_{uv} + \int \underbrace{\cos x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = -x \cos x + \sin x + C.$$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{array} \right|$$

Здесь также надо иметь в виду, что если взять $u = \sin x$; $dv = x\, dx$, то мы придем к интегралу более сложному, чем данный.

$$3)\ I_3 = \int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x -$$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right|$$

$$- x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

$$4)\ \int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x \operatorname{arctg} x}_{uv} - \int \frac{x}{1 + x^2} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1 + x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right|$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

$$5)\ \int \underbrace{\arcsin x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x \arcsin x}_{uv} - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = \arcsin x & du = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right|$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

Задача 4,16 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегрированием по частям интегралы:

1) $I_1 = \int x \cos x\, dx$; 2) $I_2 = \int x^3 \ln x\, dx$;

3) $I_3 = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$; 4) $I_4 = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Указание. В третьем примере взять $u = \arcsin x$; $dv = \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Ответ. 1) $I_1 = x\sin x + \cos x + C$; 2) $I_2 = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$; 3) $I_3 = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$; 4) $I_4 = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$.

Задача 4,17. Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;

2) $I_2 = \int \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}\,dx$; 3) $I_3 = \int \sin x \ln\cos x\,dx$;

4) $I_4 = \int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)\,dx}{1+x^2}$; 5) $I_5 = \int e^x \ln(e^x+1)\,dx$.

Решение. 1) $$I_1 = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \underbrace{x\operatorname{tg} x}_{uv} - \int \underbrace{\operatorname{tg} x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} = x\operatorname{tg} x +$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{array}\right| \qquad \left|\text{Применить формулу (1,17)}\right|$$

$$+\ln|\cos x| + C.$$

2) $$I_2 = \int \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x \cdot \ln\sin x - \int \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x\,dx =$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln\sin x & du = \operatorname{ctg} x\,dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{array}\right|$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot \ln\sin x - \int dx = \operatorname{tg} x \ln\sin x - x + C.$$

3) $$I_3 = \int \sin x \cdot \ln\cos x\,dx = -\cos x \ln\cos x -$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln\cos x & du = -\operatorname{tg} x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}\right|$$

$$-\int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\underbrace{(-\operatorname{tg} x\,dx)}_{du} = -\cos x \ln\cos x - \int \sin x\,dx =$$

$$= -\cos x \ln\cos x + \cos x + C = \cos x(1 - \ln|\cos x|) + C.$$

4) $$I_4 = \int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \cdot \ln\operatorname{arctg} x -$$

$$-\int \operatorname{arctg} x \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \ln\operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln\operatorname{arctg} x & du = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = \operatorname{arctg} x \end{array}\right|$$

$$= \operatorname{arctg} x \cdot \ln\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x(\ln\operatorname{arctg} x - 1) + C.$$

5) $I_5=\int e^x\ln(e^x+1)\,dx=e^x\ln(e^x+1)-\int e^x\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=$

$$\left|\begin{array}{l|l} u=\ln(e^x+1) & du=\frac{e^x}{e^x+1}\,dx \\ dv=e^x\,dx & v=e^x \end{array}\right|$$

$=e^x\ln(e^x+1)-\int\frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx=e^x\ln(e^x+1)-\int\left(e^x-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=$
$=e^x\ln(e^x+1)-e^x+\ln(e^x+1)+C=(e^x+1)\ln(e^x+1)-e^x+C.$

Задача 4, 18 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $I_1=\int\cos x\cdot\ln\sin x\,dx$;
2) $I_2=\int\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,dx$; 3) $I_3=\int\sec^2 x\cdot\ln\operatorname{tg}x\,dx$; 4) $\int\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\sin^2 x}\,dx$;
5) $\int xe^{nx}\,dx$.

Ответ. 1) $\sin x(\ln\sin x-1)+C$; 2) $-x-\operatorname{ctg}x\ln\cos x+C$;
3) $\operatorname{tg}x(\ln\operatorname{tg}x-1)+C$; 4) $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}x\ln\operatorname{tg}x+C$;
5) $\frac{1}{n}e^{nx}\left(x-\frac{1}{n}\right)+C$.

Интегралы, для вычисления которых интегрирование по частям применяется несколько раз

Задача 4, 19. Вычислить интеграл $\int(\ln x)^2\,dx$.

Решение. Интегрирование по частям применим дважды:

$\int(\ln x)^2\,dx=x(\ln x)^2-2\int\ln x\,dx=x(\ln x)^2-2\left(x\ln x-\int dx\right)=$

$$\left|\begin{array}{l|l} u=(\ln x)^2 & du=2\ln x\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx & v=x \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l|l} u=\ln x & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx & v=x \end{array}\right|$$

$=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C=x\ln x(\ln x-2)+2x+C.$

Задача 4, 20 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\sqrt[3]{x}(\ln x)^2\,dx$.

Указание. $u=(\ln x)^2$; $dv=\sqrt[3]{x}\,dx$; $du=\frac{2\ln x}{x}\,dx$;
$v=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$.

Интегрирование по частям и здесь придется применить дважды.

Ответ. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left[(\ln x)^2-\frac{3}{2}\ln x+\frac{9}{8}\right]+C$.

Задача 4, 21. Вычислить интеграл $\int(\arcsin x)^2\,dx$.

Ответ. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$.

Упражнения, в которых двукратное интегрирование по частям приводит к исходному интегралу

Задача 4, 22. Вычислить интеграл $I=\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

Решение. В этом примере двукратное применение интегрирования по частям приведет к исходному интегралу.

$$I=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx=$$

$u=e^{ax}$	$du=ae^{ax}\,dx$
$dv=\cos bx\,dx$	$v=\frac{1}{b}\sin bx$

Вторично применяем интегрирование по частям:

$u=e^{ax}$	$du=ae^{ax}\,dx$
$dv=\sin bx\,dx$	$v=-\frac{1}{b}\cos bx$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right].$$

Таким образом, двукратное применение формулы интегрирования по частям привело нас к исходному интегралу, который нами вычисляется.

Раскроем скобки в правой части:

$$I=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Это вычисляемый интеграл, который мы обозначили буквой I

Таким образом,

$$I=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}I.$$

Мы получили уравнение с неизвестной величиной I.

Перенося последнее слагаемое в левую часть уравнения, найдем

$$I+\frac{a^2}{b^2}I=\frac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx+\frac{a}{b}\cos bx\right).$$

Вынесем в левой части этого уравнения I за скобку:

$$I\,\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx+\frac{a}{b}\cos bx\right).$$

Отсюда следует, что искомый интеграл равен

$$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C. \tag{4,11}$$

Аналогичную задачу предлагаем для самостоятельного решения.

Задача 4,23 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int e^{ax} \sin bx\, dx$.

Ответ. $I = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$ (4,12)

Задача 4,24 (для самостоятельного решения).

Применить формулы (4,11) и (4,12) к вычислению интегралов:

$$1)\ I_1 = \int e^{2x} \cos 3x\, dx;\quad 2)\ I_2 = \int \frac{\cos 2x}{e^{3x}}\, dx;\quad 3)\ I_3 = \int \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{e^x}}\, dx.$$

Ответ. 1) $\dfrac{e^{2x}}{13}(2 \cos 3x + 3 \sin 3x) + C$; 2) $\dfrac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{13e^{3x}}$;

3) $\dfrac{6}{13} \dfrac{\sin \frac{x}{2} - 5 \cos \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{e^x}} + C.$

Задача 4,25 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \sin (\ln x)\, dx$ и 2) $I_2 = \int \cos (\ln x)\, dx$.

Указание. Применение дважды к каждому интегралу формулы интегрирования по частям приводит к исходному интегралу. Например,

$$I_1 = x \sin (\ln x) - \underbrace{\int \cos (\ln x)\, dx}_{\text{Снова применить интегрирование по частям}} = x \sin (\ln x) - [x \cos (\ln x) + \underbrace{\int \sin (\ln x)\, dx}_{\text{Исходный интеграл}}].$$

Ответ. $I_1 = \dfrac{x}{2} [\sin (\ln x) - \cos (\ln x)] + C$; $I_2 = \dfrac{x}{2} [\sin (\ln x) + \cos (\ln x)] + C.$

ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Простейшие дроби. Разложение рациональной дроби на простейшие.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Простейшие дроби. Простейшими (иначе элементарными) дробями называются дроби вида:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, ($n > 0$ и целое);

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, ($n > 0$ и целое),

где A, B, a, p и q — действительные числа, а трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные корни, т. е. не раскладывается на действительные множители первой степени.

Рациональные дроби. Дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{5,1}$$

называется *рациональной*, если ее числитель и знаменатель — многочлены (предполагается, что коэффициенты многочленов действительные числа).

Дробь (5,1) называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$, находящегося в числителе, меньше, чем степень многочлена $Q(x)$, находящегося в знаменателе.

Если же степень числителя равна степени знаменателя или больше ее, то рациональная дробь (5,1) называется *неправильной*.

Примеры. 1) Дробь $\frac{x^2+5x-3}{x^3+3x-1}$ — правильная (степень числителя меньше степени знаменателя).

2) Дроби $\frac{x^3+x^2-9}{2x^3+3x^2-x+7}$ и $\frac{x^5-3x^2+x-8}{x^2+x+3}$ — неправильные: в первой степень числителя равна степени знаменателя, а во второй степень числителя больше степени знаменателя.

Из неправильной рациональной дроби всегда можно выделить целую часть (многочлен). Это достигается делением числителя на знаменатель по правилу деления многочленов.

Например, неправильная дробь $\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5}$ может быть представлена так:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & x^2 - 8x + 5 \\ \cline{2-2}
x^4 - 8x^3 + 5x^2 & x^2 + 8x + 56 \\ \cline{1-1}
-\;8x^3 - 8x^2 + 5x + 4 & \\
8x^3 - 64x^2 + 40x & \\ \cline{1-1}
56x^2 - 35x + 4 & \\
56x^2 - 448x + 280 & \\ \cline{1-1}
413x - 276 &
\end{array}$$

и, таким образом,

$$\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5} = \underbrace{x^2+8x+56}_{\text{Целая часть (многочлен)}} + \underbrace{\frac{413x-276}{x^2-8x+5}}_{\text{Правильная дробь}}.$$

Всякая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Поэтому интегрирование рациональной дроби (5,1) всегда может быть приведено к интегрированию многочлена и правильной дроби.

Корни многочлена. Если при $x = x_1$ многочлен

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (5,2)$$

обращается в нуль, т. е. $Q(x_1) = 0$, то число x_1 называется корнем многочлена.

Разложение многочлена на множители. 1. Если числа x_1, x_2, x_3, ..., x_n являются корнями многочлена (5,2), то этот многочлен может быть разложен на множители по формуле

$$Q(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n). \qquad (5,3)$$

2. Многочлен степени n не может иметь больше, чем n различных корней.

3. Корень многочлена x_1 называется простым, если в разложение (5,3) множитель $x - x_1$ входит один раз. Если же этот множитель в формулу (5,3) входит α_1 раз, то корень x_1 называется корнем кратности α_1 многочлена (5,2).

Если корень x_1 имеет кратность α_1, корень x_2 — кратность α_2, а корень x_p — кратность α_p, то формулу (5,3) можно заменить такой:

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots(x - x_p)^{\alpha_p}, \qquad (5,4)$$

причем $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$.

4. Если коэффициенты многочлена (5,2) — действительные числа, а его корнем является комплексное число $a + bi$, то его корнем будет также и комплексное число $a - bi$, сопряженное с $a + bi$.

Если в формуле (5,3) перемножить множители $x - (a + bi)$ и $x - (a - bi)$, соответствующие этим корням, то получится квадратичный множитель вида $x^2 + px + q$, где p и q — действительные числа.

В случае, когда $a + bi$ — простой корень многочлена (5,2), то и $a - bi$ — также простой корень этого многочлена.

Если же $a + bi$ — корень кратности k многочлена (5,2), то и корень $a - bi$ имеет такую же кратность. В этом случае паре этих комплексных сопряженных корней в (5,3) будет соответствовать множитель $(x^2 + px + q)^k$.

Если многочлен (5,2) имеет не только действительные, но и комплексные корни, то вместо формулы (5,4) имеет место формула

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots(x^2 + p_1x + q_1)^{k_1}(x^2 + \\ + p_2x + q_2)^{k_2}\ldots(x^2 + p_lx + q_l)^{k_l}, \qquad (5,5)$$

причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + 2k_1 + 2k_2 + \ldots + 2k_l = n.$$

Квадратичные множители, входящие в эту формулу, не имеют действительных корней и на множители первой степени с действительными коэффициентами не разлагаются.

Теорема (о разложении рациональной дроби на простейшие). Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная, несократимая рациональная дробь, а ее знаменатель после разложения на множители имеет вид

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{k_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{k_l},$$

где $x_1, x_2, \dots$ — действительные числа, а квадратичные множители не имеют действительных корней.

Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей. В этой сумме каждому множителю вида $(x - x_1)^p$ в знаменателе, где x_1 — любой из действительных корней, а p — его кратность, соответствует выражение вида

$$\frac{A_1}{(x - x_1)^p} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{p-1}} + \frac{A_3}{(x - x_1)^{p-2}} + \dots + \frac{A_p}{x - x_1}, \quad (5,6),$$

а каждому множителю $(x^2 + px + q)^r$ знаменателя — выражение вида

$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)^r} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^{r-1}} + \frac{B_3x + C_3}{(x^2 + px + q)^{r-2}} + \dots + \frac{B_rx + C_r}{x^2 + px + q}, \quad (5,7)$$

где $A_1, A_2, \dots, A_p, B_1, B_2, \dots, B_r, C_1, C_2 \dots, C_r$ — действительные числа, подлежащие определению.

Теперь мы на нескольких примерах укажем два наиболее распространенных способа определения коэффициентов, стоящих в числителях тех простейших дробей, на которые разлагается данная рациональная дробь. Это способ неопределенных коэффициентов и способ задания частных значений.

Задача 5,1. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\frac{x^2 + 2x - 4}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)}$.

Решение. Применим способ неопределенных коэффициентов. Общий вид разложения будет таким:

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{x + 3} + \frac{A_4}{x - 4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$x^2 + 2x - 4 = A_1(x - 2)(x + 3)(x - 4) + A_2(x - 1)(x + 3)(x - 4) + A_3(x - 1)(x - 2)(x - 4) + A_4(x - 1)(x - 2)(x + 3). \quad (5,8)$$

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой, т. е. равенство (5,8) должно выполняться при любом значении x. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства будут между собою равны.

В правой части (5,8) произведем умножение двучленов и получим

$$x^2+2x-4=A_1(x^3-3x^2-10x+24)+A_2(x^3-2x^2-11x+12)+$$
$$+A_3(x^3-7x^2+14x-8)+A_4(x^3-7x+6).$$

Это равенство можно переписать иначе, расположив многочлен в правой части по убывающим степеням x:

$$x^2+2x-4=(A_1+A_2+A_3+A_4)x^3+(-3A_1-2A_2-7A_3)x^2+$$
$$+(-10A_1-11A_2+14A_3-7A_4)x+(24A_1+12A_2-8A_3+6A_4).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему четырех уравнений первой степени с четырьмя неизвестными:

$$\begin{array}{c|l}
x^3 & A_1+A_2+A_3+A_4=0 \\
x^2 & -3A_1-2A_2-7A_3=1 \\
x & -10A_1-11A_2+14A_3-7A_4=2 \\
x^0 & 24A_1+12A_2-8A_3+6A_4=-4 \\
\text{(свободный} & \\
\text{член)} &
\end{array}\Bigg\}$$

Решив эту систему, получим:

$$A_1=-\frac{1}{12};\quad A_2=-\frac{2}{5};\quad A_3=\frac{1}{140};\quad A_4=\frac{10}{21}.$$

Теперь определим числа A_1, A_2, A_3 и A_4 вторым способом — способом задания частных значений.

Так как равенство (5,8) — тождество, то оно сохраняется при любом значении x. Будем давать x такие значения, чтобы в правой части все члены, кроме одного, обращались в нуль. Такими «выгодными» значениями являются, очевидно, корни знаменателя, т. е. значения $x=1$; $x=2$; $x=-3$; $x=4$.

При $x=1$ в правой части (5,8) все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, левая часть равенства x^2+2x-4 при $x=1$ будет равна -1, и мы получим

$$-1=A_1(1-2)(1+3)(1-4);\quad -1=12A_1;\quad A_1=-\frac{1}{12}.$$

При $x=2$ левая часть равна 4, а в правой части (5,8) все слагаемые, кроме второго, будут равны нулю:

$$4=A_2(2-1)(2+3)(2-4);\quad 4=-10A_2;\quad A_2=-\frac{2}{5}.$$

При $x=-3$ в правой части (5,8) все слагаемые, кроме третьего, равны нулю:

$$-1=A_3(-3-1)(-3-2)(-3-4);\ -1=-140A_3;\ A_3=\frac{1}{140}.$$

При $x=4$ в правой части (5,8) все слагаемые, кроме четвертого, обратятся в нуль, и мы будем иметь:

$$20=A_4(4-1)(4-2)(4+3);\quad 20=42A_4;\quad A_4=\frac{10}{21}.$$

Заметим, что каким бы способом ни вычислялись неизвестные коэффициенты, мы всегда получим для них одни и те же значения, так как разложение рациональной дроби на простейшие может быть осуществлено единственным образом.

Итак, заданная дробь

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}=-\frac{1}{12(x-1)}-\frac{2}{5(x-2)}+$$
$$+\frac{1}{140(x+3)}+\frac{10}{21(x-4)}.$$

Укажем, что способ задания частных значений x для определения неизвестных коэффициентов особенно удобен в том случае, когда знаменатель дроби содержит только действительные множители первой степени, среди которых нет равных.

В других случаях способ задания частных значений также дает сокращение вычислений, так как позволяет избежать решения системы уравнений с числом уравнений, равным числу неизвестных.

Однако мы рекомендуем учащемуся овладеть этими двумя способами.

Задача 5,2 (для самостоятельного решения).

Рациональную дробь $\frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)}$ разложить на элементарные. Решение провести двумя способами.

Ответ. $\frac{3}{4(x-1)}-\frac{10}{3(x-2)}+\frac{29}{8(x-3)}-\frac{1}{24(x+1)}.$

Задача 5,3 (для самостоятельного решения).

Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби (применить два способа):

1) $\frac{11x-4}{x^2+2x-8}.$

Указание: знаменатель разложить на множители.

2) $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; 3) $\frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)}$;

4) $\frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 5) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)}$;

6) $\frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)}.$

Ответ. 1) $\frac{3}{x-2}+\frac{8}{x+4}$; 2) $\frac{4}{x-1}-\frac{7}{x+3}+\frac{5}{x-4}$;

3) $\frac{17}{6(x+1)}+\frac{9}{10(x+2)}-\frac{119}{10(x-3)}+\frac{67}{6(x-2)}$;

4) $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x-3}$; 5) $\frac{7}{2(x-4)}-\frac{3}{4(x+2)}$;

6) $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+3}+\frac{4}{x-4}.$

Задача 5,4 (для самостоятельного решения).

Представить в виде суммы многочлена и простейших дробей рациональные дроби:

1) $\dfrac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}$; 2) $\dfrac{x^4-x^3-9x^2-10x-14}{x^2-2x-8}$;

3) $\dfrac{30x^5+90x^4+165x^3+341x^2+271x+30}{x^3+3x^2+2x}$.

Указание. Выделить целую часть, согласно объяснению на стр. 60; знаменатели разложить на множители.

Ответ. 1) $3x+5-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x-4}$;

2) $x^2+x+1+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-4}$;

3) $30x^2+105+\dfrac{15}{x}+\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{6}{x+2}$.

Задача 5,5. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\dfrac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}$.

Решение. Разлагая дробь на простейшие, получаем согласно формуле (5,6):

$$\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}=\frac{A_1}{(x-2)^3}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{A_3}{x-2}+\frac{A_4}{x-5}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$x^3-6x^2+9x+7=A_1(x-5)+A_2(x-2)(x-5)+ \\ +A_3(x-2)^2(x-5)+A_4(x-2)^3. \qquad (5,9)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, A_3 и A_4 применим второй способ — способ задания частных значений в сочетании со способом неопределенных коэффициентов. Напоминаем, что написанное равенство является тождеством: оно остается верным при любом значении x. Принимая $x=5$ и $x=2$, мы сможем просто определить два коэффициента. При $x=5$ имеем в левой части 27, тогда $27=A_4(5-2)^3$; $27=27A_4$; $A_4=1$.

При $x=2$ получаем в левой части 9.

$$9=A_1(2-5);\quad 9=-3A_1;\quad A_1=-3.$$

Теперь сравним коэффициенты при x^3 в левой и правой части тождества (5,9). В левой части коэффициент при x^3 равен 1, а в правой, если выполнить в ней возведение в степень и умножение, коэффициент при x^3 равен A_3+A_4. Таким образом, $A_3+A_4=1$. Но так как $A_4=1$, то $A_3=0$.

Сравним теперь свободные члены в левой и правой части (5,9). В правой части свободный член равен $-5A_1+10A_2-20A_3-8A_4$, а в левой 7, т. е. имеет место уравнение

$$-5A_1+10A_2-20A_3-8A_4=7.$$

Подставляя найденные значения A_1, A_4 и A_3, получим для определения A_2 уравнение

$$15 + 10A_2 - 8 = 7; \quad 10A_2 = 0; \quad A_2 = 0.$$

Итак, данная дробь

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)} = -\frac{3}{(x-2)^3} + \frac{1}{x-5}.$$

Определение A_2 и A_3 можно было провести способом задания частных значений. Например, при $x = 1$ и $x = 0$ получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 11 &= -4A_1 + 4A_2 - 4A_3 - A_4 \\ 7 &= -5A_1 + 10A_2 - 20A_3 - 8A_4 \end{aligned}\right\}.$$

Подставляя найденные значения $A_1 = -3$, $A_4 = 1$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} 11 &= 12 + 4A_2 - 4A_3 - 1 \\ 7 &= 15 + 10A_2 - 20A_3 - 8 \end{aligned}\right\}, \text{ или } \left.\begin{aligned} 4A_2 - 4A_3 &= 0 \\ A_2 - 2A_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда следует, что $A_2 = A_3 = 0$.

Задача 5,6 (для самостоятельного решения).

Разложить на простейшие дроби:

1) $\dfrac{x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 8x + 5}{(x-2)^3(x+3)^2}$;

2) $\dfrac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2}$;

3) $\dfrac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3(x-2)}$;

4) $\dfrac{x^3 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2}$;

5) $\dfrac{-69x^3 - 12x^2 + 475x + 646}{(x+2)^2(x-3)^2}$;

6) $\dfrac{3x^2 + 13x + 11}{(x+1)^2(x+2)}$;

7) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x + 4}{x^2(x-2)^2}$.

Указания. В четвертом примере $x^2 - 3x - 10$ разложить на множители; в седьмом примере представить дробь в виде $\dfrac{A_1}{x^2} + \dfrac{A_2}{x} + \dfrac{A_3}{(x-2)^2} + \dfrac{A_4}{x-2}$.

Ответ. 1) $\dfrac{1}{5(x-2)^3} + \dfrac{42}{25(x-2)^2} + \dfrac{27}{25(x-2)} + \dfrac{23}{25(x+3)^2} - \dfrac{2}{25(x+3)}$; 2) $\dfrac{9}{2(x-3)^2} + \dfrac{1}{2(x+1)^2}$;

3) $\dfrac{13}{(x-4)^3} - \dfrac{3}{(x-4)^2} + \dfrac{2}{x-4} - \dfrac{2}{x-2}$;

4) $-\dfrac{8}{49(x-5)^2} + \dfrac{30}{343(x-5)} + \dfrac{27}{49(x+2)^2} - \dfrac{30}{343(x+2)}$;

5) $\dfrac{8}{(x+2)^2} - \dfrac{9}{x+2} + \dfrac{4}{(x-3)^2} - \dfrac{60}{x-3}$;

6) $\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{6}{x+1} - \dfrac{3}{x+2}$;

7) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{2(x-2)^2} + \dfrac{3}{4(x-2)}$.

Задача 5,7. Дробь $\frac{1}{x^3+1}$ разложить на простейшие.

Решение. Разложим знаменатель x^3+1 на множители: $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. Квадратичный множитель x^2-x+1 действительных корней не имеет, а потому на основании формул (5,6) и (5,7) имеет место разложение

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2-x+1}.$$

Умножая обе части равенства на x^3+1, получаем

$$1 = A_1(x^2-x+1) + (B_1x+C_1)(x+1).$$

Для определения неизвестных A_1, B_1 и C_1 воспользуемся способом неопределенных коэффициентов. Выполняя умножение, имеем

$$1 = (A_1+B_1)x^2 + (-A_1+C_1+B_1)x + A_1 + C_1.$$

Это равенство является тождеством и может сохраняться только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства равны между собой:

$$\begin{array}{l|ll} x^2 & A_1 + B_1 = 0 & \quad (1)\\ x & -A_1 + C_1 + B_1 = 0 & \quad (2)\\ x^0 & A_1 + C_1 = 1 & \quad (3)\\ \text{(свободный член)} & & \end{array}$$

Складывая первое уравнение с третьим и вычитая из полученного уравнения второе, получаем

$$3A_1 = 1; \quad A_1 = \frac{1}{3}.$$

Тогда из уравнения (1) $B_1 = -\frac{1}{3}$, а из уравнения (3) $C_1 = \frac{2}{3}$ и, окончательно

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

Задача 5,8. Дробь $\frac{x^2}{1-x^4}$ разложить на простейшие.

Решение. Знаменатель дроби $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2)$. Поэтому данная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{A_1}{1-x} + \frac{A_2}{1+x} + \frac{A_3x+A_4}{1+x^2}.$$

После умножения обеих частей равенства на $1-x^4$ получим тождество

$$x^2 = A_1(1+x)(1+x^2) + A_2(1-x)(1+x^2) + (A_3x+A_4)(1-x^2). \tag{5,10}$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, A_3 и A_4 применим сначала способ задания частных значений. При $x=1$

получаем в левой части 1, а в правой все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, а первое слагаемое станет равным $4A_1$. A_1 найдем из полученного уравнения: $1 = 4A_1$, $A_1 = \frac{1}{4}$. При $x = -1$ получаем в левой части равенства 1, а в правой $4A_2$, и тогда $1 = 4A_2$, а $A_2 = \frac{1}{4}$.

Теперь сравним коэффициенты при x^3 в левой и правой части равенства (5,10). В левую часть этого равенства x^3 не входит. Это означает, что коэффициент при x^3 равен 0, а в правой части коэффициент при x^3 равен $A_1 - A_2 - A_3$. Таким образом,

$$0 = A_1 - A_2 - A_3.$$

Учитывая, что A_1 и A_2 уже определены, имеем

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - A_3,$$

а отсюда следует, что $A_3 = 0$.

Нам осталось определить A_4.

Дадим x значение 0. В левой части получим 0, а в правой $A_1 + A_2 + A_4$, и тогда

$$0 = A_1 + A_2 + A_4.$$

Так как $A_1 = A_2 = \frac{1}{4}$, то $0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + A_4$, отсюда $A_4 = -\frac{1}{2}$.

Итак, предложенная дробь

$$\frac{x^2}{1 - x^4} = \frac{1}{4(1 - x)} + \frac{1}{4(1 + x)} - \frac{1}{2(1 + x^2)}.$$

Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Разложить на простейшие дроби:

$$1)\ \frac{1}{(a + bx)(1 + x^2)};\quad 2)\ \frac{x^2 + 2}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)};$$

$$3)\ \frac{1}{x^4 + 1}.$$

Указание. $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

Дробь представить в виде

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Ответ. 1) $\frac{a - bx}{(a^2 + b^2)(1 + x^2)} + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)(a + bx)}$;

2) $-\frac{3}{4(x - 1)} + \frac{1}{4(x + 1)} + \frac{2}{5(x - 2)} + \frac{x + 2}{10(x^2 + 1)}$;

3) $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $B = \frac{1}{2}$; $C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $D = \frac{1}{2}$.

Задача 5,10 (для самостоятельного решения).

Рациональные дроби: 1) $\frac{x^2+1}{x^3+1}$ и 2) $\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$ разложить на простейшие.

Указание. $x^3+x^2+4x+4=x^2(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x^2+4)$.

Ответ. 1) $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)$; 2) $-\frac{2}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+4}$.

Задача 5,11 (для самостоятельного решения). Разложить на простейшие дроби: 1) $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$; 2) $\frac{1}{1-x^6}$.

Указание. 1) Знаменатель разложить на множители. Для этого решить биквадратное уравнение $x^4+x^2-2=0$. Его корни $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=\sqrt{2}i$ и $x_4=-\sqrt{2}i$, а потому $x^4+x^2-2=(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$. Перемножая множители, соответствующие мнимым корням $(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$, получим окончательно

$$x^4+x^2-2=(x-1)(x+1)(x^2+2).$$

$$2)\ 1-x^6=(1-x^3)(1+x^3)=(1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1-x+x^2).$$

Ответ. 1) $\frac{1}{6}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{2+x^2}$;

2) $\frac{1}{6}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{6(x^2+x+1)}+\frac{x-2}{6(x^2-x+1)}$.

ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегрирование простейших рациональных дробей.

Интегрирование рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ приводится к интегрированию простейших дробей вида:

$$1)\ \frac{A}{x-a};\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^n}\ (n>0 \text{ и целое});\quad 3)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q};$$

$$4)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\ (n>0 \text{ и целое}).$$

$$1.\ \int \frac{A}{x-a}\,dx=\ln|x-a|+C. \tag{6,1}$$

Задача 6,1. Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{x-3}$; 2) $\int\frac{dx}{5-x}$; 3) $\int\frac{dx}{2x-1}$.

Решение. 1) По формуле (6,1) $\int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + C$;

$$2)\ \int \frac{dx}{5-x} = -\int \frac{-1dx}{5-x} = -\ln|5-x| + C;$$

$$3)\ \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C.$$

Числитель равен производной знаменателя

Задача 6,2 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x-13}$; 2) $\int \frac{dx}{15-3x}$; 3) $\int \frac{dx}{4-7x}$; 4) $\int \frac{dx}{3-8x}$; 5) $\int \frac{3dx}{4x-9}$.

Ответ. 1) $\ln|x-13| + C$;

2) $-\frac{1}{3}\ln|15-3x| + C$; 3) $-\frac{1}{7}\ln|4-7x| + C$;

4) $-\frac{1}{8}\ln|3-8x| + C$; 5) $\frac{3}{4}\ln|4x-9| + C$.

2. $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C.$

Окончательно:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C. \tag{6,2}$$

Задача 6,3. Вычислить интегралы:

$$1)\ I = \int \frac{dx}{(x-2)^3};\quad 2)\ I = \int \frac{dx}{(x+3)^5};$$

$$3)\ I = \int \frac{dx}{(2x-1)^4};\quad 4)\ I = \int \frac{dx}{(4-3x)^3}.$$

Решение. Для вычисления первых двух интегралов непосредственно применяется формула (6,2):

1) $n = 3$; $I = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-2)^2} + C$.

2) $n = 5$; $I = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)^4} + C$.

3) Чтобы можно было применить формулу (6,2), числитель дроби $\frac{1}{(2x-1)^4}$, стоящей под интегралом, должен быть равен производной от основания степени знаменателя. Преобразуем дробь к виду

$$\frac{1}{(2x-1)^4} = \frac{1}{2}\frac{2}{(2x-1)^4},$$

и тогда

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2}{(2x-1)^4}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2x-1)^3}\right) + C =$$
$$= -\frac{1}{6}\,\frac{1}{(2x-1)^3} + C.$$

4) Этот интеграл вычисляется как и предыдущий

$$I = -\frac{1}{3} \int \frac{-3}{(4-3x)^3}\,dx = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(4-3x)^2}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{(4-3x)^2} + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx.$

Для вычисления этого интеграла поступают так:

а) в числителе дроби, стоящей под интегралом, записывается производная знаменателя, т. е. $(2x+p)$. Тождественными преобразованиями из $2x+p$ получают заданный числитель $Ax+B$. Для этого следует $2x+p$ умножить на $\frac{A}{2}$ и к полученному произведению прибавить $B-\frac{Ap}{2}$. Очевидно, что

$$(2x+p)\frac{A}{2} + B - \frac{Ap}{2} = Ax + B.$$

б) Преобразованная дробь $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ имеет вид

$$\frac{(2x+p)\frac{A}{2} + B + \frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}$$

и может быть представлена как сумма двух дробей:

$$\frac{A}{2}\,\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

Первая дробь интегрируется просто: в числителе находится производная знаменателя — интегрирование приводит к натуральному логарифму модуля знаменателя. Для интегрирования второй дроби в знаменателе выделяют полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Интеграл от второй дроби приводится к табличному интегралу (1,23), если $4q - p^2 < 0$, и к табличному интегралу (1,21), если $4q - p^2 > 0$.

Замечание. Если в знаменателе дроби вместо квадратичного трехчлена $x^2 + px + q$ находится трехчлен $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), то коэффициент a следует вынести за скобку и тем самым свести этот случай к предыдущему.

В задачах 6,4 и 6,5 даны примеры вычисления интегралов этого типа.

Задача 6,4. Найти интегралы:

$$1)\ I_1 = \int \frac{dx}{x^2+4x+14};\quad 2)\ I_2 = \int \frac{dx}{x^2+x+1};\quad 3)\ I_3 = \int \frac{dx}{x^2+3x+6};$$

$$4)\ I_4 = \int \frac{dx}{x^2-9x+25};\quad 5)\ I_5 = \int \frac{dx}{x^2-7x+14};\ 6)\ I_6 = \int \frac{dx}{x^2-x+14}.$$

Решение. В этом практическом занятии нам часто придется пользоваться формулой (3,4). Напомним, что она имеет такой вид:

$$\int \frac{u'}{u^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

1) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2 + 4x + 14 = (x+2)^2 - 4 + 14 = (x+2)^2 + 10.$$

Применим формулу (3,4)

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x+2)^2+10} = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{10}} + C.$$

$$\left|\begin{matrix} u = x+2;\ u' = 1 \\ a^2 = 10;\ a = \sqrt{10} \end{matrix}\right|$$

2) Выделяем полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4};$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$\left|\begin{matrix} u = x+\frac{1}{2};\ u' = 1 \\ a^2 = \frac{3}{4};\ a = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2+3x+6=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+6=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4};$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}+C=$$

Формулу (3,4) можно применить: $u=x+\frac{3}{2}$; $u'=1$; $a^2=\frac{15}{4}$;

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{15}}+C.$$

4) В знаменателе выделяем полный квадрат:

$$x^2-9x+25=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}+25=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{19}{4};$$

$$I_4=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{9}{2}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}+C=$$

Формулу (3,4) можно применить: $u=x-\frac{9}{2}$; $u'=1$; $a^2=\frac{19}{4}$

$$=\frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x-9}{\sqrt{19}}+C.$$

5) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2-7x+14=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+14=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4};$$

$$I_5=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{7}}+C.$$

6) $x^2-x-14=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+14=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{55}{4};$

$$I_6=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{55}{4}}=\frac{2}{\sqrt{55}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{55}}+C.$$

Задача 6,5 (для самостоятельного решения).
Найти интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{x^2+x+5}; \quad 2) \int \frac{dx}{x^2+2x+6}; \quad 3) \int \frac{dx}{x^2+6x+19};$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2+5x+12}; \quad 5) \int \frac{dx}{x^2-7x+20}.$$

Ответ. 1) $\frac{2}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C$;

2) $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{5}} + C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{\sqrt{10}} + C$;

4) $\frac{2}{\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{23}} + C$; 5) $\frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{2x+7}{\sqrt{31}} + C$.

Задача 6,6. Найти интегралы:

$$1) \; I_1 = \int \frac{dx}{5x^2+7x+11}; \quad 2) \; I_2 = \int \frac{dx}{4x^2+x+5};$$

$$3) \; I_3 = \int \frac{dx}{3x^2-8x+9}.$$

Решение. Эта задача отличается от предыдущих тем, что коэффициент при x^2 в знаменателе не равен единице. Для того чтобы свести этот случай к предыдущему, будем этот коэффициент выносить за скобку (см. замечание на стр. 72).

$$1) \; 5x^2+7x+11 = 5\left(x^2+\frac{7}{5}x+\frac{11}{5}\right) = 5\left[\left(x+\frac{7}{10}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{49}{100}+\frac{11}{5}\right] = 5\left[\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right];$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{5\left[\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right]} = \frac{1}{5}\frac{1}{\frac{\sqrt{171}}{10}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{7}{10}}{\frac{\sqrt{171}}{100}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{171}} \operatorname{arctg} \frac{10x+7}{\sqrt{171}} + C.$$

$$2) \; 4x^2+x+5 = 4\left(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right) = 4\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}+\frac{5}{4}\right] =$$

$$= 4\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{79}{64}\right];$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{4\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{79}{64}\right]} = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{\sqrt{79}}{8}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{79}}{8}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{79}} \operatorname{arctg} \frac{8x+1}{\sqrt{79}} + C.$$

3) $3x^2-8x+9=3\left(x^2-\frac{8}{3}x+3\right)=3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}+3\right]=$
$=3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right]$;

$$I_3=\int\frac{dx}{3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right]}=\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{11}}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-4}{\sqrt{11}}+C.$$

Задача 6,7 (для самостоятельного решения).
Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{5x^2+9x+10}$; 2) $\int\frac{dx}{7x^2-3x+5}$;

3) $\int\frac{dx}{9x^2+x+12}$; 4) $\int\frac{dx}{6x^2+7x+15}$;

5) $\int\frac{dx}{3x^2-11x+17}$.

Ответ. 1) $\frac{2}{\sqrt{119}}\operatorname{arctg}\frac{10x+9}{\sqrt{119}}+C$;

2) $\frac{2}{\sqrt{131}}\operatorname{arctg}\frac{14x-3}{\sqrt{131}}+C$;

3) $\frac{2}{\sqrt{431}}\operatorname{arctg}\frac{18x+1}{\sqrt{431}}+C$;

4) $\frac{2}{\sqrt{311}}\operatorname{arctg}\frac{12x+7}{\sqrt{311}}+C$;

5) $\frac{2}{\sqrt{83}}\operatorname{arctg}\frac{6x-11}{\sqrt{83}}+C$.

Теперь выполним упражнения в интегрировании дробей вида $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

Задача 6,8. Найти интегралы:

1) $I_1=\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx$; 2) $I_2=\int\frac{2x-3}{x^2+x+5}dx$;

3) $I_3=\int\frac{7x-8}{x^2+5x+17}dx$.

Решение. На стр. 71 дано указание, как вычислять эти интегралы. Рекомендуется еще раз ознакомиться с ним.

1) Преобразуем дробь $\frac{3x+4}{x^2+7x+14}$, стоящую под интегралом: выделим в числителе из $3x+4$ производную знаменателя, равную $2x+7$, но чтобы величина числителя при этом не изменилась:

$$3x+4=(2x+7)\frac{3}{2}+4-\frac{21}{2}=(2x+7)\frac{3}{2}-\frac{13}{2}.$$

Поэтому

$$I_1=\underbrace{\int\frac{(2x+7)\frac{3}{2}-\frac{13}{2}}{x^2+7x+14}\,dx}_{\text{Преобразовываем в разность двух интегралов, причем во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат}}=\underbrace{\frac{3}{2}\int\frac{2x+7}{x^2+7x+14}\,dx}_{\text{Числитель является производной знаменателя. Применима формула (1,32)}}-$$

$$-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+14}=\frac{3}{2}\ln(x^2+7x+14)-$$

$$-\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C.$$

Ответ. $I_1=\frac{3}{2}\ln(x^2+7x+14)-\frac{13}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{7}}+C.$

Замечание. Под знаком логарифма трехчлен $x^2+7x+14$ не взят по абсолютной величине, так как корни его комплексны, коэффициент при x^2 положителен, а поэтому при любом значении x этот трехчлен положителен.

Это замечание следует иметь в виду и в дальнейшем.

2) Из числителя дроби $2x-3$ выделим производную знаменателя, равную $2x+1$, и получим $2x-3=(2x+1)-4$. Поэтому

$$I_2=\underbrace{\int\frac{(2x+1)-4}{x^2+x+5}\,dx}_{\text{Представляем как разность двух интегралов, а во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат}}=\underbrace{\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}\,dx}_{\text{В числителе производная знаменателя. Применить формулу (1,32)}}-$$

$$-4\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+5}=\ln(x^2+x+5)-4\frac{1}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}+C=$$

$$=\ln(x^2+x+5)-\frac{8}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+C.$$

3) Поступаем так же. Из числителя дроби $7x-8$ выделяем производную знаменателя, равную $2x+5$:

$$7x-8=(2x+5)\frac{7}{2}-8-\frac{35}{2}=(2x+5)\frac{7}{2}-\frac{51}{2};$$

$$I_3=\frac{7}{2}\ln(x^2+5x+17)-\frac{51}{\sqrt{43}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{43}}+C.$$

Задача 6,9 (для самостоятельного решения). Найти интегралы:

1) $\int\frac{3x-11}{x^2+8x+18}dx$; 2) $\int\frac{x+7}{x^2+11x+42}dx$; 3) $\int\frac{x-3}{x^2-9x+23}dx$;

4) $\int\frac{7x+4}{x^2+x+9}dx$; 5) $\int\frac{5x-7}{x^2+3x+8}dx$.

Ответ. 1) $\frac{3}{2}\ln(x^2+8x+18)-\frac{23}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{\sqrt{2}}+C$;

2) $\frac{1}{2}\ln(x^2+11x+42)+\frac{3}{\sqrt{47}}\operatorname{arctg}\frac{2x+11}{\sqrt{47}}+C$;

3) $\frac{1}{2}\ln(x^2-9x+23)+\frac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-9}{\sqrt{11}}+C$;

4) $\frac{7}{2}\ln(x^2+x+9)+\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{35}}+C$;

5) $\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+8)-\frac{29}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{23}}+C$.

4. Интеграл вида $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $n>1$ и целое, а корни знаменателя комплексны, сводится к вычислению двух интегралов. Это достигается так: в числителе записывается производная основания степени знаменателя, т. е. производная от x^2+px+q, и так же, как было указано в п. 3, (стр. 71), эта производная преобразовывается в выражение $Ax+B$, стоящее в числителе. Дробь

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}=\frac{(2x+p)\frac{A}{2}+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}+$$
$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^n}. \qquad (6,3)$$

Интеграл первой дроби вычисляется по формуле (1,29). Вторая дробь

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n}=\frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

Если обозначить

$$q-\frac{p^2}{4}=\beta^2,\quad x+\frac{p}{2}=\beta z \qquad (6,4)$$

(обозначить $q-\frac{p^2}{4}$ через β^2 мы имеем право, так как по предположению корни трехчлена x^2+px+q — комплексны, а потому $q-\frac{p^2}{4}$ — величина положительная), то

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n}=\frac{1}{(\beta^2z^2+\beta^2)^n}=\frac{1}{[\beta^2(1+z^2)]^n}=\frac{1}{\beta^{2n}(1+z^2)^n},$$

и таким образом интегрирование второй дроби в правой части (6,3) сводится к интегрированию дроби $\frac{1}{(1+z^2)^n}$.

Интеграл

$$I_n=\int\frac{1}{(1+z^2)^n}dz \tag{6,5}$$

вычисляется по формуле

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)}\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}, \tag{6,6}$$

где

$$I_{n-1}=\int\frac{1}{(1+z^2)^{n-1}}dz$$

(индекс у буквы I равен показателю степени выражения $1+z^2$). Вывод формулы (6,6) можно найти, например, в учебнике Н. С. Пискунова «Дифференциальное и интегральное исчисления».

Формула (6,6) называется рекуррентной, или формулой приведения. Она позволяет вычисление интеграла I_n свести к вычислению интеграла I_{n-1} с меньшим на единицу индексом.

Упражнения, связанные с применением рекуррентной формулы (6,6)

Задача 6,10. Вычислить интегралы:

$$1)\ I_3=\int\frac{dz}{(1-z^2)^3};\quad 2)\ I_4=\int\frac{dx}{(1+x^2)^4};\quad 3)\ I=\int\frac{dx}{(4+x^2)^5}.$$

(Значок при I равен показателю степени выражения, стоящего в знаменателе).

Решение. 1) Применим последовательно формулу (6,6). Подставляя в (6,6) $n=3$, получим:

$$I_3=\frac{1}{2(3-1)}\frac{z}{(1+z^2)^{3-1}}+\frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}I_2;$$

$$I_3=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{3}{4}I_2.$$

Теперь применим (6,6) к вычислению I_2 (положим в (6,6) $n=2$). Тогда

$$I_3 = \frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2(2-1)}\frac{z}{(1+z^2)} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}I_1\right) = \frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} +$$

$$+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2}I_1\right) = \frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{z}{1+z^2} + \frac{3}{8}I_1.$$

Но $I_1 = \int \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z + C$, а поэтому окончательно

$$I_3 = \int \frac{dz}{(1+z^2)^3} = \frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{z}{1+z^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} z + C. \quad (6,7)$$

2) Здесь также последовательно применяем формулу (6,6) начиная с $n = 4$:

$$I_4 = \frac{1}{2(4-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{4-1}} + \frac{2\cdot 4-3}{2\cdot 4-2}I_3;$$

$$I_4 = \frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}I_3. \quad (6,8)$$

Но I_3 нами было найдено в предыдущем примере, только там вместо x стояла буква z. Заменяя в (6,7) z на x и подставляя в (6,8), получим

$$I_4 = \frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{6}\left[\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x\right] + C.$$

Окончательно

$$I_4 = \frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{24}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{5}{16}\frac{x}{1+x^2} + \frac{5}{16}\operatorname{arctg} x + C. \quad (6,9)$$

3) Формулу (6,6) можно применить, если в знаменателе будет выражение вида $(1+x^2)^n$. У нас же в степень $n=5$ возводится не $1+x^2$, а $4+x^2$. Полагая $x=2z$, получим $dx = 2dz$; $x^2 = 4z^2$, а $(4+x^2)^5 = (4+4z^2)^5 = [4(1+z^2)]^5 = 1024(1+z^2)^5$.

Поэтому искомый интеграл

$$I = \int \frac{dx}{(4+x^2)^5} = \int \frac{2dz}{1024(1+z^2)^5} = \frac{1}{512}\int \frac{dz}{(1+z^2)^5} = \frac{1}{512}I_5.$$

Итак, $I = \frac{1}{512}I_5$ и, применяя формулу (6,6) при $n=5$,

$$I = \frac{1}{512}\left[\frac{1}{2(5-1)}\frac{z}{(1+z^2)^4} + \frac{2\cdot 5-3}{2\cdot 5-2}I_4\right],$$

т. е. $I = \frac{1}{512}\left[\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4} + \frac{7}{8}I_4\right]$.

Подставляя сюда найденное в предыдущем примере I_4 (только в (6,9) надо x заменить буквой z), получаем

$$I = \frac{1}{512}\left[\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4} + \frac{7}{8}\left(\frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^3} + \frac{5}{24}\frac{z}{(1+z^2)^2} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{5}{16}\frac{z}{1+z^2} + \frac{5}{16}\operatorname{arctg} z\right)\right] + C.$$

Раскрывая скобки, будем иметь

$$I=\frac{1}{512}\left[\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{7}{48}\frac{z}{(1+z^2)^3}+\frac{35}{192}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{35}{128}\frac{z}{1+z^2}+\frac{35}{128}\operatorname{arctg} z\right]+C.$$

Возвратимся к старой переменной x. Мы полагали, что $x=2z$. Отсюда $z=\frac{x}{2}$. Подставляя в последнее равенство $z=\frac{x}{2}$, получим окончательно

$$I=\frac{1}{32}\frac{x}{(4+x^2)^4}+\frac{7}{768}\frac{x}{(4+x^2)^3}+\frac{35}{12288}\frac{x}{(4+x^2)^2}+$$
$$+\frac{35}{32768}\frac{x}{4+x^2}+\frac{35}{65536}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Задача 6,11 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы (указания даны на стр. 77 и 78).

1) $I=\int\frac{dx}{(3x^2+x+7)^2}$; 2) $I=\int\frac{dx}{(5x^2+2x+4)^3}$;

3) $I=\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$; 4) $I=\int\frac{2x-1}{(4x^2+3x+5)^3}dx$.

Ответ. 1) $\frac{6x+1}{83(3x^2+x+7)}+\frac{12}{83\sqrt{83}}\operatorname{arctg}\frac{6x+1}{\sqrt{83}}+C$;

2) $\frac{5x+1}{38}\left[\frac{1}{2(5x^2+2x+4)^2}+\frac{15}{76(5x^2+2x+4)}\right]+$
$+\frac{75}{2888\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{\sqrt{19}}+C$;

3) $\frac{x-5}{4(x^2+2x+5)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$;

4) $-\frac{14x+23}{142(4x^2+3x+5)^2}-\frac{21}{5041}\frac{8x+3}{4x^2+3x+5}-$
$-\frac{336}{5041\sqrt{71}}\operatorname{arctg}\frac{8x+3}{\sqrt{71}}+C.$

СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Интегрирование рациональных дробей.

На пятом практическом занятии учащийся на большом числе упражнений ознакомился со способами разложения рациональной дроби на простейшие, а на шестом занятии он приобрел навыки интегрирования простейших рациональных дробей.

Поэтому интегрирование рациональных дробей не должно вызывать трудностей. Ограничимся только несколькими подробно разобранными примерами, а остальные предложим для самостоятельного решения.

Мы рассмотрим такие четыре случая:

1. Корни знаменателя — только действительные числа, среди которых нет равных.

2. Корни знаменателя — только действительные числа, но среди них есть равные (знаменатель имеет действительные кратные корни).

3. Знаменатель дроби, кроме действительных корней, имеет и комплексные корни, но среди них нет равных.

4. Знаменатель дроби наряду с действительными имеет и кратные комплексные корни.

Первый случай.

Задача 7,1. Вычислить $I=\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}\,dx.$

Решение. *Прежде чем приступить к интегрированию рациональной дроби, следует убедиться в том, что дробь — правильная и несократимая.* В нашем случае дробь, стоящая под интегралом,— неправильная, так как степень ее числителя (третья) выше степени знаменателя (второй).

Поэтому прежде всего исключаем целую часть.

Для этого делим числитель x^3+x+2 на знаменатель $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3+x+2 & x^2-7x+12 \\ \mp x^3 \pm 7x^2 \mp 12x & \overline{x+7+\frac{38x-82}{x^2-7x+12}} \\ \hline -\;7x^2-11x+2 & \\ \mp 7x^2 \pm 49x \mp 84 & \\ \hline 38x-82 & \end{array}$$

Поэтому

$$I=\int\left(x+7+\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+7x+\int\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}\,dx.$$

Дробь $\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}.$

Умножая обе части этого равенства на $(x-3)(x-4)$, получаем

$$38x-82=A(x-4)+B(x-3).$$

Здесь коэффициенты проще всего определить способом задания частных значений: $A=-32$; $B=70$.

Дробь $\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4}$, а $I=\frac{1}{2}x^2+7x+$
$+\int\left(-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+7x-32\ln|x-3|+70\ln|x-4|+C.$

Задача 7,2. Вычислить $I=\int\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}\,dx.$

Решение. Дробь, стоящая под интегралом,— правильная. Разлагаем ее на простейшие:

$$\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}.$$

Умножая левую и правую часть этого равенства на знаменатель левой части, имеем

$$x^2+x+5=A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3).$$

И здесь при определении коэффициентов A, B и C наиболее быстро к цели ведет способ задания частных значений.

(Вообще, если корни знаменателя — числа только действительные и разные, этот способ является наиболее целесообразным). $A=-\frac{5}{6}$; $B=\frac{11}{15}$; $C=\frac{11}{10}$.

$$I=\int\left(-\frac{5}{6}\frac{1}{x}+\frac{11}{15}\frac{1}{x+3}+\frac{11}{10}\frac{1}{x-2}\right)dx=-\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{11}{15}\ln|x+3|+$$
$$+\frac{11}{10}\ln|x-2|+C=\ln\frac{(x-2)\sqrt[15]{(x+3)^{11}}\sqrt[10]{x-2}}{\sqrt[6]{x^5}}+C.$$

Задача 7,3 (для самостоятельного решения).

Вычислить: 1) $\int\frac{dx}{(a+bx)(c+dx)}$; 2) $\int\frac{x\,dx}{(a+bx)(c+dx)}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{a+bx}{c+dx}\right|+C$; 2) $\frac{1}{ad-bc}\left[\frac{a}{b}\ln|a+bx|-\right.$ $\left.-\frac{c}{d}\ln|c+dx|\right]+C$.

Задача 7,4 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$.

Ответ. $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.

Задача 7,5. Вычислить:

1) $I=\int\frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$; 2) $I=\int\frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$;

3) $I=\int\frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9}dx$; 4) $I=\int\frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$.

Решение. 1) Разлагаем прежде всего знаменатель на множители: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$. Дробь

$$\frac{2x+3}{x^2-7x+12}=\frac{2x+3}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4};\ A=-9;\ B=11;$$

$$I=\ln\frac{(x-4)^{11}}{(x-3)^9}+C.$$

2) Знаменатель дроби разлагаем на множители:

$$x^3-9x^2+20x=x(x^2-9x+20)=x(x-4)(x-5).$$

Дробь

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x-5}.$$

Для определения коэффициентов A, B и C с целью упражнений примените способ задания частных значений и способ неопределенных коэффициентов. Окажется, что

$$A=\frac{3}{20};\ B=-\frac{27}{4};\ C=\frac{38}{5};$$

$$I=\frac{3}{20}\ln|x|-\frac{27}{4}\ln|x-4|+\frac{38}{5}\ln|x-5|+C,$$

или $I=\ln\dfrac{\sqrt[20]{x^3}\,(x-5)^7\sqrt[4]{(x-5)^3}}{(x-4)^6\sqrt[4]{(x-4)^3}}+C.$

3) Знаменатель дроби разлагаем на множители: приравниваем знаменатель нулю и находим его корни:

$x^4-10x^2+9=0;\quad x_1=1;\quad x_2=-1;\quad x_3=3;\quad x_4=-3,$ поэтому $x^4-10x^2+9=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$, а дробь

$$\frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+3};$$

$$A=-\frac{3}{16};\ B=\frac{17}{16};\ C=\frac{5}{48};\ D=-\frac{47}{48};$$

$$I=\ln(x+1)\sqrt[48]{\frac{(x+1)^3(x-3)^5}{(x-1)^9(x+3)^{47}}}+C.$$

4) Здесь мы прежде всего обращаем внимание на то, что дробь, стоящая под интегралом,— неправильная. Исключаем целую часть:

$$I=\int\left(2x-1+\frac{18x^2-9x+5}{x(x-3)(x+3)}\right)dx;$$

$$\frac{18x^2-9x+5}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}.$$

Определяя коэффициенты любым из указанных способов, получим:

$$A=-\frac{5}{9};\ B=\frac{70}{9};\ C=\frac{97}{9};$$

$$I=x^2-x-\frac{5}{9}\ln|x|+\frac{70}{9}\ln|x-3|+\frac{97}{9}\ln|x+3|+C;$$

$$I=x^2-x+\ln(x-3)^7(x+3)^{10}\sqrt[9]{\frac{(x-3)^7(x+3)^7}{x^5}}+C.$$

Задача 7,6 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^3-11x^2+4x+15}{x^3-5x^2-x+5}\,dx;$

2) $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx;$ 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^4-5x^2+1};$

4) $\displaystyle\int\frac{dz}{z^3+7z^2+2z-40}.$

Указания. В первом примере после исключения целой части получится дробь $\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}$; знаменатель после разложения его на множители равен $(x+1)(x-1)(x-5)$. Дробь $\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}=$
$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-5}$;

$$A=\frac{1}{3};\quad B=-\frac{3}{4};\quad C=\frac{5}{12}.$$

В четвертом примере один корень знаменателя $z_1=2$.

Ответ. 1) $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{5}{12}\ln|x-5|+C$;

2) $\ln\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}+C$; 3) $\ln\sqrt[6]{\frac{(x-1)(2x+1)^2}{(x+1)(2x-1)^2}}+C$;

4) $\frac{1}{42}\ln\frac{(z+5)^6(z-2)}{(z+4)^7}+C$.

Второй случай. Корни знаменателя — только действительные числа, но среди них есть кратные.

Задача 7,7. Вычислить

$$I=\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}\,dx.$$

Решение. Заданная дробь — правильная и несократимая. (На это прежде всего следует обратить внимание).

Представим дробь в виде

$$\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{x+2}. \quad (7,1)$$

Определение A, B, C, D, E проведем способом неопределенных коэффициентов и способом задания частных значений, которые целесообразно комбинировать.

Умножая обе части написанного равенства на знаменатель левой части, получим

$$2x^2+5x-8=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)^2+C(x-1)^2(x+2)^2+$$
$$+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+2).$$

Напоминаем, что написанное выражение является тождеством, а потому равенство должно сохраняться при любом значении x. При $x=-2$ получаем

$$2(-2)^2+5(-2)-8=D(-2-1)^3,$$

отсюда определяем коэффициент D:

$$-10=-27D;\quad D=\frac{10}{27}.$$

При $x=1$

$$2\cdot 1^2+5\cdot 1-8=A(1+2)^2;\qquad -1=9A;\quad A=-\frac{1}{9}.$$

Нам осталось определить еще три коэффициента: B, C и E. Теперь будем сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой части равенства.

Коэффициент при x^4 в левой части равен нулю (x^4 в левой части отсутствует), а в правой $C+E$. Поэтому $C+E=0$.

Свободный член в левой части равен -8, а в правой $4A-4B+4C-D-2E$. На основании этого получаем второе уравнение: $4A-4B+4C-D-2E=-8$, в котором A и D уже известны, а поэтому $2B-2C+E=\frac{97}{27}$.

Мы сравнивали именно свободные члены потому что это можно сделать, не выполняя умножения и возведения в степень в правой части равенства.

Для того, чтобы получить третье уравнение для определения B, C и E, снова возвратимся к способу задания частных значений. При $x=2$ получим

$$8+10-8=16A+16B+16C+D+4E.$$

С учетом, что $A=-\frac{1}{9}$, а $D=\frac{10}{27}$ это уравнение примет вид $4B+4C+E=\frac{77}{27}$.

Таким образом, для определения B, C и E имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} C+E&=0\\ 2B-2C+E&=\frac{97}{27}\\ 4B+4C+E&=\frac{77}{27}\end{aligned}\right\};$$

$$B=\frac{29}{27};\quad C=-\frac{13}{27};\quad E=\frac{13}{27}.$$

Таким образом,

$$A=-\frac{1}{9};\quad B=\frac{29}{27};\quad C=-\frac{13}{27};\quad D=\frac{10}{27};\quad E=\frac{13}{27}.$$

Очень полезно сделать проверку найденных значений коэффициентов. Для этого дадим x произвольное значение, например, $x=-3$, получим равенство

$$-5=A-4B+16C-64D+64E.$$

При найденных значениях коэффициентов оно выполняется. Отсюда мы заключаем, что коэффициенты определены верно.

$$\int \frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}dx = \int\left[\frac{-\frac{1}{9}}{(x-1)^3} + \frac{\frac{29}{27}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{13}{27}}{x-1} + \frac{\frac{10}{27}}{(x+2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{13}{27}}{x+2}\right]dx = \frac{1}{9}\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{29}{27}\frac{1}{x-1} - \frac{13}{27}\ln|x-1| - \frac{10}{27}\frac{1}{x+2} +$$

$$+ \frac{13}{27}\ln|x+2| + C = -\frac{26x^2+5x-34}{18(x-1)^2(x+2)} + \frac{13}{27}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + C.$$

Задача 7,8 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int \frac{x^4+5x^3-10x^2-8x+5}{(x-2)^3(x+3)^2}dx$ способами, которые были применены в предыдущей задаче.

Ответ. $-\frac{23}{25(x+3)} - \frac{1}{10(x-2)^2} - \frac{42}{25(x-2)} + \frac{27}{25}\ln|x-2| - \frac{2}{25}\ln|x+3| + C.$

Задача 7,9 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int \frac{x^2+x-1}{x^3(x-2)^2}\cdot dx$

Ответ. $\frac{-5x^2+x-2}{8x^2(x-2)} + \ln\sqrt[16]{\left(\frac{x}{x-2}\right)^5} + C.$

Задача 7,10 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx.$

Указание. $x^2-3x-10 = (x-5)(x+2).$

Ответ. $\frac{8}{49}\frac{1}{x-5} - \frac{27}{49}\frac{1}{x+2} + \frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right| + C.$

Третий случай. Знаменатель дроби, кроме действительных корней, имеет и комплексные, но среди комплексных корней нет равных.

Задача 7,11. Вычислить интеграл $I = \int \frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx.$

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3-x^2+5x-5 = x^2(x-1)+5(x-1) = (x-1)(x^2+5).$$

Дробь, стоящая под интегралом, — неправильная. Поэтому, прежде чем разлагать ее на простейшие, исключим целую часть, Окажется, что она равна

$$x+6-\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}. \qquad (A)$$

Теперь дробь $\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}$ разложим на простейшие. Учитывая, что знаменатель дроби равен $(x-1)(x^2+5)$, получим

$$\frac{6x^2+25x-35}{(x-1)(x^2+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+5}.$$

Умножая обе части этого равенства на знаменатель левой части, получим

$$6x^2+25x-35=A(x^2+5)+(Bx+C)(x-1).$$

Применим сначала способ задания частных значений. Возьмем $x=1$:

$$6\cdot 1^2+25\cdot 1-35=A(1^2+5);\quad -4=6A;\quad A=-\frac{2}{3}.$$

Теперь сравним коэффициенты при одинаковых степенях x. В левой части равенства коэффициент при x^2 равен 6, а в правой $A+B$.

Поэтому $A+B=6$, а так как $A=-\frac{2}{3}$, то $B=\frac{20}{3}$.

Свободный член в левой части равенства -35, а в правой $5A-C$. Поэтому $5A-C=-35$; $C=\frac{95}{3}$.

Итак, дробь

$$\frac{6x^2+25x-35}{(x-1)(x^2+5)}=-\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{20}{3}x+\frac{95}{3}}{x^2+5}.$$

Учитывая это, а также выражение (A), получаем

$$I=\int\left[x+6+\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{20}{3}x+\frac{95}{3}}{x^2+5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+6x-\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{20}{3}\int\frac{x}{x^2+5}dx+\frac{95}{3}\int\frac{dx}{x^2+5}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+6x+\frac{1}{3}\ln\frac{(x^2+5)^{10}}{(x-1)^2}+\frac{95}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Задача 7,12 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\frac{dx}{1-x^4}$.

Указание. $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$. Дробь запишется в виде

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}+\frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

Ответ. $\ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

Задача 7,13. Вычислить

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3}.$$

Решение. Так как $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$, а корни трехчлена $1-x+x^2$ комплексны, то дробь запишем в виде

$$\frac{x}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2}.$$

Ответ. $-\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

Задача 7,14 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\frac{dx}{1-x^3}$.

Указание. $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$.

Ответ. $\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

Задача 7,15. Вычислить $I=\int\frac{x^3}{(x^2+x+2)(x^2-2x+3)}dx$.

Указание. Учитывая, что корни каждого из трехчленов, находящихся в знаменателе,— комплексны, подынтегральную дробь запишем в виде

$$\frac{x^3}{(x^2+x+2)(x^2-2x+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+3};$$

$$A=\frac{5}{22};\quad B=\frac{7}{11};\quad C=\frac{17}{22};\quad D=-\frac{21}{22}.$$

Ответ. $\ln\sqrt[44]{(x^2+x+2)^5(x^2-2x+3)^{17}}+\frac{23}{22\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}-$

$$-\frac{\sqrt{2}}{11}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

Задача 7,16 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Ответ. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

Четвертый случай. Знаменатель дроби имеет действительные и кратные комплексные корни.

Задача 7,17. Вычислить $\int\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}dx$.

Указание. Знаменатель дроби имеет кратные комплексные корни. Если $(x^2+4)^2=0$, то $x_1=2i$; $x_2=-2i$; $x_3=2i$; $x_4=-2i$. Дробь

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+4};$$

$$A=\frac{1}{25};\quad B=-\frac{4}{125};\quad C=\frac{18}{125};\quad D=-\frac{31}{125};\quad E=\frac{4}{125};$$

$$F=\frac{3}{125}.$$

Ответ. $\frac{2}{125}\ln\frac{x^2+4}{(x-1)^2}-\frac{71x^2+41x+88}{1000(x-1)(x^2+4)}-\frac{7}{2000}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

Задача 7,18 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

1) $\int\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx$; 2) $\int\frac{x^5}{(3+2x^2)^3}dx.$

Ответ. 1) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C$;

2) $\frac{1}{16}\left[\ln(3+2x^2)+\frac{3(9+8x^2)}{2(3+2x^2)^2}\right]+C.$

Указание. При вычислении второго интеграла можно избежать обычного пути, если ввести подстановку $3+2x^2=z$. Тогда $4x\,dx=dz$; $x\,dx=\frac{dz}{4}$; $x^2=\frac{z-3}{2}$; $x^4=\frac{(z-3)^2}{4}$ и

$$\int\frac{x^5\,dx}{(3+2x^2)^3}=\int\frac{x^4x\,dx}{(3+2x^2)^3}=\int\frac{(z-3)^2\,dz}{4\cdot4\cdot z^3}=\frac{1}{16}\int\frac{z^2-6z+9}{z^3}dz=$$

$$=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{z}-\frac{6}{z^2}+\frac{9}{z^3}\right)dz=\frac{1}{16}\left[\ln z+\frac{6}{z}-\frac{9}{2z^2}\right]+C=$$

$$=\frac{1}{16}\left[\ln(3+2x^2)+\frac{6}{3+2x^2}-\frac{9}{2(3+2x^2)^2}\right]+C.$$

Отсюда легко получается и предыдущий ответ.

Замечание. Следует вообще иметь в виду, что интегралы вида $\int\frac{x^{2m+1}}{(a+bx^2)^n}dx$, где m — целое и положительное число, легко вычисляются с помощью подстановки $a+bx^2=z$. Эта подстановка приводит к интегралу $\frac{1}{2b^{m+1}}\int\frac{(z-a)^m}{z^n}dz$, а вычисление его сводится к вычислению интегралов от одночленов.

Задача 7,19 (для самостоятельного решения). Вычислить

$$I=\int\frac{x^7}{(5+4x^2)^4}dx.$$

Указание. Подстановка $5+4x^2=z$;

$$I=\frac{1}{512}\int\frac{(z-5)^3}{z^4}dz.$$

Ответ. $\frac{1}{512}\left[\ln(5+4x^2)+\frac{1375+2700x^2+1440x^4}{6(5+4x^2)^3}\right]+C.$

ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

I. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \sin kx \cos lx\, dx; \quad \int \cos kx \cos lx\, dx; \quad \int \sin kx \sin lx\, dx;$$

где k и l — действительные числа.

Из тригонометрии известно, что произведения тригонометрических функций, находящихся под знаками этих интегралов, преобразуются в суммы по следующим формулам:

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2}[\sin(k-l)x + \sin(k+l)x]; \tag{8,1}$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2}[\cos(k-l)x + \cos(k+l)x]; \tag{8,2}$$

$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2}[\cos(k-l)x - \cos(k+l)x]. \tag{8,3}$$

Заменив в рассматриваемых интегралах подынтегральные функции по этим формулам, легко выполним интегрирование.

Следует также иметь в виду уже известные нам формулы, которыми часто придется пользоваться. Для удобства мы запишем их здесь:

$$\int \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx + C; \tag{8,4}$$

$$\int \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx + C; \tag{8,5}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \tag{8,6}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \tag{8,7}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C; \tag{8,8}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \tag{8,9}$$

Задача 8,1. Вычислить интегралы:

1) $I_1 = \int \sin 6x \cos 7x\, dx$; 2) $I_2 = \int \cos 3x \cos 9x\, dx$;

3) $I_3 = \int \sin 2x \sin 5x\, dx$.

Решение. 1) Заменяя произведение $\sin 6x \cos 7x$ по формуле (8,1), получим

$$I_1 = \frac{1}{2}\int [\sin(-x) + \sin 13x]\,dx = \frac{1}{2}\int (-\sin x + \sin 13x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{13}\cos 13x\right) + C.$$

2) Заменим $\cos 3x \cos 9x$ суммой косинусов по формуле (8,2), найдем

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \underbrace{[\cos(-6x) + \cos 12x]\,dx}_{\cos(-6x) = \cos 6x} = \frac{1}{2}\int \underbrace{(\cos 6x + \cos 12x)\,dx}_{\text{Применить формулу (8,5)}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{12}\sin 12x\right) + C.$$

3) Заменяя произведение $\sin 2x \sin 5x$ по формуле (8,3), получим

$$I_3 = \frac{1}{2}\int [\cos(-3x) - \cos 7x]\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{7}\sin 7x\right) + C.$$

Задача 8,2 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \cos 3x \cos x\,dx$; 2) $\int \sin 5x \sin\frac{x}{2}\,dx$;

3) $\int \sin\frac{3}{4}x \cos\frac{x}{4}\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$;

2) $\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{11}\sin\frac{11x}{2} + \frac{2}{9}\sin\frac{9x}{2}\right) + C$;

3) $-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} + \cos x\right) + C$.

Задача 8,3. Найти $I = \int \sin 2x \cos 5x \sin 9x\,dx$.

Решение.

$$\sin 2x \cos 5x \sin 9x = \frac{1}{2}[\sin(-3x) + \sin 7x]\sin 9x =$$
$$= \frac{1}{2}(-\sin 3x \sin 9x + \sin 7x \sin 9x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 12x) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 16x)\right]; \quad I = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 12x}{12} - \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 16x}{16}\right) + C.$$

Задача 8,4 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\int \sin x \cos 2x \cos 3x\,dx$; 2) $\int \cos x \cos 2x \cos 5x\,dx$.

Ответ. 1) $-\frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 6x}{24} + C$;

2) $\frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + \frac{\sin 8x}{32} + C$.

II. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx. \qquad (8,10)$$

(Во всем дальнейшем m — показатель степени синуса, n — показатель степени косинуса).

Интегралы этого вида вычисляются особенно просто в четырех случаях: 1) m — нечетное положительное число; 2) n — положительное нечетное число; 3) $m+n=-2k$ — четное отрицательное число; 4) $m+n=0$ (в четвертом случае предполагается, что m и n — целые числа).

Первый и второй случаи. Показатель степени синуса m — нечетное положительное число: $m=2k+1$. В этом случае подынтегральное выражение преобразовываем так: из $\sin^m x=\sin^{2k+1}x$, выделяем первую степень синуса и получаем

$$\sin^{2k+1}x=\sin^{2k}x\sin x=(\sin^2 x)^k\sin x=(1-\cos^2 x)^k\sin x,$$

а подынтегральное выражение

$$\sin^m x\cos^n x\,dx=(1-\cos^2 x)^k\cos^n x\sin x\,dx.$$

Теперь применим подстановку

$$\cos x=z. \qquad (8,11)$$

Тогда $-\sin x\,dx=dz$;

$$(1-\cos^2 x)^k\cos^n x\sin x\,dx=-(1-z^2)^k z^n\,dz,$$

и вопрос сведется к интегрированию суммы степенных функций.

Второй случай. Показатель степени косинуса n — нечетное положительное число:

$$n=2k+1.$$

Из $\cos^n x=\cos^{2k+1}x$ выделяем первую степень косинуса и получаем

$$\cos^{2k+1}x=\cos^{2k}x\cos x=(\cos^2 x)^k\cos x=(1-\sin^2 x)^k\cos x.$$

Подынтегральное же выражение запишется так:

$$\sin^m x\cos^n x\,dx=\sin^m x\,(1-\sin^2 x)^k\cos x\,dx.$$

Применим подстановку

$$\sin x=z, \qquad (8,12)$$

$\cos x\,dx=dz$, подынтегральное выражение примет вид

$$z^m(1-z^2)^k\,dz,$$

и вопрос опять-таки сведется к интегрированию суммы степенных функций.

Итак, вычисление интеграла (8,10) при указанных значениях m и n сводится к интегрированию многочлена.

Приступим к решению задач.

Задача 8,5. Вычислить интегралы:

$$1)\ I_1=\int \sin^3 x\,dx;\qquad 2)\ I_2=\int \cos^5 x\,dx;$$

$$3)\ I_3=\int \sin^7 x\,dx;\qquad 4)\ I_4=\int \cos^9 x\,dx.$$

Решение. 1) Запишем, что $\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=$ $=(1-\cos^2 x)\sin x$. Тогда

$$I_1=\int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx. \tag{8,13}$$

Применяя подстановку (8,11) $\cos x=z$, получим

$$I_1=-\int (1-z^2)\,dz=-z+\frac{z^3}{3}+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим окончательно

$$I_1=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Собственно говоря, для вычисления интеграла (8,13) никакой подстановки не требуется, так как формула (1,29)

$$\int u^n u'\,dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$$

позволяет сразу написать ответ. Из (8,13) следует, что

$$I_1=\int \sin x\,dx-\int \cos^2 x\sin x\,dx=-\cos x+$$
$$+\int \underbrace{\cos^2 x}_{u^2}\,\underbrace{(-\sin x)}_{u'}\,dx=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C.$$

Это замечание относится и к следующим примерам этого номера. Однако мы все же для упражнений будем прибегать к подстановкам.

2) В подынтегральной функции $\cos^5 x$ выделим первую степень косинуса, тогда

$$\cos^5 x=\cos^4 x\cos x=(\cos^2 x)^2\cos x=(1-\sin^2 x)^2\cos x=$$
$$=(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\cos x,$$

а

$$I_2=\int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\cos x\,dx.$$

Применяя подстановку (8,12): $\sin x=z$; $\cos x\,dx=dz$, получим

$$I_2=\int (1-2z^2+z^4)\,dz=z-\frac{2z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, т. е. заменяя z на $\sin x$, получим окончательно

$$I_2=\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

И здесь, конечно, можно было обойтись без подстановки, а вести интегрирование непосредственно при помощи формулы (1,29).

3) Из $\sin^7 x$ выделяем первую степень синуса и получим

$$\sin^7 x = \sin^6 x \sin x = (\sin^2 x)^3 \sin x = (1-\cos^2 x)^3 \sin x;$$

$$I_3 = \int (1-\cos^2 x)^3 \sin x\, dx.$$

Подстановка (8,11): $\cos x = z$; $-\sin x\, dx = dz$

$$I_3 = -\int (1-z^2)^3\, dz = -\int (1-3z^2+3z^4-z^6)\, dz =$$

$$= -\left(z - z^3 + \frac{3}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7\right) + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, т. е. заменяя z на $\cos x$, получим окончательно

$$I_3 = -\left(\cos x - \cos^3 x + \frac{3}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x\right) + C.$$

4) Решение проведем без подробных объяснений:

$$\cos^9 x = \cos^8 x \cos x = (\cos^2 x)^4 \cos x = (1-\sin^2 x)^4 \cos x;$$

$$I_4 = \int (1-\sin^2 x)^4 \cos x\, dx = \underset{\substack{\text{Подстановка:}\\ \sin x = z;\ \cos x\, dx = dz}}{=} \int (1-z^2)^4\, dz =$$

$$= \int (1-4z^2+6z^4-4z^6+z^8)\, dz = z - \frac{4}{3}z^3 + \frac{6}{5}z^5 -$$

$$-\frac{4}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 + C = \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{6}{5}\sin^5 x -$$

$$-\frac{4}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

Задача 8,6. Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$;

2) $I_2 = \int \cos^2 x \sin^5 x\, dx$; 3) $I_3 = \int \sin^4 x \cos^7 x\, dx$.

Решение. Эти примеры решаются так же, как и примеры предыдущей задачи. У функции, которая под интегралом находится в нечетной степени, выделяем первую степень и применяем указанный выше прием.

1) $$\sin^4 x \cos^3 x = \sin^4 x \cos^2 x \cos x = \sin^4 x (1-\sin^2 x)\cos x =$$

$$= (\sin^4 x - \sin^6 x)\cos x,$$

поэтому

$$I_1 = \int (\sin^4 x - \sin^6 x)\cos x\, dx = \underset{\substack{\text{Подстановка: } \sin x = z;\\ \cos x\, dx = dz}}{=} \int (z^4 - z^6)\, dz =$$

$$= \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + C \underset{\substack{\text{Заменяем } z \text{ на}\\ \sin x}}{=} \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

2) Подынтегральную функцию преобразуем так:

$$\cos^2 x \sin^5 x = \cos^2 x \sin^4 x \sin x = \cos^2 x\,(\sin^2 x)^2 \sin x =$$
$$= \cos^2 x\,(1-\cos^2 x)^2 \sin x = \cos^2 x\,(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x =$$
$$= (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\sin x;$$

$$I_2 = \int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x)\sin x\,dx =$$

| Подстановка: $\cos x = z$; $-\sin x\,dx = dz$ |

$$= -\int (z^2 - 2z^4 + z^6)\,dz = -\left(\frac{z^3}{3} - \frac{2z^5}{5} + \frac{z^7}{7}\right) + C =$$

| Заменяем z на $\cos x$ |

$$= -\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}\right) + C.$$

3) Подынтегральную функцию запишем так:

$$\sin^4 x \cos^7 x = \sin^4 x \cos^6 x \cos x = \sin^4 x\,(\cos^2 x)^3 \cos x =$$
$$= \sin^4 x\,(1-\sin^2 x)^3 \cos x = \sin^4 x\,(1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x)\cos x =$$
$$= (\sin^4 x - 3\sin^6 x + 3\sin^8 x - \sin^{10} x)\cos x;$$

$$I_3 = \int (\sin^4 x - 3\sin^6 x + 3\sin^8 x - \sin^{10} x)\cos x\,dx =$$

| Подстановка: $\sin x = z$; $\cos x\,dx = dz$ |

$$= \int (z^4 - 3z^6 + 3z^8 - z^{10})\,dz = \frac{z^5}{5} - \frac{3z^7}{7} + \frac{z^9}{3} - \frac{z^{11}}{11} + C =$$

| Заменяем z на $\sin x$ |

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{3\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{3} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

Задача 8,7 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \sin^7 x \cos^6 x\,dx$; 2) $\int \sin^2 x \cos^5 x\,dx$;

3) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$; 4) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$.

Ответ. 1) $-\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{1}{3}\cos^9 x - \frac{3}{11}\cos^{11} x + \frac{1}{13}\cos^{13} x + C$;

2) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$;

3) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$;

4) $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

Задача 8,8. Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$;

2) $I_2 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}\,dx$; 3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$.

Решение. 1) $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x = (\sin^2 x)^2 \sin x =$
$= (1 - \cos^2 x)^2 \sin x = (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x;$

$$I_1 = \int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} \sin x\, dx = -\int \frac{1 - 2z^2 + z^4}{z^4} dz =$$

| Подстановка: $\cos x = z$; $-\sin x\, dx = dz$ | | Выполним почленное деление |

$$= -\int \left(\frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^2} + 1\right) dz = -\left(-\frac{1}{3z^3} + \frac{2}{z} + z\right) + C =$$

| Заменяем z на $\cos x$ |

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C = \frac{1}{3}\sec^3 x - 2\sec x - \cos x + C.$$

2) $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x;$

$$I_2 = \int \frac{(1 - \sin^2 x)\cos x\, dx}{\sin^6 x} = \int \frac{1 - z^2}{z^6} dz = \int \left(\frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^4}\right) dz =$$

| Подстановка: $\sin x = z$; $\cos x\, dx = dz$ |

$$= -\frac{1}{5}\frac{1}{z^5} + \frac{1}{3}\frac{1}{z^3} + C = -\frac{1}{5}\frac{1}{\sin^5 x} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 x} + C =$$

| Заменяем z на $\sin x$ |

$$= -\frac{1}{5}\operatorname{cosec}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C.$$

3) Числитель $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)\sin x;$

$$I_3 = \int \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{1 - z^2}{z^2} dz =$$

| Подстановка: $\cos x = z$; $\sin x\, dx = dz$ |

$$= -\int \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) dz = -\left(-\frac{1}{z} - z\right) + C =$$

| Заменяем z на $\cos x$ |

$$= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C = \sec x + \cos x + C.$$

Задача 8,9 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$; 3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx$;
4) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$; 5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx$; 6) $\int \frac{\sin^{11} x}{\cos x} dx$; 7) $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$;
8) $\int \frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos x}} dx$; 9) $\int \cos^5 x \sqrt[3]{\sin^2 x}\, dx$; 10) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$.

Ответ. 1) $-\frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$; 2) $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$;

3) $\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$; 4) $\frac{\cos^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C$;

5) $-\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C$;

6) $\frac{5}{2}\cos^2 x - \frac{5}{2}\cos^4 x + \frac{5}{3}\cos^6 x - \frac{5}{8}\cos^8 x + \frac{1}{10}\cos^{10} x - \ln|\cos x|$;

7) $3\sqrt[3]{\sin x}\left(1 - \frac{2}{7}\sin^2 x + \frac{1}{13}\sin^4 x\right) + C$;

8) $-2\sqrt{\cos x}\left(1 - \frac{3}{5}\cos^2 x + \frac{1}{3}\cos^4 x - \frac{1}{13}\cos^6 x\right) + C$;

9) $3\sqrt[3]{\sin^2 x}\left(\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{11}\sin^3 x + \frac{1}{17}\sin^5 x\right) + C$;

10) $2\sqrt{\sin x}\left(1 - \frac{1}{5}\sin^2 x\right) + C$.

Задача 8,10 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$; 2) $\int \frac{\cos^7 x}{\sin^4 x}\,dx$.

Ответ. 1) $-\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C$;

2) $-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

Третий случай. Сумма $m+n$ показателей степени синуса и косинуса в интеграле (8,10) — четное отрицательное число:

$$m + n = -2k \quad (k > 0 \text{ и целое}).$$

В этом случае подынтегральная функция может иметь два вида:

1) Подынтегральная функция — дробь, в числителе которой находится степень синуса, а в знаменателе — степень косинуса (или наоборот), причем показатели степени или оба четные, или оба нечетные. В этом случае говорят, что они одинаковой четности.

Так как $m+n$ — отрицательное число, то отсюда следует, что степень знаменателя больше степени числителя.

2) Подынтегральная функция — дробь, числитель которой постоянная величина, а знаменатель — произведение степеней синуса и косинуса одинаковой четности.

В рассматриваемом случае ($m + n = -2k$) любая из подстановок

$$\operatorname{tg} x = z \tag{8,14}$$

или

$$\operatorname{ctg} x = z \tag{8,15}$$

преобразует подынтегральную функцию в многочлен или в многочлен, сложенный с целыми отрицательными степенями новой независимой переменной z.

Если подынтегральная функция имеет первый из разобранных видов, а в числителе находится степень $\sin x$, более удобной из этих подстановок является (8,14), если же в числителе находится степень $\cos x$, рациональнее применить подстановку (8,15).

Дроби второго вида с помощью подстановок (8,14) и (8,15) можно привести к интегрированию степенных функций.

Применяя подстановку (8,14), надо учесть, что из $\operatorname{tg} x = z$ следует:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{dz}{1+z^2} \\ \sin x &= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \end{aligned}\right\} \tag{8,16}$$

$$\left(\sec^2 x\,dx = dz;\ dx = \frac{dz}{\sec^2 x} = \frac{dz}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{dz}{1+z^2}\right).$$

Если применяется подстановка (8,15), то

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\frac{dz}{1+z^2} \\ \sin x &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \\ \cos x &= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \end{aligned}\right\}. \tag{8,17}$$

Задача 8,11. Найти интеграл $I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,dx$.

Решение. Здесь $m = 4$; $n = -8$; $m + n = -4$ — четное отрицательное число. Подынтегральная функция относится к рассматриваемому случаю.

Так как в числителе находится степень синуса, то на основании сделанного указания удобно применить подстановку (8,14): $\operatorname{tg} x = z$. По формулам (8,16) получаем

$$I = \int \frac{\frac{z^4}{\sqrt{(1+z^2)^4}}}{\frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^8}}\,\frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{\frac{z^4}{(1+z^2)^2}}{\frac{1}{(1+z^2)^4}}\,\frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \int \frac{z^4(1+z^2)^4}{(1+z^2)^2}\,\frac{1}{1+z^2}\,dz = \int z^4(1+z^2)\,dz =$$

$$= \int (z^4 + z^6)\,dz = \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C.$$

Переходим к старой переменной (заменяем z на $\operatorname{tg} x$)

$$I=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+C.$$

Задача 8,12. Найти интеграл $I=\int\frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx.$

Решение. Здесь $n=4$; $m=-6$; $m+n=-2$ — четное отрицательное число, и мы имеем рассматриваемый случай. Так как в числителе находится степень косинуса, удобна подстановка (8,15): $\operatorname{ctg} x=z$.

Используя формулы (8,17), получаем

$$I=-\int\frac{\frac{z^4}{\sqrt{(1+z^2)^4}}}{\frac{1}{\sqrt{(1+z^2)^6}}}\,\frac{dz}{1+z^2}=-\int z^4dz=-\frac{z^5}{5}+C=-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+C.$$

| Заменяем z на $\operatorname{ctg} x$ |

Задача 8,13. Найти интегралы:

$$1)\ I_1=\int\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx;\quad 2)\ I_2=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^9 x}dx.$$

Решение. 1) Здесь $m=3$; $n=-7$; $m+n=-4$ — четное отрицательное число, т. е. рассматриваемый случай. В числителе — степень синуса, а потому удобна подстановка (8,14): $\operatorname{tg} x=z$. Используя формулы (8,16), относящиеся к этой подстановке, получим

$$I_1=\int\frac{\frac{z^3}{\sqrt{(1+z^2)^3}}}{\frac{1}{\sqrt{(1+z^2)^7}}}\,\frac{dz}{1+z^2}=\int z^3\sqrt{(1+z^2)^4}\,\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=\int z^3(1+z^2)^2\frac{dz}{1+z^2}=\int z^3(1+z^2)\,dz=\int(z^3+z^5)\,dz=\frac{z^4}{4}+\frac{z^6}{6}+C=$$

| Заменяем z на $\operatorname{tg} x$ |

$$=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{tg}^6 x}{6}+C.$$

2) Здесь $m=-9$; $n=3$; $m+n=-6$ — четное отрицательное число, т. е. рассматриваемый случай. В числителе — степень

косинуса, удобно применить подстановку (8,15): $\operatorname{ctg} x = z$. Используя формулы (8,17), относящиеся к этой подстановке, получаем

$$I_2 = -\int \frac{\dfrac{z^3}{\sqrt{(1+z^2)^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{(1+z^2)^9}}} \frac{dz}{1+z^2} = -\int z^3 (1+z^2)^2 dz =$$

$$= -\int z^3 (1+2z^2+z^4)\, dz = -\int (z^3+2z^5+z^7)\, dz =$$

$$= -\left(\frac{z^4}{4}+\frac{z^6}{3}+\frac{z^8}{8}\right)+C =$$

$$\boxed{\text{Заменяем } z \text{ на } \operatorname{ctg} x}$$

$$= -\left(\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{ctg}^6 x}{3}+\frac{\operatorname{ctg}^8 x}{8}\right)+C.$$

Для упражнения к первому интегралу примените подстановку (8,15), а ко второму — (8,14). Ответы совпадут, но в каждом — случае придется интегрировать отрицательные степени z, поэтому интегрирование осложнится.

Задача 8,14 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ [подстановка (8,15)];

2) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ [подстановка (8,14)];

3) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; 5) $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$.

Ответ. 1) $-\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C$; 2) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$; 3) $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C$; 4) $-\left(\operatorname{ctg} x + \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x\right) + C$; 5) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + C$.

Задача 8,15 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$ [подстановка (8,16)];
2) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x} dx$; 3) $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^{13} x} dx$.

Ответ. 1) $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C$; 2) $-\left(\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x\right) + C$;
3) $\frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^{10} x + \frac{1}{12}\operatorname{tg}^{12} x + C$.

В предыдущих задачах m и n были целыми числами. Это требование не является обязательным. В рассматриваемом случае необходимо только, чтобы $m+n$ было отрицательным четным числом. Мы предложим несколько задач, в которых соблюдается условие $m+n=-2k$, но m и n — числа не целые.

Задача 8,16. Найти интегралы:

1) $I_1=\int\sqrt{\frac{\sin x}{\cos^9 x}}\,dx$; 2) $I_2=\int\sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}}\,dx$; 3) $I_3=\int \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x\sec^6 x\,dx$.

Решение. 1) В подынтегральную функцию $\sin x$ входит в степени $m=\frac{1}{2}$, а $\cos x$ — в степени $n=-\frac{9}{2}$. Поэтому $m+n=$ $=\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{8}{2}=-4$ — четному отрицательному числу. Здесь наиболее удобной будет подстановка (8,14): $\operatorname{tg} x=z$. Используя формулы (8,16), получим

$$I_1=\int\frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{9}{2}} x}\,dx=\int\frac{\dfrac{z^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{9}{2}}}}\,\frac{dz}{1+z^2}=\int z^{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+z^2})^4\,\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=\int z^{\frac{1}{2}}(1+z^2)^2\frac{dz}{1+z^2}=\int z^{\frac{1}{2}}(1+z^2)\,dz=\int\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{5}{2}}\right)dz=\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{z^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+$$

$$+C=\frac{2}{3}\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x+\frac{2}{7}\operatorname{tg}^{\frac{7}{2}} x+C=2\sqrt{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg} x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^3 x\right)+C.$$

2) В этом примере показатель степени синуса $m=-\frac{8}{3}$, а показатель степени косинуса $n=\frac{2}{3}$, а потому $m+n=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}=$ $=-2$ — четному отрицательному числу. Здесь уместна подстановка (8,15) : $\operatorname{ctg} x=z$. Учитывая связанные с ней формулы (8,17), получим

$$I_2=\int\frac{\cos^{\frac{2}{3}} x}{\sin^{\frac{8}{3}} x}\,dx=-\int\frac{\dfrac{z^{\frac{2}{3}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{2}{3}}}}{\dfrac{1}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{8}{3}}}}\,\frac{dz}{1+z^2}=-\int z^{\frac{2}{3}}\,\frac{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{8}{3}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{2}{3}}}\,\frac{dz}{1+z^2}=$$

| Применяем формулы (8,17) |

$$=-\int z^{\frac{2}{3}}\,dz=-\frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}+C=-\frac{3}{5}\operatorname{ctg} x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}+C.$$

3) Преобразуем подынтегральную функцию к виду, который соответствует рассматриваемому случаю:

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x \sec^6 x = \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{1}{2}} x} \frac{1}{\cos^6 x} = \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{13}{2}} x}.$$

Здесь $m = \frac{1}{2}$; $n = -\frac{13}{2}$; $m + n = -6$ — отрицательному нечетному числу. Применяя подстановку (8,14) и учитывая связанные с ней формулы (8,16), получим

$$I_3 = \int \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{13}{2}} x} dx = \underbrace{\int \frac{\dfrac{z^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{13}{2}}}} \frac{dz}{1+z^2}}_{\text{Применяем формулы (8,16)}} = \int z^{\frac{1}{2}} (1+z^2)^2 \, dz =$$

$$= \int z^{\frac{1}{2}} (1 + 2z^2 + z^4) \, dz = \int \left(z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{5}{2}} + z^{\frac{9}{2}}\right) dz = \underbrace{\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7} z^{\frac{7}{2}} +}_{\substack{\text{Возвращаемся к старой переменной,}\\ \text{заменяя } z \text{ на } \operatorname{tg} x}}$$

$$+ \frac{2}{11} z^{\frac{11}{2}} + C = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x + \frac{4}{7} \operatorname{tg}^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11} \operatorname{tg}^{\frac{11}{2}} x + C =$$

$$= 2\sqrt{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{11} \operatorname{tg}^5 x\right) + C.$$

Задача 8,17 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}} dx$; 2) $\int \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}} dx$;

3) $\int \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x \sec^4 x \, dx$.

Ответ. 1) $\frac{2}{3} \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{tg} x} + C$; 2) $\frac{3}{4} \operatorname{tg} x \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + C$;

3) $2\sqrt{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{5} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^4 x\right) + C$.

Теперь рассмотрим примеры, относящиеся ко второму виду дробей (см. стр. 97).

Задача 8,18. Найти: 1) $I_1 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$; 2) $I_2 = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^6 x}$;

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sin^7 x \cos x}$.

Решение. 1) Здесь $m=-3$; $n=-5$; $m+n=-8$ — отрицательному четному числу, а потому подынтегральная функция относится к рассматриваемому случаю. Для вычисления интеграла можно применить любую из подстановок: (8,14) или (8,15). Остановимся, например, на подстановке (8,14): $\operatorname{tg} x = z$ и используем связанные с ней формулы (8,16)

$$I_1 = \int \frac{1}{\frac{z^3}{(\sqrt{1+z^2})^3}\,\frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^5}}\,\frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{(1+z^2)^3}{z^3}\,dz =$$

$$= \int \frac{1+3z^2+3z^4+z^6}{z^3}\,dz = \int\left(\frac{1}{z^3}+3\frac{1}{z}+3z+z^3\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{2z^2}+3\ln|z|+\frac{3}{2}z^2+\frac{1}{4}z^4+C =$$

$$\boxed{\text{Заменяем } z \text{ на } \operatorname{tg} x}$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C.$$

Для упражнения при вычислении этого интеграла применить подстановку (8,15) и связанные с ней формулы (8,17).

2) В этом примере $m=-4$; $n=-6$; $m+n=-10$ — отрицательному четному числу. Подынтегральная функция относится к рассматриваемому случаю. Для вычисления интеграла, как это было указано и при решении предыдущего примера, можно применить любую из подстановок: (8,14) или (8,15). Чтобы разнообразить решение, применим подстановку (8,15): $\operatorname{ctg} x = z$ и используем связанные с ней формулы (8,17)

$$I_2 = -\int \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^4}\,\frac{z^6}{(\sqrt{1+z^2})^6}}\,\frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= -\int \frac{(1+z^2)^4}{z^6}\,dz = -\int \frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^6}\,dz =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Вычисляем } (1+z^2)^4\\ \text{по формуле бинома}\\ \text{Ньютона}\end{array}}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{z^5}+\frac{4}{3}\frac{1}{z^3}+\frac{6}{z}-4z-\frac{z^3}{3}+C =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Возвращаемся к старой переменной,}\\ \text{заменяя } z \text{ на } \operatorname{ctg} x\end{array}}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{\operatorname{ctg}^5 x}+\frac{4}{3}\frac{1}{\operatorname{ctg}^3 x}+\frac{6}{\operatorname{ctg} x}-4\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C =$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{4}{3}\operatorname{tg}^3 x+6\operatorname{tg} x-4\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C.$$

3) Здесь $m=-7$; $n=-1$; $m+n=-8$. Применим подстановку (8,14): $\operatorname{tg} x = z$. Учитывая связанные с ней формулы (8,16), получим

$$I_3=\int \frac{1}{\frac{z^7}{(\sqrt{1+z^2})^7}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}}\cdot\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{(1+z^2)^3}{z^7}\,dz=$$

$$=\int\frac{1+3z^2+3z^4+z^6}{z^7}\,dz=\int\left(\frac{1}{z^7}+\frac{3}{z^5}+\frac{3}{z^3}+\frac{1}{z}\right)dz=$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{1}{z^6}-\frac{3}{4}\frac{1}{z^4}-\frac{3}{2}\frac{1}{z^2}+\ln|z|+C=$$

Заменяем z на $\operatorname{tg} x$ и учитываем, что $\frac{1}{\operatorname{tg} x}=\operatorname{ctg} x$

$$=-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 x-\frac{3}{4}\operatorname{ctg}^4 x-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\operatorname{tg} x|+C.$$

Задача 8,19 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sin^6 x\cos^6 x}$; 2) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$; 3) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$; 4) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^9 x}$; 5) $\int\frac{dx}{\sin^5 x\cos^5 x}$.

Ответ. 1) $10(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)+\frac{5}{3}(\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{ctg}^3 x)+\frac{1}{5}(\operatorname{tg}^5 x-\operatorname{ctg}^5 x)+C$; 2) $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg} x|+C$; 3) $-\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}+2\ln|\operatorname{tg} x|+C$; 4) $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^6 x+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^4 x+2\operatorname{tg}^2 x+\ln|\operatorname{tg} x|+C$; 5) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x-2\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+6\ln|\operatorname{tg} x|+C$.

Четвертый случай. Сумма показателей степени синуса и косинуса равна нулю: $m+n=0$, причем предполагается, что m и n — целые числа.

Таким образом, показатели степени синуса и косинуса равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, а подынтегральное выражение имеет один из видов:

$$1)\ \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\quad\text{или}\quad 2)\ \frac{\cos^n x}{\sin^n x}.$$

В рассматриваемом случае интеграл (8,10), если $m>0$, приводится к интегралу вида

$$\int\operatorname{tg}^m x\,dx; \tag{8,18}$$

а если $n>0$ — к интегралу

$$\int\operatorname{ctg}^n x\,dx. \tag{8,19}$$

К интегралу (8,18) следует применить подстановку (8,14):

$$\operatorname{tg} x = z; \ dx = \frac{dz}{1+z^2}. \tag{8,20}$$

Эта подстановка приведет к интегралу

$$\int \frac{z^m\,dz}{1+z^2}.$$

К интегралу (8,19) удобно применить подстановку (8,15):

$$\operatorname{ctg} x = z; \ dx = -\frac{dx}{1+z^2}, \tag{8,21}$$

которая приведет его к виду

$$-\int \frac{z^n}{1+z^2}\,dz.$$

Выполняя деление (в первом случае z^m делим на $1+z^2$, а во втором z^n на $1+z^2$), придем к выражению, которое непосредственно интегрируется.

Задача 8,20. Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \operatorname{tg}^4 x\,dx$; 2) $I_2 = \int \operatorname{ctg}^5 x\,dx$; 3) $I_3 = \int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$; 4) $I_4 = \int \operatorname{tg}^8 x\,dx$.

Решение. 1) Применяя подстановку (8,20), получаем

$$I_1 = \int \frac{z^4}{1+z^2}\,dz = \int \left(z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right) dz = \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z + C =$$

$\boxed{z^4 : (z^2+1) = z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}}$ $\qquad$ | Заменяем z на $\operatorname{tg} x$ |

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

2) В этом случае применяем подстановку (8,21):

$$I_2 = -\int \frac{z^5}{1+z^2}\,dz = -\int \left(z^3 - z + \frac{z}{z^2+1}\right) dz =$$

$\boxed{z^5 : (z^2+1) = z^3 - z + \frac{z}{z^2+1}}$

$$= -\frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) + C = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} -$$

| Возвращаемся к старой переменной: $z = \operatorname{ctg} x$ |

$$-\frac{1}{2}\ln(\operatorname{ctg}^2 x + 1) + C = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sin^2 x} + C =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}(\ln 1 - 2\ln|\sin x|) + C =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C.$$

3) Подстановка (8,21) дает

$$I_3 = -\int \frac{z^6}{1+z^2}\,dz = -\int\left(z^4 - z^2 + 1 - \frac{1}{z^2+1}\right)dz =$$
$$= -\left(\frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{3}z^3 + z - \operatorname{arctg} z\right) + C.$$

Учитывая, что $\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arc\,ctg}\alpha = \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{arctg}\alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg}\alpha$, получаем

$$I_3 = -\frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{3}z^3 - z + \operatorname{arctg} z + C =$$
$$= -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C$$

(слагаемое $\frac{\pi}{2}$ отнесено в произвольную постоянную).

4) Подстановка (8,20) дает

$$I_4 = \int \frac{z^8}{1+z^2}\,dz = \int\left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right)dz =$$
$$= \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{3}z^3 - z + \operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x -$$
$$- \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C =$$
$$= \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x - \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

Задача 8,21 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \operatorname{tg}^6 x\,dx$; 2) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$; 3) $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$; 4) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$; 5) $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x + C$;

2) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\sec x| + C$;

3) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln|\sin x| + C$;

4) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$;

5) $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$.

III. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЧЕТНЫХ СТЕПЕНЕЙ СИНУСА И КОСИНУСА

$$\int \sin^{2n} x\,dx, \quad \int \cos^{2n} x\,dx, \quad n \text{ — целое и } > 0.$$

Из тригонометрии известно, что

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \tag{8,22}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x). \tag{8,23}$$

Применение этих формул позволит снизить степень подынтегральной функции в рассматриваемых интегралах.

Задача 8,22. Найти: 1) $I_1 = \int \cos^2 x\,dx$; 2) $I_2 = \int \sin^2 x\,dx$.

Решение. 1) Заменяя $\cos^2 x$ по формуле (8,23), получим

$$I = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

Итак,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C. \tag{8,24}$$

2) Поступая так же, найдем

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C. \tag{8,25}$$

Задача 8,23. Найти $I = \int \cos^4 x\,dx$.

Решение.

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

| К $\cos^2 2x$ применяем формулу (8,23) |

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right].$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C.$$

Задача 8,24 (для самостоятельного решения).

Найти $\int \sin^4 x\,dx$.

Указание. $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2$.

Ответ. $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$.

Задача 8,25. Найти $I = \int \cos^6 x\,dx$.

Решение.

$$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^3 = \underline{|\text{Применить } (8{,}23)|}$$

$$= \frac{1}{8}(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x) =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + 3\cos 2x + 3\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4x) + \cos^2 2x\cdot\cos 2x\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + 3\cos 2x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 4x + (1-\sin^2 2x)\cos 2x\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{5}{2} + 4\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 4x - \sin^2 2x\cos 2x\right].$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{8}\int\left(\frac{5}{2} + 4\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 4x - \sin^2 2x\cos 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x + 2\sin 2x + \frac{3}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C.$$

Задача 8,26 (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int \sin^6 x\,dx$; 2) $\int \sin^8 x\,dx$.

Указание. Учесть, что $\cos^3 2x = \cos^2 2x\cos 2x = (1-\sin^2 2x)\cos 2x = \cos 2x - \sin^2 2x\cos 2x$.

Ответ. 1) $\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - 2\sin 2x + \frac{3}{8}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$;

2) $\frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\sin 8x - \frac{4}{3}\sin 6x + 7\sin 4x - 28\sin 2x\right) + \frac{35}{128}x + C.$

Замечание. Интеграл $\int \sin^6 x\,dx$ получается из рассмотренного в предыдущей задаче $\int \cos^6 x\,dx$ заменой x на $x + \frac{\pi}{2}$:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x; \quad \cos^6\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (-\sin x)^6 = \sin^6 x;$$

$$\int \sin^6 x\,dx = \int \cos^6\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Проверьте, что ответ этой задачи получается из предыдущего, если в нем заменить x на $x + \frac{\pi}{2}$.

IV. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕТНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ СИНУСА И КОСИНУСА (ИНТЕГРАЛЫ ВИДА:

$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx$, где m и n — целые и > 0).

При вычислении интегралов этого вида нам придется применять формулы (8,22) и (8,23).

Задача 8,27. Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$; 2) $I_2 = \int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$; 3) $I_3 = \int \sin^4 x \cos^4 x\, dx$.

Решение. 1) Запишем подынтегральную функцию так:

$$\sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x).$$

$\boxed{\text{Применить (8,22)}}$

Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

2) Преобразуем подынтегральное выражение так:

$$\sin^4 x \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 x \sin^2 x = (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x \sin^2 x =$$

$\boxed{\text{К каждому сомножителю применяем формулу (8,22)}}$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{16}(1-\cos 4x-\cos 2x+$$

$$+\cos 4x\cos 2x) = \frac{1}{16}\left[1-\cos 4x-\cos 2x+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right] =$$

$\boxed{\text{Применяем формулу (8,2)}}$

$$= \frac{1}{16}\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right).$$

Поэтому

$$I_2 = \frac{1}{16}\int\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C.$$

3) Подынтегральное выражение преобразуем так:

$$\sin^4 x\cos^4 x = (\sin x\cos x)^4 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4 = \frac{1}{16}(\sin^2 2x)^2 =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right]^2 = \frac{1}{64}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x) = \underset{\boxed{\text{Применить (8,23)}}}{}$$

$$= \frac{1}{64}\left[1-2\cos 4x+\frac{1}{2}(1+\cos 8x)\right] = \frac{1}{64}\left(1-2\cos 4x+\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos 8x\right) = \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}-2\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 8x\right).$$

$$I_3 = \frac{1}{64}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 8x\right)dx = \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin 4x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+C = \frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C.$$

Задача 8,28 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$; 2) $\int\sin^4 x\cos^6 x\,dx$.

Указание.

$$\sin^4 x\cos^6 x = \sin^4 x\cos^4 x\cos^2 x = (\sin x\cos x)^4\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \frac{1}{32}\sin^4 2x\,\frac{1+\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{32}(\sin^4 2x+\sin^4 2x\cos 2x).$$

$\int\sin^4 2x\,dx$ вычисляют как и $\int\sin^4 x\,dx$, а $\int\sin^4 2x\cos 2x\,dx$ легко находят по формуле (1,29).

Ответ. 1) $\frac{1}{64}\left(4x-\sin 4x+\sin 2x-\frac{1}{3}\sin 6x\right)+C$;

2) $\frac{1}{16}\left(\frac{3}{16}x-\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{128}\sin 8x+\frac{1}{20}\sin^5 2x\right)+C$.

Задача 8,29. Найти интегралы:

1) $\int\sin^6 x\cos^4 x\,dx$; 2) $\int\sin^8 x\cos^6 x\,dx$.

Указание. $\sin^8 x\cos^6 x = \frac{1}{128}(\sin^6 2x-\sin^6 2x\cos 2x)$.

Вычисление $\int\sin^6 2x\,dx$ см. задачу 8,26.

Ответ. 1) $\frac{1}{256}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{4}{5}\sin^5 2x\right)+C$;

2) $\frac{1}{1024}\left(\frac{5}{2}x-\sin 4x+\frac{3}{16}\sin 8x+\frac{1}{12}\sin^3 4x\right)-$

$-\frac{1}{1792}\sin^7 2x+C$.

V. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx. \tag{8,26}$$

Запись $R(\sin x, \cos x)$ означает, что над синусом и косинусом производятся только рациональные операции: сложение и вычитание, умножение на постоянные величины, возведение в целые степени как положительные, так и отрицательные, деление. Другими словами, под символом $R(\sin x, \cos x)$ следует понимать рациональную функцию синуса и косинуса.

Интегралы вида (8,26) приводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z \quad (-\pi < x < \pi), \tag{8,27}$$

которая называется *универсальной тригонометрической подстановкой*. Это название подстановка (8,27) получила потому, что она во всех случаях приводит функцию $R(\sin x, \cos x)$ к рациональному виду.

В тригонометрии доказывается, что все тригонометрические функции выражаются рационально через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

поэтому универсальная тригонометрическая подстановка (8,27) приводит к формулам, по которым $\sin x$, $\cos x$ и dx выражаются рационально через новую переменную z:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}; \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2} \tag{8,28}$$

$\left(\text{из } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = z \text{ следует, что } \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} z\, (-\pi < x < \pi), \quad x = 2\operatorname{arctg} z;\right.$
$\left. dx = \frac{2dz}{1+z^2}\right)$.

Применяя подстановку (8,27), мы могли бы вычислить все интегралы этого практического занятия. Однако это привело бы к значительному усложнению вычислений. В случаях, разобранных выше, мы обошлись без этой подстановки.

Укажем еще три случая, в которых легко можно избежать универсальную тригонометрическую подстановку (8,27).

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$, т. е. если $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная функция от $\sin x$, то подынтегральное выражение в (8,26) приводится к рациональной функции подстановкой

$$\cos x = z. \tag{8,29}$$

2. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, т. е. если она нечетная функция $\cos x$, то подынтегральное выражение в (8,26) приводится к рациональной функции подстановкой

$$\sin x = z. \tag{8,30}$$

3. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ не изменяется при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$, то подынтегральное выражение в (8,26) приводится к рациональному виду подстановкой

$$\operatorname{tg} x = z. \tag{8,31}$$

Задача 8,30. Найти $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение. Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z; \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

(см. формулы (8,27) и (8,28)).

Поэтому

$$I = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{8z^3}{(1+z^2)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{(1+z^2)^2}{z^3}\,dz = \frac{1}{4}\int \frac{1+2z^2+z^4}{z^3}\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} + z\right)dz = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + 2\ln|z| + \frac{z^2}{2}\right) + C =$$

Возвращаемся к старой переменной: заменяем z на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

Задача 8,31 (для самостоятельного решения).

Найти $I = \int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи, заменив x на $x + \frac{\pi}{2}$. Так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{dx}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$, и в ответе предыдущей задачи всюду вместо x подставить $x + \frac{\pi}{2}$.

Ответ. $I = -\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+$
$+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$

Преобразуйте этот ответ к виду

$$I=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Задача 8,32. Найти $I=\int\frac{dx}{\sin^5 x}$.

Решение. 1) Здесь опять-таки применим универсальную тригонометрическую подстановку: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$; $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$; $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$

$$I=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{32z^5}{(1+z^2)^5}}=\frac{1}{16}\int\frac{(1+z^2)^4}{z^5}dz=\frac{1}{16}\int\frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^5}dz=$$

$$=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{z^5}+\frac{4}{z^3}+\frac{6}{z}+4z+z^3\right)dz=$$

$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^4}-2\cdot\frac{1}{z^2}+6\ln|z|+2z^2+\frac{z^4}{4}\right)+C=$$

| Возвращаемся к старой переменной: заменяем z на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ |

$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}-2\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+6\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}\right)+C.$$

Задача 8,33 (для самостоятельного решения).

Найти $\int\frac{dx}{\cos^5 x}$.

Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи, заменив в нем x на $x+\frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-2\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+6\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\right.\right.\right.$
$\left.\left.\left.+\frac{\pi}{4}\right)\right|+2\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.\right.$

Задача 8,34 (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int\frac{dx}{\sin^7 x}$; 2) $\int\frac{dx}{\cos^7 x}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{64}\left(\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}+\frac{15}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+20\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\right.$
$\left.-\frac{5}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6\frac{x}{2}\right)+C;$

2) $\frac{1}{64}\left[\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{15}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\right.\right.$
$\left.+\frac{\pi}{4}\right)+20\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{15}{2}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-$
$\left.-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]+C.$

Задача 8,35. Найти $I=\int\frac{5+6\sin x}{\sin x\,(4+3\cos x)}\,dx.$

Решение. Применяем универсальную тригонометрическую подстановку: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$. Используя формулы (8,27) и (8,28), имеем

$$I=\int\frac{5+\frac{12z}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(4+\frac{3(1-z^2)}{1+z^2}\right)}\,\frac{2dz}{1+z^2}=\int\frac{5z^2+12z+5}{z(7+z^2)}\,dz.$$

Разложим на простейшие дробь, стоящую под интегралом:

$$\frac{5z^2+12z+5}{z(7+z^2)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{7+z^2},$$

отсюда

$$5z^2+12z+5=A(7+z^2)+z(Bz+C);$$

$$A=\frac{5}{7};\quad B=\frac{30}{7};\quad C=12.$$

Поэтому

$$I=\int\left(\frac{\frac{5}{7}}{z}+\frac{\frac{30}{7}z+12}{7+z^2}\right)dz=\frac{5}{7}\ln|z|+\frac{15}{7}\ln(7+z^2)+$$
$$+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{7}}+C=$$

Переходим к старой переменной: заменяем z на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$=\frac{5}{7}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+3\ln\left(7+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\right]+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Задача 8,36 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{5+9\sin x}{\cos x\,(2+3\sin x)}\,dx;$

2) $\int\frac{4+5\cos x}{\sin x\,(7+3\sin x)}\,dx.$

Ответ. 1) $\frac{1}{5}\left[17\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-3\ln\frac{2+3\sin x}{\cos x}\right]+C$;

2) $\frac{4}{7}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{5}{7}\ln\left|\frac{7+3\sin x}{\sin x}\right|-$

$-\frac{12}{7\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\frac{7\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{2\sqrt{10}}\right)$.

Задача 8,37 (для самостоятельного решения).

Найти $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ $\left(\text{подстановка: } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=z\right)$.

Ответ. $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

Задача 8,38 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}$; 2) $\int\frac{dx}{\cos^2 x(1+\cos x)}$.

Указание. Подстановка: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$.

Ответ. 1) $\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}+\ln\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}+C$;

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}x+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$.

В заключение выполним несколько упражнений на применение упрощающих подстановок, указанных на стр. 111.

Задача 8,39. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

Решение. Так как синус и косинус находятся в четных степенях, то изменение знака у каждого из них не изменяет подынтегральной функции (3-й случай, стр. 112). Подстановка (8,31):

$$\operatorname{tg}x=z;\quad \sec^2 x\,dx=dz;\quad (1+z^2)\,dx=dz;\quad dx=\frac{dz}{1+z^2}.$$

Если $\operatorname{tg}x=z$, то $\sin x=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$; $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$; $\sin^2 x=$ $=\frac{z^2}{1+z^2}$; $\cos^2 x=\frac{1}{1+z^2}$. Поэтому

$$I=\int\frac{\frac{dz}{1+z^2}}{a^2\frac{1}{1+z^2}+\frac{b^2z^2}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{a^2+b^2z^2}=\frac{1}{b}\int\frac{b\,dz}{a^2+(bz)^2}=$$

$$=\frac{1}{b}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{bz}{a}+C;$$

$$\boxed{\text{Заменяем } z \text{ на } \operatorname{tg}x}$$

$$I=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)+C.$$

Пользуясь этой формулой, можно легко вычислить интегралы:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}; \quad \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Выполним это так: $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, а потому

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+\sin^2 x} = \underbrace{\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\sin^2 x}}_{|a^2=1;\quad b^2=2|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x)+C.$$

Аналогично легко найдем, что

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x\right)+C.$$

Рекомендуем вычислить эти два интеграла не по готовой формуле, а при помощи подстановки $\operatorname{tg} x=z$.

Задача 8,40 (для самостоятельного решения).

Найти $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x+\cos x}\, dx.$

Указание. Перемена знака у синуса и косинуса не изменяет подынтегральную функцию, а потому и здесь мы имеем третий случай, и наиболее удобной будет подстановка: $\operatorname{tg} x=z$.

Подынтегральная функция после подстановки примет вид $\frac{z^2}{(1+z)(1+z^2)^2}$.

Ответ. $\frac{1}{4} \ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4} \cos x(\sin x+\cos x)+C.$

Задача 8,41. Найти интегралы:

1) $I_1=\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\, dx$; 2) $I_2=\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$.

Решение. 1) При замене $\cos x$ на $-\cos x$ подынтегральное выражение меняет знак.

Здесь уместна подстановка: $\sin x=z$ (см. стр. 112);

$$\cos x\, dx=dz; \quad \cos x=\sqrt{1-z^2};$$

$$I_1=\int \frac{\cos^4 x \cos x}{\sin^4 x}\, dx=\int \frac{\sqrt{(1-z^2)^4}}{z^4}\, dz=\int \frac{(1-z^2)^2\, dz}{z^4}=$$

$$=\int \frac{1-2z^2+z^4}{z^4}\, dz=\int\left(\frac{1}{z^4}-\frac{2}{z^2}+1\right) dz=$$

$$=-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}+z+C=\underbrace{-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin^3 x}+\frac{2}{\sin x}+\sin x+C.}$$

| Возвращаемся к старой переменной: $z=\sin x$ |

2) При замене $\sin x$ на $-\sin x$ подынтегральная функция меняет знак. Подстановка: $\cos x = z$; см. стр. 111; $\sin x = \sqrt{1-z^2}$; $-\sin x\,dx = dz$; $dx = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$;

$$I_2 = -\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{(1-z^2)^3 z^2}} = -\int \frac{dz}{(1-z^2)^2 z^2}.$$

Указание. Дробь $\frac{1}{(1-z^2)^2 z^2}$ разложить на элементарные.

Ответ. $\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{3}{2}\left|\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

Задача 8,42 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$ (подстановка: $\cos x = z$);

2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

2) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегрирование алгебраических иррациональностей.

I. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \ldots)\,dx, \tag{9,1}$$

где α, β, γ — дробные рациональные числа;

$R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)$ — рациональная функция от аргументов x^α, x^β, x^γ. Это означает, что над этими аргументами производятся только четыре арифметических действия и действие возведения в целую степень, как положительную, так и отрицательную. Вообще же под интегралом находится иррациональная функция.

Интегралы этого вида приводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$x = y^n, \quad dx = ny^{n-1}dy, \tag{9,2}$$

где n — наименьшее кратное знаменателей дробей α, β, γ.

Интеграл (9,1) преобразуется к виду

$$\int R(y^{n\alpha}, y^{n\beta}, y^{n\gamma}, \ldots)\,ny^{n-1}\,dy,$$

но теперь $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$ — целые числа, и тем самым интеграл (9,1) от иррациональной функции сведен к интегралу от рациональной функции.

Задача 9,1. Найти $I=\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx.$

Решение. Представим интеграл в виде $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}\,dx$. Наименьшим кратным знаменателей дробей $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ является 6.

Под интегралом находится рациональная функция от $x^{\frac{1}{6}}$, т. е. от $\sqrt[6]{x}$. Интеграл относится к рассматриваемому типу (9,1), а так как наименьшее кратное знаменателей дробей равно 6, то подстановка (9,2) запишется в виде

$$x=y^6;\ dx=6y^5\,dy; \tag{9,3}$$

$$x^{\frac{1}{3}}=(y^6)^{\frac{1}{3}}=y^2;\ x^{\frac{2}{3}}=(y^6)^{\frac{2}{3}}=y^4;\ x^{\frac{1}{2}}=(y^6)^{\frac{1}{2}}=y^3,$$

а интеграл

$$I=\int \frac{y^2}{y^4-y^3}6y^5\,dy=6\int \frac{y^7}{y^3(y-1)}\,dy=6\int \frac{y^4}{y-1}\,dy=$$

Выделяем целую часть

$$=6\int\left(y^3+y^2+y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy=$$

$$=6\left[\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|\right]+C=$$

Возвращаемся к старой переменной: из (9,3) следует, что $y=\sqrt[6]{x}$

$$=6\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln|\sqrt[6]{x}-1|\right]+C.$$

Задача 9,2 (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$;

3) $\int \frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

Указание. 1) Первый интеграл приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $x=y^6$. После этой подстановки интеграл переходит в $6\int \frac{y^5}{y-1}\,dy$.

2) Ко второму интегралу применяем такую же подстановку: $x = y^6$

$$6\int \frac{dy}{y^2+y} = 6\int \frac{y+1-y}{y(y+1)}\,dy = 6\left[\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1}\right].$$

3) К третьему интегралу применяем подстановку $x = y^{12}$, которая приводит интеграл к такому виду:

$$12\int \frac{dy}{y^2(y+1)} = -12\int \frac{y^2-1-y^2}{y^2(y+1)}\,dy = -12\left[\int \frac{y-1}{y^2}\,dy - \int \frac{dy}{y+1}\right] =$$

$$= -12\left[\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y^2} - \int \frac{dy}{y+1}\right].$$

Ответ. 1) $6\left[\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + \right.$ $\left. + \ln|\sqrt[6]{x} - 1|\right] + C$; 2) $\ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C$; 3) $\ln \frac{(\sqrt[12]{x}+1)^{12}}{x} - \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + C$.

Задача 9,3 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$.

Указание. Подстановка $x = y^{12}$ приводит к $12\int \frac{y^9+y^7+y^6}{1+y^2}\,dy$ (выделить целую часть).

Ответ. 1) $6\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$;

2) $12\left(\frac{1}{8}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{5}\sqrt[12]{x^5} - \frac{1}{3}\sqrt[4]{x} + \sqrt[12]{x} - \operatorname{arctg}(\sqrt[12]{x}+1) + C\right.$.

Задача 9,4 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{(1-\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}$;

3) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{18}{5}\sqrt[6]{x^5} + 3x - \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + C$;

2) $4\left[\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1} + \ln|\sqrt[4]{x}+1|\right] + C$;

3) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \ln\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x^3}+1)^4} + C$.

II. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma} \ldots\right] dx, \tag{9,4}$$

где α, β, γ — дроби, а R — рациональная функция своих аргументов.

После подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = y^n, \tag{9,5}$$

где n — общее наименьшее кратное знаменателей дробей α, β, γ, интеграл (9,4) переходит в интеграл от рациональной функции.

Из (9,5) следует определить x, а по найденному значению x определить его дифференциал dx.

Отметим, что частный случай интеграла (9,4) получается тогда, когда вместо дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ подынтегральная функция содержит дробные степени линейной функции от x.

В этом случае рационализация достигается подстановкой

$$ax + b = y^n, \tag{9,5а}$$

где n имеет указанное выше значение.

Задача 9,5. Найти $I = \int \frac{x^4}{\sqrt{x-1}}\, dx$.

Решение. Этот интеграл может быть переписан так: $I = \int \frac{x^4}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\, dx$, и поэтому он относится к рассматриваемому типу

Подстановка: $x - 1 = y^2$; $x = y^2 + 1$; $dx = 2y\, dy$.

Осуществляя эти замены, получаем интеграл от рациональной функции:

$$I = \int \frac{(y^2+1)^4}{y} 2y\, dy = 2\int (y^2+1)^4\, dy = 2\int (y^8 + 4y^6 + 6y^4 + 4y^2 + 1)\, dx = 2\left(\frac{1}{9}y^9 + \frac{4}{7}y^7 + \frac{6}{5}y^5 + \frac{4}{3}y^3 + y\right) + C =$$

К старой переменной переходим, полагая $y = \sqrt{x-1}$

$$= 2\left[\frac{1}{9}(x-1)^4\sqrt{x-1} + \frac{4}{7}(x-1)^3\sqrt{x-1} + \frac{6}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1} + \frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}\right] + C = 2\sqrt{x-1}\left[\frac{1}{9}(x-1)^4 + \frac{4}{7}(x-1)^3 + \frac{6}{5}(x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1) + 1\right] + C.$$

Задача 9,6. Найти $I=\int \frac{x^2\,dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}$.

Решение. Интеграл представим в виде $I=\int \frac{x^2}{(5x+2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$. Он относится к рассматриваемому типу. Сделаем подстановку $5x+2=y^2$.

Тогда $5dx=2y\,dy$; $dx=\frac{2y\,dy}{5}$; $x=\frac{y^2-2}{5}$.

Подставляя эти значения, получаем интеграл от рациональной функции:

$$I=\int \frac{(y^2-2)^2}{25y^3}\,\frac{2y\,dy}{5}=\frac{2}{125}\int \frac{(y^2-2)^2}{y^2}\,dy=\frac{2}{125}\int \frac{y^4-4y^2+4}{y^2}\,dy=$$

$$=\frac{2}{125}\int\left(y^2-4+\frac{4}{y^2}\right)dy=\frac{2}{125}\left(\frac{y^3}{3}-4y-\frac{4}{y}\right)+C=$$

$$\boxed{\,y=\sqrt{5x+2}\,}$$

$$=\frac{2}{125}\left[\frac{1}{3}(5x+2)\sqrt{5x+2}-4\sqrt{5x+2}-\frac{4}{\sqrt{5x+2}}\right]+C;$$

$$I=\frac{2}{125}\sqrt{5x+2}\left[\frac{1}{3}(5x+2)-4-\frac{4}{5x+2}\right]+C.$$

Задача 9,7. Найти $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$ (рассмотреть случаи $b>0$ и $b<0$).

Решение. Подстановка: $ax+b=y^2$; $a\,dx=2y\,dy$; $dx=\frac{2}{a}y\,dy$; $x=\frac{1}{a}(y^2-b)$.

Подставляя эти значения в I, получим под интегралом рациональную функцию:

$$I=\int \frac{2y\,dy}{a\cdot\frac{1}{a}(y^2-b)\,y}\,;\quad I=2\int \frac{dy}{y^2-b}.$$

Если $b>0$, то $b=k^2$, и тогда

$$I=2\int \frac{dy}{y^2-k^2}=\frac{2}{2k}\ln\frac{y-k}{y+k};$$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Заменяем } k \text{ на } \sqrt{b},\\ \text{а } y \text{ на } \sqrt{ax+b}\end{gathered}}$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{y-\sqrt{b}}{y+\sqrt{b}}+C \quad (b>0).$$

Окончательно, возвращаясь к старой переменной, имеем

$$I=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}+C. \qquad (9,6)$$

Если $b < 0$, то $b = -p^2$:

$$I = 2\int \frac{dy}{y^2+p^2} = \frac{2}{p}\operatorname{arctg}\frac{y}{p} + C;$$

$$\underline{\left|\; p = \sqrt{-b};\; y = \sqrt{ax+b} \;\right|}$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{-b}} + C. \qquad (9,7)$$

Задача 9,8. Найти $I = \int \frac{\sqrt{3x+4}}{x^2}\,dx$.

Решение. $I = \int \frac{(3x+4)^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx$.

Интеграл относится к рассматриваемому типу.

Полагаем, что $3x + 4 = y^2$. Тогда $x = \frac{y^2-4}{3}$; $dx = \frac{2y\,dy}{3}$, а интеграл преобразуется к интегралу от рациональной функции:

$$I = \int \frac{y}{\left(\frac{y^2-4}{3}\right)^2}\,\frac{2y\,dy}{3} = 6\int \frac{y^2}{(y^2-4)^2}\,dy.$$

$$\underline{\left|\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{c}{\text{Интегрируем по частям}} \\ u = y; & du = dy; \\ dv = \frac{y}{(y^2-4)^2}\,dy & v = -\frac{1}{2(y^2-4)} \end{array}\right|}$$

Ответ. $I = -\frac{\sqrt{3x+4}}{x} + \frac{3}{4}\ln\frac{\sqrt{3x+4}-2}{\sqrt{3x+4}+2} + C$.

Задача 9,9. (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{x}\,dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{x-5}}{x^3}\,dx$.

Указание. Во втором примере после подстановки удобно применить интегрирование по частям.

Ответ. 1) $2\sqrt{2x-3} - \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{3}} + C$;

2) $\frac{1}{10}\frac{(x-5)\sqrt{x-5}}{x^2} - \frac{1}{20}\frac{\sqrt{x-5}}{x} + \frac{1}{20\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{5}} + C$.

Задача 9,10. Найти $I = \int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}\,dx$.

Решение. Положим $x + 2 = y^2$; $x = y^2 - 2$; $dx = 2y\,dy$. Тогда

$$I = \int \frac{y+3}{y-4}\,2y\,dy = 2\int \frac{y^2+3y}{y-4}\,dy = 2\int \left(y + 7 + \frac{28}{y-4}\right)dy.$$

$$\underline{\left|\;\text{Выделить целую часть}\;\right|}$$

Ответ. $I = x + 14\sqrt{x+2} + 56\ln\left|\sqrt{x+2} - 4\right| + C$.

Задача 9,11 (для самостоятельного решения).

Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x-8}}$.

Указание. Подстановка $x-8=y^3$.

Интеграл после подстановки примет вид: $3\int \frac{y\,dy}{y^3+8}$.

Разложить дробь $\frac{y}{y^3+8}$ на простейшие.

Ответ. $\frac{1}{4}\ln\frac{y^2-2y+4}{(y+2)^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{y-1}{\sqrt{3}}$, где $y=\sqrt[3]{x-8}$.

Задача 9,12. Найти $I=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2}-\sqrt{3+2x}}$.

Решение. Здесь подынтегральная функция отличается от предыдущих тем, что она содержит корни разных степеней (третьей и второй).

Перепишем интеграл, заменяя корни дробными показателями:

$$I=\int \frac{dx}{(3+2x)^{\frac{2}{3}}-(3+2x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Общий наименьший знаменатель дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ равен 6. Подстановка (9,5а) будет такой:

$$3+2x=y^6;\quad x=\frac{y^6-3}{2};$$

$$dx=\frac{6y^5\,dy}{2}=3y^5\,dy.$$

Подставляя эти значения, получим

$$I=3\int\frac{y^5\,dy}{y^4-y^3}=3\int\frac{y^2}{y-1}\,dy=3\int\frac{y^2-1+1}{y-1}dy=3\int\left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy=$$

$$=3\left(\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|\right)+C=3\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{3+2x}+\sqrt[6]{3+2x}+\right.$$

Возвращаемся к старой переменной $y=\sqrt[6]{3+x}$

$$\left.+\ln|\sqrt[6]{3+2x}-1|\right)+C.$$

Задача 9,13 (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt{1+x}}$, 2) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1}\,dx$.

Ответ. 1) $3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}+6\ln|\sqrt[6]{1+x}-1|+C$;

2) $6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^7}}{7}+\frac{\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{4}+\frac{\sqrt{x+1}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x+1}}{2}+\right.$

$\left.+\sqrt[6]{x+1}+\ln|\sqrt[6]{x+1}-1\right)+C$

Теперь найдем несколько интегралов вида (9,1), в которых подынтегральная функция — дробно-линейная функция в дробной степени.

Задача 9,14. Найти $I=\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\,dx$.

Решение. Подстановка $\frac{5-3x}{4+7x}=y^2$ приведет к интегрированию рациональной функции. Из указанной подстановки определим x, а потом dx:

$$5-3x=4y^2+7xy^2;\quad 5-4y^2=7xy^2+3x;$$

$$5-4y^2=x(7y^2+3);\quad x=\frac{5-4y^2}{7y^2+3};$$

$$dx=\frac{-8y(7y^2+3)-14y(5-4y^2)}{(7y^2+3)^2}\,dy;$$

$$dx=\frac{-94y}{(7y^2+3)^2}\,dy.$$

Поэтому

$$I=\int y\frac{-94y}{(7y^2+3)^2}\,dy=-94\int\frac{y^2}{(7y^2+3)^2}\,dy=-94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{y}{7y^2+3}+\right.$$

Здесь удобно вместо разложения на элементарные дроби применить интегрирование по частям:

$u=y$	$du=dy$
$dv=\frac{y}{(7y^2+3)^2}\,dy$	$v=-\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{7y^2+3}$

$$\left.+\frac{1}{14}\int\frac{dy}{7y^2+3}\right)=-94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{y}{7y^2+3}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}y}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{47}{7}\cdot\frac{y}{7y^2+3}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}y+C=$$

Возвращаемся к старой переменной: $y=\sqrt{\frac{5-3x}{4-7x}}$

$$=\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\right)+C.$$

Задача 9,15 (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $I_1=\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$; 2) $I_2=\int\sqrt{\frac{3-4x}{9-5x}}\,dx$.

Ответ. 1) $-\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C$. (Этот пример можно легко решить и не пользуясь подстановкой (9,5), если переписать подынтегральную функцию, умножив ее числитель и знаменатель на $\sqrt{2+x}$. Тогда

$$I_1=\int\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=2\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$2)\ I_2-\frac{\sqrt{(3-4x)(9-5x)}}{5}+\frac{21}{20\sqrt{5}}\ln|51-40x+$$

$$+4\sqrt{5(3-4x)(9-5x)}\,|+C.$$

Задача 9,16. Найти интеграл $I=\int\frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\,dx$.

Решение. Применим подстановку

$$\frac{x+3}{x-3}=y^2.$$

Отсюда определим x и dx:

$$x+3=xy^2-3y^2;\quad 3+3y^2=xy^2-x;$$

$$3(1+y^2)=x(y^2-1);\quad x=\frac{3(1+y^2)}{y^2-1};$$

$$dx=\frac{-12y}{(y^2-1)^2}\,dy;$$

$$I=\int y^2\cdot y\,\frac{-12y}{(y^2-1)^2}\,dy=-12\int\frac{y^4}{(y^2-1)^2}\,dy.$$

Интегрировать по частям:	
$u=y^3$	$du=3y^2\,dy$
$dv=\frac{y}{(y^2-1)^2}\,dy$	$v=-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2-1}$

Ответ. $I=(x-15)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}-9\ln\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}+C.$

Задача 9,17 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}\,dx$; 2) $\int\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}\,dx$;
3) $\int(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

Указание. В первых двух интегралах после подстановки интегрировать по частям.

Ответ. 1) $-(5+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+6\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$;

2) $(5-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-6\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$;

3) $\left(1-\frac{1}{2}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$.

Задача 9,18. Найти интеграл $I=\int\frac{\sqrt{x+4}+3}{(x+4)^2-\sqrt{x+4}}\,dx$.

Решение. Подстановка: $x+4=y^2$; $dx=2y\,dy$

$$I=\int\frac{y+3}{y^4-y}2y\,dy=2\int\frac{y+3}{y^3-1}\,dy.$$

Разлагаем на простейшие дробь

$$\frac{y+3}{y^3-1}=\frac{y+3}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{By+C}{y^2+y+1}.$$

Отсюда следует, что $A=\frac{4}{3}$; $B=-\frac{4}{3}$; $C=-\frac{5}{3}$;

$$I=\frac{8}{3}\ln|y-1|-\frac{4}{3}\ln(y^2+y+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C.$$

Переходя к старой переменной, с помощью равенства $y=\sqrt{x+4}$ окончательно получаем

$$I=\frac{4}{3}\ln\frac{(\sqrt{x+4}-1)^2}{x+5+\sqrt{x+4}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Задача 9,19 (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$; 2) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

Ответ. 1) $\ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C$;

2) $\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$.

Указание. После подстановки $\frac{1-x}{1+x}=y^2$ окажется, что

$$x=\frac{1-y^2}{1+y^2};\quad dx=-4\cdot\frac{y\,dy}{(1+y^2)^2};$$

$$I=4\int\frac{y^2\,dy}{(y^2-1)(y^2+1)}.$$

Дробь

$$\frac{y^2}{(y^2-1)(y^2+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2+1}.$$

Рассмотрим еще несколько интегралов, сводящихся к виду (9,4).

Задача 9,20. Найти $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$.

Решение. Этот интеграл легко приводится к рассматриваемому типу:

$\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}=\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}(x+2)^3}=(x+2)\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}$, (можно и иначе

$$\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}=\sqrt[3]{(x-1)^3\frac{x+2}{x-1}}=(x-1)\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}.$$

Поэтому

$$I=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}}. \tag{A}$$

Подстановка нам хорошо известна:

$$\frac{x-1}{x+2}=y^3. \tag{B}$$

Отсюда $x-1=xy^3+2y^3$; $2y^3+1=x(1-y^3)$;

$$x=\frac{2y^3+1}{1-y^3};\quad x+2=\frac{2y^3+1}{1-y^3}+2=\frac{3}{1-y^3};$$

$$dx=\frac{9y^2\,dy}{(1-y^3)^2}.$$

Производя замены в (A), получаем $I=3\int\frac{dy}{1-y^3}$. Разлагаем на простейшие дробь

$$\frac{1}{1-y^3}=\frac{1}{(1-y)(1+y+y^2)}=\frac{A}{1-y}+\frac{By+C}{1+y+y^2}.$$

Отсюда

$$A=B=\frac{1}{3};\quad C=\frac{2}{3};$$

$$I=-\ln|1-y|+\frac{1}{2}\ln(1+y+y^2)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Из подстановки (B) следует, что $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}$, а поэтому получаем

$$I=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-1}}{3}\right)^3+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+2}}+C.$$

Ответ можно несколько упростить, если постоянную величину $\frac{1}{2}\ln 3$ присоединить к произвольной постоянной.

Окончательно

$$I=-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-1}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+2}}.$$

Задача 9,21 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^2(x+1)^5}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}}$;
3) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x)}}$.

Указания. 1) $\sqrt[4]{(x-3)^3(x+1)^5}=\sqrt[4]{(x-3)^3\frac{(x+1)^8}{(x+1)^3}}=$
$=\sqrt[4]{(x+1)^8\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^3}=(x+1)^2\sqrt[4]{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^3}.$

Применить подстановку: $\frac{x-3}{x+1}=y^4$; $x+1=\frac{4}{1-y^4}$; $dx=\frac{16y^3\,dy}{(1-y^4)^2}$;

2) $\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}(x-2)^6}=(x-2)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}.$

Подстановка: $\frac{x+1}{x-2}=y^3$; $x=\frac{1+2y^3}{y^3-1}$;
$x-2=\frac{3}{y^3-1}$; $dx=\frac{-9y^2\,dy}{(y^3-1)^2}$.

3) $\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x)}=\sqrt[4]{\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3}(1-x)^4}=(1-x)\sqrt[4]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}.$

Подстановка: $\frac{1+x}{1-x}=y^4$; $x=\frac{y^4-1}{y^4+1}$; $1-x=\frac{2}{y^4+1}$;
$dx=\frac{8y^3\,dy}{(y^4+1)^2}$.

Ответ. 1) $\sqrt[4]{\frac{x-3}{x+1}}+C$; 2) $-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}+C$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{4(1-x^2)}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{4(1-x^2)}+\sqrt{1-x}}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{4(1-x^2)}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}+C.$

III. ИНТЕГРАЛЫ ОТ БИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Так называются интегралы вида

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{9,8}$$

где m, n и p — любые рациональные числа;

a и b — какие угодно постоянные, не равные нулю [1]. Подынтегральное выражение называется биномиальным дифференциалом.

[1] Конечно, предполагается, что числа m, n и p не все целые. Если бы все они были целыми, то вопрос свелся бы к интегрированию суммы степенных функций.

П. Л. Чебышев доказал, что **только** в трех случаях этот интеграл может быть выражен в конечном виде через алгебраические, логарифмические и обратные круговые функции:

1) p — целое число, которое может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В этом случае применяется подстановка
$$x = y^s, \tag{9,9}$$
где s — общее наименьшее кратное знаменателей дробей m и n. Это простейший случай: дело сводится к интегрированию суммы степенных функций. Нами он рассматриваться не будет.

2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число. Здесь следует применить подстановку
$$a + bx^n = y^s, \tag{9,10}$$
где s — знаменатель дроби p.

3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число. В этом случае применяют подстановку
$$ax^{-n} + b = y^s, \tag{9,11}$$
где s — знаменатель дроби p.

Других случаев интегрируемости биномиальных дифференциалов, кроме перечисленных, нет. Интересно отметить, что они были известны еще Ньютону, а Эйлер указал приведенные выше подстановки. Однако только П. Л. Чебышев доказал, что эти случаи интегрируемости являются единственными и что в других случаях интеграл (9,8) не может быть выражен при помощи элементарных функций.

Задача 9,22. Найти $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Перепишем интеграл в виде
$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$$
и, сравнивая его с (9,8), получим
$$m = -\frac{1}{2};\quad n = \frac{1}{4};\quad p = \frac{1}{3}.$$

Составим выражение: $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$—целое число.

Следовательно, здесь мы имеем второй случай интегрируемости. Подстановка (9,10) запишется так:
$$1 + x^{\frac{1}{4}} = y^3;\ \left((1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = y. \tag{9,12}$$
$$x^{\frac{1}{4}} = y^3 - 1;\quad x = (y^3-1)^4;\quad x^{-\frac{1}{2}} = [(y^3-1)^4]^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{(y^3-1)^2};\quad dx = 4\,(y^3-1)^3\,3y^2\,dy = 12\,(y^3-1)^3\,y^2\,dy$$

Поэтому

$$I=\int \frac{1}{(y^3-1)^2}y\cdot 12(y^3-1)^3y^2\,dy=12\int y^3(y^3-1)\,dy=$$
$$=12\int(y^6-y^3)\,dy=12\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^4}{4}\right)+C=12y^4\left(\frac{y^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, при помощи равенства $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$ получим

$$I=12(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

Задача 9,23 (для самостоятельного решения).

Найти $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Указание. $m=-\frac{1}{2}$; $n=\frac{1}{6}$; $p=\frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n}=3$ — целое число. Здесь имеем второй случай интегрируемости. Знаменатель дроби p равен 3. Подстановка (9, 10): $1+x^{\frac{1}{6}}=y^3$. После подстановки получится

$$18\int(y^3-1)^2y^3\,dy.$$

Ответ. $18(1+\sqrt[6]{x})\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}\left[\frac{1}{10}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2-\frac{2}{7}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)+\frac{1}{4}\right].$

Задача 9,24. Найти $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}.$

Решение. Запишем интеграл в виде $I=\int(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$

Сравнивая его с (9,8), замечаем, что $m=0$; $n=2$; $p=-\frac{3}{2}$.

Составляем числа $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m+1}{n}+p$, чтобы обнаружить, какое из них — целое (если бы оказалось, что ни одно из чисел не целое, то от интегрирования мы бы отказались):

$\frac{m+1}{n}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ — не целое число;

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$ — целое число, и мы имеем здесь третий случай интегрируемости.

Подстановка (9,11) при $n=2$ (знаменатель дроби p равен также 2) выглядит так:

$$ax^{-2}+b=y^2.$$

Отсюда следует, что $-2ax^{-3}\,dx = 2y\,dy$, а $x^{-3}\,dx = -\frac{1}{a}\,y dy$.

Преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы оно содержало $ax^{-2}+b$ (в третьем случае интегрируемости биноминальных дифференциалов рекомендуется преобразовывать подынтегральное выражение так, чтобы оно содержало $ax^{-n}+b$). Вынося в подынтегральном выражении x^2 за скобку, имеем

$$(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \left[x^2\left(\frac{a}{x^2}+b\right)\right]^{-\frac{3}{2}}dx =$$
$$= x^{-3}(ax^{-2}+b)^{-\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,y^{-2}\,dy.$$

Поэтому

$$I = -\frac{1}{a}\int y^{-2}\,dy = -\frac{1}{a}\frac{y^{-1}}{-1}+C = \frac{1}{a}\frac{1}{y}+C.$$

Подставляя сюда

$$y = (ax^{-2}+b)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{x^2}+b\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a+bx^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

получим окончательно

$$I = \frac{1}{a}\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}+C.$$

Задача 9,25 (для самостоятельного решения).

Найти $\int\sqrt{x(3+4x^3)}\,dx$.

Указание. Записать интеграл в виде $\int x^{\frac{1}{2}}(3+4x^3)^{\frac{1}{2}}\,dx$; $m=\frac{1}{2}$; $n=3$; $p=\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}+p=1$ — целое число, третий случай интегрируемости.

Подстановка (9,11): $3x^{-3}+4=y^2$. Подынтегральную функцию представить в виде $x^2(3x^{-3}+4)^{\frac{1}{2}}$. Из подстановки следует, что $3x^{-3}=y^2-4$; $x^{-3}=\frac{y^2-4}{3}$, а $x^3=\frac{3}{y^2-4}$. Отсюда $3x^2\,dx = -\frac{3\cdot 2y}{(y^2-4)^2}\,dy$; $x^2\,dx = -\frac{2y\,dy}{(y^2-4)^2}$, и интеграл преобразуется к виду $-\int\frac{2y^2}{(y^2-4)^2}\,dy$.

Вычисление этого интеграла можно выполнить разложением рациональной дроби на простейшие, но проще применить интегрирование по частям, полагая

$u=y$	$du=dy$
$dv=\frac{y\,dy}{(y^2-4)^2}$	$v=-\frac{1}{2}\frac{1}{y^2-4}$

После интегрирования получим

$$I = \frac{y}{y^2-4} - \frac{1}{4}\ln\frac{y-2}{y+2} + C,$$

причем, чтобы возвратиться к старой переменной, надо сюда подставить

$$y = \sqrt{3x^{-3}+4} = \sqrt{\frac{3}{x^3}+4} = \sqrt{\frac{3+4x^3}{x^3}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{3+4x^3}{x}}.$$

Задача 9,26. Найти интегралы:

$$1) \int \frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx;\quad 2) \int x^3\sqrt[3]{5+x^2}\,dx.$$

Ответ. 1) $\frac{x(3-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2}\arcsin x + C$;

2) $\frac{3}{56}(5+x^2)(4x^2-15)\sqrt[3]{5+x^2} + C$.

IV. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{9,13}$$

где R — знак рациональной функции.

(Еще раз напоминаем, что это понимается так: над аргументами x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ могут производиться четыре действия арифметики и возведение в целую степень как положительную, так и отрицательную).

а) **Интегралы вида**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{9,14}$$

Напомним три интеграла, которые нам часто будут встречаться:

$$1) \int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}dx = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C; \tag{9,15}$$

$$2) \int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx = \arcsin\frac{u}{a} + C; \tag{9,16}$$

$$3) \int \frac{u'}{\sqrt{u}}dx = 2\sqrt{u} + C. \tag{9,17}$$

Вычисление интеграла (9,14) производится так:

1) под корнем $|a|$ следует вынести за скобку, $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ — за знак интеграла;

2) после этого под корнем выделить полный квадрат и применить формулу (9,15) (при $a > 0$) или (9,16) (при $a < 0$).

(Если $|a| = 1$, то вынесение за скобку становится излишним, и надо только выделить под корнем полный квадрат).

Задача 9,27. Найти интеграл $I=\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+7}}$.

Решение. Здесь $a=2>0$; вопрос сведется к применению формулы (9,15). Вынесем под корнем 2 за скобку, и в оставшемся выражении выделим полный квадрат:

$$\sqrt{2x^2+3x+7}=\sqrt{2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}}=\sqrt{2}\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}};$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right|+C=$$

Применяем формулу (9,15): $u=x+\frac{3}{4}$; $u'=1$	Выражение, стоящее под корнем, равно $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4x+3+4\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}}}{4}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\ln\left|4x+3+2\sqrt{4\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\right)}-\ln 4\right\}+C.$$

Окончательно, присоединяя $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 4$ к произвольной постоянной, получаем

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|4x+3+2\sqrt{2(2x^2+3x+7}|+C.$$

Задача 9,28 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2+5x+4}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+9}}$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{5+13x+8x^2}}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{11+5x+6x^2}}$;

5) $\int\frac{dx}{\sqrt{14x^2+9x+1}}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln|14x+5+2\sqrt{7(7x^2+5x+4)}|+C$;

2) $\ln|2x+2+2\sqrt{x^2+2x+9}|+C$;

3) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|16x+13+2\sqrt{8(5+13+8x^2)}|+C$;

4) $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln|12x+5+2\sqrt{6(6x^2+5x+11)}|+C$;

5) $\frac{1}{\sqrt{14}}\ln|28x+9+2\sqrt{14(14x^2+9x+1)}|+C$.

Задача 9,29. Найти интеграл $I=\int \frac{dx}{\sqrt{5+7x-3x^2}}$.

Решение. Здесь $a=-3<0$, интеграл может быть вычислен по формуле (9,16). Вынесем под корнем за скобку 3, т. е. $|a|$:

$$\sqrt{5+7x-3x^2}=\sqrt{3\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{3}x-x^2\right)}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}x-x^2}=$$

Выделяем под корнем полный квадрат

$$=\sqrt{3}\sqrt{\frac{109}{36}-\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}.$$

Для выделения полного квадрата в этом случае поступаем так: 1) ставим перед скобкой минус; 2) в скобку вписываем x и половину коэффициента при x в первой степени с обратным знаком; 3) выражение в скобке возводим в квадрат, а квадрат второго слагаемого в скобке прибавляем к свободному члену.

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{109}{36}-\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{7}{6}}{\frac{\sqrt{109}}{6}}+C.$$

Применяем (9,16):
$u=x-\frac{7}{6}$; $a=\frac{\sqrt{109}}{6}$

Окончательно

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-7}{\sqrt{109}}+C.$$

Задача 9,30 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}$;

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-5x^2}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x-x^2}}$;

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{11+9x-7x^2}}$.

Ответ. 1) $\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{29}}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-1}{4}+C$;

3) $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{37}}+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{14x-9}{\sqrt{389}}+C$.

б) Интегралы вида

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx. \qquad (9,18)$$

Интегралы этого вида приводятся к интегралам (9,15) и (9,17), если $a>0$, а если $a<0$, — к интегралам (9,16) и (9,17). Достигается это так: в числителе дроби, стоящей под интегралом, записывается производная подкоренного выражения, т. е. $2ax + b$, которая тождественными преобразованиями преобразуется в заданный числитель $Ax + B$.

$$Ax + B = (2ax + b)\frac{A}{2a} + B - \frac{bA}{2a},$$

и тогда

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \int \frac{(2ax + b)\frac{A}{2a} + B - \frac{bA}{2a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx =$$

Разлагаем на сумму двух интегралов

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx + \left(B - \frac{bA}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Этот интеграл вычисляется по формуле (9,17): числитель — производная подкоренного выражения

Этот интеграл приводится при $a > 0$ к интегралу (9,15), при $a < 0$ — по формуле (9,16)

Задача 9,31. Найти интегралы:

$$1)\ I_1 = \int \frac{3x - 7}{\sqrt{5x^2 + 8x + 1}}\,dx;\quad 2)\ I_2 = \int \frac{2x + 5}{\sqrt{7 + 8x - 11x^2}}\,dx.$$

Решение. 1) $\displaystyle\int \frac{3x - 7}{\sqrt{5x^2 + 8x + 1}}\,dx = \int \frac{(10x + 8)\frac{3}{10} - 7 - \frac{24}{10}}{\sqrt{5x^2 + 8x + 1}}\,dx =$

$$= \frac{3}{10}\int \frac{10x + 8}{\sqrt{5x^2 + 8x + 1}}\,dx - \frac{47}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 8x + 1}} =$$

Применяем формулу (9,17)

См. задачу 9,27

$$= \frac{3}{5}\sqrt{5x^2 + 8x + 1} - \frac{47}{5\sqrt{5}}\ln\left|10x + 8 + 2\sqrt{5(5x^2 + 8x + 1)}\right| + C.$$

$$2)\ \int \frac{2x + 5}{\sqrt{7 + 8x - 11x^2}}\,dx = \int \frac{(8 - 22x)\left(-\frac{1}{11}\right) + 5 + \frac{8}{11}}{\sqrt{7 + 8x - 11x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{11}\int \frac{8 - 22x}{\sqrt{7 + 8x - 11x^2}}\,dx + \frac{63}{11}\int \frac{dx}{\sqrt{7 + 8x - 11x^2}} =$$

Применяем формулу (9,17)

Поступаем так же, как и в задаче (9,29)

$$= -\frac{2}{11}\sqrt{7 + 8x - 11x^2} + \frac{63}{11\sqrt{11}}\arcsin\frac{11x - 4}{\sqrt{93}} + C.$$

Задача 9,32 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$;

2) $\int \frac{x+8}{\sqrt{3x^2+x+9}}$; 3) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{4x^2-x-7}}dx$;

4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-3x-2x^2}}$; 5) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1-13x-5x^2}}dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+5x+3}-\frac{5}{4\sqrt{2}}\ln|4x+5+$
$+2\sqrt{2(2x^2+5x+3)}|+C$;

2) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+x+9}+\frac{47}{6\sqrt{3}}\ln|6x+1+2\sqrt{3(3x^2+x+9)}|+C$;

3) $-\frac{3}{4}\sqrt{4x^2-x-7}+\frac{13}{16}\ln|8x-1+2\sqrt{4(4x^2-x+7)}|+C$;

4) $-\frac{1}{2}\sqrt{8-3x-2x^2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{\sqrt{73}}+C$;

5) $-\sqrt{1-13x-5x^2}-\frac{19}{2\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x+13}{\sqrt{189}}+C$.

в) *интегрирование функций вида* $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ *в общем случае приводится к интегрированию рациональной дроби и вычислению интегралов таких трех видов:*

1) $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ ($P(x)$ — многочлен); (9,19)

2) $\int \frac{dx}{(x+k)^p\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (p — целое число и >0); (9,20)

3) $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (m — целое число и $m>0$) (9,21)

Укажем способы вычисления интегралов вида (9,19) и (9,20), выполним упражнения на применение этих способов, а затем вычислим несколько интегралов, в которых подынтегральную функцию придется преобразовывать так, чтобы вопрос сводился к вычислению интегралов указанных видов[1].

1. **Интеграл вида** (9,19) вычисляется по формуле

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{9,22}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени, на единицу меньшей, чем многочлен $P(x)$.

[1] Интегралы вида (9,21) нами рассматриваться не будут, так как программа не предусматривает изучение их. Интересующиеся этим видом интегралов могут обратиться к учебнику Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. II, § 272.

Коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число λ подлежат определению. Интеграл же $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ выше уже был рассмотрен.

Для определения коэффициентов многочлена $Q(x)$ и числа λ поступают так:

дифференцируют обе части равенства (9,22) и получают тождество

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q(x)\frac{(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} +$$

$$+\lambda\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

(производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции).

Умножая обе части этого равенства на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получаем

$$P(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q(x)\cdot(2ax+b) + \lambda.$$

Неизвестные коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число λ находятся сравнением коэффициентов при одинаковых степенях буквы x в последнем равенстве.

Подставляя найденные коэффициенты и число λ в (9,22) и вычисляя интеграл, входящий в правую часть этой формулы, находим и интеграл (9,19).

Решим несколько относящихся сюда примеров.

Задача 9,33. Найти интеграл $I = \int \frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}\,dx.$

Решение. На основании формулы (9,22) имеем

$$\int \frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}\,dx = \underbrace{(ax^2+bx+c)}_{\substack{\text{Многочлен степени, на}\\ \text{единицу меньшей, чем}\\ \text{многочлен числителя дро-}\\ \text{би, стоящей под интегра-}\\ \text{лом}}}\sqrt{2x^2+5x+7} +$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+7}}.$$

Определению подлежат неизвестные коэффициенты a, b, c и число λ.

Дифференцируем обе части последнего равенства и, учитывая, что производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, получаем

$$\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}} = (2ax+b)\sqrt{2x^2+5x+7} +$$

$$+(ax^2+bx+c)\frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x+7}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{2x^2+5x+7}}.$$

Умножая обе части этого равенства на $2\sqrt{2x^2+5x+7}$, имеем

$$6x^3+10x^2-14x+18=(4ax+2b)(2x^2+5x+7)+$$
$$+(ax^2+bx+c)(4x+5)+2\lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях этого равенства, получаем:

При x^3	$6=8a+4a.$	(1)
При x^2	$10=20a+4b+5a$	(2)
При x	$-14=28a+10b+5b+4c$	(3)
При x^0 (свободный член)	$18=14b+5c+2\lambda$	(4)

Из первого уравнения следует, что $a=\frac{1}{2}$.

Подставляя $a=\frac{1}{2}$ во второе уравнение, получаем $10=10+$ $+8b+\frac{5}{2}$, отсюда $b=-\frac{5}{16}$. При найденных значениях a и b из уравнения (3) получаем, что $c=-\frac{373}{64}$, а из уравнения (4) — $\lambda=\frac{3297}{128}$.

Таким образом,

$$I=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{373}{64}\right)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{128}\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+7}}.$$

Интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+7}}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}|}_{|\text{См. задачу } 9{,}27|}+C,$$

а потому окончательно

$$I=\frac{1}{64}(32x^2-20x-373)\sqrt{2x^2+5x+7}+$$
$$+\frac{3297}{128\sqrt{2}}\ln|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}|+C.$$

Задача 9,34 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{x^2-4}{\sqrt{3x^2+6x-5}}dx$; 2) $\int\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}dx$.

Указания. В первом примере на основании формулы (9,22) имеем

$$\int\frac{x^2-4}{\sqrt{3x^2+6x-5}}dx=(ax+b)\sqrt{3x^2+6x-5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x-5}}.$$

Дифференцируем обе части этого равенства, освобождаемся от дробей и сравниваем в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой части, получаем

$$a=\frac{1}{6};\quad b=-\frac{1}{2};\quad \lambda=-\frac{5}{3}.$$

Во втором примере по формуле (9,22) находим

$$\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x-7} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}.$$

Дифференцируя обе части равенства, освобождаемся в полученном выражении от дробей и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой части, получаем:

$$a = 1; \quad b = 5; \quad c = 36; \quad \lambda = 112.$$

Ответ. 1) $\frac{1}{6}(x-3)\sqrt{3x^2+6x-5} - \frac{5}{3\sqrt{3}} \ln|3x+3+$ $+\sqrt{3(3x^2+6x-5)}| + C$;

2) $(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7} + 112 \ln|x-2+$ $+\sqrt{x^2-4x-7}| + C$.

Задача 9,35 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{5x^2-6x+3}}\,dx$; 2) $\int \frac{11x^4-195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}}$.

Указание. В первом примере окажется, что

$$a = \frac{1}{15}; \quad b = \frac{1}{10}; \quad c = \frac{1}{10}; \quad \lambda = 0.$$

Замечание. В этих двух примерах $\lambda = 0$, а потому решение имеет чисто алгебраический вид.

Ответ. 1) $\frac{1}{30}(2x^2+3x+3)\sqrt{5x^2-6x+3} + C$; 2) $\frac{1}{4}(11x^3-$ $-77x^2+105x-175)\sqrt{x^2+6x+5} + C$.

Задача 9,36. Найти интеграл

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Решение. Следует иметь в виду, что к интегралам (9,19) легко приводятся интегралы вида

$$\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен относительно x.

Действительно, перенося иррациональность в знаменатель, получим

$$\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{P(x)(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

Теперь остается применить формулу (9,22).

Предложенный в задаче интеграл может быть представлен так:

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

$$= (\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

| Применена формула (9,22) с другим обозначением неизвестных коэффициентов |

Значения неизвестных коэффициентов:

$$\alpha=\frac{1}{2}; \quad \beta=\frac{b}{4a}; \quad \lambda=\frac{4ac-b^2}{8a};$$

и, таким образом, учитывая, что

$$\frac{1}{2}x+\frac{b}{4a}=\frac{2ax+b}{4a},$$

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c}+$$

$$+\frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{9,23}$$

Вычисление же последнего интеграла известно из задачи 9,27 и 9,29.

Задача 9,37 (для самостоятельного решения).

По формуле (9,23) найти интегралы:

1) $\int\sqrt{c+x^2}\,dx$; 2) $\int\sqrt{c-x^2}\,dx$ $(c>0)$.

Ответ. 1) $\frac{x}{2}\sqrt{c+x^2}+\frac{c}{2}\ln|x+\sqrt{c+x^2}|+C$;

2) $\frac{x}{2}\sqrt{c-x^2}+\frac{c}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{c}}+C$.

Задача 9,38 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы:

1) $\int\sqrt{5+3x+8x^2}\,dx$; 2) $\int\sqrt{2x^2+5x+7}\,dx$;

3) $\int\sqrt{5-x-3x^2}\,dx$; 4) $\int\sqrt{7+8x-5x^2}\,dx$,

не применяя формулы (9,23), а пользуясь указаниями, данными в задаче 9,36.

Ответ. 1) $\frac{16x+3}{32}\sqrt{5+3x+8x^2}+\frac{151}{128\sqrt{2}}\ln|16x+3+$
$+4\sqrt{10+6x+16x^2}|+C$;

2) $\frac{4x+5}{8}\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{31}{16\sqrt{2}}\ln|4x+5+$
$+2\sqrt{4x^2+10x+14}|+C$;

3) $\frac{6x+1}{12}\sqrt{5-x-3x^2}+\frac{61}{24\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+1}{\sqrt{61}}+C$;

4) $\frac{5x-4}{10}\sqrt{7+8x-5x^2}+\frac{51}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-4}{\sqrt{51}}+C$.

2. Интегралы вида (9,20)

$$\int \frac{dx}{(x+k)^p \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

подстановкой

$$x+k=\frac{1}{y} \tag{9,24}$$

приводятся к интегралу вида (9,19), примеры определения которого мы уже разобрали.

Задача 9,39. Найти интеграл $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}$.

Решение. Этот интеграл принадлежит к рассматриваемому типу: $k=0$; $p=1$; $a=1$; $b=0$; $c=5$. Применим подстановку (9,24), которая в данном случае будет такой: $x=\frac{1}{y}$; $dx=-\frac{1}{y^2}dy$. Подставляя эти значения в подынтегральную функцию, получим

$$I=\int \frac{-\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{y^2}+5}}=-\int \frac{\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1+5y^2}{y^2}}}=-\int \frac{\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y^2}\sqrt{1+5y^2}}=$$

$$=-\int \frac{dy}{\sqrt{1+5y^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1+(\sqrt{5}y)^2}}dy=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}y+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+5y^2}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}\frac{1}{x}+\sqrt{1+5\cdot\frac{1}{x^2}}\right|+C=$$

Возвращаемся к старой переменной: $y=\frac{1}{x}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}\right|+C.$$

Окончательно

$$I=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{x^2+5}}{x}+C.$$

Задача 9,40. Найти $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$.

Решение. Этот интеграл относится к рассматриваемому типу: $k=0$; $p=2$; $a=-1$; $b=0$; $c=7$.

Подстановка:

$$x=\frac{1}{y};\quad x^2=\frac{1}{y^2};\quad dx=-\frac{dy}{y^2}.$$

Поэтому

$$I=\int\frac{-\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y^2}\sqrt{7-\frac{1}{y^2}}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{7-\frac{1}{y^2}}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{7y^2-1}{y^2}}}=$$

$$=-\int\frac{y\,dy}{\sqrt{7y^2-1}}=-\frac{1}{14}\int\frac{14y\,dy}{\sqrt{7y^2-1}}=-\frac{1}{14}\cdot 2\sqrt{7y^2-1}+C=$$

$$=-\frac{1}{7}\sqrt{7y^2-1}+C=-\frac{1}{7}\sqrt{7\cdot\frac{1}{x^2}-1}+C.$$

Возвращаемся к старой переменной: $y=\frac{1}{x}$

Окончательно

$$I=-\frac{1}{7}\frac{\sqrt{7-x^2}}{x}+C.$$

Задача 9,41 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{15+3x^2}}$.

Ответ. 1) $\arccos\frac{1}{x\sqrt{2}}+C$; 2) $-\frac{1}{15}\frac{\sqrt{15+3x^2}}{x}+C$.

Задача 9,42 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $I_1=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$;

2) $I_2=\int\frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{3x^2-8x+5}}$.

Указания. В первом примере использовать подстановку $x-1=\frac{1}{y}$, во втором — подстановку $x-2=\frac{1}{y}$. После подстановки получится: $I_2=-\int\frac{y^2}{\sqrt{y^2+4y+3}}dy$; применить формулу (9,22).

Ответ. 1) $-\ln\left|\frac{3-x+2\sqrt{1+x-x^2}}{2(x-1)}\right|+C$;

2) $\frac{6x-13}{2(x-2)^2}\sqrt{3x^2-8x+5}-\frac{9}{2}\ln\left|\frac{2x-3+\sqrt{3x^2-8x+5}}{x-2}\right|+C$.

V. ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВОК ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ВИДА

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx. \qquad (9,13)$$

Для вычисления интегралов, не содержащих другой иррациональности, кроме квадратного корня из квадратного трехчлена, применяются также тригонометрические подстановки, которые приводят интеграл (9,13) к интегралу от рациональной функции синуса и косинуса.

Чтобы применить эти подстановки, следует поступить так:

Из квадратного трехчлена, находящегося под корнем, надо выделить полный квадрат, после чего применить линейную подстановку, которая будет показана ниже на ряде примеров. Это даст возможность получить под корнем следующие выражения:

1) При $a > 0$ — сумму квадратов вида

$$k^2 + y^2 \tag{9,25}$$

или разность квадратов вида

$$y^2 - k^2. \tag{9,26}$$

После того как под корнем окажется выражение вида (9,25), для уничтожения иррациональности в подынтегральном выражении следует применить подстановку

$$\left.\begin{aligned} y &= k \operatorname{tg} t \\ dy &= k \sec^2 t\,dt \\ \sqrt{k^2 + y^2} &= k \sec t \end{aligned}\right\} \tag{9,27}$$

Если под корнем окажется выражение вида (9,26), то для уничтожения иррациональности в подынтегральном выражении надо применить подстановку

$$\left.\begin{aligned} y &= k \sec t \\ dy &= k \sec t \operatorname{tg} t\,dt \\ \sqrt{y^2 - k^2} &= k \operatorname{tg} t \end{aligned}\right\} \tag{9,28}$$

2) При $a < 0$ под корнем после выделения полного квадрата и применения линейной подстановки могут оказаться выражения вида

$$k^2 - y^2 \tag{9,29}$$

или

$$-k^2 - y^2. \tag{9,30}$$

В случае, когда под корнем окажется выражение вида (9,29), подстановка

$$\left.\begin{aligned} y &= k \sin t \\ dy &= k \cos t\,dt \\ \sqrt{k^2 - y^2} &= k \cos t \end{aligned}\right\} \tag{9,31}$$

освободит подынтегральное выражение от иррациональности.

Случай (9,30) не представляет для нас интереса, так как корень здесь не имеет вещественного значения ни при одном действительном значении y.

Помещаем для справок основные интегралы рассматриваемого вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C; \tag{9,32}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C; \tag{9,33}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C; \tag{9,34}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C. \tag{9,35}$$

Сначала найдем несколько интегралов, в которых выражение, находящееся под корнем, имеет один из видов: (9,25), (9,26) и (9,29), а после этого — несколько примеров, в которых подкоренное выражение придется приводить к этому виду.

Задача 9,43. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$.

Решение. Выражение, стоящее под корнем, имеет вид (9,25) ($k = 3$). Применяем подстановку (9,27):

$$x = 3\operatorname{tg} y; \quad dx = 3\sec^2 y\,dy$$

$$x^2 + 9 = 9\operatorname{tg}^2 y + 9 = 9(\operatorname{tg}^2 y + 1) = 9\sec^2 y.$$

Поэтому

$$\sqrt{x^2+9} = 3\sec y, \quad \text{а } I = \int \frac{3\sec^2 y\,dy}{9\sec^2 y \cdot 3\sec y} = \frac{1}{9}\int \frac{dy}{\sec y} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \cos y\,dy = \frac{1}{9}\sin y + C.$$

Для того, чтобы возвратиться к первоначальной переменной x, найдем $\sin y$ через x. Из подстановки

$$x = 3\operatorname{tg} y; \quad \operatorname{tg} y = \frac{x}{3}; \quad \sin y = \operatorname{tg} y \cdot \cos y = \frac{\operatorname{tg} y}{\sec y} = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} =$$

$$= \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Поэтому окончательно

$$I = \frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C.$$

Задача 9,44 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + C$; 2) $\frac{x}{16\sqrt{16+x^2}} + C$.

Задача 9,45. Найти $I=\int\frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}$.

Решение. Подкоренное выражение имеет вид (9,26). Подстановка (9,28) ($k^2=5$, $k=\sqrt{5}$) должна уничтожить иррациональность подынтегрального выражения. Полагаем

$$x=\sqrt{5}\sec t;\quad dx=\sqrt{5}\sec t\operatorname{tg}t\,dt;$$
$$x^2-5=5\sec^2 t-5=5\operatorname{tg}^2 t;\quad \sqrt{x^2-5}=\sqrt{5}\operatorname{tg}t.$$

Тогда

$$I=\int\frac{\sqrt{5}\sec t\operatorname{tg}t\,dt}{5\operatorname{tg}^2 t\sqrt{5}\operatorname{tg}t}=\frac{1}{5}\int\frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt=\frac{1}{5}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{5}\frac{1}{\sin t}+C.$$

Из подстановки $x=\sqrt{5}\sec t$ следует, что

$$\sec t=\frac{x}{\sqrt{5}};\quad \cos t=\frac{\sqrt{5}}{x};\quad \cos^2 t=\frac{5}{x^2};$$
$$\sin^2 t=1-\frac{5}{x^2}=\frac{x^2-5}{x^2};\quad \sin t=\frac{\sqrt{x^2-5}}{x},$$

а потому окончательно

$$I=-\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+C.$$

Задача 9,46 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{(x^2-10)\sqrt{x^2-10}}$; 2) $\int\frac{dx}{(x^2-14)\sqrt{x^2-14}}$.

Ответ. 1) $-\frac{1}{10}\frac{x}{\sqrt{x^2-10}}+C$; 2) $-\frac{1}{14}\frac{x}{\sqrt{x^2-14}}+C$.

Задача 9,47. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$.

Решение. Подкоренное выражение имеет вид (9,29) ($k^2=2$; $k=\sqrt{2}$). Применяем подстановку (9,31):

$$x=\sqrt{2}\sin t;\quad dx=\sqrt{2}\cos t\,dt;\quad 2-x^2=2\cos^2 t;$$
$$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t;$$
$$I=\int\frac{\sqrt{2}\cos t\,dt}{2\cos^2 t\sqrt{2}\cos t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}t+C.$$

Но из подстановки $x=\sqrt{2}\sin t$ следует, что $\sin t=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}t=\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$, а поэтому окончательно

$$I=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}+C.$$

Задача 9,48 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{(5-x^2)\sqrt{5-x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}+C$; 2) $\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}+C$.

Задача 9,49 (для самостоятельного решения).

Найти $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}$.

Ответ. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{1-x^2}}+C$.

Задача 9,50. Найти интеграл

$$I=\int \frac{(x+4)\,dx}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Решение. В подкоренном выражении выделяем полный квадрат: $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$.

Сделаем линейную подстановку, о которой мы упоминали на стр. 143: $x+1=y$; $dx=dy$; $x^2+2x+4=(x+1)^2+3=$ $=y^2+3$; $x+4=x+1+3=y+3$, а интеграл

$$I=\int \frac{y+3}{(y^2+3)\sqrt{y^2+4}}\,dy.$$

Теперь выражение, стоящее под корнем, имеет вид (9,25). Применим подстановку (9,27) ($k^2=4$; $k=2$):

$y=2\operatorname{tg}t$; $dy=2\sec^2 t\,dt$; $\sqrt{y^2+4}=2\sec t$; $y+3=2\operatorname{tg}t+3$; $y^2+3=4\operatorname{tg}^2 t+3$.

Теперь

$$I=\int \frac{2\operatorname{tg}t+3}{(4\operatorname{tg}^2 t+3)\,2\sec t}\,2\sec^2 t\,dt=\int \frac{(2\operatorname{tg}t+3)\sec t\,dt}{4\operatorname{tg}^2 t+3}=$$

$$=\int \frac{\left(2\frac{\sin t}{\cos t}+3\right)\frac{1}{\cos t}\,dt}{4\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+3}=\int \frac{2\sin t+3\cos t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}\,dt=$$

$$=2\int \frac{\sin t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}\,dt+3\int \frac{\cos t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}\,dt=$$

$$\boxed{4\sin^2 t+3\cos^2 t=4-\cos^2 t} \qquad \boxed{\begin{gathered}4\sin^2 t+3\cos^2 t=\\ =\sin^2 t+3\end{gathered}}$$

$$=2\int \frac{\sin t}{4-\cos^2 t}\,dt+3\int \frac{\cos t}{\sin^2 t+3}\,dt=$$

$$=-2\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\cos t}{2-\cos t}\right|+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+C=\underbrace{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\cos t}{2+\cos t}\right|}_{\text{Учтен знак минус, стоящий перед логарифмом}}+$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Теперь следует от переменной t перейти к переменной y, а затем от y к x.

Так как $y=2\operatorname{tg} t$, то $\operatorname{tg} t=\frac{y}{2}$; $\sin t=\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}$; $\cos t=\frac{2}{\sqrt{4+y^2}}$, а потому

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\frac{2}{\sqrt{4+y^2}}}{2+\frac{2}{\sqrt{4+y^2}}}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{4+y^2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{4+y^2}-2}{2\sqrt{4+y^2}+2}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{4+y^2}}+C.$$

Но так как $x+1=y$, то $y^2+4=x^2+2x+5$, и окончательно

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-1}{\sqrt{x^2+2x+5}+1}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+5}}+C.$$

Задача 9,51 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{xdx}{(x^2+x+4)\sqrt{4x^2+4x+5}}$;

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+4)^7}}$.

Указания. 1) Подкоренное выражение представить так:

$$4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4.$$

Линейная подстановка $2x+1=y\left(2\,dx=dy;\ dx=\frac{1}{2}dy\right)$ приведет это выражение к виду y^2+4. Выражение же $x^2+x+4=$ $=\frac{4x^2+4x+16}{4}=\frac{(2x+1)^2+15}{4}=\frac{y^2+15}{4}$. Теперь следует применить подстановку $y=2\operatorname{tg} t$. Можно сразу взять $2x+1=2\operatorname{tg} t$.

2) Подкоренное выражение $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$. Можно сразу применить подстановку $x+1=\sqrt{3}\operatorname{tg} t$ или сначала линейной подстановкой $x+1=y$ привести подкоренное выражение к виду y^2+3, а потом взять $y=\sqrt{3}\operatorname{tg} t$. Вопрос сведется к вычислению интеграла $\int\cos^5 t\,dt$. Из $x+1=\sqrt{3}\operatorname{tg} t$ следует, что $\sin t=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

Ответ. 1) $\frac{1}{2\sqrt{165}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}(2x+1)-\sqrt{15(4x^2+4x+5)}}{\sqrt{11}(2x+1)+\sqrt{15(4x^2+4x+5)}}\right|+$ $+\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{\sqrt{11}}+C$;

2) $\frac{1}{27}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}-\frac{2}{81}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)^3+\frac{1}{135}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)^5+C.$

ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегральная сумма. Определенный интеграл и его основные свойства. Вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Интегральная сумма. Пусть на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ оси Ox задана непрерывная функция $f(x)$.

Отрезок $[a, b]$ разделим на n частей, длины которых могут быть произвольными.

Каждый такой отрезок будем называть частичным.

Абсциссы точек деления обозначим через $x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}$ и будем полагать, что

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < b.$$

Длину частичного отрезка, равную разности $x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, обозначим через Δx_k:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

На каждом частичном отрезке выберем *произвольную точку*, абсциссу которой обозначим через ξ_k $(k = 1, 2, \dots, n)$, вычислим $f(\xi_k)$ — значение заданной функции $f(x)$ в этой точке. Найдем произведение числа $f(\xi_k)$ на длину Δx_k отрезка, на котором взята точка ξ_k, т. е. $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Составим сумму таких произведений

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

которую обозначим

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (10,1)$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Для заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно составить бесчисленное множество интегральных сумм, так как отрезок $[a, b]$ может быть разделен на части бесчисленным числом способов, а при выбранном способе разделения существует еще бесчисленное число возможностей для выбора в каждом отрезке точек ξ_k.

2. Определенный интеграл. Обозначим через l *длину наибольшего* из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$ в данном разделении отрезка $[a, b]$ на части $(l = \max \Delta x_k)$.

Определение. Предел интегральной суммы (10,1)

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

при условии, что $l \to 0$ (а значит, число отрезков n неограниченно возрастает $(n \to \infty)$), если он существует и не зависит ни от того, каким образом разделен на части отрезок $[a, b]$, ни от того, какая точка ξ_k выбрана на каждом частичном отрезке, называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\lim_{\substack{l \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{10,2}$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Гарантией существования этого предела, или, что то же самое, существования определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, и независимости его ни от способа деления отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек ξ_k на каждом частичном отрезке является непрерывность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Теорема (о существовании определенного интеграла).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел интегральных сумм (10,1) *при условии, что длина каждого частичного отрезка стремится к нулю, а число частичных отрезков неограниченно увеличивается, существует и не зависит ни от способа разделения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек на каждом частичном отрезке.*

В символе $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a, b]$ — отрезком интегрирования, а переменная величина x — переменной интегрирования.

Отыскивая предел (10,2) суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ при условии, что длина наибольшего из частичных отрезков Δx_k стремится к нулю, следует иметь в виду, что каждое слагаемое $f(\xi_k)\,\Delta x_k$ есть величина бесконечно малая, так как в этом предельном процессе Δx_k — величина бесконечно малая, а $f(\xi_k)$ имеет конечное значение, потому что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по предположению непрерывна. **Таким образом, определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ есть предел суммы бесконечно малых величин, количество которых неограниченно возрастает.**

3. Формула Ньютона — Лейбница. Имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{10,3}$$

где функция $F(x)$ есть какая-нибудь первообразная для подынтегральной функции $f(x)$.

Формула (10,3) называется формулой Ньютона — Лейбница. Она является основной формулой интегрального исчисления.

Согласно этой формуле, для вычисления предела интегральной суммы (10,1) при указанных выше условиях, или, что то же, для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, надо: 1) найти какую-нибудь первообразную функцию $F(x)$ для подынтегральной функции; 2) вычислить ее значение $F(b)$ при верхнем пределе и вычесть из него ее значение $F(a)$ при нижнем пределе.

Обычно при вычислении определенного интеграла употребляют такую запись:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона — Лейбница позволяет свести сложную задачу вычисления предела интегральной суммы, для решения которой отсутствует общий прием, к нахождению первообразной функции для подынтегральной; тем самым она указывает единообразный и простой способ вычисления предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин и позволяет заменить бесконечный процесс суммирования хорошо известной операцией отыскания первообразной функции.

4. Основные свойства определенного интеграла.

1) $$\int_a^b dx = b - a. \tag{10,4}$$

2) *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла*

$$\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{10,5}$$

где c — постоянная величина.

3) *Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций*

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]\, dx =$$
$$= \int_a^b f_1(x)\, dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)\, dx. \qquad (10,6)$$

4) *При перестановке пределов интегрирования знак определенного интеграла меняется на противоположный*

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx. \qquad (10,7)$$

5) Если нижний и верхний пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0. \qquad (10,8)$$

6) *Переменную интегрирования можно обозначить любой буквой*, не нарушая справедливости формул, т. е.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(\alpha)\, d\alpha. \qquad (10,9)$$

7) Имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx, \qquad (10,10)$$

которая верна при любом взаимном расположении чисел a, b и c.

Если выполняются неравенства $a < c < b$, то из формулы (10,10) следует, что интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка[1].

1. Упражнения на вычисление определенных интегралов непосредственно из определения, как предела интегральных сумм, и с применением формулы Ньютона — Лейбница.

Задача 10,1. Составить формулы для вычисления интегральных сумм для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, разделяя этот отрезок на n равных частичных отрезков.

Значение функции вычислять:

1) в правом конце каждого частичного отрезка;

2) в левом конце каждого частичного отрезка.

[1] Дальнейшие свойства определенных интегралов будут рассмотрены на последующих практических занятиях.

Решение. 1) Длина отрезка интегрирования равна $b-a$. Длину каждого частичного отрезка для удобства записи обозначим не через Δx, как обычно, а через h. Тогда

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Координаты точек деления равны:

$$x_0 = a;\ x_1 = a + h;\ x_2 = a + 2h,\ \ldots,\ x_{n-1} = a + (n-1)h;$$
$$x_n = b = a + nh. \qquad (10,11)$$

Значения функции в правых концах частичных отрезков будут

$$f(a+h);\ f(a+2h);\ f(a+3h),\ \ldots,\ f(a+nh).$$

Умножая каждое из этих чисел на длину h частичного отрезка и складывая эти произведения, получим интегральную сумму

$$S_n = f(a+h)h + f(a+2h)h + f(a+3h)h + \cdots + f(a+nh)h =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)h = h\sum_{i=1}^{n} f(a+ih). \qquad (10,12)$$

(постоянная величина h, входящая в каждое слагаемое, вынесена за знак суммы).

В таком случае $\int_a^b f(x)\,dx$ будет пределом этой интегральной суммы, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = h \lim_{\substack{h\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(a+ih) \qquad (10,13)$$

2) Значениями функции в левых концах каждого частичного отрезка будут числа

$$f(a);\ f(a+h);\ f(a+2h),\ \ldots,\ f[a+(n-1)h].$$

Умножая каждое из этих значений на длину h частичного отрезка, получим интегральную сумму

$$S_n^{\mathrm{I}} = f(a)h + f(a+h)h + f(a+2h)h + \cdots + f[a+(n-1)]h =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)h = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih). \qquad (10,14)$$

В этом случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{h\to 0\\(n\to\infty)}} h \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih). \qquad (10,15)$$

Задача 10,2. Составить формулу для вычисления интегральной суммы для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$, разделяя отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков так, чтобы абсциссы точек деления образовывали геометрическую прогрессию (или, что то же, чтобы длины частичных отрезков разбиения образовывали геометрическую прогрессию).

Решение. Если знаменатель геометрической прогрессии обозначить через q $(q > 1)$, то абсцисса конца отрезка $[a, b]$

$$b = aq^n. \tag{10,16}$$

Абсциссы точек деления будут такими:

$$x_0 = a; \quad x_1 = aq; \quad x_2 = aq^2; \quad x_3 = aq^3, \ \ldots, \ x_n = aq^n = b.$$

Длины частичных отрезков равны:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = aq - a = a(q-1); \qquad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = aq^2 - aq = aq(q-1)$$

и вообще

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = aq^{k-1}(q-1).$$

Вычислим значения функции в левом конце каждого частичного отрезка и получим числа

$$f(a); \ f(aq); \ f(aq^2), \ \ldots, \ f(aq^{n-1}).$$

Умножая эти числа на длину соответствующего отрезка и складывая полученные произведения, составим интегральную сумму

$$f(a)\cdot a(q-1) + f(aq)\cdot aq(q-1) + f(aq^2)\cdot aq^2(q-1) + \cdots + f(aq^{n-1})\cdot aq^{n-1}(q-1) = a(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} f(aq^i)\,q^i. \tag{10,17}$$

В этом случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = a\lim_{\substack{n\to\infty\\(q\to 1)}} \sum_{i=0}^{n-1}(q-1)f(aq^i)\,q^i = a\lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} f(aq^i)\,q^i. \tag{10,18}$$

Из (10,16) получаем

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}, \tag{10,19}$$

а потому, когда $n \to \infty$, то $q \to 1$ (см. И. А. Каплан. «Практические занятия по высшей математике», ч. II, задача 13,2).

Задача 10,3. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b e^x\,dx$ как предел интегральной суммы.

Решение. Разделим отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей и составим для функции $f(x) = e^x$ по формуле (10,12) интегральную сумму, выбирая точки в правом конце каждого частичного отрезка. Так как $f(x) = e^x$, то

$$f(a+h) = e^{a+h};\ f(a+2h) = e^{a+2h},\ \ldots,\ f(a+ih) = e^{a+ih};$$

$$f(a+nh) = f(b) = e^{a+nh}\quad (a+nh = b);$$

$$S_n = he^{a+h} + he^{a+2h} + \cdots + he^{a+ih} + \cdots + he^{a+nh};$$

$$S_n = he^a(e^h + e^{2h} + \cdots + e^{ih} + \cdots + e^{nh}). \tag{10,20}$$

Выражение в скобках — геометрическая прогрессия, знаменатель которой $q = e^h$.

Известно, что сумма n членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \tag{10,21}$$

У нас $a_1 = e^h$; $q = e^h$, а потому (10,20) перепишется так:

$$S_n = he^a\frac{e^h(e^{nh} - 1)}{e^h - 1} = \frac{he^h}{e^h - 1}(e^{a+nh} - e^a).$$

Но из (10,11) следует, что $a + nh = b$, а потому

$$S_n = \frac{he^h}{e^h - 1}(e^b - e^a).$$

На основании (10,2) определенный интеграл

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{h\to 0} S_n = \lim_{h\to 0}\frac{he^h}{e^h - 1}(e^b - e^a) = 1\cdot(e^b - e^a)\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h - 1} = e^b - e^a$$

(множитель $e^b - e^a$ как постоянная величина, вынесен за знак предела, а по правилу Лопиталя $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{e^h - 1} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{e^h} = 1$, а $\lim\limits_{h\to 0} e^h = 1$).

Итак,

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

Вычислите самостоятельно этот интеграл по формуле (10,14), т. е. разделяя отрезок $[a, b]$ по-прежнему на n равных частей, но выбирая на каждом частичном отрезке (x_{k-1}, x_k) точку в его левом конце.

Теперь применим к вычислению этого интеграла формулу (10,3) Ньютона — Лейбница. Согласно этой формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$. Поэтому

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a,$$

что совпадает с ранее найденным результатом.

Учащийся легко оценит экономию в вычислениях, которую дает формула Ньютона—Лейбница: весь процесс сводится к отысканию первообразной функции для подынтегральной, вычислению её значений при верхнем и нижнем пределах интегрирования и определению разности этих значений.

Задача 10,4. Вычислить интеграл $\int_a^b x^k dx$, где a и b — положительные числа, $a < b$, $k \neq -1$, рассматривая его как предел интегральной суммы.

Решение. Предпримем такое разбиение отрезка интегрирования $[a, b]$ на части, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию. (Это равносильно тому, что длины частичных отрезков образуют геометрическую прогрессию). Вычислять значение функции будем в левом конце каждого частичного отрезка.

В задаче 10,2 была получена формула (10,18) для вычисления определенного интеграла при таком способе разбиения отрезка интегрирования на части. Полагая в этой формуле $f(x) = x^k$, $f(aq^i) = (aq^i)^k$ и учитывая (10,19), получим

$$\int_a^b x^k\,dx = a \lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}} (q-1)\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^k q^i = a\lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} a^k q^{i(k+1)} =$$

$$= a^{k+1}\lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} q^{i(k+1)}. \qquad (10,22)$$

Под знаком суммы стоит геометрическая прогрессия. Её первый член $a_1 = 1$, знаменатель q^{k+1}. Поэтому по формуле (10,21) сумма этой прогрессии

$$S_n = \frac{1\cdot[(q^{k+1})^n - 1]}{q^{k+1}-1} = \frac{(q^n)^{k+1}-1}{q^{k+1}-1}.$$

Но на основании (10,19) $q^n = \frac{b}{a}$, поэтому

$$S_n = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} - 1}{q^{k+1}-1},$$

а (10,22) перепишется в виде

$$\int_a^b x^k\,dx = a^{k+1} \lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}} (q-1)\frac{\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}-1}{q^{k+1}-1} =$$

$$= a^{k+1}\left(\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}-1\right)\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1},$$

так как по правилу Лопиталя

$$\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \lim_{q\to 1}\frac{1}{(k+1)\,q^k} = \frac{1}{k+1}.$$

Итак,

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \qquad (10,23)$$

причем на пределы интегрирования a и b было наложено ограничение $0 < a < b$, так как при этом предположении проведенное деление отрезка $[a, b]$ на части, длины которых составляют геометрическую прогрессию, всегда возможно.

Следует отметить, что формула (10,23) верна при любых значениях a и b.

Теперь применим к вычислению этого интеграла формулу (10,3) Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b x^k\,dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

(никаких ограничений на числа a и b не наложено).

Очевидно, что применение этой формулы просто и быстро дает необходимый результат.

При $k=0$ из (10,23) получаем

$$\int_a^b dx = b-a,$$

т. е. *определенный интеграл от дифференциала равен разности между верхним и нижним пределами интегрирования.*

Эти две задачи приведены с целью упражнения в составлении интегральной суммы для подынтегральной функции, определении предела этой суммы при разных способах разбиения отрезка интегрирования на части, а также для сравнения труда, затрачиваемого на вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница и как предела интегральных сумм.

Теперь мы предложим для тех же упражнений несколько задач для самостоятельного решения с необходимыми указаниями.

Задача 10,5 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_a^b \frac{1}{x} dx$ $(a > 0;\ b > 0;\ a < b)$, составив интегральную сумму для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $[a, b]$. Разбиение отрезка на части произвести точками, абсциссы которых составляют геометрическую прогрессию. Вычислить этот интеграл и по формуле Ньютона—Лейбница.

Указание. Использовать формулу (10,18).

$$f(aq^i) = \frac{1}{aq^i}; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{aq^i} q^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a} = n \cdot \frac{1}{a}.$$

Задача сведется к определению предела $\lim\limits_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}} n(q-1)$.

Так как согласно (10,19) $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, то $\ln q = \frac{1}{n} \ln \frac{b}{a}$, а $n = \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln q}$. Поэтому указанный предел преобразуется в

$$\lim_{q\to 1} \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln q}(q-1) = \ln \frac{b}{a} \lim_{q\to 1} \frac{q-1}{\ln q}$$

(применить правило Лопиталя: «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$).

Ответ. $\ln \frac{b}{a}$. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

Требование, чтобы a и b были числами положительными, является существенным, так как каждое из них оказалось под знаком логарифма.

Задача 10,6 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_a^b x\,dx$, составив интегральную сумму для функции $f(x) = x$. Отрезок $[a, b]$ разделить произвольным образом на n частей.

Точку, в которой вычисляется значение функции, взять в середине каждого частичного отрезка:

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}.$$

Так как $f(x) = x$, то $f(\xi_k) = \xi_k$.

Длина частичного отрезка

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Интегральная сумма примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2).$$

Но $x_n = b$; $x_0 = a$, поэтому интегральная сумма равна $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, а ее предел в данном случае, как предел постоянной величины, равен ей самой

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Такой результат, конечно, мог быть получен сразу по формуле (10,23). При решении этой задачи было произведено не специальное разбиение отрезка на части, а произвольное. Точка, в которой вычисляется значение функции, была выбрана в середине каждого отрезка. По формуле Ньютона—Лейбница получается, конечно, то же самое

$$\int_a^b x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Задача 10,7 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int_a^b \sin x\,dx$ как предел интегральной суммы и применяя формулу Ньютона—Лейбница.

Указание. Отрезок $[a, b]$ разделить на n равных частей. Значения функции $\sin x$ вычислить в правом конце каждого отрезка.

По формуле (10,12) интегральная сумма будет иметь такой вид $\left(\text{с учетом, что } h = \frac{b-a}{n}\right)$:

$$h[\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin(a+ih) + \\ + \ldots + \sin(a+nh)].$$

Учесть, что $2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2}=\cos\left(a+ih-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+ih+\frac{h}{2}\right)$, а отсюда

$$\sin(a+ih)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+ih-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+ih+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Подставляя это значение $\sin(a+ih)$ в интегральную сумму, после приведения подобных членов получим

$$\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right].$$

Перейти к пределу при $h\to 0$ $(n\to\infty)$, но учесть, что $a+nh=b$, а $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}=1$ (применить правило Лопиталя).

Ответ. $\int\limits_a^b \sin x\,dx=\cos a-\cos b.$

По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b \sin x\,dx=-\cos x\Big|_a^b=-(\cos b-\cos a)=\cos a-\cos b.$$

Заканчивая упражнения на вычисление определенного интеграла как предела интегральных сумм, отметим еще раз, что такое вычисление даже в простейших случаях требует больших усилий.

В заключение этого практического занятия выполним ряд упражнений на вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница.

Задача 10,8 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 e^{kx}dx$; 3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ (учесть, что значения функции $y=\operatorname{arctg} x$ находятся на интервале $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$; 4) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Ответ. 1) 2; 2) $\frac{e^k-1}{k}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\sqrt{2}-1$.

Задача 10,9 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} (a>0;\ b>0)$; 2) $\int\limits_a^b \cos x\, dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

5) $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ (учесть результат задачи 4,3).

Ответ. 1) $\ln\frac{b}{a}$; 2) $\sin b - \sin a$; 3) $\ln 2$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{\pi a^2}{2}$.

Задача 10,10 (для самостоятельного решения).

Интегралы, вычисляемые в этой задаче, имеют большое значение в теории тригонометрических рядов.

Доказать справедливость следующих формул, если m и n — целые числа:

1) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0$;

2) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |m| \neq |n|, \\ \pi & \text{»} \quad m = n, \\ -\pi & \text{»} \quad m = -n. \end{cases}$$

Указание: $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$.

3) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |m| \neq |n|, \\ \pi & \text{»} \quad m = \pm n, \\ 2\pi & \text{»} \quad m = n = 0. \end{cases}$$

Указание: $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$.

Задача 10,11 (для самостоятельного решения).

Интегрируя по частям, доказать формулу

$$\int \sin^{2m} x\, dx = -\frac{1}{2m}\sin^{2m-1} x \cos x + \frac{2m-1}{2m}\int \sin^{2m-2} x\, dx$$

и, применяя её при $m>0$ и целом, показать, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\ \cdots\ \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (10,24)$$

Задача 10,12 (для самостоятельного решения).

Из формулы (10,24) получить, заменяя x на $\frac{\pi}{2} - z$, формулу

$$\int \cos^{2m} x\,dx = \frac{1}{2m} \cos^{2m-1} x \sin x + \frac{2m-1}{2m} \int \cos^{2m-2} x\,dx$$

и, пользуясь ею, доказать, что при $m > 0$ и целом

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}. \qquad (10,25)$$

На последующих практических занятиях учащийся сможет выполнить еще много упражнений, связанных с применением формулы Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Задачи механики и физики, приводящие к определенному интегралу.

Решим несколько задач, в которых для определения искомой величины требуется сначала составить интегральную сумму, а затем найти ее предел.

Задача 11,1. Сила тока I является заданной непрерывной функцией времени t: $I = I(t)$. Определить количество Q электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за время T, отсчитываемое от момента начала опыта.

Решение. Считая, что в начале опыта $T = 0$, разделим произвольным образом отрезок времени $(0, T)$ на n частичных отрезков. Абсциссами точек деления пусть будут числа $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}$, а длины частичных отрезков времени $t_k - t_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обозначим через Δt_k

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем подчеркнем еще раз, что промежутки времени Δt_k не обязательно должны быть между собою равны. В каждом из этих частичных промежутков времени выберем произвольный момент времени τ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Этот момент может находиться как внутри отрезка времени $[t_{k-1}, t_k]$, так и на любом из его концов.

Сила тока — величина переменная, изменяющаяся во времени. Однако мы будем считать, что за время Δt_k сила тока не изменяется, а имеет в течение всего этого промежутка постоянное значение, а именно то, которое она имела в момент τ_k. Таким образом, для отрезка времени $[t_{k-1}, t_k]$ сила тока, равная $I(\tau_k)$, считается величиной постоянной.

Известно, что для постоянного тока количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника, равно произведению силы тока на время, затраченное на прохождение током этого проводника. Следовательно, за отрезок времени, равный Δt_k, протечет количество электричества, приближенно равное

$$I(\tau_k)\,\Delta t_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Произведение $I(\tau_k)\,\Delta t_k$ дает приближенное, а не точное количество электричества, протекшего за время Δt_k, потому что силу тока в течение всего этого промежутка времени мы считаем величиной постоянной, в то время как в действительности она изменяется непрерывно со временем и является величиной переменной.

Давая индексу k значения 1, 2, ..., n и складывая произведения $I(\tau_1)\,\Delta t_1$, $I(\tau_2)\,\Delta t_2$, ..., $I(\tau_n)\,\Delta t_n$, найдем, что количество электричества Q, протекшего за весь отрезок времени $[0, T]$, приближенно определяется суммой

$$Q \approx I(\tau_1)\,\Delta t_1 + I(\tau_2)\,\Delta t_2 + \cdots + I(\tau_n)\,\Delta t_n,$$

которая является интегральной суммой для функции $I(t)$ на отрезке $[0, T]$. Итак,

$$Q \approx \sum_{k=1}^{n} I(\tau_k)\,\Delta t_k. \tag{11,1}$$

За точное значение количества электричества Q принимается предел этой интегральной суммы при условии, что наибольший из отрезков времени $\max \Delta t_k$ стремится к нулю, а значит, число n этих отрезков неограниченно возрастает, т. е.

$$Q = \lim_{\substack{\max\Delta t_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} I(\tau_k)\,\Delta t_k. \tag{11,2}$$

Когда наибольший из отрезков времени Δt_k стремится к нулю, то каждое слагаемое $I(\tau_k)\,\Delta t_k$ — величина бесконечно малая, а количество n этих слагаемых неограниченно возрастает. Таким образом, при определении предела интегральной суммы (11,1) мы отыскиваем предел суммы бесконечно малых величин, когда их количество неограниченно возрастает.

Из (11,2) следует, что количество электричества, протекшего за отрезок времени $[0, T]$, определяется по формуле

$$Q = \int_0^T I(t)\,dt \tag{11,3}$$

(см. формулу (10,2)).

Таким образом, формула (11,1) определяет *приближенно* количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за время, равное T секундам. Формула же (11,3) определяет это количество *точно*, причем числа, найденные по этим формулам, тем меньше отличаются одно от другого, чем меньше отрезки времени Δt_k, на которые разделен основной отрезок времени $[0, T]$.

Напомним, что в технической системе единиц количество электричества Q измеряется в кулонах, а сила тока I — в амперах.

Задача 11,2. Сила тока $I = 2t^2 - 3t + 2$.

Определить количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за 10 секунд, считая время от начала опыта.

Решение.

$$Q = \int_0^{10} (2t^2 - 3t + 2)\, dt = \left(\frac{2}{3} t^3 - \frac{3}{2} t^2 + 2t\right)\Big|_0^{10} = 536\frac{2}{3}\, k.$$

Задача 11,3. Тело движется по прямой Ox из точки с абсциссой a до точки с абсциссой b $(a < b)$ под действием **переменной** силы $\overline{F}$, являющейся непрерывной функцией абсциссы x: $\overline{F} = \overline{F}(x)$, причем сила параллельна прямой Ox, а ее направление совпадает с направлением движения тела. Найти работу A, произведенную силой $\overline{F}(x)$ на этом перемещении.

Решение. Если бы сила $\overline{F}(x)$ была не переменной, а постоянной, параллельной прямой Ox, и ее направление совпадало с направлением движения тела, то работа A, произведенная ею, была бы равна произведению модуля силы на пройденный путь, т. е. на длину отрезка $[a, b]$, равную $(b - a)$:

$$A = F(b - a).$$

Но сила переменна, а потому этой формулой для определения работы мы воспользоваться не можем.

Отрезок $[a, b]$ разделим на n отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$. На каждом из них выберем произвольную точку ξ_k. Определим в этой точке численное значение силы $\overline{F}(x)$. Получится число $F(\xi_k)$. Полагая, что в пределах каждого частичного отрезка сила не переменна, а постоянна и что ее значение на всем частичном отрезке такое же, как в выбранной точке, будем считать произведенную этой силой работу приближенно на каждом частичном отрезке равной произведению модуля силы на путь, т. е. $F(\xi_k)\, \Delta x_k$.

Работа силы $\overline{F}(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ приближенно равна сумме работ на всех частичных участках

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\, \Delta x_k. \qquad (11,4)$$

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} F(\xi_k)\, \Delta x_k$ — интегральная сумма для функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$. По формуле (11,4) мы получим не точное значение работы, а приближенное, потому что на каждом частичном отрезке мы считали силу постоянной, в то время как фактически в пределах каждого частичного отрезка она непрерывно изменяется.

За точное значение работы силы $\overline{F}(x)$ на отрезке $[a, b]$ мы примем тот предел, к которому стремится интегральная сумма (11,4), когда наибольший из частичных отрезков Δx_k стремится к нулю, а число их n неограниченно возрастает, т. е.

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\, \Delta x_k,$$

и согласно формуле (10,2)

$$A = \int_a^b F(x)\, dx. \qquad (11,5)$$

Подынтегральное выражение $F(x)\,dx$ называется элементарной работой и обозначается через δA.

Работа A есть определенный интеграл от элементарной работы $\delta A = F(x)\,dx$. Таким образом, для определения работы переменной силы на прямолинейном пути надо сначала вычислить элементарную работу δA, а после этого интегрированием по формуле (11,5) найти полную работу.

Приближенное значение работы, вычисленное по формуле (11,4), будет тем меньше отличаться от ее точного значения (11,5), чем меньшими будут частичные отрезки Δx_k, на которые разбит отрезок $[a, b]$.

При определении предела суммы (11,4) наибольший из отрезков $\Delta x_k \to 0$, каждое слагаемое $F(\xi_k)\,\Delta x_k$ — величина бесконечно малая, а количество их неограниченно возрастает. Поэтому и здесь определение искомой величины, как и в задаче 11,1 связано с определением предела суммы бесконечно малых величин, когда их количество неограниченно возрастает.

Задача 11,4 (работа упругой силы на прямолинейном перемещении).

К телу прикреплена пружина, другой конец которой закреплен неподвижно в точке O. Упругая сила, с которой действует пружина на тело, подчиняется закону Гука, согласно которому $F = -kx$, где k — коэффициент пропорциональности, а x — удлинение пружины. Найти работу упругой силы на прямолинейном перемещении по линии действия силы из точки с абсциссой a в точку с абсциссой b. (Сила — в килограммах, перемещение — в метрах). Знак минус в выражении силы показывает, что упругая сила стремится восстановить равновесие.

Решение. Элементарная работа δA силы упругости на перемещении dx равна

$$\delta A = -kx\, dx,$$

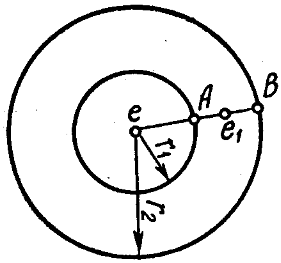
а потому полная работа на перемещении из точки a в точку b определится по формуле (11,5)

$$A = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b -kx\,dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

Следует иметь в виду, что работа упругой силы положительна, если тело движется в сторону убывания модуля упругой силы, и отрицательна, когда движение происходит в сторону возрастания модуля упругой силы.

Задача 11,5. Электрический точечный заряд $+e_1$ движется в электрическом поле, созданном точечным зарядом $+e$. Согласно закону Кулона, сила взаимодействия между двумя точечными зарядами в пустоте численно определяется по формуле

$$F = \frac{e_1 e}{r^2}.$$



К задаче 11,5

Определить работу при перемещении заряда e_1 из точки A в точку B, считая, что A и B находятся на прямой, проходящей через заряд $+e$.

Решение. Элементарная работа на перемещении dr равна $\delta A = F\,dr = \frac{e_1 e}{r^2}\,dr$, а полная работа определится интегрированием

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{e_1 e}{r^2}\,dr = e_1 e\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2} = e_1 e\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right);$$

$$A = e_1\left(\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках,— разность потенциалов или напряжение между точками A и B.

При решении задачи можно было не составлять выражение элементарной работы, а сразу воспользоваться формулой (11,5), так как здесь известно аналитическое выражение силы: $F = \frac{e_1 e}{r^2}$. Это же замечание относится и к предыдущей задаче.

Задача 11,6. Тяжелая цепь длиною $L = 200$ *м* поднимается, навиваясь на ворот. Определить работу силы веса при поднятии цепи, пренебрегая размерами ворота, если погонный метр цепи весит 50 *кг*.

Решение. Пусть к некоторому моменту времени на ворот навернулся отрезок цепи длиной x. Тогда свешивается его часть длиной $L-x$. Весит эта часть $(L-x)\cdot 50$ *кг*. Элементарная работа силы веса на перемещении dx будет равна

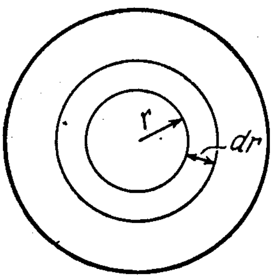
$$\delta A = -(L-x)\cdot 50\,dx.$$

(Знак минус поставлен потому, что сила веса направлена противоположно перемещению). Полную работу найдем по формуле (11,5) как интеграл от элементарной работы

$$A = \int_0^L -(L-x)\cdot 50\,dx = 50\frac{(L-x)^2}{2}\Big|_0^L = -25L^2 =$$

$$= -25\cdot 200^2 = -1\,000\,000 \text{ кг}\cdot\text{м}.$$

Задача 11,7. На вал, вращающийся с угловой скоростью ω, насажен диск радиуса R, погруженный в жидкость. Считая, что сила трения окружающей жидкости о поверхность диска пропорциональна плотности жидкости ρ, квадрату скорости и площади соприкасания, определить момент сил трения относительно оси вала.



К задаче 11,7

Решение. Очевидно, что сила трения окружающей жидкости о поверхность диска будет меняться с глубиной. Подсчитаем сначала элементарную силу трения dF. На расстоянии r от оси вала рассмотрим кольцо, внутренний радиус которого r, а внешний $r+dr$. Площадь этого кольца равна

$$\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\,dr + \pi\,dr^2.$$

При dr, стремящемся к нулю, $\pi\,dr^2$ — величина бесконечно малая высшего порядка малости, чем dr, а потому, пренебрегая ею, примем площадь кольца равной $2\pi r\,dr$. Линейная скорость $v=\omega r$. Квадрат этой скорости равен $\omega^2 r^2$, плотность жидкости — ρ. А потому, принимая коэффициент пропорциональности равным k, для элементарной силы трения dF на расстоянии r от оси вала получаем

$$dF = k\rho 2\pi r\,dr\omega^2 r^2,$$

а ее момент относительно оси вала

$$dm = r\,dF = (k\rho 2\pi r\,dr\omega^2 r^2)\,r;$$

$$dm = 2\pi k\rho\omega^2 r^4\,dr.$$

Полный момент сил трения найдем интегрированием этого выражения от 0 до R:

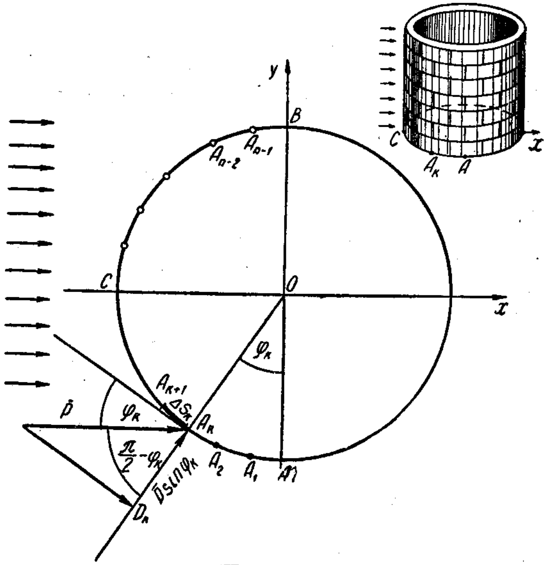
$$m = 2\pi k\rho\omega^2\int_0^R r^4\,dr = 2\pi k\rho\omega^2\frac{r^5}{5}\Big|_0^R = 2\pi k\rho\omega^2\frac{R^5}{5}.$$

Число это следует удвоить, принимая во внимание, что трутся обе поверхности диска. Поэтому полный момент сил трения

$$M = \frac{4}{5}\pi k \rho \omega^2 R^5.$$

При решении задач 11,8—11,15 следует иметь в виду, что давление — величина векторная.

Задача 11,8. Определить численное значение силы давления $\overline{p}$ ветра на стоящую вертикально цилиндрическую башню высотой h *м* с круглым основанием радиуса a *м*, если известно, что сила давления ветра на 1 $м^2$ плоской поверхности, расположенной перпендикулярно к его направлению, равна p *кг*.



К задаче 11,8

Решение. На чертеже показано основание башни, направление ветра и расположение координатных осей. Дугу ACB разделим на n дуг точками $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_{n-1}$ и рассмотрим полоски башни, опирающиеся на соответственные дуги. Если направление ветра не перпендикулярно поверхности полоски, то эта поверхность будет испытывать только часть давления, равную составляющей силы давления $\overline{p}$ по нормали к этой поверхности. Вычислим силу давления, которую испытывает полоска башни, опирающаяся на дугу Δs_k. Обозначим через φ_k угол, который касательная в точке A_k дуги $A_k A_{k+1}$ составляет с направлением ветра. Тогда составляющая $\overline{D_k A_k}$ силы давления по нормали равна

$$\overline{p}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_k\right) = \overline{p}\sin\varphi_k.$$

Полоска башни, опирающаяся на дугу Δs_k, имеет площадь, равную приближенно $h\,\Delta s_k$ $м^2$, а потому она испытывает давление, равное

$$\overline{\Delta p_k} = \overline{p}\sin\varphi_k h\,\Delta s_k.$$

Обозначим через $\Delta\varphi_к$ центральный угол, опирающийся на дугу $\Delta s_к$. Учитывая, что радиус окружности основания башни равен a, получим

$$\Delta s_к = a\Delta\varphi_к,$$

а сила давления ветра на полоску башни, опирающуюся на дугу

$$\overline{\Delta p_к} = \overline{p}\sin\varphi_к\, ha\Delta\varphi_к.$$

Определим проекции этой силы на координатные оси Ox и Oy:

$$(\overline{\Delta p_к})_x = (pah\sin\varphi_к\Delta\varphi_к)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_к\right),$$

или

$$(\overline{\Delta p_к})_x = pah\sin^2\varphi_к\Delta\varphi_к;$$

$$(\overline{\Delta p_к})_y = (pah\sin\varphi_к\Delta\varphi_к)\cos\varphi_к = pah\sin\varphi_к\cos\varphi_к\,\Delta\varphi_к.$$

(Учащегося должен заинтересовать вопрос, почему от силы давления ветра $\overline{\Delta p_к}$ на полоску башни мы переходим к проекциям этой силы на координатные оси).

Суммы проекций по соответствующим координатным осям дадут приближенные значения проекции на эти оси силы давления $\overline{p}$ на всю башню.

$$\left.\begin{aligned} p_x &\approx \sum_{к=1}^{n} pah\sin^2\varphi_к\Delta\varphi_к = pah\sum_{к=1}^{n}\sin^2\varphi_к\Delta\varphi_к \\ p_y &\approx \sum_{к=1}^{n} pah\sin\varphi_к\cos\varphi_к\Delta\varphi_к = pah\sum_{к=1}^{n}\sin\varphi_к\cos\varphi_к\Delta\varphi_к \end{aligned}\right\} \quad (11,6)$$

(в обоих случаях постоянная величина pah, входящая в каждое слагаемое, вынесена за знак суммы).

Угол φ отсчитывается от OA и изменяется на дуге ACB от 0 до π, а потому, переходя к пределу в последних равенствах (11,6) при условии, что число частей деления дуги ACB на части неограниченно увеличивается, а все $\Delta\varphi_к$ стремятся к нулю, получим точные выражения для проекций силы давления на оси Ox и Oy в виде определенных интегралов:

$$p_x = pah\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi = pah\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{pah}{2}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{pah\,\pi}{2}\,кг;$$

$$p_y = pah\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\cos\varphi d\varphi = pah\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Итак, $p_x = \frac{pah\,\pi}{2}\,кг;\quad p_y = 0.$

Если известны проекции a_x и a_y вектора $\bar{a}$ на координатные оси, то его численное значение (модуль), как известно, находится по формуле $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, а потому модуль силы давления $\bar{p}$ на всю башню равен

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{pah\pi}{2}\,кг.$$

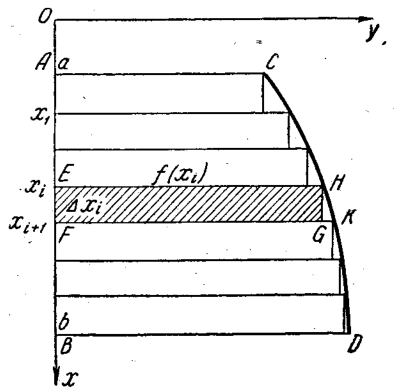
Задача 11,9 (о давлении жидкости на погруженную в нее вертикальную стенку).

В жидкость, удельный вес которой равен γ, погружена вертикальная стенка. Определить численное значение (модуль) силы гидростатического давления жидкости на эту стенку (см. чертеж).

Решение. Из гидростатики известно, что давление жидкости на погруженную в нее горизонтальную пластинку численно равно весу столба жидкости, опирающегося на эту пластинку, т. е. произведению площади этой пластинки на ее расстояние от свободной поверхности жидкости и на удельный вес жидкости.

Если площадь пластинки S, ее расстояние от свободной поверхности жидкости h, а удельный вес жидкости γ, то модуль силы давления

$$P = Sh\gamma. \tag{11,7}$$



К задаче 11,9

Но эта формула верна только для пластинки, занимающей в жидкости горизонтальное положение. Если же пластинка, погруженная в жидкость, занимает не горизонтальное положение, а, например, вертикальное, то ее различные точки находятся на различной глубине, а поэтому о расстоянии всей пластинки от свободной поверхности жидкости не имеет смысла говорить, и формула (11,7) для вычисления модуля силы давления на эту пластинку непригодна.

Отнесем пластинку $ABCD$ к прямоугольной системе координат (см. чертеж), причем ось Oy расположим на поверхности жидкости. Абсциссы точек A и B соответственно равны a и b, а линия CD определяется уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей и построим прямоугольники, как показано на чертеже. Площадь пластинки $EFKH$ примем приближенно равной площади прямоугольника $EFGH$, т. е. произведению $f(x_i)\,\Delta x_i$. Чтобы вычислить приближенно величину давления на этот прямоугольник, повернем его вокруг стороны EH так, чтобы он принял горизонтальное положение. Теперь уже к этой площадке применима формула (11,7), и *приближенно* величина давления жидкости на прямоугольник $EFGH$ будет равна

$$(f(x_i)\,\Delta x_i)\,x_i\gamma.$$

Эта величина тем меньше будет отличаться от истинной величины давления на пластинку $EFKH$, чем на большее число n разделен отрезок $[a, b]$.

Поступая так же со всеми прямоугольниками, мы найдем, что приближенно модуль силы давления определяется интегральной суммой

$$P \approx \gamma \sum_{i=0}^{n-1} x_i f(x_i)\,\Delta x_i$$

(постоянная величина γ входит в каждое слагаемое, а потому вынесена за знак суммы). При составлении интегральной суммы мы точку на каждом частичном отрезке взяли в его левом конце. Как известно, на предел интегральной суммы это не повлияет.

За точное значение модуля силы давления примем предел, к которому стремится эта сумма, когда наибольший из отрезков Δx_i стремится к нулю, а число n этих отрезков неограниченно увеличивается

$$P = \gamma \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} x_i f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Так как $\Delta x_i \to 0$, то каждое произведение $x_i f(x_i)\,\Delta x_i$ — величина бесконечно малая, и здесь опять-таки мы имеем дело с определением предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин.

На основании формулы (10,2) мы можем записать, что модуль силы давления жидкости на вертикально погруженную в нее стенку равен

$$P = \gamma \int_b^a x f(x)\,dx. \qquad (11,8)$$

К задаче 11,10

Задача 11,10. Прямоугольная пластинка со сторонами *a дм* и *h дм* вертикально погружена в жидкость удельного веса γ. Сторона длиной *a дм* лежит на поверхности жидкости. Определить численное значение силы давления, испытываемого каждой стороной пластинки.

Решение. Применим формулу (11,8). В ней нижний предел интегрирования нужно взять равным нулю, верхний равен h, $f(x)=a$, а потому модуль силы давления

$$P=\gamma\int_0^h axdx=\gamma\frac{ah^2}{2}\ \text{кг}$$

(давление получилось в килограммах, так как стороны прямоугольника выражены в дециметрах).

При решении задачи значительно большую пользу принесло бы повторение рассуждений, проведенных в предыдущей задаче, чем использование готовой формулы (11,8).

Задача 11,11. При условиях предыдущей задачи определить, на какой глубине надо разделить прямоугольник горизонтальной прямой, чтобы давления на каждую из двух частей прямоугольника были равны между собой.

Решение. Проведем прямую, разделяющую прямоугольник на глубине $c\,(c<h)$. Тогда давление p_1 на верхнюю часть прямоугольника численно равно

$$p_1=\gamma\int_0^c axdx,$$

а давление p_2 на нижнюю его часть

$$p_2=\gamma\int_c^h axdx.$$

По условию задачи эти числа должны быть между собой равны, а потому

$$\gamma\int_0^c axdx=\gamma\int_c^h axdx.$$

Сокращая на $a\gamma$ и интегрируя, получим уравнение для определения неизвестной величины c:

$$\frac{c^2}{2}=\frac{h^2-c^2}{2};\ 2c^2=h^2;\ c=\frac{\sqrt{2}}{2}h.$$

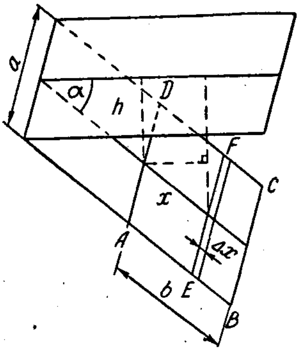
Задача 11,12 (для самостоятельного решения).

Определить численное значение силы давления жидкости удельного веса γ на одну из сторон прямоугольной пластинки, наклоненной к поверхности жидкости под углом α, причем верхняя сторона

AD длиной a *дм* расположена горизонтально на глубине h от поверхности жидкости. Длина другой стороны AB прямоугольника — b *дм* (см. чертеж).

Указание. На прямоугольнике $ABCD$ взять полоску шириной Δx на расстоянии x от стороны AD. Площадь этой полосы равна $a \cdot \Delta x$, а ее расстояние от поверхности жидкости равно $h + x \sin\alpha$. Давление, оказываемое жидкостью на эту полоску, приближенно равно

$$\gamma (h + x \sin\alpha) a\Delta x.$$



К задаче 11,12

Ответ. $p = \frac{ab\gamma}{2}(2h + b \sin\alpha)$ *кг.*

Задача 11,13 (для самостоятельного решения).

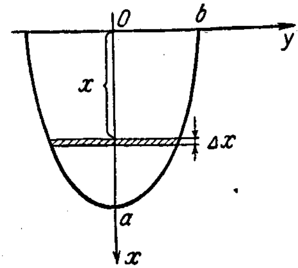
Плотина имеет форму половины эллипса, малая ось которого $2b$ лежит на поверхности жидкости. Большая ось эллипса — $2a$. Вычислить численное значение давления воды на плотину.

Указание. Если расположить оси, как это сделано на чертеже, то эллипс определится уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Вырежем полоску на глубине x шириною Δx. Площадь этой полоски равна $2y\Delta x$. Величину y определить из уравнения эллипса. Принять удельный вес воды $\gamma = 1$.

Численное значение давления равно

$$\frac{2b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$



К задаче 11,13

Можно было сразу воспользоваться готовой формулой (11,8), в которой взять $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Ответ. Если полуоси эллипса выражены в дециметрах, то численно давление получится в килограммах

$$p = \frac{2}{3}a^2 b \text{ кг.}$$

Если заменить эллипс половиной круга $(a = b)$ то

$$p = \frac{2}{3}a^3 \text{ кг.}$$

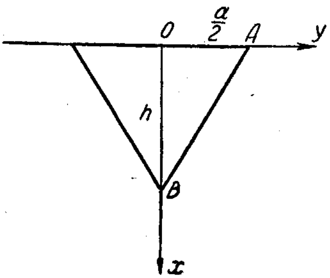
Задача 11,14 (для самостоятельного решения).

Найти численное значение давления воды ($\gamma = 1$) на треугольные щиты, показанные на чертеже.

Указание. а) Уравнение AB: $y = \frac{a}{2} - \frac{a}{2h}x$;

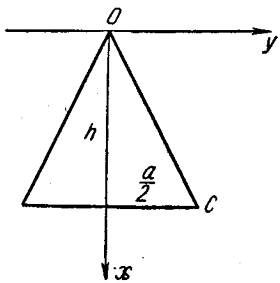
б) уравнение OC: $y = \frac{a}{2h}x$.

Ответ. а) $p = \frac{ah^2}{6}$; б) $p = \frac{ah^2}{3}$.



а

К задаче 11,14 а

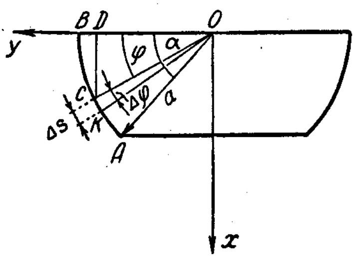


б

К задаче 11,14 б

Задача 11,15 (для самостоятельного решения).

Поперечное сечение стенки резервуара, наполненного водой, представляет дугу AB круга радиуса a *дм*, центр O которого лежит на поверхности воды, а центральный угол AOB равен α. Определить давление воды на эту дугу (см. чертеж).



К задаче 11,15

Указание. 1. Дугу AB разделить на n частей.

2. Учесть, что давление направлено по перпендикуляру к поверхности и численно равно произведению длины элемента Δs на его глубину DC и на удельный вес γ жидкости.

3. Длина дуги окружности равна произведению ее радиуса на число радианов, содержащихся в центральном угле, опирающемся на эту дугу, т. е.

$$\Delta s = a\Delta\varphi,$$

$DC = a\sin\varphi$; $\gamma = 1$, а потому на элемент Δs дуги AB численное значение силы давления $\overline{\Delta p}$ приближенно равно

$$\Delta p = (a\sin\varphi)\, a\,\Delta\varphi = a^2 \sin\varphi\,\Delta\varphi.$$

4) Найти проекции ΔX и ΔY силы $\overline{\Delta p}$ на оси Ox и Oy:

$$\Delta X = (a^2 \sin\varphi\, \Delta\varphi) \cos(90° - \varphi) = a^2 \sin^2\varphi\, \Delta\varphi;$$

$$\Delta Y = a^2 \sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi.$$

$$X = \int_0^\alpha a^2 \sin^2\varphi\, d\varphi; \quad Y = \int_0^\alpha a^2 \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi; \quad p = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

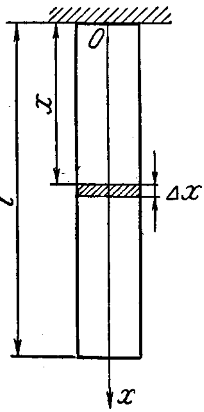
Как и в задаче 11,9, читателя должна заинтересовать причина, заставляющая перейти от элементарных давлений $\overline{\Delta p}$ к их проекциям, затем суммировать не элементарные давления, а их проекции, и только найдя их, определить численное значение самого давления.

Ответ. $p = \frac{a^2}{4}\sqrt{4\sin^4\alpha + (2\alpha - \sin 2\alpha)^2}$ *кг.*

Задача 11,16. Согласно закону Гука, удлинение Δl стержня длиной l постоянного сечения F под действием растягивающей нормальной силы P определяется формулой

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \tag{11,9}$$

где E — модуль упругости материала, из которого сделан стержень.



К задаче 11,16

Определить удлинение свободно подвешенного цилиндрического стержня длиной l *см* и поперечного сечения F *см*^{2} под действием его собственного веса. Удельный вес материала стержня γ *г/см*^{3}.

Решение. Разделим стержень на элементарные цилиндрические стержни. Эти элементы будут испытывать различные растяжения, так как они находятся под действием различных сил веса.

Вычислим по формуле (11,9) растяжение элементарного цилиндра высотой Δx, находящегося на расстоянии x от места подвеса. На него действует сила веса, равная весу нижележащей части стержня. Длина этой части равна $(l - x)$, объем ее — $(l - x)F$, а вес — $(l - x)F\gamma$. Полагая в формуле (11,9) $l = \Delta x$; $P = (l - x)F\gamma$, получим, что растяжение элементарного цилиндра приближенно равно

$$\frac{(l - x)F\gamma\,\Delta x}{EF} = \frac{(l - x)\gamma\,\Delta x}{E}.$$

Суммируя растяжения этих элементарных цилиндров и переходя к пределу при условии, что число этих элементарных цилиндров неограниченно возрастает, а высота Δx каждого из них неограниченно убывает, общее удлинение стержня найдем по формуле

$$\Delta l = \int_0^l \frac{(l-x)\gamma}{E}\,dx = -\frac{\gamma}{E}\frac{(l-x)^2}{2}\Big|_0^l.$$

Ответ.

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E}\ \text{см}.$$

Задача 11,17 (для самостоятельного решения).

Материальная точка движется по прямой с переменной скоростью, являющейся заданной непрерывной функцией времени t: $v = v(t)$. Определить путь, пройденный телом от момента времени t_0 до момента T.

Указание. Промежуток времени $[t_0, T]$ разделить на n произвольных частей. Длина каждого промежутка времени

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}.$$

В каждом частичном промежутке времени выберем произвольный момент — τ_k. (Момент τ_k может совпадать и с любым из концов отрезка времени Δt_k).

Вычислим скорость v в этот момент времени. Получится число $v(\tau_k)$.

Принимаем, что за время Δt_k движение происходит равномерно. Поскольку при равномерном прямолинейном движении путь, пройденный телом, равен произведению скорости на время, путь, пройденный за время Δt_k, будет приближенно равен $v(\tau_k)\Delta t_k$. Сложим пути, пройденные за все частичные отрезки времени.

Приближенное значение пути

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k. \tag{11,10}$$

За точное значение пути S следует принять предел интегральной суммы (11,10), когда наибольший из промежутков времени Δt_k стремится к нулю:

$$S = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k.$$

На основании формулы (10,2) можно записать, что

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt. \tag{11,11}$$

Таким образом, если задан закон изменения скорости, то путь, пройденный телом, вычисляется с помощью определенного интеграла по формуле (11,11).

Когда $\max \Delta t_k \to 0$, то произведение $v(\tau_k)\,\Delta t_k$ — величина бесконечно малая. Определение искомой величины и в этой задаче свелось к отысканию предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин.

Задача 11,18 (для самостоятельного решения).

Вычислить путь, пройденный свободно падающим в пустоте телом за T секунд, если известно, что скорость v свободного падения в пустоте определяется формулой $v = gt$ (начальную скорость v_0 принимаем равной нулю).

Ответ. $S = \frac{gT^2}{2}$. Если $v_0 \neq 0$, то $v = v_0 + gt$, а $S = v_0 T + \frac{gT^2}{2}$.

Задача 11,19 (для самостоятельного решения).

Дан неоднородный тонкий стержень длиной L. Определить массу этого стержня, зная, что в каждой его точке плотность μ есть заданная непрерывная функция абсциссы x этой точки: $\mu = \mu(x)$.

Указание. Если бы стержень был однородным, то плотность μ во всех его точках была бы величиной постоянной, а его масса, учитывая, что по условию стержень тонкий, была бы равна произведению плотности μ на его длину L, т. е. $m = \mu L$.

Разделить длину стержня на n произвольных частей. Вычислить массу каждой части, считая, что плотность каждой из частей постоянна, сложить полученные массы и перейти к пределу, устремляя к нулю наибольший из частичных отрезков, на которые разделен стержень.

Ответ. $m = \int\limits_0^L \mu(x)\,dx.$

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Теорема о среднем значении.

I. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Краткие сведения из теории

Часто для упрощения вычисления интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{12,1}$$

приходится заменять независимую переменную величину x, полагая, что

$$x = \varphi(t). \tag{12,2}$$

Это приводит к формуле преобразования определенного интеграла при введении новой переменной

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t]\varphi'(t)\,dt. \tag{12,3}$$

При этом предполагается: 1) функция $f(x)$ — непрерывна на отрезке $[a, b]$; 2) функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ — непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$; 3) имеют место равенства $a = \varphi(\alpha)$: $b = \varphi(\beta)$; 4) при изменении новой переменной t от α до β функция $x = \varphi(t)$ изменяется всегда в одном и том же направлении от $\varphi(\alpha) = a$ до $\varphi(\beta) = b$, т. е. функция $x = \varphi(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ должна быть монотонной. (Это требование можно заменить другим: все значения функции $\varphi(t)$ должны находиться на отрезке $[a, b]$).

Из этой справки читатель видит, что замена переменной в определенном интеграле требует осторожности и обязательного выполнения всех перечисленных условий, налагаемых на функцию (12,2). При соблюдении этих требований важно отметить, что замена переменной в определенном интеграле приводит в общем случае к интегралу с новыми пределами интегрирования. Эти пределы находятся так: в (12,2) подставляется сначала нижний предел a заданного интеграла и решается уравнение $a = \varphi(t)$. Значение t, найденное из него, и будет новым нижним пределом α. Если этому уравнению удовлетворяет не одно, а несколько значений t, то за α можно принять любое из них. Затем для определения нового верхнего предела в (12,2) подставляется верхний предел b заданного интеграла и решается уравнение $b = \varphi(t)$. Найденное из этого уравнения значение t будет новым верхним пределом β. Если это уравнение имеет несколько корней, то за β можно принять любой из них. Однако свобода выбора чисел α и β ограничивается требованием, чтобы значения функции $\varphi(t)$ не выходили из отрезка $[a, b]$, в котором определена и непрерывна подынтегральная функция $f(x)$ (см. задачу 12,1).

Сделав замену переменной, изменив пределы интегрирования, после вычисления преобразованного определенного интеграла нет необходимости переходить к старой переменной, как это мы делали при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной.

Еще раз подчеркиваем, что подстановка (12,2) должна упростить вычисление интеграла (12,1).

Укажем также, что несоблюдение всех указанных требований, налагаемых на функцию (12,2), может привести к грубым ошибкам.

Во многих случаях приходится вместо подстановки (12,2), которая переменную интегрирования x заменяет функцией новой переменной, вводить новую переменную t как функцию старой переменной x, т. е. полагать

$$t = \omega(x).$$

В этом случае новые пределы интегрирования $\alpha = \omega(a)$, а $\beta = \omega(b)$. Если соотношение $t = \omega(x)$ разрешить относительно x, то окажется, что $x = \varphi(t)$, причем необходимо, чтобы для функции $\varphi(t)$ были соблюдены все указанные выше условия.

Задача 12,1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Решение. Можно было бы воспользоваться известным из задачи 4,3 вычислением неопределенного интеграла $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ и, применяя формулу (10,2) Ньютона — Лейбница, найти искомый интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a}{a} = \frac{a^2}{2}\arcsin 1 = \frac{a^2\pi}{4}.$$

(Первое слагаемое $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$ обращается в нуль как при верхнем, так и при нижнем пределах).

Вычислим теперь этот же интеграл с помощью замены переменной. Введем подстановку

$$x = a \sin t. \tag{12,4}$$

Прежде всего определим новые пределы интегрирования. Когда $x = 0$, из уравнения $0 = a \sin t$ получаем, что $t = k\pi$. Подставляя же в (12,4) вместо x верхний предел a, получим: $a = a \sin t$; $\sin t = 1$; $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Из всех возможных значений t, удовлетворяющих уравнениям $a \sin t = 0$ и $a = a \sin t$, мы возьмем 0 и $\frac{\pi}{2}$ потому, что на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $x = a \sin t$ удовлетворяет не только первым трем из указанных требований, что очевидно было сразу, но и четвертому, так как на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ она монотонно возрастает и ее значения сплошь заполняют первоначальный отрезок интегрирования $[0, a]$. Вместо этих значений можно было бы взять и любые другие, но такие, чтобы значения функции $x = a \sin t$ не выходили из отрезка $[0, a]$. В качестве таких значений можно взять, например, $\alpha = 2\pi$, $\beta = \frac{5}{2}\pi$. При изменении t от 2π до $\frac{5}{2}\pi$ функция $x = a \sin t$ изменяется от 0 до a. Но взять значения $\alpha = \pi$,

$\beta = \frac{3}{2}\pi$ нельзя, так как тогда функция $x = a\sin t$ принимает значения не на отрезке $[0, a]$, на котором ведется вычисление заданного интеграла, а на отрезке $[0, -a]$.

Подынтегральная функция преобразуется так:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t;\ dx = a\cos t\,dt.$$

Поэтому

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ответы, конечно, совпали.

Задача 12,2. Вычислить $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,dx$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение

$$2ax - x^2 = a^2 - (x^2 - 2ax + a^2) = a^2 - (x - a)^2$$

и введем подстановку

$$x - a = a\sin t;\ x = a + a\sin t; \tag{12,5}$$

$$dx = a\cos t\,dt;\ \sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a\cos t.$$

Подынтегральное выражение будет таким: $\sqrt{2ax - x^2}\,dx = a^2\cos^2 t\,dt$.

Теперь надо не забыть определить новые пределы интегрирования: сначала в подстановку (12,5) подставим нижний предел заданного интеграла $x = 0$, а потом верхний $x = 2a$, и получим: при $x = 0$ $0 = a + a\sin t$; $\sin t = -1$; $t = -\frac{\pi}{2}$; при $x = 2a$: $2a = a + a\sin t$; $2 = 1 + \sin t$; $\sin t = 1$; $t = \frac{\pi}{2}$. Решая уравнения $\sin t = -1$ и $\sin t = 1$, мы остановились на значениях $t = -\frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{\pi}{2}$, так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция (12,5) монотонно возрастает и остальным требованиям она также удовлетворяет.

Таким образом, новыми пределами интегрирования будут $-\frac{\pi}{2}$ — нижний предел, $\frac{\pi}{2}$ — верхний. Поэтому

$$\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2}\,dx = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Задача 12,3 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2-2ax+2a^2}}$.

Указание. $x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$.

Подстановка: $x-a=z$.

Пределы интегрирования: при $x=0$ получаем, $z=-a$, при $x=a$ $z=0$. Таким образом, новая переменная z изменяется на отрезке $[-a, 0]$. Интеграл преобразуется к интегралу $\int_{-a}^{0} \frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}}$.

Ответ. $\ln(\sqrt{2}+1)$.

Задача 12,4 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

Указание. Подстановка: $x=z^2$ $(z>0)$.

Определяем новые пределы интегрирования:

при $x=1$ $1=z^2$; $z=1$;

» $x=4$ $4=z^2$; $z=2$.

Новая переменная z изменяется на отрезке $[1; 2]$. Интеграл преобразуется к виду $2\int_1^2 \frac{z^2\,dz}{1+z}$.

Ответ. $1+\ln\frac{9}{4}$.

Задача 12,5. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Указание. Сделать подстановку: $x=\cos\theta$.

Пределы интегрирования:

при $x=0 \quad 0=\cos\theta;\ \theta=\frac{\pi}{2}$;

» $\ x=1 \quad 1=\cos\theta;\ \theta=0$.

Новая переменная изменяется на отрезке $\left[\frac{\pi}{2},\ 0\right]$.

Интеграл приводится к виду $-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$.

(Перемена местами пределов интегрирования меняет знак определенного интеграла на противоположный)

Ответ. $\frac{\pi}{2}-1$.

Задача 12,6. Вычислить $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

Решение. Сделаем подстановку:

$$x=\pi-z. \tag{12,6}$$

Новые пределы интегрирования:

при $x=0 \quad 0=\pi-z;\ z=\pi$;

» $\ x=\pi \quad \pi=\pi-z;\ z=0$.

Таким образом, новая переменная изменяется на отрезке $[\pi,\ 0]$. Подстановка (12,6) поменяла пределы местами. Учитывая, что из (12,6) $dx=-dz$, данный интеграл

$$I=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-z)\sin(\pi-z)}{1+\cos^2(\pi-z)}\,dz=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-z)\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz-\underbrace{\int\limits_0^{\pi}\frac{z\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz.}_{I}$$

Но $\int\limits_0^{\pi}\frac{z\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz$ равен искомому, потому что по сравнению с ним здесь изменилось только название переменной (z вместо x).

Поэтому последнее равенство можно переписать так:

$$I=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz-I,$$

т. е.

$$2I = \pi \int\limits_0^\pi \frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz;\ I = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi \frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos z)\Big|_0^\pi = -\frac{\pi}{2}[\operatorname{arctg}(\cos\pi) - \operatorname{arctg}(\cos 0)] =$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg} 1] = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ответ. $I = \frac{\pi^2}{4}$.

Задача 12,7. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{\frac{3a^2+b^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$.

Решение. Применим подстановку:

$$x^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta. \qquad (12,7)$$

Отсюда следует:

$$2x\,dx = -2a^2\cos\theta\sin\theta\,d\theta + 2b^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta;$$

$$x\,dx = (b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta\,d\theta; \qquad (12,8)$$

$$x^2 - a^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - a^2 = b^2\sin^2\theta + a^2(\cos^2\theta - 1) =$$
$$= b^2\sin^2\theta - a^2\sin^2\theta = (b^2-a^2)\sin^2\theta;$$

$$b^2 - x^2 = b^2 - a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta = b^2(1-\sin^2\theta) - a^2\cos^2\theta =$$
$$= b^2\cos^2\theta - a^2\cos^2\theta = (b^2-a^2)\cos^2\theta;$$

$$\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)} = \sqrt{(b^2-a^2)\sin^2\theta\,(b^2-a^2)\cos^2\theta} =$$
$$= (b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta.$$

При учете (12,8) подынтегральное выражение станет равным $d\theta$. Теперь определим новые пределы интегрирования.

При нижнем пределе $x = \frac{\sqrt{3a^2+b^2}}{2}$ имеем из (12,7):

$$\frac{3a^2+b^2}{4} = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta;$$

$$3a^2+b^2 = 4a^2(1-\sin^2\theta) + 4b^2\sin^2\theta = 4a^2 - 4a^2\sin^2\theta + 4b^2\sin^2\theta;$$

$$b^2 - a^2 = 4(b^2-a^2)\sin^2\theta;\quad \sin^2\theta = \frac{1}{4};\quad \sin\theta = \frac{1}{2};\quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

При верхнем пределе $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, используя (12,7), получим:

$$\frac{a^2+b^2}{2} = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta;$$

$$a^2+b^2 = 2a^2(1-\sin^2\theta) + 2b^2\sin^2\theta;$$

$$a^2+b^2 = 2a^2 - 2a^2\sin^2\theta + 2b^2\sin^2\theta;$$

$$b^2-a^2 = 2(b^2-a^2)\sin^2\theta; \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, новая переменная θ изменяется на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, а исходный интеграл

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \theta \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Ответ. $I = \frac{\pi}{12}$.

Задача 12,8 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

$$1)\ I_1 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}; \quad 2)\ I_2 = \int\limits_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}; \quad 3)\ \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Указания. 1) Подстановка: $x = \frac{1}{\sqrt[4]{t-1}}$. Здесь можно вообще легко избежать подстановки, если подынтегральную функцию представить в виде

$$\frac{1}{x(1+x^4)} = \frac{1+x^4-x^4}{x(1+x^4)} = \frac{1+x^4}{x(1+x^4)} - \frac{x^4}{x(1+x^4)} = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{1+x^4}.$$

Новые пределы интегрирования: 2 и $\frac{17}{16}$;

$$I_1 = -\frac{1}{4}\int\limits_2^{\frac{17}{16}} \frac{dt}{t}.$$

2) Подстановка: $x+6 = z^2$. Новые пределы интегрирования: нижний $z = 3$, верхний $z = 4$; $x - 1 = z^2 - 7$,

Ответ. 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{32}{17}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\frac{16+5\sqrt{7}}{9}$; 3) $\frac{5}{3} - \ln 4$.

Задача 12,9 (для самостоятельного решения).
Вычислить интегралы:

1) $\int_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$ (подстановка: $x = z^2$);

2) $\int_{1}^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2\,dx}{13-6x^3+x^6}$ (подстановка: $x^3 = z$);

3) $\int_{0}^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ (подстановка: $1+x^2 = z^2$).

Ответ. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{12}$; 3) $\frac{58}{15}$.

Задача 12,10 (для самостоятельного решения).

Доказать, что интеграл $I = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ может быть преобразован в интеграл с заданными пределами α и β при помощи подстановки

$$x = \frac{b-a}{\beta-\alpha}t + \frac{a\beta-b\alpha}{\beta-\alpha},$$

и указать подстановку, которая преобразует этот интеграл в интеграл с пределами 0 и 1.

II. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула интегрирования по частям для определенных интегралов имеет вид

$$\int_{a}^{b} u\,dv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\,du \tag{12,9}$$

в предположении, что функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке интегрирования.

Применение формулы (12,9) мало чем отличается от применения соответствующей формулы для неопределенного интеграла. Поэтому мы ограничимся небольшим числом упражнений

Задача 12,11. Вычислить интегралы:

1) $\int_{0}^{1} \arcsin x\,dx$; 2) $\int_{0}^{1} x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. 1) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx = x\arcsin x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$\left|\begin{array}{c|c} u=\arcsin x & du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv=dx & v=x \end{array}\right|$$

$= 1\cdot\arcsin 1 - 0\cdot\arcsin 0 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$, так как

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$2)\ \int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u=\mathrm{arctg}\,x & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=x\,dx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}\,x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Задача 12,12 (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_1^e \ln^2 x\,dx;\quad 2)\ \int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx;\quad 4)\ \int\limits_0^1 (\arcsin x)^2\,dx.$$

Ответ. 1) $e-2$; 2) $\frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}$; 3) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$;

4) $\frac{\pi^2}{4} - 2$.

III. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

Краткие сведения из теории

Вводя понятие об определенном интеграле, мы произвольным образом делили отрезок интегрирования $[a, b]$ на n частей, и в произвольной точке ξ_i каждого частичного отрезка вычисляли значение функции $f(x)$. При этом получались числа $f(\xi_i)$. Очевидно, самым простым способом будет разложение отрезка $[a, b]$ на части, равные между собой. В таком случае длина каждой из них будет равна $\frac{b-a}{n}$, интегральная сумма примет вид

$$\frac{b-a}{n}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)],$$

и ее предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)]=\int_a^b f(x)\,dx,$$

или

$$(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

После деления обеих частей этого равенства на $b-a$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (12,10)$$

Число $\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}$ есть среднее арифметическое чисел $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$, а потому и правую часть $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ формулы (12,10) называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Среднее значение функции $f(x)$ обозначается через $f(c)$, и имеет место формула

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (12,11)$$

которая и выражает теорему о среднем значении. При этом предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Итак, по определению, *среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно определенному интегралу от этой функции, вычисленному в пределах от a до b и разделенному на длину этого отрезка.*

Задача 12,13. Найти среднее значение функции $y=\sin 3x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение. По формуле (12,11), полагая в ней $a = 0$; $b = \frac{\pi}{3}$; $f(x) = \sin 3x$, получим, что среднее значение функции

$$f(c) = \frac{1}{\frac{\pi}{3} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x \, dx = -\frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\cos 3 \frac{\pi}{3} - \cos 0\right] = -\frac{1}{\pi}(\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{\pi}(-1 - 1) =$$

$$= \frac{2}{\pi} = 0{,}6366.$$

Задача 12,14. На отрезке AB длиною a *см* взята точка P. Найти среднее значение S_m площадей прямоугольников, построенных на отрезках AP и PB как на сторонах.

Решение. Примем точку A за начало отсчета. Пусть точка P находится на расстоянии x от A. Тогда $AP = x$, а $PB = a - x$. Площадь прямоугольника, построенного на AP и PB как на сторонах равна $x(a - x)$.

По формуле (12,11), полагая в ней нижний предел равным 0, а верхний a, находим среднее значение площадей

$$S_m = \frac{1}{a}\int_0^a x(a - x)\,dx = \frac{1}{a}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{1}{a}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^2}{6}.$$

Итак, $S_m = \frac{a^2}{6}$ см².

Задача 12,15 (для самостоятельного решения).

Чему равно среднее значение обратных величин всех вещественных чисел, лежащих между a и b $(a < b)$? Рассмотреть частный случай: $b = 2a$.

Указание. Обозначить обратную величину вещественного числа через $\frac{1}{x}$, а искомую — через m.

Ответ. $m = \frac{1}{b - a} \ln \frac{b}{a}$. При $b = 2a$: $m = \frac{1}{a} \cdot 0{,}69315$ $(\ln 2 = 0{,}69315)$.

Задача 12,16 (для самостоятельного решения).

Если тело падает свободно вблизи поверхности земли без начальной скорости, то его скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2gS}$, где S — путь, пройденный от начала падения. Найти среднюю скорость v_m на пути S_1, пройденном от начала падения.

Ответ. $v_m = \frac{1}{S_1}\int_0^{S_1} \sqrt{2gS}\,dS$; $\quad v_m = \frac{2}{3} v_1$, где $v_1 = \sqrt{2gS_1}$ — скорость в момент, когда пройденный путь равен S_1.

Задача 12,17 (для самостоятельного решения).

Найти среднюю длину ρ_m радиусов кривизны одной арки циклоиды.

Уравнение циклоиды

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Указание. Радиус кривизны циклоиды равен $4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|$ (см. И. А. Каплан. «Практические занятия по высшей математике», ч. II, стр. 291, формула (36,27).

Ответ. $\rho_m = \frac{2a}{\pi}$.

Задача 12,18. В динамомашине электродвижущая сила переменного тока выражается формулой

$$E = E_0 \sin\frac{2\pi t}{T},$$

где T — продолжительность периода в *сек*;

E_0 — максимальное значение (амплитуда) электродвижущей силы.

Определить среднее значение E_m электродвижущей силы и среднее значение ее квадрата $(E^2)_m$ в течение одного полупериода от $t = 0$ до $t = \frac{T}{2}$.

Ответ. 1) $E_m = 0{,}6366E_0$; 2) $(E^2)_m = \frac{E_0^2}{2}$.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ[1]

Содержание: Несобственные интегралы по бесконечному интервалу и от разрывных функций. Принцип сравнения несобственных интегралов с положительными подынтегральными функциями.

Краткие сведения из теории

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ во всем предыдущем рассматривался при следующих предположениях: 1) отрезок $[a, b]$ интегрирования конечен и 2) подынтегральная функция на этом отрезке непрерывна. При таких предположениях этот интеграл называется интегралом в «собственном смысле», или «собственным» интегралом. В том же случае, когда отрезок интегрирования бесконечен или

[1] Без ущерба для последующего задачи этого практического занятия могут решаться после шестнадцатого практического занятия.

конечен, но подынтегральная функция на этом отрезке терпит разрыв, интеграл называется интегралом в «несобственном смысле», или «несобственным» интегралом.

Каждый из названных двух случаев рассматривается на этом практическом занятии.

I. ИНТЕГРАЛ, РАСПРОСТРАНЕННЫЙ НА БЕСКОНЕЧНЫЙ ПРОМЕЖУТОК (НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ)

Определение интеграла с бесконечными пределами

В этом разделе считается, что $f(x)$ в промежутке $[a, +\infty]$ непрерывна. Интегралом от $f(x)\,dx$ между пределами a и $+\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{13,1}$$

называется предел интеграла от $f(x)\,dx$, взятого в пределах a и N, когда N стремится к $+\infty$, т. е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx. \tag{13,2}$$

Интеграл (13,1) с бесконечным верхним пределом — *несобственный* интеграл.

Если существует определенный конечный предел в правой части (13,2), то несобственный интеграл (13,1) называется *сходящимся*, а функция $f(x)$ в этом случае называется интегрируемой на бесконечном промежутке $[a, +\infty]$.

Если же этот предел бесконечен или не существует, то интеграл называется *расходящимся*.

Интеграл $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ определяется аналогично:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)\,dx, \tag{13,3}$$

а интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ N\to+\infty}} \int_A^N f(x)\,dx, \tag{13,4}$$

при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{13,5}$$

где a — любое число.

Если удается найти первообразную функцию $F(x)$ для подынтегральной $f(x)$, то записи можно расположить так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int\limits_a^N f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} F(x)\Big|_a^N =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}[F(N)-F(a)] = \lim_{N\to+\infty} F(N) - F(a). \qquad (13{,}6)$$

Очевидно, что несобственный интеграл (13,1) существует, если существует предел $\lim\limits_{N\to+\infty} F(N)$.

Введем обозначение $\lim\limits_{N\to+\infty} F(N) = F(+\infty)$ (и аналогично: $\lim\limits_{N\to-\infty} F(N) = F(-\infty)$).

Тогда (13,6) можно переписать так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} F(N) - F(a) = F(+\infty) - F(a).$$

Разность же $F(+\infty)-F(a)$ можно записать в виде $F(x)\Big|_a^{+\infty}$, в таком случае вычисления располагают следующим образом:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \qquad (13{,}7)$$

понимая, что $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Если отыскать первообразную функцию для $f(x)$ трудно или если она в конечном виде не может быть вычислена, то существуют признаки, позволяющие решить вопрос о сходимости или расходимости интеграла (13,1).

Признаки сравнения

1. Если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ для всех значений x из полуотрезка $[a, +\infty]$ не принимают отрицательных значений и к тому же

$$f(x) \leqslant \varphi(x), \qquad (13{,}8)$$

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится, если расходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

2. Если при $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = c, \qquad (13{,}9)$$

причем $c > 0$, $c \neq \infty$ и $f(x) \neq 0$ для всех достаточно больших x, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

3. Если сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} kf(x)dx$, где k — величина постоянная.

Эти признаки распространяются и на интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, но относятся только к указанным выше функциям.

4. Для решения вопроса о сходимости интеграла (13,1) в том случае, когда функция $f(x)$ является знакопеременной в промежутке $[a, +\infty)$, можно применить такую теорему:

Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ от абсолютной величины функции $f(x)$ сходится, то сходится и интеграл (13,1).

Задача 13,1. Вычислить

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}. \tag{13,10}$$

Решение. По определению, применяя запись (13,7), полагая $p \neq 1$, имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}}\Bigg|_1^{+\infty} = -\frac{1}{p-1}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-1}} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p > 1; \\ +\infty, & \text{если } p < 1. \end{cases}$$

Значит, при $p > 1$ интеграл сходится, а при $p < 1$ — расходится. (Первый ответ получен так: если $p > 1$, то $p - 1 > 0$, и если $x \to +\infty$, то $x^{p-1} \to +\infty$, а дробь $\frac{1}{x^{p-1}} \to 0$.

Второй ответ объясняется так: если $p < 1$, то $p - 1 < 0$, а $1 - p > 0$. Тогда $x^{p-1} = \frac{1}{x^{1-p}} \to 0$, когда $x \to +\infty$, т. е. величина x^{p-1} — бесконечно малая. Поэтому величина $\frac{1}{x^{p-1}}$, которая нас интересует, — величина бесконечно большая).

Осталось рассмотреть случай $p = 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Bigg|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty.$$

Таким образом, при $p=1$ интеграл (13,9) расходится. Так как нам придется обращаться к этому интегралу, то сделаем общее заключение.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится, когда $p\leqslant 1$.

Этим интегралом часто пользуются, применяя признак сравнения, для решения вопроса о сходимости интеграла.

Задача 13,2. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\,dx;\quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{0} e^{px}\,dx. \tag{13,11}$$

Решение. 1) Интеграл $I_1=\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\,dx=-\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_0^{+\infty}=$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-px}-1\right)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & \text{если } p>0;\\ +\infty, & \text{если } p<0.\end{cases}$$

При $p>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-px}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{px}}=0$, так как $e^{px}\to+\infty$ при $x\to+\infty$. При $p<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-px}=+\infty$.

Заключение. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-px}\,dx$ при $p>0$ сходится, а при $p<0$ расходится.

2) Второй из интегралов (13,11) сводится к первому подстановкой $x=-y$ (сделайте это преобразование самостоятельно), а потому $\int\limits_{-\infty}^{0}e^{px}\,dx$ сходится при $p>0$ и расходится при $p<0$.

Задача 13,3. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x-\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

Можно было бы записи вести так:

$$\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}(-\infty)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

Задача 13,4. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx$.

Решение. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{+\infty} = -\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x + 1.$

Но $\cos x$ при $x \to +\infty$ не стремится ни к какому пределу, совершая колебания от -1 к $+1$, а потому интеграл расходится. Этот случай отличается от рассмотренного в задаче 13,2 при $p < 0$ тем, что там имелся бесконечный предел, а здесь его вовсе нет.

Записи в этом примере можно было вести и так:

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{+\infty} = -\cos(+\infty) + 1,$$

но $\cos(+\infty)$ числового значения не имеет.

Задача 13,5. Решить вопрос о сходимости интеграла $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx$ и вычислить его $(a > 0)$.

Решение. Вопрос о сходимости этого интеграла решается просто. Так как $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\, dx$ при $a > 0$ сходится (см. задачу 13,2), а $|e^{-ax} \sin bx| \leqslant e^{-ax}$, то на основании признака сравнения сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |e^{-ax} \sin bx\, dx|$. Применяя пункт 4 (стр. 191), заключаем, что сходится и рассматриваемый интеграл. Требуется не только решить вопрос о сходимости этого интеграла принципиально, но и вычислить его.

Пользуясь справочником (а этого избегать не следует), или применяя дважды интегрирование по частям, легко показать, что для функции $e^{-ax} \sin bx$ первообразная функция

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}.$$

Поэтому

$$I = -\lim_{x \to +\infty} \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} + \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

так как под знаком предела числитель дроби — величина ограниченная, а $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-ax} = 0$ при $a > 0$. Величина же $\frac{b}{a^2 + b^2}$ есть $F(0)$.

Задача 13,6 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$.

Ответ. $\frac{a}{a^2+b^2}$.

Задача 13,7 (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2ab}$.

Задача 13,8 (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Указание. Воспользуйтесь справочником для вычисления неопределенного интеграла $\int \frac{dx}{1+x^4}$ или найдите первообразную функцию самостоятельно.

Должно получиться

$$F(x)=\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right].$$

Ответ. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Задача 13,9. Вычислить $I_n=\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ ($n>0$ и целое). (Индекс n у I_n равен показателю степени буквы x в подынтегральной функции).

Решение. Применим формулу интегрирования по частям

$$I_n=\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx=$$
$$\underline{\left|\begin{array}{l|l} u=x^n & du=nx^{n-1}\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx & v=-e^{-x}\end{array}\right|}$$
$$=-\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x}+nI_{n-1}.$$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x}$ применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} =$$
$$= \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Таким образом, $I_n = nI_{n-1}$. Применяя последовательно эту рекуррентную формулу, найдем

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = n(n-1)(n-2)I_{n-3} = \ldots =$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1\cdot I_0 = n!I_0.$$

Но, как легко видеть, $I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\lim\limits_{x\to+\infty}[e^{-x} - 1] = 1$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

Таким образом,

$$I_n = n!$$

Задача 13,10. Доказать, что $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится.

Решение. Этот интеграл имеет важное значение в теории вероятностей и называется интегралом вероятностей. В данном случае $\int e^{-x^2}\,dx$ через элементарные функции не выражается.

Для решения поставленного вопроса используем признак сравнения. Для этого рассмотрим выражение $x^2 - 2x + 1$. Ясно, что

$x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$; $-2x + 1 \geqslant -x^2$, или $-x^2 \leqslant -2x + 1$, а потому $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$, или $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x}\cdot e$.

Из задачи 13,2 следует, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ сходится, значит, на основании п. 3 (стр. 191) сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot e\,dx$.

А так как $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x}\cdot e$, то на основании признака сравнения п. 1 (стр. 190) заключаем, что сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Заменяя в этом интеграле x на $-y$, приходим к выводу, что сходится и $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$ (название переменной интегрирования не изменяет величину определенного интеграла). Из сходимости рассмотренных двух интегралов следует, что сходится также и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Задача 13,11 (для самостоятельного решения).

Доказать, что интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{x}{c^2+x^2}\,dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{c^2+x^2}$ расходятся.

Указание. Вычислить первообразные функции.

После того как доказана расходимость первого интеграла, расходимость второго легко показать на основании признака сравнения.

Задача 13,12 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx;\quad 2)\ \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx.$$

Указание. 1) Интегрировать по частям и принять во внимание, что $-\frac{1}{2}\frac{x}{(1+x)^2}\Big|_{0}^{+\infty} = 0$.

2) Положить $x = t^2$. Получится $2\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}$ и интегрировать по частям.

Ответ. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

Задача 13,13. Доказать, что $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ расходится.

Решение. Воспользуемся формулой (13,9). Сравним заданный интеграл с интегралом (13,10) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, в котором подынтегральная функция равна $\frac{1}{x^p}$.

Полагаем, что в (13,9) $\varphi(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, а $f(x) = \frac{1}{x^p}$ (при $x \geqslant 1$ $\varphi(x) > 0$ и $f(x) > 0$ формула (13,9) применима), тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} x^{p-1}\cdot \operatorname{arctg} x.$$

Определим теперь p так, чтобы этот предел был конечным и не равным нулю. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, то определяемый предел будет иметь конечное значение, не равное нулю, только при $p-1=0$, т. е. при $p=1$ $\left(\text{и этот предел будет равен } \frac{\pi}{2}\right)$.

Но при $p=1$ функция $f(x)=\frac{1}{x}$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, а потому расходится и исследуемый интеграл (см. п. 2, стр. 190).

Решим две задачи физики, которые приводят к вычислению интеграла по бесконечному промежутку.

Задача 13,14. В начале координат O находится масса m, которая притягивает по закону Ньютона с силой, модуль которой $F=\frac{m}{x^2}$, материальную точку M единичной массы, находящуюся на оси Ox на расстоянии x от начала координат.

Вычислить работу A, которую произведет эта сила при перемещении точки M в бесконечность из положения $x=a$.

Под перемещением точки в бесконечность следует понимать удаление ее на такое расстояние, что сила $\bar{F}$ уже не оказывает на нее действия.

Решение. Так как сила притяжения направлена к началу координат, т. е. против движения, то работа будет отрицательной. На основании формулы (11,5), принимая верхний предел равным $+\infty$, получаем

$$A=\int\limits_a^{+\infty} -\frac{m}{x^2}\,dx = \frac{m}{x}\Bigg|_a^{+\infty} = -\frac{m}{a}.$$

Задача 13,15. Согласно закону Био—Савара, модуль силы $\bar{F}$, с которой на магнитный полюс массы 1 действует конечный прямолинейный отрезок тока, вычисляется по формуле

$$F=\int\limits_{S_1}^{S_2} \frac{aI}{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}\,ds,$$

где I — сила тока;

a — расстояние от магнитного полюса до прямолинейного отрезка, по которому протекает ток;

ds — элемент тока.

Вычислить модуль силы $\bar{F}$ в предположении, что проводник имеет бесконечно большую длину.

Решение. Прежде всего сделаем оговорку: проводников бесконечно большой длины не бывает. Если проводник очень длинный, то его приближенно можно рассматривать как бесконечно большой. В этом случае модуль силы $\overline{F}$

$$F=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{al}{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}\,ds.$$

Легко показать, что подстановка $s=a\operatorname{tg}t$ приведет задачу к вычислению интеграла

$$F=\frac{l}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\frac{l}{a}\sin t\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{l}{a}\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2l}{a}.$$

Задача 13,16 (для самостоятельного решения).

Исследовать сходимость интегралов:

$$1)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}};\quad 2)\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5}}.$$

Указание. Каждый из интегралов представить в виде суммы двух интегралов, из которых первый берется по интервалу $(0,1)$, а второй — по интервалу $(1,\ +\infty)$.

За интеграл сравнения взять $(13,10)$[1], $f(x)=\frac{1}{x^p}$, а $\varphi(x)$ — подынтегральная функция.

В первом интеграле $\sqrt{x^3+5x+3}=x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}$, во втором $\sqrt[3]{x^2+5}=x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^2}}$.

При отыскании предела $(13,9)$ для первого интеграла окажется, что он имеет конечное и отличное от нуля значение при $p=\frac{3}{2}$, а для второго интеграла $p=\frac{2}{3}$. Поэтому, используя интеграл сравнения $(13,10)$ и п. 2 (стр. 191), заключаем, что первый интеграл сходится, а второй расходится.

---

[1] Поэтому и следует интервал интегрирования $(0,\ +\infty)$ представить в виде суммы двух интервалов: $(0,\ 1)$ и $(1,\ +\infty)$.

II. ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

а) Может оказаться, что в интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{13,12}$$

функция $f(x)$ неограниченно возрастает, т. е. $f(x) \to \pm\infty$ когда x приближается к одному из пределов интегрирования.

Если это имеет место, когда $x \to b$, а $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ определяется так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0} F(b-\varepsilon) - F(a). \tag{13,13}$$

Аналогично находят этот интеграл и в том случае, когда при $x \to a$ подынтегральная функция $f(x) \to \pm\infty$.

При этом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b} =$$
$$= F(b) - \lim_{\varepsilon\to+0} F(a+\varepsilon). \tag{13,14}$$

Если в (13,13) и (13,14) конечные пределы существуют, то интеграл (13,12) называется сходящимся. Если же эти пределы бесконечны или вовсе не существуют, то интеграл (13,12) называется расходящимся.

Таким образом, в обоих рассматриваемых случаях отбрасывают тот конец отрезка интегрирования, на котором подынтегральная функция перестает быть ограниченной, и переходят к пределу.

б) Если подынтегральная функция перестает быть ограниченной внутри отрезка интегрирования, например, при $x = c$, то эту точку «вырезают», а интеграл (13,12) определяют в предположении, что $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_{c+\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon\to+0} F(c-\varepsilon) - F(a) +$$
$$+ F(b) - \lim_{\varepsilon\to+0} F(c+\varepsilon). \tag{13,15}$$

Если пределы в (13,15) существуют и конечны, то интеграл (13,12) называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Задача 13,17. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. При $x \to 0$, т. е. при приближении x к нижнему пределу, подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ неограниченно возрастает. Здесь $x = 0$ особая точка. По (13,14) имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 \cdot 1 - \lim_{\varepsilon \to +0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$$

Интеграл сходящийся.

Задача 13,18. Вычислить $\int\limits_0^2 \frac{dx}{2-x}$.

Решение. Когда x приближается к верхнему пределу ($x \to 2$), подынтегральная функция $\frac{1}{2-x} \to +\infty$. Точка $x = 2$ — особая. На основании (13,13) имеем

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon \to +0} [-\ln(2-x)]\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to +0} \ln(2-2+\varepsilon) + \ln 2 = -\lim_{\varepsilon \to +0} \ln(+\varepsilon) + \ln 2 = +\infty.$$

Интеграл расходящийся.

Задача 13,19 (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}};\quad 2)\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad 3)\ \int\limits_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$$

Особые точки: 1) $x = 2$; 2) $x = 1$; 3) $x = 1$.

Ответ. 1) $2\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) интеграл расходится. Первообразная функция $\ln \ln x$.

Задача 13,20 (для самостоятельного решения).

Доказать, что интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ и $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$, где $a < b$, а $p = \text{const}$, сходятся при $p < 1$ и расходятся при $p \geqslant 1$.

Задача 13,21. Вычислить $I = \int\limits_0^1 \ln x\, dx.$

Решение. Здесь особенность при $x = 0$. Интеграл заменим по формуле (13,14).

$$I = \int\limits_0^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0} [x \ln x - x]\Big|_\varepsilon^1 =$$
$$= -1 - \lim_{\varepsilon\to+0} (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon).$$

Но $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$ $\left(\text{применить правило Лопиталя к } \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \ln \varepsilon = = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}\right)$, а потому $I = -1$.

Задача 13,22. Вычислить: 1) $I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - x - 1}}$;

2) $I = \int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$

Решение. 1) Когда x приближается к нижнему пределу, подынтегральная функция $\frac{1}{x\sqrt{2x^2 - x - 1}}$ неограниченно возрастает. Особая точка $x = 1$.

Отыщем первообразную функцию для подынтегральной с помощью подстановки $x = \frac{1}{z}$. Окажется, что $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - x - 1}} = = -\arcsin \frac{x + 2}{3x}$;

$$I = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\sqrt{2x^2 - x - 1}} = -\lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin \frac{x + 2}{3x}\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$
$$= -\arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

2) Решите эту задачу самостоятельно.

Ответ. $\frac{\pi^2}{8}$.

Чтобы закончить практическое занятие, рассмотрим пример, в котором подынтегральная функция неограниченно возрастает при некотором значении x внутри отрезка интегрирования.

Задача 13,23. Вычислить $\int_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Внутри отрезка интегрирования $[-8,27]$ при $x\to 0$ подынтегральная функция неограниченно возрастает ($x=0$ — особая точка). «Вырежем» эту точку, и тогда по (13,15)

$$\int_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-8}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{+\varepsilon}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-8}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{+\varepsilon}^{27}=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon)^{\frac{2}{3}}-(-8)^{\frac{2}{3}}\right)+\frac{3}{2}\left(27^{\frac{2}{3}}-\lim_{\varepsilon\to+0}(+\varepsilon^{\frac{2}{3}})\right)=$$

$$=\frac{3}{2}(-4+9)=\frac{3}{2}\cdot 5=\frac{15}{2}.$$

Задача 13,24. Вычислить $I=\int_{-2}^{2}\frac{4x^3}{x^4-1}\,dx$.

Решение. Здесь на отрезке интегрирования $[-2,2]$ две точки: $x=-1$ и $x=+1$, при приближении к которым подынтегральная функция неограниченно возрастает. Интеграл надо расписать так:

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-2}^{-1-\varepsilon}\frac{4x^3}{x^4-1}\,dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{4x^3}{x^4-1}\,dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{4x^3}{x^4-1}\,dx.$$

Вычислять эти пределы не имеет смысла, так как первообразная функция $\ln(x^4-1)$ обращается в бесконечность в особых точках. Рассматриваемый интеграл расходится.

Задача 13,25 (для самостоятельного решения).

Доказать, что интеграл $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ расходится, а интеграл $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)(b-x)}=\pi$, причем $a<b$.

ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Приближенное вычисление интегралов: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона (формула парабол).

Краткие сведения из теории

Известно, что *всякая непрерывная функция имеет первообразную*. Однако это утверждение имеет только теоретическое значение. Для широкого класса элементарных функций первообразная функция уже не является элементарной и не может быть определена их конечной комбинацией. К таким функциям относятся, например,

$$\frac{\sin x}{x},\ \frac{1}{\ln x},\ e^{x^2},\ \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}.$$

В тех случаях, когда первообразная функция для подынтегральной, хотя и существует, но не может быть вычислена, пользуются способами приближенного вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Программа предусматривает овладение только тремя такими способами.

1. Способ прямоугольников. Отрезок интегрирования делится на n равных частей точками деления

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Длина каждой такой части равна $h = \frac{b-a}{n}$.

Эта величина называется шагом интегрирования.

В каждой точке деления вычисляются значения подынтегральной функции $f(x)$, т. е. значения

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_{n-1}).$$

Формула для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ по этому способу называется формулой прямоугольников. Она записывается так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right]. \quad (14{,}1)$$

2. Способ трапеций. В этом способе отрезок $[a,\ b]$ интегрирования делится также на n равных частей. С прежними обозначениями формула для приближенного вычисления интеграла выглядит так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\{f(x_0) + f(x_n) + 2\left[(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right]\}.$$

Если $\sum_1 = f(x_0) + f(x_n)$, а $\sum_2 = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(\sum\nolimits_1 + 2\sum\nolimits_2\right). \quad (14{,}2)$$

Эта формула называется формулой трапеций.

3. **Способ парабол** (способ Симпсона). Здесь отрезок интегрирования делится на четное число равных частей. Обозначим это число через $2n$, точки деления $[a, b]$ — через

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b,$$

а значения подынтегральной функции в этих точках — через

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}.$$

Формула для приближенного вычисления определенного интеграла в этом случае записывается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{2n-2})]$$

или, если $\sum_1 = y_0 + y_{2n}$; $\sum_2 = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}$; $\sum_3 = y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{2n-2}$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(\sum\nolimits_1 + 4\sum\nolimits_2 + 2\sum\nolimits_3\right). \qquad (14,3)$$

Формула (14,3) называется формулой Симпсона. Оценкой погрешности, возникающей при использовании этих формул, мы заниматься не будем. Отметим, что формула Симпсона дает точность значительно большую, чем формула (14,2) трапеций при одном и том же шаге.

Рекомендации. 1) При вычислениях следует пользоваться не логарифмической линейкой, а арифмометром или электрической клавишной машиной. Даже в решенных примерах необходимо выполнять все выкладки, а не пользоваться «готовыми» числами.

2) Следует иметь пятизначные таблицы тригонометрических функций, натуральных и десятичных логарифмов, значений обратных чисел и их квадратов.

Очень удобными являются «Пятизначные математические таблицы» Б. И. Сегала и К. А. Семендяева (конечно, можно пользоваться и другими).

Обозначения. Искомый интеграл будем обозначать символом I_k, где индекс k указывает число равных частей, на которые разделен отрезок интегрирования.

Для того, чтобы оценить точность различных способов, мы вычислим сначала с помощью указанных способов интегралы, значения которых известны. Затем уже применим эти способы к вычислению интегралов, значения которых неизвестны.

Задача 14,1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_0^1 e^x\,dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на 8 частей.

Решение. Точное значение вычисляемого интеграла с пятью верными знаками $\int\limits_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1 = 2{,}718\,28 - 1 = 1{,}718\,28.$

Теперь посмотрим, что даст каждый из применяемых способов.

Способ прямоугольников (формула (14,1)). Если $n = 8$, то $\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$, а точками деления будут:

x_0	x	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0;	0,125;	0,250;	0,375;	0,500;	0,625;	0,750;	0,875

Значения подынтегральной функции e^x в этих точках по таблицам следующие:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= e^0 &&= 1{,}000\,00\\
f(x_1) &= e^{0,125} &&= 1{,}133\,15\\
f(x_2) &= e^{0,250} &&= 1{,}284\,02\\
f(x_3) &= e^{0,375} &&= 1{,}454\,99\\
f(x_4) &= e^{0,500} &&= 1{,}648\,72\\
f(x_5) &= e^{0,625} &&= 1{,}868\,24\\
f(x_6) &= e^{0,750} &&= 2{,}117\,00\\
f(x_7) &= e^{0,875} &&= 2{,}398\,88\\
\hline
&\textstyle\sum &&= 12{,}905\,00
\end{aligned}$$

$$I \approx I_8 = 0{,}125 \cdot 12{,}905\,00.$$
$$I_8 \approx 1{,}61312$$

Полученная точность явно недостаточна.

Применим **способ трапеций** (формула (14,2)).

Шаг $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125.$

Множитель $\frac{b-a}{2n}$ перед скобкой в (14,2) равен $\frac{1-0}{2\cdot 8} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(a) = e^0 = 1{,}000\,00\\
f(x_8) &= f(1) = e^1 = 2{,}718\,28\\
\hline
&\textstyle\sum_1 = 3{,}718\,28
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= e^{0,125} = 1{,}133\,15\\
f(x_2) &= e^{0,250} = 1{,}284\,02\\
f(x_3) &= e^{0,375} = 1{,}454\,99\\
f(x_4) &= e^{0,500} = 1{,}648\,72\\
f(x_5) &= e^{0,625} = 1{,}868\,24\\
f(x_6) &= e^{0,750} = 2{,}117\,00\\
f(x_7) &= e^{0,875} = 2{,}398\,88\\
\hline
&\textstyle\sum_2 = 11{,}905\,00 \qquad 2\sum_2 = 23{,}810\,00
\end{aligned}$$

$$\textstyle\sum_1 = 3{,}718\,28$$

$$\textstyle\sum_1 + 2\sum_2 = \sum = 27{,}528\,28.$$

$$I \approx I_8 = 0{,}0625 \cdot 27{,}528\,28$$
$$I \approx 1{,}72052$$

Здесь мы уже значительно ближе подошли к искомому значению.

Теперь применим способ Симпсона.

Отрезок [0, 1] разделен на 8 частей. Значит, $2n = 8$; $n = 4$. Вычислим прежде всего множитель перед скобкой в (14,3):

$$\frac{b-a}{6n} = \frac{1-0}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24} = 0{,}041667.$$

$$\begin{aligned} y_0 &= e^0 = 1{,}00000 \\ y_8 &= e^1 = 2{,}71828 \\ \hline \sum\nolimits_1 &= 3{,}71828 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{0,125} = 1{,}13315 \\ y_3 &= e^{0,375} = 1{,}45499 \\ y_5 &= e^{0,625} = 1{,}86824 \\ y_7 &= e^{0,875} = 2{,}39888 \\ \hline \sum\nolimits_2 &= 6{,}85526 \\ 4\sum\nolimits_2 &= 27{,}42104 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_2 &= e^{0,250} = 1{,}28402 \\ y_4 &= e^{0,500} = 1{,}64872 \\ y_6 &= e^{0,750} = 2{,}11700 \\ \hline \sum\nolimits_3 &= 5{,}04974 \\ 2\sum\nolimits_3 &= 10{,}09948 \end{aligned}$$

$$I \approx I_8 = 0{,}041667\left(\sum\nolimits_1 + 4\sum\nolimits_2 + 2\sum\nolimits_3\right) = 0{,}041667\,(3{,}71828 + {} + 27{,}42104 + 10{,}09948);$$

$$I_8 \approx 0{,}041667 \cdot 41{,}23880 = 1{,}71829.$$

После запятой здесь уже верны четыре знака, в то время как формула трапеций давала только один верный знак.

Погрешность по сравнению с точным значением $R = 1{,}71829 - 1{,}71828 = 0{,}00001$, что следует признать очень хорошей точностью.

Задача 14,2. Найти число π, пользуясь интегралом $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. $\left(\text{С шестью верными знаками } \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\right)$.

Решение. Отрезок интегрирования разделим на 10 равных частей точками:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0;	0,1;	0,2;	0,3;	0,4;	0,5;	0,6;	0,7;	0,8;	0,9.

Способ прямоугольников $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Поэтому с помощью таблиц получаем: $f(x_0) = 1$;

$$f(x_1) = f(0{,}1) = \frac{1}{1+0{,}1^2} = \frac{1}{1{,}01} = 0{,}990\,099$$
$$f(x_2) = f(0{,}2) = \frac{1}{1+0{,}2^2} = \frac{1}{1{,}04} = 0{,}961\,538$$
$$f(x_3) = f(0{,}3) = \frac{1}{1+0{,}3^2} = \frac{1}{1{,}09} = 0{,}917\,431$$
$$f(x_4) = f(0{,}4) = \frac{1}{1+0{,}4^2} = \frac{1}{1{,}16} = 0{,}862\,069$$
$$f(x_5) = f(0{,}5) = \frac{1}{1+0{,}5^2} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}800\,000$$
$$f(x_6) = f(0{,}6) = \frac{1}{1+0{,}6^2} = \frac{1}{1{,}36} = 0{,}735\,294$$
$$f(x_7) = f(0{,}7) = \frac{1}{1+0{,}7^2} = \frac{1}{1{,}49} = 0{,}671\,141$$
$$f(x_8) = f(0{,}8) = \frac{1}{1+0{,}8^2} = \frac{1}{1{,}64} = 0{,}609\,756$$
$$f(x_9) = f(0{,}9) = \frac{1}{1+0{,}9^2} = \frac{1}{1{,}81} = 0{,}552\,486$$
$$\sum = 7{,}099\,814$$

Применим формулу (14,1). Складывая полученные числа, найдем сумму, стоящую в скобках.

Шаг $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1.$

$$I \approx I_{10} = \frac{1}{10} \cdot 7{,}099\,814 = 0{,}709\,98.$$

(Округление сделано до пяти знаков после запятой).

Сравнивая с точным значением, убеждаемся, что получена очень незначительная точность.

Теперь применим формулу трапеций (14,2). Для этого надо довычислить

$$f(x_{10}) = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = 0{,}5.$$

Множитель перед скобкой в формуле (14,2) равен

$$\frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{2 \cdot 10} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1{,}000\,000 \\ f(x_{10}) &= 0{,}500\,000 \\ \hline \sum\nolimits_1 &= 1{,}500\,000 \end{aligned}$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{i=1}^{9} f(x_i) = 7{,}099\,814$$

$$2\sum\nolimits_2 = 14{,}199\,628; \qquad \sum\nolimits_1 + 2\sum\nolimits_2 = 15{,}699\,628$$
$$I \approx I_{10} = 0{,}05\left(\sum\nolimits_1 + 2\sum\nolimits_2\right) = 0{,}784\,981.$$

Если округлить это до трех десятичных знаков после запятой, то получится 0,785, т. е. три верных знака.

Применим формулу Симпсона (14,3).

Теперь следует считать число частей деления равным $2n = 10$; $n = 5$, а множитель перед скобкой в (14,3) равен $\frac{b-a}{6n} = \frac{1-0}{6 \cdot 5} = \frac{1}{30}$.

$$\begin{aligned} y_0 &= 1,000\,000 \\ y_{10} &= 0,500\,000 \\ \hline \textstyle\sum_1 &= 1,500\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 0,961\,538 \\ y_4 &= 0,862\,069 \\ y_6 &= 0,735\,294 \\ y_8 &= 0,609\,756 \\ \hline \textstyle\sum_3 &= 3,168\,657 \\ 2\textstyle\sum_3 &= 6,337\,314 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_1 &= 0,990\,099 \\ y_3 &= 0,917\,431 \\ y_5 &= 0,800\,000 \\ y_7 &= 0,671\,141 \\ y_9 &= 0,552\,486 \\ \hline \textstyle\sum_2 &= 3,931\,157 \\ 4\textstyle\sum_2 &= 15,724\,628 \end{aligned}$$

$$I \approx I_{10} = \frac{1}{30}\left(\sum\nolimits_1 + 4\sum\nolimits_2 + 2\sum\nolimits_3\right) = \frac{1}{30}(1,500\,000 + 15,724\,628 + $$
$$+ 6,337\,314) = \frac{1}{30} \cdot 23,561\,942 = 0,785\,398,$$

т. е. получено значение числа $\frac{\pi}{4}$ с шестью (!) верными знаками.

Задача 14,3. Вычислить по способу трапеций и способу Симпсона $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

Ответ. По способу трапеций $I = 0,997\,94$, по способу Симпсона $I = 1,000\,06$.

Задача 14,4 (для самостоятельного решения).

Вычислить по способам трапеций и Симпсона интегралы:

$$1) \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}; \quad 2) \int\limits_0^{0,8} \cos x\,dx; \quad 3) \int\limits_0^4 e^x\,dx; \quad 4) \int\limits_{0,1}^{1,7} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Отрезок интегрирования делить в первых двух интегралах на 10 равных частей, в последних — на 8.

Ответ. 1) Точное значение интеграла 0,69314718...
Приближенное: по способу трапеций 0,693 77,
по способу Симпсона 0,693 152,

2) Точное значение интеграла 0,717 36.
Приближенное: по способу трапеций 0,716 76,
по способу Симпсона 0,717 36.

3) Точное значение интеграла 53,598 15.
Приближенное: по способу трапеций 54,710 15,
погрешность равна — 1,112 00,
по способу Симпсона 53,616 22,
погрешность равна — 0,018 07, что указывает на значительно более высокую точность.

4) Точное значение интеграла 1,975 12.
Приближенное: по способу трапеций 2,020 18,
погрешность равна — 0,045,
по способу Симпсона 1,985 58,
погрешность равна — 0,010.

Задача 14,5 (для самостоятельного решения).

Вычислить по формулам трапеций и Симпсона $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$. Отрезок интегрирования разделить на 10 равных частей.

Указание. При $x = 0$ $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ находится как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Ответ. По способу трапеций 0,915 728,
по способу Симпсона 0,915 965 (все знаки верны).

Задача 14,6. Вычислить по формуле Симпсона $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Ответ. 0,746 825 (все шесть знаков верны).

ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Приложения определенного интеграла к геометрии. Определение площадей плоских фигур.

Площадь в прямоугольных координатах

Площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывной кривой, уравнение которой в прямоугольных координатах имеет вид $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, находится по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \text{ или } S = \int\limits_a^b y\,dx. \qquad (15,1)$$

Отрезок $[a, b]$ следует разделить на части, в каждой из которых функция $f(x)$ сохраняет один и тот же знак. При этом необходимо соблюдать такое **правило знаков**: площади, находящиеся над осью Ox, берутся со знаком плюс, а площади, расположенные под осью Ox, со знаком минус.

Если площадь ограничена двумя непрерывными кривыми, уравнения которых в прямоугольных координатах $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем всюду на отрезке $[a, b]$ $f_2(x) \geqslant f_1(x)$, и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, то площадь определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \tag{15,2}$$

И в этом случае надо соблюдать указанное выше правило знаков.

Интегрирование четных и нечетных функций в пределах, симметричных относительно начала координат

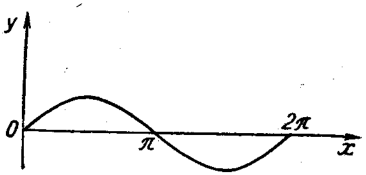
Если функция $f(x)$ — четная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx. \tag{15,3}$$

Если же функция $f(x)$ — нечетная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0. \tag{15,4}$$

Эти формулы часто оказываются полезными при вычислении определенных интегралов вообще и, в частности, при вычислении площадей. Формула (15,3) применяется в том случае, когда рассматриваемая фигура симметрична относительно оси Oy.



К задаче 15,1

Задача 15,1. Найти площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ и осью Ox.

Решение. На отрезке $[0, \pi]$ функция $\sin x$ сохраняет знак, а потому по формуле (15,1), полагая в ней $f(x) = \sin x$, сразу находим

$$S = \int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) =$$

$$= -(-1 - 1) = 2 \text{ кв. ед.}$$

В частности, если единицей масштаба является сантиметр, то $S = 2$ *см*^{2}.

Если требовалось бы найти площадь, ограниченную той же синусоидой и осью Ox на отрезке $[0, 2\pi]$, то, применив формулу

(15,1) без учета правила знаков, мы получили бы абсурдный результат: оказалось бы, что площадь равна нулю. Действительно,

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0.$$

Это получилось потому, что на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $\sin x$ меняет знак. Следовало этот отрезок разделить на два: $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$, в каждом из которых функция сохраняет знак (в первом — плюс, во втором — минус (15,1)).

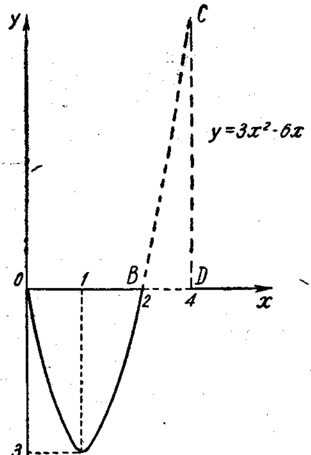
По правилу знаков, на отрезке $[\pi, 2\pi]$ площадь надо было брать со знаком минус и тогда

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos \pi) = -(-1-1) + (1-(-1)) =$$
$$= 2 + 2 = 4 \text{ кв. ед.}$$

При вычислении площадей строго соблюдайте правило знаков и, прежде чем интегрировать, убедитесь, что на отрезке интегрирования функция сохраняет знак.

Задача 15,2. Вычислить площадь, ограниченную прямой $x = 4$, кривой $y = 3x^2 - 6x$ и осью Ox на отрезке $[0,4]$.



К задаче 15,2

Решение. Прежде всего постройте эскиз графика функции. Кривая — парабола. Площадь OAB расположена под осью, брать ее надо со знаком минус, а площадь BCD — над осью Ox, и взять ее следует со знаком плюс. Отрезок интегрирования $[0,4]$ должен быть разделен на два: $[0,2]$ и $[2,4]$. Поэтому, полагая в (15,1) $f(x) = 3x^2 - 6x$, найдем

$$S = -S_1 + S_2 = -\int_0^2 (3x^2 - 6x)\, dx + \int_2^4 (3x^2 - 6x)\, dx =$$

$$= -(x^3 - 3x^2) \Big|_0^2 + (x^3 - 3x^2) \Big|_2^4 = -(8 - 12) +$$
$$+ (64 - 48 - 8 + 12) = 4 + 20 = 24 \text{ кв. ед.}$$

Если за единицу длины взять, например, дециметр, то площадь равна 24 $дм^2$.

Если бы правило знаков не было учтено, ответ был бы неверен.

Задача 15,3 (для самостоятельного решения).
Найти площадь, ограниченную осью Ox и параболами:

$$1)\ y = 2x^2 + 3x - 9; \quad 2)\ y = x^2 + 6x + 5.$$

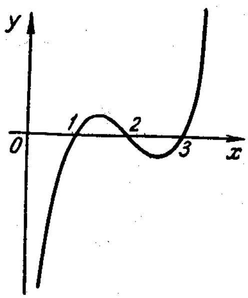
Ответ. 1) $30\frac{3}{8}$ кв. ед., 2) $10\frac{2}{3}$ кв. ед.

Задача 15,4 (для самостоятельного решения).
Найти площади, ограниченные осью Ox и линиями:

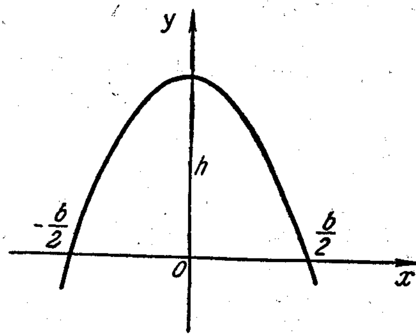
1) $y = 2x^2$; $x = 1$ и $x = 2$; 2) $y = \frac{1}{4}x^3$ на отрезке $[0,2], x=2$.

Ответ. 1) $4\frac{2}{3}$ кв. ед.; 2) 1 кв. ед.

Задача 15,5. Найти площадь, ограниченную осью Ox и кривой $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.



К задаче 15,5



К задаче 15,6

Решение. Найдем точки пересечения кривой с осью Ox. Для этого решим уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Легко заметить, что его корнем является $x_1 = 1$. После деления левой части уравнения на $x - 1$, получим $x^2 - 5x + 6$, а приравняв это выражение нулю, найдем: $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. Из эскиза графика видно, что на отрезке $[2,3]$ площадь находится под осью Ox, а потому

$$S = S_1 - S_2 = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,dx -$$

$$- \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,dx = \frac{1}{2} \text{ кв. ед.}$$

Задача 15,6. Доказать, что площадь параболического сегмента, отсеченного от параболы хордой, перпендикулярной ее оси, равна $\frac{2}{3}$ произведения высоты h сегмента на его основание b.

Решение. Пусть середина указанной хорды — начало координат, ось Ox направлена по хорде направо, а ось Oy вверх по оси симметрии параболы.

Уравнение параболы будет иметь вид $y = -ax^2 + c$ $(a > 0)$. Вершина параболы находится в точке $(0, h)$, где h — высота сегмента. Ось Ox парабола пересекает в точках $\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$ и $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$. Зная координаты этих точек, найдем значения коэффициентов a и c в уравнении параболы. Подставляя координаты вершины в уравнение $y = -ax^2 + c$, получим $h = c$. Подставляя же координаты $\left(\frac{b}{2}, 0\right)$, имеем:

$$0 = -a \cdot \frac{b^2}{4} + h; \quad \frac{ab^2}{4} = h; \quad a = \frac{4h}{b^2},$$

и уравнение параболы с найденными a и c примет вид $y = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h$. Искомую площадь определим по формуле (15,1), полагая в ней $f(x) = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h$, а так как функция $f(x)$ — четная, то

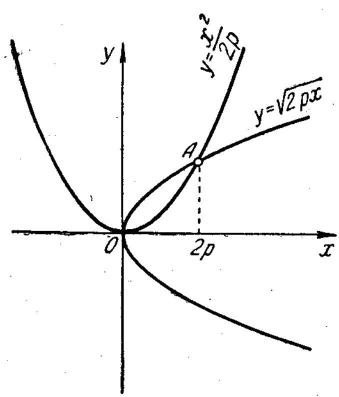
$$S = 2\int\limits_0^{\frac{b}{2}} \left(-\frac{4h}{b^2}x^2 + h\right)dx = \left(-\frac{4h}{b^2}\frac{x^3}{3} + hx\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}hb \text{ кв. ед.}$$

Задача 15,7 (для самостоятельного решения). Вычислить площадь, ограниченную эллипсом.

Указание. Из уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ найти y. Четверть площади эллипса равна $\frac{S}{4} = \frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$. Применить подстановку $x = a\sin z$. Новые пределы интегрирования: 0 и $\frac{\pi}{2}$. Под интегралом окажется $\cos^2 z$, который надо заменить на $\frac{1+\cos 2z}{2}$.

Ответ. πab кв. ед. (Этот ответ полезно запомнить). При $a = b$ имеем окружность. Получается, что площадь круга равна πa^2, как это известно из геометрии.



К задаче 15,8

Задача 15,8. Определить площадь, ограниченную параболами $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

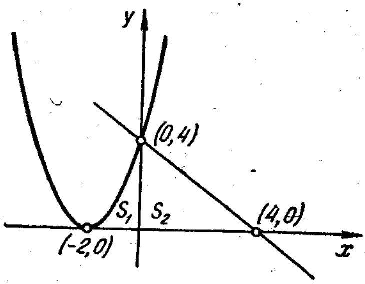
Решение. Найдем прежде всего координаты точек пересечения парабол, чтобы определить отрезок интегрирования. Из первого уравнения $y=\sqrt{2px}$ ($y>0$, так как точка пересечения — в первой четверти), из второго $y=\frac{x^2}{2p}$. Приравнивая эти значения, получим

$$\sqrt{2px}=\frac{x^2}{2p}, \text{ или } 2px=\frac{x^4}{4p^2}.$$

Отсюда $x^4-8p^3x=0$; $x(x^3-8p^3)=0$; $x(x-2p)(x^2+2px+4p^2)=0$, т. е. $x=0$; $x-2p=0$; $x^2+2px+4p^2=0$. Корни первых двух уравнений: $x_1=0$; $x_2=2p$. Последнее уравнение имеет комплексные корни. Значит, параболы пересекаются в начале координат ($x=0$) и в точке A с абсциссой $x=2p$. Искомую площадь найдем по формуле (15,2). Значения y из каждого уравнения были найдены выше. Принимая в (15,2) $f_2(x)=\sqrt{2px}$, а $f_1(x)=\frac{x^2}{2p}$, получим

$$S=\int\limits_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\left(\sqrt{2p}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p}=\frac{4}{3}p^2 \text{ кв. ед.}$$

Задача 15,9. Вычислить площадь, ограниченную осью Ox и линиями $y=(x+2)^2$ и $y=4-x$.



К задаче 15,9

Решение. Первая линия — парабола, вторая — прямая. Отрезок интегрирования [—2,4] следует разбить на два: [—2,0] и [0,4], так как на этих отрезках линии, ограничивающие площадь, имеют различные уравнения. На отрезке [—2,0] надо y взять из уравнения параболы, а на отрезке [0,4] — из уравнения прямой. Поэтому

$$S=S_1+S_2=\int\limits_{-2}^{0}(x+2)^2\,dx+\int\limits_0^4(4-x)\,dx=\frac{(x+2)^3}{3}\Bigg|_{-2}^{0}+$$

$$+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=\frac{8}{3}+16-8=10\frac{2}{3} \text{ кв. ед.}$$

Задача 15,10 (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную осью Ox и линиями $y=(x-4)^2$ и $y=16-x^2$ (сделать чертеж).

Ответ. 64 кв. ед.

Задача 15,11 (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную линиями $xy = 3$ и $x + y = 4$. Сделать чертеж.

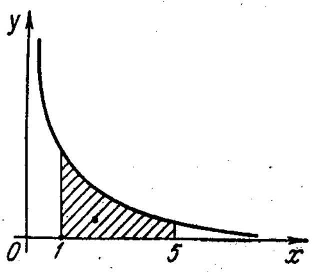
Указание. Разрешить оба уравнения относительно y. Найти абсциссы точек пересечения линий. Окажется, что $x = 1$; $x = 3$. Применить формулу (15,2), в которой $f_2(x) = 4 - x$; $f_1(x) = \frac{3}{x}$.

Ответ. $(4 - \ln 27)$ кв. ед.

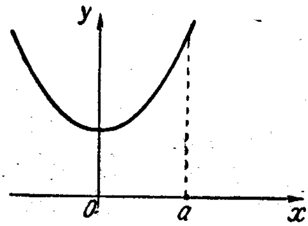
Задача 15,12 (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную гиперболой $xy = a^2$ и прямыми $x = 1$; $x = 5$; $y = 0$.

Ответ: $a^2 \ln 5$ кв. ед.



К задаче 15,12



К задаче 15,13

Задача 15,13. Найти площадь, ограниченную цепной линией, определяемой уравнением $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, осями координат и прямой $x = a$ $(a > 0)$.

Решение. По формуле (15,1)

$$S = \frac{a}{2}\int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{a}{a}} - e^{-\frac{a}{a}}\right) =$$

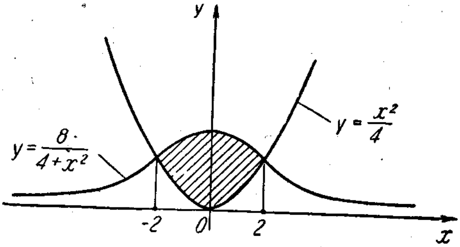
$$= \frac{a^2}{2}(e - e^{-1}) = a^2 \operatorname{sh} 1 \text{ кв. ед.}$$

Если заметить, что $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, то задача решается проще

$$S = a\int_0^a \operatorname{ch}\frac{x}{a}\, dx = a^2 \operatorname{sh}\frac{x}{a}\Bigg|_0^a = a^2 \operatorname{sh} 1 \text{ кв. ед.}$$

Задача 15,14. Найти площадь, заключенную между кривыми $y=\frac{8}{4+x^2}$ и $y=\frac{x^2}{4}$.

Указание. Первая кривая называется локоном Аньези, вторая — парабола. Чтобы определить отрезок интегрирования, найдем абсциссы точек пересечения этих кривых.



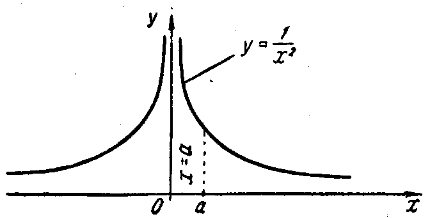
К задаче 15,14

Ответ. $2\left(\pi-\frac{2}{3}\right)$ кв. ед.

Задача 15,15. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями $y=\frac{1}{x^2}$, $x=a$ $(a>0)$ и осью абсцисс.

Решение. В формуле (15,1) верхний предел интегрирования равен $+\infty$, а потому

$$S=\underbrace{\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx}_{\boxed{\text{Интеграл несобственный}}}=-\frac{1}{x}\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\text{ кв. ед.}$$



К задаче 15,15

Таким образом, несмотря на то, что площадь простирается в бесконечность, в данном случае ей можно приписать определенное числовое значение.

Задача 15,16. Та же задача для равносторонней гиперболы $y=\frac{1}{x}$.

Решение.

$$S=\underbrace{\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx}_{\boxed{\text{Интеграл несобственный}}}=\ln x\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln x-\ln a=+\infty,$$

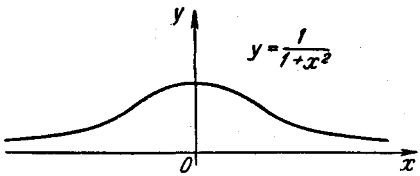
т. е. площадь бесконечно велика и никакого числового значения ей приписать нельзя.

Задача 15,17 (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную осью Ox и локоном Аньези, определяемым уравнением $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Указание. $S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} =$
$= 2 \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x.$

Ответ. $S = \pi$ кв. ед.



К задаче 15,17

Задача 15,18 (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную линиями $y = \frac{1}{x^2 \sqrt{x}}$, $x = 4$ и осью Ox.

Ответ. $\frac{1}{12}$ кв. ед.

Задача 15,19 (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную линиями $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1$ и осью Ox.

Ответ. $+\infty$.

Задача 15,20 (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную кривой $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, осью Oy и прямой $x = 9$.

Указание. $S = \int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. При приближении к нижнему пределу $(x \to +0)$ подынтегральная функция неограниченно возрастает, а потому этот интеграл — несобственный:

$$\int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon}^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^9 = 2 \lim_{\varepsilon \to +0} (\sqrt{9} - \sqrt{\varepsilon}) = 6 \text{ кв. ед.}$$

Вычисление площади, ограниченной кривой, заданной полярным уравнением и двумя радиусами-векторами

Если кривая, ограничивающая площадь, определяется уравнением

$$r = f(\varphi),$$

то площадь, ограниченная ею, вычисляется по формуле

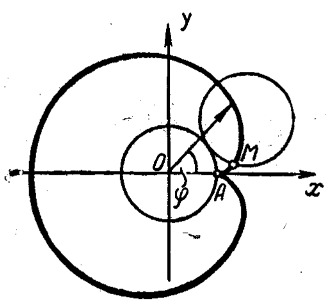
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi, \tag{15,5}$$

где α и β ($\alpha < \beta$) — пределы изменения полярного угла.

Задача 15,21. Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$r = 2a(1 - \cos\varphi).$$

Решение. Кривая относится к классу эпициклоид и является траекторией точки, лежащей на окружности круга радиуса a, который без скольжения катится по внешней части окружности круга такого же радиуса (интересующихся выводом уравнения эпициклоид, гипоциклоид и их частных случаев отсылаем к книге акад. В. И. Смирнова «Курс высшей математики», том I).



К задаче 15,21

На всей кардиоиде полярный угол φ изменяется от 0 до 2π, а потому, учитывая, что $r^2 = 4a^2(1 - \cos\varphi)^2$:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4a^2(1 - \cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi = 2a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 6\pi a^2 \text{ кв. ед.},$$

т. е. площадь, ограниченная кардиоидой, равна ушестеренной площади круга, который ее производит.

Задача 15,22. Определить площадь, ограниченную спиралью Архимеда $r = a\varphi$ и двумя радиусами-векторами, которые соответствуют полярным углам φ_1 и φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2$).

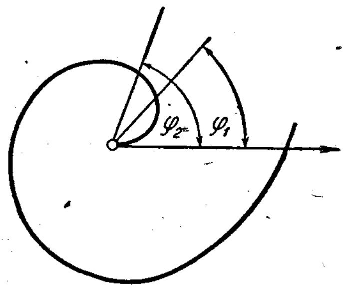
Решение. Спираль Архимеда — траектория точки, равномерно движущейся по прямой, которая равномерно вращается вокруг заданной точки (полюса).

По формуле (15,5) имеем $r^2 = a^2\varphi^2$;

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\frac{\varphi^3}{3}\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a^2(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)}{6}. \qquad (A)$$

Из (A) следует, что площадь, ограниченная полярной осью и первым витком спирали Архимеда ($\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 2\pi$):

$$S_1 = \frac{a^2}{6}(2\pi)^3 = \frac{4}{3}\pi^3a^2 \text{ кв. ед.}$$



К задаче 15,22

Площадь, ограниченная полярной осью и вторым витком ($\varphi_1 = 2\pi$; $\varphi_2 = 4\pi$), на основании (А) равна

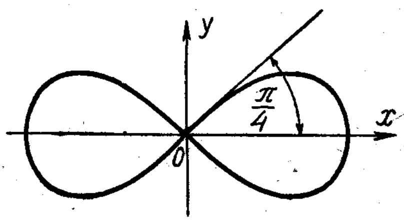
$$S_2 = \frac{a^2}{6}(64\pi^3 - 8\pi^3) = $$
$$= \frac{a^2}{6}56\pi^3 = \frac{28}{3}\pi^3a^2.$$

Разность этих площадей, т. е. площадь, заключенная между вторым и первым витками спирали Архимеда:

$$S_2 - S_1 = \frac{28}{3}\pi^3a^2 - \frac{4}{3}\pi^3a^2 = 8\pi^3a^2.$$

Можно показать, что и вообще площадь, заключенная между двумя последовательными витками спирали Архимеда равна $8\pi^3a^2$.

Задача 15,23. Определить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли, определяемой уравнением $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.



К задаче 15,23

Решение. *Лемниската—это геометрическое место точек, произведение расстояний каждой из которых от двух фиксированных точек (фокусов)—постоянная величина.* Ее уравнение в прямоугольных координатах

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Проследим, как изменяется угол φ, когда радиус-вектор точки на лемнискате описывает четверть искомой площади, лежащей в первой четверти.

При $\varphi = 0$ $r = a\sqrt{2}$. Определим, чему равен полярный угол φ, когда радиус-вектор станет равным нулю. Подставляя $r = 0$ в уравнение лемнискаты, получим $0 = 2a^2\cos 2\varphi$, откуда $\cos 2\varphi = 0$; $2\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, на одной четверти площади полярный угол φ изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Поэтому по формуле (15,5) четверть искомой площади

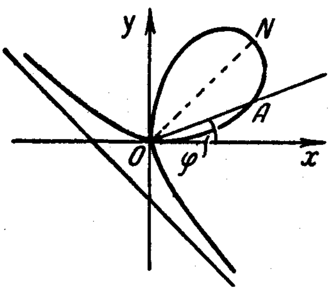
$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos 2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{2},$$

а вся площадь

$$S=2a^2=(a\sqrt{2})^2 \text{ кв. ед.},$$

т. е. площадь, ограниченная лемнискатой, равна площади квадрата со стороной $a\sqrt{2}$.

Задача 15,24 (для самостоятельного решения). Вычислить площадь, ограниченную петлей декартова листа, определяемого уравнением



К задаче 15,24

$$x^3+y^3-3axy=0. \qquad (15,6)$$

Указание. 1) Перейти к полярным координатам, положив $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Получится уравнение

$$r=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}.$$

2) Учесть, что так как в уравнение (15,6) координаты x и y входят симметрично, т. е. замена x на y, а y на x не изменяет уравнения, то кривая симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла $y=x$. Поэтому искомую площадь можно рассматривать как удвоенную площадь OAN. Когда радиус-вектор OA описывает площадь OAN, угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

3) Половина площади

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^6\varphi+2\sin^3\varphi\cos^3\varphi+\cos^6\varphi}d\varphi=$$

| Числитель и знаменатель дроби умножить на $\cos^2\varphi$ |

$$=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2\varphi\cos^4 d\varphi}{\cos^2\varphi\,(\sin^6\varphi+2\sin^3\varphi\cos^3\varphi+\cos^6\varphi)}.$$

Числитель и знаменатель дроби разделить на $\cos^6 \varphi$, получится

$$\frac{S}{2} = \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (\operatorname{tg}^6 \varphi + 2 \operatorname{tg}^3 \varphi + 1)} d\varphi = \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (\operatorname{tg}^3 \varphi + 1)^2} d\varphi.$$

Подстановка $\operatorname{tg} \varphi = z$; $\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = dz$. Новые пределы интегрирования 0 и 1.

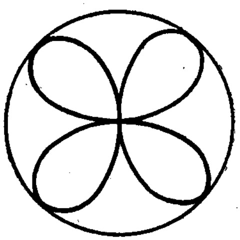
$$\frac{S}{2} = \frac{9}{2} a^2 \int_0^1 \frac{z^2}{(z^3 + 1)^2} dz.$$

Ответ. $S = \frac{3}{2} a^2$ кв. ед.

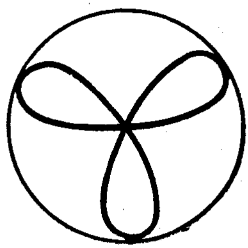
Задача 15,25. Вычислить площадь одного лепестка розы, определяемой уравнением

$$r = a \sin k\varphi. \tag{15,7}$$

Решение. Кривые, определяемые уравнением (15,7), а также, уравнением $r = a \cos k\varphi$, где a и k — постоянные величины, назы-



К задаче 15,25 а



К задаче 15,25 б

ваются розами. Если k — четное число, то кривая имеет $2k$ лепестков, если же k — нечетное число, то кривая имеет k лепестков.

Например, кривая, определяемая уравнением $r = a \sin 2\varphi$, имеет 4 лепестка, а кривая $r = a \sin 5\varphi$ — 5 лепестков.

Чтобы найти площадь одного лепестка, определим, как изменяется полярный угол φ, когда радиус-вектор описывает площадь одного лепестка. Положим в (15,7) $r = 0$ и решим уравнение $0 = a \sin k\varphi$. Из него следует, что $\sin k\varphi = 0$, а отсюда $k\varphi = n\pi$. При $n = 0$ $\varphi = 0$, при $n = 1$ имеем $k\varphi = \pi$, а $\varphi = \frac{\pi}{k}$. Таким образом, угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{k}$, а площадь одного лепестка по формуле (15,5) равна

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}} a^2\sin^2 k\varphi\, d\varphi=\frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{k}}\frac{1-\cos 2k\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{4k}\sin 2k\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{k}}=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{k}-\frac{1}{4k}\sin 2k\frac{\pi}{k}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{k}=\frac{\pi a^2}{4k};\quad S=\frac{\pi a^2}{4k}\text{ кв. ед.}$$

а) Для четырехлепестковой розы $r=a\sin 2\varphi$ площадь одного лепестка

$$S=\frac{\pi a^2}{4\cdot 2}=\frac{\pi a^2}{8}\text{ кв. ед.}$$

б) Площадь одного лепестка трехлепестковой розы $r=a\sin 3\varphi$

$$S=\frac{\pi a^2}{4\cdot 3}=\frac{\pi a^2}{12}\text{ кв. ед.}$$

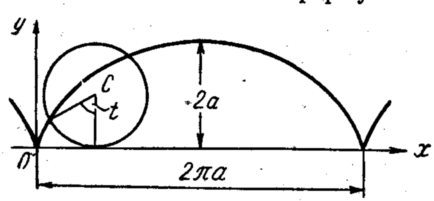
Площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, уравнения которой заданы в параметрической форме

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{array}\right\} \qquad (15,8)$$

и в точках A и B кривой t_1 и t_2 — значения параметра, то площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (15,9)$$



К задаче 15,26

Задача 15,26. Найти площадь, ограниченную осью Ox и одной «аркой» циклоиды $x=a\,(t-\sin t)$; $y=a\,(1-\cos t)$.

Решение. Когда круг, производящий циклоиду, сделает один полный оборот, абсцисса той точки окружности круга, которая в начале движения совпадала с началом координат, станет равной $2\pi a$ (a — радиус окружности).

В формуле (15,9) надо взять $\psi(t)=y=a(1-\cos t)$; $\varphi'(t)$ находят из уравнения $\varphi(t)=x=a(t-\sin t)$. Получим $\varphi'(t)=a(1-\cos t)$, Пределы интегрирования будут равны 0 и 2π, так как параметр t при одном полном обороте производящего круга пробегает отрезок $[0,2\pi]$. Поэтому

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=a^2\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=a^2(2\pi+\pi)=3\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

Таким образом, искомая площадь в три раза больше площади катящегося круга.

Задача 15,27 (для самостоятельного решения).

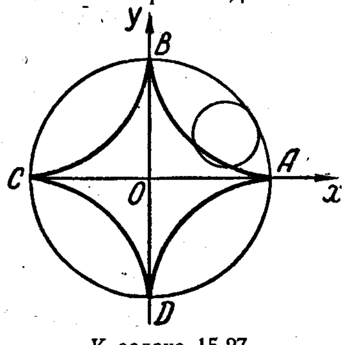
Найти площадь, ограниченную астроидой, определяемой уравнением:

$$\left.\begin{aligned} x&=R\cos^3\frac{t}{4}\\ y&=R\sin^3\frac{t}{4}\end{aligned}\right\}. \qquad (15,10)$$

Параметр t — угол, на который из начального положения повернулась подвижная окружность. За один полный оборот подвижной окружности (t изменяется от 0 до 2π) описывается четверть кривой. При вычислении интеграла

$$\int \sin^4\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}\,dt$$

подынтегральную функцию представить в виде



К задаче 15,27

$$\sin^4\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}=\left(\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}\right)^2\times$$

$$\times\sin^2\frac{t}{4}=\frac{1}{8}\left[\sin^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right].$$

Ответ. $S=\frac{3}{8}\pi R^2$ кв. ед.

Задача 15,28. Найти площадь, заключенную между осью Ox и верзиерой[1], определяемой уравнениями

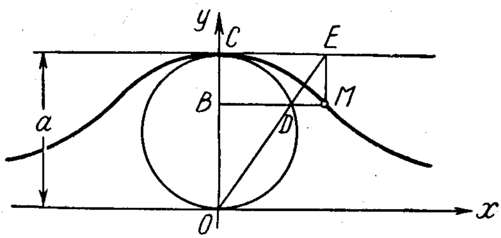
$$\left.\begin{aligned} x&=t\\ y&=\frac{a^3}{a^2+t^2}\end{aligned}\right\}.$$

[1] Кривая, называемая верзиерой, получается так: берется круг диаметром a и отрезок BDM такой, что $OB:BD=OC:BM$. Геометрическое место точек M и представляет верзиеру (см. А. А. Савёлов «Плоские кривые»).

Решение. Кривая симметрична относительно оси Oy. На всей площади абсцисса точки кривой изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а так как $x=t$ (первое уравнение), то параметр t изменяется в тех же пределах. По формуле (15,9)

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^3}{a^2+t^2}\,dt=a^3\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{a^2+t^2}=a^3\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=a^2\left[\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}(-\infty)\right]=a^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$



К задаче 15,28

Эта кривая называется также локоном Аньези.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Приложения определенного интеграла к геометрии (продолжение): длина дуги плоской кривой, объем тела вращения, поверхность тела вращения.

Краткие сведения из теории

1. Длина дуги плоской кривой, определяемой в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x)$, находится по формуле

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{16,1}$$

где a и b — соответственно абсциссы начала и конца дуги.

2. Если кривая задана параметрически уравнениями

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\},$$

причем $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные, то длина дуги

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt. \tag{16,2}$$

3. Если кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r = f(\varphi),$$

а полярный угол φ на дуге изменяется от α до β, то длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \qquad (16,3)$$

Задача 16,1. Найти длину окружности.

Решение. Возьмем окружность радиуса R с центром в начале координат. Ее уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Чтобы применить формулу (16,1), найдем из этого уравнения y. Окажется, что $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, причем знак плюс отвечает верхней полуокружности, а минус — нижней.

Найдем длину четверти окружности, лежащей в первой четверти. Возьмем поэтому перед корнем знак плюс. Под интегралом в формуле (16,1) стоит $\sqrt{1 + y'^2}$. Вычислим это выражение

1) $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $\quad y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$;

2) $y'^2 = \dfrac{x^2}{R^2 - x^2}$;

3) $1 + y'^2 = 1 + \dfrac{x^2}{R^2 - x^2} = \dfrac{R^2}{R^2 - x^2}$;

4) $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\dfrac{R^2}{R^2 - x^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Подставим его под знак интеграла в (16,1) и учтем, что абсцисса x точки на окружности, находящейся в первом квадранте, изменяется от 0 до R, а потому четверть длины окружности

$$\frac{L}{4} = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = R\left(\arcsin \frac{R}{R} - 0\right) =$$

$$= R \arcsin 1 = R\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$L = 4\frac{\pi}{2}R; \quad L = 2\pi R.$$

В процессе решения задачи становится ясно, что не следует сразу подставлять y' под знак интеграла в формулу (16,1), а надо сначала вычислить $\sqrt{1 + y'^2}$, определить, как изменяется абсцисса x точки на дуге, длина которой вычисляется, и после этого применить формулу (16,1). Это замечание относится и к формулам (16,2) и (16,3).

Эту же задачу решим для случая, когда окружность задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{array}\right\}.$$

Чтобы применить формулу (16,2), вычислим:

$$x' = -R\sin t; \quad y' = R\cos t;$$

$$x'^2 = R^2\sin^2 t; \quad y'^2 = R^2\cos^2 t;$$

$$x'^2 + y'^2 = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2;$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{R^2} = R.$$

На всей окружности параметр t (его геометрическое значение — центральный угол, опирающийся на дугу, начало которой лежит на положительной части оси Ox) изменяется от 0 до 2π, а потому по формуле (16,2) длина окружности

$$L = \int_0^{2\pi} R\,dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Еще более простым будет решение этой задачи, если уравнение окружности задать в полярных координатах. Если центр окружности находится в начале координат, то она определяется полярным уравнением

$$r = R$$

(полярная ось совпадает с положительной частью оси Ox, а полярный угол φ, когда точка на окружности пробегает ее всю, изменяется от 0 до 2π). Поэтому по формуле (16,3), так как r — величина постоянная, равная радиусу окружности, а $r' = 0$, получаем, что $\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{R^2} = R$ и

$$L = \int_0^{2\pi} R\,d\varphi = R\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Задача 16,2 (для самостоятельного решения).

Найти длину цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между точками с абсциссами 0 и x ($x > 0$) (см. чертеж к задаче 15,13).

Указание. Применить формулу (16,1);

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right); \quad 1 + y'^2 = \frac{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4};$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

Ответ. $L = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\,dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$

Задача 16,3 (для самостоятельного решения).

Найти длину дуги параболы $y = ax^2$ $(a > 0)$ от вершины до произвольной точки с абсциссой x.

Указание. $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{4a^2x^2+1}$ (применить формулу (16,1))

Ответ. $L = \frac{x}{2}\sqrt{4a^2x^2+1} + \frac{1}{4a}\ln\left(2ax + \sqrt{4a^2x^2+1}\right)$.

Задача 16,4 (для самостоятельного решения).

Вычислить всю длину астроиды, определяемой уравнением

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

(см. чертеж к задаче 15,27).

Указание. $y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$; чтобы найти y, возвести обе части этого равенства в степень $\frac{3}{2}$. Получится $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$;

$y' = -x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{1+y'^2} = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}$.

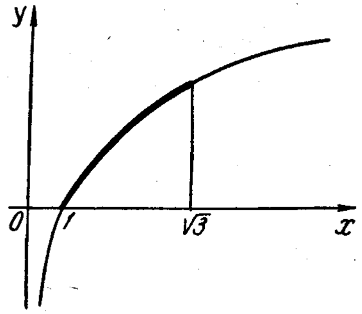
Ответ. $\frac{L}{4} = \int\limits_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx$; $L = 6a$.

Задача 16,5 (для самостоятельного решения).

Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ от точки с абсциссой 1 до точки с абсциссой $\sqrt{3}$.

Указание. $L = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$.

Удобна подстановка $x = \operatorname{tg} z$, которая приведет к вычислению интеграла



К задаче 16,5

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dz}{\sin z\cos^2 z} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\sin z\cos^2 z}\,dz = \left(\sec z + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}.$$

Ответ. $2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln 3 - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 0{,}920$.

Задача 16,6. Вычислить длину дуги линии $y = e^x$ от точки $x = 0$ до точки x.

Указание. $L = \int\limits_0^x \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$.

Подстановка: $1 + e^{2x} = z^2$.

Ответ. $\sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Задача 16,7 (для самостоятельного решения).

Найти длину одной «арки» циклоиды:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}.$$

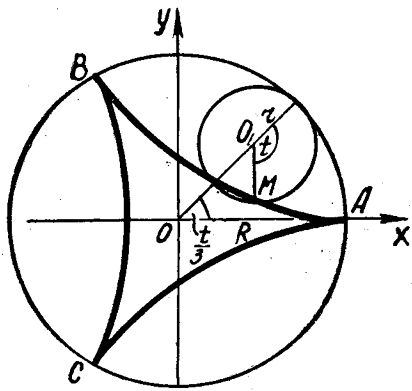
Указание. Применить формулу (16,2). Пределами интегрирования по t будут 0 и 2π (см. задачу 15,26).

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 2a \sin\frac{t}{2}.$$

Ответ. $L = 8a$, т. е. длина одной «арки» циклоиды равна увосьмеренному радиусу производящего ее круга.

Задача 16,8 (для самостоятельного решения).

Определить длину всей кривой Штейнера[1].



К задаче 16,8

$$\left.\begin{aligned} x &= 2R\cos\frac{t}{3} + R\cos\frac{2t}{3} \\ y &= 2R\sin\frac{t}{3} - R\sin\frac{2t}{3} \end{aligned}\right\}$$

Указание.

$$x'^2 + y'^2 = \frac{8}{9}R^2(1 - \cos t) = \frac{16}{9}R^2\sin^2\frac{t}{2};$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{4}{3}R\sin\frac{t}{2};$$

$$\frac{L}{3} = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}R\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{16}{3}R.$$

Ответ. $L = 16R$.

Задача 16,9 (для самостоятельного решения).

Найти длину всей астроиды:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos^3\frac{t}{4} \\ y &= R\sin^3\frac{t}{4} \end{aligned}\right\}$$

(см. чертеж к задаче 15,27).

Указание. (См. также указание к задаче 15,27). Воспользоваться формулой (16,2):

$$x'^2 + y'^2 = \frac{9R^2}{16}\sin^2\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4};\quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{3R}{4}\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4};$$

$$\frac{L}{4} = \frac{3R}{4}\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}\,dt.$$

Ответ. $L = 6R$.

---

[1] Кривой Штейнера называется гипоциклоида, которая получается в том случае, когда радиус производящего круга в три раза меньше радиуса неподвижного круга.

Задача 16,10 (для самостоятельного решения).

Определить длину одной ветви эпициклоиды, определяемой уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + mR)\cos mt - mR\cos(t + mt) \\ y &= (R + mR)\sin mt - mR\sin(t + mt) \end{aligned}\right\}^{1}.$$

Ответ. $8Rm(1+m)$.

Задача 16,11 (для самостоятельного решения).

Найти длину дуги кардиоиды, определяемой уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2R\cos t - R\cos 2t \\ y &= 2R\sin t - R\sin 2t \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

(см. чертеж к задаче 15,21).

(Эти уравнения получаются из уравнений предыдущей задачи при $m = 1$).

Ответ. $L(t_1) = 4R\int\limits_0^{t_1} \sin\frac{t}{2}\,dt = 16R\sin^2\frac{t_1}{4}$. При $t_1 = 2\pi$ получим, что длина всей кардиоиды $L = 16R$.

Задача 16,12. Решить предыдущую задачу в случае, когда кардиоида задана полярным уравнением $r = 2a(1-\cos\varphi)$ (см. чертеж к задаче 15,21).

Решение. Надо воспользоваться формулой (16,3):

$$r' = 2a\sin\varphi; \quad r'^2 = 4a^2\sin^2\varphi;$$

$$r^2 + r'^2 = 4a^2(1-\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi =$$

$$= 4a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4a^2(2 - 2\cos\varphi) =$$

$$= 8a^2(1-\cos\varphi) = 16a^2\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = 4a\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Когда точка на кардиоиде пробегает всю кривую, ее полярный угол изменяется от 0 до 2π.

Поэтому по формуле (16,3)

$$L = \int\limits_0^{2\pi} 4a\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -4a\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -8a(\cos\pi - \cos 0) = -8a(-2) = 16a.$$

Мы получили тот же ответ, что и в предыдущей задаче ($R = a$).

---

[1] Эпициклоидой называется кривая, являющаяся траекторией точки, неизменно связанной с окружностью, которая без скольжения катится по внешней стороне неподвижной окружности радиуса R, а m — отношение радиуса подвижной окружности к радиусу неподвижной.

Задача 16,13 (для самостоятельного решения).

Найти длину дуги спирали Архимеда $r = a\varphi$ от начала координат до произвольной точки $P(r, \varphi)$ (см. чертеж к задаче 15,22).

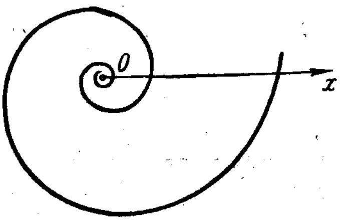
Указание. Чтобы воспользоваться формулой (16,3), надо вычислить $\sqrt{r^2 + r'^2}$. Из $r = a\varphi$ следует, что $r' = a$;

$$r^2 + r'^2 = a^2\varphi^2 + a^2 = a^2(1 + \varphi^2);$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = a\sqrt{1 + \varphi^2}; \quad L = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi \quad \text{(см. формулу (16,3)).}$$

Ответ. $L = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}\right)\right]$.

При $\varphi = 2\pi$ получим длину первого витка спирали Архимеда.



К задаче 16,14

Задача 16,14 (для самостоятельного решения).

Найти длину логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ между точками (r_0, φ_0) и (r_1, φ_1).

Указание. Воспользоваться формулой (16,3):

$$r^2 + r'^2 = a^{2\varphi} + a^{2\varphi}\ln^2 a = a^{2\varphi}(1 + \ln^2 a);$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = a^{\varphi}\sqrt{1 + \ln^2 a}; \quad L = \sqrt{1 + \ln^2 a}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} a^{\varphi}\, d\varphi.$$

Ответ. $L = \sqrt{1 + \ln^2 a}\cdot\frac{a^{\varphi_1} - a^{\varphi_0}}{\ln a}$, или

$$L = \sqrt{1 + \ln^2 a}\cdot\frac{r_1 - r_0}{\ln a}.$$

Во второй части этой книги (задача 36,15) была определена длина полярной касательной логарифмической спирали $T = \sqrt{1 + \frac{1}{\ln^2 a}}\, r$, или $T = \sqrt{1 + \ln^2 a}\cdot\frac{r}{\ln a}$.

Запишем полученный в этой задаче ответ в виде

$$L = \sqrt{1 + \ln^2 a}\,\frac{r_1}{\ln a} - \sqrt{1 + \ln^2 a}\,\frac{r_0}{\ln a}.$$

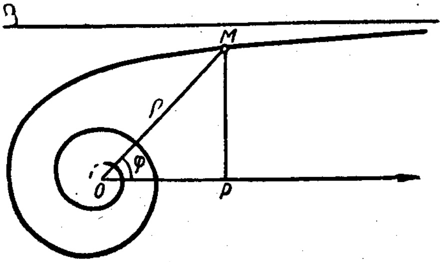
Таким образом, *длина дуги логарифмической спирали равна разности длин полярных касательных, проведенных в конце и начале этой дуги.*

Задача 16,15 (для самостоятельного решения).

Определить длину дуги гиперболической спирали $r=\frac{a}{\varphi}$ от точки (r_1, φ_1) до точки (r_2, φ_2).

Указание. $L=a\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2}\,d\varphi$. Подынтегральную функцию представить в виде $\frac{1+\varphi^2}{\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}}=\frac{1}{\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

К вычислению $\int\frac{1}{\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}}\,d\varphi$ применить подстановку обратного количества: $\varphi=\frac{1}{z}$, а $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$ — табличный.



К задаче 16,15

Ответ. $L=a\left[\frac{\sqrt{1+\varphi_1^2}}{\varphi_1}-\frac{\sqrt{1+\varphi_2^2}}{\varphi_2}+\ln\frac{\varphi_2+\sqrt{1+\varphi_2^2}}{\varphi_1+\sqrt{1+\varphi_1^2}}\right]$.

Задача 16,16. Найти длину дуги циссоиды Диоклеса

$$r=2a\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

от точки (r_1, φ_1) до точки (r_2, φ_2) $(\varphi_1<\varphi_2)$.

Решение. Кривая задана полярным уравнением. Чтобы применить формулу (16,3), вычислим $\sqrt{r^2+r'^2}$:

$$r'=2a\frac{2\sin\varphi\cos^2\varphi+\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi};$$

$$r^2+r'^2=4a^2\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}(1+3\cos^2\varphi);$$

$$\sqrt{r^2+r'^2}=2a\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1+3\cos^2\varphi};$$

$$L=2a\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

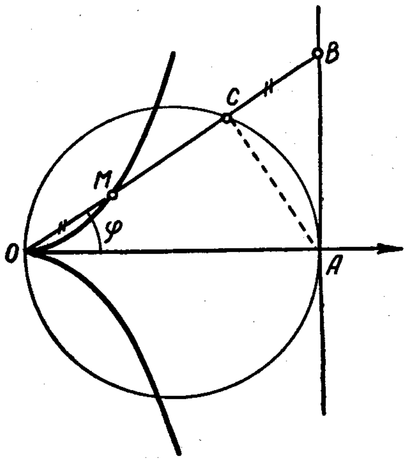
Сначала вычислим неопределенный интеграл

$$2a\int \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

С помощью подстановки $\sqrt{3}\cos\varphi = \frac{1}{u}$ придем к интегралу

$$2a\sqrt{3}\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\,du = 2a\sqrt{3}\int \frac{1+u^2}{u\sqrt{1+u^2}}\,du =$$

$$= 2a\sqrt{3}\left[\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} + \int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}}\right].$$



К задаче 16,16

Первый интеграл вычислим подстановкой обратного количества $u = \frac{1}{t}$, и после интегрирования получим

$$-\ln(t+\sqrt{1+t^2}) =$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\right),$$

а возвращаясь к старой переменной φ, найдем, что он равен

$$-\ln(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{1+3\cos^2\varphi}).$$

Второй интеграл равен $\sqrt{1+u^2}$, а после перехода к старой переменной

$$\sqrt{1+\frac{1}{3\cos^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\sqrt{3}\cos\varphi}.$$

Поэтому искомая длина

$$L = 2a\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\sqrt{3}\cos\varphi} - \ln(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{1+3\cos^2\varphi})\right]\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Окончательно

$$L = 2a\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi_2}}{\sqrt{3}\cos\varphi_2} - \frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi_1}}{\sqrt{3}\cos\varphi_1} - \right.$$

$$\left. - \ln\frac{\sqrt{3}\cos\varphi_2 + \sqrt{1+3\cos^2\varphi_2}}{\sqrt{3}\cos\varphi_1 + \sqrt{1+3\cos^2\varphi_1}}\right].$$

Вычисление длин дуг многих кривых, например, эллипса, гиперболы, лемнискаты, приводит к так называемым эллиптическим интегралам, которые мы рассмотрим в связи с упражнениями по степенным рядам.

Объем тела

Если известна площадь $S(x)$ поперечного сечения тела, то его объем

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \qquad (16,4)$$

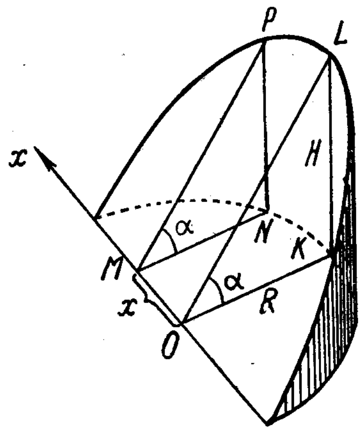
где абсциссы a и b отвечают крайним сечениям.

Объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой, определяемой уравнением $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx. \qquad (16,5)$$

Площадь поверхности тела вращения определяется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (16,6)$$



К задаче 16,17

Задача 16,17. Найти объем тела, отсекаемого от прямого круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к нему.

Решение. Такое тело называется цилиндрическим отрезком. Пусть цилиндр, о котором идет речь, определяется уравнением $x^2 + y^2 = R^2$. Найдем площадь сечения, перпендикулярного оси Ox. Сечение — прямоугольный треугольник. Возьмем на оси Ox точку с абсциссой x ($|x| < R$). Площадь сечения будет функцией x:

$$S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP.$$

Но MN — ордината точки N окружности $x^2 + y^2 = R^2$ и

$$MN = \sqrt{R^2 - x^2}; \quad NP = MN \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Если обозначить через H высоту цилиндрического отрезка ($KL = H$), то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{R}$, и тогда $NP = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{H}{R}$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{H}{R};$$

$$S(x) = \frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2 - x^2).$$

Переменная интегрирования x изменяется от $-R$ до $+R$, а потому по формуле (16,4)

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{H}{R}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{H}{R}\cdot 2\int_{0}^{R}(R^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{H}{R}\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{2}{3}HR^2 \text{ куб. ед.}$$

Задача 16,18. Найти объем части однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, ограниченного плоскостями $z=-H$ и $z=H$.

Решение. Вычислим площадь сечения гиперболоида плоскостью, перпендикулярной оси Oz при постоянном z.

Площадь эта будет функцией z. В сечении получится эллипс, который определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}\\ z=\text{const}\end{aligned}\right\}.$$

Перепишем первое уравнение так, чтобы можно было сразу усмотреть, чему равны полуоси эллипса. Для этого обе его части разделим на правую часть. Тогда уравнения эллипса, полученного в сечении, будут такими:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}=1\\ z=\text{const}\end{aligned}\right\}.$$

Из первого уравнения следует, что полуоси этого эллипса равны:

$$a_1=a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}};\quad b_1=b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}},$$

а потому его площадь (см. задачу 15,7)

$$S(z)=\pi a_1b_1=\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

В формуле (16,4) переменной интегрирования надо взять не x, а z, так как площадь поперечного сечения есть функция z, причем на вычисляемом объеме z изменяется от $-H$ до $+H$, поэтому

$$V=\int_{-H}^{H}\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\left(H+\frac{H^3}{3c^2}\right) \text{ куб. ед.}$$

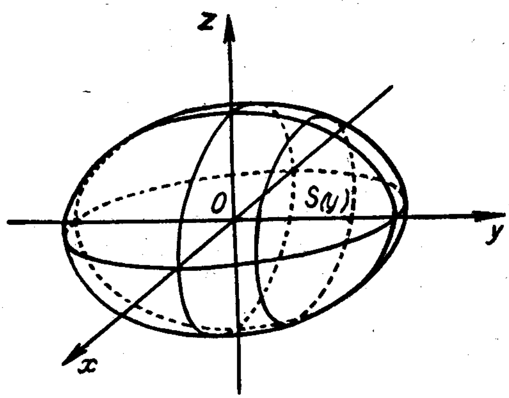
Задача 16,19 (для самостоятельного решения).

Найти объем трехосного эллипсоида, определяемого уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Указание. Пересечь эллипсоид плоскостью, перпендикулярной оси Oy и проходящей через точку y этой оси ($-b\leqslant y\leqslant\leqslant b$). При постоянном y из уравнения эллипсоида получим уравнение эллипса-сечения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\\ y=\text{const}\end{aligned}\right\},$$



К задаче 16,19

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}=1\\ y=\text{const}\end{aligned}\right\}.$$

Полуоси этого эллипса:

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}};\quad c_1=c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},$$

а его площадь

$$S(y)=\pi a_1c_1=\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Теперь в формуле (16,4) надо вести интегрирование не по x, а по y в пределах от $-b$ до $+b$:

$$V=\pi ab\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{3}\pi abc\ \text{куб. ед.}$$

Итак, объем трехосного эллипсоида

$$V = \frac{4}{3}\pi abc \text{ куб. ед.}$$

Этот результат полезно помнить.

Если $a = b = c$, то эллипсоид — сфера, и тогда объем, ею ограниченный, равен

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \text{ куб. ед.}$$

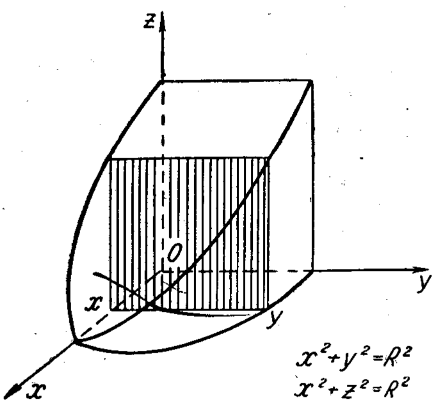
(Хорошо известная из геометрии формула для вычисления объема шара).

Задача 16,20 (для самостоятельного решения).

Найти объем тела, ограниченного двумя прямыми круговыми цилиндрами:

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ и } x^2 + z^2 = R^2.$$

Указание. Пересечь тело плоскостью, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку с абсциссой x $(-R < x < R)$. На чертеже изображена восьмая часть тела.



К задаче 16,20

В сечении получится квадрат, сторона которого равна ординате той точки окружности $x^2 + y^2 = R^2$, абциссса которой равна x, т. е. сторона квадрата равна $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь квадрата будет функцией x, она равна

$$S(x) = y^2 = R^2 - x^2.$$

При вычислении объема восьмой части тела пределами интегрирования по x будут O и R:

$$\frac{V}{8} = \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx.$$

Ответ. $V = \frac{16}{3}R^3$ куб. ед.

Задача 16,21 (для самостоятельного решения).

Найти объем пирамиды, зная, что ее высота H, а основание — многоугольник, площадь которого равна S.

Указание. Из геометрии известно, что сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, есть многоугольник, подобный основанию, причем отношение площади сечения к площади основания равно отношению квадратов их расстояний от вершины. Провести сечение на расстоянии h от основания. Обозначить площадь сечения через $S(h)$. Расстояние этого сечения от вершины равно $H-h$. Поэтому

$$\frac{S(h)}{S}=\frac{(H-h)^2}{H^2}; \quad S(h)=\frac{S}{H^2}(H-h)^2.$$

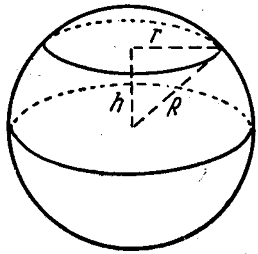
В формуле (16,4) переменной интегрирования будет h, причем h изменяется от 0 до H:

$$V=\int_0^H \frac{S}{H^2}(H-h)^2\,dh=\frac{SH}{3} \text{ куб. ед.}$$

Мы получили известный из геометрии результат: объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

Задача 16,22 (для самостоятельного решения).

Найти объем шара радиуса R.



К задаче 16,22

Указание. Пересечь шар плоскостью, перпендикулярной диаметру. Вычислить площадь круга, полученного в сечении. Из чертежа видно, что радиус этого круга $r=\sqrt{R^2-h^2}$. Его площадь есть функция h и равна $S(h)=\pi r^2=\pi(R^2-h^2)$, причем h — расстояние сечения от экваториальной плоскости и изменяется h от $-R$ до $+R$.

В формуле (16,4) переменной интегрирования надо взять h

$$V=\int_{-R}^{R} S(h)\,dh=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-h^2)\,dh=\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ куб. ед.}$$

Объемы и поверхности тел вращения

Задача 16,23. Найти объем и боковую поверхность параболоида, образованного вращением параболы $y^2=2px$ вокруг оси Ox и ограниченного плоскостью $x=H$.

Решение. Объем тела вычислим по формуле (16,5):

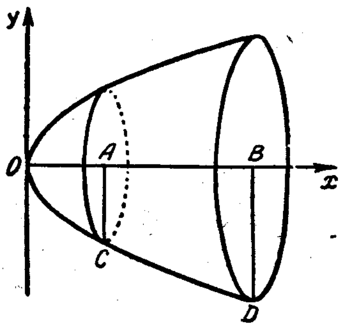
$$V=\pi\int_0^H y^2dx=\pi\int_0^H 2px\,dx=2p\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^H=\pi pH^2 \text{ куб. ед.}$$

Боковая поверхность определится по формуле (16,6). Найдем сначала корень $\sqrt{1+y'^2}$, входящий в эту формулу. Если $y^2=2px$, то $y'=\frac{p}{y}$, $y'^2=\frac{p^2}{y^2}=\frac{p^2}{2px}=\frac{p}{2x}$; $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}$.

Так как $y^2=2px$, то $y=\sqrt{2px}$ и по формуле (16,6) находим

$$S=2\pi\int_0^H\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx=2\pi\int_0^H\sqrt{2px+p^2}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^H=\frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left[\left(H+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \text{ кв. ед.}$$



К задаче 16,23

Задача 16,24. Вычислить объем и поверхность шара, рассматривая его как тело вращения.

Решение. Будем полагать, что сфера образована вращением окружности $x^2+y^2=R^2$ вокруг оси Ox. Чтобы найти объем шара по формуле (16,4), найдем из уравнения окружности $y^2=R^2-x^2$. Переменная интегрирования x изменяется от $-R$ до $+R$, а поэтому

$$V=\pi\int_{-R}^{R}y^2dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ куб. ед.}$$

Теперь вычислим площадь поверхности сферы по формуле (16,6). Из уравнения окружности найдем, что $y'=-\frac{x}{y}$; $\sqrt{1+y'^2}=$ $=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y}}=\frac{R}{y}$, так как $x^2+y^2=R^2$. Подставляя это значение корня в (16,6), получим

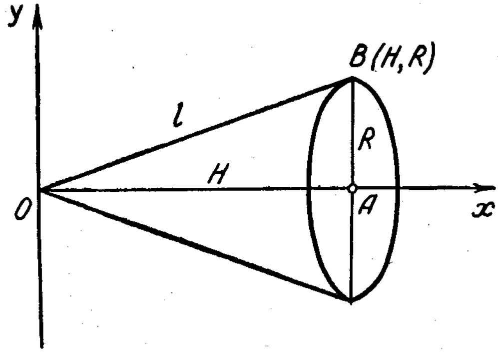
$$S=2\pi\int_{-R}^{R}y\sqrt{1+y'^2}dx=2\pi\int_{-R}^{R}y\cdot\frac{R}{y}\,dx=2\pi Rx\Big|_{-R}^{R};$$

$$S=4\pi R^2 \text{ кв. ед.}$$

Здесь уместно обратить внимание читателя на то, как просто с помощью интегрального исчисления получены объем и поверхность шара. Для того, чтобы это оценить, полезно вспомнить достаточно сложный и громоздкий вывод этих же формул в элементарной геометрии.

Задача 16,25 (для самостоятельного решения).

Найти объем и боковую поверхность прямого кругового конуса, рассматривая его как тело, полученное от вращения полупрямой, проходящей через начало координат и точку (H, R), и ограниченное плоскостью $x = H$.



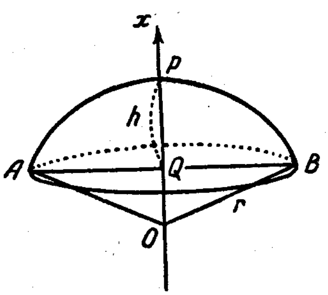
К задаче 16,25

Указание. Уравнение прямой $y = \frac{R}{H}x$. Определив боковую поверхность конуса, учесть, что его образующая $L = \sqrt{H^2 + R^2}$.

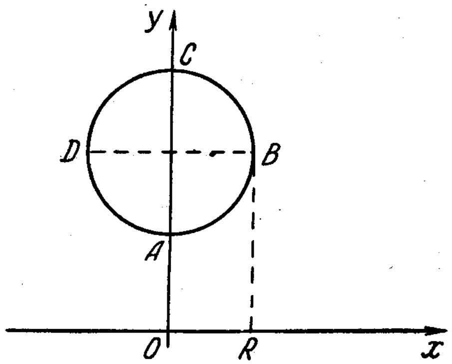
Ответ. $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$; $S = \pi RL$.

Задача 16,26 (для самостоятельного решения).

Доказать, что поверхность сферического сегмента равна боковой поверхности цилиндра с тем же основанием и высотой.



К задаче 16,26



К задаче 16,27

Задача 16,27. Вычислить объем и поверхность тора, образованного вращением круга, уравнение окружности которого $x^2 + (y - a)^2 = R^2$, вокруг оси Ox $(a > R)$.

Решение. Тором называется тело, образованное вращением круга вокруг прямой, лежащей в плоскости этого круга и не пересекающей его. Это тело напоминает бублик или автомобильную шину. Из чертежа видно, что объем тела равен разности объемов тел, полученных от вращения полукруга $BCDB$ и полукруга $ABDA$ вокруг оси Ox. Чтобы воспользоваться формулой (16,5), найдем ординаты кривых BCD и BAD. Решим уравнение окружности относительно y:

$$(y-a)^2 = R^2 - x^2; \quad y - a = \pm\sqrt{R^2 - x^2};$$

$$y = a \pm \sqrt{R^2 - x^2}.$$

На окружности BCD: $y_{BCD} = a + \sqrt{R^2 - x^2}$;

на окружности BAD: $y_{BAD} = a - \sqrt{R^2 - x^2}$;

$$V = V_{BCD} - V_{BAD} = 2\pi \int_0^R y_{BCD}^2\, dx - 2\pi \int_0^R y_{BAD}^2\, dx.$$

(Множитель 2 появился потому, что мы взяли пределами интегрирования не $-R$ и $+R$, а O и R, учитывая симметрию тела относительно оси Oy).

$$V = 2\pi \int_0^R (y_{BCD}^2 - y_{BAD}^2)\, dx = 2\pi \int_0^R (y_{BCD} - y_{BAD})(y_{BCD} + y_{BAD})\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^R 2a \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 8a\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 8a\pi \left(\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{R^2}{2} \arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi^2 aR^2 \text{ куб. ед.}$$

Поверхность тора равна сумме поверхностей, полученных от вращения дуг BCD и BAD вокруг оси Ox.

На верхней полуокружности BCD $y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$; $y'^2 = \frac{x^2}{R^2 - x^2}$; $1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$; $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

На нижней полуокружности BAD $\sqrt{1 + y'^2}$ имеет то же значение (вычислите его). Поэтому

$$S = S_{BCD} + S_{BAD} = 2\left[2\pi \int_0^R y_{BCD}\sqrt{1 + y'^2}\, dx + 2\pi \int_0^R y_{BAD}\sqrt{1 + y'^2}\, dx\right] =$$

$$= 4\pi \int_0^R (y_{BCD} + y_{BAD})\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Но

$$y_{BCD} + y_{BAD} = 2a; \text{ а } \sqrt{1+y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

и

$$S = 4\pi \int_0^R 2a \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx = 8\pi aR \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 8\pi aR \arcsin \frac{x}{R}\Bigg|_0^R =$$

$$= 4\pi^2 aR \text{ кв. ед.}$$

Задача 16,28 (для самостоятельного решения).

Вычислить поверхность эллипсоида, полученного от вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: а) вокруг его большой оси (так называемый вытянутый эллипсоид вращения) и б) вокруг малой оси (сжатый эллипсоид вращения).

Указание. В случае а) вычисление поверхности сведется к интегралу $\frac{2\pi b}{a^2}\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}\,dx$.

Следует для упрощения записей ввести $a^2 - b^2 = c^2$, где c — половина фокусного расстояния, а поэтому

$$S = \frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^4 - c^2x^2}\,dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a} \sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2 - x^2}\,dx,$$

и теперь можно воспользоваться формулой (4,7).

В случае б) вращение происходит вокруг оси Oy, и задача сводится к вычислению поверхности по формуле

$$S = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy. \qquad (16,7)$$

(Этой формулой следует пользоваться в том случае, когда поверхность образована вращением вокруг оси Oy).

Ответ. а) $S = 2\pi b\left(b + \frac{a^2}{c}\arcsin\frac{c}{a}\right)$;

б) $S = 2\pi a\left(a + \frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)$.

Этот ответ получится, если учесть, что $\sqrt{b^2+c^2} = a$.

Задача 16,29 (для самостоятельного решения).

Решить предыдущую задачу, взяв уравнение эллипса в параметрической форме:

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t.$$

Указание. В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, объем тела вращения

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)\, \varphi'(t)\, dt, \tag{16,8}$$

а поверхность тела вращения

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt. \tag{16,9}$$

При вычислении половины площади поверхности пределами интегрирования по t будут 0 и $\frac{\pi}{2}$.

В первом случае (вытянутый эллипсоид вращения) получится

$$S = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}\, \cos\varphi\, d\varphi.$$

Интеграл легко вычисляется подстановкой $e \sin\varphi = z$ (новые пределы интегрирования 0 и e), где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Во втором случае (сжатый эллипсоид вращения)

$$S = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \sin^2\varphi}\, \cos\varphi\, d\varphi,$$

где $k^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$.

Применить подстановку $k \sin\varphi = z$. Новые пределы интегрирования 0 и k. Ответы, конечно, должны получиться те же. Докажите, что при b, стремящемся к a, из обоих ответов получится площадь поверхности сферы $4\pi a^2$.

При определении предела $\frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a}$ представить это выражение в виде $a \frac{\arcsin e}{e}$, учитывая, что $\frac{c}{a} = e$.

Задача 16,30 (для самостоятельного решения).

Найти объем и поверхность тела, образованного вращением одной арки циклоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

вокруг оси Ox.

Окажется, что

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt = 5\pi^2 a^3$$

$$\left(\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt = \int_0^{2\pi} (1-3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt = 5\pi\right).$$

При вычислении поверхности надо пользоваться формулой (16,9):

$$S = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt.$$

Ответ. $V = 5\pi^2 a^3$ куб. ед.; $S = \frac{64}{3}\pi a^2$ кв. ед.

Задача 16,31 (для самостоятельного решения).

Найти объем и поверхность тела, образованного вращением кардиоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= 2R\cos t - R\cos 2t \\ y &= 2R\sin t - R\sin 2t \end{aligned}\right\}$$

вокруг ее оси (см. чертеж к задаче 15,21).

Указание. При вычислении объема воспользоваться формулой (16,8), при вычислении поверхности — формулой (16,9).

Ответ. $V = \frac{64}{3}\pi R^3$ куб. ед.; $S = \frac{128}{5}\pi R^2$ кв. ед.

Задача 16,32 (для самостоятельного решения).

Найти объем и поверхность тела, полученного от вращения астроиды

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos^3 \frac{t}{4} \\ y &= R\sin^3 \frac{t}{4} \end{aligned}\right\}$$

вокруг оси Ox (см. чертеж к задаче 15,27).

Ответ. $V = \frac{32}{105}\pi R^3$ куб. ед.; $S = \frac{12}{5}\pi R^2$ кв. ед.

СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференциальные уравнения первого порядка.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные (или ее дифференциалы).

В случае, когда неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n в самом общем случае содержит независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы до порядка n включительно и имеет вид

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (17,1)$$

В этом уравнении x — независимая переменная, y — неизвестная функция, а y', y'', ..., $y^{(n)}$ — производные неизвестной функции.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$f(x, y, y') = 0, \qquad (17,2)$$

а если его удастся решить относительно производной, то оно запишется так:

$$y' = F(x, y). \qquad (17,3)$$

Задача состоит в определении из дифференциального уравнения неизвестной функции, а процесс определения этой функции называется решением, или интегрированием дифференциального уравнения.

Решением, или интегралом уравнения (17,3) называется всякая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. такая, после подстановки которой в уравнение (17,3) оно обращается в тождество, т. е.

$$\varphi'(x) = F[x, \varphi(x)]$$

является тождеством относительно x.

Кривая $y = \varphi(x)$, определяемая решением уравнения (17,2) или (17,3), называется интегральной кривой дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения (17,2) или (17,3) называются соотношения вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \text{ или } \Phi(x, y) = C, \tag{17,4}$$

включающие одну произвольную постоянную величину и обладающие тем свойством, что решая их относительно y при любых частных значениях произвольной постоянной, получаем функции вида $y = \varphi(x)$, являющиеся решениями уравнения (17,2) или (17,3).

Уравнения (17,4) определяют *семейство интегральных кривых* уравнения (17,2).

Частным решением дифференциального уравнения (17,2) называется такое решение, которое получается из общего решения (17,4) при некотором частном значении произвольной постоянной.

Произвольная постоянная C, входящая в (17,4), определяется из так называемых начальных условий.

Задача с начальными условиями ставится так: найти решение $y = \varphi(x)$ уравнения (17,2) такое, чтобы оно принимало заданное значение y_0 при заданном значении независимой переменной $x = x_0$, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$y_0 = \varphi(x_0).$$

С точки зрения геометрии задача с начальными условиями сводится к тому, чтобы из семейства интегральных кривых (17,4) выделить ту, которая проходит через точку (x_0, y_0) плоскости.

Задача Коши. Задача отыскания решения уравнения (17,2), удовлетворяющего начальным условиям

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

называется *задачей Коши.*

Особое решение. Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной, включая $\pm\infty$, называется его особым решением.

При решении дифференциального уравнения надо стремиться к тому, чтобы наряду с определением общего решения были найдены также и особые.

Мы рассмотрим на этом практическом занятии типы дифференциальных уравнений первого порядка, предусмотренные программой.

Первый тип. **Уравнения с разделяющимися переменными**

Этот тип уравнений является самым простым типом уравнений первого порядка, но вместе с тем очень важным.

Если в дифференциальное уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$ производная y' входит в первой степени, то после решения его относительно y' получится уравнение вида

$$f(x, y) + \varphi(x, y)\, y' = 0.$$

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то это уравнение может быть переписано так:

$$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = 0.$$

В частном случае, когда каждая из функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ является произведением двух функций, одна из которых — функция только x, а вторая — только y, т. е. когда

$$f(x, y) = f_1(x)\cdot f_2(y), \text{ а } \varphi(x,y) = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y),$$

уравнение примет вид

$$f_1(x)\cdot f_2(y)\,dx + \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\,dy = 0. \qquad (17,5)$$

Уравнение (17,5) называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Разделение переменных производится делением обеих частей (17,5) на произведение $\varphi_1(x)\cdot f_2(y)$, в котором $f_2(y)$ — функция только от y, являющаяся множителем при dx, а $\varphi_1(x)$ — функция только от x, являющаяся множителем при dy. После деления на это произведение уравнение (17,5) примет вид

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0, \qquad (17,6)$$

а его общий интеграл запишется так:

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C. \qquad (17,7)$$

Особые решения уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение (17,5) может быть переписано так:

$$\varphi_1(x)\cdot f_2(y)\left[\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy\right] = 0.$$

Поэтому, кроме найденного ранее общего интеграла (17,7) уравнения (17,5), ему могут также удовлетворять решения, получаемые из уравнения

$$\varphi_1(x)\cdot f_2(y) = 0. \qquad (17,8)$$

Если эти решения не входят в общий интеграл (17,7), то они будут *особыми* решениями уравнения (17,5).

Задача 17,1. Найти общие интегралы уравнений, особые решения, а также частные решения, удовлетворяющие начальным условиям:

Начальные условия:

1) $x^2(y^3+5)\,dx+(x^3+5)\,y^2\,dy=0,\qquad y(0)=1;$

2) $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0,\qquad y(\sqrt{3})=0;$

3) $xy\,dx+(1+y^2)\sqrt{1+x^2}\,dy=0,\qquad y(\sqrt{8})=1;$

4) $y'=5\sqrt{y},\qquad y(0)=25;$

5) $\operatorname{tg} y\,dx-x\ln x\,dy=0,\qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=e;$

6) $y'+y^2=1.$

Решение. 1) Приведем уравнение к виду (17,6). Разделим обе части уравнения на $(x^3+5)(y^3+5)$ и получим

$$\frac{x^2}{x^3+5}\,dx+\frac{y^2}{y^3+5}\,dy=0.$$

Теперь переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{x^2}{x^3+5}\,dx+\int\frac{y^2}{y^3+5}\,dy=C_1;$$

$$\frac{1}{3}\ln|x^3+5|+\frac{1}{3}\ln|y^3+5|=\frac{1}{3}\ln|C|.$$

(Здесь мы заменили C_1 на $\frac{1}{3}\ln|C|$).

Отсюда общий интеграл запишется так:

$$(x^3+5)(y^3+5)=C.$$

Следует также рассмотреть уравнение $(x^3+5)(y^3+5)=0$. Но решения этого уравнения не являются особыми, так как они получаются из общего интеграла при $C=0$. (Напоминаем, что *особым решением* дифференциального уравнения называется такое его решение, которое не может быть получено из общего ни при одном частном значении произвольной постоянной C).

Используя начальное условие, найдем C: подставляем $x=0$, $y=1$ в общий интеграл:

$$(0+5)(1+5)=C;\quad C=30.$$

Частное решение, соответствующее начальному условию:

$$(x^3+5)(y^3+5)=30.$$

2) Приведем уравнения к виду (17,6). Для этого разделим обе его части на $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}$. После деления получим

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy=0.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получим общий интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = C.$$

Отсюда

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \quad (C > 0). \qquad (17{,}9)$$

($C > 0$, так как рассматриваются только арифметические значения корня).

Теперь следует решить вопрос об особых решениях. Для этого рассмотрим уравнение

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2} = 0.$$

Действительных решений это уравнение не имеет, а потому и нет особых решений.

Частное решение получим из условия $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$. Подставляя эти значения x и y в общий интеграл (17,9), получим

$$\sqrt{1+3} + \sqrt{1+0} = C; \; C = 3;$$

и частным решением будет

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 3.$$

3) Обе части уравнения делим на $y\sqrt{1+x^2}$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \frac{1+y^2}{y}\,dy = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \left(\frac{1}{y} + y\right) dy = C$$

или

$$\sqrt{1+x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = C.$$

Чтобы рассмотреть вопрос об особых решениях, надо приравнять нулю произведение $y\sqrt{1+x^2} = 0$. Отсюда следует, что $y = 0$, $\sqrt{1+x^2} = 0$.

Решение $y = 0$ является особым решением, так как оно удовлетворяя уравнению не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении C. Уравнение же $\sqrt{1+x^2} = 0$ действительных решений не имеет.

Частное решение получим, подставляя в общий интеграл $x = \sqrt{8}$; $y = 1$:

$$\sqrt{1+8} + \ln 1 + \frac{1}{2} = C; \; C = \frac{7}{2}.$$

Частное решение

$$\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}=\frac{7}{2},$$

или

$$2\sqrt{1+x^2}+\ln y^2+y^2=7.$$

4) Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=5\sqrt{y}$.

Отсюда, деля обе части уравнения на $5\sqrt{y}$ и умножая на dx, получим

$$\frac{dy}{5\sqrt{y}}=dx.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл

$$\frac{2}{5}\sqrt{y}=x+C, \tag{17,10}$$

или

$$y=\frac{25}{4}(x+C)^2.$$

Чтобы получить особое решение, рассмотрим уравнение $5\sqrt{y}=0$, откуда $y=0$. Это решение будет особым, так как оно не может быть получено из общего ни при одном числовом значении произвольной постоянной C.

Частное решение получим из (17,10), подставляя в него $x=0$, $y=25$:

$$\frac{2}{5}\sqrt{25}=0+C;\ C=2,$$

и частным решением будет

$$y=\frac{25}{4}(x+2)^2.$$

5) Для того, чтобы разделить переменные, разделим обе части уравнения на $\operatorname{tg} y\cdot\ln x$, и получим $\frac{dx}{x\ln x}-\frac{dy}{\operatorname{tg} y}=0$, а интегрируя

$$\int\frac{dx}{x\ln x}-\int\frac{dy}{\operatorname{tg} y}=\ln|C|,$$

найдем

$$\ln|\ln x|-\ln|\sin y|=\ln|C|,$$

Отсюда

$$\frac{\ln x}{\sin y}=C,$$

или

$$\text{in}\, x=C\sin y.$$

Общий интеграл уравнения

$$x = e^{C \sin y}. \tag{17,11}$$

Для решения вопроса об особом решении надо приравнять нулю выражение $\operatorname{tg} y \cdot x \ln x$, на которое мы делим уравнение:

$$\operatorname{tg} y \cdot x \ln x = 0.$$

Отсюда $\operatorname{tg} y = 0$; $x = 0$; $\ln x = 0$. Таким образом, $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots$); $x = 0$; $x = 1$.

Но из общего интеграла при $C = 0$ получаем $x = 1$. Значит, $x = 1$ является не особым решением, а частным. При $C = -\infty$ имеем $x = 0$, а потому $x = 0$ также не особое решение, а частное. При $C = +\infty$ будет $y = k\pi$, что следует из (17,11), и поэтому эти решения не особые, а частные. Таким образом, решения $x = 0$; $x = 1$ и $y = k\pi$ «подозрительные» на особенность являются попросту частными решениями. Значит, особых решений уравнение не имеет.

Чтобы найти частное решение, подставим в (17,11) $x = e$; $y = \frac{\pi}{2}$, и получим

$$e = e^{C \sin \frac{\pi}{2}}; \ e = e^C; \ C = 1.$$

Поэтому частным решением будет

$$x = e^{\sin y}.$$

6) Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2.$$

Разделим обе части уравнения на $1 - y^2$ и умножим на dx. Получим уравнение, в котором переменные разделены:

$$\frac{dy}{1 - y^2} = dx.$$

Интегрируем обе его части:

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = x + C;$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = x + C.$$

Отсюда

$$\ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = 2(x + C); \ \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = e^{2(x+C)};$$

$$\frac{1 + y}{1 - y} = e^{2(x+C)}, \ \text{или} \ \frac{1 + y}{1 - y} = -e^{2(x+C)}.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) $\frac{1 + y}{1 - y} = e^{2(x+C)}$; $y = \frac{e^{2(x+C)} - 1}{e^{2(x+C)} + 1} = \frac{e^{(x+C)} - e^{-(x+C)}}{e^{(x+C)} + e^{-(x+C)}}.$

Общий интеграл: $y = \operatorname{th}(x + C)$.

2) $\frac{1+y}{1-y} = -e^{2(x+C)}$; $y = \frac{e^{2(x+C)}+1}{e^{2(x+C)}-1} = \frac{e^{(x+C)}+e^{-(x+C)}}{e^{(x+C)}-e^{-(x+C)}}$.

Общий интеграл: $y = \operatorname{cth}(x + C)$.

Чтобы решить вопрос об особом решении, приравняем нулю выражение $1 - y^2$, на которое мы делили обе части уравнения:

$$1 - y^2 = 0, \quad y = \pm 1.$$

Эти решения являются особыми, так как не могут быть получены из общего ни при одном числовом значении произвольной постоянной C.

Задача 17,2 (для самостоятельного решения).

Найти общие интегралы, особые и частные решения дифференциальных уравнений:

1) $y' = 0$; 2) $y' = a$; 3) $y' = 2x^2 + 5x + 12$; $y(1) = \frac{1}{6}$;

4) $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$;

5) $\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$; $y(0) = 1$;

6) $(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$; $y(1) = 2$.

Указания. В пятом уравнении произвольную постоянную выгодно ввести под видом $\arcsin C$, в шестом уравнении — под видом $\operatorname{arctg} C$.

Ответ. 1) $y = C$; 2) $y = ax + C$;

3) $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 12x + C$. Частное решение $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 12x - 15$.

4) $y = \frac{1+4e^{5(x+C)}}{1-e^{5(x+C)}}$; $y = \frac{1-4e^{5(x+C)}}{1+e^{5(x+C)}}$.

Решения $y = 1$ и $y = -4$ — частные. Они содержатся в общем решении: первое при $C = -\infty$, второе при $C = +\infty$.

5) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin C$, или, беря синус обеих частей, $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$. Учесть, что $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

Особое решение $y = \pm 1$. Частное решение $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$.

6) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} C$. Беря тангенс обеих частей, это равенство можно записать в виде $\frac{x+y}{1-xy} = C$. Частное решение $\frac{x+y}{1-xy} = -3$. Учесть, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$.

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by + c) \qquad (17,12)$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$ax + by + c = z; \; a + by' = z'; \; y' = \frac{z' - a}{b}.$$

Уравнение (17,12) принимает вид:

$$\frac{z' - a}{b} = f(z); \; z' = bf(z) + a;$$

$$\frac{dz}{dx} = bf(z) + a, \quad \text{или} \quad \frac{dz}{bf(z) + a} = dx.$$

Последнее уравнение — уравнение, в котором переменные разделены. В общем интеграле следует перейти к старой переменной, заменив z на $ax + by + c$.

Задача 17,3. Найти решения уравнений:

$$1) \; y' = \frac{1}{3x + y}; \; 2) \; y'(y + x) = 1; \; 3) \; y' = 3^{3x+2y}.$$

Решение. Первое и второе уравнения этой задачи относятся к типу (17,12), а третье — уравнение с разделяющимися переменными.

1) Подстановка: $3x + y = z$. Дифференцируя, находим: $3 + y' = z'$; $y' = z' - 3$. Поэтому $z' - 3 = \frac{1}{z}$; $z' = \frac{1 + 3z}{z}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1 + 3z}{z}$. Разделяем переменные, умножая обе части последнего уравнения на $\frac{z}{1 + 3z}dx$. Получаем $\frac{z}{1 + 3z}dz = dx$.

Интегрируя, находим

$$\int \frac{z}{1 + 3z}dz = x + C;$$

откуда, вычисляя интеграл, получаем

$$\frac{1}{3}z - \frac{1}{9}\ln|1 + 3z| = x + C,$$

а заменяя z на $3x + y$, имеем

$$\frac{1}{3}(3x + y) - \frac{1}{9}\ln|9x + 3y + 1| = x + C.$$

2) Подстановка: $x + y = z$.

Ответ. $y - \ln|x + y + 1| = C$.

3) Представить правую часть в виде $3^{3x+2y} = 3^{3x} \cdot 3^{2y}$: $\frac{dy}{dx} = 3^{3x} \cdot 3^{2y}$; $\frac{dy}{3^{2y}} = 3^{3x}\,dx$.

Произвольную постоянную выгодно ввести под видом $-\frac{C}{6 \ln 3}$.

Ответ. $3 \cdot 3^{-2y} + 2 \cdot 3^{3x} = C$.

Задача 17,4 (для самостоятельного решения).

Проинтегрировать уравнения:

1) $y' = 3x + 4y$; 2) $y' = \frac{2}{x+2y} - 3$; 3) $y' = \sqrt{2x+y-3}$.

Ответ. 1) $y = Ce^{4x} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}$;

2) $5x + 10y + 4 \ln |5x + 10y - 4| = C - 25x$;

3) $2\sqrt{2x+y-3} - 4 \ln (\sqrt{2x+y-3} + 2) = x + C$.

Второй тип. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения вида

$$y' + p(x) y = q(x) \tag{17,13}$$

называются линейными потому, что искомая функция y и ее производная y' входят в них в первой степени.

Функции $p(x)$ и $q(x)$ предполагаются непрерывными в промежутке (a, b), в котором ищется решение уравнения (17,13).

Если правая часть в (17,13) — функция $q(x)$ тождественно равна нулю при всех значениях x из (a, b), то уравнение принимает вид

$$y' + p(x) y = 0 \tag{17,14}$$

и называется в этом случае линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Оно соответствует уравнению (17,13), которое при $q(x) \neq 0$ называется неоднородным. Отметим, что линейное однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Иногда уравнение (17,14) называется линейным уравнением без правой части.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (17,13) можно найти с помощью подстановки

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} v(x), \tag{17,15}$$

где $v(x)$ — новая искомая функция. Множитель $e^{-\int p(x)\,dx}$ — общее решение линейного однородного уравнения (17,14), соответствующего уравнению (17,13), причем в этом общем решении опущен множитель C.

Эта подстановка предпочтительнее указанной в учебниках — $y = uv$, так как функция u всегда равна выражению $e^{-\int p(x)\,dx}$ и ее, собственно, каждый раз отыскивать излишне.

Подстановка (17,15) приводит (17,13) к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 17,5. Найти решение уравнения $y' + y = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

(Прежде всего обратите внимание на то, что уравнение — линейное, так как искомая функция y и ее производная y' входят в него в первой степени).

Решение. Сравнивая это уравнение с (17,13), мы видим, что функция $p(x)$ — коэффициент при y — равна 1.

Чтобы применить подстановку (17,15), вычислим $\int p(x)\,dx$, который при $p(x) = 1$ запишется в виде $\int p(x)\,dx = \int dx = x$, а $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-x}$. Поэтому подстановка (17,15) имеет вид

$$y = e^{-x}v. \tag{17,16}$$

Подставим выражение (17,16) в заданное уравнение. Для этого (17,16) продифференцируем как произведение

$$\begin{array}{r|l} 1 & y' = e^{-x}v'(x) - v(x)\,e^{-x} \\ & + \\ 1 & y = \qquad\qquad v(x)\,e^{-x} \\ \hline & e^x = e^{-x}v'(x) \end{array}$$

(Складывая в левых частях этих равенств $y' + y$, мы получаем правую часть заданного уравнения, т. е. e^x).

Получилось уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}e^{-x} = e^x.$$

Умножая обе его части на $e^x\,dx$, получим

$$dv = e^{2x}\,dx,$$

а интегрируя, найдем

$$v = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Подставляя найденное значение v в (17,16), получим

$$y = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)e^{-x},$$

или

$$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x. \tag{17,17}$$

Как доказывается в теории интегрирования линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка (17,13), общее решение этого уравнения равно сумме двух слагаемых, из которых одно является общим решением соответствующего однородного уравнения (17,14), а другое — его частным решением неоднородного уравнения (оно получается из общего при $C = 0$). В нашем случае в (17,17) первое слагаемое Ce^{-x} — общее решение однородного линейного уравнения $y' + y = 0$, соответствующего заданному, а второе $\frac{1}{2}e^x$ — частное решение заданного уравнения.

Действительно, уравнение $y' + y = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{dx} = -y$; $\frac{dy}{y} = -dx$. Интегрируя, получим

$$\ln|y| = -x + \ln|C|;\ \ln|y| - \ln|C| = -x;\ \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x;$$

$$\left|\frac{y}{C}\right| = e^{-x};\quad |y| = |C|e^{-x};\quad y = Ce^{-x}.$$

Из (17,17) определим произвольную постоянную C, используя начальное условие $y(0) = 1$:

$$1 = Ce^0 + \frac{1}{2}e^{2.0};\ 1 = C + \frac{1}{2};\ C = \frac{1}{2}.$$

Подставляя в (17,17) $C = \frac{1}{2}$, получим частное решение $y = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$, т. е. частным решением является $y = \operatorname{sh} x$.

Задача 17,6. Найти общее решение уравнения $y' - 4y = \cos x$, а также частное, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Решение. Сравнивая с (17,13), заключаем, что, $p(x) = -4$ (это коэффициент при y в заданном уравнении). Чтобы применить подстановку (17,15), вычислим $-\int p(x)\,dx$, подставляя в него $p(x) = -4$:

$$-\int p(x)\,dx = -\int -4\,dx = 4x,$$

а $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{4x}$.

Поэтому (17,15) запишется так:

$$y = ve^{4x}. \tag{17,18}$$

Подставляя это значение y в заданное уравнение, получим

$$\begin{array}{r|l} 1 & y' = v'e^{4x} + 4ve^{4x} \\ -4 & y = \qquad\quad ve^{4x} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\cos x = v'e^{4x}} \end{array}$$

(при сложении два последних слагаемых уничтожились). Получилось уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx}e^{4x} = \cos x.$$

Умножая обе его части на $e^{-4x}\,dx$, получим

$$dv = e^{-4x}\cos x\,dx.$$

Интеграл правой части найден в задаче (4,22). В формуле (4,11) надо взять $a = -4$; $b = 1$.

Поэтому $v = \frac{e^{-4x}}{17}(\sin x - 4\cos x) + C$, а из (17,18) получаем:

$$y = \left[\frac{e^{-4x}}{17}(\sin x - 4\cos x) + C\right]e^{4x};$$

$$y = Ce^{4x} + \frac{1}{17}(\sin x - 4\cos x). \tag{17,19}$$

Здесь опять-таки следует обратить внимание на то, что слагаемое Ce^{4x} есть общее решение однородного линейного уравнения $y' - 4y = 0$, соответствующего данному неоднородному, а второе слагаемое — частное решение всего данного уравнения. Это слагаемое получается из общего решения при $C = 0$.

Чтобы определить частное решение, подставляем в (17,19) $x = 0$; $y = 1$ и получаем:

$$1 = C - \frac{4}{17}; \quad C = \frac{21}{17},$$

поэтому частным решением будет

$$y = \frac{1}{17}(21e^{4x} + \sin x - 4\cos x).$$

Задача 17,7 (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$x' + ax = e^{bt} \quad (a + b \neq 0).$$

Рассмотреть также случай $a + b = 0$.

Указание. Здесь искомая функция не y, как было в двух предыдущих задачах, а x, независимой переменной является t (это усматриваем из того, что правая часть e^{bt} — функция t).

Вместо интеграла $-\int p(x)\,dx$ в (17,15) надо вычислить $-\int a\,dt = -at$. Поэтому подстановка (17,15) будет такой:

$$x = v(t)\,e^{-at}.$$

Ответ. $x = Ce^{-at} + \frac{e^{bt}}{a+b} \quad (a + b \neq 0)$.

Если $a + b = 0$, то $x = Ce^{-at} + te^{-at}$.

Указание. Если $a + b = 0$, то $b = -a$.

В трех последних задачах коэффициент при первой степени искомой функции в линейном уравнении был величиной постоянной (это были числа 1, -4, a).

Теперь мы решим задачу, в которой этот коэффициент есть функция независимой переменной.

Задача 17,8. Найти решение уравнения

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

(Уравнение линейное, так как искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени).

Решение. Сравнивая заданное уравнение с (17,13), заключаем, что $p(x) = \cos x$; $-\int p(x)\,dx = -\int \cos x\,dx = -\sin x$. Поэтому множитель $e^{-\int p(x)\,dx}$ в (17,15) равен $e^{-\sin x}$, а подстановка (17,15) запишется так:

$$y = v(x)\,e^{-\sin x}. \qquad (17,20)$$

Подставляя это значение y в заданное уравнение, получим:

$$\begin{array}{r|l} 1 & y' = v'e^{-\sin x} - ve^{-\sin x}\cos x \\ \cos x & y = \qquad\qquad ve^{-\sin x} \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\sin x \cos x = v'e^{-\sin x}} \end{array}$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}e^{-\sin x} = \sin x \cos x.$$

Умножая его обе части на $e^{\sin x}$, получим

$$dv = e^{\sin x}\sin x \cos x\, dx,$$

а

$$v = \int e^{\sin x}\sin x \cos x\, dx = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x\, dx =$$

$$\left|\begin{array}{l|c} u = \sin x & du = \cos x\, dx \\ dt = e^{\sin x}\cos x & t = e^{\sin x} \end{array}\right|$$

$$= e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

Подставляя это значение v в (17,20), найдем

$$y = (e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C)\, e^{-\sin x};$$

$$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

Теперь найдем частное решение. Подставляем в общее решение начальное условие $x = 0$; $y = 0$; $0 = C - 1$; $C = 1$. Частное решение запишется так:

$$y = e^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

Задача 17,9 (для самостоятельного решения).

Найти общие и частные решения следующих линейных уравнений:

1) $y' + y\,\mathrm{tg}\, x = \cos^2 x;\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$

2) $y' - \frac{1}{x+2}y = x^2 + 4x + 5;\quad y(-1) = \frac{3}{2};$

3) $\frac{dx}{dt} - \frac{nx}{t+1} = e^t(t+1)^n;\quad x(0) = 1.$

Указания. При решении многих задач придется пользоваться формулой $e^{\ln N} = N$. В первом уравнении $p(x) = \mathrm{tg}\, x$;

$$-\int p(x)\, dx = -\int \mathrm{tg}\, x\, dx = \ln\cos x;\quad e^{-\int p(x)\,dx} = e^{\ln\cos x} = \cos x.$$

Во втором уравнении

$$p(x) = -\frac{1}{x+2};\ -\int p(x)\, dx = \int\frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|;$$

$$e^{-\int p(x)\,dx} = e^{\ln(x+2)} = x + 2.$$

Подстановка: $y = v(x)(x+2)$. Функция $v(x) = \int \frac{x^2+4x+5}{x+2} dx =$
$= \frac{(x+2)^2}{2} + \ln(x+2) + C$.

О т в е т. 1) $y = C\cos x + \sin x \cos x$; частное решение: $y = \sin x \cos x$;

2) $y = C(x+2) + \frac{(x+2)^3}{2} + (x+2)\ln(x+2)$; частное решение: $y = (x+2) + \frac{(x+2)^3}{2} + (x+2)\ln(x+2)$;

3) $x = C(t+1)^n + e^t(t+1)^n$; частное решение: $x = e^t(t+1)^n$.

Задача 17,10 (для самостоятельного решения).

Найти общие интегралы и частные решения линейных уравнений:

1) $y' - \frac{1}{\sin x \cos x} y = -\operatorname{cosec} x - \sin x$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $y' - 2xy = 1 - 2x^2$; $y(0) = 2$;

3) $xy' + y = x^2 + 3x + 2$; $y(1) = \frac{29}{6}$.

У к а з а н и я. 1) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x$; $e^{\ln \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$. Подстановка: $y = v \operatorname{tg} x$.

2) $p(x) = -2x$; $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{x^2}$. Подстановка: $y = ve^{x^2}$.

3) Обе части уравнения разделить на x. Функция $p(x) = \frac{1}{x}$;
$-\int p(x)\,dx = -\ln x$; $e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Подстановка: $y = v \cdot \frac{1}{x}$.

О т в е т. 1) $y = C\operatorname{tg} x + \cos x$; $y = \operatorname{tg} x + \cos x$;

2) $y = Ce^{x^2} + x$; $y = 2e^{x^2} + x$;

3) $y = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3} + \frac{3x}{2} + 2$; $y = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{3} + \frac{3x}{2} + 2$.

Задача 17,11. Найти общий интеграл уравнения

$$y\,dx - (x + y^2 \sin y)\,dy = 0.$$

Р е ш е н и е. Если обе части уравнения разделить на dy, то получится

$$y\frac{dx}{dy} - x - y^2 \sin y = 0.$$

Разделив на коэффициент при $\frac{dx}{dy}$, получим уравнение

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = y \sin y,$$

в котором искомой функцией является x, независимой переменной — y. А так как искомая функция x и ее производная $\frac{dx}{dy}$ входят в уравнение в первой степени, то оно линейное. Подстановка (17,15) запишется так:

$$x = v(y)\, e^{-\int p(y)\,dy} = ve^{-\int -\frac{1}{y}\,dy} = ve^{\ln y} = vy.$$

Общее решение: $x = Cy - y\cos y$.

Задача 17,12 (для самостоятельного решения).

Найти общие интегралы уравнений:

1) $t\,dx + (x - t\sin t)\,dt = 0$;

2) $2y\frac{dx}{dy} + x = 2y^3$;

3) $(y^2+1)\frac{dx}{dy} + 2xy = 2y^2$.

Указание. Каждое из этих уравнений линейно относительно x и $\frac{dx}{dy}$. Искомая функция — x, независимая переменная — y. Прежде чем интегрировать обе части уравнения, разделить на коэффициент при $\frac{dx}{dy}$.

Ответ. 1) $x = \frac{C}{t} + \frac{\sin t}{t} - \cos t$; 2) $x = \frac{C}{\sqrt{y}} + \frac{2}{7}y^3$;

3) $x = \frac{2}{3}\frac{y^3+C}{y^2+1}$.

Задача 17,13. Найти общие интегралы уравнений:

1) $y' - \frac{2x+1}{x^2+x+1}y = \cos x - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\sin x$;

2) $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x - \frac{x^2\cos x}{\sin x}$;

3) $y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x}$.

Указание. В третьем уравнении при интегрировании по частям, которое надо будет применить, два интеграла взаимно уничтожатся. Интегрировать по частям придется только один раз.

Ответ. 1) $y = C(x^2+x+1) + \sin x$;

2) $y = C\sin x + x^2$;

3) $y = Cx^2 + e^x$.

Третий тип. Уравнение Бернулли

Если правую часть линейного уравнения (17,13) умножить на y^n при условии, что n — любое действительное число, кроме нуля и единицы ($n \neq 0$ и $n \neq 1$), то получим уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n. \qquad (17{,}21)$$

Оно называется уравнением Бернулли.

Так как $n \neq 0$ и $n \neq 1$, то это уравнение не является линейным.

После умножения его обеих частей на y^{-n} и подстановки $y^{1-n} = z$, где z — новая искомая функция, оно приводится к линейному, интегрированием которого мы уже занимались.

Преобразование уравнения Бернулли в линейное будем проводить в такой последовательности:

1) умножим обе части уравнения на y^{-n};

2) введем подстановку $y^{1-n} = z$. Обе части этого равенства продифференцируем: $(1-n)\,y^{-n}y' = z'$; $y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}$;

3) полученное уравнение проинтегрируем как линейное с помощью подстановки (17,15), в которой вместо y надо писать z;

4) возвратимся к искомой функции, заменяя z на y^{1-n}.

Подробно мы рассматриваем решение только одного уравнения Бернулли и для самостоятельного решения предлагаем 5 уравнений, учитывая большое число упражнений, выполненных при интегрировании линейных уравнений.

Задача 17,14. Найти общее решение уравнения

$$xy' - y\,(2y \ln x - 1) = 0.$$

Решение. Приведем уравнение к виду (17,21):

$$y' + \frac{1}{x}\,y = 2\,\frac{\ln x}{x}\,y^2$$

(обе части уравнения мы разделили на x и слагаемое, содержащее y в первой степени, оставили в левой части уравнения).

1) Обе части уравнения умножим на y^{-2}:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}\,y^{-1} = 2\,\frac{\ln x}{x}. \qquad (17,22)$$

2) Сделаем теперь подстановку

$$y^{-1} = z. \qquad (17,23)$$

Дифференцируя обе части этого равенства и помня, что y есть функция x, получим

$$-y^{-2}y' = z', \quad \text{а} \quad y^{-2}y' = -z'.$$

Делая эти замены в (17,22), получим уравнение

$$-z' + \frac{1}{x}\,z = 2\,\frac{\ln x}{x},$$

или

$$z' - \frac{1}{x}\,z = -2\,\frac{\ln x}{x},$$

которое линейно относительно z и z'.

Чтобы сделать подстановку (17,15), вычислим сначала входящий в нее интеграл.

У нас $p(x)=-\frac{1}{x}$; $-\int p(x)\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln x$; $e^{-\int p(x)\,dx}=$ $=e^{\ln x}=x$.

Подстановка: $z=vx$.

$$\begin{array}{r|l} & z'=v'x+v \\ -\frac{1}{x} & z=\qquad vx \\ \hline \end{array}$$

$$-2\frac{\ln x}{x}=v'x;\ \frac{dv}{dx}=-2\frac{\ln x}{x^2};$$

$$dv=-2\frac{\ln x}{x^2}\,dx;$$

$$v=-2\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx=-2\left(-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}\right)=2\frac{\ln x}{x}+2\frac{1}{x}+C;$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u=\ln x & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dt=\frac{dx}{x^2} & t=-\frac{1}{x} \end{array}\right|$$

$$z=vx=\left(2\frac{\ln x}{x}+2\frac{1}{x}+C\right)x;$$

$$z=Cx+2(\ln x+1).$$

Чтобы возвратиться к исходной искомой функции, воспользуемся сделанной подстановкой (17,23) и получим

$$y^{-1}=Cx+2(\ln x+1).$$

Задача 17,15. (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнения:

1) $x^2y^2\frac{dy}{dx}+xy^3=a^2$; 2) $xy'-y^2\ln x+y=0$;

3) $y'-\frac{1}{x}y=-y^2$; 4) $(x^2-4)y'-4y=-(x+2)y^2$;

5) $y'+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$.

Указание. Прежде чем делать какие-нибудь преобразования в уравнениях 1, 2 и 4, следует разделить обе части уравнения на коэффициент при y'.

Ответ. 1) $y^3=\frac{C}{2x^3}+\frac{3a^2}{2x}$; 2) $\frac{1}{y}=1+\ln x+Cx$;

3) $y=\frac{2x}{x^2+C}$; 4) $\frac{1}{y}=\frac{x+2}{x-2}[C+\ln(x+2)]$;

5) $\sqrt{y}=C\sqrt[4]{1-x^2}-\frac{1-x^2}{3}$.

Четвертый тип. Однородные уравнения

(Эти уравнения не следует смешивать с линейными однородными уравнениями (17,14), которые рассматривались выше).

Если уравнения $y' = f(x, y)$ или $p(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ не изменяются при замене x на kx и y на ky, то они называются однородными. Подстановка

$$y = ux, \tag{17,24}$$

где u — новая искомая функция, преобразует однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

После того как новое уравнение будет проинтегрировано, следует u заменить на $\frac{y}{x}$.

Задача 17,16. Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1) $y' + \frac{x^2+y^2}{xy} = 0$; 2) $xy\,dy - y^2\,dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}\,dx$.

Решение. 1) Прежде всего следует убедиться, что это уравнение однородное. Заменив x на kx, а y на ky, заметим, что уравнение не изменилось. Это и доказывает, что оно однородное. Сделаем подстановку (17,24): $y = ux$. Тогда $y' = u'x + u$, и уравнение перепишется так:

$$u'x + u + \frac{x^2 + u^2x^2}{xux} = 0,$$

или, сокращая на x^2:

$$u'x + u + \frac{1+u^2}{u} = 0,$$

откуда $u'x + \frac{1+2u^2}{u} = 0$; $\frac{du}{dx}x = -\frac{1+2u^2}{u}$.

Теперь мы получили уравнение с разделяющимися переменными, которое после разделения переменных запишется следующим образом:

$$-\frac{u}{1+2u^2}\,du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$-\frac{1}{4}\ln(1+2u^2) = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$\ln(1+2u^2)^{-1} = 4\ln|x| + 4\ln|C|,$$

или, переходя от логарифмов к числам, т. е. потенцируя, находим

$$\frac{1}{1+2u^2} = Cx^4.$$

Заменим теперь u на $\frac{y}{x}$ и получим

$$\frac{1}{1+\frac{2y^2}{x^2}} = Cx^4; \quad \frac{x^2}{x^2+2y^2} = Cx^4.$$

Сократим на x^2, тогда $\frac{1}{x^2+2y^2} = Cx^2$.

Это решение удобнее записать в виде

$$\frac{1}{(x^2+2y^2)\,x^2} = C,$$

или $x^2(x^2+2y^2) = \frac{1}{C}$.

Заменяя $\frac{1}{C}$ на C_1, получаем

$$x^2(x^2+2y^2) = C_1.$$

2) В том, что это уравнение однородное, легко убедиться, заменив x на kx, а y на ky. Замечаем, что при этом уравнение не изменилось. Перепишем его для удобства в виде

$$\left[(x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2\right] dx - xy\,dy = 0$$

и сделаем подстановку $y = ux$, из которой следует, что

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

Уравнение перепишется в виде

$$\left[(x+ux)^2 e^{-u} + u^2x^2\right] dx - ux^2(u\,dx + x\,du) = 0.$$

Разделив обе его части на x^2, получим уравнение

$$\left[(1+u)^2 e^{-u} + u^2\right] dx - u(u\,dx + x\,du) = 0,$$

или

$$\left[(1+u)^2 e^{-u} + u^2 - u^2\right] dx - ux\,du = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя их, получим уравнение

$$\frac{dx}{x} - \frac{u\,du}{(1+u)^2 e^{-u}} = 0. \qquad (17{,}25)$$

Интеграл

$$\int \frac{u\,du}{(1+u)^2 e^{-u}} = \int \frac{ue^u\,du}{(1+u)^2} = \frac{e^u}{1+u}.$$

Поэтому из (17,25) получаем

$$\ln x - \frac{e^u}{1+u} = -\ln C,$$

или

$$\ln x + \ln C = \frac{e^u}{1+u}.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем

$$\ln Cx = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{1+\frac{y}{x}}; \quad \ln Cx = \frac{xe^{\frac{y}{x}}}{x+y},$$

и окончательно

$$(x+y)\ln Cx = xe^{\frac{y}{x}}.$$

Помещаем для самостоятельного решения еще 5 однородных уравнений.

Задача 17,17. Проинтегрировать уравнения:

1) $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$; 2) $(x^2 - xy)\,dy + y^2\,dx = 0$;

3) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1$; 4) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$;

5) $xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0$.

Указание. В третьем уравнении $\int\frac{du}{e^u+1} = \int\frac{e^u+1-e^u}{e^u+1}du = u - \ln(e^u+1)$. Полученное решение разрешить относительно $e^{\frac{y}{x}}$.

Ответ. 1) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 2) $y = Ce^{\frac{y}{x}}$;

3) $e^{\frac{y}{x}} = \frac{Cx}{1-Cx}$; 4) $y = 2x\operatorname{arctg} Cx$; 5) $\operatorname{tg}\frac{y}{2x} = \ln\frac{C}{x}$.

В заключение этого практического занятия решим несколько задач из физики и механики, которые требуют составления дифференциального уравнения первого порядка и его интегрирования.

В задачах 17,18—17,21, несмотря на их внешнее различие, две переменные величины x и время t, участвующие в них, обладают тем общим свойством, что *скорость изменения одной из них* (x) *по отношению к другой* (t) *пропорциональна наличному количеству величины* x *в рассматриваемый момент времени.*

Учитывая, что скорость изменения величины x есть производная $\frac{dx}{dt}$, обозначим через k коэффициент пропорциональности. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс, будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = kx. \qquad (17,26)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными и интегрируется оно очень просто.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x} = k\,dt; \quad \ln|x| = kt + \ln|C|,$$

или

$$\ln\left|\frac{x}{C}\right| = kt; \quad \left|\frac{x}{C}\right| = e^{kt}; \quad |x| = |C|e^{kt};$$

$$x = Ce^{kt}. \tag{17,27}$$

Таким образом, решением уравнения (17,26) является показательная функция.

Условие задачи должно содержать данные:

1) для определения произвольной постоянной, т. е. значение x_0 величины x в момент времени $t = t_0$: $x(t_0) = x_0$;

2) для определения коэффициента пропорциональности k.

Уравнение (17,26) описывает процесс непрерывного роста или непрерывного убывания величины x, причем, как видно из решения (17,27), рост имеет место при положительном коэффициенте пропорциональности k, а убывание — при отрицательном k.

Задача 17,18. Скорость распада радия пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Количество радия в начале процесса ($t = 0$) было равно x_0. Известно, что за 1600 лет распадается половина первоначального количества.

1) Через сколько лет количество нераспавшегося радия будет составлять 80% первоначального?

2) Определить, какой процент радия сохранится через 300 лет.

Решение. Уравнение (17,26) описывает процесс радиораспада. Определим в (17,27) произвольную постоянную C. Известно из условия задачи, что в начальный момент, т. е. при $t = 0$, количество радия равно x_0. Таким образом, начальное условие: $x(0) = x_0$. Подставляя в (17,27) $t = 0$; $x = x_0$, получим

$$x_0 = Ce^{0\cdot t}; \quad C = x_0,$$

а потому (17,27) перепишется так:

$$x = x_0e^{kt}. \tag{17,28}$$

Задача содержит условие, позволяющее определить коэффициент пропорциональности k: когда $t = 1600$, количество радия x равно половине начального, т. е. $x = \frac{x_0}{2}$. Подставляя в (17,28) $\frac{x_0}{2}$ вместо x и 1600 — вместо t, получаем $\frac{x_0}{2} = x_0e^{k\cdot 1600}$. Сокращая на x_0, получим $\frac{1}{2} = e^{k\cdot 1600}$. Для определения k, прологарифмируем по основанию e обе части этого равенства:

$$\ln\frac{1}{2} = k\cdot 1600; \quad \ln 1 - \ln 2 = k\cdot 1600; \quad k = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

Теперь решение (17,28) перепишется в виде

$$x = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600} t},$$

или

$$\frac{x}{x_0} = e^{-\frac{\ln 2}{1600} t}. \qquad (17,29)$$

Ответим на первый вопрос задачи. По условию $\frac{x}{x_0} = 0{,}8\,(80\%)$. Подставляя это значение в последнее уравнение, имеем

$$0{,}8 = e^{-\frac{\ln 2}{1600} t}.$$

Для определения t прологарифмируем обе части равенства

$$\ln 0{,}8 = -\frac{\ln 2}{1600} t,$$

отсюда

$$t = -\frac{1600 \ln 0{,}8}{\ln 2} = -\frac{1600\,(-0{,}223\,14)}{0{,}69315} \approx 515 \text{ лет.}$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, найдем из (17,29) отношение $\frac{x}{x_0}$ при $t = 300$:

$$\frac{x}{x_0} = e^{-\frac{\ln 2}{1600}\cdot 300}; \quad \frac{x}{x_0} = e^{-\frac{0{,}69315\cdot 300}{1600}} = e^{-0{,}130} \approx 0{,}878 = 87{,}8\%.$$

Таким образом, через 300 лет сохранится 87,8% начального количества радия, а следовательно, распадется за 300 лет 12,2%.

Задача 17,19 (для самостоятельного решения).

Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

Определить, за какое время тело, нагретое до температуры $x_0 = 300°$, помещенное в жидкость, температура которой 60°, охладится до 150°, если считать количество жидкости настолько большим, что ее температура практически остается без изменения. При этом известно, что через 10 минут после начала процесса температура тела равна 200°.

Указание. Обозначить через x непрерывно убывающую температуру тела ($300 \leqslant x \leqslant 60$). Разность температур тела и жидкости равна $x - 60°$. Скорость охлаждения $-\frac{dx}{dt}$. Если k — коэффициент пропорциональности, то дифференциальное уравнение процесса будет таким:

$$\frac{dx}{dt} = k(x - 60).$$

Общее решение имеет вид

$$x - 60 = Ce^{kt}. \tag{17,30}$$

Начальное условие: в начальный момент времени $t = 0$ температура $x_0 = 300°$;

$$300 - 60 = Ce^{k \cdot 0}; \quad C = 240.$$

Поэтому (17,30) запишется так:

$$x = 60 + 240e^{kt}. \tag{17,31}$$

Для определения коэффициента пропорциональности k используем дополнительное условие в задаче:

при $t = 10$ *мин* температура тела равна 200°. Поэтому из (17,31) при $x = 200$, $t = 10$, $200 = 60 + 240e^{k \cdot 10}$. Откуда следует, что $k = -0,053$, и тогда уравнение (17,31), связывающее температуру x и время t, запишется так:

$$x = 60 + 240e^{-0,053t}.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо подставить сюда $x = 150$ и определить t.

Окажется, что $t = -\frac{1}{0,053} \ln \frac{3}{8}$.

Ответ. $t = 18,5$ *мин.*

Задача 17,20 (для самостоятельного решения).

Известно, что изолированный проводник вследствие несовершенства изоляции теряет сообщенный ему заряд, причем скорость потери заряда пропорциональна наличному заряду в данный момент.

В начальный момент проводнику сообщен заряд 2000 *CGSE*. За первые две минуты проводник теряет 150 *CGSE*. Определить, через сколько минут заряд проводника станет равным половине начального.

Указание. Обозначая переменный заряд через x, получим дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Его общее решение дается формулой (17,27): $x = Ce^{kt}$. Из начального условия ($x = 2000$ при $t = 0$) следует, что $C = 2000$, и тогда

$$x = 2000\, e^{kt}. \tag{17,32}$$

Так как через две минуты заряд равен $2000 - 150 = 1850$ *CGSE*, то для определения k имеем уравнение:

$$1850 = 2000e^{kt}; \quad k = \frac{1}{2} \ln \frac{37}{40} = -0,039.$$

Поэтому (17,32) перепишется так: $x = 2000^{-0,039t}$. Подставляя сюда $x = 1000$ — заряд, равный половине исходного, получаем: $1000 = 2000e^{-0,039t}$, откуда $\frac{1}{2} = e^{-0,039t}$, а $t = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{0,039}$.

Ответ. $t \approx 18$ *мин*.

Задача 17,21 (для самостоятельного решения).

Предполагая, что скорость прироста населения пропорциональна его наличному количеству, и зная, что население СССР на 1 января 1962 года составляло 200 млн. человек (приближенно), а прирост за 1962 год был равен 2%, определить на основании сделанного предположения и этих данных количество населения СССР на 1 января 2000 года.

Указание. Дифференциальное уравнение процесса: $\frac{dx}{dt} = kx$; $x = Ce^{kt}$; $C = 200$, а потому

$$x = 200\,e^{kt}. \tag{17,33}$$

По условию за 1962 год прирост населения составил 2%. Полагая в (17,33) $x = 200 + \frac{200}{100}\cdot 2$, т. е. $x = 204$, а $t = 1$, находим k: $k = \ln\frac{102}{100} = \ln 1,02 = 0,02$, а поэтому уравнение (17,33) перепишется так:

$$x = 200\,e^{0,02t}.$$

На 1 января 2000 года $t = 38$, так как за начальный момент приняты сведения на 1 января 1962 года. Отсюда $x = 200e^{0,02\cdot 38}$.

Ответ. $x_{2000} = 428$ млн. человек.

Если бы не был принят во внимание непрерывный рост населения, то за 38 лет из расчета 2% в год прирост населения составил бы 76% начального, т. е. 152 млн. человек, и на 1 января 2000 года оно равнялось бы только $200 + 152 = 352$ млн. человек.

Ошибка была бы в $428 - 352 = 76$ млн. человек.

Задача 17,22. Точка движется по прямой с постоянным ускорением, равным $a\ \frac{см}{сек^2}$. В начальный момент $t = 0$, ее скорость $v = v_0$, а расстояние от начала координат — S_0, т. е. $v(0) = v_0$, $S(0) = S_0$.

Найти закон движения.

Решение. При движении по прямой ускорение есть производная от скорости по времени, а потому ускорение $a = \frac{dv}{dt}$; $dv = a dt$. Интегрируя, получим $v = at + C_1$. Подставляя сюда $t = 0$, $v = v_0$, найдем $C_1 = v_0$, а потому уравнение, связывающее скорость и время, перепишется так:

$$v = at + v_0.$$

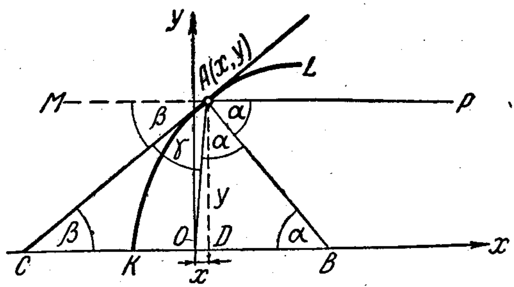
Известно, что скорость в прямолинейном движении — производная от пути по времени: $v=\frac{dS}{dt}$.

Поэтому $\frac{dS}{dt}=at+v_0$, $dS=atdt+v_0dt$, а $S=\frac{at^2}{2}+v_0t+C_2$. Используя начальное условие $S=S_0$ при $t=0$, получим, что $C_2=S_0$, и закон движения запишется следующим образом:

$$S=\frac{at^2}{2}+v_0t+S_0.$$

Если $S_0=0$, то $S=\frac{at^2}{2}+v_0t$ — хорошо известный из физики закон прямолинейного равномерно-переменного движения.

Задача 17,23. Определить форму зеркала, отражающего все лучи, исходящие из одной точки так, чтобы после отражения они были параллельны заданному направлению.



К задаче 17,23

Решение. Поместим начало координат в точку, из которой исходят лучи, а заданное направление, которому должны быть параллельны отраженные лучи, примем за ось Ox (см. чертеж).

Пусть точка A принадлежит зеркалу, а AP — один из таких лучей. Кривая AK — линия пересечения зеркала с плоскостью xOy. Согласно известному закону оптики, лучи падающий, отраженный и нормаль к поверхности, на которую падает луч, лежат в одной плоскости и составляют с нормалью равные углы (угол падения равен углу отражения). На чертеже AB — нормаль к кривой KL в точке $A(x, y)$, OA — падающий луч, AP — отраженный. Поэтому $\angle OAB=\angle BAP=\alpha$. Треугольник OAB — равнобедренный: $OA=OB$. Сумма углов с общей вершиной в точке A, расположенных по одну сторону от MP, равна 180°. Поэтому, так как $\alpha+\gamma=90°$, то и $\alpha+\beta=90°$. Значит, $\alpha+\gamma=\alpha+\beta$, а $\gamma=\beta$. Отсюда заключаем, что треугольник COA — равнобедренный: $OC=OA$.

Если уравнение искомой кривой $y=f(x)$, то $\operatorname{tg}\beta=y'(x)$. Но с другой стороны, $\operatorname{tg}\beta=\frac{y}{OC+OD}=\frac{y}{OA+OD}$. Так как $OA=\sqrt{x^2+y^2}$, а $OD=x$, то $\operatorname{tg}\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$. Подставляя сюда $\operatorname{tg}\beta=y'$, получаем дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x},$$

которое не изменяется от замены x на kx, а y на ky, а потому оно является однородным. Применяя подстановку $y = ux$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{u\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+u^2}+1},$$

а после разделения переменных

$$\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{u\sqrt{1+u^2}}du = -\frac{dx}{x}.$$

Иметь в виду, что $\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ удобно вычислить при помощи подстановки $u = \frac{1}{z}$. Окажется, что он равен $-\ln\frac{1+\sqrt{u^2+1}}{u}$.

Ответ. $y^2 = C^2 + 2Cx$ — семейство парабол.

Зеркало должно иметь форму параболоида вращения. Докажите, что начало координат есть фокус параболы.

ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Дифференциальное уравнение порядка n ($n > 1$) имеет вид

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (18,1)$$

где по-прежнему x — независимая переменная, y — искомая функция. Всякая функция $y = \varphi(x)$, определенная и n раз дифференцируемая в промежутке (a, b), называется решением этого уравнения, если она обращает его в тождество.

Задача Коши. Задача Коши для дифференциального уравнения (18,1) порядка n ставится так:

Найти такое решение дифференциального уравнения, чтобы оно само и его производные до порядка $(n-1)$ включительно при заданном значении аргумента $x = x_0$ принимали бы заданные значения, т. е. чтобы это решение удовлетворяло условиям:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0';\ y''(x_0) = y_0'';\ \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (18,2)$$

где x_0 и y_0; y_0'; y_0''; $\ldots$; $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, которые называются начальными данными или начальными условиями. Число x_0 называется начальным значением независимой переменной, а числа y_0, y_0', y_0'', $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ — начальными значениями решения и его производных.

Отличительной особенностью задачи Коши является то, что значения как искомой функции, так и всех ее производных до порядка $(n-1)$ включительно задаются *при одном и том же значении независимой переменной* $x = x_0$.

Решение уравнения (18,1) имеет в своем составе n произвольных постоянных и имеет вид

$$F(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = 0.$$

Если произвольные постоянные в это решение входят так, что задачу Коши можно решить при любых начальных условиях, то оно называется общим.

Краевая задача. Задача интегрирования уравнения (18,1) называется краевой, если значения искомой функции y и, возможно, ее производных задаются не при одном и том же значении независимой переменной, как это делается в задаче Коши, а на концах некоторого фиксированного интервала. В более общих случаях значения искомой функции или ее производных могут задаваться более чем в двух точках.

Задача Коши иногда называется одноточечной, краевые задачи — двухточечными, а в соответствующих случаях — многоточечными.

Отметим, что краевая задача не всегда имеет решение, а если она его и имеет, то оно во многих случаях не является единственным.

На этом практическом занятии будут рассмотрены три типа дифференциальных уравнений порядка выше первого, которые допускают понижение порядка и интегрируются в квадратурах.

Первый тип. Уравнения, содержащие только производную порядка n и независимую переменную

Эти уравнения имеют вид

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{18,3}$$

Если удается это уравнение разрешить относительно $y^{(n)}$, то оно записывается так:

$$y^{(n)} = f(x). \tag{18,4}$$

Общее решение уравнения (18,4) имеет вид

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ \ldots \int f(x)\, dx}_{n \text{ раз}} + C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1}. \tag{18,5}$$

Из этого видно, что для получения общего решения уравнения (18,4) нужно n раз проинтегрировать функцию $f(x)$ и прибавить к полученному результату многочлен от x степени $(n-1)$, коэффициентами которого являются произвольные постоянные.

Если задача Коши решается для уравнения (18,4) с начальными условиями (18,2), то частное решение уравнения (18,4) имеет вид

$$y=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} dx \ \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\ \ldots\ +y_0'(x-x_0)+y_0. \qquad (18,6)$$

(См. В. В. Степанов. «Курс дифференциальных уравнений», стр. 154; Н. М. Матвеев. «Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений», стр. 217).

Уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$

Задача 18,1. Решить задачу Коши при указанных начальных условиях для уравнений:

1) $y'''=\frac{1}{x}$; $y(1)=1$; $y'(1)=2$; $y''(1)=-2$;

2) $y^{\mathrm{IV}}=\sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$; $y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

3) $y^{\mathrm{V}}=e^{2x}$; $y(0)=0$; $y'(0)=-2$; $y''(0)=3$; $y'''(0)=-1$; $y^{\mathrm{IV}}(0)=2$.

Решение. 1) На основании (18,6) выполним трижды интегрирование функции $\frac{1}{x}$ каждый раз в пределах от 1 до x $(x_0=1)$

Первое интегрирование:

$$\int_1^x \frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_1^x=\ln x.$$

Второе интегрирование:

$$\int_1^x \ln x\,dx=x\ln x\Big|_1^x-\int_1^x dx=x\ln x-(x-1).$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u=\ln x & du=\frac{1}{x}\,dx \\ dv=dx & v=x \end{array}\right|$$

Третье интегрирование:

$$\int_1^x [x\ln x-(x-1)]dx=\int_1^x x\ln x\,dx-\int_1^x (x-1)\,dx=$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^x-\frac{1}{2}\int_1^x x\,dx-\int_1^x (x-1)\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^x-$$

$$-\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}-\frac{(x-1)^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}.$$

На основании формулы (18,6), полагая в ней $n=3$, имеем:

$$y_0=1;\quad y'_0=+2;\quad y''_0=-2;\quad x_0=1;$$

$$y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}-(x-1)^2+2(x-1)+1.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получим

$$y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{7}{4}x^2+5x-\frac{9}{4}.$$

(Проверьте, что начальные условия выполнены).

2) Проинтегрировав четырежды $\sin x$ в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до x и использовав формулу (18,6) при $n=4$, при заданных начальных условиях получим после приведения подобных членов

$$y=\sin x+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

(Проверьте, что начальные условия выполнены).

3) Проинтегрируем 5 раз функцию e^{2x} в пределах от 0 до x $(x_0=0)$ и, использовав формулу (18,6) при $n=5$ и заданных начальных условиях, получим частное решение

$$y=\frac{1}{32}e^{2x}+\frac{1}{16}x^4-\frac{5}{24}x^3+\frac{23}{16}x^2-\frac{33}{16}x-\frac{1}{32}.$$

(Проверьте, что выполнены начальные условия).

Задача 18,2 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y'''=2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$; 2) $\sqrt{1+x^2}y''-1=0$;

3) $y''=\arcsin x$; 4) $y'''=27e^{3x}+120x^3$.

Указания. Воспользоваться формулой (18,5).

Уравнение 2 представить в виде $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; в уравнении 3 при вычислении $\int x \arcsin x\,dx$ воспользоваться справочником.

Ответ. 1) $y = \ln \sin x + C_1 + C_2 x + C_3 x^2$;

2) $y = x \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C_1 + C_2 x$;

3) $y = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{3}{4} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{4} \arcsin x + C_1 + C_2 x$;

4) $y = e^{3x} + x^6 + C_1 + C_2 x + C_2 x^2$.

Задача 18,3. В сопротивлении материалов доказывается, что дифференциальное уравнение упругой линии консоли с постоянным поперечным сечением и сосредоточенной на свободном конце силой P имеет вид

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{Px}{EI},$$

где w — прогиб консоли в сечении с абсциссой x, а EI — постоянная величина, так называемая жесткость на изгиб сечения балки.

Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$w(l) = 0; \quad w'(l) = 0.$$

Решение. Уравнение принадлежит к рассматриваемому типу. Применив формулу (18,6) при $n = 2$ и $x_0 = l$, получим

$$w(x) = -\frac{P}{EI} \int_l^x dx \int_l^x x\,dx$$

(два последних слагаемых в этой формуле исчезают, так как имеют место нулевые начальные условия);

$$w(x) = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2 x}{2} + \frac{l^3}{3}\right). \qquad (18,7)$$

Если не пользоваться сразу готовой формулой (18,6) (хотя в этом нет ничего предосудительного), то интегрирование уравнения можно провести так.

Первое интегрирование даст

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{P}{EI} \int x\,dx = -\frac{P}{EI} \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Учитывая второе начальное условие $w'(l) = 0$, получаем уравнение для определения произвольной постоянной

$$0 = -\frac{P}{EI} \frac{l^2}{2} + C_1; \quad C_1 = \frac{P}{EI} \frac{l^2}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{P}{EI} \frac{x^2}{2} + \frac{P}{EI} \frac{l^2}{2} = -\frac{P}{2EI}(x^2 - l^2).$$

Интегрируя вторично, получаем

$$w = -\frac{P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - l^2x\right) + C_2.$$

Используя первое начальное условие, находим

$$0 = -\frac{P}{2EI}\left(\frac{l^3}{3} - l^3\right) + C_2,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{Pl^3}{3EI},$$

и поэтому окончательно

$$w = -\frac{P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - l^2x\right) - \frac{Pl^3}{3EI},$$

что, как легко видеть, совпадает с полученным ранее решением.

Полученное уравнение (18,7) — уравнение упругой линии консоли. Из него видно, что эта линия — кубическая парабола (парабола третьей степени).

Задача 18,4 (для самостоятельного решения).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси простой балки постоянного сечения, несущей сплошную равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q, имеет вид

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)$$

(EI имеет прежнее значение, l — длина балки).

Краевые условия (иногда они называются граничными):

при $x = 0$ $w = 0$, иначе: $w(0) = 0$;

при $x = l$ $w = 0$, иначе: $w(l) = 0$,

т. е. на концах балки прогиб равен нулю.

Указание. Эта задача — краевая, так как заданы условия не в одной точке, а в двух. Поэтому формулой (18,6) воспользоваться нельзя. Можно применить формулу (18,5), найти общее решение и, пользуясь заданными условиями на краях балки, определить входящие в общее решение две произвольные постоянные.

Ответ. Общее решение

$$w(x) = \frac{ql}{12EI}x^3 - \frac{q}{24EI}x^4 + C_1x + C_2.$$

Первое краевое условие дает $C_2 = 0$, второе — $C_1 = -\frac{ql^3}{24EI}$.

Искомое решение, удовлетворяющее краевым условиям:

$$w(x) = -\frac{ql^3x}{24EI}\left[1 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right].$$

Задача 18,5. Найти общие решения уравнений:
1) $y''=0$; 2) $y''=a$.

Решение. 1) Если $y''=0$, то $y'=C_1$, отсюда $\frac{dy}{dx}=C_1$; $dy=C_1\,dx$;

$$y=C_1x+C_2. \tag{18,8}$$

2) $y''=a$; $y''\,dx=a\,dx$, но $y''\,dx$ — дифференциал y', а потому $dy'=a\,dx$.

$$y'=ax+C_1;\quad \frac{dy}{dx}=ax+C_1;$$
$$dy=ax\,dx+C_1\,dx;$$
$$y=\frac{ax^2}{2}+C_1x+C_2. \tag{18,9}$$

Уравнения этого вида часто встречаются в задачах теоретической механики, второе из них нам встретится в следующей задаче.

Задача 18,6 (прямолинейное движение материальной частицы). При движении точки по прямой, принимаемой за ось Ox, основное уравнение движения точки записывается так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x, \tag{18,10}$$

где m — масса точки; $\frac{d^2x}{dt^2}$ — ускорение, а F_x — проекция действующей на точку силы на ось Ox.

Найти закон движения точки, падающей под действием силы тяжести, учитывая, что в начальный момент $t=t_0$ ее координата $x=x_0$, а начальная скорость равна v_0.

Решение. Направим ось Ox вертикально вниз и обозначим через g ускорение силы тяжести.

Уравнение движения (18,10) запишется так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg.$$

Сокращаем на m и получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.$$

Умножаем на dt обе части равенства:

$$\frac{d^2x}{dt^2}dt=g\,dt.$$

Но $\frac{d^2x}{dt^2}dt=d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, поэтому $d\left(\frac{dx}{dt}\right)=g\,dt$. Интегрируя, имеем $\frac{dx}{dt}=gt+C_1$. При $t=t_0$ начальная скорость $v=v_0$. Подставляя эти значения, получаем

$$v_0=gt_0+C_1;\quad C_1=v_0-gt_0.$$

Теперь

$$\frac{dx}{dt} = gt + v_0 - gt_0; \quad \frac{dx}{dt} = g(t - t_0) + v_0;$$

$$dx = [g(t - t_0) + v_0]\,dt.$$

Интегрируя вторично, находим

$$x = v_0 t + g\frac{(t - t_0)^2}{2} + C_2.$$

Но $x = x_0$ при $t = t_0$, а потому $x_0 = v_0 t_0 + C_2$; $C_2 = x_0 - v_0 t_0$. Подставив это значение C_2, получим окончательно

$$x = v_0 t + g\frac{(t - t_0)^2}{2} + x_0 - v_0 t_0.$$

Если $t_0 = 0$, то

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

(Это тот же результат, что и в задаче 17,22, если заменить x на S, g на a, x_0 на S_0).

Задачу можно было решить сразу по формуле (18,6).

Теперь рассмотрим случаи интегрирования уравнения вида (18,3) $F(x, y^{(n)}) = 0$, когда решение его относительно $y^{(n)}$ затруднительно или просто невозможно.

В этом случае полагают, что

$$x = \varphi(t); \quad y^{(n)} = \psi(t). \tag{18,11}$$

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ должны обращать уравнение (18,3) в тождество.

Дифференциал производной $(n - 1)$ порядка, т. е.

$$dy^{(n-1)} = [y^{(n-1)}]'\,dx = y^{(n)}\,dx. \tag{18,12}$$

Из (18,11) следует, что $dx = \varphi'(t)\,dt$, а потому

$$dy^{(n-1)} = \underbrace{\psi(t)}_{y^{(n)}}\,\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}.$$

Интегрируя, получим

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Теперь рассмотрим

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = \psi_1(t, C_1)\,\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx}$$

и, снова интегрируя, получаем

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\,\varphi'(t)\,dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2)$$

и т. д.

В итоге окажется, что

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

и решение уравнения $F(x, y^{(n)}) = 0$ представится в виде

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Иногда выгодно взять

$$y^{(n)} = t, \tag{18,13}$$

т. е. принять параметр t равным $y^{(n)}$.

Задача 18,7. Решить уравнение

$$e^{y''} + y'' = x. \tag{18,14}$$

Решение. Это уравнение относится к рассматриваемому виду $F(x, y^{(n)}) = 0$.

Положим, как это указано выше в (18,13), $y'' = t$. Тогда уравнение (18,14) перепишется в виде

$$e^t + t = x.$$

Параметрическое представление заданного уравнения:

$$x = e^t + t; \quad y'' = t.$$

На основании формулы (18,12)

$$dy' = y''\,dx = t\,dx.$$

Но $dx = (e^t + 1)\,dt$, а потому

$$dy' = t(e^t + 1)\,dt.$$

Интегрируя, находим

$$y' = \int t(e^t + 1)\,dt = te^t + t^2 - \int (e^t + t)\,dt =$$

$$\underline{\left| \begin{array}{l} u = t \\ dv = (e^t + 1)\,dt \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dt \\ v = e^t + t \end{array} \Bigg|}$$

$$= te^t + t^2 - e^t - \frac{t^2}{2} + C_1; \quad y' = e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Умножая обе части этого уравнения на dx, получим

$$y'\,dx = \left[e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C_1\right]dx.$$

Но $dx = (e^t + 1)\,dt$, а $y'\,dx = dy$. Поэтому

$$dy = \left[e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\,dt,$$

$$y = \int \left[e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\,dt + C_2.$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$y = e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) + e^t\left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right) + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2,$$

а общее решение предложенного уравнения имеет такое параметрическое представление:

$$x = e^t + t; \quad y = e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) + e^t\left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right) + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

Задача 18,8 (для самостоятельного решения).

Решить уравнение

$$(y''')^2 + x^2 = 1.$$

Указание. Перейти к параметрическому представлению уравнения, положив $x = \sin t$; $y''' = \cos t$.

Убедиться, что эти значения x и y''' удовлетворяют уравнению ($\cos^2 t + \sin^2 t = 1$).

Учесть, что $dx = \cos t\, dt$, и поэтому

$$dy'' = y''' dx = \underbrace{\cos t}_{'''} \underbrace{\cos t\, dt}_{dx} = \cos^2 t\, dt;$$

$$y'' = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4}\sin 2t + C_1.$$

Помещаем промежуточные результаты:

$$y' = \frac{1}{2} t \sin t + \frac{3}{8}\cos t - \frac{1}{24}\cos 3t + C_1 \sin t + C_2.$$

Учесть, что

$$\int \sin 2t \cos t\, dt = -\frac{1}{6}\cos 3t - \frac{1}{2}\cos t; \quad dy = y'\, dx = y' \cos t\, dt,$$

$$\text{а } \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$$

Ответ. $y = -\frac{1}{8} t \cos t + \frac{3}{16} t + \frac{7}{48}\sin 2t - \frac{1}{192}\sin 4t - \frac{C_1}{4}\cos 2t + C_2 \sin t + C_3.$

Учтено, что

$$\int \cos 3t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4t + \frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

Второй тип. Уравнения, не содержащие искомой функции

Уравнение порядка n, не содержащее искомой функции, имеет такой вид:

$$f(x,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0. \qquad (18,15)$$

Порядок его может быть понижен на единицу с помощью подстановки

$$y' = p(x), \tag{18,16}$$

где $p(x)$ — новая искомая функция.

Эта подстановка приводит к уравнению

$$f(x,\ p,\ p',\ p'',\ \ldots,\ p^{(n-1)}) = 0.$$

Если уравнение (18,15) не содержит ни искомой функции y, ни ее производных до порядка $(k-1)$ включительно, т. е. имеет вид

$$f(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0, \tag{18,17}$$

то его порядок может быть понижен на k единиц при помощи подстановки

$$y^{(k)} = p(x). \tag{18,18}$$

После определения функции $p(x)$ уравнение (18,17) оказывается приведенным к уравнению вида (18,3), интегрирование которого разобрано выше (см. первый тип).

К этому же типу уравнений относятся и такие, которые содержат только две последовательные производные, т. е. уравнения вида

$$f(y^{(n-1)},\ y^{(n)}) = 0. \tag{18,19}$$

Если это уравнение можно решить относительно $y^{(n)}$, то оно принимает вид

$$y^{(n)} = \varphi(y^{(n-1)}) \tag{18,20}$$

и интегрируется подстановкой

$$y^{(n-1)} = p(x), \tag{18,21}$$

которая приводит к уравнению

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(p).$$

Определив из этого уравнения функцию $p(x)$ и подставив ее в (18,21), придем к уравнению вида (18,3).

Задача 18,9. Найти решения уравнений:

$$1)\ (1-x^2)\,y'' - xy' = 2;\quad 2)\ y'' = ay'.$$

(Уравнения не содержат искомой функции y, а потому относятся к рассматриваемому типу).

Решение. 1) Пусть $y' = p(x)$. Тогда $y'' = \frac{dp}{dx}$, и уравнение перепишется так:

$$(1-x^2)\frac{dp}{dx} - xp = 2.$$

Это линейное уравнение относительно p и $\frac{dp}{dx}$. Разделим его обе части на коэффициент при $\frac{dp}{dx}$ и получим

$$\frac{dp}{dx}-\frac{x}{1-x^2}p=\frac{2}{1-x^2}. \qquad (18,22)$$

Сделаем подстановку (17,15).

Искомая функция

$$p=e^{-\int-\frac{x}{1-x^2}dx}\cdot v(x);$$

$$\int\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2);\quad e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}=e^{\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$p=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}v(x).$$

Подстановка в (18,22) дает:

$$\begin{array}{c|l} 1 & \dfrac{dp}{dx}=\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}v(x)+v'(x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ -\dfrac{x}{1-x^2} & p=\dfrac{v(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \end{array}$$

$$\frac{2}{1-x^2}=v'(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \frac{dv}{dx}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}};\quad dv=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

$$v=2\arcsin x+C_1;\quad p=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\arcsin x+C_1).$$

Но $p=y'=\frac{dy}{dx}$, а потому

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\arcsin x+C_1);\quad dy=\frac{2\arcsin x+C_1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

$$y=2\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx+C_1\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+C_2;$$

$$y=\arcsin^2 x+C_1\arcsin x+C_2.$$

2) Это уравнение относится также к рассматриваемому типу, так как оно не содержит искомой функции (его можно отнести и к частному случаю этого типа — к уравнению (18,19)).

Подстановка: $y'=p(x)$; $y''=\frac{dp}{dx}$.

Уравнение принимает вид

$$\frac{dp}{dx}=ap.$$

Переменные разделяются: $\frac{dp}{p}=adx$.

Интегрирование дает:

$$\ln p = ax + \ln C_1; \quad \ln \frac{p}{C_1} = ax; \quad \frac{p}{C_1} = e^{ax}; \quad p = C_1 e^{ax}.$$

Но $p = \frac{dy}{dx}$, а потому $\frac{dy}{dx} = C_1 e^{ax}$. Снова переменные разделяются: $dy = C_1 e^{ax}\, dx$; $y = \frac{C_1}{a} e^{ax} + C_2$. Обозначим $\frac{C_1}{a} = C_1$, и получим окончательно

$$y = C_1 e^{ax} + C_2.$$

Задача 18,10. Найти плоские кривые, у которых кривизна постоянна.

Решение. Известно, что кривизна кривой

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Найдем решение этого уравнения, полагая, что K — величина постоянная.

Подстановка: $y' = p(x)$, $y'' = \frac{dp}{dx}$;

$$K = \frac{\frac{dp}{dx}}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{dp}{dx} = K(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя их, получим:

$$\frac{1}{K} \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = dx; \quad \frac{1}{K} \int \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = x + C_1.$$

При вычислении интеграла положить $p = \operatorname{tg} z$; $1 + p^2 = \sec^2 z$; $dp = \sec^2 z\, dz$;

$$\int \frac{dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sec^2 z\, dz}{(\sec^2 z)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dz}{\sec z} = \int \cos z\, dz = \sin z.$$

Но если $\operatorname{tg} z = p$, то $\sin z = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$.

Поэтому после первого интегрирования получаем

$$\frac{1}{K}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=x+C_1.$$

Определим отсюда p:

$$\frac{1}{K^2}\frac{p^2}{1+p^2}=(x+C_1)^2;\quad \frac{1}{K^2}p^2=(x+C_1)^2+p^2(x+C_1)^2;$$

$$\frac{1}{K^2}p^2-p^2(x+C_1)^2=(x+C_1)^2;\quad p^2\left[\frac{1}{K^2}-(x+C_1)^2\right]=$$

$$=(x+C_1)^2;\quad p=\pm\frac{x+C_1}{\sqrt{\frac{1}{K^2}-(x+C_1)^2}}.$$

Второе интегрирование даст: $y+C_2=\pm\sqrt{\frac{1}{K^2}-(x+C_1)^2}$.

Заменяя $\frac{1}{K}$ — величину, обратную кривизне, радиусом кривизны R $\left(\frac{1}{K}=R\right)$, получим ответ

$$(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=R^2.$$

Полученное уравнение — уравнение семейства всевозможных окружностей радиуса R.

Таким образом, мы приходим к выводу, что единственными плоскими кривыми с постоянной кривизной являются окружности.

Задача 18,11 (для самостоятельного решения). Найти частное решение уравнения $y''=1+\frac{x(y'-x)}{1-x^2}$, удовлетворяющее краевым условиям: $y(0)=1$; $y(1)=\frac{1}{2}$.

Указание. Подстановка $y'=p(x)$ приведет к линейному уравнению $\frac{dp}{dx}-\frac{x}{1-x^2}p=\frac{1-2x^2}{1-x^2}$.

Ответ. Общее решение:

$$y=\frac{1}{2}x^2+C_1\arcsin x+C_2.$$

Частное решение:

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{\pi}\arcsin x+1.$$

Задача 18,12 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y''-2x(x^2-y')=0$; 2) $y'y''-\sqrt{1+y'^2}=0$; 3) $y''^2=y'$.

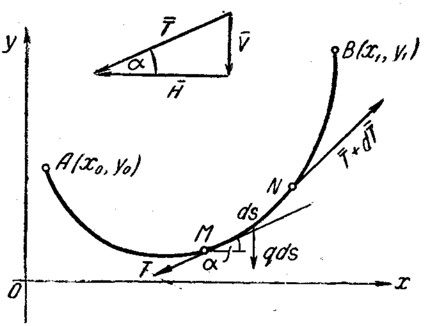
Ответ. 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - x + C_1\int e^{-x^2}dx + C_2$, причем входящий в общее решение интеграл в конечном виде не вычисляется.

$$2)\ y = \frac{x - C_1}{2}\sqrt{(x-C_1)^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left[(x - C_1) + \sqrt{(x - C_1)^2 - 1}\right] + C_2;$$

$$3)\ y = \frac{1}{12}(x - C_1)^3 + C_2.$$

Задача 18,13 (задача о цепной линии).

Найти уравнение кривой, по которой расположится гибкая нерастяжимая нить, укрепленная концами в двух данных точках $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, под действием нагрузки, равномерно распределенной по ее длине, причем нагрузка, приходящаяся на единицу длины, равна $\overline{q}$.



К задаче 18,13

Решение. Вырежем на кривой элемент дуги $MN = ds$. На него действуют такие силы: в точке M — натяжение $\overline{T}$, в точке N — натяжение $\overline{T} + d\overline{T}$ и сила тяжести, численно равная $\overline{q}\,ds$. Условия равновесия требуют, чтобы суммы проекций этих сил на оси координат были равны нулю.

Сумма проекций всех сил на ось Ox:

$$\sum X = -T_x + (T + dT)_x = 0$$
$$\sum X = -T_x + T_x + (dT)_x = 0$$

(проекция силы $\overline{q}\,ds$ на ось Ox равна нулю).

$$dT_x = 0. \qquad (18,23)$$

Сумма проекций всех сил на ось Oy:

$$\sum Y = -T_y + (T + dT)_y - q\,ds = 0;$$
$$\sum Y = -T_y + T_y + (dT)_y - q\,ds = 0,$$

откуда

$$dT_y - q\,ds = 0. \qquad (18,24)$$

Обозначим для удобства горизонтальную проекцию T_x натяжения через H, а вертикальную его проекцию T_y — через V. Тогда уравнения равновесия (18,23) и (18,24) запишутся так:

$$dH = 0; \quad dV - q\,ds = 0. \qquad (18,25)$$

Из $dH = 0$ следует, что $H = \text{const}$, т. е. горизонтальная проекция натяжения нити — величина постоянная. Обозначим через α угол, который касательная к нити в точке M составляет с осью Ox.

Второе уравнение в (18,25) преобразуем так:

$$\frac{V}{H}=\operatorname{tg}\alpha=y';\ V=Hy';\ dV=d(Hy')=Hy''\,dx.$$

(Величина H, как постоянная, вынесена за знак дифференциала). Дифференциал дуги $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Подставляя эти значения dV и ds во второе уравнение (18,25), получим

$$Hy''\,dx=q\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

и окончательно дифференциальное уравнение искомой линии будет таким:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{18,26}$$

Обозначим $\frac{q}{H}=a$ и введем подстановку $\frac{dy}{dx}=p(x)$. Тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, и уравнение (18,26) станет таким:

$$\frac{dp}{dx}=a\sqrt{1+p^2}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных получим

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=a\,dx.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=ax+C_1,$$

откуда

$$p+\sqrt{1+p^2}=e^{ax+C_1}. \tag{18,27}$$

Из (18,27) надо определить p. Это проще всего сделать так: умножим обе части (18,27) на $p-\sqrt{1+p^2}$ и получим

$$\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)\left(p-\sqrt{1+p^2}\right)=e^{ax+C_1}\left(p-\sqrt{1+p^2}\right),$$

или

$$-1=e^{ax+C_1}\left(p-\sqrt{1+p^2}\right).$$

Отсюда, умножая обе части равенства на $e^{-(ax+C_1)}$, получаем

$$p-\sqrt{1+p^2}=-e^{-(ax+C_1)}. \tag{18,28}$$

Складываем почленно (18,27) и (18,28):

$$2p=e^{ax+C_1}-e^{-(ax+C_1)},$$

а

$$p=\frac{1}{2}\left(e^{ax+C_1}-e^{-(ax+C_1)}\right).$$

Правая часть последнего равенства есть $\operatorname{sh}(ax+C_1)$, а $p = \frac{dy}{dx}$. Поэтому последнее равенство перепишется так:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh}(ax+C_1), \text{ или } dy = \operatorname{sh}(ax+C_1)\,dx.$$

Интегрируя, находим

$$y = \frac{1}{a}\operatorname{ch}(ax+C_1) + C_2. \tag{18,29}$$

Перепишем (18,29) в виде

$$y - C_2 = \frac{1}{a}\operatorname{ch} a\left[x + \frac{C_1}{a}\right] \tag{18,30}$$

и перенесем начало координат в точку $\left(-\frac{C_1}{a},\ C_2\right)$, а новые координаты точки на кривой обозначим по-прежнему через x и y. Уравнение (18,29) перепишется в виде

$$y = \frac{1}{a}\operatorname{ch} ax.$$

Это уравнение цепной линии. Итак, искомая кривая — цепная линия.

Третий тип. Уравнения, не содержащие независимой переменной

Эти уравнения имеют в общем случае такой вид:

$$f(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{18,31}$$

Понижение порядка на единицу достигается подстановкой $y' = p(y)$, где $p(y)$ — новая искомая функция. В этом случае за независимую переменную принимается не x, а y. Поэтому вторая и последующие производные должны быть преобразованы так, чтобы независимой переменной был y:

$$y'' = [p(y)]'_x = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p, \tag{18,32}$$

так как $\frac{dy}{dx} = p$;

$$y''' = \left(\frac{dp}{dy}p\right)'_x = \left(\frac{dp}{dy}p\right)'_y \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2p}{dy^2}p + \frac{dp}{dy}\frac{dp}{dy}\right)p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p \tag{18,33}$$

и т. д.

Поэтому уравнение (18,31) перепишется так:

$$f\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy},\ \frac{d^2p}{dy^2},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Если удастся найти общее решение этого уравнения, то оно будет иметь вид

$$F(y, p, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0. \tag{18,34}$$

Так как $p=\frac{dy}{dx}$, то (18,34) — уравнение первого порядка, из которого определится искомая функция y.

Частный случай. Если уравнение (18,31) имеет вид

$$f(y,\ y'')=0 \tag{18,35}$$

и его удается разрешить относительно y'' так, что

$$y''=\varphi(y), \tag{18,36}$$

то интегрирование, кроме указанного приема, можно провести так: умножим обе его части на $2y'\,dx$ и приведем уравнение к виду

$$2y'y''\,dx=2\varphi(y)\,y'\,dx. \tag{18,37}$$

Левая часть этого уравнения $2y'y''\,dx=d(y'^2)$, а в правой части $y'\,dx=dy$, поэтому (18,37) перепишется так:

$$d(y'^2)=2\varphi(y)\,dy.$$

Отсюда следует, что

$$y'^2=2\int\varphi(y)\,dy+C_1;\quad y'=\sqrt{2\int\varphi(y)\,dy+C_1}.$$

Последнее уравнение допускает разделение переменных. Проинтегрировав его, найдем

$$x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int\varphi(y)\,dy+C_1}},$$

т. е. определим x как функцию y.

Следует отметить, что этот прием интегрирования уравнения (18,35) не дает ничего существенно нового по сравнению с указанным общим приемом замены y'' по формуле (18,32).

К уравнениям вида (18,35) приводятся также и уравнения вида

$$y^{(n)}=f(y^{(n-2)}), \tag{18,38}$$

содержащие только две производные, порядки которых отличаются на две единицы. В этом случае применяется подстановка

$$y^{(n-2)}=p(x). \tag{18,39}$$

Задача 18,14. Найти общие решения уравнений:

1) $y''=ae^y$; 2) $y'^2+2yy''=0$; выделить интегральную кривую, проходящую через точку (1,1) и касающуюся в этой точке биссектрисы первого координатного угла; 3) $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$.

Решение. 1) Уравнение не содержит независимой переменной и относится к рассматриваемому типу. Полагаем $y'=p(y)$. Вторую производную y'' определяем по формуле (18,32):

$$y''=\frac{dp}{dy}p.$$

Уравнение запишется в виде

$$p\frac{dp}{dy}=ae^y.$$

Отсюда

$$p\,dp=ae^y\,dy.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{p^2}{2}=ae^y+\frac{C_1}{2}.$$

Находим, что

$$p=\sqrt{2ae^y+C_1};\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{2ae^y+C_1}.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+C_1}}=dx;\quad \int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+C_1}}=x+C_2.$$

Интеграл $I=\int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+C_1}}$ вычисляется подстановкой $2ae^y+C_1=$ $=z^2$; $2ae^y\,dy=2z\,dz$; $ae^y\,dy=z\,dz$; $dy=\frac{z\,dz}{ae^y}$. Но так как $ae^y=$ $=\frac{z^2-C_1}{2}$, то

$$dy=\frac{z\,dz}{\frac{z^2-C_1}{2}}=\frac{2z\,dz}{z^2-C_1}.$$

Поэтому

$$I=\int\frac{2\,dz}{z^2-C_1}=2\frac{1}{2\sqrt{C_1}}\ln\frac{z-\sqrt{C_1}}{z+\sqrt{C_1}}=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\frac{\sqrt{2ae^y+C_1}-\sqrt{C_1}}{\sqrt{2ae^y+C_1}+\sqrt{C_1}}.$$

Окончательно

$$x+C_2=\frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\frac{\sqrt{2ae^y+C_1}-\sqrt{C_1}}{\sqrt{2ae^y+C_1}+\sqrt{C_1}}.$$

2) Это уравнение, так же как и предыдущие, не содержит независимой переменной x, а потому относится к рассматриваемому типу. Полагаем $y'=p(y)$. По формуле (18,32) $y''=\frac{dp}{dy}p$, и уравнение запишется в виде

$$p^2+2yp\frac{dp}{dy}=0.$$

Сокращаем на p (не забудем впоследствии исследовать решение $p=0$):

$$p+2y\frac{dp}{dy}=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$2y\frac{dp}{dy}=-p;\quad \frac{2dp}{p}=-\frac{dy}{y};\quad 2\ln p=-\ln y+\ln C_1^2.$$

Отсюда, потенцируя, находим, что

$$p^2 = \frac{C_1^2}{y}; \quad p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

В этом месте мы можем определить произвольную постоянную C_1. В условии задачи дано, что кривая в точке (1,1) касается прямой $y = x$. Следовательно, угловой коэффициент касательной в этой точке равен $y' = 1$. Подставляя $y' = 1$; $y = 1$ в последнее уравнение, получаем: $1 = \frac{C_1}{1}$; $C_1 = 1$.

Переписываем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ и, разделяя переменные, имеем

$$\sqrt{y}\, dy = dx.$$

Интегрируя, получаем $\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = x + C_2$.

Используем то, что кривая проходит через точку (1,1):

$$\frac{2}{3} \cdot 1 = 1 + C_2; \quad C_2 = -\frac{1}{3},$$

а потому

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = x - \frac{1}{3}; \quad 2y^{\frac{3}{2}} = 3x - 1; \quad y^{\frac{3}{2}} = \frac{3x-1}{2}.$$

Возводя обе части равенства в степень $\frac{2}{3}$, получим окончательно уравнение искомой интегральной кривой

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} (3x - 1)^{\frac{2}{3}}.$$

Исследуйте оставленное решение: $p = 0$, т. е. $\frac{dy}{dx} = 0$; $y = C$. Решите вопрос о том, будет ли это решение особым решением уравнения.

3) Это уравнение также относится к рассматриваемому типу, так как оно не содержит независимой переменной x. Подстановка, понижающая порядок на единицу: $y' = p(y)$. По (18,32) $y'' = \frac{dp}{dy} p$.

С этими значениями y' и y'' уравнение перепишется так:

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Разделяя переменные, получаем $p\, dp = \frac{dy}{\sqrt{y}}$; $\frac{p^2}{2} = 2\sqrt{y} + 2C_1$; $p^2 = 4\sqrt{y} + 4C_1$. (Произвольную постоянную мы ввели под видом $2C_1$ с тем, чтобы в последующем извлечь корень из 4);

$$p = \sqrt{4(\sqrt{y} + C_1)} = 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}.$$

Так как $p=\frac{dy}{dx}$, последнее уравнение перепишется так: $\frac{dy}{dx}=$ $=2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}$. Разделяя переменные, получаем $\frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=dx$. Интегрируя, получим:

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=x+C_2.$$

Вычислить интеграл в левой части можно с помощью подстановки $\sqrt{y}+C_1=z^2$.

Окончательно получим

$$x+C_2=\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}.$$

Задача 18,15 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y''=\frac{1}{a}(1+y'^2)$. Начальные условия $y(0)=y'(0)=0$;

2) $yy''=y'^2$; 3) $yy''-2yy'\ln y=y'^2$.

Ответ. 1) $y=-a\ln\cos\frac{x}{a}$, или $e^{\frac{y}{a}}\cos\frac{x}{a}=1$;

2) $y=C_2e^{C_1x}$ (здесь положено $e^{C_2}=C_2$);

3) $y=e^{C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)}$; $y=C$ (особое решение).

Задача 18,16. Найти общее решение уравнений:

1) $y^3y''=-1$; 2) $y''=\frac{1}{3y\sqrt[3]{y^2}}$.

Решение. 1) Перепишем уравнение в виде $y''=-\frac{1}{y^3}$. Будем его интегрировать таким приемом: обе части умножим на $2y'\,dx$ и получим

$2y'y''\,dx=-\frac{1}{y^3}2y'\,dx$. Но $y'\,dx=dy$, а потому имеем

$$d(y'^2)=-\frac{1}{y^3}\cdot 2dy.$$

Интегрируя получаем:

$$y'^2=\frac{1}{y^2}+C_1;\quad y'=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+C_1};$$

$$y'=\pm\frac{\sqrt{1+C_1y^2}}{y}.$$

Разделяем переменные $\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1+C_1y^2}}=dx$; интегрируем вторично и получаем $\pm\frac{1}{C_1}\sqrt{1+C_1y^2}=x+C_2$. Так как C_1 может быть величиной как положительной, так и отрицательной, то знаки $\pm$

перед корнем нет смысла сохранять. Окончательно общее решение имеет вид

$$\sqrt{1+C_1y^2}=C_1x+C_2,$$

где $C_2=C_1C_2$.

2) Умножаем обе части уравнения на $2y'\,dx$ и получаем

$$2y'y''\,dx=\frac{2}{3y\sqrt[3]{y^2}}dy\quad (y'\,dx=dy),$$

или

$$d\left(y'^2\right)=\frac{2}{3y\sqrt[3]{y^2}}dy.$$

Интегрируя, имеем

$$y'^2=\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}+C_1;\quad y'=\pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}+C_1};$$

$$y'=\pm\frac{\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}}{\sqrt[3]{y}}.$$

Разделяем переменные: $\dfrac{\sqrt[3]{y}\,dy}{\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}}=\pm\,dx.$

Интегрируем вторично: $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{y}\,dy}{\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}}$ и вычисляем I при помощи подстановки $1+C_1\sqrt[3]{y^2}=z^2$. Отсюда

$$\sqrt[3]{y^2}=\frac{z^2-1}{C_1};\ \sqrt[3]{y}=\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{C_1}};\ \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\,dy=\frac{z\,dz}{\sqrt{C_1}\sqrt{z^2-1}};$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}dy=\frac{z\,dz}{\sqrt{C_1}\sqrt{z^2-1}};\quad dy=\frac{3\sqrt[3]{y^2}\cdot z\,dz}{\sqrt{C_1}\sqrt{z^2-1}};\ dy=\frac{3(z^2-1)\,z\,dz}{C_1\sqrt{C_1}\sqrt{z^2-1}}.$$

Поэтому

$$I=\frac{3}{C_1^2}\int(z^2-1)\,dz;$$

$$I=\frac{3}{C_1^2}\left(\frac{z^3}{3}-z\right)=\frac{3}{C_1^2}z\left(\frac{z^2}{3}-1\right)=\frac{z}{C_1^2}(z^2-3)=$$

$$=\frac{1}{C_1^2}\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}\,(1+C_1\sqrt[3]{y^2}-3).$$

Окончательно

$$\frac{1}{C_1^2}(C_1\sqrt[3]{y^2}-2)\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}=\pm(x+C_2).$$

Задача 18,17 (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнений:

1) $y''' - y' = 0$; 2) $y^{\mathrm{IV}} - a^2 y'' = 0$.

Указание. 1) Подстановка $y' = p(x)$ приводит к уравнению $p'' = p$ (уравнение вида (18,36).

2) Подстановка $y'' = p$ понизит порядок уравнения на две единицы и оно примет вид $p'' = a^2 p$.

Ответ. 1) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$;

2) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}$.

Замечание. На следующем практическом занятии эти уравнения будут проинтегрированы очень просто, как линейные уравнения.

В заключение этого практического занятия решим две задачи из теоретической механики.

Задача 18,18. Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы m, которая падает в среде, сопротивление которой пропорционально второй степени скорости. Начальные условия: в начальный момент движения $t = 0$ координата точки равна x_0, а начальная скорость $v = v_0$ (см. чертеж).

К задаче 18,18

Решение. На точку действуют две силы: вес $\bar{P}$ и сила сопротивления $\bar{f}$. Примем прямую, по которой происходит движение, за ось Ox, и направим ее вертикально вниз.

Основным уравнением динамики точки является уравнение

$$m\bar{w} = \sum \bar{F}_k, \tag{18,40}$$

где $\sum \bar{F}_k$ — равнодействующая всех сил, действующих на точку.

Так как сила сопротивления по условию пропорциональна квадрату скорости, то ее модуль $f = k^2 m v^2$, где $k^2 m$ — коэффициент пропорциональности. Спроектируем на ось Ox действующие на точку силы:

$$\left(\sum \bar{F}_k\right)_x = mg - k^2 m v^2.$$

Знак минус перед $k^2 m v^2$ объясняется тем, что сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную движению.

Проекция ускорения $\bar{w}$ на ось Ox равна $\frac{d^2x}{dt^2}$, а проекция скорости на ту же ось есть $\frac{dx}{dt}$, а потому (18,40) перепишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k^2 m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Сокращая на m, получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

которое является дифференциальным уравнением движения точки. Это уравнение не содержит искомой функции x и принадлежит к виду (18,15). Сделаем подстановку: $\frac{dx}{dt} = p(t)$. Порядок уравнения понизится на единицу и оно перепишется так:

$$\frac{dp}{dt} = g - k^2p^2.$$

Переменные в этом уравнении разделяются, получается следующее уравнение:

$$\frac{dp}{g - k^2p^2} = dt.$$

Интегрируя, имеем

$$\int \frac{dp}{g - k^2p^2} = t + C_1,$$

или

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp} = t + C_1. \tag{18,41}$$

Так как при $t = 0$ скорость $\frac{dx}{dt} = p(t)$ равна v_0, то для определения C_1 получаем уравнение

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0} = C_1,$$

и уравнение (18,41) запишется в виде

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp} = t + \frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0}.$$

Определим отсюда p:

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \left[\ln \frac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp} - \ln \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0}\right] = t;$$

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\dfrac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp}}{\dfrac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0}} = t;$$

$$\frac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp} = \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0} e^{2k\sqrt{g}\,t}.$$

Решая это уравнение относительно $p = \frac{dx}{dt}$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{(\sqrt{g} + kv_0)e^{2k\sqrt{g}\,t} - (\sqrt{g} - kv_0)}{(\sqrt{g} + kv_0)e^{2k\sqrt{g}\,t} + (\sqrt{g} - kv_0)}. \tag{18,42}$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на $e^{-k\sqrt{g}t}$. Тогда

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{g}}{k}\,\frac{\sqrt{g}\,(e^{k\sqrt{g}t}-e^{-k\sqrt{g}t})+kv_0\,(e^{k\sqrt{g}t}+e^{-k\sqrt{g}t})}{\sqrt{g}\,(e^{k\sqrt{g}t}+e^{-k\sqrt{g}t})+kv_0\,(e^{k\sqrt{g}t}-e^{-k\sqrt{g}t})}.$$

Вводя гиперболические синус и косинус и сокращая на 2, получим

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{g}}{k}\cdot\frac{\sqrt{g}\operatorname{sh}k\sqrt{g}t+kv_0\operatorname{ch}k\sqrt{g}t}{\sqrt{g}\operatorname{ch}k\sqrt{g}t+kv_0\operatorname{sh}k\sqrt{g}t}. \qquad (18{,}43)$$

Если в правой части уравнения числитель умножить на $k\sqrt{g}$, то он станет производной знаменателя. Замечая это, разделяем переменные и интегрируя получаем

$$x=\frac{1}{k^2}\ln(\sqrt{g}\operatorname{ch}k\sqrt{g}t+kv_0\operatorname{sh}k\sqrt{g}t)+C_2.$$

Определим произвольную постоянную C_2.

На основании начальных условий $x=x_0$ при $t=0$. Поэтому

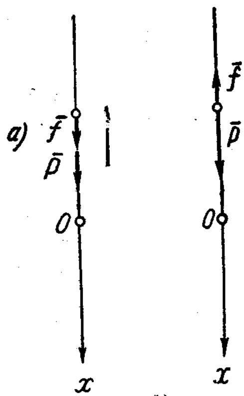
$$x_0=\frac{1}{k^2}\ln\sqrt{g}+C_2\quad(\operatorname{ch}0=1;\ \operatorname{sh}0=0);$$

$$C_2=x_0-\frac{1}{k^2}\ln\sqrt{g}.$$

Окончательно

$$x=x_0+\frac{1}{k^2}\ln\left(\operatorname{ch}k\sqrt{g}t+\frac{kv_0}{\sqrt{g}}\operatorname{sh}k\sqrt{g}t\right).$$

Уравнение (18,43) дает закон изменения скорости в зависимости от времени. Очевидно, что при неограниченном возрастании времени ($t\to\infty$) дробь в правой части этого уравнения стремится к единице, а скорость $v\to\frac{\sqrt{g}}{k}$. Отсюда мы можем заключить, что движение точки асимптотически приближается к равномерному, скорость которого равна $\frac{\sqrt{g}}{k}$, причем эта скорость не зависит от начальных условий.



К задаче 18,19

Задача 18,19 (для самостоятельного решения).

Материальная точка массы m брошена из начала координат вертикально вверх со скоростью v_0, и движение происходит в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости. Определить: 1) высоту h, на которую поднимется точка и 2) скорость u, с которой точка возвратится в исходное положение.

Считать, что движение происходит по оси Ox, которая направлена вертикально вниз.

У к а з а н и е. Модуль силы сопротивления $f = k^2mv^2$, где k^2m — коэффициент пропорциональности. Так как сила сопротивления направлена в сторону, противоположную движению, то она при движении вверх направлена вертикально вниз.

Проекции на ось Ox, силы веса и силы сопротивления — положительны:

$$(\sum \overline{F}_k)_x = mg + k^2mv^2.$$

Уравнение движения после сокращения на m запишется так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{18,44}$$

По условию задачи требуется определить скорость в зависимости от положения точки. Поэтому здесь выгодно проинтегрировать уравнение способом, указанным для интегрирования уравнения (18,36). Перепишем его в виде

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = 1$$

и умножим обе части на $2\frac{dx}{dt}dt$:

$$\frac{2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}dt = 2dx \quad \left(\frac{dx}{dt}dt = dx\right).$$

Если числитель дроби в левой части умножить на k^2, то он станет равным производной знаменателя, а потому, интегрируя, получим

$$\frac{1}{k^2}\ln\left(g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = 2x + C_1.$$

Определив произвольную постоянную $\left(\text{при } t = 0 \ x = 0, \ \frac{dx}{dt} = v_0\right)$, найдем закон скорости в зависимости от положения точки в виде

$$\frac{g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{g + k^2v_0^2} = e^{2k^2x}. \tag{18,45}$$

Чтобы найти высоту подъема, надо в этом уравнении взять $\frac{dx}{dt} = 0$, так как подъем точки прекратится в тот момент, когда ее скорость станет равной нулю. Обозначая высоту подъема через h и подставляя в (18,45) $x = h$, $\frac{dx}{dt} = 0$, получим для определения высоты подъема h уравнение

$$\frac{g}{g + k^2 v_0^2} = e^{2k^2 h}, \tag{18,46}$$

отсюда

$$h = \frac{1}{2k^2} \ln \frac{g}{g + k^2 v_0^2}.$$

При движении вниз надо учесть, что начальная скорость $v_0 = 0$, а $x_0 = h$. Движение вниз описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - k^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

(см. предыдущую задачу). Интегрируя это уравнение тем же способом, что и уравнение (18,44), получим

$$-\frac{1}{k^2} \ln \left[g - k^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = 2x + C_2.$$

Из начальных условий при $x_0 = h$, $v_0 = 0$

$$-\frac{1}{k^2} \ln g = 2h + C_2; \quad C_2 = -\frac{1}{k^2} \ln g - 2h,$$

а потому

$$-\frac{1}{k^2} \ln \left[g - k^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = 2x - \frac{1}{k^2} \ln g - 2h,$$

или

$$\ln \left[g - k^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = -2k^2 x + \ln g + 2hk^2.$$

Когда точка возвратится в исходное положение в начало координат, то x станет равным нулю, а скорость в этот момент пусть равна $\bar{u}$, т. е. $\frac{dx}{dt} = u$, поэтому

$$\ln [g - k^2 u^2] = \ln g + 2hk^2;$$

$$g - k^2 u^2 = e^{\ln g + 2hk^2} = g e^{2hk^2}.$$

Используя (18,46), получаем

$$g - k^2 u^2 = g \frac{g}{g + k^2 v_0^2};$$

$$k^2 u^2 = g - \frac{g^2}{g + k^2 v_0^2} = \frac{g k^2 v_0^2}{g + k^2 v_0^2};$$

$$u^2 = \frac{g v_0^2}{g + k^2 v_0^2}.$$

Окончательно скорость, с которой точка возвратится в первоначальное положение, равна

$$u = v_0 \sqrt{\frac{g}{g + k^2 v_0^2}}.$$

ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: *Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.*

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f(x), \qquad (19,1)$$

где $f(x)$ — функция независимой переменной x, по которой вычислены производные.

Отличительной чертой линейного уравнения является то, что искомая функция y и все ее производные входят в это уравнение в первой степени.

2. Предполагается, что функции $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и правая часть уравнения — функция $f(x)$ непрерывны в промежутке (a, b). Случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ не исключаются. Функции $p_i(x)$ называются коэффициентами уравнения.

3. Задача Коши (см. восемнадцатое практическое занятие) для этого уравнения при сделанном предположении (п. 2) всегда имеет единственное решение при любых начальных условиях (18,2), лишь бы точка $x = x_0$ находилась в промежутке (a, b) непрерывности функций $p_i(x)$ и $f(x)$.

4. Если в уравнении (19,1) правая часть $f(x)$ тождественно равна нулю в промежутке (a, b), то уравнение (19,1) принимает вид

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{-1}(x)\,y' + p_n(x)y = 0 \qquad (19,2)$$

и называется в этом случае линейным однородным уравнением, соответствующим уравнению (19,1). При $f(x) \not\equiv 0$ уравнение (19,1) называется неоднородным.

На этом практическом занятии мы будем заниматься только однородными линейными уравнениями, причем нами будут рассматриваться два вида этих уравнений: 1) уравнения, в которых коэффициенты при производных являются функциями независимой переменной, и 2) уравнения, в которых коэффициенты при производных постоянны, так называемые линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

5. Если функция $y_1(x)$ является решением линейного однородного уравнения (19,2), то и $C_1y_1(x)$ — произведение ее на произвольную постоянную величину C_1 — также является решением этого уравнения.

6. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения (19,2), то и их сумма $y_1(x) + y_2(x)$ также является решением этого уравнения.

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ являются решениями уравнения (19,2), то и функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (19,3)$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются частными решениями уравнения (19,2).

7. Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* в промежутке (a, b), если их отношение $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ в этом промежутке не является постоянной величиной.

Если же отношение $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ — величина постоянная, то эти функции называются *линейно зависимыми*.

8. Если имеется n функций y_1, y_2, ..., y_n, то они называются линейно независимыми в промежутке (a, b), при условии, что равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = 0,$$

где α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, может выполняться только тогда, когда все коэффициенты α_i равны нулю.

Если же это равенство в промежутке (a, b) имеет место, когда хотя бы один из коэффициентов α не равен нулю, то функции y_1, y_2, ..., y_n называются линейно зависимыми.

9. Если функции y_1, y_2, ..., y_n являются решениями уравнения (19,2) и в промежутке (a, b) они линейно независимы, то общее решение этого уравнения имеет вид (19,3):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots + C_n y_n.$$

Эта формула определяет структуру общего решения линейного однородного уравнения (19,2) порядка n и указывает способ построения общего решения. *Таким образом, чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения, надо найти n его частных линейно независимых в (a, b) решений, каждое из них умножить на произвольную постоянную величину и все эти произведения сложить.*

Система линейно независимых решений уравнения (19,2) называется фундаментальной.

10. Для того, чтобы функции y_1, y_2, ..., y_n были линейно независимы в промежутке (a, b), необходимо и достаточно, чтобы их так называемый определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке x_0 промежутка (a, b), в котором непрерывны коэффициенты уравнения (19,2).

Таким образом, чтобы проверить линейную независимость функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, надо составить их определитель Вронского $W(x)$ и убедиться, что хотя бы при одном значении x из промежутка (a, b) он не равен нулю.

11. Уравнение (19,2) имеет n и только n линейно независимых решений.

12. Если известно частное решение $y_1(x)$ линейного однородного уравнения (19,2), то его порядок можно понизить на единицу при помощи подстановки

$$y = y_1 \int u\,dx, \tag{19,4}$$

где $u = u(x)$ — новая искомая функция.

Полученное в результате подстановки (19,4) уравнение также будет линейным.

1. Линейные однородные уравнения с переменными коэффициентами

Задача 19,1. Доказать, что если $y_1(x)$ — частное решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0, \tag{19,5}$$

то второе его частное решение, линейно независимое с первым, находится по формуле

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx.$$

Решение. Подставим (19,4) в данное уравнение, помня, что $(\int u\,dx)' = u$. Получим

$$\begin{array}{rl|c}
 & y = y_1 \int u\,dx & p_2(x) \\
+ & y' = y_1' \int u\,dx + y_1 u & p_1(x) \\
 & y'' = y_1'' \int u\,dx + y_1' u + y_1' u + y_1 u' & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$0 = \underbrace{(y_1'' + p_1(x)\,y_1' + p_2(x)\,y_1)}_{\substack{\text{Это выражение равно} \\ \text{нулю, так как } y_1 \text{ —} \\ \text{решение данного} \\ \text{уравнения}}} \int u\,dx + y_1 u' + [2y_1' + p_1(x)\,y_1]\,u$$

(для сокращения записей вместо $y_1(x)$ мы пишем y_1).

Получаем уравнение

$$y_1u' + (2y_1' + p_1y_1)\,u = 0,$$

порядок которого понижен на единицу по сравнению с данным. Оно является также линейным однородным уравнением первого порядка, допускающим, как известно, разделение переменных.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{du}{u} = -\frac{2y_1' + p_1y_1}{y_1}\,dx.$$

Интегрируя, будем иметь

$$\ln u = -\int \frac{2y_1'}{y_1}\,dx - \int p_1\,dx = -2\ln y_1 - \int p_1\,dx.$$

Отсюда

$$u = e^{-2\ln y_1 - \int p_1 dx} = e^{-2\ln y_1} e^{-\int p_1 dx} = e^{\ln y_1^{-2}} e^{-\int p_1 dx} = y_1^{-2} e^{-\int p_1 dx} =$$

$$= \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2}.$$

Заменяя в выражении (19,4) $y = y_1 \int u\,dx$ функцию u только что найденным значением, получаем

$$y = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2}\,dx. \qquad (19,6)$$

Найденное значение y и будет вторым частным решением $y_2(x)$ данного уравнения. Его линейная независимость с первым видна из того, что отношение $\frac{y_2}{y_1}$ не является постоянной величиной.

Решение этой задачи показывает, что знание одного частного решения уравнения (19,5) позволяет найти второе линейно независимое с первым частное решение при помощи формулы (19,6), которая требует выполнения двух интегрирований (говорят — двух квадратур).

Тем самым для определения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка достаточно знать одно его частное решение.

Ниже предлагаются задачи на применение этой формулы.

Задача 19,2. Найти общее решение уравнения $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, если известно, что его частное решение $y_1 = x$ (проверьте, что оно действительно является решением). Найти частное решение при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

Решение. Данное уравнение — линейное однородное уравнение второго порядка. Прежде всего приведем уравнение к виду (19,5), в котором коэффициент при y'' равен единице. Получаем

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{y}{x-1} = 0.$$

Здесь коэффициент при y' — функция $p_1(x) = -\frac{x}{x-1}$. Вычислим прежде всего входящий в формулу (19,6) интеграл —

$$-\int p_1(x)\,dx = -\int -\frac{x}{x-1}\,dx = \int \frac{x}{x-1}\,dx = \int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx = $$
$$= x + \ln(x-1)$$

(произвольную постоянную вводить не следует, так как в последующем она объединится с произвольной постоянной, вводимой при построении общего решения).

Теперь, входящее в (19,6) выражение

$$e^{-\int p_1\,dx} = e^{x+\ln(x-1)} = e^x e^{\ln(x-1)} = e^x(x-1),$$

а формула (19,6) дает

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx = x\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx =$$
$$= x\left[\int \frac{e^x}{x}\,dx - \int \frac{e^x}{x^2}\,dx\right] = x\left[\frac{1}{x}e^x + \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{e^x}{x^2}\,dx\right] =$$
$$\left|\begin{array}{l|l} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2}\,dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}\right|$$
$$= x\cdot\frac{1}{x}e^x = e^x.$$

Итак, $y_2 = e^x$. Умножая y_1 на C_1, y_2 на C_2 и складывая произведения, получим общее решение заданного уравнения

$$y = C_1 x + C_2 e^x. \tag{19,7}$$

Указание. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (т. е. чтобы решить задачу Коши), надо начальные условия подставить в систему уравнений, которая состоит из общего решения и его производных до порядка $(n-1)$ включительно; определить из этой системы произвольные постоянные и подставить их значения в найденное общее решение. Полученное выражение и будет искомым частным решением.

Дифференцируя найденное общее решение (19,7) один раз (так как $n = 2$, то $n-1 = 1$), получаем систему

$$\left.\begin{array}{l} y = C_1 x + C_2 e^x \\ y' = C_1 + C_2 e^x \end{array}\right\},$$

подставляем в нее начальные условия: $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 = C_1\cdot 0 + C_2 e^0 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l} 1 = C_2 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{array}\right\};$$

$C_2 = 1$; $C_1 = 1$,
искомое частное решение $y = x + e^x$.

Задача 19,3 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения линейных однородных уравнений второго порядка и их частные решения по известным первым частным решениям этих уравнений и заданным начальным условиям:

1) $(1-\ln x)y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0;\ y_1=\ln x.$

Начальные условия: $y(1)=2;\quad y'(1)=4;$

2) $y''+\operatorname{tg}x\cdot y'+\cos^2 x\cdot y=0;\quad y_1=\cos(\sin x);$

Начальные условия: $y(0)=3;\quad y'(0)=2;$

3) $y''-\operatorname{ctg}x\cdot y'+\sin^2 x\cdot y=0;\quad y_1=\cos(\cos x);$

Начальные условия: $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;$

4) $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{9}{x^2}y=0;\ y_1=x^3;$

Начальные условия: $y(3)=1;\quad y'(3)=\frac{4}{5}.$

Указание. Во всех задачах использовать формулу (19,6). В первом уравнении разделить обе его части на $1-\ln x$.

Учесть, что $-\int p_1(x)\,dx=-\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}=\ln(\ln x-1),$

а $e^{\ln(\ln x-1)}=\ln x-1;\quad \int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx=\int\frac{dx}{\ln x}-\int\frac{dx}{\ln^2 x}.$

Первый интеграл вычислить по частям. Окажется, что второй интеграл взаимно уничтожится с тем, который получится при применении интегрирования по частям к первому интегралу.

Ответ.

№	Второе частное решение	Общее решение	Частное решение
1	$y_2=x$	$y=C_1\ln x+C_2x$	$y=2\ln x+2x$
2	$y_2=\sin(\sin x)$	$y=C_1\cos(\sin x)+$ $+C_2\sin(\sin x)$	$y=3\cos(\sin x)+$ $+2\sin(\sin x)$
3	$y_2=\sin(\cos x)$	$y=C_1\cos(\cos x)+$ $+C_2\sin(\cos x)$	$y=-\sin(\cos x)$
4	$y_2=\frac{1}{x^3}$	$y=C_1x^3+C_2\frac{1}{x^3}$	$y=\frac{1}{30}x^3+\frac{27}{10x^3}$

Задача 19,4 (для самостоятельного решения).

Зная первое частное решение линейных однородных уравнений второго порядка, найти их общие решения:

1) $4x^2y'' + 5y = 0; \quad y_1 = \sqrt{x}\cos(\ln x);$

2) $$y'' + \left(\sin x - \cos x + \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)y' -$$
$$-\left(\sin x\cos x - \frac{1}{\sin x + \cos x}\right)y = 0; \quad y_1 = e^{\sin x}.$$

Указания. Для отыскания второго частного решения применить формулу (19,6).

В первом уравнении разделить обе его части на коэффициент при y''. Учесть, что $p_1(x) = 0$, так как уравнение не содержит y', а $\int p_1(x)\,dx = \int 0\cdot dx = C$, причем, можно взять $C = 1$, ибо в последующем произвольная постоянная будет введена.

Интеграл $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)} = \operatorname{tg}(\ln x)$ (подстановка $\ln x = z$).

Во втором уравнении $-\int p_1(x)\,dx = -\int\left[\sin x - \cos x +\right.$
$$\left.+\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right]dx = \cos x + \sin x + \ln(\sin x + \cos x);$$
$$e^{\cos x + \sin x + \ln(\sin x + \cos x)} = e^{\cos x + \sin x}(\sin x + \cos x);$$
$$y_2 = e^{\sin x}\int \frac{e^{\cos x + \sin x}(\sin x + \cos x)}{e^{2\sin x}}\,dx =$$
$$= e^{\sin x}\int e^{\cos x - \sin x}(\sin x + \cos x)\,dx = e^{\sin x}(-e^{\cos x - \sin x});$$
$$y_2 = -e^{\cos x}.$$

(Знак минус при написании общего решения ввести в произвольную постоянную).

Ответ. 1) $y_2 = \sqrt{x}\sin(\ln x)$;
общее решение:
$$y = C_1\sqrt{x}\cos(\ln x) + C_2\sqrt{x}\sin(\ln x),$$
или
$$y = \sqrt{x}\,(C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x));$$

2) $y_2 = -e^{\cos x}$;

общее решение:
$$y = C_1e^{\sin x} + C_2e^{\cos x}.$$

Задача 19,5. Доказать, что если y_1 и y_2 — два линейно независимых частных решения линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \qquad (19{,}8)$$

то $p_1(x) = -\dfrac{W'(x)}{W(x)}$, а $p_2(x) = -\dfrac{y_1''}{y_1} + \dfrac{y_1'}{y_1}\dfrac{W'(x)}{W(x)}$,

где $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$.

Решение. Так как y_1 и y_2 — решения заданного уравнения, то имеет место система уравнений относительно неизвестных $p_1(x)$ и $p_2(x)$, подлежащих определению:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \end{aligned}\right\},$$

или

$$\left.\begin{aligned} p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = -y_1'' \\ p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = -y_2'' \end{aligned}\right\}. \qquad (19{,}9)$$

Исследуем определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}_{\text{Строки и столбы поменяли местами}} = \underbrace{-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{\text{Поменяли местами строки и изменили знак перед определителем}} = -W(x). \qquad (19{,}10)$$

Так как решения y_1 и y_2 по условию линейно независимы, то $W(x) \neq 0$ и система (19,9) имеет решение и притом единственное:

$$p_1(x) = \underbrace{\frac{\begin{vmatrix} -y_1'' & y_1 \\ -y_2'' & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix}}}_{\boxed{\text{На основании 19,10}}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{-W(x)} = -\frac{W'(x)}{W(x)}.$$

(Следует иметь в виду, что производная определителя Вронского, как легко проверить, есть определитель, который отличается от определителя Вронского тем, что в нем последняя строка содержит производные порядка на единицу большего, чем в определителе Вронского).

Из первого уравнения системы (19,9) следует, что

$$y_1p_2(x) = -y_1'' - y_1'p_1(x),$$

откуда и получается доказываемое значение $p_2(x)$.

Найденные выражения коэффициентов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ уравнения (19,5) позволяют составить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известна его фундаментальная система решений.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Характеристическое уравнение. Если в уравнении (19,2) коэффициенты постоянны, то оно называется линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами и имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (19,11)$$

где все $a_i = (i = 1, 2, \ldots, n)$ — вещественные числа; y — искомая функция; x — независимая переменная.

Решение этого уравнения ищется в виде

$$y = e^{kx}. \quad (19,12)$$

Это приводит к алгебраическому уравнению степени n

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \quad (19,13)$$

которое называется характеристическим.

Таким образом, чтобы составить характеристическое уравнение (19,13), надо в уравнении (19,11) заменить производные степенями неизвестной величины k, причем степень k должна быть равна порядку соответствующей производной, а сама искомая функция y заменена единицей.

1. Если все корни характеристического уравнения k_1, k_2, k_3, ... k_n — числа вещественные и среди них нет равных между собою, то, подставляя значение корней в (19,12), получим n частных линейно независимых решений уравнения (19,11) в виде

$$y_1 = e^{k_1 x}; \; y_2 = e^{k_2 x}; \; y_3 = e^{k_3 x}; \; \ldots ; \; y_n = e^{k_n x}. \quad (19,14)$$

2. Если все корни характеристического уравнения — числа вещественные, но среди них есть равные, то каждому корню k_i кратности l соответствует l линейно независимых частных решений уравнения (19,11)

$$y_1 = e^{k_i x}; \; y_2 = x e^{k_i x}; \; y_3 = x^2 e^{k_i x}; \; \ldots ; \; y_n = x^{l-1} e^{k_i x}. \quad (19,15)$$

3. Если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные, но не равные между собой, то каждой паре сопряженных комплексных корней $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$ соответствуют два частных линейно независимых решения уравнения (19,11) вида

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ и } e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (19,16)$$

Если же среди комплексных корней характеристического уравнения имеются кратные комплексные корни, то корню $\alpha + \beta i$ кратности l (корень $\alpha - \beta i$ имеет ту же кратность) соответствует $2l$ частных линейно независимых решения уравнения (19,11), которые имеют вид

$$\begin{matrix} e^{\alpha x} \cos \beta x; & x e^{\alpha x} \cos \beta x; & x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x; & \ldots ; & x^{l-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \sin \beta x; & x e^{\alpha x} \sin \beta x; & x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x; & \ldots ; & x^{l-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{matrix} \quad (19,17)$$

Задача 19,6. Найти решения линейных однородных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -3$;
2) $y'' - 6y' + 8y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$;
3) $y'' + 9y' + 20y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -1$;
4) $y'' - y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$
5) $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 4$;
6) $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(2) = 4$; $y'(2) = 0$;
7) $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(\pi) = -2$; $y'(\pi) = -3$;
8) $y'' + y' + y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = \frac{1}{2}$;
9) $y'' + \omega^2 y = 0$; $y(0) = a$; $y'(0) = v_0$;
10) $y'' + y' = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 5$.

Решение. 1) Составляем характеристическое уравнение вида (19,13), согласно сделанному указанию: заменяем y'' на k^2, y' на k, а y на 1.

Получаем $k^2 - 3k + 2 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, находим, что $k_1 = 1$; $k_2 = 2$. Корни характеристического уравнения — числа вещественные и не равные между собою. Согласно (19,14) частными решениями уравнения будут функции: $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{2x}$. Легко видеть, что функции эти линейно независимы $\left(\frac{y_2}{y_1} = e^x \neq \text{const}\right)$. Общим решением, согласно (19,3), будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \tag{A}$$

Теперь определим произвольные постоянные C_1 и C_2 по заданным начальным условиям. Прежде всего найдем производную

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}. \tag{B}$$

Пользуясь указанием стр. 301 подставляем начальные условия в (A) и (B), и для определения C_1 и C_2 составляем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 \\ -3 &= C_1 + 2C_2 \end{aligned}\right\}.$$

Решая эту систему, получаем: $C_1 = 7$, $C_2 = -5$.

Подставляя эти значения в (A), найдем решение заданного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 7e^x - 5e^{2x}.$$

2) Характеристическое уравнение вида (19,13) получим, заменив y'' на k^2, y' на k, а y на 1. Оно запишется так: $k^2 - 6k + 8 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, найдем, что $k_1 = 2$; $k_2 = 4$. Корни его — числа вещественные и не равные между собою. Согласно (19,14), частными решениями уравнения будут функции: $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = e^{4x}$. Функции эти линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1} = e^{2x} \neq \text{const}$. В соответствии с (19,3) общим решением уравнения будет

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}. \qquad (A)$$

Чтобы найти решение, удовлетворяющее начальным условиям, найдем производную полученного общего решения

$$y' = 2C_1e^{2x} + 4C_2e^{4x}. \qquad (B)$$

В уравнения (A) и (B) подставим заданные начальные условия и получим для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ 0 &= 2C_1 + 4C_2 \end{aligned}\right\},$$

из которой следует, что $C_1 = 2$; $C_2 = -1$.

Подставляя эти значения в общее решение (A), находим решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 2e^{2x} - e^{4x}.$$

3) Это уравнение решим без подробных объяснений. Характеристическим уравнением будет $k^2 + 9k + 20 = 0$; $k_1 = -4$; $k_2 = -5$ (корни — вещественные и разные); частными решениями, согласно (19,14), — функции $y_1 = e^{-4x}$; $y_2 = e^{-5x}$. Общее решение на основании (19,3): $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{-5x}$. Находим $y' = -4C_1e^{-4x} - 5C_2e^{-5x}$. Система уравнений для определения произвольных постоянных на основании начальных условий:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2; \\ -1 &= -4C_1 - 5C_2; \end{aligned}$$

$C_1 = -1$; $C_2 = 1$. Искомое решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = -e^{-4x} + e^{-5x}.$$

4) Характеристическое уравнение: $k^2 - 1 = 0$; корни его $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ — числа вещественные и не равные между собою. Частные решения, согласно (19,14), имеют вид: $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{-x}$. Общее решение в соответствии с (19,3)

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Вместо этого вида общего решения в прикладных науках оно записывается часто через гиперболические синус и косинус. Так как $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, а $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, то

$$\left.\begin{aligned} e^x &= \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \\ e^{-x} &= \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \end{aligned}\right\}. \qquad (19,18)$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим

$$y = C_1(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + C_2(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x),$$

или

$$y = (C_2 + C_1)\operatorname{ch} x + (C_2 - C_1)\operatorname{sh} x.$$

Обозначим: $C_2 + C_1 = c_1$; $C_2 - C_1 = c_2$, и тогда общее решение запишется в виде

$$y = c_1 \operatorname{ch} x + c_2 \operatorname{sh} x.$$

Из начальных условий $C_1 = 1$; $C_2 = 0$. Решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = e^x, \text{ или } y = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x.$$

5) Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Его корни $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ — числа вещественные, но равные между собою ($k_1 = k_2$). Поэтому частные решения надо записать не в виде (19,14), а в виде (19,15):

$$y_1 = e^x; \; y_2 = xe^x.$$

Легко заметить, что в этом случае второе частное решение получается умножением первого частного решения на независимую переменную (в данном случае на x). Решения эти линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const}$.

Общее решение, согласно (19,3), имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2xe^x, \text{ или } y = e^x(C_1 + C_2x); \tag{A}$$

$$y' = e^x[C_1 + C_2(x+1)].$$

Подставляя начальные условия в общее решение и его производную, получим систему уравнений для определения произвольных постоянных:

$$2 = C_1;$$

$$4 = C_1 + C_2;$$

$C_1 = 2$; $C_2 = 2$. Искомое решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 2e^x(1 + x).$$

6) Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4k + 4 = 0$. Его корни $k_1 = -2$; $k_2 = -2$ — числа вещественные и равные между собой. Согласно (19,15) в этом случае частными решениями являются функции

$$y_1 = e^{-2x}; \; y_2 = xe^{-2x}.$$

Общее решение

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x},$$

или

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x);$$

$$y' = e^{-2x}(C_2 - 2C_1 - 2C_2 x).$$

Система уравнений для определения C_1 и C_2 из начальных условий:

$$\left.\begin{aligned} 4e^4 &= C_1 + 2C_2 \\ 0 &= 2C_1 + 3C_2 \end{aligned}\right\},$$

$C_1 = -12e^4$; $C_2 = 8e^{-4}$. Искомое решение

$$y = 4e^{4-2x}(2x - 3).$$

7) Характеристическое уравнение запишется так: $k^2 - 2k + 2 = 0$. Его корни $k_1 = 1 + i$; $k_2 = 1 - i$ — сопряженные комплексные числа вида $\alpha + \beta i$. Частные решения имеют вид (19,16), причем в этих решениях надо взять $\alpha = 1$; $\beta = 1$:

$$y_1 = e^x \cos x; \quad y_2 = e^x \sin x.$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x,$$

или

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x). \qquad (A)$$

Для определения произвольных постоянных из начальных условий надо найти y':

$$y' = e^x [(C_2 + C_1)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x]. \qquad (B)$$

Подставляя в (A) и (B) начальные условия, получим систему уравнений для определения произвольных постоянных:

$$\left.\begin{aligned} -2 &= -e^{\pi} C_1 \\ -3 &= -e^{\pi}(C_1 + C_2) \end{aligned}\right\},$$

$$C_1 = 2e^{-\pi}; \quad C_2 = e^{-\pi}.$$

Искомое решение, удовлетворяющее начальным условиям, получим, подставляя эти значения в общее решение (A):

$$y = e^{x-\pi}(2\cos x + \sin x).$$

8) Характеристическое уравнение:

$$k^2 + k + 1 = 0.$$

Его корни: $k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$; $k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ — комплексные сопряженные числа вида $\alpha \pm \beta i$; $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Согласно (19,16), частными решениями будут функции:

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x; \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

(очевидно, что эти функции линейно независимы). Общее решение в соответствии с (19,3) запишется так:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

или, вынося $e^{-\frac{1}{2}x}$ за скобку:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \qquad (A)$$

Чтобы определить произвольные постоянные на основании начальных условий, найдем y':

$$y' = e^{-\frac{1}{2}x}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - \frac{1}{2}C_1\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \left(\frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_1\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]. \quad (B)$$

Используя начальные условия, из уравнений (A) и (B) получаем систему уравнений для определения C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= C_1 \\ \frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 - \frac{1}{2}C_1 \end{aligned}\right\},$$

отсюда $C_1 = 2$; $C_2 = \sqrt{3}$. Подставляя эти значения в общее решение, найдем искомое решение

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

9) Это уравнение является уравнением свободных гармонических колебаний. Оно имеет очень важное значение в механике и других прикладных науках.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + \omega^2 = 0$; $k_1 = \omega i$; $k_2 = -\omega i$ — корни комплексные сопряженные, причем $\alpha = 0$; $\beta = \omega$.

Частные решения, согласно (19,16), имеют вид:

$$y_1 = \cos\omega x; \quad y_2 = \sin\omega x.$$

Следует запомнить, что когда действительная часть комплексного корня характеристического уравнения равна нулю, т. е. когда корни чисто мнимые, то частные решения содержат только тригонометрические функции, множитель же $e^{\alpha x}$ при них отсутствует, так как при $\alpha = 0$ $e^{\alpha x} = 1$.

Общее решение, согласно (19,3):

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x; \qquad (19,19)$$

$$y' = -C_1\omega\sin\omega x + C_2\omega\cos\omega x$$

(рекомендуется запомнить это общее решение уравнения свободных гармонических колебаний. Встречаться оно будет очень часто).

Определяем C_1 и C_2 из начальных условий:

$$\left.\begin{aligned} a &= C_1 \\ v_0 &= C_2\omega \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $C_1 = a$; $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$. Подставляя эти значения произвольных постоянных в (19,19), получаем искомое решение в виде

$$y = a\cos\omega x + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega x.$$

Это решение выгодно представить в другом виде. Положим

$$a = A\sin\varphi; \quad \frac{v_0}{\omega} = A\cos\varphi. \qquad (19,20)$$

Тогда

$$y = A\cos\omega x\sin\varphi + A\sin\omega x\cos\varphi = A(\cos\omega x\sin\varphi + \sin\omega\cos\varphi).$$

Окончательно

$$y = A\sin(\omega x + \varphi). \qquad (19,21)$$

Возводя в квадрат обе части каждого из равенств (19,20) и складывая их почленно, получим:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\omega}{v_0}.$$

Механический смысл величин A, ω и φ: A — амплитуда колебаний; ω — частота колебаний; φ — начальная фаза.

Движение, определяемое рассматриваемым уравнением $y'' + \omega^2 y = 0$,— периодическое. Его период $T = \frac{2\pi}{\omega}$. •

10) Характеристическое уравнение: $k^2 + k = 0$. Его корни $k_1 = 0$; $k_2 = -1$. Корни вещественные и разные. Частные решения на основании (19,14)

$$y_1 = 1; \quad y_2 = e^{-x}.$$

Общее решение в соответствии с (19,3)

$$y = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 7 - 5e^{-x}$$

($C_1 = 7$; $C_2 = -5$).

Задача 19,7 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений (независимая переменная t):

1) $x'' - 4x' = 0$; 2) $x'' - 9x = 0$; 3) $x'' - 7x' + 10x = 0$; 4) $x'' + 5x' = 0$; 5) $x'' - 16x = 0$; 6) $x'' + x' + x = 0$; 7) $x'' + 2x' + 4x = 0$; 8) $x'' - 4x' + 4x = 0$; 9) $x'' + 6x' + 9x = 0$; 10) $x'' - 4x' + 29x = 0$; 11) $x'' + 4x = 0$; 12) $x'' + 17x = 0$.

Ответ. 1) $x = C_1 + C_2e^{4t}$; 2) $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$; 3) $x = C_1e^{2t} + C_2e^{5t}$; 4) $x = C_1 + C_2e^{-5t}$; 5) $x = C_1e^{4t} + C_2e^{-4t}$; 6) $x = e^{-\frac{t}{2}} \times \left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; 7) $x = e^{-t}(C_1\cos\sqrt{3}t + C_2\sin\sqrt{3}t)$; 8) $x = e^{2t}(C_1 + C_2t)$; 9) $x = e^{-3t}(C_1 + C_2t)$; 10) $x = e^{2t}(C_1\cos 5t + C_2\sin 5t)$; 11) $x = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$; 12) $x = C_1\cos\sqrt{17}t + C_2\sin\sqrt{17}t$.

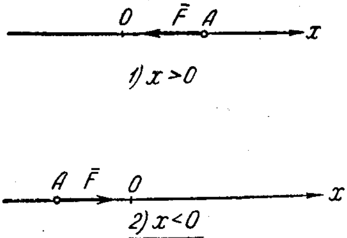
Задача 19,8 (для самостоятельного решения).

Материальная точка массы m движется по прямой, притягиваемая к неподвижному центру силой, прямо пропорциональной расстоянию точки от центра притяжения. Сопротивление среды отсутствует. Определить закон движения точки, если в начальный момент движения $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$, т. е. $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Решение. Прямую, по которой происходит движение точки, примем за ось Ox, причем положительным будем считать направление направо. Начало координат поместим в центр притяжения. Коэффициент пропорциональности возьмем для удобства последующих выкладок равным k^2m. Сила притяжения

$$\bar{F} = k^2 m \bar{x},$$

здесь $|\bar{x}|$ — расстояние точки от начала координат.



К задаче 19,8

Определим модуль силы $\bar{F}$.

Модуль вектора — величина положительная. Поэтому перед модулем силы надо поставить знак плюс, когда точка находится справа от начала координат ($x > 0$), и знак минус, когда она находится слева от него ($x < 0$). Таким образом, модуль силы

$$F = \pm k^2 m x. \qquad (A)$$

Когда точка находится справа от начала координат ($x > 0$), то сила притяжения к началу координат направлена в отрицательную сторону оси Ox, а потому составляет с осью Ox угол в 180°, а $\cos(x, \bar{F}) = -1$.

Если же точка находится слева от начала координат ($x < 0$), сила притяжения направлена в положительную сторону оси Ox и составляет с нею угол в 0°, а потому $\cos(x, \bar{F}) = +1$.

Таким образом, $\cos(x, \bar{F}) = \mp 1$, причем верхний знак соответствует $x > 0$, а нижний $x < 0$.

Известно, что проекция вектора на ось равна модулю вектора, умноженному на косинус угла между вектором и осью. Умножая (A) на $\cos(x, \bar{F}) = \mp 1$, получаем

$$F_x = -k^2 m x, \qquad (B)$$

независимо от того, где находится на оси Ox притягиваемая точка.

Подставляя это значение проекции силы в основное уравнение динамики:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

получаем дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2mx \qquad (19{,}22)$$

и, сокращая на m, имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0. \qquad (C)$$

Это уравнение, как мы уже говорили, называется уравнением свободных гармонических колебаний. Мы замечаем, что оно является линейным однородным уравнением второго порядка (искомая функция — x, независимая переменная — t).

Его характеристическим уравнением будет

$$l^2+k^2=0. \qquad (D)$$

Неизвестное характеристического уравнения мы обозначили не буквой k, как это было в предыдущих задачах, а l, так как k входит уже в коэффициент пропорциональности.

Решая уравнение (D), находим, что $l=\pm ki$, а потому частными решениями уравнения (D) будут:

$$x_1=\cos kt; \quad x_2=\sin kt,$$

и его общее решение

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$$

Из начальных условий задачи следует, что $C_1=x_0$; $C_2=\frac{v_0}{k}$ (определите это самостоятельно), поэтому решением задачи, удовлетворяющим начальным условиям, будет

$$x=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt. \qquad (E)$$

Далее удобно поступить так, как это было сделано в задаче 19,6 (9), и тогда решение (E) запишется так:

$$x=a\sin(\omega t+\varphi),$$

где

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{x_0k}{v_0}.$$

Задача 19,9 (для самостоятельного решения).

Материальная точка массы m движется по прямой, отталкиваемая от неподвижного центра силой, пропорциональной расстоянию. Начальные условия: $x(t_0)=x_0$; $v(t_0)=v_0$.

Указание. Дифференциальным уравнением движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k^2mx.$$

Общее решение:

$$x=C_1e^{kt}+C_2e^{-kt}.$$

Из начальных условий определяем C_1 и C_2:

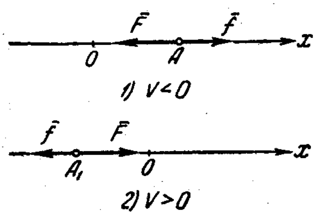
$$C_1 = \frac{kx_0 + v_0}{2k} e^{-\kappa t_0}; \quad C_2 = \frac{kx_0 - v_0}{2k} e^{\kappa t_0};$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \frac{V_0}{k}\right) e^{\kappa(t-t_0)} + \left(x_0 - \frac{V_0}{k}\right) e^{-\kappa(t-t_0)}\right],$$

или, используя формулы (19,18):

$$x = x_0 \operatorname{ch} k(t - t_0) + \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} k(t - t_0).$$

Задача 19,10. Материальная точка массы m движется по прямой, притягиваемая к неподвижному центру силой $\bar{F}$, прямо пропорциональной расстоянию точки от центра притяжения. Сила сопротивления среды $\bar{f}$ прямо пропорциональна первой степени скорости.



К задаче 19,10

Начальные условия: в начальный момент движения $(t = 0)$ $x(0) = x_0$; $v_0(0) = v_0$.

Решение. Эта задача отличается от задачи 19,8 тем, что здесь учитывается сила сопротивления среды. Обозначим для удобства последующих выкладок коэффициент пропорциональности через $2hm$ $(h > 0)$. Если точка движется в положительном направлении оси Ox, то ее абсцисса с течением времени возрастает, а скорость $\frac{dx}{dt} > 0$. Если же точка движется в отрицательном направлении оси, то ее абсцисса убывает с течением времени, а следовательно, ее скорость $\frac{dx}{dt} < 0$. Так как сила сопротивления $\bar{f}$ всегда направлена в сторону, противоположную скорости, то $\bar{f} = -2hm\bar{V}$. Таким образом, на точку действует сила притяжения $\bar{F} = k^2 m\bar{x}$; $F_x = -k^2 mx$ (см. задачу 19,8) и сила сопротивления $\bar{f} = -2hm\bar{V}$. Сумма проекций этих сил на ось Ox равна $-k^2mx - 2hm\frac{dx}{dt}$, и дифференциальное уравнение движения, согласно второму закону Ньютона, запишется так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx - 2hm\frac{dx}{dt},$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \qquad (19,23)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Искомая функция — x, независимая переменная — t.

Характеристическое уравнение, если обозначить его неизвестное буквой s, будет таким:

$$s^2 + 2hs + k^2 = 0;$$
$$s = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Рассмотрим три случая: 1) $h < k$; 2) $h = k$; 3) $h > k$.

1) Если $h < k$, то $h^2 - k^2 < 0$. Обозначим $h^2 - k^2 = -\omega^2$. Тогда $s = -h \pm \omega i$, а $x_1 = e^{-ht} \cos \omega t$; $x_2 = e^{-ht} \sin \omega t$.

Общее решение:

$$x = C_1 e^{-ht} \cos \omega t + C_2 e^{-ht} \sin \omega t,$$

или

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

При $t = 0$ имеем $x_0 = C_1$.

Найдем $\frac{dx}{dt}$ и определим C_2:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-ht} [(C_2\omega - C_1 h) \cos \omega t - (C_1\omega + C_2 h) \sin \omega t].$$

При $t = 0$

$$v_0 = -C_1 h + C_2\omega, \text{ или } v_0 = -x_0 h + C_2\omega,$$
$$C_2 = \frac{v_0 + x_0 h}{\omega}.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, получим решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = e^{-ht}\left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + x_0 h}{\omega} \sin \omega t\right).$$

Если обозначить

$$x_0 = a \sin \varphi; \quad \frac{v_0 + x_0 h}{\omega} = a \cos \varphi, \tag{19,24}$$

то предыдущее равенство запишется так:

$$x = a e^{-ht} \sin (\omega t + \varphi). \tag{19,25}$$

Возводя в квадрат обе части каждого из равенств (19,24) и складывая их почленно, получим

$$a = \frac{1}{\omega} \sqrt{x_0^2 \omega^2 + (v_0 + x_0 h)^2},$$

а $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0 + x_0 h}$.

Наличие в равенстве (19,25) множителя $\sin (\omega t + \varphi)$ указывает на колебательный характер движения. С увеличением времени t множитель e^{-ht} уменьшается и стремится к нулю. Когда время неограниченно возрастает, точка колеблется около начала координат, неограниченно к нему приближаясь. Движение в рассматриваемом случае является затухающим колебательным, а уравнение (19,23) называется уравнением затухающих колебаний.

2) Если $h > k$, то $h^2 - k^2 > 0$, $h^2 - k^2 = \omega^2$; корни характеристического уравнения s_1 и s_2 — числа вещественные и не равные между собой:

$$x = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}. \qquad (19,26)$$

Из начальных условий следует, что

$$C_1 = \frac{x_0 s_2 - v_0}{s_2 - s_1}; \quad C_2 = \frac{v_0 - x_0 s_1}{s_2 - s_1}.$$

Решение (19,26) описывает так называемый апериодический затухающий процесс движения точки к положению равновесия.

3) При $h = k$ корни характеристического уравнения вещественны и между собою равны: $s_1 = s_2 = -h$:

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-ht}; \qquad (19,27)$$

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = x_0 h + v_0.$$

И в этом случае, когда $t \to \infty$, абсцисса движущейся точки $x \to 0$, т. е. точка неограниченно приближается к началу координат — положению равновесия, оставаясь с одной стороны от него, если начальная скорость v_0 не очень велика. Движение, описываемое уравнением (19,26), также называется апериодическим.

Теперь мы решим несколько линейных дифференциальных однородных уравнений порядка выше чем второй с постоянными коэффициентами.

Задача 19,11. Найти общие решения уравнений:

1) $y''' - y'' - y' + y = 0$; 2) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; 3) $y''' + y = 0$; 4) $y^{(4)} - y'' = 0$; 5) $y^{(4)} - y = 0$; 6) $y^{(4)} + y = 0$; 7) $y^{(6)} - 2y^{(4)} - y'' + 2y = 0$; 8) $\frac{d^4x}{dt^4} - 13\frac{d^2x}{dt^2} + 36x = 0$; 9) $\frac{d^3z}{du^3} - 6\frac{d^2z}{du^2} + 12\frac{dz}{du} - 8z = 0$;

10) $y^{(5)} - 5y^{(4)} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0$.

Независимой переменной во всех примерах, где она не указана, является x.

Решение. 1) Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - k^2 - k + 1 = 0.$$

Разлагаем левую часть этого уравнения на множители:

$$k^2(k-1) - (k-1) = 0; \quad (k-1)(k^2-1) = 0,$$

или $(k-1)(k-1)(k+1) = 0$. Отсюда $k - 1 = 0$; $k - 1 = 0$; $k + 1 = 0$. Корни: $k_1 = 1$; $k_2 = 1$; $k_3 = -1$. Все корни — вещественны, но среди них есть два равных: $k_1 = k_2$.

Частными решениями уравнения на основании (19,14) и (19,15) будут:

$$y_1 = e^x; \quad y_2 = xe^x; \quad y_3 = e^{-x}.$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}.$$

2) Характеристическое уравнение: $k^3-3k^2+3k-1=0$, его левая часть равна $(k-1)^3$. Поэтому $k_1=1$; $k_2=1$; $k_3=1$. Корни вещественны и все между собою равны.

Частными решениями уравнения в соответствии с (19,15) будут:

$$y_1=e^x;\ \ y_2=xe^x;\ \ y_3=x^2e^x,$$

а общее решение запишется так:

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x,\ \text{или}\ y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2).$$

3) Характеристическое уравнение: $k^3+1=0$. Разлагая левую часть на множители, получаем: $(k+1)(k^2-k+1)=0$; $k+1=0$; $k^2-k+1=0$. Корни: $k_1=-1$; $k_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Корню $k_1=-1$ соответствует решение $y_1=e^{-x}$, а корням k_2 и k_3 $\left(\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ на основании (19,16) — решения:

$$y_2=e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x;\ \ y_3=e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Общее решение:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

окончательно

$$y=C_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

4) Характеристическое уравнение: $k^4-k^2=0$; $k^2(k^2-1)=0$. Корни: $k_1=0$; $k_2=0$; $k_3=1$; $k_4=-1$. Первым двум вещественным и равным между собою корням соответствуют на основании (19,15) частные решения: $y_1=1$; $y_2=x$, а корням k_3 и k_4 — решения $y_3=e^x$ и $y_4=e^{-x}$.

Общим решением уравнения будет

$$y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}.$$

5) Характеристическое уравнение: $k^4-1=0$.

Разлагая левую часть этого уравнения на множители, получаем: $(k^2-1)(k^2+1)=0$, или $(k-1)(k+1)(k^2+1)=0$. Корни: $k_1=1$; $k_2=-1$; $k_{3,4}=\pm i$. Первым двум корням в соответствии с (19,14) отвечают частные решения уравнения: $y_1=e^x$; $y_2=e^{-x}$, а мнимым корням k_3 и k_4 $(\alpha=0;\ \beta=1)$ на основании (19,16) — решения: $y_3=\cos x$; $y_4=\sin x$.

Общее решение:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

6) Уравнение встречается при определении уравнения изогнутой оси балки, лежащей на упругом основании.

Характеристическое уравнение: $k^4+1=0$.

Решение этого двучленного уравнения вызовет некоторые затруднения. Прибавим в его левую часть и одновременно вычтем из нее $2k^2$, отчего уравнение не изменится. Получим:

$$k^4+2k^2+1-2k^2=0;\quad (k^2+1)^2-2k^2=0.$$

Разлагаем левую часть на множители: $(k^2+1-\sqrt{2}k)(k^2+1+\sqrt{2}k)=0$. Отсюда получаем два уравнения:

$$k^2-\sqrt{2}k+1=0 \quad \text{и} \quad k^2+\sqrt{2}k+1=0.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$k_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i;\quad k_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

На основании (19,16) частными решениями, соответствующими первым двум корням, будут

$$y_1=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x;\quad y_2=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

а частными решениями, соответствующими третьему и четвертому корням:

$$y_3=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x;\quad y_4=e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

Общее решение:

$$y=C_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_3e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+$$
$$+C_4e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

или

$$y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+\right.$$
$$\left.+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

Во многих прикладных науках (например, в сопротивлении материалов) принято функции e^x и e^{-x} заменять гиперболическими по формулам (19,18). На основании этих формул:

$$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}=\operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}}{2}x+\operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}x;\quad e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}=\operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}}{2}x-\operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

Поэтому предыдущее решение может быть записано так:

$$y=c_1\operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_2\operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}}{2}x\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x+c_3\operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}x\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+$$
$$+c_4\operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}x\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

где $c_1=C_1+C_3$; $c_2=C_2+C_4$; $c_3=C_1-C_3$; $c_4=C_2-C_4$.

7) Характеристическое уравнение:

$$k^6 - 2k^4 - k^2 + 2 = 0.$$

Легко заметить, что корнями этого уравнения будут: $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$. Разделив левую часть уравнения на $k^2 - 1$, получим $k^4 - k^2 - 2$. Поэтому левую часть уравнения можно записать в виде

$$(k-1)(k+1)(k^4 - k^2 - 2) = 0.$$

Решая биквадратное уравнение $k^4 - k^2 - 2 = 0$, найдем корни: $k_3 = \sqrt{2}$; $k_4 = -\sqrt{2}$; $k_{5,6} = \pm i$.

Частными решениями уравнения будут:

$$y_1 = e^x;\ y_2 = e^{-x};\ y_3 = e^{\sqrt{2}x};\ y_4 = e^{-\sqrt{2}x};\ y_5 = \cos x;\ y_6 = \sin x.$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x} + C_5 \cos x + C_6 \sin x.$$

8) Характеристическое уравнение: $k^4 - 13k^2 + 36 = 0$. Его корни: $k_1 = 2$; $k_2 = -2$; $k_3 = 3$; $k_4 = -3$.

Частные решения: $x_1 = e^{2t}$; $x_2 = e^{-2t}$; $x_3 = e^{3t}$; $x_4 = e^{-3t}$.

Общее решение:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t} + C_4 e^{-3t}.$$

9). Характеристическое уравнение: $k^3 - 6k^2 + 12k - 8 = 0$.

Левая часть уравнения — куб разности $k - 2$, и уравнение переписывается так: $(k-2)^3 = 0$.

Его корни: $k_1 = 2$; $k_2 = 2$; $k_3 = 2$ — вещественны и все равны между собой. Поэтому на основании (19,15) частными решениями будут (иметь в виду, что искомая функция — z, независимая переменная — u):

$$z_1 = e^{2u};\ z_2 = ue^{2u};\ z_3 = u^2 e^{2u}.$$

Общее решение:

$$z = C_1 e^{2u} + C_2 u e^{2u} + C_3 u^2 e^{2u},$$

или

$$z = e^{2u}(C_1 + C_2 u + C_3 u^2).$$

10) Характеристическое уравнение:

$$k^5 - 5k^4 + 12k^3 - 16k^2 + 12k - 4 = 0.$$

Очевидным корнем его является 1 ($k_1 = 1$). После деления левой части уравнения на $k - 1$ получим $k^4 - 4k^3 + 8k^2 - 8k + 4$. Левая часть уравнения теперь представится в виде произведения двух множителей:

$$(k-1)(k^4 - 4k^3 + 8k^2 - 8k + 4) = 0,$$

откуда

$$k - 1 = 0;\ k_1 = 1;\ k^4 - 4k^3 + 8k^2 - 8k + 4 = 0.$$

Представим последнее уравнение в виде

$$(k^2 - 2k)^2 + 4(k^2 - 2k) + 4 = 0.$$

Левая часть этого уравнения есть полный квадрат суммы $[(k^2-2k)+2]^2$, а потому $(k^2-2k+2)^2=0$.

Корнями этого уравнения являются числа:

$$k_{2,3}=1\pm i;\ k_{4,5}=1\pm i,$$

т. е. его корни — комплексные и кратные.

Первому корню соответствует решение $y_1=e^x$, остальным четырем корням на основании (19,17) — решения ($\alpha=1$; $\beta=1$):

$$y_2=e^x\cos x;\quad y_3=e^x\sin x;$$
$$y_4=xe^x\cos x;\quad y_5=xe^x\sin x.$$

Общее решение:

$$y=C_1e^x+C_2e^x\cos x+C_3e^x\sin x+C_4xe^x\cos x+C_5xe^x\sin x,$$

или

$$y=[C_1+(C_2+C_4x)\cos x+(C_3+C_5x)\sin x]\,e^x.$$

В заключение решим четыре задачи с граничными (краевыми) условиями.

Как уже указывалось, в этих задачах искомая функция и ее производные задаются не при одном и том же значении аргумента, как это делается в задачах с начальными условиями (в задаче Коши), а при разных значениях аргумента, соответствующих границам (краям) некоторого промежутка интегрирования. Поэтому они и называются граничными (иначе краевыми) задачами.

Учащийся должен иметь в виду, что не всякая граничная задача имеет решение, а если и имеет его, то во многих случаях оно не является единственным.

Приведем пример граничной задачи, которая не имеет решения.

Найти решение дифференциального уравнения $y''+4y=0$, удовлетворяющее граничным условиям: при $x=0$ искомая функция $y=2$; при $x=\frac{\pi}{2}$ искомая функция $y=3$.

Здесь заданы значения искомой функции на концах промежутка $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Характеристическое уравнение: $k^2+4=0$. Его корни: $k_1=2i$; $k_2=-2i$. Частные решения уравнения: $y_1=\cos 2x$; $y_2=\sin 2x$. Общее решение: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Определим теперь произвольные постоянные так, чтобы y удовлетворял граничным условиям. Подставим в общее решение первое граничное условие $y(0)=2$ и получим, что $2=C_1$. Подстановка же в общее решение второго граничного условия $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ дает $3=-C_1$. Система

$$\left.\begin{array}{l}2=C_1\\ 3=-C_1\end{array}\right\}$$

не совместна и, таким образом, нет решения предложенного уравнения, удовлетворяющего заданным граничным условиям.

На языке геометрии это означает, что через точки (0, 2) и $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ не проходит ни одна интегральная кривая.

Если бы второе граничное условие: $y = 3$ при $x = \frac{\pi}{2}$ мы заменили, положив $y = -2$ при $x = \frac{\pi}{2}$, то оказалось бы, что $-2 = -C_1$, и для определения C_1 получилась бы уже совместная система уравнений, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = C_1 \\ 2 = C_1 \end{array}\right\},$$

а решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям, записалось бы так:

$$y = 2\cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

где C_2 — произвольная постоянная. Это означает, что существует бесчисленное множество интегральных кривых заданного уравнения, проходящих через точки (0,2) и $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$.

Задача 19,12. Найти решение уравнения

$$EI\frac{d^4y}{dz^4} - \frac{4k}{a^3}y = 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{array}{ll} \text{1) при } z = 0 \quad y = 0; & \text{2) при } z = 0 \quad \frac{dy}{dz} = 0; \\ \text{3) при } z = l \quad \frac{d^2y}{dz^2} = 0; & \text{4) при } z = l \quad \frac{d^3y}{dz^3} = 0. \end{array} \qquad (19{,}28)$$

Решение. Это уравнение встречается при решении задачи о потере устойчивости стержня, находящегося в магнитном поле. (Здесь EI — жесткость стержня; a — начальное расстояние между магнитом и стержнем; k — коэффициент пропорциональности; y — отклонение стержня от положения равновесия).

Из уравнения видно, что искомой функцией является y, а независимой переменной — z. Разделим обе части уравнения на EI и обозначим

$$\frac{4k}{EIa^3} = \alpha^4; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{4k}{EIa^3}}.$$

Уравнение переписывается так:

$$\frac{d^4y}{dz^4} - \alpha^4 y = 0$$

и представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня.

Характеристическое уравнение: $k^4 - \alpha^4 = 0$. Разлагая его левую часть на множители, получаем:

$$(k^2 - \alpha^2)(k^2 + \alpha^2) = 0, \quad \text{или} \quad (k - \alpha)(k + \alpha)(k^2 + \alpha^2) = 0.$$

Его корни: $k_1 = \alpha$; $k_2 = -\alpha$; $k_{3,4} = \pm \alpha i$. Частные решения уравнения

$$y_1 = e^{\alpha z} = \operatorname{ch} \alpha z + \operatorname{sh} \alpha z; \quad y_2 = e^{-\alpha z} = \operatorname{ch} \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z$$

(см. формулы (19,18)); $y_3 = \cos \alpha z$; $y_4 = \sin \alpha z$.

Общее решение:

$$y = C_1 (\operatorname{ch} \alpha z + \operatorname{sh} \alpha z) + C_2 (\operatorname{ch} \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z) + C_3 \cos \alpha z + C_4 \sin \alpha z.$$

Перепишем его в виде

$$y = (C_1 + C_2) \operatorname{ch} \alpha z + (C_1 - C_2) \operatorname{sh} \alpha z + C_3 \cos \alpha z + C_4 \sin \alpha z.$$

Обозначим: $C_1 + C_2 = A_1$; $C_1 - C_2 = A_2$, и для однообразности обозначений примем $C_3 = A_3$; $C_4 = A_4$.

Общее решение запишется теперь так:

$$y = A_1 \operatorname{ch} \alpha z + A_2 \operatorname{sh} \alpha z + A_3 \cos \alpha z + A_4 \sin \alpha z. \tag{19,29}$$

Для определения четырех произвольных постоянных используем четыре заданных граничных условия (19,28) и получим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_3 = 0 \\ A_2 + A_4 = 0 \\ A_1 \operatorname{ch} \alpha l + A_2 \operatorname{sh} \alpha l - A_3 \cos \alpha l - A_4 \sin \alpha l = 0 \\ A_1 \operatorname{sh} \alpha l + A_2 \operatorname{ch} \alpha l + A_3 \sin \alpha l - A_4 \cos \alpha l = 0 \end{array}\right\} \tag{19,30}$$

Уравнения (19,30) представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных A_1, A_2, A_3, A_4. Как и всякая система алгебраических линейных однородных уравнений, она имеет тривиальное (самоочевидное) решение:

$$A_1 = 0; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = 0; \quad A_4 = 0.$$

Чтобы система (19,30) имела решение, отличное от нулевого необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{ch} \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l & -\cos \alpha l & -\sin \alpha l \\ \operatorname{sh} \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l & \sin \alpha l & -\cos \alpha l \end{vmatrix} = 0 \tag{19,31}$$

Вычислим этот определитель. Отнимем от элементов четвертого столбца соответствующие элементы второго столбца, и уравнение (19,31) перепишется так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{ch} \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l & -\cos \alpha l & -\sin \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l \\ \operatorname{sh} \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l & \sin \alpha l & -\cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l \end{vmatrix} = 0$$

Во второй строке все элементы, кроме второго, равны нулю, а поэтому определитель равен произведению этого неравного нулю элемента на его алгебраическое дополнение, и теперь уравнение (19,31) будет выглядеть так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \operatorname{ch}\alpha l & -\cos\alpha l & -\sin\alpha l-\operatorname{sh}\alpha l \\ \operatorname{sh}\alpha l & \sin\alpha l & -\cos\alpha l-\operatorname{ch}\alpha l \end{vmatrix}=0.$$

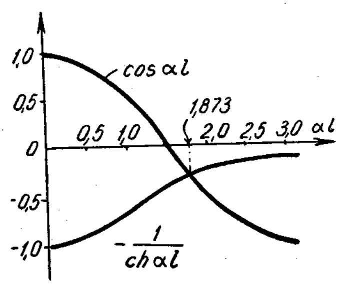
Вычислив определитель третьего порядка по известному правилу, получим уравнение

$$\cos\alpha l\operatorname{ch}\alpha l=-1, \qquad (19,32)$$

которое перепишем в виде

$$\cos\alpha l=-\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha l}.$$

Построим графики функций $\cos\alpha l$ и $-\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha l}$ (см. чертеж). Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями уравнения (19,32). Наименьший его корень, наиболее важный, $\alpha l=1{,}873$.



К задаче 19,12

Установим теперь, какая зависимость существует между произвольными постоянным A_1, A_2, A_3, A_4.

Первое и второе уравнения системы (19,30) показывают, что

$$A_3=-A_1;\quad A_4=-A_2. \qquad (19,33)$$

Исключая A_3 и A_4 из третьего и четвертого уравнений этой системы, получим:

$$\left.\begin{aligned} A_1(\operatorname{ch}\alpha l+\cos\alpha l)+A_2(\operatorname{sh}\alpha l+\sin\alpha l)=0 \\ A_1(\operatorname{sh}\alpha l-\sin\alpha l)+A_2(\operatorname{ch}\alpha l+\cos\alpha l)=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (19,34)$$

Первое уравнение системы (19,34) дает

$$A_2=-\frac{\operatorname{ch}\alpha l+\cos\alpha l}{\operatorname{sh}\alpha l+\sin\alpha l}A_1. \qquad (19,35)$$

И, таким образом, все произвольные постоянные могут быть выражены через A_1.

Подставляя в (19,35) $\alpha l=1{,}873$ и учитывая равенства (19,33), получаем:

$$A_2=-0{,}734A_1;\quad A_3=-A_1;\quad A_4=0{,}734A_1, *$$

* $\cos 1{,}873=-0{,}2976$; $\sin 1{,}873=0{,}9547$; $\operatorname{sh} 1{,}873=3{,}1771$; $\operatorname{ch} 1{,}873=$ $=3{,}3307$.

а потому, так как $\alpha = \frac{1,873}{l}$, общее решение (19,29) запишется так:

$$y = A_1 \operatorname{ch} \frac{1,873}{l} z - A_1 0,734 \operatorname{ch} \frac{1,873}{l} z - A_1 \cos \frac{1,873}{l} z + \\ + A_1 0,734 \sin \frac{1,873}{l} z.$$

Окончательно, вынося A_1 за скобку, получим уравнение изогнутой оси стержня

$$y = A_1 \left(\operatorname{ch} 1,873 \frac{z}{l} - 0,734 \operatorname{sh} 1,873 \frac{z}{l} - \cos 1,873 \frac{z}{l} + \right. \\ \left. + 0,734 \sin 1,873 \frac{z}{l} \right),$$

содержащее единственный неопределенный параметр A_1, характеризующий масштаб кривой изгиба.

Замечание. Мы указали общий способ решения системы (19,30). Однако можно было бы и не идти этим общим путем, а исключить с помощью первого и второго уравнений этой системы неизвестные A_3 и A_4 и тем самым получить систему (19,34), из которой, приравнивая нулю ее определитель:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l + \sin \alpha l \\ \operatorname{sh} \alpha l - \sin \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l \end{vmatrix} = 0,$$

получили бы

$$\operatorname{ch}^2 \alpha l + 2 \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l + \cos^2 \alpha l - \operatorname{sh}^2 \alpha l + \sin^2 \alpha l = 0.$$

Отсюда

$$1 + 1 + 2 \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l = 0, \text{ или } \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = -1,$$

т. е. уравнение (19,32), которое было получено раньше.

Задача 19,13. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + s^3 \frac{dy}{dz} = 0 \qquad (19,36)$$

(s — постоянная величина), удовлетворяющее граничным условиям:

1) $y'' = 0$ при $z = 0$; 2) $y''' = 0$ при $z = 0$;

3) $y = 0$ при $z = b$; 4) $y' = 0$ при $z = b$.

Решение. К уравнению (19,36) приводит решение задачи об исследовании искривленной поверхности пластинки, жестко опертой по одной из ее длинных кромок и свободной вдоль другой, когда изгиб пластинки обусловлен аэродинамическими нагрузками. Величина s в уравнении зависит от скорости потока и от параметров пластинки.

Характеристическое уравнение: $k^4 + s^3 k = 0$. Разлагая его левую часть на множители, получаем $k(k^3 + s^3) = 0$;

$$k(k+s)(k^2 - sk + s^2) = 0.$$

Корни:

$$k_1 = 0; \quad k_2 = -s; \quad k_{3,4} = \frac{s}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} si.$$

Частные решения уравнения (19,36): $y_1 = 1$; $y_2 = e^{-sz}$; $y_3 = e^{\frac{sz}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sz$; $y_4 = e^{\frac{sz}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sz$.

Общее решение:

$$y = C_1 + C_2 e^{-sz} + \left(C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sz + C_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sz\right) e^{\frac{sz}{2}}. \tag{19,37}$$

Если использовать граничные условия, то для определения произвольных постоянных получим систему четырех однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 - \frac{1}{2} C_4 = 0\\
&C_2 + C_4 = 0\\
&C_1 + C_2 e^{-sb} + \left(C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb + C_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb\right) e^{\frac{sb}{2}} = 0\\
&-C_2 e^{-sb} + \frac{1}{2} e^{\frac{sb}{2}} C_3 \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb\right) +\\
&+ \frac{1}{2} e^{\frac{sb}{2}} C_4 \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb\right) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{19,38}$$

Для того, чтобы эта система уравнений имела решение, отличное от тривиального

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю.

Однако мы не будем составлять этот определитель и вычислять его, а выразим неизвестные C_3 и C_4 через C_2.

Из второго уравнения следует, что

$$C_4 = -C_2. \tag{19,39}$$

Подставляя это значение C_4 в первое уравнение (19,38) получим

$$C_2 + \frac{1}{2} C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 = 0; \quad \frac{3}{2} C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 = 0,$$

откуда

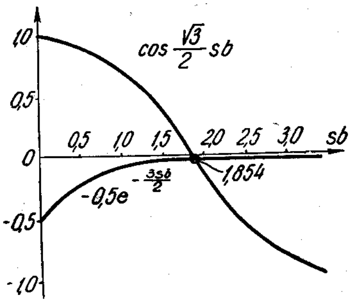
$$C_3 = -\sqrt{3}\, C_2. \tag{19,40}$$

Теперь эти выражения C_4 и C_3 через C_2 подставим в четвертое уравнение:

$$-C_2e^{-sb}-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{sb}{2}}C_2\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)-$$
$$-\frac{1}{2}e^{\frac{sb}{2}}C_2\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)=0.$$

Выносся $-C_2$ за скобку, получим

$$-C_2\left(e^{-sb}+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{sb}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+\frac{3}{2}e^{\frac{sb}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}e^{\frac{sb}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{sb}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)=0.$$



К задаче 19,13

Так как по предположению $C_2 \neq 0$, то

$$e^{-sb}+2e^{\frac{sb}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb=0.$$

Для определения параметра sb получаем уравнение

$$\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb=-0{,}5e^{-\frac{3}{2}sb}. \qquad (A)$$

Графическое решение этого трансцендентного уравнения дано на чертеже.

Абсциссы точек пересечения этих кривых будут корнями уравнения (A). Наименьший, наиболее важный корень дает

$$sb=1{,}854; \quad s=\frac{1{,}854}{b}$$

(см. чертеж).

Подставляя найденное значение sb в третье уравнение и используя соотношение (19,39) и (19,40), выразим C_1 через C_2:

$$C_1=-C_2e^{-sb}+\left(C_2\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)e^{\frac{sb}{2}};$$

$$C_1=\left[-e^{-sb}+\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)e^{\frac{sb}{2}}\right]C_2;$$

$sb=1{,}854$, а поэтому

$$C_1=1{,}942C_2. \qquad (19{,}41)$$

Подставляя (19,39), (19,40) и (19,41) в (19,37), получим решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$y=\left[1{,}942+e^{-sz}-\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sz+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sz\right)e^{\frac{sz}{2}}\right]C_2.$$

Это решение содержит один произвольный параметр C_2.

Задача 19,14 (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -Pw,$$

удовлетворяющее граничным условиям: $w(0) = 0$; $w(l) = 0$.

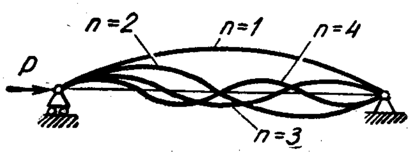
Указание. К этому уравнению приводит задача о продольном изгибе стержня (задача Эйлера). Здесь P — сила, сжимающая стержень вдоль его оси.

Обозначить

$$\frac{P}{EI} = k^2. \qquad (A)$$

Уравнение приводится к виду $\frac{d^2w}{dx^2} + k^2w = 0$. Это дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня при продольном изгибе. Его общее решение: $w = C_1\cos kx + C_2\sin kx$. Из граничных условий получаем: из первого условия $C_1 = 0$; из второго условия, зная, что $C_1 = 0$, имеем

$$0 = C_2\sin kl,$$



К задаче 19,14

отсюда или $C_2 = 0$, или $\sin kl = 0$.

Если $C_2 = 0$, то $w = 0$, т. е. решение тривиальное, которое, собственно, и искать было нечего. Остается рассмотреть $\sin kl = 0$. Отсюда $kl = n\pi$; $k = \frac{n\pi}{l}$, где n — любое целое число, не равное нулю. Так, если $kl = 0$, то $l = 0$, $k = 0$, а этого не может быть.

Из $kl = n\pi$ $(n \neq 0)$ следует, что $k^2l^2 = n^2\pi^2$, $k^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$; $k = \sqrt{\frac{n\pi}{l}}$. Подставляя эти значения в (А), получим $\frac{P}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$,

$$\text{или } P = \frac{n^2\pi^2EI}{l^2}. \qquad (B)$$

Выражение (B) дает так называемое критическое значение сжимающей силы P, действующей вдоль стержня, при котором становится возможным продольный изгиб.

Решение, удовлетворяющее граничным условиям, запишется так:

$$w = C_2\sin\frac{n\pi}{l}x \quad \left(\frac{n\pi}{l} = k\right).$$

При $n = 1$ сжимающая сила $P = \frac{\pi^2EI}{l^2}$, уравнение изогнутой оси стержня

$$w = C_2\sin\frac{\pi}{l}x.$$

Это основной случай.

Так как наибольшее значение $\sin\frac{\pi x}{l}=1$, то $w_{\text{наиб}}=C_2$, и таким образом, C_2 есть не что иное, как наибольший прогиб стержня.

При $n=2$ сила $P=\frac{4\pi^2EI}{l^2}$, а уравнение изогнутой оси стержня имеет вид $w=C_2\sin\frac{2\pi}{l}x$ и т. д.

Число n представляет собой число полуволн синусоиды, располагающихся по длине изогнутого стержня (см. чертеж).

Задача 19,15 (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$EI\frac{d^4y}{dz^4}=-\frac{qv^2}{g}\frac{d^2y}{dz^2},$$

удовлетворяющее граничным условиям:

1) при $z=0$ $y=0$; 2) при $z=0$ $y''=0$;

3) при $z=l$ $y=0$; 4) при $z=l$ $y''=0$.

Указание. К предложенному уравнению сводится задача о статической неустойчивости трубопровода. Здесь EI — жесткость поперечного сечения трубопровода; q — вес жидкости, приходящейся на единицу длины трубопровода; g — ускорение силы тяжести; v — скорость потока жидкости; y — прогиб оси трубопровода.

Положить

$$s^2=\frac{v^2q}{gEI}. \qquad (A)$$

Уравнение приобретает вид

$$\frac{d^4y}{dz^4}+s^2\frac{d^2y}{dz^2}=0.$$

Частные решения: $y_1=1$; $y_2=z$; $y_3=\cos sz$; $y_4=\sin sz$.

Общее решение:

$$y=C_1+C_2z+C_3\cos sz+C_4\sin sz.$$

Из граничных условий окажется, что

$$\sin sl=0; \quad sl=n\pi.$$

Первое значение sl, которое наиболее важно: $sl=\pi$; $s=\frac{\pi}{l}$.

Решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$y=C_4\sin sz.$$

Из (A) следует, что $v=s\sqrt{\frac{gEI}{q}}$, и при $s=\frac{\pi}{l}$ получаем так называемое критическое значение скорости $v_{\text{кр}}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{gEI}{q}}$ потока жидкости, при котором наступает потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия трубопровода.

ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = f(x). \tag{20,1}$$

2. Общее решение линейного неоднородного уравнения находится так:

а) Найти одно какое-нибудь его частное решение.

б) Найти общее решение соответствующего однородного уравнения.

в) Сложить эти два решения. Сумма их и будет общим решением уравнения (20,1).

Так, если частное решение неоднородного уравнения есть Y, а общее решение соответствующего однородного есть $C_1y_1+C_2y_2+ + \ldots +C_ny_n$, то общее решение линейного неоднородного уравнения (20,1):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots + C_ny_n + Y. \tag{20,2}$$

Условия, налагаемые на коэффициенты $p_i(x)$ и правую часть $f(x)$, изложены в пояснениях к уравнению (19,1).

3. Если правая часть уравнения (20,1) есть сумма двух функций:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = \\ = f_1(x) + f_2(x), \tag{20,3}$$

следует рассмотреть два уравнения, у которых левые части такие же, как в (20,3), но в одном из них правой частью будет функция $f_1(x)$, а во втором $f_2(x)$, т. е. рассмотреть уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + \\ + p_n(x)\, y = f_1(x) \tag{20,4}$$

и

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + \\ + p_n(x)\, y = f_2(x). \tag{20,5}$$

Если функции Y_1 и Y_2 — соответственно частные решения уравнений (20,4) и (20,5), то их сумма $Y_1 + Y_2$ будет частным решением уравнения (20,3). (Это свойство называется наложением решений и распространяется на случай, когда правая часть — сумма n функций).

4. Если известно общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего заданному неоднородному, то его

частное решение Y можно найти с помощью квадратур методом, который указал Лагранж. Этот метод называется методом вариации (изменения) произвольных постоянных.

Получив общее решение (19,3)

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

линейного однородного уравнения (19,2), поступают так: полагают, что в этом решении величины $C_1, C_2, \ldots, C_n$ являются не постоянными, а функциями независимой переменной x. Записывают это так:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n. \qquad (20,6)$$

Для определения функций $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ составляется система уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \ldots + C_n'(x) y_n = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \ldots + C_n'(x) y_n' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \qquad (20,7)$$

Мы рассмотрим подробно этот метод для линейных дифференциальных неоднородных уравнений второго порядка:

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x). \qquad (20,8)$$

Получив общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (20,9)$$

соответствующего однородного уравнения, поступают так: полагают, что в этом решении величины C_1 и C_2 являются не постоянными, а функциями независимой переменной x, и записывают это так:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2.$$

Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляется система уравнений (20,7):

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{array}\right\}. \qquad (20,10)$$

Определитель этой системы — определитель Вронского. Так как (20,9) есть общее решение уравнения (20,8), то функции y_1 и y_2 линейно независимы и их определитель Вронского не равен нулю.

Поэтому система (20,10) всегда имеет решение и притом единственное.

Решая эту систему уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получим:

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W}; \quad C_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{W} \\ C_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W}; \quad C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W} \end{aligned}\right\}, \tag{20,11}$$

где определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Из (20,11) интегрированием находим:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx + c_1; \\ C_2(x) &= \int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx + c_2. \end{aligned} \tag{20,12}$$

Подставляя (20,12) в (20,9), получим

$$y = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx + c_1\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx + c_2\right) y_2.$$

Раскрывая скобки, найдем

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx.$$

Сравнивая с (20,2), замечаем, что первые два слагаемых $c_1y_1 + c_2y_2$ в правой части — общее решение однородного уравнения, соответствующего (20,8), а последние два слагаемых — частное решение неоднородного уравнения (20,8). Обозначая эти два слагаемых через Y, получаем формулу частного решения линейного неоднородного уравнения второго порядка

$$Y = y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx.$$

В более компактной форме частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка может быть записано так:

$$Y = \begin{vmatrix} \int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx & \int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{20,13}$$

Все величины, входящие в эту формулу, известны.

Замечание. Следует иметь в виду, что система (20,10), так же как и формула (20,13), имеет место тогда, когда коэффициент при старшей производной равен единице. Функция $f(x)$ есть правая часть уравнения при этом предположении.

5. Метод вариации произвольных постоянных — универсальный. Он позволяет при помощи квадратур определить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (20,1), если известно общее решение соответствующего ему однородного уравнения.

Ниже будет рассмотрен случай, когда частное решение неоднородного уравнения (20,1) может быть найдено без применения метода вариации произвольных постоянных, и тем самым без вычисления интегралов.

Приступим к упражнениям, связанным с применением метода вариации произвольных постоянных.

Задача 20,1. Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2,$$

зная, что частным решением соответствующего ему однородного уравнения является функция $y_1 = x^2$.

Решение. Прежде всего преобразуем уравнение так, чтобы коэффициент при старшей производной, т. е. при y'', был равен единице. Для этого обе части уравнения разделим на x^2 и получим

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1. \qquad (A)$$

Теперь правая часть уравнения $f(x) = x^2 - 1$. Отбросим ее и найдем общее решение уравнения

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0, \qquad (B)$$

зная его одно частное решение. По формуле (19,6) определим второе частное решение:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}\,dx.$$

У нас $p(x) = -\frac{4}{x}$; $-\int p(x)\,dx = \int \frac{4}{x}\,dx = 4\ln x = \ln x^4$; $e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln x^4} = x^4$. Помня, что $y_1 = x^2$, получаем

$$y_2 = x^2 \int \frac{x^4}{x^4}\,dx = x^2 \cdot x = x^3.$$

Итак, $y_2 = x^3$. Общее решение y_0 уравнения (B) запишется так:

$$y_0 = C_1x^2 + C_2x^3. \qquad (C)$$

Теперь применим формулу (20,13) для определения частного решения уравнения (A). Определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4;$$

$$\int \frac{y_1 f(x)}{W}\,dx = \int \frac{x^2(x^2-1)}{x^4}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = x + \frac{1}{x};$$

$$\int \frac{y_2 f(x)}{W}\,dx = \int \frac{x^3(x^2-1)}{x^4}\,dx = \int \left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x|.$$

Подставляя в (20,13) значения интегралов и частные решения y_1 и y_2 уравнения (B), получим

$$Y = \begin{vmatrix} x+\frac{1}{x} & \frac{x^2}{2}-\ln|x| \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \frac{x^4}{2}+x^2+x^2\ln|x|.$$

Складывая это частное решение заданного неоднородного уравнения с общим решением (C) соответствующего ему однородного, получим общее решение заданного уравнения

$$y = \underline{C_1x^2}+C_2x^3+\frac{x^4}{2}+\underline{x^2}+x^2\ln|x|.$$

Это выражение можно упростить, если объединить подчеркнутые слагаемые и обозначить C_1+1 через c_1, а $C_2=c_2$. Тогда

$$y = c_1x^2+c_2x^3+\frac{x^4}{2}+x^2\ln|x|.$$

Задача 20,2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(2x+1)\,y''+(4x-2)\,y'-8y=2e^x(2x+1)^3,$$

зная, что функция $y_1=e^{-2x}$ является частным решением соответствующего ему однородного уравнения.

Решение. Преобразуем уравнение (A) так, чтобы коэффициент при старшей производной y'' был равен единице. Разделим его обе части на $(2x+1)$. Получим

$$y''+\frac{4x-2}{2x+1}y'-\frac{8}{2x+1}y=2e^x(2x+1)^2. \qquad (A)$$

Правая часть этого уравнения $f(x)=2e^x(2x+1)^2$. Отбросим правую часть и найдем общее решение полученного однородного уравнения

$$y''+\frac{4x-2}{2x+1}y'-\frac{8}{2x+1}y=0. \qquad (B)$$

Здесь опять-таки чтобы найти y_2 следует воспользоваться формулой (19,6), в которой $p(x)=\frac{4x-2}{2x+1}$, $y_1=e^{-2x}$ (согласно условию):

$$-\int p(x)\,dx=-\int\frac{4x-2}{2x+1}dx=-2\int\frac{2x-1}{2x+1}dx=$$

$$=-2\int\frac{2x+1-2}{2x+1}dx=-2\int\left(1-\frac{2}{2x+1}\right)dx=-2x+$$

$$+2\ln|2x+1|=-2x+\ln(2x+1)^2;$$

$$e^{-\int p(x)dx}=e^{-2x+\ln(2x+1)^2}=e^{-2x}(2x+1)^2;$$

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx=e^{-2x}\int\frac{e^{-2x}(2x+1)^2}{e^{-4x}}dx=$$

$$=e^{-2x}\int e^{2x}(4x^2+4x+1)\,dx=\frac{1}{2}e^{-2x}(4x^2+1)\,e^{2x}=\frac{1}{2}(4x^2+1);$$

$$y_2=\frac{1}{2}(4x^2+1).$$

Этот интеграл проще всего вычислить так:

$$\int e^{2x}(4x^2+4x+1)\,dx = e^{2x}(ax^2+bx+c).$$

Теперь следует продифференцировать обе части этого равенства, сократить на e^{2x} и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства. Получится, что

$$e^{2x}(4x^2+4x+1) = e^{2x}(2ax^2+2bx+2c+2ax+b).$$

Отсюда $2a=4;\quad 2b+2a=4;\quad 2c+b=1;$

$$a=2;\ b=0;\ c=\frac{1}{2}.$$

Итак, общее решение y_0 уравнения (B) запишется так:

$$y_0 = C_1e^{-2x}+C_2\frac{1}{2}(4x^2+1)$$

(в последующем множитель $\frac{1}{2}$ во втором слагаемом мы включим в состав произвольной постоянной C_2).

Чтобы воспользоваться формулой (20,13) для определения частного решения заданного неоднородного уравнения (A), определим вронскиан:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & \frac{1}{2}(4x^2+1) \\ -2e^{-2x} & 4x \end{vmatrix} = e^{-2x}(2x+1)^2.$$

Так как правая часть уравнения (A) $f(x)=2e^x(2x+1)^2$, выражения для интегралов, входящих в (20,13), будут такими:

$$\int\frac{y_1f(x)}{W}\,dx = \int\frac{e^{-2x}2e^x(2x+1)^2}{e^{-2x}(2x+1)^2}\,dx = 2e^x;$$

$$\int\frac{y_2f(x)}{W}\,dx = \int\frac{\frac{1}{2}(4x^2+1)\,2e^x(2x+1)^2}{e^{-2x}(2x+1)^2}\,dx = \int e^{3x}(4x^2+1)\,dx =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{17}{27}\right).$$

(Последний интеграл вычислен способом, указанным выше).

Найденные значения интегралов и частные решения y_1 и y_2 уравнения (B) подставим в (20,13), получим частное решение Y заданного неоднородного уравнения:

$$Y=\begin{vmatrix} 2e^x & e^{3x}\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{17}{27}\right) \\ e^{-2x} & \frac{1}{2}(4x^2+1) \end{vmatrix} = \frac{2}{27}(36x^2+12x+5)\,e^x.$$

Учитывая общее решение (B) однородного уравнения, соответствующего уравнению (A), и прибавляя к нему только что найденное частное решение заданного неоднородного уравнения, получим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1e^{-2x} + C_2(4x^2+1) + \frac{2}{27}(36x^2+12x+5)e^x.$$

Задача 20,3 (для самостоятельного решения). Найти общее решение неоднородных линейных уравнений, зная одно частное решение соответствующего однородного уравнения:

1) $x^2y'' - xy' + y = 3x^3;\qquad y_1 = x;$

2) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^5\ln x;\qquad y_1 = x^2;$

3) $x^2y'' - 2y = x^2;\qquad y_1 = \frac{1}{x}.$

Ответ. 1) $y = C_1x + C_2x\ln|x| + \frac{3}{4}x^3;$

2) $y = C_1x^2 + C_2x + \frac{x^5}{12}\ln|x| - \frac{7}{144}x^5;$

3) $y = C_1\frac{1}{x} + C_2x^2 + \frac{1}{3}x^2\ln|x|.$

МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Сведения из теории

Пусть в уравнении (20,1) коэффициентами являются не функции, а вещественные числа, а его правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x], \tag{20,14}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, которые могут быть одной и той же степени, и разных степеней. Если они разной степени, то пусть n — их наивысшая степень (при $n=0$ эти многочлены попросту постоянные величины).

Величины α и β — вещественные числа.

В рассматриваемом случае метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения неоднородного уравнения, конечно, также применим. Однако здесь можно отыскать частное решение более простым способом, пользуясь которым не понадобится вычислять интегралы. Интегрирование уравнения можно провести с помощью только алгебраических операций при помощи метода, который называется методом неопределенных коэффициентов.

Если правая часть имеет вид (20,14), то следует рассмотреть два возможных случая:

1. Число $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения.

В этом случае частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$Y = e^{\alpha x}[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x], \tag{20,15}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены одной и той же степени, равной наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ — числа, подлежащие определению. В (20,15) только эти коэффициенты и подлежат определению, числа же α и β — те же, что и в (20,14).

2. Если число $\alpha+\beta i$ является корнем кратности k $(k \geqslant 1)$ характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$Y = x^k[p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x], \tag{20,16}$$

здесь $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ в (20,14), а коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ подлежат определению; показатель степени k равен кратности корня $\alpha+\beta i$ характеристического уравнения. Таким образом, и в этом случае определению подлежат только коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$, все же остальные числа α, β и k — известны.

Неопределенные коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ как в том, так и в другом случае находятся так:

В заданное уравнение подставляется Y и сравниваются коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной в левой и правой частях равенства. Ниже на примерах мы укажем, как это выполняется практически.

Заметим, что рассматриваемый вид неоднородных линейных уравнений (коэффициенты постоянны, а правая часть имеет вид (20,14)) встречается очень часто, а техника их интегрирования исключительно проста. Мы рассмотрим различные возможные случаи сначала для линейных неоднородных уравнений второго порядка, а потом и порядка выше, чем второй.

Задача 20,4. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 12y = 5. \tag{A}$$

Решение. Уравнение линейное неоднородное. Прежде всего отбрасываем правую часть и решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 7y' + 12y = 0. \tag{B}$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 7k + 12 = 0$$

имеет корни:

$$k_1 = 3;\ k_2 = 4. \tag{C}$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = e^{3x};\ y_2 = e^{4x}.$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}. \qquad (D)$$

Теперь рассмотрим правую часть уравнения (A) и сравним ее с (20,14). Так как правая часть не содержит множителя $e^{\alpha x}$, то надо считать, что $\alpha = 0$ ($e^{\alpha x} = e^{0\cdot x} = e^0 = 1$).

Правая часть не содержит также ни синуса, ни косинуса. Это значит, что $\beta = 0$ ($\sin 0\cdot x = \sin 0 = 0$; $\cos 0\cdot x = \cos 0 = 1$). Число 5 в правой части надо рассматривать как многочлен нулевой степени.

Составляем число $\alpha + \beta i$, чтобы решить вопрос, является ли оно корнем характеристического уравнения. Так как у нас $\alpha = \beta = 0$, то $\alpha + \beta i = 0$. Из рассмотрения корней (C) характеристического уравнения видно, что 0 не является корнем характеристического уравнения. Значит, имеет место первый случай и частное решение надо искать в виде (20,15), в котором положить $\alpha = 0$, $\beta = 0$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ — нулевой степени.

Таким образом, частное решение будем искать в виде

$$Y = A\ (A - \text{const}). \qquad (E)$$

Подставляя (E) в заданное уравнение (A), получим

$$\begin{array}{r|l} 12 & Y = A \\ (-7) & Y' = 0 \\ 1 & Y'' = 0 \end{array} \qquad (F)$$

Приравниваем сумму левых частей равенств (F) правой части заданного уравнения (мы вправе это сделать, так как предполагается, что Y — частное решение заданного уравнения. Так мы будем поступать и при решении последующих задач, не делая этой оговорки).

Учитывая это указание и складывая почленно равенства F, получаем

$$5 = 12A,$$

откуда $A = \frac{5}{12}$ и, следовательно, частное решение неоднородного уравнения $Y = \frac{5}{12}$.

Складывая Y с общим решением (D) однородного уравнения, находим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}.$$

Задача 20,5 (для самостоятельного решения). Найти общие решения уравнений: 1) $y'' - 6y' + 8y = 10$; 2) $y'' + 4y = 8$.

Ответ. 1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{4}$; 2) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2$.

Задача 20,6. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' = 7. \tag{A}$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' - 5y' = 0. \tag{B}$$

Характеристическое уравнение: $k^2 - 5k = 0$.

Его корни: $k_1 = 0$; $k_2 = 5$. Частными решениями уравнения (B) являются: $y_1 = 1$; $y_2 = e^{5x}$. Общее решение этого уравнения:

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{5x}. \tag{C}$$

Сравним теперь правую часть уравнения (A) с (20,14).

Правая часть не содержит ни множителя $e^{\alpha x}$, ни тригонометрических функций. Значит, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому число $\alpha + \beta_i = 0$, а нуль есть простой (однократный) корень характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения (A) следует искать в виде (20,16), в котором надо взять $k = 1$; $\alpha = 0$; $\beta = 0$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ должны быть той же степени, что и многочлен в правой части заданного уравнения, т. е. нулевой. Итак, $Y = Ax$.

$$\begin{array}{c|l} 0 & Y = Ax \\ (-5) & Y' = A \\ 1 & Y'' = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$7 = -5A; \quad A = -\frac{7}{5}$$

Подставляя это значение A в выражение для Y, получим $Y = -\frac{7}{5}x$. Общее решение уравнения (A) будет суммой общего решения (C) соответствующего однородного уравнения и только что найденного частного решения заданного неоднородного. Тогда

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{7}{5}x.$$

Задача 20,7 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

$$1)\ y'' + 6y' = 8; \quad 2)\ y'' - y' = 3.$$

Ответ. 1) $y = C_1 + C_2 e^{-6x} + \frac{4}{3}x$; 2) $y = C_1 + C_2 e^{x} - 3x$.

Задача 20,8 (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 2,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$.

Указание. Общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{3}.$$

Ответ. $x = \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{1}{3}$.

Задача 20,9. Весомая частица массы m брошена вертикально вверх и при движении испытывает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости. Определить закон движения частицы, если в начальный момент $t = 0$ положение точки определяется координатой $x = s_0$, а начальная скорость $v = v_0$.

Решение. На точку действуют две силы: 1) сила тяжести $\bar{P}$, (g — ускорение силы тяжести) и 2) сила сопротивления $\bar{f} = k^2mv$, где через k^2m обозначен для удобства коэффициент пропорциональности.

Направим ось Ox, по которой происходит движение, вертикально вниз.

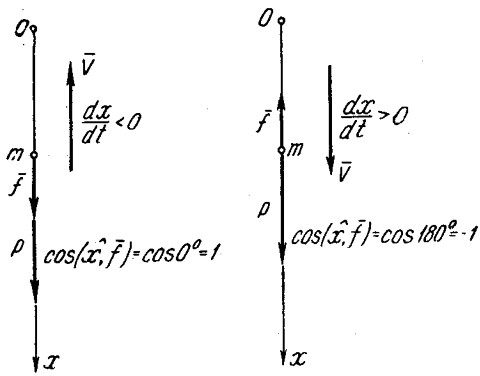
Уравнение движения будет таким:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\cos(\widehat{x, \bar{P}}) + f\cos(\widehat{x, \bar{f}}), \qquad (20,17)$$

где P и f — соответственно модули силы тяжести и силы сопротивления.

Следует учесть, что сила сопротивления направлена всегда противоположно направлению движения, а скорость — в сторону движения. Модуль силы сопротивления

$$f = \pm k^2m\frac{dx}{dt}. \qquad (A)$$



К задаче 20,9

При движении частицы *вверх* проекция скорости отрицательна, т. е. $\frac{dx}{dt} < 0$, а модуль вектора всегда положителен. Поэтому в (A) при движении вверх надо взять знак минус. В этом случае угол между силой сопротивления $\bar{f}$ и осью Ox равен $0°$, вследствие чего $\cos(\widehat{x, \bar{f}}) = 1$, а произведение $f\cos(\widehat{x, \bar{f}}) = -k^2m\frac{dx}{dt}$.

При движении частицы *вниз* проекция скорости $\frac{dx}{dt} > 0$. Для того, чтобы модуль силы $\bar{f}$ был величиной положительной, надо в (A) взять знак плюс. В этом случае угол между силой сопротивления $\bar{f}$ и осью Ox равен $180°$, а потому $\cos(\widehat{x, \bar{f}}) = -1$, а произведение $f\cos(\widehat{x, \bar{f}})$ по-прежнему равно $-k^2m\frac{dx}{dt}$. Учитывая, что сила тяжести направлена вертикально вниз, ее модуль

$P = mg$, угол между силой тяжести и осью Ox равен 0°, а $\cos(\widehat{x, \overline{P}}) = 1$, уравнение движения запишем так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k^2m\frac{dx}{dt}.$$

Сокращаем на m и переписываем уравнение в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{dx}{dt} = g. \qquad (B)$$

Мы получили линейное неоднородное уравнение (искомая функция — x, независимая переменная — t, правая часть равна g).

Отбрасываем правую часть и находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{dx}{dt} = 0. \qquad (C)$$

Его характеристическое уравнение: $r^2 + k^2r = 0$, $r(r + k^2) = 0$. (Конечно, буквой k здесь нельзя обозначать неизвестное характеристического уравнения, так как эта буква уже занята. Неизвестное характеристического уравнения мы обозначили буквой r).

Корни характеристического уравнения:

$$r_1 = 0;\ r_2 = -k^2. \qquad (D)$$

Частные решения уравнения (B):

$$x_1 = 1;\ x_2 = e^{-k^2t}.$$

Его общее решение

$$x_0 = C_1 + C_2e^{-k^2t}. \qquad (E)$$

Теперь определим частное решение неоднородного уравнения (B). Сравнивая его правую часть с выражением (20,14), приходим к выводу, что $\alpha = \beta = 0$, поэтому число $\alpha + \beta i = 0$. Среди корней (D) характеристического уравнения нуль есть. Значит, число $\alpha + \beta i$ — корень характеристического уравнения простой (или однократный). В выражении (20,16) число $k = 1$. Так как g — величина постоянная, многочлен нулевой степени, то и в (20,16) надо $p(x)$ и $q(x)$ считать многочленами нулевой степени и, следовательно, учитывая, что $k = 1$, искать частное решение неоднородного уравнения в виде $X = At$:

$$\begin{array}{l|l} 0 & X = At \\ k^2 & X' = A \\ 1 & X'' = 0 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{g = Ak^2;\ A = \frac{g}{k^2}} \end{array}$$

Поэтому $X = \frac{g}{k^2}t$, а общее решение уравнения (B) будет равно сумме общего решения (E) уравнения (C) и только что найденного частного решения неоднородного уравнения

$$x = C_1 + C_2 e^{-k^2 t} + \frac{g}{k^2} t. \tag{F}$$

Теперь нам осталось из начальных условий определить произвольные постоянные C_1 и C_2. Подставляя $t = 0$ и $x = s_0$, получим

$$s_0 = C_1 + C_2. \tag{G}$$

Продифференцируем обе части (F)

$$\frac{dx}{dt} = -k^2 C_2 e^{-k^2 t} + \frac{g}{k^2}.$$

и поставим $t = 0$, а $\frac{dx}{dt} = v_0$:

$$v_0 = -k^2 C_2 + \frac{g}{k^2}.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right).$$

Подставляя это значение в (G), найдем

$$C_1 = s_0 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right).$$

Найденные значения C_1 и C_2 подставим в (F) и получим окончательно решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = s_0 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right) + \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right) e^{-k^2 t} + \frac{g}{k^2} t,$$

или

$$x = s_0 + \frac{g}{k^2} t + \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)\left(e^{-k^2 t} - 1\right).$$

Из полученного результата можно сделать интересный вывод: если бы время t неограниченно возрастало, то $e^{-k^2 t} \to 0$, и тогда

$$x = s_0 + \frac{g}{k^2} t + \frac{v_0}{k^2} - \frac{g}{k^4}; \quad x = \left(s_0 + \frac{v_0}{k^2} - \frac{g}{k^4}\right) + \frac{g}{k^2} t,$$

т. е. движение асимптотически приближается к равномерному со скоростью $\frac{dx}{dt} = \frac{g}{k^2}$.

Положение точки при очень большом t мало отличалось бы от того, которое бы она занимала, двигаясь равномерно со скоростью $\frac{g}{k^2}$, выйдя из начального положения, абсцисса которого равна $s_0 + \frac{v_0}{k^2} - \frac{g}{k^4}$.

Задача 20,10. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' + y = 3e^{2x}. \qquad (A)$$

Решение. Отбрасываем правую часть $3e^{2x}$ и будем искать общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y' + y = 0. \qquad (B)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + k + 1 = 0$$

имеет корни

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x; \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x,$$

а его общее решение

$$y_0 = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \qquad (D)$$

Теперь отыщем частное решение неоднородного уравнения (A). Сравнивая его правую часть с (20,14), заключаем, что $\alpha = 2$; $\beta = 0$, многочлен $P(x)$ имеет нулевую степень (множитель при e^{2x} — величина постоянная). Число $\alpha + \beta i = 2$ и не является корнем характеристического уравнения (среди корней (C) число 2 отсутствует). Частное решение следует искать в виде (20,15), полагая в нем $\alpha = 2$; $\beta = 0$; многочлены $p(x)$ и $q(x)$ надо взять нулевой степени. Таким образом, $Y = Ae^{2x}$:

$$\begin{array}{c|l} 1 & Y = Ae^{2x} \\ 1 & Y' = 2Ae^{2x} \\ 1 & Y'' = 4Ae^{2x} \\ \hline \end{array}$$

$$3e^{2x} = e^{2x}(A + 2A + 4A); \quad 3 = 7A; \; A = \frac{3}{7}$$

и, значит $Y = \frac{3}{7} e^{2x}$. Общее решение заданного уравнения будет суммой этого частного решения неоднородного уравнения и общего решения (D) соответствующего однородного:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{3}{7} e^{2x}.$$

Задача 20,11 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-x}$; 2) $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 4x = 7e^{3t}$.

Ответ. 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - e^{-x}$; 2) $x = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - \frac{7}{2} e^{3t}$.

Задача 20,12. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 3e^{2t}. \qquad (A)$$

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 0. \qquad (B)$$

Корни его характеристического уравнения $k^2 - 6k + 8 = 0$ равны: $k_1 = 2$; $k_2 = 4$. Частные решения: $x_1 = e^{2t}$; $x_2 = e^{4t}$. Его общее решение

$$x_0 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}. \qquad (C)$$

Теперь приступим к отысканию частного решения неоднородного уравнения (A).

Сравнивая его правую часть с выражением (20,14), заключаем, что $\alpha = 2$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 2$. Но 2 есть простой корень характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения (A) ищем в виде (20,16), в котором $k = 1$, а независимую переменную x надо заменить на t, многочлены же $p(x)$ и $q(x)$ взять нулевой степени, т. е. такой же, как и многочлен, стоящий множителем при e^{2t} в правой части заданного уравнения. Таким образом, ищем частное решение уравнения (A) в виде $X = Ate^{2t}$ (члены, содержащие t уничтожились)

$$\begin{array}{r|l} 8 & X = Ate^{2t} \\ -6 & X' = e^{2t}(A + 2At) \\ 1 & X'' = e^{2t}(4A + 4At) \\ \hline \end{array}$$

$$3e^{2t} = e^{2t}(8At - 6A - 12At + 4A + 4At).$$

Сокращая на e^{2t}, получим уравнение для определения неизвестного коэффициента A:

$$3 = -2A; \; A = -\frac{3}{2},$$

и поэтому частное решение неоднородного уравнения

$$X = -\frac{3}{2}te^{2t},$$

а его общее решение будет суммой этого частного решения и общего решения (C) соответствующего однородного уравнения:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - \frac{3}{2}te^{2t},$$

или

$$x = \left(C_1 - \frac{3}{2}t\right)e^{2t} + C_2 e^{4t}.$$

Задача 20,13 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

$$1)\ y'' - 7y' + 12y = 5e^{3x};\quad 2)\ y'' - 4y' = 2e^{4t}.$$

Ответ. 1) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} - 5xe^{3x}$;

$$2)\ y = C_1 + C_2e^{4t} + \frac{1}{2}te^{4t}.$$

Задача 20,14. Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} - 6\frac{dr}{d\varphi} + 9r = 4e^{3\varphi}. \tag{A}$$

Решение. Заданное уравнение — неоднородное линейное. Искомая функция — r, независимая переменная — φ. Однородное уравнение, соответствующее ему:

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} - 6\frac{dr}{d\varphi} + 9r = 0. \tag{B}$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет корни:

$$k_1 = 3;\quad k_2 = 3. \tag{C}$$

Частные решения уравнения (B):

$$r_1 = e^{3\varphi};\quad r_2 = \varphi e^{3\varphi}. \tag{D}$$

Общее решение уравнения (B)

$$r_0 = C_1e^{3\varphi} + C_2\varphi e^{3\varphi}. \tag{E}$$

Теперь отыщем частное решение неоднородного уравнения (A). Сравнивая его правую часть с (20,14), замечаем, что $\alpha = 3$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 3$.

Среди корней (C) характеристического уравнения оно встречается дважды. (В таком случае говорят, что 3 — двукратный корень характеристического уравнения). Частное решение следует искать в виде (20,16), в котором надо взять $k = 2$. Учитывая, что правая часть уравнения (A) имеет постоянный множитель, т. е. многочлен нулевой степени, надо и в (20,15) многочлены $p(\varphi)$ и $q(\varphi)$ взять нулевой степени.

Таким образом, частное решение надо искать в виде

$$R = \varphi^2Ae^{3\varphi}$$

(в формуле (20,16) мы заменили независимую переменную x независимой φ):

$$\begin{array}{r|l}
9 & R = \varphi^2Ae^{3\varphi} \\
-6 & R' = Ae^{3\varphi}(2\varphi + 3\varphi^2) \\
1 & R'' = Ae^{3\varphi}(12\varphi + 9\varphi^2 + 2) \\
\hline
\end{array}$$

$$4e^{3\varphi} = 2Ae^{3\varphi};\quad 2A = 4;\quad A = 2$$

$$R = 2\varphi^2e^{3\varphi}$$

Складывая это решение с общим решением (E) однородного уравнения, получим общее решение заданного уравнения:

$$r = C_1e^{3\varphi} + C_2\varphi e^{3\varphi} + 2\varphi^2e^{3\varphi},$$

или

$$r = e^{3\varphi}(C_1 + C_2\varphi + 2\varphi^2).$$

Задача 20,15 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

$$1)\ y'' + 4y' + 4y = 5e^{-2\varphi};\quad 2)\ y'' - 2y' + y = 3e^t.$$

Ответ.

$$1)\ y = e^{-2\varphi}\left(C_1 + C_2\varphi + \frac{5}{2}\varphi^2\right);\quad 2)\ y = e^t\left(C_1 + C_2t + \frac{3}{2}t^2\right).$$

Задача 20,16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 8y' + 7y = 3x^2 + 7x + 8. \qquad (A)$$

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 8y' + 7y = 0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 7 = 0$ имеет корни:

$$k_1 = 1;\quad k_2 = 7. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = e^x;\quad y_2 = e^{7x}.$$

Его общее решение

$$y_0 = C_1e^x + C_2e^{7x}. \qquad (D)$$

Переходим к определению частного решения неоднородного уравнения (A). В его правой части отсутствуют множитель $e^{\alpha x}$ и тригонометрические функции. Поэтому $\alpha = 0$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 0$, а нуль не является корнем характеристического уравнения (см. (C)). Частное решение следует искать в виде (20,15), причем многочлены $p(x)$ и $q(x)$ должны иметь вторую степень. (Очевидно многочлен $q(x)$ не будет участвовать, так как $\beta = 0$, а при многочлене $q(x)$ множитель $\sin\beta x = 0$. Частное решение ищем в виде $Y = Ax^2 + Bx + C$:

$$\begin{array}{r|l} 7 & Y = Ax^2 + Bx + C \\ -8 & Y' = 2Ax + B \\ 1 & Y'' = 2A \end{array}$$

$$3x^2 + 7x + 8 = 7Ax^2 + (7B - 16A)x + (2A - 8B + 7C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$7A = 3; \quad A = \frac{3}{7};$$

$$7B - 16A = 7; \quad B = \frac{97}{49};$$

$$2A - 8B + 7C = 8; \quad C = \frac{1126}{343},$$

и, таким образом,

$$Y = \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1126}{343}.$$

Общим решением заданного уравнения будет сумма этого частного решения неоднородного уравнения (A) и общего решения (D) соответствующего однородного уравнения (B):

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{7x} + \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1126}{343}.$$

Задача 20,17 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y'' - y' - 2y = x^3 - 5x^2 + 7x + 2;$

2) $x'' - 3x' - 4x = t^2.$

Ответ. 1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{51}{8};$

2) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{13}{32}.$

Задача 20,18. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' = x^3 + 2x - 1. \qquad (A)$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' = 0. \qquad (B)$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ имеет корни

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 2. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = 1; \quad y_2 = e^{2x}.$$

Общее решение уравнения (B)

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{2x}. \qquad (D)$$

Теперь приступим к определению частного решения данного неоднородного уравнения (A). Сравнивая его правую часть с (20,14) и замечая, что в ней отсутствуют множитель $e^{\alpha x}$ и тригонометрические функции, заключаем, что $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 0$. Но нуль есть среди корней (C) характеристического уравнения. Корень этот простой, однократный. Частное решение будем искать в виде (20,16), в котором следует взять $k=1$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ — той же степени, что и многочлен в правой части уравнения (A), т. е. третьей. Ясно также, что многочлен $q(x)$ будет отсутствовать, так как множитель при нем $\sin\beta x = 0$ ($\beta = 0$).

Итак, частное решение ищем в виде

$$Y = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\,*;$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & Y \;\; = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx \\ -2 & Y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D \\ 1 & Y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C \\ \hline \end{array}$$

$$x^3 + 2x - 1 = -8Ax^3 + (12A - 6B)x^2 + (6B - 4C)x + (2C - 2D).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$-8A = 1; \quad A = -\frac{1}{8};$$

$$12A - 6B = 0; \quad B = -\frac{1}{4};$$

$$6B - 4C = 2; \quad C = -\frac{7}{8};$$

$$2C - 2D = -1; \quad D = -\frac{3}{8}.$$

Таким образом, частное решение заданного неоднородного уравнения

$$Y = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x.$$

Складывая это частное решение уравнения (A) с общим решением (D) соответствующего ему однородного уравнения, получим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x.$$

Задача 20,19 (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$x'' + x' = t^2 + 2t,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 4$; $x'(0) = -2$.

Ответ. $x = 2 + 2e^{-t} + \frac{1}{3}t^3$.

Задача 20,20. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 4y = (x + 2)e^{3x}. \qquad (A)$$

Решение. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' + 4y = 0. \qquad (B)$$

---

* Такое умножение на x часто называется «усилением».

Характеристическое уравнение $k^2-2k+4=0$ имеет корни:

$$k_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i. \tag{C}$$

Частные решения уравнения (*B*):

$$y_1=e^x\cos\sqrt{3}x;\quad y_2=e^x\sin\sqrt{3}x.$$

Его общее решение

$$y_0=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x). \tag{D}$$

Отыскиваем частное решение неоднородного уравнения (*A*). Сравнивая его правую часть с (20,14), заключаем, что $\alpha=3$, $\beta=0$. Многочлен $P(x)$ имеет первую степень. Число $\alpha+\beta i=3$. Оно не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде (20,15) ($q(x)\sin\beta x=0$, так как $\beta=0$):

$$\begin{array}{r|l}
4 & Y\ \,=e^{3x}(Ax+B)\\
-2 & Y'=e^{3x}(3Ax+A+3B)\\
1 & Y''=e^{3x}(9Ax+6A+9B)\\
\hline
(x+2) & e^{3x}=e^{3x}(7Ax+4A+7B)
\end{array}$$

Сокращая на e^{3x} и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$1=7A;\quad A=\frac{1}{7};$$

$$2=4A+7B;\quad B=\frac{10}{49}.$$

Поэтому

$$Y=e^{3x}\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right).$$

Общее решение уравнения (*A*) есть сумма этого его частного решения и общего решения (*D*) соответствующего однородного уравнения:

$$y=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)+e^{3x}\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right).$$

Задача 20,21 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-6\dfrac{dx}{dt}+13x=e^t(t^2-5t+2)$;

2) $\dfrac{d^2r}{d\theta^2}+5\dfrac{dr}{d\theta}-14r=e^{2\theta}(2\theta^3-3\theta-1)$.

У к а з а н и я. 1) Частное решение X неоднородного уравнения следует искать в виде

$$X=e^t(At^2+Bt+C),$$

коэффициенты A, B и C определятся из равенства

$$t^2 - 5t + 2 = 8At^2 + (8B - 8A)t + (2A - 4B + 8C).$$

2) Частное решение R неоднородного уравнения следует искать в виде

$$R = \theta e^{2\theta}(A\theta^3 + B\theta^2 + C\theta + D).$$

Это удобно переписать так:

$$R = e^{2\theta}(A\theta^4 + B\theta^3 + C\theta^2 + D\theta),$$

коэффициенты A, B, C и D определятся из равенства
$$2\theta^3 - 3\theta - 1 = 36A\theta^3 + (12A + 27B)\theta^2 + (18C + 6B)\theta + (9D + 2C).$$

Ответ. 1) $x = e^{3t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) + e^t\left(\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{32}\right)$;

2) $r = C_1e^{2\theta} + C_2e^{-7\theta} + e^{2\theta}\left(\frac{1}{18}\theta^4 - \frac{2}{81}\theta^3 - \frac{77}{486}\theta^2 - \frac{166}{2187}\theta\right)$.

Задача 20,22. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = 5\sin 2x. \qquad (A)$$

Решение. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни

$$k_{1,2} = \pm i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B): $y_1 = \cos x$; $y_2 = \sin x$.
Общее решение уравнения (B)

$$y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x. \qquad (D)$$

Теперь обратимся к определению частного решения неоднородного уравнения. Сравнивая правую часть уравнения (A) с (20,14), заключаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 2$. Число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения. Решение будем отыскивать в форме (20,15). В правой части постоянный множитель 5 при $\sin 2x$ должен рассматриваться как многочлен нулевой степени. Поэтому в (20,15) вместо многочленов $p(x)$ и $q(x)$ надо взять постоянные величины, которые следует определить.

Учитывая это, а также то, что $\alpha = 0$, $\beta = 2$, частное решение будем искать в виде

$$Y = A\cos 2x + B\sin 2x. \qquad (E)$$

$$\begin{array}{r|l}
1 & Y = A\cos 2x + B\sin 2x \\
0 & Y' = 2B\cos 2x - 2A\sin 2x \\
1 & Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{5\sin 2x = (-4A + A)\cos 2x + (B - 4B)\sin 2x}
\end{array}$$

Так как левая часть не содержит $\cos 2x$, то в правой части коэффициент при $\cos 2x$ должен быть равен нулю, т. е. $-4A + A = 0$; коэффициенты при $\sin 2x$ должны быть равны между собой, т. е. $B - 4B = 5$. Значит, $A = 0$; $B = -\frac{5}{3}$.

Поэтому частное решение (E) равно

$$Y = -\frac{5}{3}\sin 2x.$$

Общее решение уравнения (A) будет суммой только что найденного частного решения заданного неоднородного уравнения и общего решения (D) соответствующего однородного уравнения:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{5}{3}\sin 2x.$$

Задача 20,23 (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 6y = \sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$Y = A\cos x + B\sin x.$$

Ответ. $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$

Задача 20,24 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x$;

2) $y'' - 4y' + 29y = 44\sin 3x + 28\cos 3x$.

Указание. В первом примере частное решение неоднородного уравнения искать в виде $Y = A\cos x + B\sin x$.

Ответ. 1) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 3\sin x + 4\cos x$;

2) $y = e^{2x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) + \sin 3x + 2\cos 3x$.

Задача 20,25. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 10y = x\cos 2x. \qquad (A)$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' + 10y = 0. \qquad (B)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 10 = 0$$

имеет корни:

$$k_{1,2} = 1 \pm 3i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = e^x\cos 3x; \quad y_2 = e^x\sin 3x.$$

Общее решение уравнения (B):

$$y_0 = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x). \qquad (D)$$

Приступаем к отысканию частного решения неоднородного уравнения (A). Сравнивая правую часть этого уравнения с (20,14), заключаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 2$; число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения (среди корней (C) число $2i$ отсутствует). Решение будем искать в виде (20,15). Нам осталось решить вопрос о степени многочленов $p(x)$ и $q(x)$ в (20,15). Следует помнить, что эти многочлены должны иметь одну и ту же степень, причем степень эта должна быть равна наибольшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ в (20,14).

В нашем случае многочлен $P(x)$, стоящий множителем перед $\cos 2x$ в правой части уравнения (A), имеет первую степень, многочлен $Q(x)$ равен нулю. Поэтому многочлены $p(x)$ и $q(x)$ в (20,14) должны иметь первую степень. Учитывая все это ($\alpha = 0$, $\beta = 2$; степень многочленов $p(x)$ и $q(x)$ — первая), частное решение следует искать в виде

$$Y = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x;$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & Y = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x \\ -2 & Y' = (2Cx + A + 2D)\cos 2x + (-2Ax - 2B + C)\sin 2x \\ 1 & Y'' = (-4Ax - 4B + 4C)\cos 2x + (-4Cx - 4A - 4D)\sin 2x \\ \hline \end{array}$$

$$x\cos 2x = (6Ax - 4Cx - 2A + 6B + 4C - 4D)\cos 2x + (4Ax + \\ + 6Cx - 4A + 4B - 2C + 6D)\sin 2x$$

Перепишем правую часть этого равенства так, чтобы ясно были видны коэффициенты при x и свободные члены многочленов:

$$x\cos 2x = [(6A - 4C)x - 2A + 6B + 4C - 4D]\cos 2x + \\ + [(4A + 6C)x - 4A + 4B - 2C + 6D]\sin 2x. \qquad (E)$$

Сравниваем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$\begin{array}{l|l} \text{при } \cos 2x & x = (6A - 4C)x - 2A + 6B + 4C - 4D; \\ \text{при } \sin 2x & 0 = (4A + 6C)x - 4A + 4B - 2C + 6D \end{array} \qquad (\Gamma)$$

(в последнем равенстве в левой части стоит нуль, так как в левой части равенства (E) $\sin 2x$ отсутствует). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях равенств (Γ), находим:

$$\left.\begin{array}{l} 6A - 4C = 1 \\ 4A + 6C = 0 \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

и

$$\left.\begin{array}{l} -2A + 6B + 4C - 4D = 0 \\ -4A + 4B - 2C + 6D = 0 \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{II})$$

Из системы (I) следует, что $A = \frac{3}{26}$; $C = -\frac{1}{13}$.

Подставляя в систему (II) значения A и C для определения B и D, получим систему

$$\left.\begin{aligned} 6B - 4D &= \frac{7}{13} \\ 2B + 3D &= \frac{2}{13} \end{aligned}\right\},$$

из которой следует, что $B = \frac{29}{338}$; $D = -\frac{1}{169}$.

Таким образом, искомое частное решение будет таким:

$$Y = \left(\frac{3}{26}x + \frac{29}{338}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{13}x - \frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

Общее решение заданного уравнения получим, складывая это частное решение с общим решением (D) соответствующего однородного уравнения:

$$y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \left(\frac{3}{26}x + \frac{29}{338}\right)\cos 2x + \\ + \left(-\frac{1}{13}x - \frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

Задача 20,26 (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = (4x + 22)\sin 3x - (28x + 84)\cos 3x.$$

Ответ.

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + (2x + 6)\sin 3x + (x + 5)\cos 3x.$$

Задача 20,27. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 3\sin 2x. \tag{A}$$

Решение. Отбрасываем правую часть и решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 4y = 0. \tag{B}$$

Корнями характеристического уравнения $k^2 + 4 = 0$ являются числа

$$k_{1,2} = \pm 2i. \tag{C}$$

Частные решения уравнения (B):

$$y_1 = \cos 2x; \quad y_2 = \sin 2x,$$

а его общее решение

$$y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x. \tag{D}$$

Приступаем к определению частного решения заданного неоднородного уравнения (A). Сравнивая его правую часть с (20,14), заключаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 2$. Теперь надо определить число $\alpha + \beta i$. Оно равно $2i$. Число $2i$ является простым (однократным) корнем характеристического уравнения ($k = 1$). Частное решение ищем в виде (20,16), в котором следует взять $k = 1$; $\alpha = 0$; $\beta = 2$, степень многочленов $p(x)$ и $q(x)$ равна нулю.

Следовательно, надо взять

$$\begin{array}{r|l} 4 & Y = x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ 1 & Y'' = 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) \\ \hline \end{array}$$

$$3\sin 2x = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x$$

Учитывая, что в левой части этого равенства $\cos 2x$ отсутствует (а, следовательно, коэффициент при нем равен нулю), заключаем:

$$-4A = 3;$$

$$4B = 0.$$

Отсюда $A = -\frac{3}{4}$; $B = 0$ и поэтому $Y = -\frac{3}{4}x\cos 2x$.

Общее решение:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x.$$

Задача 20,28 (для самостоятельного решения).
Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = x\cos x.$$

Указание. Частное решение следует искать в виде

$$Y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x].$$

После подстановки в заданное уравнение окажется, что $A=0$; $B = \frac{1}{4}$; $C = \frac{1}{4}$; $D = 0$.

Ответ. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x$.

Задача 20,29 (для самостоятельного решения).
Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x.$$

Указание. Частное решение искать в виде

$$Y = x(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Ответ. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$.

Задача 20,30. Найти закон движения точки, на которую действуют две силы: 1) сила притяжения к неподвижному центру, пропорциональная расстоянию точки от этого центра $P = -k^2mx$ (см. задачу 19,8), и 2) периодическая сила, определяемая формулой $F = Am\cos pt$.

Решение. Дифференциальное уравнение движения будет таким:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx + Am\cos pt.$$

Сократим уравнение на m и запишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A\cos pt. \tag{A}$$

Уравнение — линейное неоднородное.

Рассмотреть следует два случая: 1) $p \neq k$; 2) $p = k$.

Уравнение (A) часто встречается в механике. Оно называется уравнением вынужденных колебаний при отсутствии сил сопротивления. Сила $F = Am\cos pt$ называется возмущающей.

Первый случай ($k \neq p$). Отбросим в уравнении (A) правую часть и найдем общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \tag{B}$$

(уравнение свободных гармонических колебаний). Характеристическое уравнение $r^2 + k^2 = 0$ имеет корни:

$$r_{1,2} = \pm ki. \tag{C}$$

Общее его решение:

$$x_0 = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \tag{D}$$

Частное решение неоднородного уравнения (A) в случае, когда $p \neq k$, следует искать в виде (20,15) ($\alpha = 0$; $\beta = p$; $\alpha + \beta i = pi$ не является корнем характеристического уравнения):

$$\begin{array}{r|l} k^2 & X = B\cos pt + C\sin pt \\ 1 & X'' = -Bp^2\cos pt - Cp^2\sin pt \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A\cos pt = (Bk^2 - Bp^2)\cos pt + (Ck^2 - Cp^2)\sin pt} \end{array}$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$, получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов B и C:

$$\left.\begin{array}{r} Bk^2 - Bp^2 = A \\ Ck^2 - Cp^2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Поэтому

$$B = \frac{A}{k^2 - p^2}; \quad C = 0; \quad X = \frac{A}{k^2 - p^2}\cos pt$$

(так как $p \neq k$, то $k^2 - p^2 \neq 0$).

Общее решение уравнения (A) в этом случае будет таким:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{A}{k^2 - p^2}\cos pt. \tag{E}$$

Второй случай ($p = k$). В этом случае по-прежнему $\alpha = 0$; $\beta = p$, но так как $p = k$, то $\beta = k$, а число $\alpha + \beta i = ki$ является корнем характеристического уравнения (см. (C)), поэтому частное решение надо искать в виде (20,16) (только не упустить из вида, что независимую переменную x надо заменить на t). Правая часть заданного уравнения теперь равна $A\cos kt$ (p заменено буквой k).

Итак, частное решение в этом случае:

$$\begin{array}{c|l} k^2 & X = t\,(C\cos kt + D\sin kt) \\ 1 & X'' = 2\,(-Ck\sin kt + Dk\cos kt) + \\ & \quad + t\,(-Ck^2\cos kt - Dk^2\sin kt) \\ \hline \end{array}$$

$$A\cos kt = -2Ck\sin kt + 2Dk\cos kt$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos kt$ и $\sin kt$ в левой и правой частях этого равенства, получаем

$$D = \frac{A}{2k};\quad C = 0;$$

частное решение неоднородного уравнения $X = t\dfrac{A\sin kt}{2k}$, а потому общее решение уравнения вынужденных колебаний (A) при $p = k$ (это уравнение полезно запомнить) запишется так:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + t\,\frac{A\sin kt}{2k}.$$

Рассмотренный второй случай представляет особый интерес. Наличие множителя t в последнем слагаемом указывает на то, что с возрастанием времени t абсцисса x точки (т. е. ее размахи) неограниченно увеличивается и может достигнуть сколь угодно большой величины. Это явление называется резонансом. Оно наступает тогда, когда частота возмущающей силы равна частоте свободных колебаний точки ($p = k$). Следует обратить внимание на то, что при отсутствии возмущающей силы движение описывалось бы уравнением (B), а закон движения — уравнением (D) и точка совершала бы свободные гармонические колебания (см. задачу 19,6, п. 9). Уже рассмотрение решения (E) показывает, что, когда частоты свободных и вынужденных колебаний (числа p и k) мало отличаются одна от другой, знаменатель $k^2 - p^2$ в последнем слагаемом мал, а само оно становится большим.

Из сказанного ясно, что при проектировании сооружений, судов, машин, фундаментов и т. д. надо всячески избегать явления резонанса, т. е. не допускать совпадения частот собственных колебаний с частотой накладывающейся возмущающей силы. Устранение этого явления может быть достигнуто увеличением разности между этими частотами.

Задача 20,31. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = (3x + 2)\sin 2x + (x^2 + x + 2)\cos 2x.$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни:

$$k_{1,2} = \pm i.$$

Частные решения уравнения:

$$y_1 = \cos x; \quad y_2 = \sin x,$$

а его общее решение

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Приступая к определению частного решения заданного уравнения, сравним его правую часть с (20,14). Замечаем, что $\alpha = 0$ (множитель $e^{\alpha x}$ отсутствует в правой части), $\beta = 2$; число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения.

Частное решение надо поэтому искать в форме (20,15). Нам осталось решить вопрос о степени многочленов $p(x)$ и $q(x)$ в (20,15). Так как многочлены при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в правой части заданного уравнения различны, то степень многочленов $p(x)$ и $q(x)$ должна быть равна наибольшей из них, т. е. второй, и частное решение должно иметь вид:

$$\begin{array}{c|l} 1 & Y = (Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x \\ 1 & Y'' = (-4Ax^2 - 4Bx + 8Dx + 2A - 4C + 4E)\cos 2x + (-4Dx^2 - \\ & \qquad - 4Ex - 8Ax - 4B + 2D - 4F)\sin 2x \\ \hline \end{array}$$

$$(3x + 2)\sin 2x + (x^2 + x + 2)\cos 2x = (-3Ax^2 - 3Bx + 8Dx + 2A - \\ - 3C + 4E)\cos 2x + (-3Dx^2 - 3Ex - 8Ax - 4B + 2D - 3F)\sin 2x$$

Сравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях последнего равенства, получаем:

$$-3Dx^2 + (-3E - 8A)x + (-4B + 2D - 3F) = 3x + 2;$$

$$-3Ax^2 + (-3B + 8D)x + (2A - 3C + 4E) = x^2 + x + 2.$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем:

$$\text{при } x^2 \left| \begin{array}{l} -3D = 0; \quad D = 0 \\ -3A = 1; \quad A = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{при } x \left| \begin{array}{l} -3E - 8A = 3; \quad -3E + \frac{8}{3} = 3; \quad E = -\frac{1}{9} \\ -3B + 8D = 1; \quad -3B = 1; \quad B = -\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \text{свободный} \\ \text{член} \end{array} \left| \begin{array}{l} -4B + 2D - 3F = 2; \quad \frac{4}{3} - 3F = 2; \quad F = -\frac{2}{9} \\ 2A - 3C + 4E = 2; \quad -\frac{2}{3} - 3C - \frac{4}{9} = 2; \quad C = -\frac{28}{27} \end{array} \right.$$

Значит,

$$Y = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{28}{27}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right)\sin 2x,$$

а общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{28}{27}\right)\cos 2x +$$
$$+ \left(-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right)\sin 2x.$$

Теперь учитывая, что учащийся приобрел уже прочные навыки в отыскании частного решения неоднородного линейного уравнения по виду его правой части, мы предлагаем для самостоятельного решения несколько дифференциальных неоднородных уравнений, порядок которых выше второго.

Задача 20,32 (для самостоятельного решения).

Найти решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям: 1) $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = e^{2t}$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$; $x''(0) = 0$;

2) $\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} = \cos t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$; $x'''(0) = 5$;

3) $x^{(4)} + 4x = t^2$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$;

4) $\frac{d^4r}{d\varphi^4} + 2a^2\frac{d^2r}{d\varphi^2} + a^4r = \cos\varphi$; $r(0) = r'(0) = 1$; $r''(0) = 1 - 2a^2$; $r'''(0) = -2a^2$.

Указания. В третьем примере характеристическое уравнение $k^4 + 4 = 0$ может быть переписано так: $k^4 + 4k^2 + 4 - 4k^2 = 0$, или $(k^2 + 2)^2 - (2k)^2 = 0$; $(k^2 - 2k + 2)(k^2 + 2k + 2) = 0$. Его корни: $k_{1,2} = 1 \pm i$; $k_{3,4} = -1 \pm i$. Частное решение неоднородного уравнения $X = \frac{1}{4}t^2$.

В четвертом примере характеристическое уравнение $k^4 + 2a^2k^2 + a^4 = 0$; $(k^2 + a^2)^2 = 0$ имеет кратные корни: $k_1 = ai$; $k_2 = -ai$; $k_3 = ai$; $k_4 = -ai$. Частные решения соответствующего однородного уравнения: $r_1 = \cos a\varphi$; $r_2 = \sin a\varphi$; $r_3 = \varphi\cos a\varphi$; $r_4 = \varphi\sin a\varphi$. Частное решение неоднородного уравнения $R = A\cos\varphi + B\cos\varphi$

Ответ. 1) $x = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t + \frac{1}{10}e^{2t}$;

2) $x = \frac{5}{2}t^2 - 4t + 4 - \frac{9}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$;

3) $x = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}e^t\sin t + \frac{1}{8}e^{-t}\sin t$;

4) $r = \left[1 - \frac{1}{(a^2+1)^2}\right]\cos a\varphi + \frac{1}{2a}\sin a\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos a\varphi - \frac{a^3\varphi}{2(a^2+1)}\sin a\varphi + \frac{1}{(a^2-1)^2}\cos\varphi.$

Задача 20,33 (для самостоятельного решения).

Решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4y=\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{1}{2}x$$

при начальных условиях $y(0)=1$; $y'(0)=0$.

Указания. Заменить произведение синусов в правой части разностью косинусов:

$$\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 2x).$$

Рассмотреть два неоднородных уравнения:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4y=\frac{1}{2}\cos x;\quad \frac{d^2y}{dx^2}-4y=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

и отыскать для каждого из них частные решения: для первого в виде

$$Y_1=A\cos x+B\sin x,$$

для второго

$$Y_2=A_1\cos 2x+B_1\sin 2x.$$

После определения коэффициентов A, B, A_1 и B_1 образовать сумму Y_1+Y_2, которая и будет частным решением заданного уравнения.

Ответ. $y=\frac{83}{160}e^{2x}+\frac{83}{160}e^{-2x}-\frac{1}{10}\cos x+\frac{1}{16}\cos 2x.$

ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Уравнение Эйлера. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (основные понятия).

I. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Основные сведения из теории

Уравнение Эйлера является линейным дифференциальным уравнением, которое имеет вид

$$(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+a_2(ax+b)^{n-2}y^{(n-2)}+\\+\cdots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=f(x), \qquad (21,1)$$

где все a_i $(i=1, 2, \ldots)$, а также a и b — вещественные числа, а правая часть $f(x)$ — функция независимой переменной x, и по этой переменной вычислены все производные в (21,1).

В частном случае, когда $a=1$, $b=0$, уравнение (21,1) принимает вид

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+a_2x^{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}xy'+\\+a_ny=f(x). \qquad (21,2)$$

Уравнения Эйлера (21,1) и (21,2) представляют собой частный случай линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В приложениях математики уравнение Эйлера встречается часто.

Если ввести замену независимой переменной по формуле

$$ax+b=e^t \quad (t=\ln|ax+b|) \tag{21,3}$$

в случае, если уравнение имеет вид (21,1), или

$$x=e^t \quad (t=\ln|x|), \tag{21,4}$$

если уравнение имеет вид (21,2), то уравнение Эйлера приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Из (21,3) следует:

$$\left.\begin{aligned} y' &= ae^{-t}\frac{dy}{dt} \\ y'' &= a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) \\ y''' &= a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{21,5}$$

Делая в (21,1) замену переменных по формулам (21,5), это уравнение преобразуем в линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которое мы умеем интегрировать.

Сначала решим несколько однородных уравнений Эйлера, т. е. таких, в которых правая часть $f(x)\equiv 0$.

Задача 21,1. Найти общее решение уравнения

$$x^2y''+5xy'+3y=0.$$

Решение. Это уравнение Эйлера типа (21,2).

Произведем замену переменной $x=e^t$ по формуле (21,4) на основании (21,5) при $a=1$ и получим

$$y'=e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad y''=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right). \tag{21,5a}$$

Подставляя эти значения производных в заданное уравнение и замечая, что на основании (21,4) $x^2=e^{2t}$, получаем

$$e^{2t}\cdot\underbrace{e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)}_{y''}+5e^t\cdot\underbrace{e^{-t}\frac{dy}{dt}}_{y'}+3y=0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+5\frac{dy}{dt}+3y=0.$$

Делая приведение подобных членов, имеем

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=0.$$

Сделанная подстановка привела нас к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2+4k+3=0$. Его корни: $k_1=-3$; $k_2=-1$.

Частные решения:

$$y_1=e^{-3t};\ y_2=e^{-t}. \tag{A}$$

Теперь надо возвратиться к старой переменной x. Из (21,4) следует, что $t=\ln x$.

Частные решения запишутся в виде:

$$y_1=\frac{1}{x^3};\quad y_2=\frac{1}{x},$$

а общее решение заданного уравнения

$$y=\frac{C_1}{x^3}+\frac{C_2}{x},$$

или окончательно

$$y=\frac{1}{x}\left(\frac{C_1}{x^2}+C_2\right).$$

Задача 21,2 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений Эйлера:

1) $x^2y''+xy'-9y=0$; 2) $x^2y''+xy'+9y=0$; 3) $x^2y''+xy'=0$.

Ответ. 1) $y=C_1x^3+C_2x^{-3}$; 2) $y=C_1\cos(3\ln x)+C_2\sin(3\ln x)$; 3) $y=C_1+C_2\ln x$.

Задача 21,3 (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$x^2y''-xy'+y=0.$$

Указание. Рассматриваемое уравнение — уравнение Эйлера типа (21,2).

Применив подстановку $x=e^t$, получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0.$$

Характеристическое уравнение: $k^2-2k+1=0$. Его корни $k_1=k_2=1$; частные решения: $y_1=e^t$; $y_2=te^t$.

Ответ. $y=C_1x+C_2x\ln x$, или $y=x(C_1+C_2\ln x)$.

Задача 21,4 (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2}{\varphi}\frac{dr}{d\varphi}-\frac{4}{\varphi^2}r=0. \tag{A}$$

Указание. Если обе части уравнения (A) умножить на φ^2, то оно примет вид (21,2): $\varphi^2\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\varphi\frac{dr}{d\varphi}-4r=0$. Это и есть уравнение Эйлера (независимая переменная — φ). Подстановка (21,4) в данном случае имеет вид $\varphi=e^t$.

Используя формулы (21,5а), в которых y надо заменить на r, получим уравнение $\frac{d^2r}{dt^2}-3\frac{dr}{dt}-4r=0$. Его общее решение: $r=$ $=C_1e^{4t}+C_2e^{-t}$. Возвращаясь к старой переменной, по формуле $\varphi=e^t$ получим $e^{4t}=\varphi^4$; $e^{-t}=\varphi^{-1}$.

Ответ. $r=C_1\varphi^4+C_2\varphi^{-1}$.

Задача 21,5 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений Эйлера:

1) $\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2}-3\rho\frac{du}{d\rho}+5u=0$; 2) $t^2\frac{d^2x}{dt^2}-3t\frac{dx}{dt}-5x=0$;

3) $x^2y''-5xy'+8y=0$.

Указание. Во втором примере искомой функцией является x, а независимой переменной t. Подстановка (21,4) может быть записана так: $t=e^u$, где u — новая независимая переменная.

Ответ. 1) $u=\rho^2(C_1\cos\ln\rho+C_2\sin\ln\rho)$;

2) $x=C_1t^5+\frac{C_2}{t}$; 3) $y=C_1x^2+C_2x^4$.

Задача 21,6. Найти общее решение уравнения Эйлера

$$(3x+1)^2y''-2(3x+1)y'-12y=0. \qquad (A)$$

Решение. Сделаем замену независимой переменной по формуле (21,3), полагая, что

$$3x+1=e^t. \qquad (B)$$

На основании (21,5), учитывая, что $a=3$, $b=1$, $(3x+1)^2=e^{2t}$, получим

$$9e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-2\cdot 3e^te^{-t}\frac{dy}{dt}-12y=0.$$

Отсюда получаем (после приведения подобных членов и сокращения на 3)

$$3\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}-4y=0. \qquad (C)$$

Характеристическое уравнение: $3k^2-5k-4=0$. Его корни:

$$k_1=\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{73}}{6};\; k_2=\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{73}}{6}.$$

Общее решение уравнения (C)

$$y=e^{\frac{5}{6}t}\left(C_1e^{\frac{\sqrt{73}}{6}t}+C_2e^{-\frac{\sqrt{73}}{6}t}\right).$$

Из (B) следует, что $t=\ln(3x+1)$, а потому $e^{\frac{5}{6}t}=e^{\frac{5}{6}\ln(3x+1)}=$ $=(3x+1)^{\frac{5}{6}}$; $e^{\frac{\sqrt{73}}{6}t}=(3x+1)^{\frac{\sqrt{73}}{6}}$.

Общее решение заданного уравнения запишется так:

$$y=(3x+1)^{\frac{5}{6}}\left[C_1(3x+1)^{\frac{\sqrt{73}}{6}}+C_2(3x+1)^{-\frac{\sqrt{73}}{6}}\right].$$

Задача 21,7 (для самостоятельного решения). Проинтегрировать уравнения Эйлера:

1) $(3r+2)^2 \frac{d^2u}{dr^2} + 7(3r+2)\frac{du}{dr} = 0;$

2) $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1) y' - 12y = 0;$

3) $(5+x)^2 y'' - 3(5+x) y' + 4y = 0.$

Ответ. 1) $u = C_1 + C_2 (3r+2)^{-\frac{4}{3}};$

2) $y = C_1 (2x+1)^3 + C_2 (2x+1)^{-1};$

3) $y = (5+x)^2 [C_1 + C_2 \ln(5+x)].$

Задача 21,8 (для самостоятельного решения). Найти общее решение уравнений Эйлера:

1) $x^3y''' - 6x^2y'' + 18xy' - 24y = 0;$

2) $x^4y^{\text{IV}} - x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' + 6y = 0.$

Указания. 1) После подстановки $x = e^t$ на основании формул (21,5) при $a = 1$ получится уравнение $y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^3 - 9k^2 + 26k - 24 = 0$ имеет корни: $k_1 = 2$; $k_2 = 3$; $k_3 = 4$.

2) Замена независимой переменной по формуле $x = e^t$ дает такое выражение для четвертой производной:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^{-4t}\left(\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 11\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt}\right).$$

Оно получается из последней формулы в (21,5) при $a = 1$, если обе ее части продифференцировать по x. При этом надо иметь в виду, что для вычисления в правой части производной по x надо ее продифференцировать по t, и результат дифференцирования умножить на $\frac{dt}{dx}$ или, что то же, разделить на $\frac{dx}{dt} = e^t$. Но деление на e^t равносильно умножению на e^{-t}. Таким образом, чтобы найти производную по x правой части этой формулы, надо ее продифференцировать по t, и результат дифференцирования умножить на e^{-t}.

После приведения подобных членов получится уравнение

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 7\frac{d^3y}{dt^3} + 17\frac{d^2y}{dt^2} - 17\frac{dy}{dt} + 6 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет корни:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 2; \; k_4 = 3.$$

Ответ. 1) $y = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4;$

2) $y = C_1x + C_2x\ln x + C_3x^2 + C_4x^3.$

Задача 21,9. При изучении предмета «Сопротивление материалов» приходится решать так называемую задачу Ляме об определении напряжений в точках толстостенной цилиндрической трубы по известным равномерно распределенным давлениям, действующим на ее внутреннюю и наружную поверхности. Решение задачи приводит к дифференциальному уравнению

$$\rho^2 \frac{d^2u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} - u = 0,$$

которое является уравнением Эйлера.

Проинтегрируйте его самостоятельно.

Ответ. $u = C_1\rho + C_2 \frac{1}{\rho}$.

Теперь проинтегрируем несколько неоднородных уравнений Эйлера, т. е. таких, у которых правая часть $f(x)$ в (21,1) или в (21,2) не равна нулю.

Задача 21,10. Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + 4xy' + 12y = \ln x. \qquad (A)$$

Решение. Предложенное уравнение — уравнение Эйлера. От уравнений, решенных выше, оно отличается наличием правой части, являющейся функцией той независимой переменной, по которой вычислены производные.

Как и раньше, это линейное уравнение с переменными коэффициентами может быть преобразовано к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью подстановки (21,4): $x = e^t$; $t = \ln x$.

Применяя формулы (21,5a), получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 12y = t, \qquad (B)$$

которое является линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами. Поступаем так же, как и на предыдущем практическом занятии: отбрасываем правую часть и ищем общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 12y = 0. \qquad (C)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k + 12 = 0 \qquad (D)$$

имеет корни: $k_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{39}}{2} i.$ $\qquad (E)$

Частные решения уравнения (C):

$$y_1 = e^{-\frac{3}{2}t}\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t; \quad y_2 = e^{-\frac{3}{2}t}\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t,$$

а его общее решение

$$y_0 = C_1 e^{-\frac{3}{2}t}\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t + C_2 e^{-\frac{3}{2}t}\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t. \qquad (F)$$

Теперь отыщем частное решение уравнения (B). Сравнивая его правую часть с (20,14), отмечаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения (среди корней (E) числа нуль нет).

Частное решение ищем в виде (20,15):

$$\begin{array}{r|l} 12 & Y = At + B \\ 3 & Y' = \quad A \\ 1 & Y'' = \quad 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{t = 12At + 12B + 3A} \end{array} \qquad \begin{array}{c} (G) \\ \\ \\ (K) \end{array}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы t в левой и правой частях равенства (K), получим

$$12A = 1; \quad A = \frac{1}{12}; \quad 12B + 3A = 0; \quad B = -\frac{1}{48}.$$

Подставляя эти значения A и B в (G), найдем

$$Y = \frac{1}{12}t - \frac{1}{48}.$$

Складывая это частное решение неоднородного уравнения (B) с общим решением (F) соответствующего однородного уравнения получим общее решение уравнения (B):

$$y = C_1 e^{-\frac{3}{2}t}\cos\frac{\sqrt{39}}{2}t + C_2 e^{-\frac{3}{2}t}\sin\frac{\sqrt{39}}{2}t + \frac{1}{12}t - \frac{1}{48}.$$

Теперь следует возвратиться к старой переменной x с помощью равенства (21,4): $t = \ln x$. Имея в виду, что

$$e^{-\frac{3}{2}t} = e^{-\frac{3}{2}\ln x} = e^{\ln x^{-\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}},$$

получаем окончательно

$$y = x^{-\frac{3}{2}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2}\ln x\right)\right] + \frac{1}{12}\ln x - \frac{1}{48}.$$

Задача 21,11 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $x^2y'' + xy' - y = 9x^2$;
2) $x^2y'' - xy' + y = 3x^3$;
3) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 5x$;
4) $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' - 12y = 3x + 1$.

Указание. Сделать подстановку

$$2x + 1 = e^t \tag{A}$$

и воспользоваться формулами (21,5). Из (A) следует:

$$x = \frac{1}{2}(e^t - 1); \quad 3x + 1 = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}.$$

Ответ. 1) $y = C_1 x + C_2 x^{-1} + 3x^2$;

2) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + \frac{3}{4}x^3$;

3) $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + 5x$;

4) $y = C_1 (2x+1)^3 + C_2 (2x+1)^{-1} - \frac{3}{16}x - \frac{5}{96}$.

II. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

а) Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{21,6}$$

В этой системе уравнений неизвестными являются n функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а независимой переменной — t.

Особенности нормальной системы дифференциальных уравнений:

1) Все входящие в систему уравнения являются уравнениями первого порядка.

2) Все уравнения системы разрешены относительно производных искомых функций $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$.

Если нормальная система уравнений (21,6) линейна, а коэффициенты при неизвестных функциях постоянны, то она имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \varphi_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varphi_2(t) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + \varphi_n(t) \end{aligned}\right\} \tag{21,7}$$

Все искомые функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входят в систему (21,7) в первой степени, а функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — функции независимой переменной t, по которой вычислены производные.

Если все эти функции равны нулю, то система (21,7) называется однородной, а если хотя бы одна из них не равна нулю,— неоднородной.

Число произвольных постоянных, входящих в общее решение нормальной системы уравнений, равно числу неизвестных функций, входящих в систему. Произвольные постоянные определяются из начальных или краевых условий.

Способ интегрирования нормальных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами мы покажем на примере однородной системы из трех уравнений.

Задача 21,12. Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} &= x - y + 3z \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Решение. Неизвестными функциями являются x, y и z, а независимой переменной t.

Приведем решение этой системы к решению одного уравнения, порядок которого равен числу уравнений, входящих в систему. Для этого любое из уравнений системы (A) продифференцируем по t и заменим в полученном уравнении производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ их выражениями из системы (A). Поступая так, например, с первым уравнением, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}.$$

Заменим в этом уравнении производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$, стоящие в правой части, их выражениями из второго и третьего уравнений заданной системы (A) и получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\underbrace{(3x - y + z)}_{\frac{dx}{dt}} - \underbrace{(-x + 5y - z)}_{\frac{dy}{dt}} + \underbrace{(x - y + 3z)}_{\frac{dz}{dt}},$$

откуда после приведения подобных членов в правой части найдем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 11x - 9y + 7z. \qquad (B)$$

Это уравнение опять продифференцируем по t и получим

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 11\frac{dx}{dt} - 9\frac{dy}{dt} + 7\frac{dz}{dt}.$$

Снова заменим в правой части производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ их выражениями из заданной системы (A) и получим уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3}=11(3x-y+z)-9(-x+5y-z)+7(x-y+3z),$$

которое после приведения подобных членов в правой части запишется так:

$$\frac{d^3x}{dt^3}=49x-63y+41z. \tag{C}$$

Рассмотрим систему уравнений, состоящую из первого уравнения заданной системы (A), т. е. уравнения, обе части которого мы дифференцировали, и уравнений (B) и (C):

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3x-y+z\\ \frac{d^2x}{dt^2}&=11x-9y+7z\\ \frac{d^3x}{dt^3}&=49x-63y+41z\end{aligned}\right\} \tag{D}$$

Чтобы прийти к уравнению, содержащему только одну неизвестную функцию, из первых двух уравнений системы (D) определим функции y и z. Из этих уравнений следует:

$$\left.\begin{aligned}y-z&=3x-\frac{dx}{dt}\\ 9y-7z&=11x-\frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned}\right\}.$$

Решая их относительно y и z, получим:

$$y=\frac{-10x+7\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}}{2};\qquad z=\frac{-16x+9\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}}{2}. \tag{E}$$

Подставляя эти значения y и z в третье уравнение системы (D), найдем

$$\frac{d^3x}{dt^3}=49x-63\,\frac{-10x+7\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}}{2}+41\,\frac{-16x+9\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}}{2}.$$

После упрощений в правой части получаем

$$\frac{d^3x}{dt^3}=36x-36\frac{dx}{dt}+11\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{F}$$

Уравнение (F) — линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Перепишем его так:

$$\frac{d^3x}{dt^3}-11\frac{d^2x}{dt^2}+36\frac{dx}{dt}-36x=0 \tag{G}$$

и найдем его общее решение по известным правилам. Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа:

$$k_1 = 2; \quad k_2 = 3; \quad k_3 = 6.$$

Частными решениями уравнения (G) будут функции:

$$x_1 = e^{2t}; \quad x_2 = e^{3t}; \quad x_3 = e^{6t},$$

а его общим решением

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}. \qquad (K)$$

Чтобы определить две остальные неизвестные функции y и z, воспользуемся выражениями (E). После подстановки в (E) выражений x, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ получим:

$$y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}; \quad z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

Задача 21,13 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения систем уравнений:

$$1) \left.\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + y \\ \dot{y} &= -20x + 6y \end{aligned}\right\}; \qquad 2) \left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{y}{2} \\ \dot{y} &= 2x \end{aligned}\right\}; \qquad 3) \left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + 4y \\ \dot{y} &= y - 3x \end{aligned}\right\};$$

$$\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \ \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right).$$

Ответ. 1) $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t$; $y = 5C_1 e^{2t} + 4C_2 e^t$;

2) $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$; $y = 2C_1 \sin t - 2C_2 \cos t$;

3) $x = e^t [C_1 \cos (2\sqrt{3}t) + C_2 \sin (2\sqrt{3}t)]$;

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} e^t [C_2 \cos (2\sqrt{3}t) - C_1 \sin (2\sqrt{3}t)].$$

Задача 21,14 (для самостоятельного решения).

Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y + 2\sin t - 3\cos t \\ \frac{dy}{dt} &= -6x + 4y + 7\sin t - 20\cos t \end{aligned}\right\}.$$

Указание. Обе части первого уравнения продифференцировать по t. В полученное уравнение подставить вместо производной $\frac{dy}{dt}$ ее значение из второго уравнения, а вместо y — его значение из первого уравнения:

$$y = \frac{dx}{dt} + x - 2\sin t + 3\cos t. \qquad (A)$$

Получится уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2\sin t - 6\cos t.$$

Интегрировать его следует как линейное неоднородное уравнение.

Чтобы определить функцию y, надо в выражение (A) подставить найденное значение x и его производную $\frac{dx}{dt}$.

Ответ. $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + 2\sin t$;

$y = 2C_1e^t + 3C_2e^{2t} + 5\cos t$.

Задача 21,15 (для самостоятельного решения).

Решить системы уравнений при заданных начальных условиях:

1) $\left.\begin{aligned} x' &= -2y + 3t \\ y' &= 2x + 4 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x(0) &= 2; \\ y(0) &= 3; \end{aligned}$

x и y — искомые функции, t — независимая переменная.

2) $\left.\begin{aligned} x' + y' &= y + e^t \\ 2x' + y' &= -2y + \cos t \end{aligned}\right\}$ $x(0) = y(0) = 0$.

Указание. Разрешить систему относительно x' и y'. Получится

$$\left.\begin{aligned} x' &= -3y + \cos t - e^t \\ y' &= 4y - \cos t + 2e^t \end{aligned}\right\}.$$

Интегрировать эту систему, как и предыдущую. Искомые функции и независимая переменная те же.

Ответ. 1) $x = \frac{13}{4}\cos 2t - 3\sin 2t - \frac{5}{4}$;

$y = 3\cos 2t + \frac{13}{4}\sin 2t + \frac{3}{2}t$;

2) $x = e^t - \frac{11}{34}e^{4t} - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t - \frac{1}{2}$;

$y = -\frac{2}{3}e^t + \frac{22}{51}e^{4t} + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t$.

Задача 21,16 (для самостоятельного решения).

Найти решения систем, удостоверяющие заданным условиям:

1) $\left.\begin{aligned} x' &= y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= x + z \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x(0) &= 1; \\ y(0) &= 2; \\ z(0) &= 3. \end{aligned}$

2) $\left.\begin{aligned} x' &= 6x - 72y + 44z \\ y' &= -4x + 40y - 22z \\ z' &= -6x + 57y - 31z \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x(0) &= 9; \\ y(0) &= 5; \\ z(0) &= 7. \end{aligned}$

(Искомые функции — x, y и z, независимая переменная — t).

Ответ. 1) $x = 2 - e^t$; $y = -2 + 4e^t - te^t$; $z = -2 + 5e^t - te^t$;

2) $x = -11e^{2t} + 20e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{97}}{2}t - \frac{212}{\sqrt{97}}e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{97}}{2}t$;

$y = -11e^{2t} + 16e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{97}}{2}t - \frac{144}{\sqrt{97}}e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{97}}{2}t$;

$z = -17e^{2t} + 24e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{97}}{2}t - \frac{216}{\sqrt{97}}e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{97}}{2}t$.

III. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С линейными системами дифференциальных уравнений второго порядка приходится встречаться часто в теоретической механике, сопротивлении материалов и в других приложениях математики.

Система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно наивысших производных искомых функций, называется **канонической**. В случае трех неизвестных функций x, y и z и независимой переменной t эта система уравнений записывается так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= f\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \varphi\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \psi\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (21,8)$$

Общее решение этой системы содержит шесть произвольных постоянных, для определения которых задается шесть начальных условий (в механике это начальное положение и скорость точки в некоторый момент времени $t = t_0$).

Для определения решения канонической системы уравнений (21,8) применяется такой же прием, как и при решении рассмотренных выше нормальных систем: последовательным дифференцированием одного уравнения системы (или нескольких ее уравнений) следует исключить все искомые функции, кроме одной. Сущность этого приема подробно разбирается на примере в следующей задаче.

Задача 21,17. Найти общее решение системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2x - 4y \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= x - 7y \end{aligned}\right\}.$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение два раза по t и получим

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{d^2y}{dt^2}. \qquad (A)$$

Подставим в (A) вместо $\frac{d^2y}{dt^2}$ его выражение из второго уравнения системы.

Тогда

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4(x - 7y),$$

или

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4x + 28y. \qquad (B)$$

Из первого уравнения системы определим y и подставим его в уравнение (B):

$$y=\frac{1}{4}\left(-2x-\frac{d^2x}{dt^2}\right). \qquad (C)$$

С этим значением y уравнение (B) перепишется так:

$$\frac{d^4x}{dt^4}=-2\frac{d^2x}{dt^2}-4x+28\cdot\frac{1}{4}\left(-2x-\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Раскрывая скобки и перенося все члены уравнения в его левую часть, получаем

$$\frac{d^4x}{dt^4}+9\frac{d^2x}{dt^2}+18x=0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^4+9k^2+18=0$$

имеет корни: $k_{1,2}=\pm\sqrt{3}i$; $k_{3,4}=\pm\sqrt{6}i$.

Частные решения:

$$x_1=\cos\sqrt{3}t;\quad x_2=\sin\sqrt{3}t;\quad x_3=\cos\sqrt{6}t;\quad x_4=\sin\sqrt{6}t.$$

Функция

$$x=C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t+C_3\cos\sqrt{6}t+C_4\sin\sqrt{6}t. \qquad (D)$$

Теперь из (C) найдем y. Из (D) находим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-3C_1\cos\sqrt{3}t-3C_2\sin\sqrt{3}t-6C_3\cos\sqrt{6}t-6C_4\sin\sqrt{6}t.$$

Подставляя x и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в (C), получим

$$y=\frac{1}{4}C_1\cos\sqrt{3}t+\frac{1}{4}C_2\sin\sqrt{3}t+C_3\cos\sqrt{6}t+C_4\sin\sqrt{6}t.$$

Задача 21,18. Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} y''&=4y-2z\\ z''&=y+z\end{aligned}\right\}$$

(независимая переменная x).

Решение. Продифференцируем по x дважды второе уравнение:

$$z^{(4)}=y''+z''. \qquad (A)$$

Заменим в (A) y'' его значением из первого уравнения. Тогда

$$z^{(4)}=4y-2z+z''. \qquad (B)$$

Чтобы получить уравнение, содержащее одну неизвестную функцию, исключим из него y с помощью второго уравнения системы. Из него следует, что

$$y=z''-z. \qquad (C)$$

Подставляя это значение y в (B), получим

$$z^{(4)} = 4(z'' - z) - 2z + z'',$$

а после упрощений

$$z^{(4)} - 5z'' + 6z = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^4 - 5k^2 + 6 = 0$. Его корни: $k_1 = \sqrt{3}$; $k_2 = -\sqrt{3}$; $k_3 = \sqrt{2}$; $k_4 = -\sqrt{2}$.

Частные решения:

$$z_1 = e^{\sqrt{3}x}; \quad z_2 = e^{-\sqrt{3}x}; \quad z_3 = e^{\sqrt{2}x}; \quad z_4 = e^{-\sqrt{2}x}.$$

Функция

$$z = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x},$$

или на основании формул (19,18), вводя обозначения:

$$C_1 + C_2 = c_1; \quad C_1 - C_2 = c_2; \quad C_3 + C_4 = c_3; \quad C_3 - C_4 = c_4,$$

$$z = c_1 \operatorname{ch} \sqrt{3}x + c_2 \operatorname{ch} \sqrt{3}x + c_3 \operatorname{ch} \sqrt{2}x + c_4 \operatorname{sh} \sqrt{2}x.$$

Подставляя найденное значение функции z и ее вторую производную z'' в выражение (C), получим

$$y = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{3}x + 2c_2 \operatorname{sh} \sqrt{3}x + c_3 \operatorname{ch} \sqrt{2}x + c_4 \operatorname{sh} \sqrt{2}x.$$

Задача 21,19 (для самостоятельного решения).

Найти общие решения систем (во второй системе найти решение, удовлетворяющее начальным условиям):

1) $\left.\begin{array}{l} x''(t) + a^2 y = 0 \\ y''(t) - a^2 y = 0 \end{array}\right\}$; 2) $\left.\begin{array}{l} x''(t) + 6x + 7y = 0 \\ y''(t) + 3x + 2y = 2t \end{array}\right\}$;

$x(0) = 2$; $y(0) = 1$; $x'(0) = 1$; $y'(0) = 3$.

Ответ. 1) $$x = \left[C_1 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right] e^{\frac{a}{\sqrt{2}}t} + \left[C_3 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right] e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}t};$$

$$y = \left[C_1 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) - C_2 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right] e^{\frac{a}{\sqrt{2}}t} + \left[-C_3 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + C_4 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right] e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}t};$$

2) $$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 7C_3 \cos 3t + 7C_4 \sin 3t + \frac{14}{9}t;$$

$$y = -C_1 e^t - C_2 e^{-t} + 3C_3 \cos 3t + 3C_4 \sin 3t - \frac{4}{3}t.$$

Из начальных условий: $C_1 = -\frac{297}{180}$; $C_2 = \frac{31}{20}$; $C_3 = \frac{3}{10}$; $C_4 = \frac{17}{135}$.

Задача 21,20. Найти решение системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -k\frac{dx}{dt}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k\frac{dy}{dt} - g\end{aligned}\right\},$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = y(0) = 0$; $x'(0) = v_{0x}$; $y'(0) = v_{0y}$ (k и g — постоянные величины).

Решение. Предложенная система уравнений описывает движение снаряда с учетом сопротивления среды.

Каждое из уравнений системы содержит только одну неизвестную функцию.

Из первого уравнения следует

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + kr = 0$ имеет корни: $r_1=0$; $r_2 = -k$. Частные решения уравнения: $x_1 = 1$; $x_2 = e^{-kt}$. Его общее решение

$$x = C_1 + C_2e^{-kt}. \qquad (A)$$

Чтобы определить C_1 и C_2, найдем x':

$$x' = -C_2ke^{-kt}. \qquad (B)$$

При $t = 0$ имеем:
из (A) $0 = C_1 + C_2$;
из (B) $v_{0x} = -C_2k$.

Отсюда $C_1 = \frac{v_{0x}}{k}$; $C_2 = -\frac{v_{0x}}{k}$.

Подставляя эти значения C_1 и C_2 в (A), получим

$$x = \frac{v_{0x}}{k}(1 - e^{-kt}). \qquad (I)$$

Второе уравнение перепишем так:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} = -g. \qquad (C)$$

Уравнение линейное неоднородное. Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_0 = C_3 + C_4e^{-kt}.$$

Так как корни характеристического уравнения — числа 0 и $-k$, из сравнения с (20,14) $\alpha = \beta = 0$, а число $\alpha + \beta i = 0$ является корнем характеристического, то частное решение следует искать в виде:

$$\begin{array}{c|l} 0 & Y = At \\ k & Y' = A \\ 1 & Y'' = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$-g = Ak;\ A = -\frac{g}{k};\ Y = -\frac{g}{k}t.$$

Общее решение уравнения (C);

$$y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k} t. \qquad (D)$$

Для определения C_3 и C_4 из начальных условий найдем y':

$$y' = -C_4 k e^{-kt} - \frac{g}{k}. \qquad (E)$$

Учитывая начальные условия, получаем систему уравнений:

из (D) $0 = C_3 + C_4$;

из (E) $v_{0y} = -C_4 k - \frac{g}{k}$;

$$C_4 = -\frac{v_{0y} + \frac{q}{k}}{k}; \quad C_3 = \frac{v_{0y} + \frac{g}{k}}{k}.$$

Подставляя эти значения C_3 и C_4 в (D), получим

$$y = \frac{v_{0y} + \frac{g}{k}}{k}(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t. \qquad (II)$$

Уравнения (I) и (II) являются параметрическими уравнениями траектории снаряда.

Исключите самостоятельно параметр t из этих уравнений (из (I) выразить t через x и подставить в (II)). Окажется, что

$$y = \frac{v_{0y} + \frac{g}{k}}{v_{0x}} x + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_{0x}}\right).$$

Из последнего уравнения можно определить горизонтальную дальность стрельбы, если положить в нем $y = 0$, и из полученного уравнения найти x.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть I

Практические занятия по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве

Стр.

Часть II

Практические занятия по дифференциальному исчислению функций одной и многих независимых переменных

Часть III

Практические занятия по интегральному исчислению и интегрированию дифференциальных уравнений

$\frac{3}{4} + \frac{1}{x} = \frac{7}{4}$

Илья Абрамович Каплан

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Редакторы **А. С. Нестеренко** и **И. Л. Базилянская**
Обложка художника **А. П. Шулики**
Техредактор **Л. Т. Момот**
Корректоры **М. И. Лелюк** и **Р. Е. Дорф**

Сдано в набор 10/I 1967 г. Подписано к печати 25/IV 1967 г. БЦ 45267.
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Объем 59,25 физ. печ. л., 59,25 усл. печ. л., 52,1 уч. изд. л.
Св. Т. П. Издательств Университетов 1967 г. поз. 13
Зак. 7-45. Тираж 50 000. Цена 1 руб. 61 коп.

Книжная фабрика имени Фрунзе Комитета по печати
при Совете Министров УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.