И·А·КАПЛАН

практические занятия по высшей математике

И. А. КАПЛАН

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И МНОГИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Издание 5-е

Издательское объединение «Вища школа»

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ
ХАРЬКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Харьков 1973

В настоящем учебном пособии дано подробное решение задач по дифференциальному исчислению функций одной и многих независимых переменных. Практическим занятиям предпосланы основные теоретические сведения, справочные данные и формулы. Многие задачи, предназначенные для самостоятельного решения, снабжены указаниями и промежуточными результатами.

Книга рассчитана на студентов высших технических учебных заведений. Она может быть полезной преподавателям, ведущим практические занятия.

Ответственный редактор кандидат физико-математических наук доцент *Р. В. Солодовников*.

К $\frac{0223-113}{М\ 226(04)-73}$ 19—73

ПРЕДИСЛОВИЕ *

Книга содержит практические занятия по дифференциальному исчислению функций одной и многих независимых переменных. Цель этой книги — помочь студенту научиться самостоятельно решать задачи по данному разделу курса высшей математики в высших учебных технических заведениях. Она рассчитана прежде всего на студентов, обучающихся заочно и по вечерней системе, но может быть полезной и студентам стационарных высших технических учебных заведений, а также преподавателям, ведущим практические занятия.

Книга написана в полном соответствии с новой программой по высшей математике.

Весь учебный материал разделен на отдельные практические занятия. Перед каждым занятием помещены основные сведения из теории, относящиеся к этому практическому занятию, теоремы, определения, формулы и подробное решение типовых задач различной степени трудности с полным анализом решения, причем большое количество этих задач решаются различными способами и целесообразность этих способов сравнивается. Каждое практическое занятие содержит большое число задач для самостоятельного решения, многие из них снабжены методическими указаниями к решению и промежуточными результатами.

Такое построение книги предоставляет студенту широкие возможности для активной самостоятельной работы и экономит его время. Студент, пользующийся этим способом, должен перед каждым практическим занятием выучить относящийся к нему раздел теории, внимательно, с выполнением всех действий на бумаге, разобрать решенные задачи, и только после этого приступить к решению задач, предложенных для самостоятельного решения.

* Предисловие к 4-му изданию.

Книга написана так, что она допускает не только последовательное проведение всех практических занятий, но и использование их в выборочном порядке.

Автор приносит глубокую благодарность рецензенту этой книги доктору физико-математических наук профессору Г. М. Баженову и ее ответственному редактору кандидату физико-математических наук доценту Р. В. Солодовникову, ценные советы и замечания которого, учтенные автором, способствовали значительному улучшению книги.

Автор признателен также сотрудникам кафедры высшей математики Харьковского инженерно-строительного института В. Г. Александрову, Э. Б. Александровой, В. М. Аветисовой, И. М. Каневской, Ю. В. Князеву, З. Ф. Паскаловой и Л. В. Олейник, проверившим ответы к задачам, и Р. А. Ежовой за помощь в оформлении рукописи.

ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интервал, отрезок, промежуток. Абсолютная величина числа. Свойства абсолютных величин.

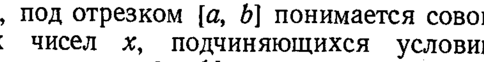
ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Интервал, отрезок, промежуток

1. *Если* a и b — *действительные числа* и a *меньше* b $(a < b)$, *то совокупность всех действительных чисел* x, *подчиняющихся условию* $a < x < b$, *образует интервал. Левым концом интервала является число* a, а *правым его концом — число* b. Обозначается интервал символом (a, b).

С геометрической точки зрения интервал (a, b) представляет собой совокупность всех точек прямой, находящихся между точками a и b, причем концы этого отрезка a и b в интервал не включаются.

На фиг. 1,1 представлен интервал. Стрелки показывают, что точки a и b не принадлежат интервалу (a, b).



Фиг. 1,1.

2. *Если к интервалу* (a, b) *присоединить числа* a и b, *то получим отрезок* ab, *который обозначается символом* $[a, b]$. Таким образом, под отрезком $[a, b]$ понимается совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $a \leqslant x \leqslant b$.

Геометрически отрезок $[a, b]$ есть отрезок прямой с концами в точках a и b.

Различие между интервалом (a, b) и отрезком $[a, b]$ состоит в том, что в случае интервала (a, b) числа a и b ему не принадлежат, а в случае отрезка $[a, b]$ числа a и b ему принадлежат.

На фиг. 1,2 представлен отрезок $[a, b]$.

Фиг. 1,2.

3. *Под символом* $[a, b)$ *следует понимать совокупность всех действительных чисел* x, *подчиняющихся условию* $a \leqslant x < b$, *т. е. рассматриваются все действительные числа, содержащиеся между числами* a *и* b, *причем число* a *рассматривается, а число* b — *нет* (*фиг. 1,3*).

Под символом же $(a, b]$ понимается совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $a < x \leqslant b$, т. е.

Фиг. 1,3.

рассматриваются все действительные числа, содержащиеся между числами a и b, причем число a не рассматривается, а число b рассматривается (фиг. 1,4).

Фиг. 1,4.

Каждая из совокупностей чисел $(a, b]$ и $[a, b)$ называется полуотрезком *.

4. *В том случае, когда безразлично, принадлежат ли граничные точки* a *и* b *рассматриваемым совокупностям или нет, вместо терминов «интервал» и «отрезок» употребляется термин «промежуток».*

Пример 1. Интервал $(5,9)$ есть совокупность всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $5 < x < 9$.

Пример 2. Отрезок $[-1, +2]$ есть совокупность всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $-1 \leqslant x \leqslant +2$.

Пример 3. Совокупность всех действительных чисел x, для которых $-1 \leqslant x < 1$, есть полуотрезок $[-1,1)$.

Пример 4. Совокупность всех действительных чисел x, подчиняющихся условию $-2 < x \leqslant 2$, есть полуотрезок $(-2, +2]$.

5. *Если рассматривается совокупность всех действительных чисел, то это записывается так:* $-\infty < x < +\infty$ *или* $(-\infty, +\infty)$.

Под записью $a < x < +\infty$ *или* $(a, +\infty)$ *следует понимать, что рассматривается совокупность всех действительных чисел* x, *бо́льших, чем* a, *а под записью* $a \leqslant x < +\infty$, *или* $[a, +\infty)$, *понимается совокупность всех действительных чисел* x, *не меньших* a (*когда мы говорим «число, не меньшее числа* a», *то это значит, что это число или больше, или равно* a).

* Некоторые авторы, например Г. П. Толстов в учебнике «Курс математического анализа», называют эти совокупности чисел не «полуотрезками», а «полуинтервалами».

Запись $-\infty < x < b$ *или* $(-\infty, b)$ *означает, что рассматриваются все действительные числа* x, *меньше числа* b, *а запись* $-\infty < x \leqslant b$ *или* $(-\infty, b]$ *следует понимать так, что рассматривается совокупность всех действительных чисел* x, *не больших числа* b (когда говорят, что число не больше числа b, то это означает, что оно или меньше, или равно числу b). *Интервалы, рассмотренные в этом пункте, называются бесконечными.*

2. Свойства абсолютных величин

С абсолютными величинами чисел в математическом анализе приходится часто встречаться. Мы напомним относящиеся сюда определения и теоремы и сделаем ряд упражнений.

1. Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$. Пусть a — действительное число. Если оно положительно или равно нулю ($a \geqslant 0$), то его абсолютной величиной называется оно само, а если оно отрицательно ($a < 0$), то его абсолютной величиной называется число $-a$.

Итак, если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$.

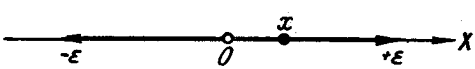
Чтобы перейти к абсолютной величине числа, имеющего в цифровой записи знак минус, надо этот знак отбросить.

Если $a = 5$, то $|a| = |5| = 5$; если $a = 0$, то $|a| = 0$.

Если $a = -3$, то $|a| = |-3| = -(-3) = 3$.

2. Если $|x| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то это означает, что x удовлетворяет неравенствам (фиг. 1,5)

$$-\varepsilon < x < +\varepsilon. \tag{1,1}$$

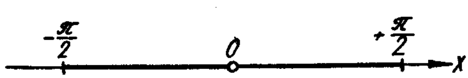


Фиг. 1,5.

Пример 1. Если $|a| < 3$, то имеют место неравенства

$$-3 < a < +3.$$

Пример 2. Если $|y| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то y удовлетворяет неравенствам $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$ (фиг. 1,6).



Фиг. 1,6.

Задача 1,1. Определить числовую величину выражения $\left|\frac{2x+5}{7-2x^2}\right|$ при $x = 2$.

Решение. При $x = 2$

$$\left|\frac{2x+5}{7-2x^2}\right| = \left|\frac{2\cdot 2+5}{7-2\cdot 2^2}\right| = \left|\frac{4+5}{7-8}\right| = \left|\frac{9}{-1}\right| = |-9| = 9.$$

Задача 1,2. Определить числовую величину выражения $\left|\frac{2x^3-4}{5-x}\right|$ при $x = 0$.

Решение. При $x = 0$ имеем

$$\left|\frac{2x^3-4}{5-x}\right| = \left|\frac{2\cdot 0-4}{5-0}\right| = \left|\frac{-4}{5}\right| = \left|-\frac{4}{5}\right| = -\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}.$$

Задача 1,3 (для самостоятельного решения). Определить при $x = 4$ числовую величину выражения $\left|\frac{x-8}{5-x^2}\right|$.

Ответ. $\frac{4}{11}$.

Задача 1.4 (для самостоятельного решения). Найти числовую величину выражения $\left|\frac{5-x^3}{1-x}\right|$ при: 1) $x = 0$; 2) $x = 2$; 3) $x = -3$.

Ответ. 1) 5; 2) 3; 3) 8.

Задача 1,5. Определить, при каких значениях x будет справедливо неравенство $|x-3| < 2$.

Решение. Согласно формуле (1,1) данное неравенство может быть записано так: $-2 < x-3 < 2$. К каждой части этих неравенств прибавим по 3 и получим $-2+3 < x < 2+3$, откуда следует, что $1 < x < 5$.

Заключение: неравенство $|x-3| < 2$ выполняется для всех значений x из интервала (1,5).

Задача 1,6. Определить, при каких значениях x выполняется неравенство $|x-a| < \varepsilon$.

Решение. Поступая так же, как и в предыдущей задаче, получаем, что $-\varepsilon < x-a < +\varepsilon$, а отсюда, прибавляя a к каждой части этих неравенств, имеем $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$.

Заключение: неравенство $|x-a| < \varepsilon$ выполняется для всех значений x из интервала $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$.

Задача 1,7 (для самостоятельного решения). Определить, при каких значениях x выполняются неравенства: 1) $|x-1| < 3$; 2) $|x+3| < 1$; 3) $|x+1| > 3$.

Ответ. 1) $-2 < x < 4$; 2) $-4 < x < -2$; 3) $x < -4$ и $x > 2$.

Указание к третьему примеру: из того, что $|x| > (a > 0)$, следует, что $x > +a$ и $x < -a$. В нашем случае из того, что $|x+1| > 3$, заключаем, что $x+1 > 3$ и $x+1 < -3$; отсюда и следует указанный ответ.

Задача 1,8. При каких значениях x корень $\sqrt{9-x^2}$ будет иметь действительные значения?

Решение. Корень $\sqrt{9-x^2}$ будет иметь действительные значения, если подкоренное выражение не является отрицательным, т. е. когда $9-x^2 \geqslant 0$, а $x^2 \leqslant 9$.

Многие совершают грубую ошибку, делая на основании неравенства $x^2 < 9$ заключение, что $x < \pm 3$, т. е. $x < +3$ и $x < -3$. В действительности же верно только, что $x < +3$, а неравенство $x < -3$ является в данном случае ошибочным. Правильными решениями неравенства $x^2 < 9$ являются $x > -3$ и $x < +3$, т. е. $-3 < x < +3$, или $|x| < 3$, ибо для всех значений x из интервала $(-3, +3)$ выполняется неравенство $x^2 < 9$. Если же принять, что $x < -3$, то числа, удовлетворяющие этому неравенству, будучи возведены в квадрат, дадут числа бо̀льшие, чем 9 (например, $-4 < -3$ и $(-4)^2 = 16 > 9$).

Итак, решением неравенства $x^2 \leqslant 9$ является $-3 \leqslant x \leqslant +3$, или $|x| \leqslant 3$.

Задача 1,9 (для самостоятельного решения). При каких значениях x корень $\sqrt{x^2-9}$ будет иметь действительные значения?

Ответ. $x \leqslant -3$ и $x \geqslant +3$, т. е. $\sqrt{x^2-9}$ имеет действительные значения для значений x, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x \leqslant -3$ и $3 \leqslant x + \infty$.

3. Теоремы об абсолютных величинах

Теорема 1. *Абсолютная величина суммы нескольких слагаемых не больше суммы абсолютных величин этих слагаемых, т. е. например,* $|x+y+z| \leqslant |x|+|y|+|z|$, *причем знак равенства имеет место только в том случае, когда числа* x, y *и* z *имеют один и тот же знак.*

Теорема 2. *Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел, т. е.* $|x-y| \geqslant |x|-|y|$.

Теорема 3. *Абсолютная величина произведения нескольких сомножителей равна произведению абсолютных величин этих сомножителей. Например, в случае двух сомножителей* $|xy| = |x||y|$.

Теорема 4. *Абсолютная величина дроби равна абсолютной величине числителя, разделенной на абсолютную величину знаменателя,* т. е.

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|.$$

Задача 1,10 (для самостоятельного решения). Проверить теорему 1 этого параграфа для

1) $x=-5$; $y=4$; $z=5$; $u=-1$.
2) $x=-4$; $y=5$; $z=-2$.
3) $x=4$; $y=2$; $z=7$.
4) $x=5$; $y=-3$; $z=-6$.

Задача 1,11 (для самостоятельного решения). Проверить теорему 2 этого параграфа для чисел

$$1)\ x = 7;\quad y = -4;\qquad 3)\ x = 5;\quad y = 7;$$
$$2)\ x = -4;\quad y = -8;\qquad 4)\ x = -10;\quad y = 4;$$

Задача 1,12. Решить неравенство $\left|\frac{x-1}{2(x+3)} - \frac{1}{5}\right| < 0{,}01$ $(x > -3)$.

Решение. Упростим выражение, стоящее под знаком абсолютной величины:

$$\frac{x-1}{2(x+3)} - \frac{1}{5} = \frac{5x-5-2x-6}{10(x+3)} = \frac{3x-11}{10(x+3)},$$

и данное неравенство запишется в виде $\left|\frac{3x-11}{10(x+3)}\right| < \frac{1}{100}$.

Освобождаясь от знака абсолютной величины, получаем:

$$-\frac{1}{100} < \frac{3x-11}{10(x+3)} < +\frac{1}{100},$$

а отсюда уже имеем два неравенства:

$$1)\ -\frac{1}{100} < \frac{3x-11}{10(x+3)};\quad 2)\ \frac{3x-11}{10(x+3)} < \frac{1}{100}.$$

Так как по условию $x > -3$, то $x+3$ — величина положительная, и первое неравенство после умножения обеих его частей на $x+3$ дает

$$-1\cdot(x+3) < 30x - 110;\quad -x-3 < 30x-110;\quad x > \frac{107}{31}$$

($x+3 > 0$, а поэтому смысл неравенства от умножения обеих его частей на $x+3$ сохраняется).

Из второго неравенства получаем, что $x < \frac{113}{29}$. Итак, данное неравенство выполняется, если $\frac{107}{31} < x < \frac{113}{29}$.

ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Величины постоянные и переменные. Функция. Область существования функции. Основные элементарные функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Постоянные величины. Абсолютные постоянные и параметры. *Величина называется постоянной, если она всегда или только в условиях данной задачи сохраняет одно и то же числовое значение.*

Постоянные величины разделяются на абсолютные постоянные величины и параметры. Величина, которая сохраняет одно *и то же значение при всех условиях, называется абсолютной постоянной (примерами абсолютных постоянных являются: все числа, сумма внутренних углов треугольника, число π; скорость света в пустоте).*

Параметром называется такая постоянная величина, которая лишь в условиях данной задачи (данного исследования) сохраняет постоянное, вполне определенное числовое значение, но с изменением условий задачи принимает уже другое, хотя опять-таки определенное числовое значение.

2. Переменные величины. *Величина называется переменной, если она в условиях данной задачи принимает различные числовые значения.*

3. Независимые переменные. *Две переменные величины называются независимыми, если значения, принимаемые одной из них, не зависят от значений, принимаемых другой.*

(Пример: в формуле для определения объема цилиндра $V = \pi R^2 H$ величины R и H — независимые переменные, так как значения, принимаемые высотой H цилиндра, не зависят от значений R, которые принимает радиус цилиндра).

4. Функция. *Переменная величина y называется функцией от переменной величины x, если каждому рассматриваемому значению x по известному правилу или закону соответствует одно определенное значение y*. Если переменная величина y является функцией переменной величины x, то это обозначают так:*

$$y = f(x). \tag{2,1}$$

Эта запись читается: «игрек есть функция от икс», или «игрек равен эф от икс».

В записи (2,1) x называется аргументом или независимой переменной, а y — функцией, или зависимой переменной.

5. Задание функции. *Функция (2,1) считается заданной, если:*

1) Указана совокупность всех рассматриваемых значений аргумента x.

2) Указан закон, который позволяет по заданному значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции y.

6. Частным значением функции *называется то ее значение, которое соответствует частному значению аргумента $x = x_0$. Для обозначения частного значения функции при $x = x_0$ употребляется символ $f(x_0)$ или $y(x_0)$.*

7. Область существования функции. *Если функция задана аналитически, то областью существования функции (иначе, областью определения функции) называется совокупность тех действительных значений аргумента, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает только действительные значения.*

---

* Многозначные функции нами не рассматриваются.

ПЕРЕМЕННЫЕ И ПОСТОЯННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Задача 2,1. Период малых колебаний T математического маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести.

Какие из величин, входящих в эту формулу, являются абсолютными постоянными, параметрами, переменными?

Ответ. 2 и π — абсолютные постоянные; g — параметр; значение этой величины постоянно только в данной точке земной поверхности, но изменяется при переходе от одной точки земной поверхности к другой; l и T — величины переменные.

Задача 2,2. Согласно закону Бойля-Мариотта, в изометрическом процессе $pV = C$, где p — давление газа, а V — занимаемый им объем. Указать в этой формуле переменные величины и параметр.

Ответ. Величины p и V — переменные; величина C — параметр, так как она сохраняет постоянное значение только для данного газа и для данной температуры.

Задача 2,3. В случае свободного падения тела в пустоте пройденный им путь S вычисляется по формуле $S = \frac{gt^2}{2}$.

Какие из входящих в эту формулу величин являются абсолютными постоянными, параметрами, переменными?

Ответ. 2 является абсолютной постоянной величиной (следует помнить, что все числа — абсолютные постоянные величины); g — параметр (см. задачу № 2,1); s и t — переменные величины.

Задача 2,4. Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Указать, какие из величин, входящих в эту формулу, являются переменными, абсолютными постоянными, параметрами.

Ответ. Величины π и 3 — абсолютные постоянные; V, H, R и r — переменные величины.

Ни одна из величин, входящих в эту формулу, не является параметром.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Для того чтобы найти частное значение функции по заданному частному значению аргумента, надо в аналитическое выражение функции подставить вместо аргумента его частное значение.

Задача 2,5. Дана целая рациональная функция $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Вычислить: 1) $f(2)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(1)$; 4) $f(0)$; 5) $f(a+2)$; 6) $f(-x)$.

Решение. 1) $f(2)=3\cdot 2^2-2\cdot 2-1=3\cdot 4-4-1=12-$
$-4-1=7.$

2) $f(-2)=3(-2)^2-2(-2)-1=3\cdot 4+4-$
$-1=12+4-1=15.$

3) $f(1)=3\cdot 1^2-2\cdot 1-1=0.$

4) $f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0-1=-1.$

5) $f(a+2)=3(a+2)^2-2(a+2)-1=3(a^2+$
$+4a+4)-2a-4-1=3a^2+10a+7.$

6) $f(-x)=3(-x)^2-2(-x)-1=3x^2+2x-1.$

Задача 2, 6 (для самостоятельного решения). Дана целая рациональная функция $f(z)=2z^3-z^2+z-1.$

Вычислить: 1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-1)$;

4) $f\left(\frac{a}{2}\right)$; 5) $f\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$.

Ответ. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 13; 3) -5; 4) $\frac{a^3-a^2+2a-4}{4}$;

5) $\frac{a^3-7a^2+3a-5}{(a+1)^3}$.

Задача 2,7. Дана дробная рациональная функция

$$f(x)=\frac{4x^2-7x+2}{3x^2+5}.$$

Вычислить: 1) $f(a)$; 2) $f\left(\frac{1}{a^2}\right)$; 3) $f(2)$; 4) $f(0)$.

Решение. 1) $f(a)=\frac{4a^2-7a+2}{3a^2+5}$; 2) $f\left(\frac{1}{a^2}\right)=\frac{4\left(\frac{1}{a^2}\right)^2-7\left(\frac{1}{a^2}\right)+2}{3\left(\frac{1}{a^2}\right)^2+5}=$

$=\frac{4-7a^2+2a^4}{5a^4+3}$; 3) $f(2)=\frac{4\cdot 2^2-7\cdot 2+2}{3\cdot 2^2+5}=\frac{16-14+2}{12+5}=\frac{4}{17}$;

4) $f(0)=\frac{2}{5}$.

Задача 2, 8 (для самостоятельного решения). Дана функция $f(z)=5^{\frac{1}{z}-1}$. Вычислить: 1) $f(1)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-2)$; 4) $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Ответ. 1) $f(1)=1$; 2) $f(2)=\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $f(-2)=\frac{1}{5\sqrt{5}}$; 4) $f\left(\frac{1}{z}\right)=$
$=5^{z-1}$.

Задача 2, 9. Дана дробно-линейная функция $\varphi(x)=\frac{5x+1}{2-x}$.

Найти: 1) $\varphi(3x)$; 2) $\varphi(x^3)$; 3) $3\varphi(x)$; 4) $[\varphi(x)]^3$.

Решение. 1) Чтобы найти $\varphi(3x)$ следует в выражении для $\varphi(x)$ заменить x на $3x$. Получаем $\varphi(3x)=\frac{5\cdot 3x+1}{2-3x}=\frac{15x+1}{2-3x}$.

2) Заменяя в выражении для $\varphi(x)$ x на x^3, получим

$$\varphi(x^3) = \frac{5x^3+1}{2-x^3}.$$

3) Следует отличать $\varphi(3x)$ от $3\varphi(x)$, $\varphi(x^3)$ от $[\varphi(x)]^3$. Было найдено в 1), что $\varphi(3x) = \frac{15x+1}{2-3x}$, а $3\varphi(x) = 3\,\frac{5x+1}{2-x} = \frac{15x+3}{2-x}$.

4) $[\varphi(x)]^3 = \left(\frac{5x+1}{2-x}\right)^3 = \frac{125x^3+75x^2+15x+1}{8-12x+6x^2-x^3}$.

Задача 2, 10 (для самостоятельного решения). Дана функция $\Phi(\theta) = \lg\frac{5-\theta}{2+\theta}$.

Найти:

1) $\Phi(2\theta)$; 2) $2\Phi(\theta)$; 3) $\Phi(\theta^2)$; 4) $[\Phi(\theta)]^2$.

Ответ. 1) $\Phi(2\theta) = \lg\frac{5-2\theta}{2+2\theta}$; 2) $2\Phi(\theta) = \lg\left(\frac{5-\theta}{2+\theta}\right)^2$;

3) $\Phi(\theta^2) = \lg\frac{0-\theta^2}{2+\theta^2}$; 4) $[\Phi(\theta)]^2 = \lg^2\frac{5-\theta}{2+\theta}$.

Задача 2, 11 (для самостоятельного решения). $\varphi(x) = \lg\sin x$. Доказать, что $\varphi(a)+\varphi(b) = \lg(\sin a\cdot\sin b)$.

Задача 2,12 (для самостоятельного решения). $F(x) = \sin x$. Доказать, что $F(3x) = 3F(x) - 4[F(x)]^3$.

Задача 2, 13. Доказать, что если $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, то $f(-x) = -f(x)$.

Решение. $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = -\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{f(x)} = -f(x)$.

Задача 2, 14 (для самостоятельного решения). $f(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$. Доказать, что $f(2\alpha) = \frac{2f(\alpha)}{1-f^2(\alpha)}$.

Задача 2, 15 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, то $f(-x) = f(x)$.

Задача 2, 16. Вычислить $f(x) = \frac{36}{x^2}+x^2$ в точках, где $\frac{6}{x}+$ $+x = 5$.

Решение. $\frac{36}{x^2}+x^2 = \left(\frac{6}{x}+x\right)^2 - 12$, а так как по условию $\frac{6}{x}+x=5$, то $\frac{36}{x^2}+x^2 = 5^2-12 = 13$.

Задача 2, 17. Дано, что $\varphi(x) = x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$. Доказать, что $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x)$.

Решение. $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+x+x^2=$
$=\varphi(x)$.

Задача 2, 18 (для самостоятельного решения). Дана функция $\varphi(x)=\frac{7-x^2}{5-x+x^2}$. Вычислить: $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\frac{1}{\varphi(x)}$.

Ответ. $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{7x^2-1}{5x^2-x+1}$; $\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{5-x+x^2}{7-x^2}$.

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Задача 2, 19. Найти область существования функции

$$\varphi=3x^3+5x^2-7x+2.$$

Решение. Заданная функция — целая рациональная функция. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$, или в другой записи $-\infty<x<+\infty$.

Задача 2, 20. Найти область существования функций:

$$1)\ y=\frac{1}{x};\quad 2)\ y=\frac{5}{1-x};\quad 3)\ y=\frac{1}{7x-2}.$$

Решение. 1) Функция $y=\frac{1}{x}$ — дробная рациональная функция. Она существует при всех значениях независимой переменной x, кроме тех, которые обращают в нуль ее знаменатель, т. е. в данном случае кроме $x=0$. Область существования этой функции состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, или в другой записи $-\infty<x<0$ и $0<x<+\infty$.

2) Функция $y=\frac{5}{1-x}$ также определена при всех значениях x, кроме того его значения, при котором $1-x=0$, т. е. кроме $x=1$. Область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 1)$; $(1, +\infty)$, или в другой записи $(-\infty<x<1)$; $(1<x<+\infty)$.

3) Решив уравнение $7x-2=0$, найдем, что $x=\frac{2}{7}$. Область существования функции $y=\frac{1}{7x-2}$ состоит из двух бесконечных интервалов $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$; $\left(\frac{2}{7}, +\infty\right)$, или в другой записи $\left(-\infty<x<\frac{2}{7}\right)$ и $\left(\frac{2}{7}<x<+\infty\right)$.

Задача 2, 21 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y=\frac{x-1}{x+1};\ 2)\ y=\frac{x^2-1}{2x-4}.$$

Ответ. 1) $(-\infty, -1)$; $(-1, +\infty)$, или $-\infty<x<-1$ и $-1<x<+\infty$.
2) $(-\infty, 2)$; $(2, +\infty)$,
или $-\infty<x<2$ и $2<x<+\infty$.

Задача 2, 22. Найти область существования функции $y=\frac{x-1}{x^2-7x+12}$.

Решение. Заданная функция — дробная рациональная функция. Она определена при всех действительных значениях x, кроме тех, при которых знаменатель дроби $x^2-7x+12$ равен нулю, т. е. кроме значений $x=3$ и $x=4$ (эти значения найдены из уравнения $x^2-7x+12=0$). Область существования заданной функции состоит из трех интервалов: $(-\infty, 3)$; $(3,4)$ и $(4, +\infty)$, или в другой записи: $-\infty<x<3$; $3<x<4$; $4<x<+\infty$.

Задача 2,23 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y=\frac{5x^2-7x+12}{x^2-1};\quad y=\frac{7x^2+x-1}{3x^2-8x+4}.$$

Ответ. Область существования состоит из трех интервалов:

$(-\infty, -1)$; $(-1, +1)$; $(+1, +\infty)$.

2) Область существования состоит из трех интервалов:

$$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3}, 2\right);\ (2, +\infty).$$

Задача 2. 24. Найти область существования функции $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}$.

Решение. Приравняв нулю знаменатель дроби x^2+x+1 и решив квадратное уравнение $x^2+x+1=0$, убедимся, что его корни — комплексные числа: $x=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Но при одном действительном значении x многочлен x^2+x+1 в нуль не обращается. Поэтому заданная функция определена при всех действительных значениях x. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

Задача 2, 25 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y=\frac{x^3-x+2}{2x^2+x+5};\ 2)\ y=\frac{5}{x^2+1}.$$

Ответ. 1) Бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.
2) Бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

Задача 2, 26 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = -\frac{x+x}{x^2-1}.$$

(знаменатель дроби x^3-1 имеет один действительный корень $x=1$);

$$2)\ y = \frac{2x^3-1}{x^3+1}.$$

Ответ. 1) Функция существует в двух бесконечных интервалах: $(-\infty, +1)$ и $(+1, +\infty)$, т. е. при любом значении x, кроме $x=1$. 2 Знаменатель дроби x^3+1 имеет один действительный корень $x=-1$. Функция существует в двух бесконечных интервалах: $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$, т. е. при любом значении x, кроме $x=-1$.

Задача 2, 27. Найти область существования функций:

$$1)\ y=\sqrt{2-x};\ 2)\ y=\sqrt{x+4}.$$

Решение. 1) Для того чтобы функция y принимала только действительные значения, величина $2-x$, стоящая под корнем, не должна принимать отрицательных значений, т. е. должно быть $2-x \geqslant 0$, откуда $x \leqslant 2$. Областью существования функции является совокупность действительных значений x, меньших или равных 2, т. е. полуотрезок $-\infty < x \leqslant 2$.

2) Чтобы определить область существования функции, составим неравенство $x+4 \geqslant 0$, из которого получаем, что $x \geqslant -4$. Область существования функции полуотрезок $-4 \leqslant x < +\infty$ $[-4, +\infty)$.

Задача 2, 28 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций 1) $y=\sqrt{5-x}$ и 2) $y=\sqrt{x-3}$.

Ответ. 1) Полуотрезок $-\infty < x \leqslant 5$.
2) Полуотрезок $3 \leqslant x < +\infty$.

Задача 2, 29. Найти область существования функций

$$1)\ y=\frac{1}{\sqrt{x-2}};\ 2)\ y=\frac{5}{\sqrt{4-x}};\ 3)\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}.$$

Решение. 1) Выражение $\sqrt{x-2}$ принимает действительные значения, когда $x-2 \geqslant 0$, т. е. когда $x \geqslant 2$. Но при $x=2$ имеем $x-2=0$, знаменатель дроби обращается в нуль, дробь теряет числовой смысл, а потому значение $x=2$ не может входить в область существования функции. Значит, функция существует при значениях $x>2$, область существования представляет собой бесконечный интервал $(2, +\infty)$.

2) Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty,\ 4)$.

3) Область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty,\ 8)$ и $(8,\ +\infty)$. Это же заключение можно записать с помощью неравенств: $-\infty < x < 8$ и $8 < x < +\infty$.

Задача 2, 30 (для самостоятельного решения). Определить область существования функций:

$$1)\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-3}};\quad 2)\ y=\frac{1}{\sqrt{7-2x}};\quad 3)\ y=\frac{4}{\sqrt{x-5}}.$$

Ответ. 1) Два бесконечных интервала $(-\infty,\ 3)$; $(3,\ +\infty)$. 2) Бесконечный интервал $(-\infty;\ 3{,}5)$.
Бесконечный интервал $(5,\ +\infty)$.

ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Продолжение упражнений в определении области существования функции.

Задача 3, 1. Найти область существования функций 1) $y=\sqrt{x^2-1}$; 2) $y=\sqrt{4-x^2}$.

Решение. 1) Для того чтобы функция $y=\sqrt{x^2-1}$ принимала только действительные значения, надо, чтобы $x^2-1\geqslant 0$, т. е. $x^2\geqslant 1$. Это неравенство выполняется тогда, когда $x\leqslant -1$ и $x\geqslant 1$, и, таким образом, область существования функции состоит из двух полуотрезков: $(-\infty,\ -1]$ и $[+1,\ +\infty)$, или в другой записи $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x + \infty$.

2) Должно выполняться неравенство $4-x^2\geqslant 0$, т. е. $x^2\leqslant 4$. Отсюда следует, что $x\geqslant -2$ и $x\leqslant +2$.

Областью существования функции является отрезок $[-2,\ +2]$. Это можно записать иначе: $-2\leqslant x\leqslant +2$.

Задача 3, 2 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y=\sqrt{9-x^2};\quad 2)\ y=\sqrt{x^2-6};\quad 3)\ y=\frac{1}{\sqrt{5-x^2}};$$

$$4)\ y=\frac{3}{\sqrt{x^2-16}}.$$

Ответ. 1) Отрезок $[-3,\ +3]$, иначе $-3\leqslant x\leqslant +3$. 2) Два полуотрезка $(-\infty,\ -\sqrt{6}]$ и $[+\sqrt{6},\ +\infty)$, иначе $-\infty < x \leqslant -\sqrt{6}$ и $+\sqrt{6}\leqslant x < +\infty$. 3) Интервал $(-\sqrt{5},\ \sqrt{5})$, или $(-\sqrt{5} < x < \sqrt{5})$ (значения $x=\pm\sqrt{5}$ отбрасываются, так как при $x=+\sqrt{5}$ знаменатель дроби обращается в нуль и дробь теряет числовой смысл). 4) Два интервала $(-\infty,\ -4)$ и $(4,\ +\infty)$, или $-\infty < x < -4$ и $4 < x < +\infty$ (значения $x=\pm 4$

отбрасываются, так как при $x = \pm 4$ знаменатель дроби обращается в нуль и тем самым дробь теряет числовой смысл).

Задача 3, 3 (для самостоятельного решения). Определить область существования функции $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Указание. Должно выполняться неравенство $\frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$. Для определения тех значений x, при которых это имеет место следует решить системы неравенств:

$$1)\ \left.\begin{array}{l} x+1 \geqslant 0 \\ x-1 > 0 \end{array}\right\} \quad \text{и}\ 2)\ \left.\begin{array}{l} x+1 \leqslant 0 \\ x-1 < 0 \end{array}\right\}.$$

Из решения этих неравенств следует, что областью существования является полуотрезок $(-\infty, -1)$ и интервал $(1, +\infty)$. Это можно записать иначе: $-\infty < x \leqslant -1$ и $1 < x < +\infty$. Значение $x = 1$ рассматриваться не может, так как тогда $x - 1 = 0$ и дробь $\frac{x+1}{x-1}$ теряет числовой смысл.

Задача 3, 4 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$.

Указание. Рассмотреть неравенство $(x-2)(x+3) \geqslant 0$.

Ответ. $-\infty < x \leqslant -3$ и $2 \leqslant x < +\infty$.

Задача 3, 5. Найти область существования функции $y = \lg(x - -5)$.

Решение. Учитывая, что если основание логарифмов положительно, то ни нуль, ни отрицательные числа логарифмов не имеют, область существования данной функции найдем из требования, чтобы $x - 5 > 0$, откуда следует, что должно быть $x > 5$ Функция существует для значений $5 < x < +\infty$, т. е. на бесконечном интервале $(5, +\infty)$.

Задача 3, 6 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \lg(2 - x);\quad 2)\ y = \lg(x^2 - 3).$$

Ответ. 1) $-\infty < x < 2$; 2) $-\infty < x < -\sqrt{3}$ и $\sqrt{3} < x < < +\infty$.

Указание. В случае 2) рассмотреть неравенство $x^2 - 3 > 0$.

Задача 3, 7 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \lg x^4$.

Ответ. $(-\infty < x < 0)$ и $(0 < x < +\infty)$, т. е. функция определена при любом значении x, кроме $x = 0$.

Задача 3,8. Найти область существования функции $y = = \sin(2x + 3)$.

Решение. Функция $y = \sin x$ определена при любом значении аргумента x. Значит, выражение $2x + 3$, стоящее под знаком синуса, может принимать любое значение, откуда следует, что

x может принимать любое значение. Областью существования функции является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Это заключение можно написать и иначе: $-\infty < x < +\infty$.

Задача 3, 9 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sin \frac{1}{x}$.

Ответ. Все действительные числа, кроме $x = 0$: $(-\infty < x < 0)$ и $(0 < x < +\infty)$.

Задача 3, 10. Найти область существования функции $y = \operatorname{tg} 2x$.

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при всех действительных значениях x, кроме $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. Значит, в нашем случае величина $2x$, стоящая после знака тангенса, не должна быть равна $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, т. е. $2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, а $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$. Таким образом, область существования функции $y = \operatorname{tg} 2x$ состоит из всех действительных чисел, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, где k — любое целое число.

Задача 3, 11 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций: 1) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}$; 2) $\operatorname{tg} 4x$; 3) $y = \sec\frac{x}{5}$ и $y = \operatorname{cosec} 3x$.

Ответ. 1) Множество всех действительных чисел, кроме значений $x = 3k\pi$. 2) Множество всех действительных чисел, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$. 3) Множество всех действительных чисел, кроме $x = (2k+1)\frac{5\pi}{2}$. 4) Множество всех действительных чисел кроме $x = \frac{k\pi}{3}$ (всюду k — любое целое число).

Задача 3, 12. Найти область существования функции $y = \arcsin(5x - 8)$.

Решение. Областью существования функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1, +1]$. Поэтому область существования данной функции указывается неравенствами $-1 \leqslant 5x - 8 \leqslant +1$.

Прибавляя ко всем частям этих неравенств по 8, получаем $7 \leqslant 5x \leqslant 9$, откуда уже следует, что функция существует для значений $\frac{7}{5} \leqslant x \leqslant \frac{9}{5}$.

Задача 3, 13 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right);\quad 2)\ y = \arccos(3x - 6).$$

Ответ. 1) $0 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$.

Задача 3, 14 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций:

$$1)\ y = \operatorname{arctg}(2x - 5);\quad 2)\ y = \arcsin\sqrt{4x - 3}.$$

Ответ. 1) $-\infty < x < +\infty$; 2) $\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1$.

Задача 3, 15 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \arcsin(x^2 + 2)$.

Ответ. Данное аналитическое выражение не определяет никакой функции, так как ни при одном значении x не имеют место неравенства $-1 \leqslant x^2 + 2 \leqslant +1$.

Указание к решению задач 3, 16—3, 23.

Если требуется найти область существования алгебраической суммы нескольких функций, то надо поступить так:

1) Определить область существования каждой из слагаемых функций:

2) Определить часть, общую для всех найденных областей. Эта общая часть и будет искомой.

Если такой общей части у областей, найденных в п. 1), не окажется, то заданное аналитическое выражение, представляющее алгебраическую сумму нескольких функций, не определяет никакой функции в области действительных чисел.

Это указание распространяется также на произведение нескольких функций и на частное двух функций, причем при определении области существования частного двух функций должны быть исключены точки, в которых знаменатель дроби обращается в нуль.

Задача 3, 16. Найти область существования функции $y = \log_2(x - 1) + x^2$.

Решение. Областью существования функции $y_1 = \log_2(x - 1)$ является совокупность всех значений x, удовлетворяющих неравенству $x - 1 > 0$, т. е. интервал $(1, +\infty)$.

Областью существования степенной функции $y_2 = x^2$ является интервал $(-\infty, +\infty)$.

Общей частью этих двух интервалов является интервал $(1, +\infty)$. Таким образом, данная функция существует для значений $1 < x < +\infty$.

Задача 3, 17. Найти область существования функции $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 3}$.

Решение. Функция $y_1 = \sqrt{5 - x}$ существует для значений $-\infty < x \leqslant 5$. Функция $y_2 = \sqrt{x + 3}$ существует для значений $-3 \leqslant x < +\infty$.

Общей частью найденных двух областей является отрезок $[-3, +5]$, а поэтому данная функция существует для значений $-3 \leqslant x \leqslant +5$.

Задача 3, 18 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+2}$.

Ответ. $-2 \leqslant x \leqslant 4$, т. е. отрезок $[-2,4]$.

Задача 3, 19 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \sqrt{4+x} - \sqrt{x+2} + \sqrt{15-x}$.

Ответ. $[-2,15]$, т. е. $-2 \leqslant x \leqslant 15$.

Задача 3, 20 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = 2x^3 + \lg(x-1) + \frac{1}{x-3}$.

Ответ. Функция существует для значений $1 < x < 3$ и $3 < x < +\infty$, т. е. в интервалах $(1,3)$ и $(3, +\infty)$.

Задача 3, 21 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = 2^x \operatorname{tg} x$.

Ответ. Функция существует при всех значениях x, кроме значений $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число.

Задача 3, 22. Найти область существования функции $y = \frac{\sin x}{\lg(x^2-4)}$.

Решение. Функция $y_1 = \sin x$ существует в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Функция $y = \lg(x^2-4)$ существует в интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$. Но следует иметь в виду, что функция $\lg(x^2-4)$ стоит в знаменателе дроби, а потому из этих двух интервалов надо исключить точки, в которых эта функция обращается в нуль, т. е. точки, для которых $\lg(x^2-4) = 0$, или $x^2-4=1$, а $x = \pm\sqrt{5}$. Таким образом, функцию $\lg(x^2-4)$ следует рассматривать в интервалах: 1) $(-\infty, -\sqrt{5})$; 2) $(-\sqrt{5}, -2)$; 3) $(2, \sqrt{5})$ и 4) $(\sqrt{5}, +\infty)$.

Общей частью, принадлежащей бесконечному интервалу $(-\infty, +\infty)$, в котором определена функция $\sin x$, и только что найденным интервалам являются именно эти интервалы, а потому данная функция существует в интервалах: 1) $(-\infty, -\sqrt{5})$; 2) $(-\sqrt{5}, -2)$; 3) $(2, \sqrt{5})$; 4) $(\sqrt{5}, +\infty)$.

Задача 3. 23 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $y = \lg\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$.

Ответ. Два бесконечных интервала: $(-\infty, 2)$ и $(3, +\infty)$.

ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков функций.

Это практическое занятие посвящается упражнениям на построение графиков функций, заданных аналитически.

В инженерной практике с построением графиков функций приходится встречаться очень часто. При изучении таких предметов, как сопротивление материалов, теория упругости, гидравлика, электротехника, радиотехника, к построению графиков функций приходится прибегать буквально на каждом шагу.

Поэтому студенту следует с исключительной серьезностью отнестись к этому практическому занятию.

К построению графиков более сложных функций мы еще возвратимся на практическом занятии № 35 и используем для этого уже аппарат дифференциального исчисления.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Графиком функции $y = f(x)$ называется совокупность всех точек плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента, взятые из области существования функции, а ординаты, соответствующие этим значениям аргумента, — значения функции.*

Согласно этому определению, для построения точного графика функции нам следовало бы построить все точки, принадлежащие графику, а это, как правило, сделать невозможно, так как, вообще говоря, график функции содержит бесконечное множество точек.

Для построения графика функции $y = f(x)$ обычно поступают так: дают аргументу несколько частных значений и пользуясь аналитическим выражением функции, вычисляют соответствующие значения функции. Если, например, взяты значения аргумента $x = x_1$; $x = x_2$; $x = x_3$, ..., $x = x_n$, то соответствующими им значениями функции будут

$$y_1 = f(x_1);\ y_2 = f(x_2);\ y_3 = f(x_3);\ \ldots;\ y_n = f(x_n).$$

Эти значения сводят в таблицу такого вида:

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

После этого берут прямоугольную систему координат, выбирают масштабную единицу и строят точки

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n).$$

Полученные точки соединяют плавной кривой. Эта кривая дает эскиз графика функции (приближенный график). Прежде чем приступить к составлению таблицы числовых значений функции, очень полезно выяснить вопрос о симметрии графика функции.

Если функцию можно отнести к классу четных или нечетных функций, то построение ее графика значительно облегчится. Приведем относящиеся сюда определения.

Определение 2. *Область существования функции называется симметричной, если вместе с числом x этой области принадлежит и число $-x$* (на геометрическом языке это значит, что симметричная область существования функции расположена симметрично относительно начала координат).

Определение 3. *Функция $y = f(x)$ называется четной на симметричной относительно начала координат области, если для каждого значения аргумента x из этой области имеет место равенство*

$$f(-x) = f(x). \tag{4, 1}$$

Таким образом, если функция — четная, то изменение знака у аргумента не меняет значения функции, а потому в случае четной функции каждой точке ее графика с абсциссой x и ординатой y соответствует точка, имеющая абсциссу $-x$ ту же ординату y.

Это приводит к выводу, **что график четной функции расположен симметрично относительно оси Oy.**

Таким образом, если функция четная, то ее график мы будем строить так:

1) Построим только часть графика этой функции, расположенную справа от оси Oy, т. е. при составлении таблицы числовых значений функции будем давать аргументу только положительные значения и значение, равное нулю, если это значение принадлежит области существования функции.

2) Построим «зеркальное отображение» относительно оси Oy графика, полученного в п. 1).

Определение 4. *Функция $y = f(x)$ называется нечетной на симметричной относительно начала координат области, если для каждого значения аргумента x из этой области имеет место равенство*

$$f(-x) = -f(x). \tag{4, 2}$$

Таким образом, у нечетной функции изменение на противоположный знака аргумента изменяет на противоположный и знак функции, не изменяя ее абсолютной величины.

Поэтому **график нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат**, так как если графику принадлежит точка $A(x, y)$, то ему же принадлежит и точка B, $(-x, -y)$.

Для построения графика нечетной функции надо: 1) построить только ту часть графика, которая расположена справа от оси Oy, т. е. часть, соответствующую положительным значениям аргумента (и значению $x = 0$, если нуль принадлежит области существования функции); 2) построить кривую, симметричную относительно начала координат кривой, построенной в п. 1).

Эти свойства четных и нечетных функций будут использованы при построении графиков функций.

Задачи 4,1—4,12 являются упражнениями, связанными с определениями четной и нечетной функций.

ПРИЕМЫ, ОБЛЕГЧАЮЩИЕ ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Укажем приемы, облегчающие построение графика функции в ряде случаев, которые часто встречаются в практике

4,1. *Для того чтобы по известному графику функции* $y = f(x)$ *построить график функции* $y = f(-x)$, *надо построить линию, симметричную линии* $y = f(x)$ *относительно* Oy.

4,2. *Для того чтобы по известному графику функции* $y = f(x)$ *построить график функции* $y = -f(x)$, *надо построить линию, симметричную линии* $y = f(x)$ *относительно оси* Ox.

4,3. *Если известен график функции* $y = f(x)$, *то, чтобы построить график функции* $y = f(x + c)$, *надо перенести график функции* $y = f(x)$ *вдоль оси* Ox *на* c *единиц масштаба вправо, если* $c < 0$, *и влево, если* $c > 0$ *(предполагается, что ось* Ox *направлена вправо).*

4,4. *График функции* $y = f(x) + B$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *переносом этого графика на* B *единиц масштаба вверх, если* $B > 0$, *и вниз, если* $B < 0$ *(предполагается, что ось* Oy *направлена вверх).*

4,5. *График функции* $y = Af(x)$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *умножением всех его ординат на* A *при сохранении величины соответствующих абсцисс.*

4,6. *График функции* $y = f(kx)$ $(k > 0)$ *получается из графика функции* $y = f(x)$ *делением всех абсцисс этого графика на* k, *если* $k > 1$, *и умножением их на* $\frac{1}{k}$, *если* $0 < k < 1$, *при сохранении величин соответствующих ординат.*

Применяя последовательно эти приемы, можно, зная график функции $y = f(x)$ построить график более сложной функции вида

$$y = Af(kx + c) + B.$$

Упражнения, связанные с понятиями четной и нечетной функции.

Задача 4, 1. Доказать, что функция $f(x) = 2x^4$ — четная.

Решение. Вычислим $f(-x)$. Если окажется, что $f(-x) = f(x)$, то из определения 3 будет следовать, что функция $f(x) = 2x^4$ — четная:

$$f(-x) = 2(-x)^4 = 2x^4 = f(x).$$

Равенство (4, 1) выполняется, а потому заданная функция — четная.

Задача 4, 2. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ — нечетная.

Решение. Вычислим $f(-x)$ и если окажется, что $f(-x) = -f(x)$, то из определения 4 будет следовать, что заданная функция действительно нечетная:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Задача 4. 3 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \frac{(1+3^x)^2}{3^x}$ — четная.

Задача 4, 4 (для самостоятельного решения). Доказать нечетность функций: 1) $f(x) = \frac{x^2}{2+x^2}$; 2) $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{2x^2+7}$.

Задача 4, 5 (для самостоятельного решения). Доказать четность функций: 1) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$; 2) $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{2x^2+7}$.

Задача 4, 6. Выяснить, является ли функция $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ четной или нечетной.

Решение. Вычислим $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Отсюда заключаем, что изменение знака у аргумента изменило абсолютную величину функции; ни равенство (4, 1), ни равенство (4, 2) не выполняются, а потому данная функция не может быть отнесена ни к числу четных, ни к числу нечетных функций.

Читателю необходимо уяснить, что функция не обязательно должна быть либо четной, либо нечетной.

Задача 4, 7 (для самостоятельного решения). Показать, что функции $f(x) = \sin x + \cos x$ и $\varphi(x) = 2x + 7$ нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным функциям.

Задача 4, 8. Доказать, что сумма или разность двух четных функций есть функция четная.

Решение. Пусть $\varphi(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, причем функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четные. Тогда $f_1(-x) = f_1(x)$, а $f_2(-x) = f_2(x)$ (4, 3). Вычислим $\varphi(-x)$: $\varphi(-x) = f_1(-x) \pm f_2(-x)$.

На основании равенств (4, 3) $\varphi(-x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, и требуемое доказано: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Доказанное предложение распространяется на алгебраическую сумму любого конечного числа слагаемых (предполагалось, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ рассматриваются в одной и той же симметричной области).

Задача 4, 9 (для самостоятельного решения). Доказать, что сумма или разность двух нечетных функций есть функция нечетная (предполагается, что функции рассматриваются в одной и той же симметричной области).

Задача 4.10. Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная.

Решение. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четные. Тогда $f_1(-x) = f_1(x)$, а $f_2(-x) = f_2(x)$. Составим их произведение: $\varphi(x) = f_1(x) f_2(x)$, и тогда $\varphi(-x) = f_1(-x) f_2(-x) = f_1(x) f_2(x) = \varphi(x)$; тем самым доказано, что произведение двух четных функций — функция четная.

Теперь самостоятельно докажите, что произведение двух нечетных функций есть тоже функция четная.

Задача 4, 11 (для самостоятельного решения). Доказать, что произведение функции четной на нечетную есть функция нечетная.

Задача 4, 12 (для самостоятельного решения). Выяснить, какая из функций 1) $f(x) = x^4 + \sec x$; 2) $y = x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $f(x) = x^2 \cos x$; 4) $f(x) = x \sin x$; 5) $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$; 6) $f(x) = x^3 \sin x$; 7) $y = x^5 \sin x$ является четной, а какая нечетной.

Ответ. Функции 1), 2), 3), 4), 6), 7) — четные, 5) — нечетная.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Графики целых рациональных функций

Задача 4, 13. Построить графики функций: 1) $y = 3x - 5$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = 4x - 1$; 4) $y = -3x + 1$.

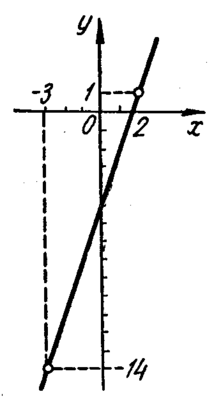
Решение. 1) Данную функцию нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным функциям: $y = (-x) = -3x - 5$.

Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Функция — линейная (это хорошо известно читателю из аналитической геометрии). Ее графиком является прямая линия, для построения которой достаточно знать только две ее точки. Возьмем два произвольных значения аргумента x и вычислим соответствующие им значения функции y.

x	y
2	1
−3	−14

Построим на плоскости точки $A_1(2, 1)$ и $A_2(-3, -14)$. Прямая изображена на фиг. 4, 1.

Графики остальных функций постройте самостоятельно.



Фиг. 4, 1.

Задача 4, 14. Построить график функции $y = x^2$.

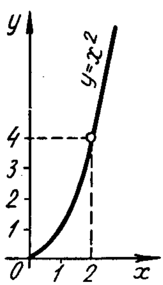
Решение. Заданная функция — четная. Ее график симметричен относительно оси Oy. Поэтому достаточно построить часть графика для значений $x \geqslant 0$, а потом дополнить эту часть ее «зеркальным отображением» относительно оси Oy. Так будет получен полный график этой функции. Так как функция определена при любом значении x, составим таблицу ее значений при произвольных значениях $x \geqslant 0$ и построим на плоскости точки $A_1(0,\ 0)$; $A_2(1,\ 1)$; $A_3(2,\ 4)$; $A_4(3,\ 9)$.

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

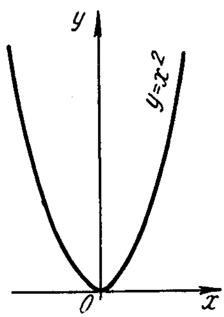
Соединим эти точки плавной кривой (фиг. 4,2).

Построим теперь «зеркальное отображение» этой кривой относительно оси Oy и получим полный приближенный график данной функции (фиг. 4, 3). Очевидно, что графиком функции является парабола.

Задача 4, 15. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций: 1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$; 3) $y = \frac{1}{3}x^2$; 4) $y = -x^2$; 5) $y = -3x^2$.



Фиг. 4,2.



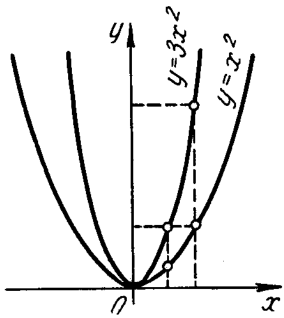
Фиг. 4,3.

Указание. Учесть указание 4, 5 (стр. 25). Пользуясь графиком функции $y = x^2$ (фиг. 4, 3), сохраняя величины абсцисс, в первом случае надо увеличить все ординаты в 3 раза (фиг. 4,4), во втором случае уменьшить все ординаты в 2 раза (фиг. 4,5), в третьем — уменьшить их в 3 раза (фиг. 4, 6). В случаях четвертом и пятом использовать указание 4, 2 стр. 25 (фиг. 4, 7 и 4, 8).

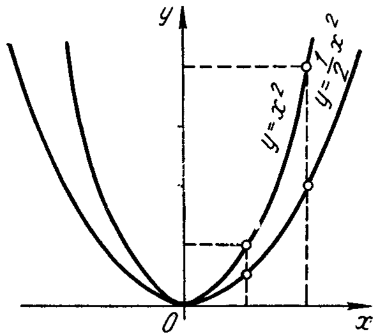
Задача 4, 16 (для самостоятельного решения). По известному графику функции $y = 2x^2$ построить графики функций: $y = 2x^2 + d$ при $d = 1,\ 2,\ -1,\ -3$.

Указание. 1) Построить график функции $y=2x^2$, использовав график функции $y=x^2$. Учесть указание 4, 4 (стр. 25). Графики этих функций показаны на фиг. 4, 9 — 4, 12.

Например, график функции $y=2x^2-3$ получается из графика функции $y=x^2$ так: увеличив все ординаты этого графика

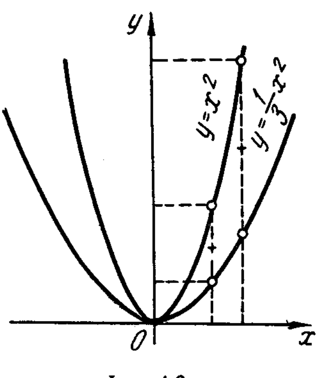


Фиг. 4,4.

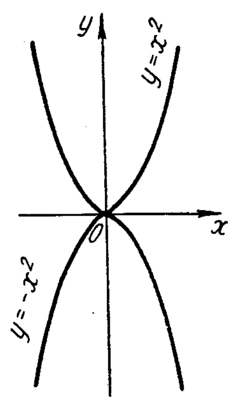


Фиг. 4,5.

в два раза при сохранении величины соответствующих абсцисс, получим график функции $y=2x^2$. Если этот график опустить на 3 ед. масштаба, то получим график функции $y=2x^2-3$.



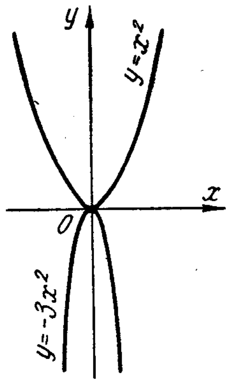
Фиг. 4,6.



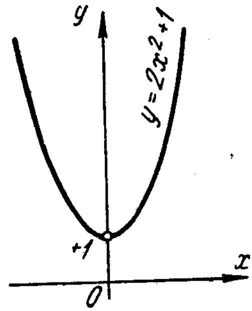
Фиг. 4,7.

Задача 4, 17. По известному графику функции $y=x^2$ построить графики функций: 1) $y=(x+1)^2$, $y=(x-2)^2$.

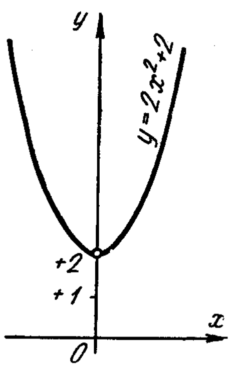
Решение. 1) График функции $y=(x+1)^2$ получается из графика функции $y=x^2$ переносом его на 1 ед. масштаба вдоль оси Ox влево — фиг. 4, 13*а* и 4, 13*б* (см. указание 4, 3, стр. 25).



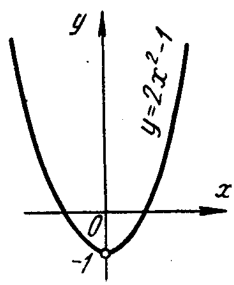
Фиг. 4,8.



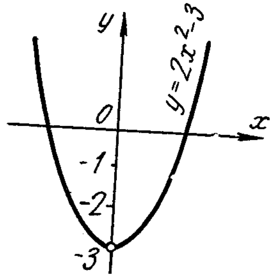
Фиг. 4,9.



Фиг. 4,10.

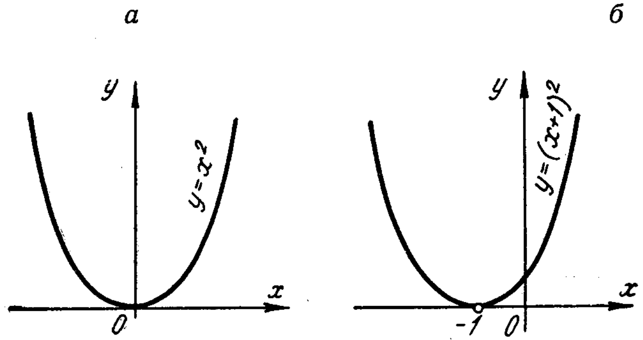


Фиг. 4,11.



Фиг. 4,12.

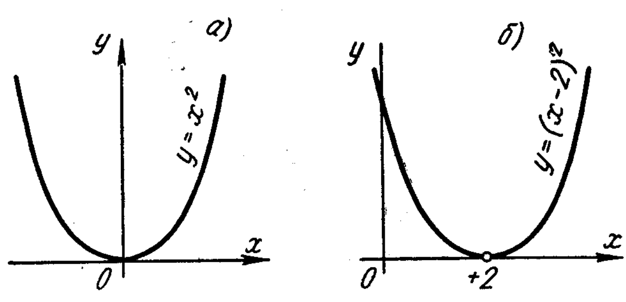
2) График функции $y=(x-2)^2$ получается из графика функции $y=x^2$ переносом его вдоль оси Ox на 2 ед. масштаба вправо — фиг. 4, 14а и 4, 14б (использовать то же указание).



Фиг. 4,13.

Задача 4, 18 (для самостоятельного решения). По известному графику функции $y=x^2$ построить графики функций;

$$1)\ y=2(x+2)^2;\ 2)\ y=\frac{1}{2}(x-1)^2.$$



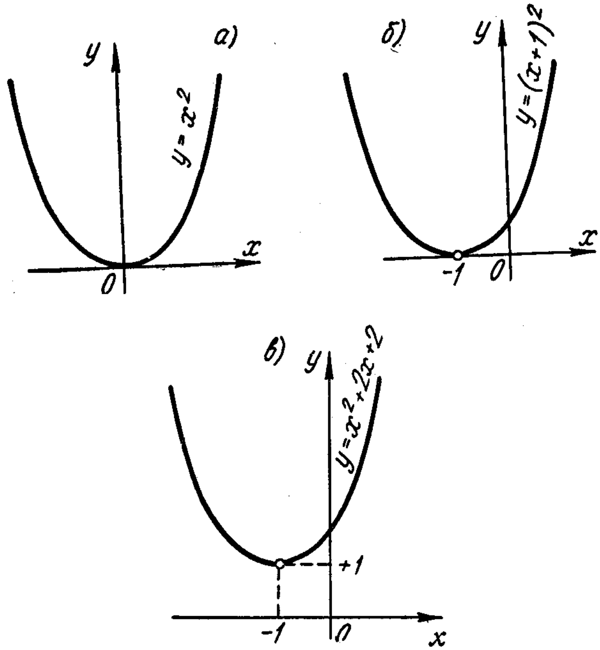
Фиг. 4,14.

Задача 4, 19. Пользуясь графиком функции $y=x^2$, построить график функции $y=x^2+2x+2$.

Решение. Заданную функцию представим в виде $y=(x+1)^2+1$. Исходя из графика функции $y=x^2$, построим сначала график функции $y=(x+1)^2$, а потом этот график перенесем на 1 ед. масштаба вверх (фиг. 4, 15) — см. указание 4, 4 стр. 25.

Задача 4, 20 (для самостоятельного решения). Пользуясь графиком функции $y=x^2$, построить график функции $y=4x^2+8x+12$.

Указание. Заданную функцию записать в виде $y = 4(x + 1)^2 + 8$ и вести построение в такой последовательности: 1) $y = x^2$; 2) $y = (x + 1)^2$; 3) $y = 4(x + 1)^2$; 4) $y = 4(x + 1)^2 + 8$.



Фиг. 4,15.

Задача 4, 21 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = -x^2 + 2x + 2$; 2) $y = -2x^2 + 3x - 4$;

3) $y = 5x^2 + 4x + 7$; 4) $y = 2x^2 + 4x$;

5) $y = -3x^2 - x$.

Найти также точки пересечения этих парабол с осью Ox.

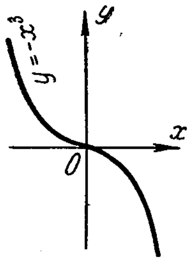
ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в построении графиков функций. Графики показательной и логарифмической функции.

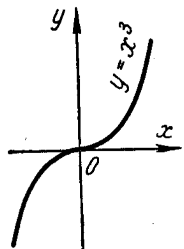
Задача 5, 1. Построить график кубической параболы $y = x^3$ (график этой функции, так же как и график параболы второй степени, надо хорошо запомнить).

Решение. Функция $y = x^3$ определена при всех значениях x $(-\infty < x < +\infty)$. Функция эта нечетная $(y(-x) = -x^3 = -y(x))$

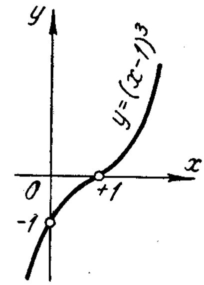
Поэтому мы построим сначала ту часть ее графика, которая соответствует значениям $x \geqslant 0$, а затем для построения полного графика воспользуемся указанием к построению графика нечетной функции (стр. 24). Так как данная функция определена при



Фиг. 5,1.



Фиг. 5,2.



Фиг. 5,3.

любом значении x, то мы можем составить таблицу числовых значений функции для нескольких произвольных значений аргумента.

1) Построим точки $A_1(0, 0)$, $A_2(1, 1)$, $A_3(2, 8)$, $A_4(3, 27)$ и соединим их плавной кривой. Построим после этого кривую, симметричную этой кривой относительно начала координат.

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27

Вся полученная кривая и будет приближенным графиком функции $y = x^3$ (фиг. 5, 1).

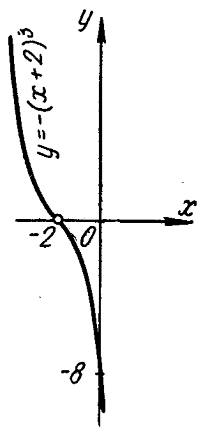
Задача 5,2 (для самостоятельного решения). Зная график функции $y = x^3$, построить графики функций:

1) $y = -x^3$; 2) $y = (x-1)^3$;
3) $y = -(x+2)^3$; 4) $y = 2x^3$;
5) $y = -\frac{1}{2}x^3$; 6) $y = x^3 + 2$;
7) $y = x^3 - 1$; 8) $y = -x^3+3$; 9) $y = 2(x+1)^3+2$.

Указание. Построение этих графиков следует выполнить на основании указаний 4,1 — 4,6 стр. 25 (см. фиг. 5,2 — 5,6).

Задача 5,3 (для самостоятельного решения). Построить график параболы четвертой степени $y = x^4$ и, пользуясь им, построить графики функций:

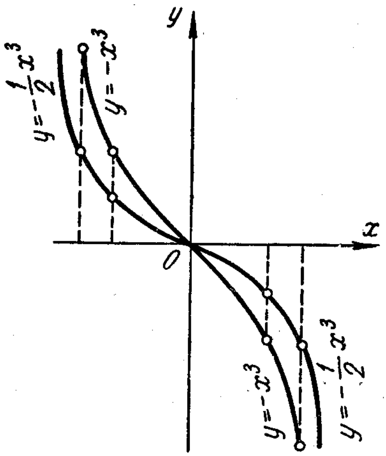
1) $y = 2x^4$; 2) $y = x^4 + 1$; 3) $y = -x^4$;
4) $y = -2x^4$; 5) $y + \frac{1}{2}x^4$; 6) $y = (x-1)^4$;
7) $y = 2(x+1)^4 - 2$



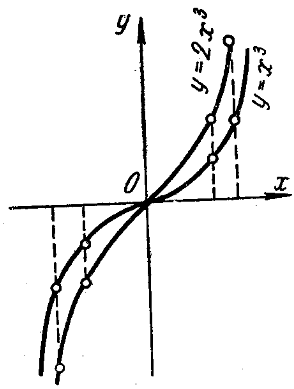
Фиг. 5,4.

(графики удобно строить на одном чертеже, используя указания 4,3—4,7 стр.).

Задача 5,4. Построить график функции $y=\frac{1}{x}$ (функция $y=\frac{m}{x}$ выражает закон обратной пропорциональности между пере-



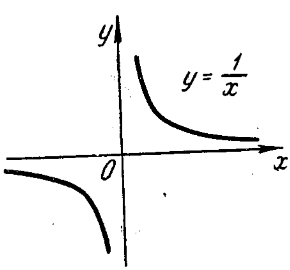
Фиг. 5,5.



Фиг. 5,6.

менными x и y, а ее график называется графиком обратной пропорциональности).

Решение. Прежде всего замечаем, что заданная функция — нечетная, так как $y(-x)=-\frac{1}{x}=-y(x)$.



Фиг. 5,7.

Функция $y=\frac{1}{x}$ определена при всех значениях x, кроме $x=0$. Ее область существования состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

Построим часть графика для значений $x>0$, а полный график функции получим на основании указания для построения графика нечетной функции (стр. 24). Составим таблицу числовых значений функции для положительных значений аргумента.

Построим на плоскости точки $A_1\left(\frac{1}{4}, 4\right)$, $A_2\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ $A_3\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $A_4(1, 1)$ $A_5\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $A_6\left(3, \frac{1}{3}\right)$, $A_7\left(4, \frac{1}{4}\right)$, соединим их плавной кривой линией. Теперь построим кривую, симметричную ей относительно начала координат, и получим приближенный полный график функции (фиг. 5,7)

$$y = \frac{1}{2}.$$

x	y
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

Эта кривая, как известно читателю из аналитической геометрии, — равнобочная гипербола (иногда говорят равноосная гипербола).

График этой функции был уже рассмотрен в первой части этого пособия. Там же был рассмотрен и график дробнолинейной функции вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

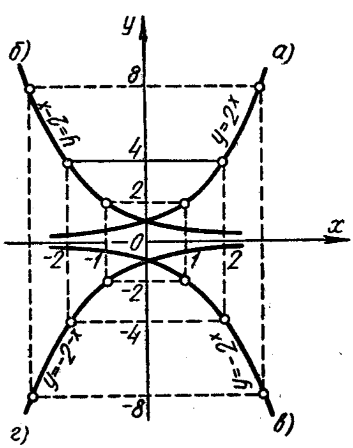
Числителю рекомендуется повторить относящиеся сюда вопросы.

ГРАФИКИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

Задача 5,5. Построить график функции $y = 2^x$

Считая этот график исходным, построить график функций:

1) $y = 2^{-x}$; 2) $y = -2^x$; 3) $y = -2^{-x}$.



Фиг. 5,8.

Решение. Показательная функция $y = 2^x$ определена при всех значениях x. Ее областью существования является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Составим таблицу числовых значений функции, давая аргументу произвольные значения.

Построим на плоскости эти точки, соединим их плавной кривой линией и получим приближенный график данной функции (фиг. 5,8 a).

1) График функции $y = 2^{-x}$ симметричен графику функции

$y = 2^x$ относительно оси Oy (фиг. 5,8 *б*), т. к. если $y(x) = 2^x$, то $y(-x) = 2^{-x}$ (см. указание 4,1 на стр. 25).

x	y
-5	$\frac{1}{32}$
-4	$\frac{1}{16}$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

2) График функции $y = -2^x$ симметричен графику функции $y = 2^x$ относительно оси Ox — см. указание 4,2, стр. 25 (фиг. 5,8 *в*).

3) График функции $y = -2^{-x}$ симметричен графику функции $y = 2^{-x}$ относительно оси Ox (фиг. 5,8 *г*) — см. указание 4,2, стр. 25.

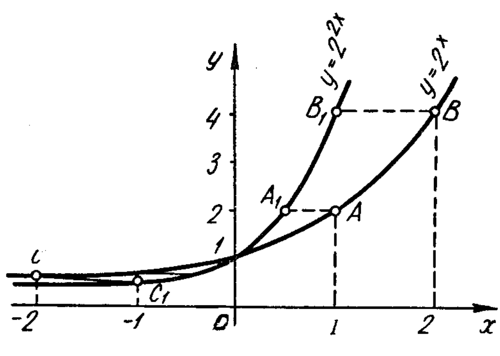
Задача 5,6 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ и, считая его исходным, построить графики функций:

1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$, 2) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$, 3) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$.

Задача 5,7. Построить график функции $y = 2^{2x}$, считая исходным график функции $y = 2^x$.

Решение. Для построения графика функции $y = 2^{2x}$ по исходному графику $y = 2^x$ следует воспользоваться указанием 4,6 (стр. 25).

Сначала построим график функции $y = 2^x$. На этом графике выбираем несколько точек. На том же чертеже построим точки, ординаты которых равны ординатам выбранных точек, но с абсциссами в два раза меньшими, чем у них (на фиг. 5,9 на графике функции $y = 2^x$ выбраны точки A, B и C). Получен-



Фиг. 5,9.

ные точки соединим плавной кривой линией, которая и будет приближенным графиком функции $y = 2^{2x}$.

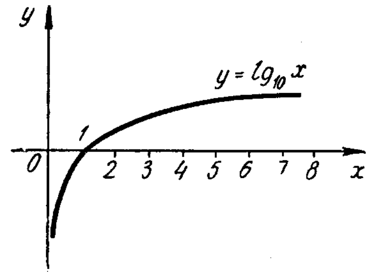
Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Считая исходным график функции $y = 2^x$, построить график функции $y = 2^{\frac{x}{2}}$.

Задача 5,9 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y = 3^x$ и, считая его исходным, построить графики функций:

1) $y = 1 + 3^x$; 2) $y = 3^x - 2$; 3) $y = 3^{x-2}$;

4) $y = 3^{\frac{1}{3}x}$.

Указание. При построении графиков функций 1) и 2) использовать указание 4,4 (стр. 25), а при построении графика функции 4) использовать указание 4,6 стр. 25.



Фиг. 5,10.

Задача 5.10. Построить график функции $y = \log_{10} x$.

Решение. Заданная функция определена только для значений $x > 0$. Составим таблицу числовых значений функции при нескольких произвольно выбранных положительных значениях аргумента. Построим на плоскости точки, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим им значениям функции.

x	y
$\frac{1}{100}$	-2
$\frac{1}{10}$	-1
1	0
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021

Построенные точки соединим плавной кривой линией и получим приближенный график данной функции (фиг. 5,10).

Задача 5,11 (для самостоятельного решения). Зная график функции $y = \log_{10} x$, построить графики функций 1) $y = \log_{10} x^3$; 2) $y = \log_{10}(x - 1)$; 3) $y = \log_{10}(-x)$; 4) $y = \log_{10} \frac{1}{x}$.

Указание к 4): $\log_{10} \frac{1}{x} = \log_{10} 1 - \log_{10} x = -\log_{10} x$.

Использовать также указание 4,2 (стр. 25).

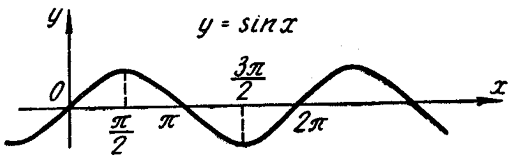
ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

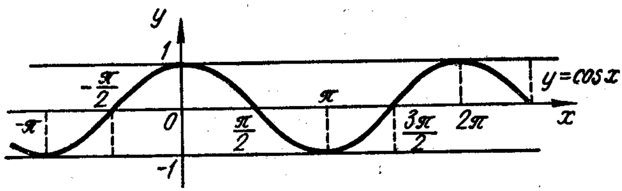
ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Задача 6,1. Исходя из графика функции $y = \sin x$, построить график функции $y = \cos x$.

Решение. Функцию $y = \cos x$ представим в виде $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. График этой функции получится из графика функции $y = \sin x$ (фиг. 6,1), перенесением его вдоль оси Ox влево на $\frac{\pi}{2}$ ед. масштаба (фиг. 6,2).

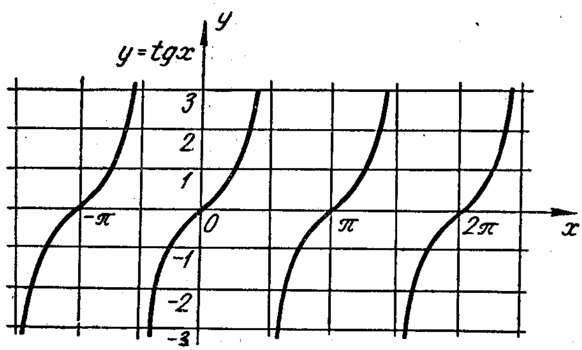


Фиг. 6,1.



Фиг. 6,2.

Задача 6,2 (для самостоятельного решения). Считая известным график функции $y = \cos x$ (фиг. 6,2), построить график функции $y = \sin x$.



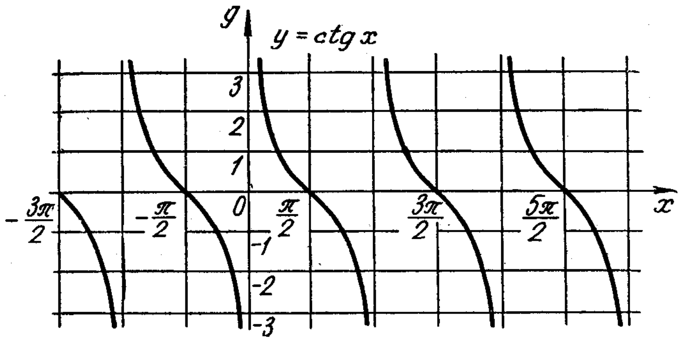
Фиг. 6,3.

Задача 6,3 (для самостоятельного решения). Исходя из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ построить график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Указание. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 1) Построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ (фиг. 6,3);

2) Пользуясь им, получить график функции $y = \operatorname{tg}(-x)$ и потом с помощью сдвига вдоль оси Ox получить график функции $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$.

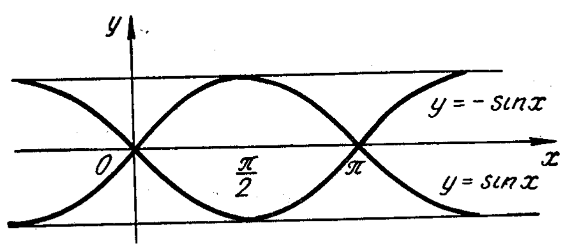
График функции $y = \operatorname{ctg} x$ представлен на фиг. 6,4.



Фиг. 6,4.

Задача 6,4. Исходя из графика функции $y = \sin x$, построить график функции $y = -\sin x$.

Решение. Если построить кривую, симметричную относительно оси Ox графику функции $y = \sin x$, то она и будет являться



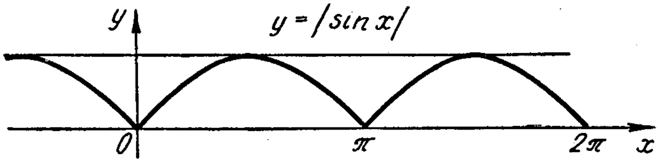
Фиг. 6,5.

графиком функции $y = -\sin x$ (фиг. 6,5). График функции $y = \sin(-x)$ совпадает с графиком функции $y = -\sin x$. Почему?

Задача 6,5 (для самостоятельного решения). Начертить график функции $y = |\sin x|$ (фиг. 6,6).

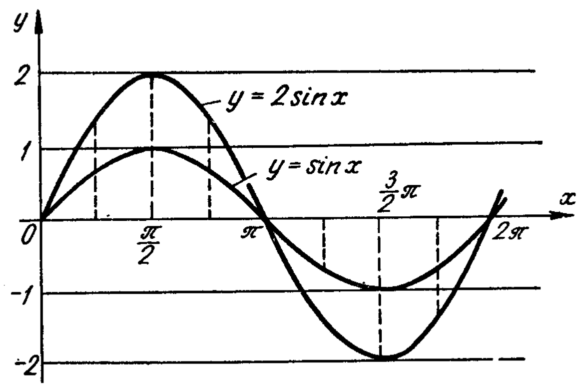
Задача 6,6. Начертить график функции $y = 2\sin x$, исходя из графика функции $y = \sin x$.

Решение. Начертим одну волну графика функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ (график этой функции можно срисовать из учебника). Выберем на этом графике несколько точек. Построим теперь на том же чертеже точки с абсциссами, равными абсциссам выбранных точек, но с ординатами, увеличенными в два раза. Соединив эти точки плавной кривой линией, получим приближенный график функции $y = 2 \sin x$ (фиг. 6,7).



Фиг. 6,6.

Теперь, пользуясь периодичностью этой функции (ее период равен 2π), продолжим построенный график в соседние интервалы.



Фиг. 6,7.

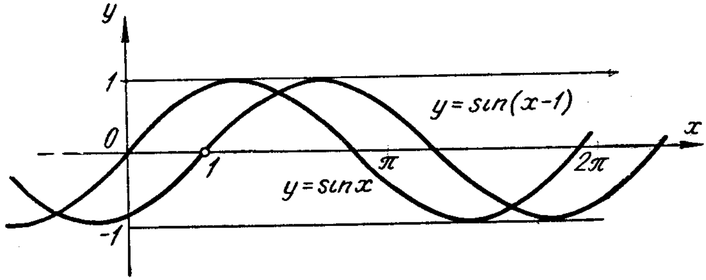
Задача 6,7 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

$$1)\ y = 3\cos x; \qquad 2)\ y = \frac{1}{2}\sin x.$$

Задача 6,8. Построить график функции $y = \sin(x - 1)$, исходя из графика функции $y = \sin x$.

Решение. Чтобы построить график функции $y = \sin(x - 1)$, начертим сначала одну волну графика функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ и перенесем ее вправо на 1 ед. масштаба. Зная, что заданная функция имеет период, равный 2π, продолжим построенный график в соседние интервалы (фиг. 6,8).

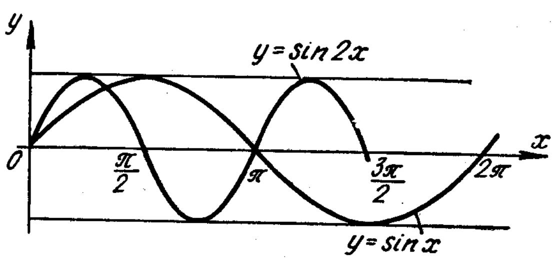
Задача 6,9 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y=\cos(x+2)$ и 2) $y=\sin(x+3)$, исходя из графиков функций $y=\cos x$ и $y=\sin x$.



Фиг. 6,8.

Задача 6,10. Построить график функции $y=\sin 2x$.

Решение. Используем указание 4,6, стр. 25. Чтобы построить график функции $y=\sin 2x$, построим сначала одну волну синусоиды $y=\sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$.



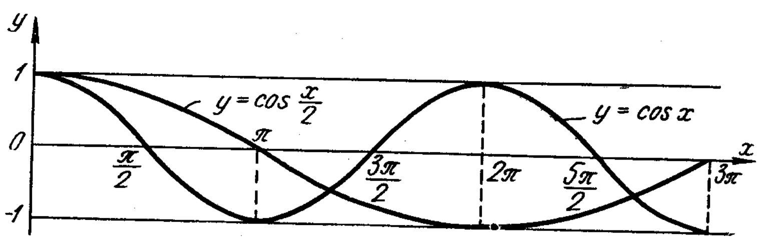
Фиг. 6,9.

Выберем на построенной кривой несколько точек и построим точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, но с абсциссами, уменьшенными в два раза. Полученные точки соединим плавной кривой. Пользуясь периодичностью заданной функции $y=\sin 2x$ (фиг. 6,9) (ее период $T=\pi$), продолжим полученный график в соседние интервалы $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, $(-\pi, 0)$, $(-2\pi, -\pi)$, находящиеся справа и слева от интервала $(0, \pi)$.

Задача 6,11 (для самостоятельного решения). Исходя из графиков функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$, построить графики функций: 1) $y = \sin 3x$ и 2) $y = \cos \frac{1}{3} x$.

Задача 6,12. Построить график функции $y = \cos \frac{1}{2} x$.

Решение. Построим на отрезке $[0, 2\pi]$ сначала график функции $y = \cos x$ (фиг. 6,10). Используем указание 4,6 стр. 25. Выберем на этом графике несколько точек и построим точки с ординатами равными, ординатам выбранных точек, но с абсциссами, в два раза бо́льшими, чем абсциссы выбранных точек.



Фиг. 6,10.

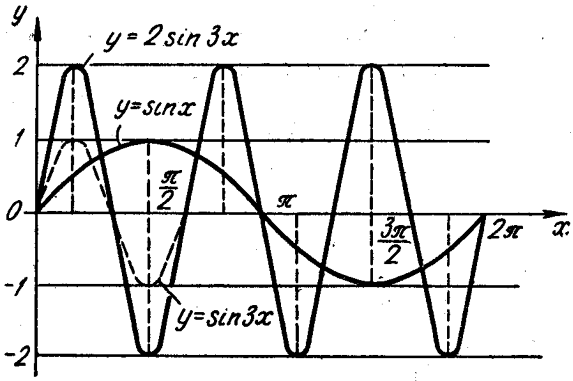
Построение кривой показано на фиг. 6.10. Функция $y = \cos \frac{1}{2} x$ — периодическая. Ее период равен 4π. Пользуясь периодичностью этой функции, ее график, построенный на отрезке $[0, 4\pi]$, продолжим в соседние интервалы $(4\pi, 8\pi)$; $(8\pi, 12\pi)$; $(-4\pi, 0)$; $(-8\pi, -4\pi)$.

Задача 6,13 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y = \sin \frac{x}{2}$; 2) $y = \cos \frac{2x}{3}$; 3) $y = \sin \frac{x}{3}$.

Задача 6,14. Построить график функции $y = 2 \sin 3x$.

Решение. Будем исходить из графика функции $y = \sin x$. Построим одну волну этого графика на отрезке $[0, 2\pi]$. Пользуясь этим графиком, построим график функции $y = \sin 3x$. Для этого, как уже известно читателю, следует на кривой $y = \sin x$ выбрать несколько точек и построить точки с ординатами, равными ординатам этих точек, но с абсциссами в три раза меньшими, чем абсциссы выбранных точек. Построенные точки соединим плавной кривой линией.

После того как построена кривая $y = \sin 3x$, на основании указания 4,5 стр. 25 построим кривую $y = 2 \sin 3x$. Это надо сделать так: оставив абсциссы построенных точек без изменения, построить точки, ординаты которых в два раза больше, чем ординаты построенных точек. Построения показаны на фиг. 6,11. После этого построенную кривую следует продолжить в соседние интервалы $\left(\frac{2}{3}\pi;\ \frac{4}{3}\pi\right)$; $\left(\frac{4}{3}\pi;\ \frac{6}{3}\pi\right)$; $\left(-\frac{2}{3}\pi;\ 0\right)$ $\left(-\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$ и т. д., используя то, что заданная функция — периодическая с периодом $T=\frac{2}{3}\pi$.



Фиг. 6,11.

Задача 6,15 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y=\frac{1}{2}\sin 2x$; 2) $y=3\cos 2x$; 3) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

Указание. При построении графика функции $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ следует исходить из графика функции $y=\operatorname{tg}x$. Пользуясь этим графиком, построить график функции $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$, а потом уже кривую $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

Задача 6,16 (для самостоятельного решения). Построить графики функций: 1) $y=-\sin 2x$; 2) $y=-3\cos\frac{x}{3}$; 3) $y=-2\sin\frac{x}{2}$.

Задача 6,17 (для самостоятельного решения). Построить график функции $y=2\sin(x-1)$.

Указание. 1) Исходя из графика функции $y=\sin x$ построить график функции $y=\sin(x-1)$. 2) Зная график функции $y=\sin(x-1)$, построить график данной функции $y=2\sin(x-1)$.

Задача 6,18. Построить график функции $y=\sin(2x+3)$.

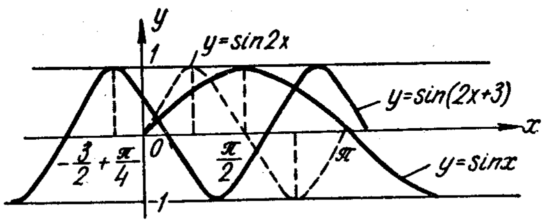
Решение. Представим заданную функцию в виде $y=\sin 2\left(x+\frac{3}{2}\right)$ и будем вести построение графика в таком порядке:

1) Построим на отрезке $[0,2\pi]$ график функции $y = \sin x$.

2) Выберем на этом графике несколько точек и построим точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, но с абсциссами, уменьшенными в 2 раза. Построенные точки соединим плавной кривой линией. Эта кривая линия будет графиком функции $y = \sin 2x$.

3) Перенесем этот график влево вдоль оси Ox на $\frac{3}{2}$ ед. масштаба и получим график функции $y = \sin 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$, т. е. график заданной функции $y = \sin(2x + 3)$ (фиг. 6,12).

Следует предостеречь читателя от одной распространенной ошибки. Эта ошибка состоит в том, что для построения графика



Фиг. 6,12.

функции $y = \sin(\omega x + \varphi)$ иногда поступают так: из графика функции $y = \sin x$ получают график функции $y = \sin \omega x$, и этот график переносят вдоль оси Ox на φ ед. масштаба, вместо того, чтобы его перенести на $\frac{\varphi}{\omega}$ ед. масштаба.

Чтобы избежать этой ошибки, надо функцию вида $y = \sin(\omega x + \varphi)$ представить в виде $y = \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$, т. е. сделать так, чтобы в скобках под знаком синуса коэффициент при x был равен 1. Из рассмотрения функции $y = \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ сразу видно, что перенос вдоль оси Ox должен быть сделан не на φ ед. масштаба, а на $\frac{\varphi}{\omega}$ ед. масштаба.

Задача 6,19 (для самостоятельного решения). Построить графики функции: 1) $y = \sin(4x + 8)$; 2) $y = \sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$; 3) $y = -\sin(2x - 4)$.

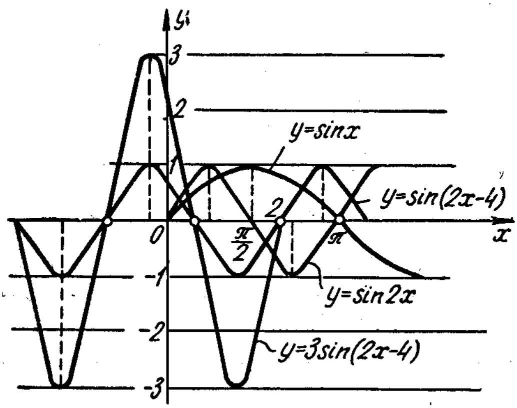
Задача 6,20. Построить график функции $y = 3\sin(2x - 4)$.

Решение. Представим заданную функцию в виде $y = 3\sin 2(x - 2)$. Построим одну волну синусоиды на отрезке $[0,2\pi]$.

Считая этот график исходным, построим график функции

$$y = \sin 2x.$$

Если перенести эту кривую вдоль оси Ox на 2 ед. масштаба вправо, то получим график функции $y = \sin 2(x - 2)$. Выберем на этом графике несколько точек и, не изменяя абсцисс этих точек, увеличим их ординаты в три раза. Соединив полученные точки плавной кривой линией, получим приближенный график данной функции $y = 3 \sin 2(x - 2)$. Зная, что заданная функция перио-



Фиг. 6,13.

дическая и что ее период $T = \pi$, продолжим полученный график в соседние интервалы, как мы это делали в предыдущих задачах (фиг. 6,13).

Задача 6,21 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

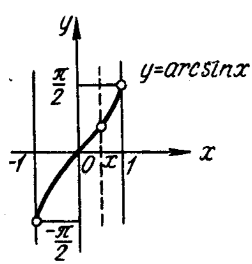
1) $y = 2\cos(3x + 1)$; 2) $y = 2\cos 3x = 1$;

3) $y = -2\sin(2x - 1)$; 4) $y = -3\cos(3x + 1)$;

5) $y = |\sin 2x|$.

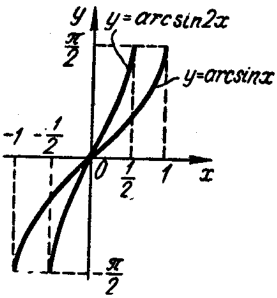
Задача 6,22. Построить график функции $y = \arcsin 2x$, считая исходным график функции $y = \arcsin x$.

Решение. График функции $y = \arcsin x$ представлен на фиг. 6,14, перечертите этот график. Выберите на нем несколько точек.



Фиг. 6,14.

Постройте точки с ординатами, равными ординатам выбранных точек, то с абсциссами, уменьшенными в два раза. Построенные точки соедините плавной кривой линией, которая и будет приближенным графиком функции $y = \arcsin 2x$ (фиг. 6,15).

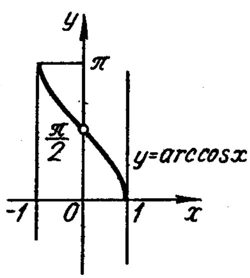


Фиг. 6,15.

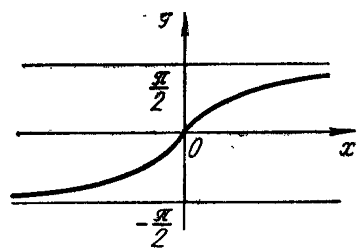
Задача 6,23 (для самостоятельного решения). Пользуясь графиком функции $y = \arcsin x$ (фиг. 6,14), постройте графики функций: 1) $y = \arcsin \frac{x}{2}$; 2) $y = \arcsin (x+1)$; 3) $y = \arcsin (x-1)$; 4) $y = 2 \arcsin x$; 5) $y = \arcsin x - 1$; 6) $y = -\arcsin x$.

Задача 6,24 (для самостоятельного решения). Пользуясь графиком функции $y = \arccos x$ (фиг. 6,16), построить графики функций: 1) $y = -\arccos x$; 2) $y = \arccos (-x)$; 3) $y = \arccos \frac{x}{3}$; 4) $y = \arccos \left(\frac{x}{3} + 1\right)$; 5) $y = 2 \arccos 2x$.

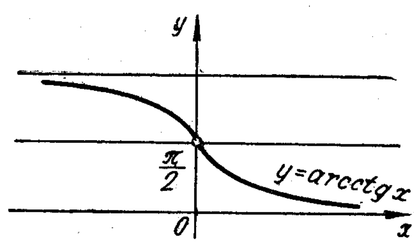
Задача 6,25 (для самостоятельного решения). Исходя из графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ (фиг. 6,17 и 6,18), построить графики функций: 1) $y = 2 \operatorname{arctg} x$; 2) $y = -\operatorname{arctg} x$; 3) $= \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$; 4) $y = \operatorname{arcctg} x + 2$; 5) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} x$.



Фиг. 6,16.



Фиг. 6,17.



Фиг. 6,18.

СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Построение графиков функций, заданных несколькими аналитическими выражениями. Построение графика суммы, разности и произведения нескольких функций.

Определение функции, данное в кратких сведениях по теории предпосланных второму практическому занятию, не предполагает, что функция обязательно задается одной формулой. Может оказаться, что на различных участках изменения аргумента функция задана различными формулами.

С таким способом задания функции приходится встречаться и в математических исследованиях, и в таких науках, как сопротивление материалов, теплотехника, радиотехника и др. Поэтому этот способ не следует считать чем-то надуманным.

Задача 7,1. Функция задана следующими равенствами:

$$y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leqslant -1, \\ x+3, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x+3, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Построить график.

Решение. Если $x \leqslant -1$, то функция задана равенством $y = 2$ и ее графиком будет полупрямая, параллельная оси Ox (фиг. 7,1*а*). На участке $-1 \leqslant x \leqslant 0$ функция задана равенством $y = x + 3$. Графиком этой функции является прямая линия, на которой надо взять отрезок ее, соответствующий значениям аргумента x из отрезка $[-1,0]$ (фиг. 7,1*б*).

На участке $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция $y = -x + 3$, ее график—прямая линия, на которой следует взять отрезок, соответствующий значениям аргумента из отрезка $[0,1]$ (фиг. 7,1*в*) и для значений $x \geqslant 1$ функция $y = 2$ и ее графиком будет полупрямая, параллельная оси Ox (фиг. 7,1 *г*).

В «собранном» виде график заданной функции представлен на фиг. 7,1 *д*.

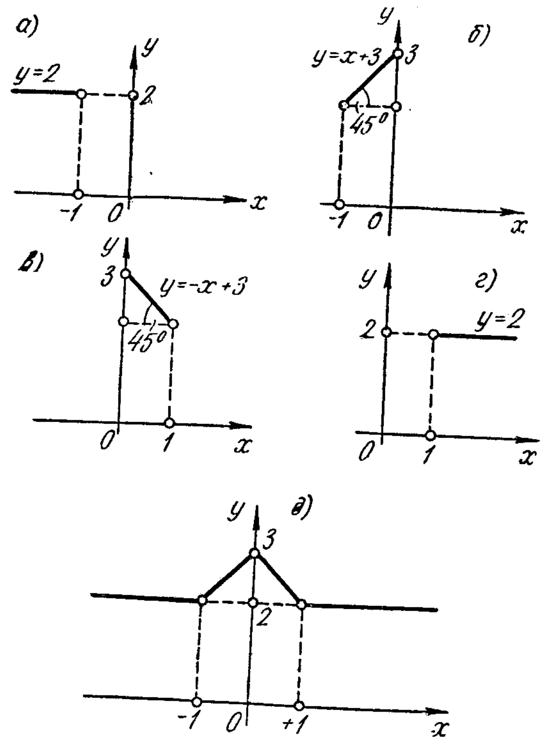
Задача 7,2. Построить график функции, определяемой равенствами

$$y = x^2, \quad \text{если } x \leqslant 0;$$

$$y = x, \quad \text{если } x \geqslant 0.$$

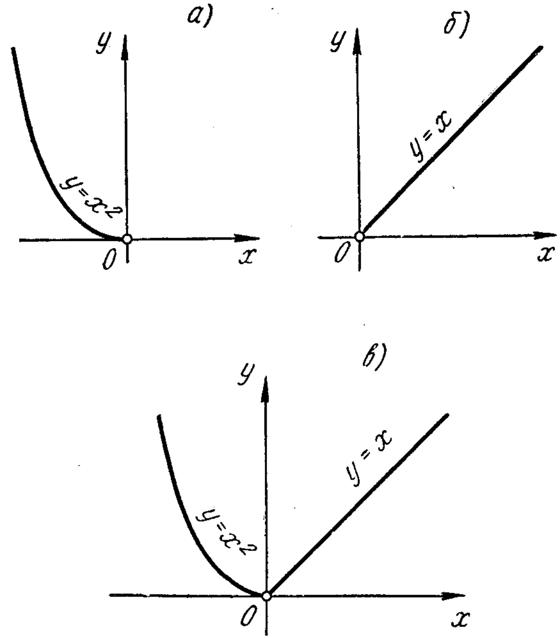
Решение. Графиком функции $y = x^2$ для значений $x \leqslant 0$ является часть параболы, расположенная во втором квадранте (фиг. 7,2 *а*).

Графиком функции $y = x$ для значений $x \geqslant 0$ является полупрямая — биссектриса первого координатного угла (фиг. 7,2 *б*). На фиг. 7,2 *в* график заданной функции представлен в «собранном» виде.



а)
y=2
y
2
-1
0
x
б)
y
y=x+3
3
45°
-1
0
x
в)
y
3
y=-x+3
45°
0
1
x
г)
y
2
y=2
0
1
x
д)
y
3
2
-1
0
+1
x

Фиг. 7,1.



а)
y
$y=x^2$
0
x
б)
y
y=x
0
x
в)
y
$y=x^2$
y=x
0
x

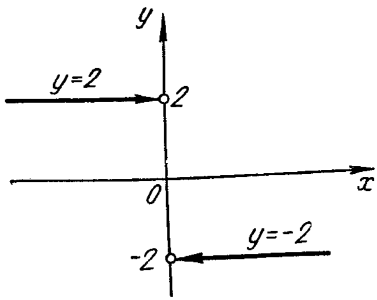
Фиг. 7,2.

Перед решением приведенных ниже задач введем такое условие: если на кривых линиях или на полупрямых поставлены стрелки, то это означает, что концы этих линий, на которых находятся стрелки, не принадлежат графику функции.

Задача 7,3. Построить график функции

$$y = \begin{cases} +2 & \text{для } x < 0; \\ -2 & \text{для } x > 0. \end{cases}$$

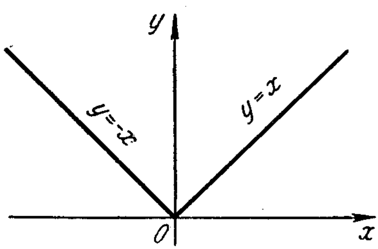
Решение. См. фиг. 7,3.



Фиг. 7,3.

Задача 7,4 (для самостоятельного решения). Построить график функции, определяемой равенствами

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$



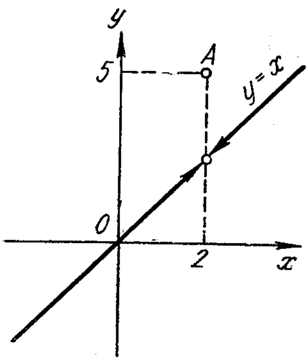
Фиг. 7,4.

(график этой функции представлен на фиг. 7,4). Эта функция может быть задана одним аналитическим выражением: $y = |x|$, где $|x|$ — абсолютная величина x.

Задача 7,5. Построить график функции

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 2, \\ 5, & \text{если } x = 2, \end{cases}$$

Решение. График функции состоит из всех точек прямой $y = x$, кроме точки (2,2). Эта точка удалена из прямой («изъята», «вырвана»). Она помещена в точку (2,5). Это изолированная точка графика функции (фиг. 7,5).



Фиг. 7,5.

Задача 7,6 (для самостоятельного решения). Построить графики функций, определяемые равенствами:

$$1)\ y = \begin{cases} 2x+2 & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 8 & \text{для } 3 \leqslant x \leqslant 6 \\ x+2 & \text{для } x \geqslant 6 \end{cases}$$

$$2)\ y = \begin{cases} x-1 & \text{для } x < 0 \\ 3x & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

(не забывайте на прямых проставлять стрелки, если они нужны на основании сделанного выше условия. В примере 2) они нужны)

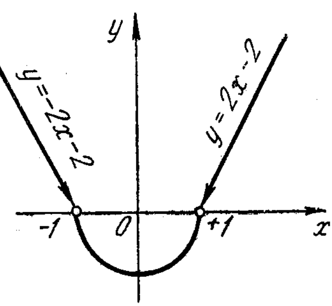
$$3)\ y = \begin{cases} -2x-1 & \text{для } x < 2 \\ 3 & \text{для } x = 2 \\ 2x-9 & \text{для } x > 2 \end{cases} \qquad 4)\ y = \begin{cases} x+1 & \text{для } x < 0 \\ 0 & \text{для } x = 0 \\ x-1 & \text{для } x > 0 \end{cases}$$

Задача 7,7 (для самостоятельного решения). Построить графики функций, определяемых равенствами

1)

$$y = \begin{cases} -2x-2, & \text{если } x < -1; \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x-2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Указание. График функции $y = -\sqrt{1-x^2}$ — часть окружности $x^2 + y^2 = 1$, лежащая в нижней полуплоскости (фиг. 7,6).



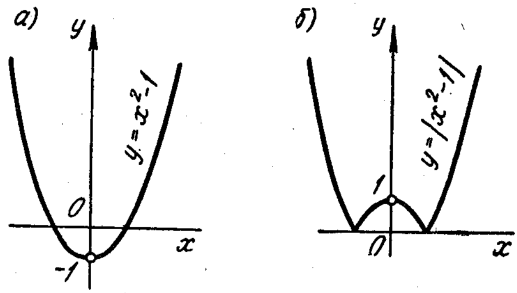
Фиг. 7,6.

$$2)\ y = \begin{cases} x, & \text{если } < -2; \\ 3, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2; \\ x^2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

$$3)\ y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } 0 < x \leqslant \frac{1}{2}; \\ 2, & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 6; \\ \sqrt{-32+12x-x^2}, & \text{если } 6 \leqslant x \leqslant x \leqslant 8. \end{cases}$$

Задача 7,8 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

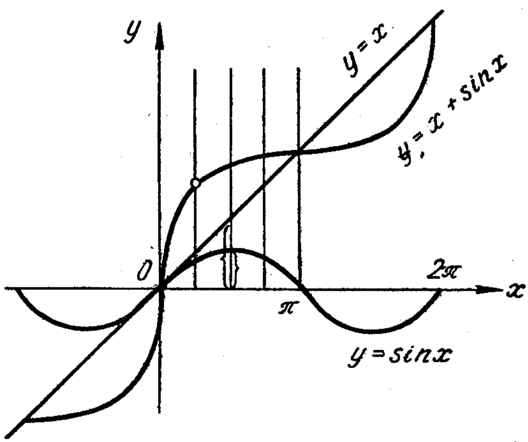
1) $y = |x^2 - 1|$; (фиг. 7,7 *а* и 7,7 *б*)
2) $y = 2 - |x|$;
3) $y = |x^2 - 7x + 12|$.



Фиг. 7,7.

Задача 7,9. Построить график функции $y = x + \sin x$.

Решение. Построим на одном чертеже графики слагаемых функций (фиг. 7,8): $y = x$ и $y = \sin x$.



Фиг. 7,8.

Проведем ряд вертикальных прямых, пересекающих графики этих функций, и пометим на них точки, ординаты которых равны сумме ординат слагаемых функций. Каждая из точек, построенных на этих вертикальных прямых, имеет абсциссу такую же, как и соответствующие точки обоих графиков. Соединяя полученные точки плавной кривой, получим график данной функции $y = x + \sin x$ (конечно, полученный график будет приближенным).

Задача 7,10 (для самостоятельного решения). Построить графики функций:

1) $y = 2^x + \sin x$;
2) $y = 3^x + \cos x$;
3) $y = \sin x + \cos x$;
4) $y = \sin 2x + 2\cos x$;
5) $y = x \sin x$.

Указание. При построении графика функции $y = x\sin x$ (пример 5) учесть, что: 1) эта функция четная, а потому ее график симметричен относительно оси Oy. 2) Учитывая, что x умножается на $\sin x$, который по абсолютной величине не больше единицы, заключаем, что абсолютная величина произведения $x\sin x$, т. е. $|x\sin x|$, не больше $|x|$, т. е. $|x\sin x| \leqslant |x|$, а потому график функции $y = x\sin x$ расположен между двумя биссектрисами координатных углов $y = x$ и $y = -x$. В точках $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}, \ldots, \pm\frac{(2\pi+1)\pi}{2}$ график функции $y = x\sin x$ касается этих биссектрис, а в точках O, $\pm\pi$; $\pm 2\pi\ldots$ график пересекает ось Ox.

Задача 7,11 (для самостоятельного решения). Построить графики функций

1) $y = x^3 + 2x^2$;
2) $y = x + \cos x$;
3) $y = x^3 - \frac{1}{2}x^3$;
4) $y = x^3 \cos x$;
5) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

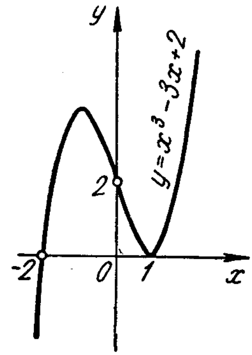
ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Решение уравнений с помощью графиков (графическое решение уравнений).

Если не требуется большой точности, то можно корни различных уравнений находить при помощи графиков функций. Для этого поступают так:

Способ 1. *Все члены уравнения переносят в его левую часть (правая часть оказывается при этом равной нулю), обозначают левую часть через $f(x)$, и тогда уравнение приобретает вид $f(x) = 0$. После этого строят график функции $y = f(x)$, где $f(x)$ — левая часть уравнения. Абсциссы точек пересечения этого графика с осью Ox и будут корнями уравнения, так как в этих точках $y = 0$.*

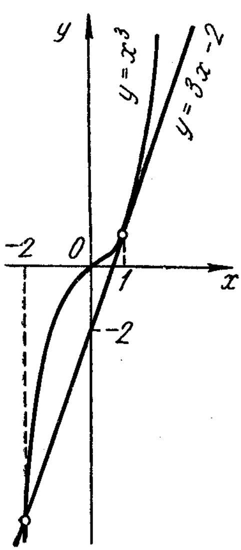
Способ 2. Члены уравнения разбивают на две группы, одну из них записывают в левой части уравнения, а другую — в правой. Уравнение приобретает вид $f(x) = f_1(x)$. После этого строят графики двух функций $y = f(x)$ и $y = f_1(x)$. Корнями данного уравнения будут абсциссы точек пересечения этих графиков. Так, если точка пересечения графиков имеет абсциссу x_0, то в этой точке ординаты графиков между собой равны, и тогда $f(x_0) = f_1(x_0)$. Это равенство показывает, что x_0 — корень уравнения. Второй из указанных способов предпочтительнее первого; он особенно удобен, когда одна из частей уравнения является линейной функцией.



Фиг. 8,1.

Задача 8,1. Решить графически уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$ первым и вторым из указанных способов.

Решение. ***1-й способ.*** Построим график функции $y = x^3 - 3x + 2$ (фиг 8,1) и определим абсциссы точек пересечения этого графика с осью $Ox: x_1 = -2$; $x_2 = x_3 = 1$. Кривая касается оси Ox в точке $x = 1$, а потому уравнение имеет кратный корень $x = 1$ (следует иметь в виду, что уравнение третьей степени с действительными коэффициентами имеет или один действительный корень или все три его корня — действительны. Так как кривая пересекла ось Ox в одной точке и коснулась ее в другой, то в той точке, где имеет место касание, будет кратный корень. В данном случае таким двукратным корнем является 1).



Фиг. 8,2.

2-й способ. Перепишем данное уравнение в виде $x^3 = 3x - 2$. Построим графики функций $y = x^3$ и $y = 3x - 2$ (фиг. 8,2). Найдем абсциссы точек пересечения этих графиков. Получим $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. В точке $x_2 = 1$ прямая $y = 3x - 2$ касается графика функции $y = x^3$.

Задача 8,2 (для самостоятельного решения). Решить графически уравнение $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

Задачу решить двумя способами.

Ответ. Один действительный корень $x = 1$.

Указание. Прежде чем решать заданное уравнение вторым способом, его выгодно сначала упростить. Общий вид кубического уравнения записывается так:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{A}$$

После деления обеих частей равенства на a_0 оно преобразуется к виду $y^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$.

Если теперь сделать подстановку

$$x = y - \frac{b_1}{3}, \tag{B}$$

то оно приведется к виду

$$y^3 + py + q = 0. \tag{C}$$

Этот вид кубического уравнения называется приведенным. Оно не содержит квадрата неизвестной величины. Уравнение (C) решить графически проще, чем исходное уравнение (A), т. к. здесь дело сведется к построению графика кубической параболы и прямой (см. предыдущую задачу), в то время как графическое решение уравнения (A) потребовало бы построения графиков кубической параболы и параболы второй степени (уравнение (A) следовало переписать так: $a_0x^3 = -a_1x^2 - a_2x - a_3$).

После того как решено уравнение (C), надо воспользоваться подстановкой (B) и найти неизвестное данного уравнения (A).

Задача 8,3. (для самостоятельного решения). Решить графически уравнения:

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$;
2) $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$.

Указание. Перейти к приведенному виду (C) кубического уравнения, использовав указание предыдущей задачи.

Ответ. 1) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$;
2) $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$.

Задача 8,4. Найти графически вторым способом положительный корень уравнения $x^4 - x - 1 = 0$.

Указание. При построении графиков функций $y = x^4$ и $y = x + 1$ масштабную единицу по оси Oy уменьшить в 5 раз.

Ответ. 1,22.

Задача 8,5. Найти графически наименьший положительный корень уравнения $x - \operatorname{tg} x = 0$

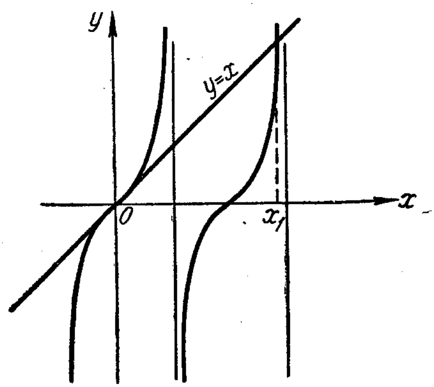
Указание. 1) Переписать уравнение в виде $\operatorname{tg} x = x$. 2) Начертить графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$ (фиг. 8,3). Графики пересекаются в бесконечном множестве точек. Уравнение имеет бесчисленное множество корней.

Ответ. Наименьший положительный корень $x_1 \approx 4,5$ (более точное вычисление дает $x_1 = 4,4934$).

Задача 8,6. (для самостоятельного решения). Найти графически наименьший корень уравнения $\operatorname{tg} x - 0,5x = 0$.

Ответ. $x \approx 4,3$.

Задача 8,7 (для самостоятельного решения). Найти графически наименьший положительный корень уравнения $0,2x - \sin x = 0$.



Фиг. 8,3.

Указание. Искомый корень является наименьшей положительной абсциссой точки пересечения прямой $y = 0,2x$ и синусоиды $y = \sin x$.

Ответ. $x \approx 2,6$.

Задача 8,8 (для самостоятельного решения). Найти наименьший положительный корень уравнения $x \operatorname{tg} x = 0,3$.

Указание. Переписать уравнение в виде $\operatorname{tg} x = \frac{0,3}{x}$ и построить графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \frac{0,3}{x}$ (равновесная гипербола).

Ответ. 0,52.

Задача 8,9 (для самостоятельного решения). Найти наименьший положительный корень уравнения $x \sin x = 1$.

Ответ. $x \approx 1,1$.

Задача 8,10 (для самостоятельного решения). Решить графически уравнения:

1) $x - 2 \sin x = 0$ (найти положительный корень).

2) $\cos x - x^2 = 0$

Ответ. 1) $x \approx 1,9$; 2) $x = \pm 0,824$.

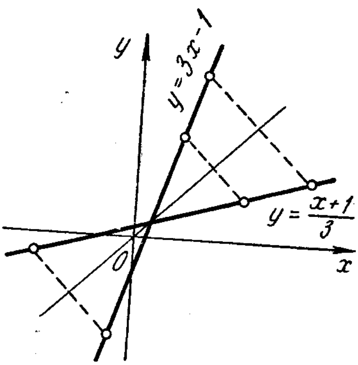
ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Обратная функция и ее график. Периодические функции.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Обратная функция и ее график

Если функциональная зависимость y от x задана аналитически уравнением $y = f(x)$, из которого можно определить x как функцию от y уравнением $x = \varphi(y)$ так, что каждому значению y соответствует единственное значение x, то функция, определяемая уравнением $x = \varphi(y)$, называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$, которая в этой связи называется прямой. В уравнении $y=f(x)$ величина x — независимая переменная, а y — функция. Для того чтобы сохранить стандартные обозначения, в которых x обозначает независимую переменную, а y — функцию, в уравнении $x = \varphi(y)$ следует заменить y буквой x, а x — буквой y. Именно так полученную функцию $y = \varphi(x)$ мы и будем считать обратной по отношению к функции $y = f(x)$. График обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен гафику прямой функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.



Фиг. 9,1.

Задача 9,1. Найти функцию, обратную функции $y = 3x - 1$, и построить ее график.

Решение. Находим из данного уравнения x в зависимости от y:

$$x = \frac{x+1}{3}.$$

Заменяя в этом равенстве x на y, а y на x, получаем окончательно

$$y = \frac{x+1}{3}.$$

Графики заданной функции и ей обратной представлены на фиг. 9,1

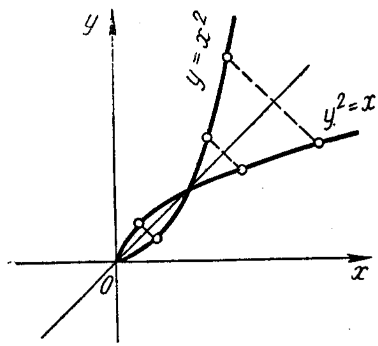
Задача 9,2. Найти функцию, обратную функции $y = x^2$ $(-\infty < x < +\infty)$.

Решение. Из уравнения $y = x^2$ видно, что значения функции y заполняют полуотрезок $[0, +\infty)$. Если это уравнение разрешить относительно x, то получим уравнение $x = \pm\sqrt{y}$, из которого видно, что каждому значению y из полуотрезка $[0, +\infty)$ соответствует не одно, а два значения x из интервала

$(-\infty, +\infty)$. Отсюда мы заключаем, что если функцию $y = x^2$ рассматривать на интервале $(-\infty, +\infty)$, то для нее обратной функции не существует (x через y выражается не однозначно).

Если будем рассматривать данную функцию $y = x^2$ только для положительных значений x и $x = 0$, т. е. значений x из полуотрезка $[0, +\infty)$, тогда $x = +\sqrt{y}$, и каждому значению $y \geqslant 0$ соответствует не два, а только одно значение x, обратная функция теперь существует и определяется уравнением $y = +\sqrt{x}$ (фиг. 9,2).

Если данную функцию $y = x^2$ рассматривать только для значений $x \leqslant 0$, то она и в этом случае будет иметь обратную функцию. Действительно, в этом случае $x = -\sqrt{y}$, каждому значению $y \geqslant 0$ соответствует единственное значение x, и обратная функция определяется уравнением $y = -\sqrt{x}$.



Фиг. 9,2.

Задача 9,3 (для самостоятельного решения). Убедиться, что на интервале $(-\infty, +\infty)$ функция $y = \sin x$ не имеет обратной функции, а на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ — имеет.

Задача 9,4. Найти функцию, обратную функции $y = \lg \frac{x}{5}$ $(x > 0)$.

Решение. 1) Находим x в зависимости от y:

$$\frac{x}{5} = 10^y; \quad x = 5 \cdot 10^y.$$

2) Заменим в последнем выражении x на y, а y на x и получим $y = 5 \cdot 10^x$. Это и есть функция, обратная данной.

Задача 9,5 (для самостоятельного решения). Найти функции, обратные данным:

1) $y = \sin(3x - 1)$, где $-\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\right) \leqslant x \leqslant +\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\right)$;

2) $y = \arcsin \frac{x}{3}$ где $-3 \leqslant x \leqslant 3$;

3) $y = 5 \operatorname{arctg} x$, где $(-\infty < x < +\infty)$.

Ответ. 1) $y = \frac{1}{3}(1 + \arcsin x)$;

2) $y = 3 \sin x$;

3) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{5}$.

При каких значениях x могут рассматриваться эти функции?

Задача 9,6 (для самостоятельного решения). Найти функцию, обратную функции $y = x^3$, и построить ее график, пользуясь свойством графика обратной функции.

Задача 9,7 (для самостоятельного решения). Определить функции, обратные следующим функциям:

1) $y = x^2 - 2x + 4$; 2) $y = \frac{x-1}{2-3x}$; 3) $y = 2^{\frac{x}{x-1}}$;

4) $y = 5^{\lg x}$; 5) $y = 3^{\sin x}$; 6) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Указание. Заданную функцию 1) рассмотреть сначала для значений $x \geqslant 1$, а потом для значений $x \leqslant 1$.

Ответ. 1) $y = 1 + \sqrt{x-3}$, $y = 1 - \sqrt{x-3}$ $(x \geqslant 3)$;

2) $y = \frac{2x+1}{3x+1}$, область существования — два бесконечных интервала: $\left(-\infty < x < -\frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{1}{3} < x < +\infty\right)$;

3) $y = \frac{\log_2 x}{\log_2 x - 1}$, область существования — интервалы $(0 < x < 2)$ и $(2 < x < +\infty)$;

4) $y = 10^{\frac{\lg x}{\lg 5}}$, область существования — $(0 < x < +\infty)$;

5) $y = \arcsin \frac{\lg x}{\lg 3}$, $\left(\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 3\right)$;

6) $y = \frac{1}{2} \arccos x$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Основные сведения из теории

Определение. *Функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, отличное от нуля, что для всех значений x, принадлежащих области существования функции, выполняется равенство $f(x) = f(x+T)$.*

Обыкновенно наименьшее из чисел T, обладающее таким свойством, называется периодом функции.

Если T — период функции, то ее периодом будут также и числа kT, где k — любое целое число.

Из определения периодической функции следует, что если точка x принадлежит области определения функции, то ей принадлежат также и точки $x + kT$, где k — любое целое число $(k = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots)$.

Построение графика периодической функции облегчается тем, что можно ограничиться построением его части только для тех точек области определения функции, которые находятся на полу-

отрезках $[x_0, x_0+T)$ *или* $(x_0, x_0+T]$, *и последующим периодическим повторением построенной части графика**.

Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\sec x$ *и* $y=\operatorname{cosec} x$ *имеют период* $T=2\pi$: $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$, $\sec(x+2\pi)=\sec x$, $\operatorname{cosec}(x+2\pi)=\operatorname{cosec} x$.

Кроме числа 2π *периодом этих функций являются также и числа вида* $2\pi k$, *где* k — *любое целое число. Число* 2π — *наименьший период этих функций.*

Функции же $y=\operatorname{tg} x$ *и* $y=\operatorname{ctg} x$ *имеют период* $T=\pi$.

Число π *являеся наименьшим периодом этих функций. Вообще же периодом этих функций являются числа вида* πk, *где* k — *любое целое число.*

Задача 9,8. Доказать, что функция $y=\sin(\omega x+\varphi)$, где ω и φ — действительные числа и $\omega\neq 0$, имеет наименьший период $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Решение. Прибавим к аргументу x данной функции число $T=\frac{2\pi}{\omega}$ $\left(\text{здесь следует уяснить, что } \frac{2\pi}{\omega} \text{ прибавляется не к } \omega x\text{, а к } x\right)$ и покажем, что функция от этого своей величины не изменит. Этим мы и докажем, что число $\frac{2\pi}{\omega}$ является периодом этой функции:

$$\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right]=\sin(\omega x+2\pi+\varphi)=$$
$$=\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi]=\sin(\omega x+\varphi).$$

Таким образом, требуемое доказано.

Следует запомнить, что функция $\sin\omega x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{\omega}$ $(\omega\neq 0)$. Примеры:

1) функция $y=\sin\frac{x}{3}$ имеет период $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$;

2) функция $y=\sin 2x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$;

3) функция $y=\sin 4x$ имеет период $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

Задача 9,9 (для самостоятельного решения). Доказать, что если функция $f(x)$ имеет наименьший период, равный T, то функция $f(ax)$, где a — любое действительное, не равное нулю число, имеет наименьший период $T_1=\frac{T}{a}$ (предполагается, что точки x и ax принадлежат области определения функции).

Указание. Использовать определение периодической функции.

---

* Здесь x_0 — произвольная точка области определения функции, а T — период функции.

Задача 9,10 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $y = \cos^2 x$ имеет период $T = \pi$.

Задача 9,11. Показать, что если функции u и v — периодические функции x с одним и тем же периодом T, то и $u + v$, uv и $\frac{u}{v}$ периодические функции с тем же периодом.

Указание. Удобно, например, ввести обозначение

$$\varphi(x) = u(x) \pm v(x); \quad \varphi(x + T) = u(v + T) \pm v(x + T)$$

и использовать свойство периодичности данных функций: $u(x + T) = u(x)$; $v(x + T) = v(x)$.

ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Если функция рассматривается только при целых и положительных значениях аргумента, то она называется функцией натурального аргумента. Множество ее значений образует числовую последовательность: каждому целому положительному числу соответствует число x_n — член последовательности, имеющий номер n. Это значит, что

$$x_n = f(n).$$

Определение. *Числовой последовательностью называется множество значений функции $f(n)$, определенной на множестве натуральных чисел.*

Член x_n называется общим членом последовательности.

Последовательность с общим членом x_n содержит бесконечное множество чисел и обозначается $\{x_n\}$.

Последовательность считается заданной, если дан способ вычисления любого ее члена по его известному номеру.

Задача 10,1. Зная общий член последовательности $x_n = n$, написать ее первые десять членов.

Решение. Давая n значения 1, 2, 3, ..., 10, получим:

$$x_1 = 1; \; x_2 = 2, \; x_3 = 3; \; x_4 = 4; \; x_5 = 5; \; x_6 = 6;$$
$$x_7 = 7; \quad x_8 = 8; \quad x_9 = 9; \quad x_{10} = 10.$$

Эта последовательность из 10 членов запишется так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Вообще же последовательность с общим членом $x_n = n$ запишется так: 1, 2, 3, ... n, ...

Задача 10,2. Написать первые десять членов последовательности, если ее общий член $x_n = \frac{n}{n+2}$.

Решение. Вычисляя значение дроби $\frac{n}{n+2}$ при значениях n, равных 1, 2, 3, ..., 10, получим:

$$x_1=\frac{1}{3};\ x_2=\frac{2}{4};\ x_3=\frac{3}{5};\ x_4=\frac{4}{6};\ x_5=\frac{5}{7};\ x_6=\frac{6}{8};$$

$$x_7=\frac{7}{9};\ x_8=\frac{8}{10};\ x_9=\frac{9}{11};\ x_{10}=\frac{10}{12}.$$

Вообще же последовательность с общим членом $x=\frac{n}{n+2}$ запишется так:

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \ldots,\ \frac{n}{n+2},\ \ldots$$

Задача 10,3 (для самостоятельного решения). Написать последовательности с общими членами:

1) $x_n=\frac{2n}{3n-2}$; 2) $x_n=n!$ 3) $x_n=\frac{1}{n}$;

4) $x_n=-2^n$; 5) $x_n=\frac{1}{2^n}$; 6) $x_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}$;

7) $x_n=\frac{1}{(3n-1)(3n+1)}$; 8) $x_n=\frac{\frac{\sin n\pi}{2}}{n}$;

9) $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{для } n \text{ нечетных;}\\ \frac{n}{n+1} & \text{для } n \text{ четных;}\end{cases}$ 10) $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$.

Задача 10,4. По данным первым членам последовательности

$$\frac{6}{7},\ \frac{9}{10},\ \frac{14}{15},\ \frac{21}{22},\ \frac{30}{31},\ \ldots$$

написать ее общий член.

Решение. Прежде всего отметим, что заданием нескольких первых членов последовательности не определяется вся последовательность. Однако условимся считать, что как написанные члены последовательности, так и все следующие за ними составлены по одному и тому же закону соответствия между натуральными числами и членами последовательности.

В нашем случае нетрудно усмотреть, что числитель каждой дроби равен квадрату номера плюс пять, т. е. n^2+5, а знаменатель каждой дроби на единицу больше числителя, т. е. равен n^2+6. Итак,

$$x_n=\frac{n^2+5}{n^2+6}.$$

Задача 10,5 (для самостоятельного решения). Написать формулу общего члена последовательности по данным ее первым членам:

1) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \ldots;$

2) $\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{5\cdot 6}, \frac{1}{7\cdot 8}, \frac{1}{9\cdot 10}, \ldots;$

3) $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \ldots;$

4) $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{11}, \frac{15}{14}, \frac{19}{17}, \ldots;$

5) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \ldots;$

6) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots;$

7) $\frac{3}{5}, \frac{12}{17}, \frac{27}{37}, \frac{48}{65}, \frac{75}{101}, \ldots.$

Ответ. 1) $x_n = \frac{1}{3n}$; 2) $x_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$;

3) $x_n = \frac{3n-2}{5n+1}$; 4) $x_n = \frac{4n-1}{3n+2}$; 5) $x_n = \frac{1}{3^n}$;

6) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$; 7) $x_n = \frac{3n^2}{4n^2+1}$.

Монотонные последовательности

Последовательность называется монотонно возрастающей, если при всех n каждый ее член больше предшествующего, т. е. если $x_{n+1} > x_n$, и монотонно убывающей, если каждый ее член меньше предшествующего, т. е. если $x_{n+1} < x_n$.

Примеры монотонных последовательностей:

1) Последовательность натуральных чисел

$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ — монотонно возрастающая.

2) Последовательность чисел $x_n = \frac{1}{n}$, обратных натуральным,

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$ — монотонно убывающая.

Если переменная величина x_n изменяется не монотонно, то ее называют колеблющейся.

Ограниченные последовательности

Последовательность называется ограниченной, если все ее члены находятся в конечном интервале $(-M, +M)$ и $M > 0$, т. е., если $|x_n| < M$ для любого номера n.

Примеры ограниченных последовательностей:

1) Последовательность $\{x_n\}$, где x_n есть n-й десятичный знак числа $\sqrt{5}$, ограничена, так как $|x_n| \leqslant 9$.

2) Последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ограничена, так как $|x_n| < 1$.

Замечание. Ограниченная последовательность не обязательно монотонна, а монотонная последовательность не обязательно ограничена.

Последовательность с общим членом $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, в которой $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, ... ограничена, но не монотонна, а последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, ... n, ... монотонна, но не ограничена.

Задача 10,6 (для самостоятельного решения). Привести примеры:

1) возрастающей ограниченной последовательности;
2) возрастающей неограниченной последовательности:
3) убывающей ограниченной последовательности;
4) убывающей неограниченной последовательности.

Задача 10,7. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{2n+1}$ — монотонно возрастающая.

Решение. Найдем x_{n+1}, заменив n на $(n+1)$ в выражении x_n:

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}, \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Сравним величину дробей $x_n = \frac{n}{2n+1}$ и $x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}$, для чего приведем эти дроби к большему знаменателю:

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+3)(2n+1)}, \quad x_n = \frac{n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Теперь знаменатели дробей равны.

Числитель первой дроби равен $2n^2+3n+1$, а числитель второй дроби $2n^2+3n$ и ясно, что $2n^2+3n+1 > 2n^2+3n$. Мы знаем, что из двух положительных дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой числитель больше. Значит, $x_{n+1} > x_n$ и данная последовательность — возрастающая.

Задача 10,8 (для самостоятельного решения). Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{4n-3}$ — монотонно убывающая, а с общим членом $x_n = \frac{n-1}{n}$ — монотонно возрастающая.

Задача 10,9 (для самостоятельного решения). Доказать, что последовательность $\left\{\frac{3n}{n+1}\right\}$ — ограниченная и монотонно возрастающая, а последовательность $\left\{\frac{2^n+1}{2^n}\right\}$ — ограниченная и монотонно убывающая.

Задача 10,10 (для самостоятельного решения). Показать, что последовательность с общим членом $x_n = 2^n$ — неограниченная и монотонно возрастающая.

ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Предел последовательности.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с определением понятия предела последовательности. Отыскивать предел последовательности на этом занятии не придется.

В задачах предел последовательности будет задан, а учащийся на основании определения предела последовательности должен доказать, что заданное число действительно является пределом этой последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение предела последовательности

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$

$$x_1\ x_2\ x_3,\ \ldots,\ x_n, \ldots \tag{11,1}$$

(пределом переменной x_n или пределом функции $f(n)$), если каково бы ни было наперед заданное положительное число ε, всегда можно найти такое натуральное число N, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ будет выполняться неравенство*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{11,2}$$

Это неравенство равносильно таким двум неравенствам:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Число N зависит, вообще говоря, от выбранного ε.

Если уменьшить число ε, то соответствующий ему номер N увеличится.

Для последовательности (или для переменной x_n) необязательно иметь предел, но если этот предел есть, то он единственный.

Если число a есть предел последовательности $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = f(n)$ или переменной величины x_n, то это символически записывается так:

$$\lim x_n = a. \tag{11,3}$$

Вместо записи (11,3) употребляется также запись

$$x_n \to a,$$

которая читается так: «x_n стремится к a».

---

* Натуральными числами называются все целые положительные числа.

В том случае, когда переменная величина x_n (последовательность (11,1) имеет предел, равный a, говорят, что эта переменная величина или что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

Последовательность, не имеющую предела, называют расходящейся.

Переменная величина x_n может стремиться к своему пределу различными способами: 1) оставаясь меньше своего предела, 2) оставаясь больше своего предела, 3) колеблясь около своего предела и 4) принимая значения, равные своему пределу.

Выбор числа ε произволен, но после того как оно выбрано, никаким изменениям в дальнейшем оно не должно подвергаться

Задача 11, 1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{n+1}$ имеет предел, равный 1.

Решение. Выберем произвольно положительное число ε и покажем, что для него можно определить такое натуральное число N, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство (11,2), в котором надо взять $a = 1$; $x_n = \frac{n}{n+1}$, т. е. неравенство

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| < \varepsilon. \tag{11,4}$$

После приведения в скобках к общему знаменателю получим

$$\left|\frac{n+1-n}{n+1}\right| < \varepsilon, \text{ или } \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon.$$

Но если $\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$, то и $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что $n + 1 > \frac{1^*}{\varepsilon}$, $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Значит, если номер N больше, чем $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, то неравенство (11,4) будет выполняться. Теперь надо решить вопрос о числе N, о котором идет речь в определении. За число N можно принять наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Наибольшее целое число, содержащееся в числе x, обозначается знаком $E(x)$.

На основании этого наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, надо обозначить так: $E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$.

Итак, можно принять

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \tag{11,5}$$

* Если $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(предполагается, что $E\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)>0$, иначе N не будет натуральным и его надо брать равным 1).

Заключение: По произвольно заданному положительному числу ε мы нашли такое натуральное число N, что для всех номеров $n>N$ неравенство (11,4) действительно выполняется, а этим и доказано, что 1 является пределом последовательности с общим членом

$$x_n=\frac{n}{n+1}.$$

Теперь приведенные вычисления проиллюстрируем числовым примером.

Пусть, например, $\varepsilon=\frac{1}{100}$. Тогда при $\varepsilon=\frac{1}{100}$ получаем из (11,5)

$$N=E\left(\frac{1}{\frac{1}{100}}-1\right)=E(100-1)=99;\ N=99.$$

Таким образом, для членов последовательности с номером бо̀льшим, чем 99, выполняется неравенство

$$|1-x_n|<\frac{1}{100}, \tag{11,6}$$

Пусть $n=97$; тогда, так как $x_n=\frac{n}{n+1}$, $x_{97}=\frac{97}{98}$,

$$\left|1-\frac{97}{98}\right|=\frac{1}{98},\ \text{а}\ \frac{1}{98}>\frac{1}{100};$$

если $n=98$, то

$$x_{98}=\frac{99}{99},\ \text{и}\ \left|1-\frac{98}{99}\right|=\frac{1}{99};\ \frac{1}{99}>\frac{1}{100}.$$

Из этих расчетов видно, что когда номер n члена последовательности меньше 99 ($n=97$, $n=98$), неравенство (11,6) не выполняется: вместо того чтобы $|1-x_n|$ была меньше $\frac{1}{100}$, мы получили, что $|1-x_n|>\frac{1}{100}$. Если взять $n>99$, т. е., например, $n=100$, тогда $x_n=\frac{100}{101}$ и $|1-x_n|=\left|1-\frac{100}{101}\right|=\left|\frac{101-100}{101}\right|=\frac{1}{101}$, а $\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$. Неравенство (11,6) будет выполняться для всех номеров n, которые больше, чем 99. Так как $\varepsilon=\frac{1}{100}$, а $n>99$, то все члены последовательности, начиная с сотого, будут лежать на интервале $\left(1-\frac{1}{100},\ 1+\frac{1}{100}\right)$, т. е. на интервале (0,99; 1,01) (теперь возьмите для ε значение, меньшее $\frac{1}{100}$, например, $\varepsilon=\frac{1}{1000}$. Найдите N и убедитесь, что оно увеличится).

Полученный результат можно записать так: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Иначе можно сказать, что последовательность $\{x_n\} = \frac{n}{n+1}$ сходится к 1.

Мы употребили запись $n \to \infty$, которую следует понимать так: переменная величина n становится все большей и большей и не существует предела для ее возрастания.

Какое бы большое число мы не задали, n в процессе своего возрастания его превзойдет. Для того чтобы коротко описать этот характер изменения n, принято говорить «n стремится к бесконечности» и записывать это так: $n \to \infty$. Символ ∞ произносится «бесконечность» и применяется для сокращенной записи слова «бесконечность».

Символ ∞ ни в коем случае не может рассматриваться как число, а потому бессмысленной является запись $n = \infty$, так как n может равняться числу и не может быть равно символу, введенному только для сокращенной записи и сокращенного произношения фразы, которой заранее был придан определенный, указанный выше, смысл.

Очевидно, что последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ может быть записана так:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{90}{100}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

и легко усмотреть, что она стремится к своему пределу 1, возрастая и оставаясь меньше 1.

Задача 11, 2. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{4n}{2n+1}$ имеет предел, равный 2.

Решение. Повторим подробно все рассуждения, приведенные в предыдущей задаче. Выберем произвольно положительное число ε и покажем, что для него можно подобрать такое число N, что для всех значений номера n, больших этого числа N, будет выполняться неравенство (11,2), в котором надо взять $a = 2$, $x_n = \frac{4n}{2n+1}$, т. е. будет выполняться неравенство

$$\left|2 - \frac{4n}{2n+1}\right| < \varepsilon. \tag{11,7}$$

Из этого неравенства после приведения в скобках к общему знаменателю получаем

$$\left|2 - \frac{4n}{2n+1}\right| = \left|\frac{4n+2-4n}{2n+1}\right| = \left|\frac{2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1},$$

и неравенство (11,7) запишется так: $\frac{2}{2n+1} < \varepsilon$.

Отсюда следует, что $\frac{2n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$ (см. сноску на стр. 65) или $n + \frac{1}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$, $n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$.

Таким образом, если номер n больше, чем $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, то неравенство (11,7) будет выполняться.

За N примем наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, т. е.

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right). \tag{11,8}$$

Таким образом, мы сумели по произвольно заданному положительному ε определить такое натуральное N, что неравенство (11,7) выполняется для всех номеров $n > N$. Этим и доказано, что 2 есть предел последовательности с общим членом $x_n = \frac{4n}{2n+1}$ (предполагается, что $E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) > 0$, так как иначе N не будет натуральным числом. Если $E\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right)$ окажется отрицательным, то следует взять $N = 1$).

Теперь, чтобы лучше уяснить приведенные рассуждения, приведем числовой пример: пусть выбрано $\varepsilon = \frac{1}{50}$. Тогда из (11,8) следует, что

$$N = E\left(\frac{1}{\frac{1}{50}} - \frac{1}{2}\right) = E\left(50 - \frac{1}{2}\right) = 49,$$

так как наибольшее целое число содержащееся в $49\frac{1}{2}$, есть 49.

Значит, для всех номеров n, больших, чем 49 при $\varepsilon = \frac{1}{50}$, неравенство (11,7) будет выполняться. Начиная с пятидесятого члена на все члены последовательности будут лежать в интервале $\left(2 - \frac{1}{50},\ 2 + \frac{1}{50}\right)$, т. е. в интервале (1,98; 2,0 2). Убедимся сначала, что при $n < 49$ неравенство (11,7) не выполняется. Пусть, например, $n = 47$. Тогда, так как $x_n = \frac{4n}{2n+1}$, получим, что $x_{47} = \frac{4 \cdot 47}{2 \cdot 47 + 1} = \frac{188}{45}$ и левая часть неравенства (11,7) $\left|2 - \frac{188}{95}\right| = \frac{2}{95}$. На основании (11,7) $\frac{2}{45}$ должно быть меньше, чем $\varepsilon = \frac{1}{50}$, а фактически $\frac{2}{95}$ не меньше $\frac{1}{50}$, а больше $\frac{1}{50}$ и, значит, неравенство (11,7) не выполняется.

При $n = 48$ имеем $x_n = \frac{4 \cdot 48}{2 \cdot 48 + 1} = \frac{192}{97}$; $\left|2 - \frac{192}{97}\right| = \frac{2}{97}$ и опять неравенство (11,7) не выполняется, т. к. и $\frac{2}{97} > \frac{1}{50}$, а не меньше $\frac{1}{50}$.

Если же взять, например, $n = 50$, то $x_n = \frac{200}{101}$ и $\left|2 - \frac{200}{101}\right| = \frac{2}{101}$, а $\frac{2}{101} < \frac{1}{50}$, и неравенство (11,7) выполнено. Так будет и для всех номеров n, которые больше, чем 49.

Теперь примите, за ε число, меньшее, чем $\frac{1}{50}$, например $\frac{1}{200}$, и убедитесь, что N увеличится.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{2n+1} = 2$ (можно сказать иначе: последовательность $\left\{\frac{4n}{2n+1}\right\}$ сходится к 2).

Замечание 1. В решенных двух задачах мы находили наименьший номер N, фигурирующий в определении предела последовательности, такой, что начиная с него, неравенство (11,2) выполняется. Однако учащийся должен уяснить, что 1) если это неравенство выполняется, начиная с номера N, то оно будет выполняться и подавно при всех номерах N_1, больших, чем N; 2) заданием числа ε номер N определяется неоднозначно и 3) для доказательства того, что $\lim x_n = a$, вовсе нет необходимости среди всех номеров N искать наименьший. Так, в задаче 11,1, установив, что неравенство (11,4) выполняется для всех $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, мы могли дальше не вести никаких рассуждений.

Замечание 2. Выше было указано, что если последовательность имеет предел, то этот предел — единственный: двух различных пределов последовательность иметь не может.

В последней задаче мы доказали, что пределом последовательности $\left\{\frac{4n}{2n+1}\right\}$ является 2.

Покажем, что, например, число 3 не может быть пределом этой последовательности.

Рассмотрим абсолютную величину разности

$$\left|3 - \frac{4n}{2n+1}\right| = \left|\frac{6n+3-4n}{2n+1}\right| = \left|\frac{2n+3}{2n+1}\right| = \frac{2n+3}{2n+1}$$

и решим относительно n неравенство $\frac{2n+3}{2n+1} < \varepsilon$.

При любом целом и положительном n (а номер n может быть только числом целым и положительным) число $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$, а поэтому оно не может быть меньше **произвольно** заданного положительного числа ε. Этим мы показали, что число 3 не может служить пределом последовательности $\left\{\frac{4n}{2n+1}\right\}$.

Теперь самостоятельно решите простую задачу.

Задача 11, 3 (для самостоятельного решения). Доказать, что переменная $x_n = \frac{1}{n}$ имеет предел, равный нулю (следует запомнить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$).

Произносится эта запись так: «предел $\frac{1}{n}$, когда n стремится к бесконечности, равен нулю». Вместо того чтобы писать $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, можно употребить запись $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, которую следует читать так: «$\frac{1}{n}$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности». Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ и } \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Сокращенно это можно записать так:

$$1+\frac{1}{n} \to 1 \text{ при } n \to \infty, \quad 1-\frac{1}{n} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Задача 11, 4. Доказать, что последовательность $q, q^2, q^3, \ldots, q^n \ldots$ сходится к нулю, если абсолютная величина q меньше 1, т. е. если $|q| < 1$.

Решение. Чтобы доказать требуемое, возьмем произвольное положительное число ε и убедимся, что можно будет определить такое N, что для всех номеров n, больших N, будет выполняться неравенство

$$|0 - q^n| < \varepsilon \qquad (11,9)$$

(в неравенстве (11,2) надо взять $a = 0$, $x_n = q^n$).

Учитывая, что по условию $|q| < 1$ можно заключить, что $\frac{1}{|q|} > 1$, т. е. можно полагать, что $\frac{1}{|q|}$ равно $1+\alpha$, где α — число положительное.

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n;$$

$$1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n \geqslant 1 + n\alpha,$$

а потому $\frac{1}{|q|^n} \geqslant 1 + n\alpha$, или $|q|^n \leqslant \frac{1}{1+n\alpha}$.

Выберем n так, чтобы знаменатель дроби $1+n\alpha$ стал больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда окажется, что и подавно $|q|^n < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}$, т. е. $|q^n| < \varepsilon$, и неравенство (11,9) будет выполняться, так как из него следует, что $|q|^n < \varepsilon$. Но если $1 + n\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$, то $n > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}$. Значит можно в качестве N выбрать наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}$, т. е. взять $N = E\left(\frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\alpha}\right)$, и при этом неравенство (11,9) будет выполняться при всех номерах $n > N$. Таким образом доказано, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Надо запомнить, что если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ ($\lim\limits_{n \to \infty} q^n$, когда $|q| \geqslant 1$ вычислен в задаче 13, 1).

Если, например, $q = \frac{1}{3} < 1$, то последовательность запишется так: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots \frac{1}{3^n} \ldots$, и переменная $\frac{1}{3^n} \to 0$, монотонно убывая (здесь каждое следующее значение переменной меньше предыдущего).

Если $q = -\frac{1}{2}$, то последовательность запишется так:

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots,$$

И эта последовательность, как доказано, сходится к нулю ($|q| < 1$). Однако здесь уже переменная величина $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ стремится к своему пределу — нулю, принимая значения, то меньшие нуля, то бо́льшие его. Можно сказать, что переменная в данном случае колеблется около нуля.

Запишем эту последовательность в виде

$$-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, 0, \ldots$$

Ясно, что и эта последовательность сходится к нулю, но теперь она содержит бесконечное множество членов, равных нулю. Это тот случай, когда переменная, стремясь к пределу, становится равной ему, причем это имеет место бесконечное множество раз.

Задача 11, 5. Доказать, что последовательность $3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots, 3^n \ldots$ не имеет предела.

Решение. Мы докажем требуемое, если установим, что общий член этой последовательности $x_n = 3^n$ превзойдет любое наперед заданное число.

Пусть A такое число. Возьмем $n > A - 1$. Тогда $n + 1 > A$; $3^n = (1 + 2)^n \geqslant 1 + 2n$, и подавно $3^n > n + 1$, или $3^n > A$. Тем самым показано, что 3^n может превзойти любое число A. Если бы существовал предел переменной $x_n = 3^n$, и был бы равен a, то для любого $\varepsilon > 0$ можно было бы подобрать такое N, что при номерах $n > N$ выполнялись бы неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, т. е.

$a-\varepsilon < 3^n < a+\varepsilon$, а это противоречит доказанному, так как 3^n при $n > A-1$ превзойдет любое число A, а тем самым и число $a+\varepsilon$, меньше которого оно должно оставаться. Это противоречие и доказывает, что последовательность $\{3^n\}$ предела не имеет. Этот пример иллюстрирует утверждение: **не всякая последовательность имеет предел.**

Задача 11, 6. Доказать, пользуясь определением предела последовательности, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}$ имеет предел $a=1$.

Решение. Подставим значения a и x_n в неравенство (11,2) и получим

$$\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right| < \varepsilon. \tag{11,10}$$

$$\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right| = \left|\frac{\sqrt{n^2+1}-1-\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right| =$$

$$= \left|\frac{-2}{\sqrt{n^2+1}-1}\right| = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}-1}.$$

Вместо неравенства (11,10) теперь имеем неравенство $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}-1} < \varepsilon$. Решим это неравенство относительно n:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{2} > \frac{1}{\varepsilon},\quad \sqrt{n^2+1}-1 > \frac{2}{\varepsilon},\quad \sqrt{n^2+1} > \frac{2}{\varepsilon}+1;$$

$$n^2+1 > \left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2;\quad n > \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2-1}.$$

Таким образом, если n удовлетворяет последнему неравенству, то неравенство (11,10) будет выполняться при любом $\varepsilon > 0$. Тем самым мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1} = 1$, а за N можно принять $N = E\left(\sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)^2-1}\right)$.

Определим из этого равенства значение N при $\varepsilon = 0{,}01$ и $\varepsilon = 0{,}001$. Если $\varepsilon = 0{,}01$, то $N = E\left(\sqrt{\left(\frac{2}{0{,}01}+1\right)^2-1}\right) = E\left(\sqrt{201^2-1}\right) = 200$.

Значит, при всех номерах $n > 200$ будет выполняться неравенство $\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right| < 0{,}01$, т. е. при $n > 200$ все числа заданной последовательности будут лежать на интервале $(0{,}99;\ 1{,}01)$. Если $\varepsilon = 0{,}001$, то $N = E\left(\sqrt{2001^2-1}\right) = E\left(\sqrt{4\,04\,000}\right) = 2000$ и для всех членов последовательности с номерами $n > 2000$ будет выполняться неравенство $\left|1-\frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right| < 0{,}001$, а для номеров $n > 2000$ все члены последовательности будут лежать на интервале $(0{,}999;\ 1{,}001)$.

Задача 11, 7 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{2n+1}=\frac{5}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-2}=\frac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2-1}=0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1}=1$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n-1}{2n^2+n-1}=\frac{1}{2}$.

Задача 11, 8 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}=\frac{1}{3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}=0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=0$.

Задача 11, 9 (для самостоятельного решения). Составить последовательности: 1) возрастающую и сходящуюся к нулю; 2) убывающую и сходящуюся к 3; 3) колеблющуюся и сходящуюся к 1; 4) колеблющуюся и расходящуюся; 5) убывающую и расходящуюся.

ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Дальнейшие упражнения в определении предела последовательности.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

На предыдущем занятии мы задавали число и проверяли, является ли оно пределом переменной величины x_n (последовательности $\{x_n\}$).

Теперь мы займемся отысканием числа, являющегося пределом переменной величины (последовательности).

Вычисление предела переменной величины основывается на определениях и теоремах, помещенных ниже.

Бесконечно малые величины

12, 1. *Если переменная величина x_n имеет своим пределом нуль $\lim x_n = 0$, то она называется бесконечно малой. Это же определение можно высказать и в другой формулировке:*

Переменная величина x_n называется бесконечно малой, если для всякого наперед заданного положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что $|x_n| < \varepsilon$ для всех номеров n, которые больше N.

Ни одно число, кроме нуля, не может быть отнесено к бесконечно малым величинам.

12,2. *Алгебраическая сумма нескольких бесконечно малых величин есть также величина бесконечно малая. (Алгебраической суммой называется такая сумма, члены которой присоединяются друг к другу не только при помощи знака плюс, но и при помощи знака минус).*

12, 3. *Разность двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.*

12, 4. *Произведение ограниченной переменной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.*

Отсюда следует:

А. Произведение постоянной величины на бесконечно малую есть также бесконечно малая величина.

В. Произведение переменной величины, стремящейся к пределу, на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

С. Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

12, 5. Отношение двух бесконечно малых величин не обязательно есть величина бесконечно малая.

Отношение двух бесконечно малых величин может быть величиной конечной, бесконечно малой и даже бесконечно большой величиной.

Об отношении двух бесконечно малых величин иногда говорят, что оно представляет собой «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$.

Вычисление предела отношения двух бесконечно малых величин часто называется также раскрытием «неопределенности» вида $\frac{0}{0}$.

Бесконечно большие величины

12, 6. *Переменная величина x_n называется бесконечно большой, если для любого наперед заданного числа $M > 0$ можно указать такое натуральное число N, что для всех номеров n, больших N, выполняется неравенство $|x_n| > M$. Короче: переменная величина x_n называется бесконечно большой, если, начиная с некоторого номера, она становится и остается при всех последующих номерах по абсолютной величине больше любого наперед заданного положительного числа M. Если x_n есть величина бесконечно большая, то это записывается так:* $\lim x_n = \infty$, *или* $x_n \to \infty$.

Следует обратить внимание, что из определения бесконечно большой величины следует, что знак x_n роли не играет, а требуется лишь, чтобы абсолютная величина x_n, т. е. $|x_n|$, могла быть сделана больше любого наперед заданного положительного числа.

Бесконечно большая величина x_n называется ***положительной бесконечно большой*** *величиной, если, начиная с некоторого номера, она становится положительной. В этом случае уже нет надобности писать $|x_n| > M$, знак абсолютной величины (прямые скобки) можно опустить и писать $x_n > M$. В случае, когда x_n — положительная бесконечно большая величина, пишут $\lim x_n = +\infty$, или $x_n \to +\infty$, и произносят: «x_n стремится к плюс бесконечности».*

12, 7. *Переменная величина x_n называется* ***отрицательной бесконечно большой*** *величиной, если для любого числа $M < 0$ можно указать такое натуральное число N, что для всех номеров n больших N, выполняется неравенство $x_n < M$. В случае, когда x_n — отрицательная бесконечно большая величина, пишут $\lim x_n = -\infty$, или $x_n \to -\infty$, и произносят «x_n стремится к минус бесконечности»*

12, 8. *Надо помнить, что символы ∞, $+\infty$, $-\infty$ отнюдь не являются числами, а вводятся только для упрощения записи и для сокращенного словесного выражения того факта, что переменная величина является бесконечно большой, положительной бесконечно большой и отрицательной бесконечно большой. Следует твердо запомнить, что никаких арифметических действий над этими символами производить нельзя.*

12, 9. *Бесконечная большая величина предела не имеет.*

12, 10. *Переменная, принимающая значения, обратные по величине соответственным значениям бесконечно малой величины, есть величина бесконечно большая.*

12, 11. *Переменная, принимающая значения, обратные по величине соответственным значениям бесконечно большой величины, есть величина бесконечно малая* (хотя в некоторых учебниках и применяются условные записи $\frac{1}{\infty} = 0$ и $\frac{1}{0} = \infty$, но их следует **всячески избегать**, так как 1) делить на нуль запрещено, 2) делить же на ∞ тоже нельзя, ибо ∞ не число, а символ, делить же на символы бессмысленно).

12, 12. *Если A постоянная величина,* ***не равная нулю, то*** *произведение A на бесконечно большую величину есть величина бесконечно большая.*

12, 13. *Произведение двух бесконечно больших величин есть величина бесконечно большая.*

12, 14. *Отношение бесконечно большой величины к бесконечно малой есть величина бесконечно большая.*

12, 15. *Сумма двух бесконечно больших величин одинакового знака есть бесконечно большая величина того же знака.*

12, 16. Отношение двух бесконечно больших величин не обязательно есть бесконечно большая величина.

Это отношение может быть 1) величиной бесконечно большой, 2) величиной конечной и даже 3) величиной бесконечно малой (см. задачи 12,1—12,9). Об отношении двух бесконечно больших величин говорят, что оно представляет собой «неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$, а отыскание этого отношения называется «раскрытием неопределенности».

Действия над сходящимися последовательностями

12, 17. *Последовательности складываются, вычитаются или умножаются путем сложения, вычитания или умножения их соответствующих членов. Если есть две последовательности:*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots, \qquad \{a_n\}$$

и

$$b_0, b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots, \qquad \{b_n\}$$

то получим их сумму в виде

$$(a_1+b_1), (a_2+b_2), (a_3+b_3), \ldots, (a_n+b_n), \ldots, \quad \{a_n\}+\{b_n\}$$

разность в виде

$$(a_1-b_1), (a_2-b_2), (a_3-b_3), \ldots, (a_n-b_n) \ldots, \quad \{a_n\}-\{b_n\}$$

а их произведение в виде

$$(a_1 b_1), (a_2 b_2), (a_2 b_3), \ldots, (a_n b_n), \ldots \qquad \{a_n\}\cdot\{b_n\}$$

Частное от деления двух последовательностей получим как частное от деления членов последовательности $\{a_n\}$ на соответствующие члены последовательности $\{b_n\}$ при условии, что в последовательности $\{b_n\}$ нет членов, равных нулю.

Предел суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей

12, 18. *Если две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы, равные соответственно a и b, то:*

А) Последовательность $\{x_n \pm y_n\}$ имеет предел, равный $a \pm b$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = a \pm b.$$

Это свойство распространяется также на случай любого фиксированного числа слагаемых.

В) Последовательность $\{x_n y_n\}$ имеет предел, равный ab, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab.$$

Это свойство распространяется также на случай любого фиксированного числа сомножителей.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = k\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *при любом постоянном* k.

C) *Последовательность* $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ *имеет предел, равный* $\dfrac{a}{b}$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{a}{b}$$

при условии, что все y_n *не равны нулю и* $\lim y_n = b \neq 0$.

Теоремы о последовательностях, расходящихся к $\pm\infty$

Если для последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *то говорят, что последовательность* $\{x_n\}$ *расходится к плюс бесконечности.*

Если для последовательности $\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *то говорят, что последовательность* $\{x_n\}$ *расходится к минус бесконечности. Символы* $+\infty$ *и* $-\infty$ *имеют смысл, о котором было сказано в п. 12,8.*

12, 19. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена, а последовательность* $\{y_n\}$ *расходится к* $+\infty$: $\lim y_n = +\infty$, *то*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = 0$ *при условии, что* $y_n \neq 0$ *для всех* n.

12, 20. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *расходятся к плюс бесконечности:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty, \text{ то}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty;\ \lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = +\infty.$$

12, 21. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *то*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = +\infty$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = -\infty$.

12, 22. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a \neq 0$, *а* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *и* a — *действительное число, а не один из символов* $+\infty$ *или* $-\infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 0;\\ -\infty, & \text{если } a < 0.\end{cases}$$

12, 23. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\,(a \neq 0)$, *а* $\lim y_n = 0$ *и* $y_n > 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\begin{cases} +\infty, & \text{если } a > 0;\\ -\infty, & \text{если } a < 0.\end{cases}$$

Теоремы о предельном переходе

12, 24. *Если переменная x_n (последовательность $\{x_n\}$) имеет конечный предел, то для любого действительного α имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^\alpha) = (\lim_{n\to\infty} x_n)^\alpha \tag{12, 1}$$

в предположении, что степени $x_n^\alpha (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)^n$ имеют смысл. Короче: можно переходить к пределу в основании степени с любым действительным показателем.

12, 25. *Если переменная x_n имеет конечный предел, то имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} x_n}, \tag{12, 2}$$

т. е. можно переходить к пределу под знаком корня (в случае четного m предполагается, что $x_n \geqslant 0$ и корень берется арифметический).

12, 26. *Если $a > 0$, а x_n принимает только положительные значения и имеет предел, не равный нулю, то имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a (\lim_{n\to\infty} x_n). \tag{12, 3}$$

Короче: можно переходить к пределу под знаком логарифма.

12, 27. *Если $a > 0$, а переменная x_n имеет конечный предел, то имеет место формула*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}. \tag{12, 4}$$

Короче: при фиксированном основании можно переходить к пределу в показателе степени.

Теперь приступим к решению типовых задач на отыскание предела переменной x_n (предела последовательности $\{x_n\}$).

Задача 12, 1. Найти предел переменной

$$x_n = \frac{1+3n+2n^2}{1-n^2}. \tag{12, 5}$$

Последовательность $\{n^2\}$ расходится к $+\infty$, а значит и последовательность $\{2n^2\}$ расходится к $+\infty$, (п. 12,22). На том же основании последовательность $\{3n\}$ расходится к $+\infty$, а потому последовательность $\{3n+2n^2\}$ расходится к $+\infty$ и на основании п. 12,19 последовательность $(1+3n+2n^2)$ также расходится к $+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3n+2n^2) = +\infty$. Можно было бы рассуждать и иначе: при $n\to\infty$ величина n — бесконечно большая, ее квадрат, как произведение двух бесконечно больших величин, есть величина бесконечно большая (п. 12,13). На основании п. 12,12 произведение $2n^2$ есть бесконечно большая величина, как произведение постоянной, не равной нулю, на бесконечную большую величину.

На том же основании величина $3n$ — бесконечно большая. Так как $3n$ и $2n^2$ — бесконечно большие одного и того же знака, то и сумма их $(3n + 2n^2)$ есть величина бесконечно большая того же знака, потому и $1 + (3n + 2n^2)$ — бесконечно большая величина, как сумма постоянной величины 1 с бесконечно большой и снова $\lim\limits_{n \to \infty}(1 + 3n + 2n^2) = +\infty$. Что касается знаменателя $1 - n^2$, при $n \to \infty$ последовательность $\{n^2\}$ расходится к $+\infty$, и на основании п. 12,19, *б* получаем, что последовательность $\{1 - n^2\}$ расходится к $-\infty$ и знаменатель дроби (12,5) — тоже бесконечно большая величина.

Таким образом, дробь (11,5) есть отношение двух бесконечно больших величин, о котором без исследования ничего определенного сказать нельзя. Здесь также нельзя применить теорему о пределе частного, так как в условии этой теоремы предполагается, что пределы числителя и знаменателя существуют, а в нашем случае ни числитель, ни знаменатель дроби предела не имеют (см. п. 12,9). Данную переменную (12,5) преобразуем, чтобы к ней можно было применить теоремы о пределах. Обыкновенно в этом случае поступают так: числитель и знаменатель дроби делят на наивысшую степень n, встречающуюся в членах дроби *. Тогда

$$\frac{1 + 3n + 2n^2}{1 - n^2} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} + 2}{\frac{1}{n^2} - 1}. \qquad (12,6)$$

Отыскивая теперь предел последней дроби, мы сможем применить теорему о пределе частного, так как теперь числитель и знаменатель дроби имеют пределы: величины $\frac{1}{n^2}$ и $\frac{1}{n}$ есть величины бесконечно малые, как величины обратные бесконечно большим n^2 и n, а потому

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Величина $\frac{3}{n}$ есть тоже бесконечно малая, как произведение постоянной величины 3 на бесконечно малую $\frac{1}{n}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3}{n} = 0$ (п. 12 4А), и тогда существует предел числителя:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} + 2\right) = \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n^2} + \lim \frac{3}{n} + \lim_{n \to \infty} 2 = 0 + 0 + 2 = 2$$

(предел постоянной величины 2 равен ей самой).

* Деление на n допустимо, так как предполагается, что $n \neq 0$.

Предел знаменателя $\frac{1}{n^2}-1$ дроби (12,6) также существует и равен -1, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim_{n\to\infty}1=0-1=-1;\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{-1}=-2.$$

После этих подробных рассуждений укажем, как следует расположить записи:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3n+2n^2}{1-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2}{\frac{1}{n^2}-1}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+2\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}-1\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}2}=$$

(Здесь применена теорема о пределе дроби. Это можно было сделать только после того, как мы убедились, что существуют пределы числителя и знаменателя).

$$=\frac{0+0+2}{0-1}=\frac{2}{-1}=-2.$$

Такие подробные записи в последующем, когда выработается определенный навык, можно сократить.

Задача 12,2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2+2n-3}{5n^2-4n+4}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2+2n-3}{5n^2-4n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{5-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}=$

(числитель и знаменатель данной дроби разделен на n^2)

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}7+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}=\frac{7+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{5-4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{7}{5}$$

(применена теорема о пределе дроби).

Задача 12, 3 (для самостоятельного решения). Найти

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2-n+1}{5n^3-4n+17}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-4n+2}{n^3-4n+1}$.

Ответ. 1) $\frac{3}{5}$; 2) 0.

Задача 12, 4 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(2n+4)(n-1)}{n^2+n+1}.$$

Ответ. Последовательность расходится к $+\infty$. Можно употребить символическую запись и написать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(2n+4)(n-1)}{n^2+n+1}=+\infty.$$

Указание. В числителе перемножить двучлены, разделить числитель и знаменатель на n^3 и воспользоваться п. 12,23.

Задача 12, 5 (для самостоятельного решения). Найти предел переменной $x_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{3n^3+n+1}$.

Указание. Известно, что сумма квадратов чисел натурального ряда $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ответ. $\frac{1}{9}$.

Задача 12, 6 (для самостоятельного решения). Найти

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+7}{3-4n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2-5n+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2-1}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+5}{n^2+n-1}$.

Ответ. 1) $-\frac{5}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) ∞; 4) 0.

Задача 12, 7. Доказать, что если $n\to\infty$, то 1) $n^k\to+\infty$, когда $k>0$; 2) $n^k\to0$, когда $k<0$; 3) $n^k\to1$, когда $k=0$.

Решение. 1) Пусть $k>0$, а M — любое заданное положительное число.

Чтобы доказать, что $n^k\to+\infty$, мы должны показать, что можно найти такое натуральное число N, что $n^k>M$ при $n>N$.

Так как n^k должно быть бо́льшим, чем M, то это равносильно тому, что должно быть $n>\sqrt[k]{M}$, и за N можно принять $N>\sqrt[k]{M}$; тем самым доказано, что $n^k\to+\infty$ при $k>0$. Например, если $k=3$, а $M=1000$, то должно выполняться неравенство $n^3>1000$ для всех $n>N$, причем следует взять $N>\sqrt[3]{1000}$, т. е. принять $N>10$. Значит, начиная с $n=11$, неравенство $n^3>1000$ будет выполняться.

Если взять $M=1\,000\,000$, то должно выполняться неравенство $n^3>1\,000\,000$, для всех $n>N$, и следует взять $N>\sqrt[3]{1\,000\,000}=100$ ($N>100$) и при $n>100$, т. е. начиная с $n=101$ неравенство $n^3>1\,000\,000$ будет выполняться.

Доказательство пунктов 2) и 3) предоставляется читателю. При доказательстве п. 2) и 3) выгодно взять $k=-l\,(l>0)$, и тогда $n^k=\frac{1}{n^l}$; при доказательстве п. 3) учесть, что если $k=0$, то всегда $n^k=1$ при любом n.

Результат проведенных вычислений можно записать и так:

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} +\infty, & \text{если } k>0, \\ 0, & \text{если } k<0, \\ 1, & \text{если } k=0. \end{cases} \qquad (12, 7)$$

В задачах 12, 1—12,6 мы рассматривали пределы отношения двух целых рациональных функций от n в частных случаях. После решения предыдущей задачи мы можем рассмотреть вопрос об отношении двух целых рациональных функций в общем виде.

Задача 12, 8. Найти предел при $n\to\infty$

$$x_n=\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\ldots+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+b_2n^{q-2}+\ldots+b_q}, \qquad (12, 8)$$

причем $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.

Решение. Перепишем (12, 8) в виде

$$x_n=\frac{n^p\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_p}{n^p}\right)}{n^q\left(b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_q}{n_q}\right)};$$

$$x_n=n^{p-q}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_p}{n^h}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n_2}+\ldots+\frac{b_q}{n^q}}.$$

Теперь предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} n^{p-q}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots+\frac{a_p}{n^p}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\frac{b_2}{n^2}+\ldots+\frac{b_q}{n^q}}.$$

Предел второго сомножителя равен $\frac{a_0}{b_0}$, так как в числителе и знаменателе предел каждого слагаемого, кроме первых (a_0 и b_0), равен нулю. Что касается первого сомножителя, то его предел зависит от знака разности $p-q$:

1) Если $p-q<0$, т. е. $p>q$, то на основании (12, 7) $\lim n^{p-q}=+\infty$, и тогда, в соответствии с п. 12, 22, заключаем, что $\lim x_n=+\infty$.

2) Если $p-q<0$, т. е. $p<q$, то из (12, 7) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q}=0$; тогда искомый предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

3) Если же $p-q=0$, т. е. $p=q$, то $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-q}=1$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a_0}{b_0}$. Соединяя полученные результаты, приходим к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^p+a_1n^{p-1}+a_2n^{p-2}+\ldots+a_p}{b_0n^q+b_1n^{q-1}+b_2n^{q-2}+\ldots+b_q}=\begin{cases}+\infty, & \text{если } p>q;\\ 0, & \text{если } p<q;\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } p=q.\end{cases} \qquad (12,9)$$

Таким образом, при $n\to\infty$ предел отношения двух целых рациональных функций от n равен 1) отношению коэффициентов при высших степенях n, если степени этих функций между собою равны; 2) нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя и 3) $+\infty$, если степень числителя больше степени знаменателя.

Заключения, полученные при решении задач 12, 1—12, 6, совпадают с только что сделанным.

Задача 12, 9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2$.

Решение. Воспользуемся указанием п. 12, 24, заметив, что основание степени имеет предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+12}\right)^2=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{5-\frac{7}{n}+\frac{12}{n^2}}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}.$$

Задача 12, 10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-4n^2+5n}{4n^3-2n-7}\right)^3.$$

Ответ. $\frac{27}{64}$.

Задача 12, 11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(2-\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{5}{n^2}-1\right)$.

Решение. Применяя теорему о пределе произведения (это мы имеем право сделать, так как каждый сомножитель имеет предел) получаем последовательно:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(2-\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{5}{n^2}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{4}{n}\right)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}-1\right)=$$

$$=1\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{4}{n}\right)\right]^2(-1)=1\cdot4\cdot(-1)=-4,$$

т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=3\cdot 0=0$, ибо если $n\to\infty$, то величина ей обратная $\frac{1}{n}$ — бесконечно малая $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)$.

Задача 12, 12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{6n+2}{3n-4}}$.

Решение. Воспользуемся указанием п. 12,27 о переходе к пределу в показателе степени $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{6n+2}{3n-4}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+2}{3n-4}}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+\frac{2}{n}}{3-\frac{4}{n}}}=$

$$=3^{\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n}\right)}}=3^{\frac{6}{3}}=3^2=9.$$

Задача 12, 13 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}7^{\frac{3n}{6n-5}};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}};\quad 3)\ \lim_{n\to\infty}5^{\frac{n-1}{n^2+2}}.$$

Ответ. 1) $\sqrt{7}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1.

Задача 22, 14. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log_a\frac{3n}{6n+5}\right)$.

Решение. На основании формулы (12, 3), допускающей переход к пределу под знаком логарифма, имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_a\frac{3n}{6n+5}\right)=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{6n+5}\right)=\log_a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3}{6+\frac{5}{n}}\right)=$$

$$=\log_a\frac{3}{6}=\log_a\frac{1}{2}=-\log_a 2.$$

Задача 12, 15 (для самостоятельного решения). Найти:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{3n^2+n-10}.$$

Ответ. $-\lg 3$.

ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение предела последовательности (задачи повышенной трудности).

Задача 13, 1. Найти $\lim q^n$, если 1) $q>1$; 2) $q<-1$, 3) $q=1$; 4) $q=-1$.

Решение. 1) Если $q>1$, то $0<\frac{1}{q}<1$, и тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=0$ (см. задачу 11, 4 — основание степени $\frac{1}{q}$ по абсолютной величине меньше 1).

Значит, $\frac{1}{q^n}$ — бесконечно малая величина, а потому обратная ей величина q^n — бесконечно большая величина; так как при $q > 1$ и n, стремящемся к $+\infty$, переменная величина q^n принимает только положительные значения, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

2) Если же $q < -1$, то переменная величина q^n при $n \to +\infty$ делается попеременно то положительной, то отрицательной, неограниченно возрастая по абсолютной величине, а потому

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty, \text{ если } q < -1.$$

3) Если $q = 1$, то $q^n = 1$, при каждом n, а потому при $q = 1$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

4) Если же $q = -1$, то переменная величина q^n не стремится ни к какому пределу, потому что когда n пробегает значения 1, 2, 3, 4,.., величина $(-1)^n$ делает скачки от -1 к $+1$ и обратно.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{если } q > 1; \\ 0, & \text{если } |q| < 1; \\ 1, & \text{если } q = 1; \\ \text{не существует,} & \text{если } q = -1; \\ \infty & \text{если } q < -1. \end{cases} \qquad (13, 1)$$

Прежде чем решать следующие задачи, укажем на очень важные теоремы, выражающие признаки существования предела переменной величины.

Теорема 13, 1. Если переменная величина x_n монотонно возрастает вместе с n, но остается меньше некоторого числа K, то x_n стремится к пределу, и этот предел не больше K, т. е. меньше или равен K.

Теорема 13, 2. Если переменная величина x_n монотонно убывает с возрастанием n, но остается больше некоторого числа L, то x_n стремится к пределу и этот предел не меньше L, т. е. больше или равен L. Теоремы 13, 1 и 13, 2 можно объединить в одну, которая коротко формулируется так:

Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

Эти теоремы будут использованы в задачах 13, 2—13,4, которые будут решаться по такому общему плану:

1) прежде всего мы докажем, что данные последовательности монотонны;

2) после этого установим, что они ограничены.

Убедившись в выполнении этих двух требований и тем самым в существовании предела последовательности, мы будем отыскивать этот предел.

Задача 13, 2. Доказать, что если a — ***любое положительное число***, то

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1. \qquad (13, 2)$$

Решение. Допустим сначала, что число $a > 1$. Тогда последовательность $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a} \ldots$ является монотонно убывающей. Но эта последовательность и ограничена, так как $\sqrt[n]{a} > 1$. Поэтому на основании теоремы 13, 2 эта последовательность имеет предел L, и этот предел не может быть меньше, 1, т. е. $L \geqslant 1$. Покажем, что предположение $L > 1$ приводит к противоречию. Действительно, так как рассматриваемая последовательность — монотонно убывающая, то даже при сколь угодно большом n имеем, что

$$\sqrt[n]{a} > L.$$

Отсюда $a > L^n$. Так как $L > 1$, то при $n \to \infty$ величина L^n — бесконечно большая. Но это **противоречит условию** задачи, согласно которому a — число и тем самым не может быть величиной бесконечно большой. Таким образом, предположение что $L > 1$ привело нас к противоречию и должно быть отброшено и остается только заключить, что $L = 1$.

Читателю предлагается самостоятельно доказать, что и при c положительном, но меньшем 1 имеет место соотношение (13, 2).

Указание. Воспользоваться теоремой 13, 1. В этом случае последовательность $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \ldots$ — возрастающая (и ограниченная, т. к. $\sqrt[n]{a} < 1$). Пределом будет число $K \leqslant 1$. Доказательство должно привести к тому, что случай $K < 1$ является невозможным. Останется единственно возможное заключение $K = 1$, а это и требуется.

Задача 13, 3. Показать, что если $l > 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{l^n}{n} = +\infty$, т. е. что последовательность $\{x_n\} = \frac{l^n}{n}$ расходится к $+\infty$.

Решение. Так как $l > 1$, то можно записать, что $l = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$l^n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 + n\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 + \ldots + \alpha^n;$$

$$\frac{l^n}{n} = \frac{1}{n} + \alpha + \frac{n-1}{2!}\alpha^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^3 + \ldots + \alpha^n \frac{1}{n}.$$

Теперь, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{l^n}{n} = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n} + \alpha + \frac{n-1}{2!}\alpha^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^3 + \ldots \frac{\alpha^n}{n}\right) = +\infty,$$

т. е. переменная $x_n = \frac{l_n}{n}$ при $l > 1$ — бесконечно большая.

Поэтому можно также утверждать, что для достаточно больших n $l^n > n$, если $l > 1$. Результат этой задачи приводит также к выводу, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{l^n} = 0 \text{ при } l > 1.$$

Задача 13, 4. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{13, 7}$$

Решение. При вычислениях, связанных с числом e, получается заключение, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ при любом n. Значит, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ меньше любого числа, которое больше 3 или равно 3, т. е. для всех чисел $n \geqslant 3$ имеет место неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$. Из этого следует, что

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < n, \quad \frac{(n+1)^n}{n^n} < n, \quad (n+1)^n < nn^n, \quad (n+1)^n < n^{n+1}.$$

Извлекая теперь из обеих частей неравенства корень степени $n(n+1)$, получаем, что

$$\sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n} < \sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}},$$

или

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}.$$

Мы установили это неравенство для того, чтобы показать, что последовательность $\{\sqrt[n]{n}\}$ — убывающая, когда n возрастает от значения, равного 3, т. е. $\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6}, \ldots$ — убывающая последовательность. А так как при любом целом $n > 0$ всегда $\sqrt[n]{n} > 1$, то эта убывающая последовательность ограничена. Значит, последовательность $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$, будучи убывающей и ограниченной, необходимо стремиться к пределу, причем этот предел не меньше 1. Обозначим этот предел через L. Так как этот предел не меньше 1, то $L \geqslant 1$. Покажем, что предположение $L > 1$ приводит к противоречию и тем самым для L останется единственная возможность быть равным 1. Действительно, так как рассматриваемая последовательность — монотонно убывающая, то даже при сколько угодно больших n будет $\sqrt[n]{n} > L$, а потому $n > L^n$. Это неравенство находится в противоречии с неравенством $L^n > n$, полученном в последнем абзаце предыдущей задачи при тех же условиях: $L > 1$, а n достаточно велико.

Таким образом предположение $L > 1$ привело к противоречию и должно быть отброшено. Для L остается только одна возможность быть равным 1 и тем самым соотношение (13, 7) доказано.

Отсюда можно получить следствие:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1, \qquad (13,3)$$

т. к.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1.$$

Задача 13, 5 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{9n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^7}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}$.

Указание. 1) $\sqrt[n]{5n}=\sqrt[n]{5}\sqrt[n]{n}$. Применить теорему 12, 18 п. *В* о пределе произведения и использовать задачи 13, 2 и 13, 4. 2) $\sqrt[n]{n^4}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^4$. Использовать задачу 13, 4.

Ответ. 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 0.

Для решения дальнейших задач полезна

Теорема 13, 3. Если для трех переменных x_n, y_n и z_n, начиная с некоторого номера n, выполняется соотношение

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n,$$

а x_n и y_n имеют равные пределы, то тот же предел имеет и z_n.

Задача 13, 6. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}$.

Решение. Для $n>2$ выполняются неравенства

$$\sqrt[n]{n}<\sqrt[n]{3n+2}<\sqrt[n]{4n},$$

но

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4n}=1,$$

а поэтому на основании последней теоремы 13, 3 заключаем, что искомый предел равен 1:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1.$$

Задача 13, 7 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}(n+2)}$.

Ответ. 1) 1; 2) 1.

Задача 13, 8. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$. При вычислении этого предела мы не можем применить теорему 12, 18 п. *А* о пределе разности двух переменных, ибо эта теорема верна только в том случае, когда обе переменные имеют предел. В нашем случае ни $\sqrt{n+2}$, ни $\sqrt{n}$ предела не имеют, так как на основании соотношений (12, 7) при $n \to \infty$ $\sqrt{n} \to \infty$, а вместе с ним и $\sqrt{n+1} \to +\infty \left(k = +\frac{1}{2} > 0\right)$.

Здесь мы имеем дело с разностью двух положительных бесконечно больших величин. Без специального исследования об этой разности нельзя сказать ничего определенного. Такие разности называют «неопределенностями» вида $\infty - \infty$ (запись $\infty - \infty$ — есть символическое обозначение «неопределенности» такого вида, а не вычитание символов). Данную переменную преобразуем, умножив и разделив ее на $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}$. Это преобразование мы делаем для того, чтобы перенести иррациональность в знаменатель:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 2.0 = 0,$$

ибо $\sqrt{n+2}$ и $\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ есть положительные бесконечно большие величины, их сумма $\sqrt{n+2}+\sqrt{n}$ есть тоже положительная бесконечно большая величина, а величина, обратная ей, $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ есть величина бесконечно малая. Предел же бесконечно малой величины равен нулю.

Задача 13.9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})$.

Решение. Здесь снова мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин (см. 12, 7) («неопределенность» вида $\infty - \infty$), и без специального исследования никакого заключения о пределе их разности мы сделать не можем.

Как и в предыдущих двух задачах, перенесем иррациональность в знаменатель, и тогда

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{\underbrace{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}_{\text{разделим числитель и знаменатель на } n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \infty,$$

так как при $n \to \infty$ предел числителя равен 1, а знаменатель есть величина бесконечно малая, как сумма двух бесконечно малых величин. Значит, мы имеем дело с величиной, которая обратна бесконечно малой, а такая величина — бесконечно большая.

Задача 13. 10 (для самостоятельного решения). Определить

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Указание. Здесь снова фигурирует разность двух бесконечно больших величин $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, а множитель $\sqrt{n}$ предела не имеет. Поэтому теорему 12, 18 (пункты A и B) применить нельзя. Для решения задачи надо выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ и в полученном выражении $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ произвести деление числителя и знаменателя дроби на $\sqrt{n}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 13, 11 (для самостоятельного решения). Определить

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}.$$

Указание. Здесь мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших величин, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Также нельзя применить и теорему о пределе частного (12, 18 пункт C), так как для ее применения требуется, чтобы числитель и знаменатель дроби имели пределы, а в данном случае ни числитель, ни знаменатель дроби предела не имеют (они величины бесконечно большие). Для решения задачи следует числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Ответ. 1.

Задача 13, 12 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}.$$

Указание. Здесь мы опять-таки встречаемся с отношением двух бесконечно больших величин. Теорему 12, 18 (пункт C) применить нельзя (числитель и знаменатель дроби предела не имеют). Для решения задачи числитель и знаменатель дроби резделить на n.

Ответ. 1.

Задача 13, 13 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b}-n)$.

Ответ. 1) 1; 2) $\frac{a+b}{2}$.

Указание. При решении каждого из этих примеров мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин. Теорема о пределе разности и в первом и во втором случае неприменима, так как переменные не имеют предела. Перенести иррациональность в знаменатель, после чего числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Задача 13, 14. Найти:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}};$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5n}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Указание. 1) Воспользоваться формулой (12, 2), переписать данное выражение в виде

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}$$

и учесть результат задачи 12, 8.

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4n+3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{4n+3}\right)^{-\frac{1}{6}}.$$

Ответ. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{6}}$.

Задача 13, 15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+5n}}{3n+2}.$$

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на n. Можно поступить и иначе: представить данную дробь в виде

$$\sqrt[3]{\frac{n^2+5n}{(3n+2)^3}};$$

воспользоваться формулами (12, 2) и (12, 9).

Ответ. 0.

Задача 13, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+5-6+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}}.$$

Указание. Числитель дроби записать так:

$$1-2+3-4+5-6+\ldots-2n=[1+3+5+\ldots+(2n-1)]-$$
$$-[2+4+6+\ldots+2n].$$

Каждую из сумм, стоящую в скобках, вычислить как сумму членов арифметической прогрессии. После этого числитель и знаменатель дроби разделить на n.

Ответ. $-\frac{1}{3}$.

Решение трех следующих задач основано на применении формул $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ и $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

Задача 13, 17. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)$.

Решение. Здесь в скобках стоит разность двух бесконечно больших величин. Полагая $\sqrt[3]{1-n^3}=a$; $n=b$, умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на a^2-ab+b^2 и получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)\left[\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^3+n^3}{\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1-n^3}\right)^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=0,$$

так как знаменатель дроби при $n\to\infty$ есть сумма трех положительных бесконечно больших величин, а потому на основании п. 12, 20 заключаем, что это величина положительная, бесконечно большая. Величина же, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая, и ее предел равен нулю.

Задача 13, 18 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\frac{2}{3}}-(n-1)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Указание. Здесь мы снова имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин. Полагая $(n+1)^{\frac{2}{3}}=a$, $(n-1)^{\frac{2}{3}}=b$ умножить и разделить на a^2+ab+b^2. После приведения подобных членов в числителе получится $4n$. После этого числитель и знаменатель дроби разделить на наивысшую степень n, встречающуюся в членах дроби, т. е. на $n^{\frac{4}{3}}$.

Ответ. 0.

Этим заканчиваются упражнения, связанные с определением предела последовательности.

Задачи для дополнительных упражнений учащийся может взять из хорошо зарекомендовавшего себя задачника для втузов под редакцией Б. П. Демидовича «Задачи и упражнения по математическому анализу».

ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Предел функции.

Определение предела функции

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого наперед заданного положительного числа ε (хотя бы и как угодно малого) можно найти такое положительное число δ, что для всех значений x, входящих в область определения функции, **отличных от a** *и удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.*

Короче: число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящейся к a, если выполнение неравенства $0<|x-a|<\delta$ влечет за собой выполнение неравенства $|f(x)-A|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — наперед заданное число, а δ соответствующим образом подобрано.

В определении предела функции следует обратить внимание на то, что вовсе не требуется, чтобы функция $f(x)$ была непременно определена в точке a. Для того чтобы функция $f(x)$ имела возможность стремиться к пределу при $x \to a$, необходимо лишь чтобы в области ее существования были точки, как угодно близкие к a и отличные от a.

Прежде чем приступить к непосредственному вычислению предела функций, приведем основные сведения из теории:

14, 1. *Бесконечно малые и бесконечно большие функции.*

a) Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0. \tag{14, 1}$$

b) Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$ если имеет место одно из равенств

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \to a} f(y) = +\infty; \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

c) Функция $f(x)$ называется ограниченной при $x \to a$, если существует такое положительное число A, что для всех значений x из окрестности числа a выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant A$.

14, 2. *Свойства бесконечно малых функций.*

a) Если функция $f(x)$ бесконечно мала при $x \to a$, то и $-f(x)$ также бесконечно мала при $x \to a$.

b) Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бесконечно малы при $x \to a$, то сумма их, а также и разность их: $f_1(x)+f_2(x)$ и $f_1(x)-f_2(x)$ бесконечно малы при $x \to a$ (это утверждение распространяется на любое фиксированное число функций).

c) Если при $x \to a$ функция $f(x)$ бесконечно мала, а функция $\varphi(x)$ — ограничена, то их произведение $f(x)\varphi(x)$ есть функция бесконечно малая.

14, 3. *Свойства бесконечно больших функций.*

Если при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет конечный предел ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$), а функция $\varphi(x)$ — бесконечно велика ($\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$), то

a) сумма их — бесконечно велика, т. е. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + \varphi(x)] = \infty$, предел отношения $f(x)$ к $\varphi(x)$ равен нулю:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

b) если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \ (b > 0)$, а $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, причем $\varphi(x)$ положительна в окрестности точки a, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$.

c) При положительном k, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, то

$$\lim_{x \to a} [kf(x)] = +\infty.$$

d) Произведение двух бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая, т. е. если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, то и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

14, 4. *Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями:*

a) Если $f(x)$ при $x \to a$ — бесконечно большая функция, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно мала.

b) Если при $x \to a$ функция $\varphi(x)$ бесконечно мала, то функция $\frac{1}{\varphi(x)}$ — бесконечно большая, причем предполагается, что в окрестности точки a функция $\varphi(x)$ в нуль не обращается.

14, 5. *Правила предельного перехода.*

a) Если при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы, то и алгебраическая сумма их $f(x) \pm \varphi(x)$ имеет предел, который равен сумме их пределов, т. е. если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, а $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b_1$, то $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b \pm b_1$.

Короче (но не совсем точно): предел алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме пределов этих функций.

b) Если при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеет пределы, то их произведение $f(x)\ \varphi(x)$ также имеет предел, который равен *произведению их пределов, т. е. если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, *а* $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=b_1$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=bb_1$.

Короче (но не совсем точно): предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций. Свойства a) и b) распространяются на любое фиксированное число функций.

c) Если при $x\to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы и предел функции $\varphi(x)$ не равен нулю, то предел их частного существует и равен частному от деления их пределов, т. е. если

$$\lim_{x\to a} f(x)=b,\ \text{а}\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=b_1\ (b_1\neq 0),$$

то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}=\frac{b}{b_1}.$$

Короче (но не совсем точно): предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю.

14, 6. *Предел целой рациональной функции.*

Если

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

то

$$\lim_{x\to a} P(x)=P(a), \tag{14, 2}$$

т. е. ***при отыскании предела целой рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением.***

14, 7. *Предел дробно-рациональной функции.*

Если

$$F(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} F(x)=\frac{P(a)}{Q(a)}=F(a),\ \text{если}\ Q(a)\neq 0, \tag{14, 3}$$

т. е. ***при отыскании предела дробно-рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением, если при этом предельном значении знаменатель не обращается в нуль.***

Задача 14, 1. Найти $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+4)$.

Решение. Функция $f(x)=x^2-7x+4$ — целая рациональная. Для отыскания ее предела применима формула (14, 2). Заменим в аналитическом выражении функции x его предельным значением и получим

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8.$$

Задача 14, 2 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^3-7x^2+4x+2);\qquad 2)\ \lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{2}x^3-x+2\right).$$

Ответ. 1) -2, 2) 30.

Указание. Воспользоваться формулой (14, 2).

Задача 14, 3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$.

Решение. Здесь отыскивается предел дробно-рациональной функции. Прежде чем применить (14, 3), надо проверить, не обращается ли в нуль знаменатель дроби при $x=3$. Проверяем: $3^2+2\cdot 3+8=23\neq 0$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}=\frac{3^2+3+2}{3^2+2\cdot 3+8}=\frac{14}{23}.$$

Задача 14, 4 (для самостоятельного решения). Найти пределы

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+4};\quad 2)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-x+1}{2x^3-x^2+x+2}.\ -\frac{3}{0}$$

Указания: 1) Проверить, что знаменатель дроби в первом примере при $x=1$, а во втором при $x=-1$ не обращается в нуль; 2) воспользоваться формулой (14, 3).

Ответ. 1) 0; 2) $-\dfrac{3}{2}$.

Задача 14, 5. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8}{x-2}$.

Решение. Знаменатель дроби $\dfrac{x^3-8}{x-2}$ обращается в нуль при $x=2$, а потому функция $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ при $x=2$ не существует.

Теорему о пределе дроби (14, 5 п. c) применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. По той же причине нельзя применить и формулу (14, 3). Но определение предела функции содержит существенную оговорку: при отыскании предела функции $f(x)$ при $x\to a$ значение функции $f(a)$ при $x=a$ может не рассматриваться. От функции $f(x)$ это определение не требует, чтобы точка $x=a$ входила в область существования функции. Поэтому значение $x=a$ может нами не приниматься во внимание. Именно эти соображения и дадут возможность решить задачу. В нашем случае мы должны считать, что x, стремясь к 2, никогда не становится равным 2, а потому значение функции $\frac{x^3-8}{x-2}$ при $x=2$ нас не интересует.

При $x=2$ и числитель, и знаменатель дроби обращаются в нуль. Мы имеем в данном случае отношение двух бесконечно малых функций, о котором без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Для решения задачи разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{x^3-8}{x-2}$ на $x-2$. Мы имеем право это сделать потому, что значение $x=2$ не рассматривается и, значит, $x-2 \neq 0$.

Если бы указанной оговорки в определении предела функции не было и мы должны были бы рассматривать и значение $x=2$, то разделить числитель и знаменатель дроби на $x-2$ мы не смогли бы, так как такое деление означало бы деление числителя и знаменателя дроби на нуль, что, конечно, недопустимо. После сокращения дроби на $x-2$ получим

$$\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4,$$

и нам придется отыскивать предел не данной функции, а функции x^2+2x+4. Тогда перед учащимся должен возникнуть такой вопрос: тождественны ли функции $\frac{x^3-8}{x-2}$ и x^2+2x+4. Этот вопрос имеет положительный ответ: функции тождественны, если не рассматривать значения $x=2$. Следует иметь в виду, что две функции тождественны, если они удовлетворяют таким двум требованиям:

1) их области существования совпадают и

2) при одном и том же значении аргумента, взятом из области существования функции, численные значения функций равны.

В нашем случае эти два требования будут выполнены, если не рассматривать значения $x=2$, но ведь оно и не рассматривается. Таким образом,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=$$
$$=2^2+2\cdot 2+4=12,$$

так как функция x^2+2x+4 — целая рациональная функция и для определения ее предела на основании формулы (14,2) следует в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением.

Можно указать такое

***Правило*. Для того чтобы определить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to a$ числитель и знаменатель дроби имеет пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $x-a$ и перейти к пределу.**

Если и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю при $x \to a$, то надо произвести повторное деление на $x - a$ (это правило основывается на известном из элементарной алгебры следствии из теоремы Безу, согласно которому, если многочлен обращается в нуль при $x = a$, то он делится без остатка на $x - a$).

Теперь для самостоятельного решения будет предложен ряд задач на определение предела дробно-рациональной функции.

Задача 14,6 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9}.$$

Указание. При $x = 3$ числитель и знаменатель дроби — функции бесконечно малые, пределы их равны нулю. Об их отношении без специального исследования ничего определенного сказать нельзя. Теорему 14,5 п. *с* о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Следует применить указанное правило; разделить числитель и знаменатель дроби на $x - 3$. Повторить рассуждения предыдущей задачи о допустимости такого деления.

Ответ. $\frac{7}{3}$.

Следует не только запомнить тот или иной прием, но главное — понять, на чем основано его применение, и каждое действие проводить совершенно сознательно, а не автоматически, «по правилам». Применяя правило, надо понимать те положения, из которых оно выведено.

Задача 14,7 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}.$$

Указание. Здесь опять-таки функции, стоящие в числителе и знаменателе дроби, бесконечно малы при $x \to 1$. Для решения вопроса о пределе их отношения следует разделить числитель и знаменатель дроби на $x - 1$. Полученные после этого деления функции при $x \to 1$ будет опять-таки бесконечно малыми. Снова каждую из них следует разделить на $x - 1$. Этим указанием воспользуетесь и при решении двух следующих задач.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

Задача 14,8 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^3 - 6x^2}{4x^5 + 2x^3 + x^2}.$$

Ответ. —6.

Задача 14,9 (для самостоятельного решения).

Найти $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 - 3x^2 - 45x - 81}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Задача 14,10. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n — целые положительные числа).

Решение. При $x\to 1$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю, а поэтому это функции бесконечно малы. Для решения вопроса о пределе их отношения следует числитель и знаменатель дроби разделить на $x-1$. Допустимость такого деления подробно была объяснена в задаче 14,5. Повторяем, что x, стремясь к 1, не становится равным 1, а потому $x-1\neq$ $\neq 0$, и деление на $x-1$ имеет смысл.

Функция $\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ при $x=1$ не существует, но значение $x=1$ нашему рассмотрению и не должно подлежать. Воспользуемся известной формулой алгебры

$$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}). \quad (14,4)$$

Полагая здесь $a=x$, а $b=1$, в нашем случае получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}=$$

$$=\frac{\overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{m\text{ раз}}}{\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{ раз}}}=\frac{m}{n}.$$

Задача 14,11. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

Решение. При $x\to -1$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, а потому это функции — бесконечно малые. Чтобы можно было применить формулу (14,4), с помощью которой была решена предыдущая задача, следует сделать подстановку $x=y^{35}$, где показатель степени 35 — наименьшее кратное показателей корней.

Если $x=y^{35}$, то $\sqrt[7]{x}=y^5$, а $\sqrt[5]{x}=y^7$, и тогда $\dfrac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\dfrac{1+y^5}{1+y^7}$, причем $y\to -1$, когда $x\to -1$, и задача перепишется так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{y\to -1}\frac{1+y^5}{1+y^7}.$$

Теперь следует разделить числитель и знаменатель дроби на $1+y$, применить формулу (14,3).

Ответ. $\frac{5}{7}$.

Задача 14,12 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}.\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}.$$

Ответ. 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{5}{3}$.

Задача 14,13. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-5}{x^2-7x+12}$.

Решение. При $x\to 3$ имеем предел числителя:

$$\lim_{x\to 3}(2x-5)=1;$$

предел знаменателя:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+12)=0.$$

Теорема (14,5 п. *c.*) о пределе дроби неприменима. Рассмотрим обратную дробь $\frac{x^2-7x+12}{2x-5}$, и ее предел при $x\to 3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{2x-5}=\frac{0}{1}=0$$

(здесь теорема о пределе дроби применима, так как предел знаменателя $2x-5$ не равен нулю). Так как предел функции $\frac{x^2-7x+12}{2x-5}$ равен 0, то эта функция при $x\to 3$ бесконечно малая, а потому функция $\frac{2x-5}{x^2-7x+12}$ при $x\to 3$ — бесконечно большая, и тогда ее предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-5}{x^2-7x+12}=\infty$ (мы воспользовались теоремой 14,4 пункт (*б.*).

Задача 14,14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^1-3x+2}.$$

Ответ. ∞

Задача 14,15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}.$$

Ответ. n.

Задача 14,22 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right).$$

Указание. Произвести вычитание дробей.

Ответ. ∞.

Задача 14,16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right).$$

Ответ. -1.

Указание. После приведения к общему знаменателю окажется, что при $x \to -1$ числитель и знаменатель — функции бесконечно малые. Воспользоваться указанным на стр. 97 правилом.

ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений на нахождение предела функции.

Решим несколько задач на нахождение предела дробно-рациональной функции при $x \to \infty$.

Задача 15,1. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x - 1}$.

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему о пределе дроби, надо, чтобы числитель и знаменатель дроби имели пределы и чтобы предел знаменателя не был равен нулю. В данном случае эта теорема неприменима, так как пределы числителя и знаменателя дроби не существуют. При $x \to \infty$ и числитель, и знаменатель дроби функции бесконечно большие (см. теоремы 14,4 о свойствах бесконечно больших функций. Рекомендуется еще раз повторить эти теоремы). Значит, мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших функций. Об этом отношении, так же как и об отношении двух бесконечно малых функций, ничего определенного без специального исследования сказать нельзя. Для решения задачи следует применить прием, знакомый из решения задачи 12,1 (полезно также возвратиться к задаче 12,8): дроби разделить на высшую степень x, встречающуюся в членах дроби, а после этого перейти к пределу.

Итак,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty}\left(2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty}\left(3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x \to \infty} 3 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3},$$

так как при $x \to \infty$ $\frac{1}{x}$ — величина бесконечно малая, а потому и $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ и $\frac{5}{x^3}$ — величины бесконечно малые (см. теоремы 14,4); $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x}\frac{1}{x}\frac{1}{x}$, а $\frac{5}{x^3} = 5\frac{1}{x^3}$ и пределы этих величин равны нулю, когда $x \to \infty$.

После деления числителя и знаменателя на x^3 оказалось возможным применить теорему о пределе дроби, так как теперь и числитель, и знаменатель дроби имеют пределы, равные соответственно 2 и 3, и предел знаменателя не равен нулю.

Для самостоятельного решения предлагается несколько аналогичных задач.

Задача 15,2 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-7x^2+5x-4}{x^4+x^2+x+1};$$

$$2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11};$$

$$3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2}{x^2-x+1};$$

$$4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x}{2x^3+x-1};$$

$$5)\ \lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3-14}{5x^4+x^3+x^2+x-1}.$$

Ответ. 1) 5; 2) 0; 3) ∞; 4) $\frac{3}{2}$; 5) $\frac{7}{5}$.

Задача 15,3 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{3x^2}{15x+1}\right).$$

Указание. Произвести вычитание дробей.

Ответ. $\frac{1}{75}$.

Задача 15,4 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3.$$

Ответ. $\frac{1}{8}$.

Задача 15,5 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-x}{x^2-3}-\frac{3x^3-4}{x^3-x}\right)^4.$$

Ответ. 16.

Решение остальных задач этого практического задания основано на применении теоремы:

При постоянном показателе степени можно переходить к пределу в основании степени при условии, что предел основания степени существует, т. е.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^k=[\lim_{x\to a}f(x)]^k, \tag{15,1}$$

где k — постоянная величина (для случая, когда k — целое число, мы этой теоремой пользовались неоднократно, так как она прямо следует из теоремы о пределе произведения).

Из формулы (15,1) следует, что при любом нечетном m всегда

$$\lim_{x\to a}\sqrt[m]{f(x)} = \sqrt[m]{\lim_{x\to a} f(x)}. \qquad (15,2)$$

Если же m — четное число, то эта формула верна только тогда, когда функция $f(x)$ — неотрицательна, т. е. когда $f(x) \geqslant 0$.

Выполним сначала ряд простых упражнений на применение этой теоремы.

Задача 15,6. Найти: 1) $\lim\limits_{x\to 27}\sqrt[3]{x}$; $\lim\limits_{x\to -243}\sqrt[5]{x}$.

Решение. На основании формулы (15,2) имеем:

1) $\lim\limits_{x\to 27}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 27} x} = \sqrt[3]{27} = 3$;

2) $\lim\limits_{x\to -243}\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{\lim\limits_{x\to -243} x} = \sqrt[5]{-243} = -3.$

Задача 15,7. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+7}$

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{2x^2+7} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2+7)} = \sqrt{2\cdot 2^2+7} = \sqrt{15}.$

Задача 15,8. Найти при нечетном m

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[m]{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[m]{x}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim\limits_{x\to 0} x} = \sqrt[m]{0} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[m]{\dfrac{1}{x}} = \sqrt[m]{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}} = \sqrt[m]{0} = 0,$

т. е. при $x\to\infty$ функция $\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}$ бесконечно мала;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[m]{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}} = \infty,$

так как по результатам второго примера этой задачи при $x\to\infty$ функция $\dfrac{1}{\sqrt[m]{x}}$ бесконечно мала, потому функция $\sqrt[m]{x}$ — бесконечно велика.

Задача 15,9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Решение. Когда $x\to 0$, числитель и знаменатель имеют своим пределом нуль, а потому они бесконечно малы:

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-1) = \sqrt{\lim_{x\to 0}(1+x)} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Для того чтобы решить вопрос о пределе их отношения, перенесем иррациональность в знаменатель, умножив для этого числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{1+x}+1)$. Будем иметь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}+1}=\frac{1}{2}.$$

Так как $x\to 0$, не становясь равным нулю, то деление на x числителя и знаменателя дроби возможно.

При решении задачи мы вместо предела функции $f(x)=$ $=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ отыскали предел функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$; здесь должен быть затронут вопрос о тождественности этих функций (подобно тому как этот вопрос возник при решении задачи 14,5). О функциях $\varphi(x)$ и $f(x)$ мы можем сказать, что они тождественны $(x\neq 0)$.

Таким образом, замена функции $f(x)$ при отыскании предела функцией $\varphi(x)$ является законной.

При отыскании предела дроби, содержащей иррациональные выражения, в большом числе случаев приходится с помощью преобразований переходить от заданной функции к другой функции, и у учащегося должен возникнуть вопрос о тождественности заданной функции и той, которая получается в результате преобразований. Во всех дальнейших примерах исследованием этого вопроса мы заниматься не будем, предоставляя это читателю.

Теперь, после решения этой задачи, укажем правило для решения задач, в которых требуется определить предел дроби, содержащей иррациональные выражения в случае, когда ее числитель и знаменатель — бесконечно малые функции, т. е. когда их пределы равны нулю.

Правило. **Чтобы найти предел дроби, содержащей иррациональные выражения в случае, когда предел и числителя, и знаменателя дроби равен нулю, надо перенести иррациональность из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель, после этого сделать необходимые упрощения (приведение подобных членов, сокращение и т. д.) и перейти к пределу.**

Задача 15,10. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Решение. При $x\to 2$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю. Перенесем иррациональность в знаменатель, для чего умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x^2+5}+3$.

Получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2+2}{3+3}=\frac{2}{3}.$$

Задача 15,11 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$;

Ответ. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{1}{2}$.

Задача 15,12. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x-7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$.

Решение. При $x\to 3$ числитель и знаменатель дроби имеют предел, равный нулю. В этой задаче придется сначала числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}$, а потом на $\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}$ или сразу умножить числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})$. Используя это указание, получаем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3x+7-2x-10)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(4x+13-x-22)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22})}{(3x-9)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3(x-3)(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10})}=\frac{5}{12}$$

Задача 15,13 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x^2-39}}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2-19}}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

Ответ. 1) $\frac{7}{12}$; 2) 0; 3) $\frac{23\sqrt{13}}{24}$; 4) $-\frac{3}{2}$.

Указание. В третьем примере одним из множителей числителя будет $3x^2-x-44$. Корни этого квадратного трехчлена $x_1=4$; $x_2=-\frac{11}{3}$, вследствие чего $3x^2-x-44=3(x-4)\left(x+\frac{11}{3}\right)$.

Задача 15,14. Найти $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}$.

Решение. Здесь и предел числителя, и предел знаменателя равен нулю. Перенесем иррациональность из числителя в знаменатель. Воспользуемся известной формулой алгебры $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+b^3$. Положим $a=\sqrt[3]{x-6}$, $b=1$. Значит, для того, чтобы получить в числителе разность кубов, надо его умножить на $\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1$. Умножая и знаменатель на эту величину, получаем

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x-6}-1}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt[3]{x-6}-1)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-6-1}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+\sqrt[3]{x-6}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}.$$

Задача 15,15 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{3x+1}}{6x}.$$

Ответ. $-\frac{1}{9}$.

Задача 15,16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}.$$

Ответ. $-\frac{1}{6}$.

Задача 15,17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}.$$

Ответ. $\frac{21}{8}$.

Теперь мы рассмотрим задачи, в которых требуется определить предел функции, содержащей корни в том случае, когда аргумент стремится к ∞ или к $\pm\infty$.

Задача 15,18. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$.

Решение. Здесь непосредственно теорема 14,5 не может быть применена, так как при $x\to+\infty$ пределы слагаемых не существуют: мы имеем дело с разностью двух бесконечно больших величин, о которой ничего определенного без специального исследования сказать нельзя.

Умножим и разделим данное выражение на сопряженное с ним и получим

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=0,$$

так как при $x\to+\infty$ знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, есть функция бесконечно большая (см. задачу 15,8 (3)), а потому дробь $\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}$ есть величина бесконечно малая, а ее произведение на -2 есть также бесконечно малая величина.

Задача 15,19. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. Когда $x\to+\infty$, выражение, стоящее в скобках, есть разность двух бесконечно больших величин, о которой без специального исследования нельзя сказать ничего определенного. Умножим и разделим функцию, стоящую под знаком предела, на выражение, сопряженное с $\sqrt{x^2+1}-x$, т. е. на $\sqrt{x^2+1}+x$, и получим

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $x\to-\infty$. Выражение, стоящее в скобках, имеет в этом случае положительное значение и неограниченно возрастает по абсолютной величине, множитель же x, стоящий за скобкой, неограниченно возрастает по абсолютной величине, но сохраняет отрицательное значение. Поэтому все выражение

$x(\sqrt{x^2+1}-x)$ при $x \to -\infty$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, сохраняя отрицательное значение и

$$\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = -\infty.$$

Задача 15,20 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}.$$

Ответ. При $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ искомый предел равен 0.

Задача 15,21. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$.

Решение. 1) Рассмотрим сначала случай $x\to+\infty$:

$$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Так как $x>0$ при $x\to+\infty$, а мы рассматриваем арифметическое значение корня, то $\sqrt{x^2}=+x$ и $\sqrt{x^2+4} = +x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$,

а потому $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = 1.$$

2) Пусть $x\to-\infty$. По-прежнему $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$, но теперь $\sqrt{x^2}=-x$, так как $x<0$, а мы рассматриваем арифметическое значение корня, и $\sqrt{x^2+4}=-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$, а

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = -1.$$

Задача 15,22 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}).$$

Указание. Учесть, что при $x>0$ имеем $\sqrt{x^2}=x$, а при $x<0$ тот же $\sqrt{x^2}=-x$.

Ответ. При $x\to+\infty$ искомый предел равен $+1$, а при $x\to-\infty$ искомый предел равен -1.

Задача 15,23 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+2}-x).$$

Ответ. 0 при $x\to+\infty$ при $x\to-\infty$.

Задача 15,24 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}$, чтобы получить в числителе разность кубов. После упрощений под знаком предела будет находиться выражение

$$\frac{4x}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}}.$$

Знаменатель дроби представить в виде

$$x^{\frac{4}{3}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\right]$$

и сократить дробь на x.

Ответ. 0.

Задача 15,25 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^{\frac{4}{3}}-(x^2-1)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Указание. Выражение, стоящее под знаком предела, умножить и разделить на $x^{\frac{8}{3}}+x^{\frac{4}{3}}+(x^2-1)^{\frac{2}{3}}+(x^2-1)^{\frac{4}{3}}$ и полученную дробь сократить на x^2.

Ответ. 0.

ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение пределов тригонометрических функций и упражнения на использование предела $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При определении предела тригонометрической функции можно независимую переменную заменить ее предельным значением, если оно принадлежит области существования функции:

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a;\qquad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a;\qquad \lim_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a;$$

$$\lim_{x\to a}\operatorname{ctg} x=\operatorname{ctg} a;\qquad \lim_{x\to a}\sec x=\sec a;\qquad \lim_{x\to a}\operatorname{cosec} x=\operatorname{cosec} a.$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ — не существует, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ нельзя приписать никакого числового значения.

Задача 16,1. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

Решение. На основании приведенного выше правила для отыскания предела тригонометрических функций $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, а потому, когда $x \to \frac{\pi}{2}$, $1 - \sin x \to 0$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos^2 x = \cos^2\frac{\pi}{2} = 0$ и мы имеем дело с отношением двух бесконечно малых функций. Требуется, как уже хорошо известно читателю, специальное исследование, чтобы решить вопрос о пределе. Зная, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$, имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x} =$$

$$= \frac{1}{1 + \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x} = \frac{1}{1+\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Задача 16,2 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y - \sin y}{1 - \operatorname{tg}^2 y}.$$

Ответ. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Задача 16,3 (для самостоятельного решения). Найти:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4\sin^2 x}{\cos 3x}.$$

Указание. Под знаком предела находится при $x \to \frac{\pi}{6}$ отношение двух бесконечно малых функций. Следует числитель разложить на множители:

$$1 - 4\sin^2 x = 4\left(\frac{1}{4} - \sin^2 x\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\left(\frac{1}{2} + \sin x\right).$$

Знаменатель дроби

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right) =$$

$$= 4\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Если под знаком предела имеется сумма или разность тригонометрических функций, часто бывает полезным преобразовать их в произведение по известным формулам тригонометрии.

Учесть, что $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$.

Ответ. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 16,4. Найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin\alpha}}$.

Решение. При $x \to a$ и числитель, и знаменатель дроби — функции бесконечно малые:

$$\lim_{x\to\alpha}(\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}) = \lim_{x\to\alpha}\sqrt{\operatorname{tg} x} - \lim_{x\to\alpha}\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\lim_{x\to\alpha}\operatorname{tg} x} -$$

$$-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}\lim_{x\to\alpha} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha} = 0^*.$$

Аналогичные рассуждения провести и по отношению к знаменателю. Имеем

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin\alpha}} =$$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{(\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin x} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha})}{(\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin\alpha})(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin x} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha})} =$$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\alpha)(\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin x\cdot\sin\alpha} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha})}{(\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha})(\sin x - \sin\alpha)} =$$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\sin\alpha\cdot\sin x} + \sqrt[3]{\sin^2\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x\cos\alpha\, 2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}} =$$

---

* $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. Если не сделать этой оговорки, то, например, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ будет $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не имеет числового смысла.

$$= \frac{3\sqrt[3]{\sin^2\alpha}}{2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}} \lim_{x\to\alpha} \frac{2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x-\alpha}{2}}{\cos x\cos\alpha\, 2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{\sqrt[3]{\sin^2\alpha}}{2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cos^3\alpha}.$$

Задача 16,5 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin\alpha}}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\alpha}}\frac{1}{\cos^3\alpha}$.

При решении остальных задач этого практического занятия следует иметь в виду, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (16,1)$$

Задача 16,6. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$ (k — величина постоянная).

Решение. Иногда при отыскании предела полезно произвести замену переменной с тем, чтобы упростить отыскание предела и использовать уже известные пределы.

Если под знаком предела делается замена переменной, то все величины, входящие под знак предела, должны быть выражены через эту новую переменную, и из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

Для решения предложенной задачи сделаем такую подстановку: $kx = y$. Из этого равенства следует, что $y \to 0$, когда $x\to 0$, а $x = \frac{y}{k}$. Тогда $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{y}{k}} = \lim_{y\to 0}\frac{k\sin y}{y} = k\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = k$,

так как $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$.

Следует запомнить, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x} = k. \qquad (16,2)$$

Задача 16,7. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx}$.

Решение. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin kx}{x}}{\frac{\sin lx}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin lx}{x}} = \frac{k}{l}$.

Мы разделили числитель и знаменатель дроби на x. Это можно было сделать, так как значение $x = 0$ не должно рассматриваться. При вычислении предела числителя и знаменателя последней дроби использована формула (16, 2).

Задача 16, 8 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

Ответ. $\frac{5}{6}$.

Задача 16, 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\cos kx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=$

$$=k\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos kx}=k\frac{1}{\cos(\lim\limits_{x\to 0}kx)}=k\frac{1}{\cos 0}=k\frac{1}{1}=k.$$

Задача 16, 10 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{\operatorname{tg} lx}$.

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на x и перейти к пределу. Использовать решение предыдущей задачи.

Ответ. $\frac{k}{l}$.

Задача 16, 11 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}$.

Указание. Дробь, стоящую под знаком предела, записать так:

$$\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}=\frac{\sin \alpha x}{x}\frac{\sin \alpha x}{x}.$$

Использовать теорему о пределе произведения*.

Ответ. α^2.

Задача 16, 12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}$.

Решение. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби — бесконечно малые функции. Воспользуемся тем, что $1-\cos mx=$ $=2\sin^2\frac{mx}{2}$ и тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos mx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{mx}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{mx}{2}}{x}=2\frac{m}{2}\frac{m}{2}=\frac{m^2}{2}$$

$\left(\text{мы использовали формулу (16, 2). В нашем случае } k=\frac{m}{2}\right)$.

Задача 16, 13. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)$.

Решение. При $x\to\frac{\pi}{2}$ функции $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ — бесконечно большие функции; таким образом, под знаком предела находится

---

* Можно поступить и так: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 \alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2=\alpha^2$

разность двух бесконечно больших функций. Теорему (14, 5a) о пределе разности применить нельзя, так как не существует конечных пределов каждой из функций $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}$. Преобразуем эту разность так:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)} =$$

$$= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

После этого получаем

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0.$$

К последней дроби можно было применить теорему о пределе дроби, так как предел знаменателя равен 2, а числитель дроби имеет конечный предел 0.

Задача 16, 14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos kx - \cos lx}{x^2}.$$

Указание. Числитель дроби равен $-2 \sin \frac{k+l}{2} x \cdot \sin \frac{k-l}{2} x$; использовать также формулу (16, 2).

Ответ. $\frac{l^2 - k^2}{2}$.

Задача 16, 15 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} x$.

Указание. При $x \to 0$ функция $\operatorname{ctg} x$ — бесконечно большая, а x — величина бесконечно малая. Значит, мы имеем произведение функции бесконечно большой на величину бесконечно малую и требуется специальное исследование, чтобы определить предел этого произведения.

Учесть, что $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, а поэтому $x \operatorname{ctg} x = x \frac{\cos x}{\sin x}$. На основании формулы (16, 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Ответ. 1.

Задача 16, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin (a + x) - \sin (a - x)}{x}.$$

Указание. $\sin (a + x) - \sin (a - x) = 2 \cos a \sin x$.

Ответ. $2 \cos a$.

Задача 16, 17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x}.$$

Указание. Представить числитель в виде

$$2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right),$$

а знаменатель

$$1-2\cos x = 2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right) =$$
$$= -4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right).$$

Сократить дробь и перейти к пределу

Ответ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 16, 18. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Решение. При $x\to 1$ не существует предела $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$, а потому нельзя применить теорему (14, 5 *в*) о пределе произведения. Сделаем в нашем примере подстановку: $1-x=y$. Когда $x\to 1$, то новая переменная $y\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$. Если $1-x=y$, то $x=1-y$; выражение, стоящее под знаком предела, перепишется так:

$$(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = y\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-y) = y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right) = y\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y =$$
$$= y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y} = \frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\cos\frac{\pi}{2}y.$$

поэтому

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi}{2}y}\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi}{2}y =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}y}{y}\right)} = \frac{2}{\pi}.$$

Задача 16, 19 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}.$$

Указание. 1) $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$. Преобразовать дробь к виду

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3} = \frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{x}\,\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 16, 20 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

Указания. 1) В первом примере умножить числитель и знаменатель дроби на $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$, сократить дробь и перейти к пределу. 2) Во втором примере перенести иррациональность в знаменатель, сократить дробь на $\sin x$ и перейти к пределу.

Ответ. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) 1.

Задача 16, 21 (для самостоятельного решения). Найти

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 5x}{2x+\sin 3x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x};\quad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}.$$

Ответ. 1) $-\frac{4}{5}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$.

Указание. В первом примере числитель и знаменатель дроби разделить на x, во втором положить $\arcsin x = z$, в третьем примере $1+\cos\pi x = 2\cos^2\frac{\pi x}{2}$; $\operatorname{tg}\pi x = \frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}$.

СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Число e.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с числом e.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \tag{17, 1}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \tag{17, 2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k; \tag{17, 3}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k. \tag{17, 4}$$

Нам придется также пользоваться теоремой о переходе к пределу в показателе степени при постоянном основании. Эта теорема формулируется так:

Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то при постоянном b имеет место формула

$$\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)} \tag{17, 5}$$

Короче (но менее точно): *при постоянном основании можно переходить к пределу в показателе степени.*

При отыскании пределов вида $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ в случае, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, имеет место формула

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}. \tag{17, 6}$$

Замечание. В формуле (17, 6) a может обозначить и число, и один из символов ∞, $+\infty$ и $-\infty$.

Если в этой формуле $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \pm\infty$, а $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ конечен, но не равен 1, то вопрос о пределе $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{\varphi(x)}$ затруднений не вызывает (см. например, задачу 17, 10). Случай, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \pm\infty$, рассмотрен в задачах 17, 13—17, 25, а соответствующие указания даны на стр. 119.

Сначала мы выполним упражнения, связанные с применением формулы (17, 5).

Задача 17, 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2} 4^{\frac{2x}{x+1}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2} 4^{\frac{2x}{x+1}} = 4^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x}{q+1}} = 4^{\frac{2\cdot 2}{2+1}} = 4^{\frac{4}{3}} = 4\sqrt[3]{4}$.

Задача 17, 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{3x}{x+2}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{3x}{x+2}} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x+2}} = 2^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{2}{x}}} = 2^3 = 8$.

Задача 17, 3. Найти $\lim\limits_{x\to 2} a^{\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}}$ $(a>0)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2} a^{\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}} = a^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x-2}} = a^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+x-4}{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}} =$

$= a^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2+x}+2}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$.

Задача 17, 4 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 2^{\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}}.$$

Указание. Ввести замену переменной: положить $\frac{\pi}{2} - x = z$. При $x \to \frac{\pi}{2}$ переменная $z \to 0$. Перейти к пределу в показателе степени.

Ответ. 2.

Задача 17, 5. Найти $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

Решение. Полагая в формуле (17, 3) $k = -1$, получим $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Задача 17, 6 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 - \frac{k}{x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x$; 3) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{3x}}$.

Ответ. На основании формулы (17, 3) получаем:

а) e^{-k}; 2) $e^{\frac{2}{3}}$.

на основании формулы (17, 4):

3) e^2; 4) $e^{\frac{1}{3}}$.

Задача 17, 7 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Ответ. e^x (здесь n — величина переменная, а x — постоянная).

Задача 17, 8. Найти 1) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + 5\,\mathrm{tg}^2 x)^{3\,\mathrm{ctg}^2 x}$;

2) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + 2\sin x)^{3\,\mathrm{cosec}\, x}$.

Решение. 1) Для того чтобы решение первого примера свести к известной формуле (17, 4), сделаем замену переменной, положив $\mathrm{tg}^2 x = z$.

Теперь следует и $\mathrm{ctg}^2 x$, стоящий в показателе степени, выразить через z. Так как $\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$, то $\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{z}$. Таким образом, и $\mathrm{ctg}^2 x$ выражен через новую переменную. Осталось решить вопрос о пределе новой переменной, когда старая переменная x стремится к нулю. Из равенства $\mathrm{tg}^2 x = z$ следует, что $\lim\limits_{x \to 0} z =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg}^2 x = 0$, а потому новая переменная $z \to 0$, когда $x \to 0$. Записи расположатся так:

$$\lim_{x\to 0}(1+5\operatorname{tg}^2 x)^{3\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{z\to 0}(1+5z)^{3\frac{1}{z}} = \underbrace{[\lim_{z\to 0}(1+5z)^{\frac{1}{z}}]}_{\substack{\text{применить формулу}\\ (17,\ 4)}}{}^3 = (e^5)^3 = e^{15}.$$

2) При решении второго примера сделать подстановку $\sin x = z$. Из этого равенства следует, что новая переменная $z \to 0$, когда $x \to 0$.

Ответ. e^6.

Теперь выполним ряд упражнений, связанных с использованием формулы (17, 6).

Задача 17, 9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}$.

Решение. На основании формулы (17, 6)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}};\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0;\ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1;$$

поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 0^1 = 0.$$

Задача 17, 10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^x.$$

Ответ. 0 $\left(\text{воспользоваться формулой (17, 6); } \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+3}=\frac{1}{2}\right)$.

Задача 17, 11 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{\frac{2x-1}{x+2}}.$$

Ответ. $\frac{4}{25}$ (предел основания степени равен $\frac{2}{5}$, а предел показателя степени равен 2).

Задача 17, 12 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{3x^2+2x+7}\right)^{\frac{2x^2+5}{x^2-1}}.$$

Ответ. $\frac{1}{9}$ (воспользоваться формулой (17, 6)).

В формуле (17, 6) мы исключили из рассмотрения случай, когда $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty$, а $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ (см. замечание к этой формуле).

Теперь выполним несколько упражнений, связанных с отысканием $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ в случае, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty$.

В этом случае формула (17, 6) неприменима, так как выражение 1^{∞} не имеет смысла («неопределенность» вида 1^{∞}). Существует общий прием для отыскания предела в этом случае. Прием этот состоит в следующем: функцию $f(x)$ представляют в виде $f(x) = 1 + [f(x) - 1]$. Показатель степени $\varphi(x)$ запишем в виде:

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]\varphi(x),$$

и тогда

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}[1 + (f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}[f(x)-1]\varphi(x)} =$$

$$= \left\{\lim_{x\to a}[1 + (f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)}. \qquad (17, 7)$$

Сделаем подстановку: $f(x) - 1 = z$. Так как по предположению при $x \to a$ $f(x) \to 1$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - 1] = 0$, т. е. $z \to 0$, когда $x \to a$. На основании предыдущего равенства

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}]^{\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-1]\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\varphi(x)}.$$

Следует иметь в виду, что a может быть и числом и одним из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Теперь все дело сведется к вычислению $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - 1]\varphi(x)$.

Это общее указание использовано при решении задач 17, 20—17, 25.

Этим же указанием можно воспользоваться и при решении задач 17, 13—17, 19. Однако в этих задачах использование общего приема приведет к ненужным осложнениям и мы их решим проще.

Задача 17, 13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение. Здесь основание степени $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \to 1$, когда $x \to \infty$, а показатель степени $x \to \infty$. Здесь, таким образом, имеет место рассматриваемый случай «неопределенности» вида 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2.$$

Покажем, что применение общего приема, указанного выше, приведет к более сложным выкладкам.

У нас

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1};\ 1+[f(x)-1]=1+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)=$$
$$=1+\frac{x+1-x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}.$$

Таким образом,

$$f(x)-1=\frac{2}{x-1},$$

а потому показатель степени должен быть представлен на основании формулы (17, 7) так:

$$x=\frac{x-1}{2}\,\frac{2}{x-1}\,x,$$

и теперь

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x-1}x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2.$$

Теперь ясно, что общий прием оказался сложнее.

Задача 17, 14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^x.$$

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на $2x$, применить теорему о пределе дроби и формулу (17, 3). В числителе в этой формуле $k=-\frac{1}{2}$, в знаменателе $k=2$.

Ответ. $\frac{1}{e^2\sqrt{e}}$.

Задача 17, 15. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на x, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x+4}}{\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x+4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^4}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^4}=$$
$$=\frac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x\right]^2\cdot 1}{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x\right]^2\cdot 1}=\frac{(e^7)^2}{(e^5)^2}=\frac{e^{14}}{e^{10}}=e^4,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^4=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^4=1$.

Можно было бы сразу записать

$$\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}=\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{4}$$

и, учитывая, что предел второго сомножителя

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{4}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x+7}{x+5}\right)^{4}=1^4=1,$$

отыскивать только предел первого множителя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+5}\right)^{2x}$, что упростило бы записи.

Задача 17, 16 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}.$$

Указание. Числитель и знаменатель дроби разделить на $3x$ и перейти к пределу. Для упрощения записей полезно представить выражение, стоящее под знаком предела, в виде

$$\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}=\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{3}$$

и учесть, что предел второго сомножителя равен 1.

Ответ. $e^{-\frac{1}{3}}$.

Задача 17, 17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}.$$

Указание. $\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}=\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x}\left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{2}.$

Учесть, что предел второго сомножителя равен 1, а для определения предела первого сомножителя числитель и знаменатель дроби нужно разделить на $4x$ и перейти к пределу в числителе и знаменателе дроби: $\dfrac{\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{3x}}{\left(1+\frac{3}{4x}\right)^{3x}}.$

Ответ. e^{-3}.

Задача 17, 18. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x+3}.$

Указание. $\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x+3}=\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{x}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{3}.$

Предел второго сомножителя равен 1, а при определении предела первого сомножителя нужно числитель и знаменатель дроби разделить на $3x$.

Ответ. $e^{-\frac{2}{3}}$.

Задача 17, 19 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x+3}.$$

Ответ. e^2.

Задача 17, 20. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x$.

Решение. Воспользуемся указаниями стр. 119. Здесь

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+3},$$

а

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}=1;$$

$$\varphi(x)=x, \text{ а } \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$

Перепишем наш пример так:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^x.$$

У нас $f(x)-1=\frac{2x-1}{x^2+3}$, а потому $\frac{1}{f(x)-1}=\frac{x^2+3}{2x-1}$; на основании формулы (17, 7) показатель степени $x=\frac{x^2+3}{2x-1}\frac{2x-1}{x^2+3}x$, а потому

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}\frac{2x-1}{x^2+3}x}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}}=e^2,$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}=e, \text{ а } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}=2$$

(если $\frac{2x-1}{x^2+3}=z$, то $\frac{x^2+3}{2x-1}=\frac{1}{z}$, $z\to 0$, когда $x\to\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e).$$

Задача 17, 21 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1}\right)^{3x-1}.$$

Указание (см. указание на стр. 119).

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1};\quad f(x)-1=\frac{x+1}{x^2+x+1};$$

показатель степени

$$\varphi(x)=3x-1=\frac{x^2+x+1}{x+1}\,\frac{x+1}{x^2+x+1}\,(3x-1)$$

(см. пояснения к предыдущей задаче).

Ответ. e^3.

Задача 17, 22. Найти $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

Решение. Предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x}{\sin a}=1$, а показатель степени $\dfrac{1}{x-a}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, когда $x\to a$. Решение примера проведем на основании указаний стр. 119. У нас

$$f(x)=\frac{\sin x}{\sin a};\quad f(x)-1=\frac{\sin x}{\sin a}-1=\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}=\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}.$$

На основании формулы (17, 7) показатель степени запишем в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{x-a}=\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\;\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\;\frac{1}{x-a},$$

и тогда

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left[1+\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)\right]^{\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}\cdot\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to a}\left(1+\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}}=e^{\operatorname{ctg}a},$$

Так как $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}}=e;$

$$\lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{\sin a}\,\frac{1}{x-a}=$$

$$=\frac{2}{\sin a}\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\frac{2}{\sin a}\cdot\cos a\cdot\frac{1}{2}=\operatorname{ctg} a.$$

Объяснение: 1) постоянная величина $\frac{2}{\sin a}$ вынесена за знак предела;

2) $\lim\limits_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=\cos\frac{a+a}{2}=\cos a.$

3) Для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$ применена подстановка $x-a=z$ и $z\to 0$, когда $x\to a$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{z}{2}}{z}=\frac{1}{2}$$

на основании формулы (16, 2).

Задача 17, 23. Найти $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m$.

Решение. Здесь опять-таки следует использовать указания стр. 119, так как $f(m)=\cos\frac{x}{m}$, причем x следует рассматривать как величину постоянную. Предел

$$\lim_{m\to\infty}f(m)=\lim_{m\to\infty}\cos\frac{x}{m}=1,$$

а показатель степени m неограниченно возрастает по абсолютной величине. Составим

$$f(m)-1=\cos\frac{x}{m}-1=-2\sin^2\frac{x}{2m}.$$

Показатель степени преобразуем по формуле (17, 7):

$$\varphi(m)=m=\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2m}}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m,$$

и тогда

$$\lim_{m\to\infty}\left(\cos\frac{x}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{x}{m}-1\right)\right]^m=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[1-2\sin^2\frac{x}{2m}\right]^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2m}}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m}=$$

$$= \left\{\lim_{m\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2m}}}\right\}^{\lim\limits_{m\to\infty}\left(-2\sin^2\frac{x}{2m}\right)m} = e^{-2\lim\limits_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m}} = 1,$$

так как $\lim\limits_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m} = \lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}} = \lim\limits_{m\to\infty}\sin\frac{x}{2m}\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$.

Если $m\to\infty$, то $\frac{x}{2m}\to 0$ и $\sin\frac{x}{2m}\to 0$.

Для вычисления второго предела $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}}$ сделаем подстановку $\frac{x}{2m}=z$, тогда $z\to 0$, когда $m\to\infty$, а $\frac{1}{m}=\frac{2z}{x}$, и получим, учитывая, что x — величина постоянная

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2m}}{\frac{1}{m}} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\frac{2z}{x}} = \frac{x}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \frac{x}{2}\cdot 1 = \frac{x}{2}$$

и, значит,

$$\lim_{m\to\infty} m\sin^2\frac{x}{2m} = 0\cdot\frac{x}{2} = 0, \text{ а } e^0 = 1.$$

Задача 17, 24 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Ответ. e^{-1}.

Задача 17, 25 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Ответ. $e^{-\frac{1}{2}}$.

ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление пределов выражений, содержащих логарифмы и показательные функции.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Теорема. *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и этот предел положителен* $(A>0)$, *то*

$$\lim_{x\to a}[\log_b f(x)] = \log_b[\lim_{x\to a} f(x)]. \qquad (18, 1)$$

Короче (но менее точно): можно переходить к пределу под знаком логарифма.

Замечание. Требование теоремы о том, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ должен быть положительным, связано с тем, что число A в правой части формулы (18, 1) стоит под знаком логарифма, а логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента.

Между десятичными и натуральными логарифмами существует связь, выражаемая формулой

$$\lg x = M \ln x, \tag{18, 2}$$

где M — модуль перехода: $M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}43429.$

Сначала выполним упражнения на непосредственное применение формулы (18, 1).

Задача 18, 1. Найти $\lim\limits_{x\to 9} \lg(x+1)$.

Решение. На основании формулы (18, 1)

$$\lim_{x\to 9}\left[\lg(x+1)\right] = \lg\left[\lim_{x\to 9}(x+1)\right] = \lg 10 = 1.$$

Задача 18, 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\frac{x^2+x+5}{x^2-2}$.

Решение. На основании формулы (18, 1) можно записать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{x^2+x+5}{x^2-2}\right] = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+5}{x^2-2}\right] = \ln\underbrace{\left[\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}\right]}_{\text{числитель и знаменатель разделены на } x^2} =$$

$$= \ln 1 = 0.$$

Задача 18, 3. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\left[\ln\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right]$.

Решение. Воспользуемся опять формулой (18, 1):

$$\lim_{x\to 4}\left[\ln\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{8})(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})}{x+4-8}\right] = \ln\left[\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+4}+\sqrt{8})\right] =$$

$$= \ln 2\sqrt{8} = \ln 4\sqrt{2}.$$

Перейдем теперь к вычислению пределов, которые играют важную роль в дифференциальном исчислении.

Задача 18, 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=$
$=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$

Результатом этой задачи нам придется часто пользоваться, а потому для ссылок запишем его отдельно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(+x)}{x}=1. \tag{18, 3}$$

Получите самостоятельно более общий результат:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha. \tag{18, 3a}$$

Задача 18, 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, считая, что a — положительная постоянная величина, не равная 1.

Решение. Сделаем подстановку:

$$a^x-1=z. \tag{18, 4}$$

На основании указания стр. 112 мы должны: 1) величину x, стоящую под знаком предела, выразить через z и 2) определить предел новой переменной z, когда старая переменная $x\to 0$.

Из подстановки (18,4) следует, что $a^x=1+z$, $x\ln a=\ln(1+z)$; $x=\frac{\ln(1+z)}{\ln a}$, а $\lim\limits_{x\to 0}z=\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0$, т. е. при $x\to 0$ и $z\to 0$.

Теперь уже $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{z}{\frac{\ln(1+z)}{\ln a}}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln a}{\frac{\ln(1+z)}{z}}=\frac{\ln a}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}}=$
$=\ln a$, так как на основании (18, 3) предел знаменателя равен 1, а предел $\lim\limits_{x\to 0}\ln a=\ln a$, ибо a, а вместе с ним $\ln a$ — величина постоянная. Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{18, 5}$$

Если в формуле (18, 5) взять $x=\frac{1}{y}$, то $a^x=a^{\frac{1}{y}}$, $y=\frac{1}{x}$ и

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty,\text{ и тогда }\lim_{y\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{y}}-1}{\frac{1}{y}}=\ln a,\text{ т. е.}$$

$$\lim_{y\to\infty}y\left(a^{\frac{1}{y}}-1\right)=\ln a. \tag{18, 6}$$

Если $y \to \infty$, принимая целые и положительные значения, то это равенство можно переписать так:

$$\lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a. \qquad (18,7)$$

Задача 18,6. Найти $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$.

Решение. Решение этой задачи потребует некоторых искусственных преобразований для того, чтобы можно было использовать результаты двух предыдущих задач. Выражение, стоящее под знаком предела, умножим и разделим на x:

$$\frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1} = \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{x}{3^{2x}-1} = \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{1}{\frac{9^x-1}{x}}, \text{ так как } 3^{2x} = 9^x.$$

и теперь

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\substack{\text{Использовать} \\ \text{формулу (18,3)}}} \underbrace{\frac{1}{\frac{9^x-1}{x}}}_{\substack{\text{Использовать} \\ \text{формулу (18,5)}}} = \frac{1}{\ln 9},$$

Задача 18,7 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{x}$.

Указание. $\frac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{x} = \frac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{\operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. При отыскании предела первого множителя положить $\operatorname{tg} x = z$ и воспользоваться результатом задачи 18,5.

Ответ. $\ln 3$.

Задача 18,8 (для самостоятельного решения) Найти

$$\lim_{x \to 1} (1 + 5 \ln x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Указание. Сделать подстановку $5 \ln x = z$ и воспользоваться формулой (17,2).

Ответ. e^5.

Задача 18,9. (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}.$$

Указание. В числителе дроби отнять и прибавить 1, записать дробь в виде

$$\frac{a^x - 1 - b^x + 1}{x} = \frac{a^x - 1 - (b^x - 1)}{x} = \frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x}$$

и воспользоваться формулой (18,5).

Ответ. $\ln \frac{a}{b}$.

Задача 18,10 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}.$$

Ответ. $\alpha-\beta$.

Задача 18,11. Доказать, что если

$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)] = A, \text{ то } \lim_{x\to a} f(x) = e^A.$$

Доказательство. На основании того, что мы имеем право переходить к пределу под знаком логарифма, можно вместо $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)]$ записать $\ln[\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = e^A$.

Итак, если $\lim\limits_{x\to a}[\ln f(x)] = A$, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = e^A. \tag{18,8}$$

Задача 18,12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}}$.

Решение. Сделаем подстановку $(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = y$, откуда

$$\ln y = \frac{3}{x}\ln(1+\operatorname{tg} x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\ln(1+\operatorname{tg} x) =$$

$$= \underbrace{3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}}_{\mathrm{I}}\underbrace{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}_{\mathrm{II}}.$$

При вычислении первого предела положить $\operatorname{tg} x = z$, использовать результат задачи 18,4; получится, что $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y) = 3\cdot 1\cdot 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y) = 3$, и на основании (18,8) $\lim\limits_{x\to 0} y = e^3$, а значит, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = e^3$.*

Задача 18,13 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{5}{x}}$$

Ответ. e^5.

---

* Задачу можно решить и иначе: $(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = (1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{3\operatorname{tg} x}{x}} = [(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}]^{\frac{3\operatorname{tg} x}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{x}} = [\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg} x}{x}} = e^3$ (при вычислении предела в квадратной скобке положить $\operatorname{tg} x = z$, а $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$)

Задача 18,14 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

Указание. В числителе дроби заменить 1 на $\ln e$. Тогда выражение, стоящее под знаком предела, запишется так:

$$\frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \frac{\ln \frac{x}{e}}{x - e} = \ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}},$$

и теперь

$$\lim_{x\to e} \ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}} = \ln \lim_{x\to e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}} = \ln \lim_{x\to e}\left[1 + \frac{x}{e} - 1\right]^{\frac{1}{x-e}} =$$

$$= \ln \lim_{x\to e}\left(1 + \frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{e}} = \ln\left[\lim_{x\to e}\left(1 + \frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}}\right]^{\frac{1}{e}} = \ln e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}.$$

Ответ. $\frac{1}{e}$.

ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Сравнение бесконечно малых величин.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — *бесконечные малые функции при* $x \to a$, т. е. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, и $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$, причем a может быть как числом, так и одним из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞. Тогда имеют место приводимые ниже определения.

Определение 1. *Если* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией* $\varphi(x)$, *а функция* $\varphi(x)$ *называется бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с функцией* $f(x)$.

Определение 2. *Если* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой функцией низшего порядка малости, по сравнению с* $\varphi(x)$, *а* $\varphi(x)$ *называется бесконечно малой функцией высшего порядка малости, по сравнению с функцией* $f(x)$.

Определение 3. *Если* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$ и $A \neq 0$, *то бесконечно малые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *называются бесконечно малыми одного и того же порядка.*

Определение 4. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1$, *то бесконечно малые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *называются эквивалентными, или равносильными. В этом случае пишут:* $f(x)\sim\varphi(x)$.

Определение 5. *Если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^k}=A$ *и* $A\neq 0$, *то бесконечно малая функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой k-го порядка малости, по сравнению с бесконечно малой функцией* $\varphi(x)$ (из этих определений вовсе не следует, что отношение двух бесконечно малых функций всегда имеет конечный или бесконечный предел. Может оказаться, что отношение двух бесконечно малых функций не имеет ни конечного, ни бесконечного предела).

Теорема (о замене бесконечно малых фукций им эквивалентными). *Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую из них или какую-либо одну заменить эквивалентными им.*

Задача 19,1. Доказать, что если $x\to 0$, то функция x^k, где $k>1$, — бесконечно малая высшего порядка, чем x.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^k}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{k-1}=0$, так как по условию $k-1>0$. Этим и доказано требуемое.

Задача 19,2. Доказать, что при $x\to 0$ функции $\sin x$ и $\operatorname{tg}x$ — эквивалентные бесконечно малые.

Решение. Если мы докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}=1$, то тем самым будет доказано, что $\operatorname{tg}x\sim\sin x$ при $x\to 0$.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Задача 19,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что при $x\to 0$ 1) функции $\sin x\sim x$; 2) $\ln(1+x)\sim x$; 3) $e^x-1\sim x$; 4) $\sin kx\sim kx$; 5) $\ln(1+kx)\sim kx$;

Указание. Рассмотреть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$;* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}$ и убедиться, что каждый из этих пределов равен 1. Полезно запомнить, что $\ln(1+kx)\sim kx$, $\sin kx\sim kx$ при $x\to 0$.

Задача 19,4. Доказать, что при $x\to 0$ функции $\sin kx$ и $l\cdot x\ (k\neq 0,\ l\neq 0)$ — бесконечно малые одного и того же порядка.

Доказательство. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{lx}$ и убедимся, что он равен постоянной величине, отличной от нуля (см. определение 3). Действительно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{lx}=\frac{k}{l}\neq 0$.

---

* См. задачу 18,4.

В частности, например, $\sin 2x$ и $3x$ при $x \to 0$ будут бесконечно малыми одного и того же порядка.

Задача 19,5. Показать, что если x — бесконечно малая первого порядка, то $1 - \cos x$ — бесконечно малая второго порядка, по сравнению с x.

Решение. Чтобы показать требуемое, надо на основании определения 5 показать, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ есть величина постоянная, не равная нулю. Действительно, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. При решении следующих задач полезно знать, что если $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} x^0 = 1$, так как переменная величина, стремясь к a, возводится в степень, равную нулю, а потому сохраняет постоянное значение, равное 1. Предел ее поэтому равен 1.

Задача 19,6. Считая, что x — бесконечно малая первого порядка, определить порядок малости функции $\sin x - \operatorname{tg} x$.

Решение. Отличие этой задачи от предыдущей состоит в том, что в предыдущей задаче порядок малости функции $1 - \cos x$ задавался, и требовалось только подтвердить это расчетом. В этой задаче порядок малости функции $\sin x - \operatorname{tg} x$, не задан, а подлежит определению. Будем считать, что порядок малости этой функции равен k и найдем k такое, чтобы $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k}$ имел конечное значение, отличное от нуля (см. определение 5 на стр. 132):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^k} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^k} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^k} = 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\ (\cos x - 1)}{x^k} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^k} = -2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^{k-1}} =$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \frac{1}{x^{k-3}} = -2 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right) \lim_{x \to 0} x^{3-x} =$$

$$= -2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \lim_{x \to 0} x^{3-k} = -2 \frac{1}{2} \lim_{q \to 0} x^{3-k}.$$

Теперь дело решает предел $\lim\limits_{x \to 0} x^{3-x}$. Если предположить, что $3 - k > 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} x^{3-k} = 0$. Если же $3 - k < 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} x^{3-k} = \infty$.

Чтобы получить конечный и отличный от нуля $\lim_{x\to 0} x^{3-k}$, надо отбросить предположения $3-k>0$ и $3-k<0$, так как в первом случае искомый предел равен нулю, а во втором — бесконечности. Только тогда, когда $3-k=0$, т. е. когда $k=3$, мы получим, на основании сделанного замечания (см. задачу 19,5), что $\lim_{x\to 0} x^{3-k}=1$, а искомый предел равен $-\frac{1}{2}$, т. е. имеет конечное и отличное от нуля значение. Итак, $k=3$ и при $x\to 0$ функция $\sin x-\operatorname{tg} x$ — бесконечно малая третьего порядка малости, по сравнению с x.

Задача 19,7. Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок малости бесконечно малой функции

$$\ln(1+x^2+x^3).$$

Решение. Будем считать, что искомый порядок малости равен k и определим k так, чтобы $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}$ имел конечное значение, отличное от нуля.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^2+x^3}\cdot\frac{x^2+x^3}{x^k}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^2+x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^k}.$$

Первый предел равен 1 (подстановка: $x^2+x^3=z$ приводит к хорошо известному пределу: $\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1$).

Отыщем теперь второй предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{x^k}=\lim_{x\to 0}(x^{2-k}+x^{3-k})=\lim_{x\to 0}x^{2-k}(1+x).$$

Последний предел имеет конечное значение только в том случае, когда $2-k=0$, т. е. $k=2$, так как если $k<2$, то этот предел равен нулю, а если $k>2$, то при $x\to 0$ x^{2-k} — величина бесконечно большая, при $k=2$ $\lim_{x\to 0}x^{2-k}=1$.

Таким образом, если $k=2$, то $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^3)}{x^k}=1\cdot 1\neq 0$.

Итак, при $x\to 0$ бесконечно малая функция $\ln(1+x^2+x^3)$ имеет второй порядок малости относительно бесконечно малой x.

Задача 19,8 (для самостоятельного решения). Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок бесконечно малой функции

$$\ln(1+x+x^2).$$

Ответ. Первого порядка малости ($k=1$).

Задача 19,9. Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок малости бесконечно малой функции

$$\cos 3x - \cos x.$$

Решение. Определим число k так, чтобы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^k}$ имел конечное значение, не равное нулю. Учитывая, что $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \sin x$, искомый предел перепишем в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^k} = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x \sin x}{x^k} =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{k-2}} = -2\cdot 2\cdot 1\cdot \lim_{x\to 0} x^{2-k}.$$

Если взять $k<2$, то $\lim\limits_{x\to 0} x^{2-k} = 0$, и тогда весь искомый предел будет равен нулю, а мы ищем такое значение k, при котором искомый предел был бы конечен, но не равен нулю.

Если взять $k>2$, то $\lim\limits_{x\to 0} x^{2-k} = \infty$, что также не годится, так как тогда искомый предел не конечен. И только тогда, когда $k=2 \lim\limits_{x\to 0} x^{2-k} = 1$, а искомый предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{x^k} = -4\cdot 1 = -4$, т. е. имеет конечное и не равное нулю значение.

Итак, $k=2$. При $x\to 0$ бесконечно малая функция $\cos 3x - \cos x$ имеет второй порядок малости, по сравнению с x — бесконечно малой первого порядка.

Задача 19,10 (для самостоятельного решения). Считая, что x — бесконечно малая величина первого порядка, определить порядок бесконечно малой функции $\cos 2x - \cos x$.

Ответ. $k=2$.

Теперь выполним упражнения, связанные с использованием теоремы (стр. 132) о замене бесконечно малых функций им эквивалентными. Эта теорема во многих случаях значительно упрощает определение пределов.

Задача 19,11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x}$.

Решение. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби — функции бесконечно малые. Из задачи 19,3 нам известно, что при $x\to 0$ бесконечно малая функция $\ln(1+3x)\sim 3x$, $\sin 4x\sim 4x$, а потому, используя эту теорему, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

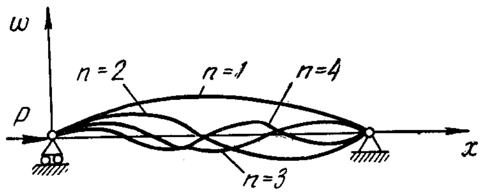
Задача 19,12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x^4+x^2+x}$.

Решение. Так как при $x \to 0$ бесконечно малая функция $\sin 3x \sim 3x$, то заменяя $\sin 3x$ эквивалентной ей бесконечно малой $3x$, получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x^4 + x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{x^4 + x^2 + x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{x(x^3 + x + 1)} = 3.$$

Задача 19, 13 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 132), найти $\lim\limits_{x \to n} \frac{\cos ax - \cos an}{n^2 - x^2}$.

Ответ. $\frac{a \sin an}{2n}$.



Задача 19, 14 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремой (стр. 132), найти $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{\sin kx}\right)^n$.

Ответ. $\frac{1}{k^n}$.

Задача 19, 15 (для самостоятельного решения). Используя ту же теорему, доказать, что

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\ln(1 - x)} = -1; \quad 2)\ \lim_{x \to 0} \operatorname{cosec} x \cdot \ln(1 + x) = 1.$$

ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Непрерывность функции. Односторонние пределы. Точки разрыва и их классификация.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен значению функции в точке $x = a$, то функция $f(x)$ называется непрерывной при $x = a$ или в точке a, т. е.*

для функции $f(x)$, непрерывной при $x = a$ должно выполняться равенство

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{20, 1}$$

При этом следует иметь в виду, что для непрерывности функции при $x = a$ равенство (20,1) должно выполняться при стремлении x к a любому закону.

Для того чтобы согласно этому определению функция была непрерывной при $x = a$, требуется выполнение таких трех условий:

1. Точка a должна принадлежать области определения функции, так как иначе о значении функции $f(a)$ в этой точке не имеет смысла говорить. Функция $f(x)$ должна быть определена не только в самой точке a, но и в некоторой ее окрестности.

2. Функция $f(x)$ должна иметь конечный предел при $x \to a$

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

3. Этот предел A должен быть равен значению функции в точке $x = a$, т. е. должно выполняться равенство $f(a) = A$.

Если соотношение (20, 1) не имеет места для данной функции $y = f(x)$ в данной точке $x = a$, то функция называется разрывной в точке $x = a$, а сама точка $x = a$ называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Функция непрерывная в каждой точке некоторой области (интервала, отрезка) называется непрерывной в этой области (в интервале, на отрезке).

***Определение 2.** Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если в этой точке ее приращение Δy стремится к нулю, когда приращение аргумента Δx стремится к нулю, или иначе: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. если*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (20,2)$$

Односторонние пределы функции

а) Левосторонний предел функции. *Если отыскивается предел функции $f(x)$ при условии, что x, стремясь к a, может принимать только такие значения, которые меньше a, то этот предел, если он существует, называется левосторонним пределом функции $f(x)$ (или левым пределом функции). Для того чтобы показать, что x стремится к a, оставаясь меньше a, употребляется запись: $x \to a - 0$, а левосторонний предел функции обозначается символами:*

$$1)\ \lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{или} \quad 2)\ f(a-0).$$

б) Правосторонний предел функции. *Если отыскивается предел функции $f(x)$ при условии, что x, стремясь к a, может принимать только такие значения, которые больше a, то этот предел, если он существует, называется правосторонним пределом функции $f(x)$ (или правым пределом функции).*

То что x, стремясь к a, остается больше a, обозначается так: $x \to a + 0$, правосторонний предел функции обозначается одним из символов:

$$1)\ \lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{или} \quad 2)\ f(a+0).$$

*Очевидно, что предел функции при $x \to a$ существует только тогда, когда существуют и равны между собой ее левосторонний и правосторонний пределы, т. е. когда $f(a-0)=f(a+0)$. Символы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ являются только сокращенным обозначением левостороннего и правостороннего пределов и ничего другого не обозначают. Их можно применять только в случаях, когда определяющие их пределы существуют.**.

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется непрерывной при $x=a$, если ее левосторонний и правосторонний пределы существуют, между собой равны и равны значению функции в этой точке, т. е. $f(a)$.*

Таким образом, для непрерывности функции в точке $x=a$ требуется, чтобы выполнялись равенства

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a). \tag{20,3}$$

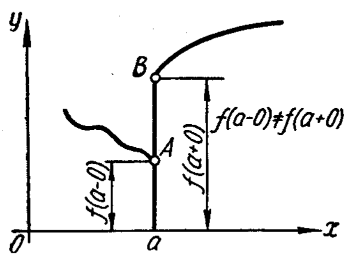
Точки разрыва и их классификация

Если равенство (20,3) в какой-либо его части не выполняется, то о точке $x=a$ говорят, что она является точкой разрыва.

1. Точка разрыва первого рода

Определение. *Если левосторонний предел функции $f(a-0)$ и ее правосторонний предел $f(a+0)$ существуют, но не равны между собой, т. е. если*

$$f(a-0) \neq f(a+0), \tag{20,4}$$



Фиг. 20,1.

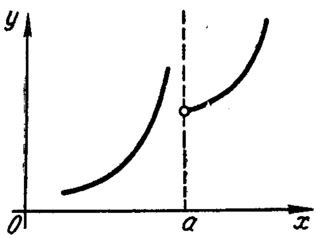
то точка a называется точкой разрыва первого рода (фиг. 20,1).

---

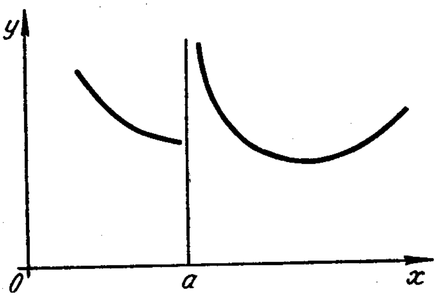
* Символ $x \to a$ означает, что x стремится к a, изменяясь по любому закону. Тем самым этот символ отличается от символов $x \to a-0$ и $x \to a+0$.

2. Точка разрыва второго рода

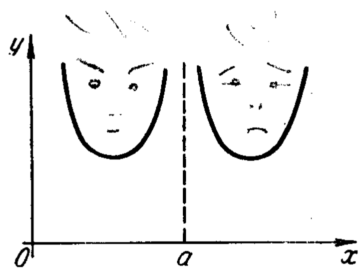
Определение. *Если в точке $x = a$ не существует левосторонний или правосторонний предел функции или оба одновременно, то эта точка называется точкой разрыва второго рода (фиг. 20,2; 20,3; 20,4). На фиг. 20,4 отсутствует левосторонний предел функции; на фиг. 20,3 нет правостороннего предела функции, а на фиг. 20,4 у функции нет ни лёвостороннего, ни правостороннего предела. Во всех этих случаях функция в точке $x = a$ терпит разрыв второго рода (иначе: точка $x = a$ — точка разрыва второго рода).*



Фиг. 20,2.



Фиг. 20,3.



Фиг. 20,4.

3. Устранимый разрыв

Если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет левосторонний и правосторонний пределы и эти пределы между собой равны, но их значения не совпадают со значением функции в точке a, т. е. со значением $f(a)$, то точка $x = a$ называется точкой «устранимого» разрыва. Таким образом, в этом случае

$$f(a-0) = f(a+0) \neq f(a). \qquad (20,5)$$

Разрыв «устраняется» тем, что полагают $f(a)$ равным $f(a-0)$ и $f(a+0)$, т. е. принимают, что $f(a) = \lim\limits_{a \to 0} f(x)$.

Свойства непрерывных функций

Теорема. Сумма, разность, произведение и частное двух функций, непрерывных в одной и той же точке a, есть функция непрерывная в той же точке, причем в случае частного предполагается, что функция делитель не обращается в нуль при $x = a$. (Теорема остается верной для суммы и произведения любого конечного числа функций).

Упражнения, связанные с первым определением непрерывной функции

Задача 20,1. Доказать, что функция $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$ непрерывна при любом значении x, т. е. непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Решение. Заданная функция определена на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Возьмем из этого интервала произвольное значение $x = a$. На основании известных теорем о пределе функции мы можем написать

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (3x^3 - 4x + 5) = 3a^3 - 4a + 5.$$

Но ведь и $f(a) = 3a^3 - 4a + 5$ и, таким образом, у нас выполнено соотношение (20,1): $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, а это и значит, что рассматриваемая функция непрерывна при $x = a$. Учитывая, что a произвольное число интервала $(-\infty, +\infty)$, мы заключаем, что заданная функция непрерывна при любом значении x, т. е. на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Задача 20,2. Доказать, что любой многочлен

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

непрерывен при всех значениях x.

Решение. Пусть $x = a$ — **произвольное** значение x из бесконечного интервала $(-\infty, +\infty)$, в котором определена заданная функция.

Докажем, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Действительно, на основании известной теоремы о пределе целой рациональной функции имеем

$$\lim_{x \to a} f(x) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + a_2a^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Но полученное выражение есть не что иное, как значение заданной функции при $x + a$, т. е. $f(a)$, и тем самым мы убедились в том, что выполняется соотношение (20,1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, а потому и заключаем, что многочлен непрерывен всюду, т. е. при любом значении x.

Задача 20,3. Доказать, что любая дробно-рациональная функция

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены) непрерывна для всех значений x, за исключением тех из них, при которых знаменатель обращается в нуль.

Дробно-рациональная функция определена для всех значений x, кроме тех, которые знаменатель обращают в нуль. Пусть a — произвольное число, такое, что $Q(a) \neq 0$. Из соотношения (14,3) следует, что $\lim\limits_{x \to a} R(x) = R(a)$, т. е. соотношение (20,1) выполнено, и мы заключаем, что *дробно-рациональная функция непрерывна при всех значениях x, кроме тех из них, которые обращают знаменатель в нуль, т. е. дробно-рациональная функция непрерывна при всех значениях x, при которых она определена.*

Задача 20,4 (для самостоятельного решения). При каких значениях x непрерывна дробно-рациональная функция

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 5}{x^2 - 6x + 8}.$$

Ответ. Функция непрерывна всюду, кроме значений $x = 2$ и $x = 4$, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. О непрерывности функции в этих точках не может быть и речи, так как они не принадлежат области определения функции.

Задача 20,5 (для самостоятельного решения). Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ответ. Функция непрерывна при всех значениях x, кроме $x = 0$. Значение $x = 0$ не принадлежит области определения функции: $f(0)$ не существует.

Упражнения, связанные с определением приращения функции

Эти упражнения будут приводиться и на следующем практическом занятии. Читатель должен приобрести прочные навыки в определении приращения функции, так как с необходимостью определять приращение функции приходится очень часто встречаться.

Задача 20,6. Найти приращение Δy функции $f(x) = x^2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 3$ к новому значению $x_2 = 4$.

Решение. Приращение аргумента $\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 3 = 1$. У нас $f(x) = x^2$, а потому $f(x_2) = f(4) = 4^2 = 16$, $f(x_1) = f(3) = 3^2 = 9$, а приращение функции $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(4) - f(3) = 16 - 9 = 7$.

Задача 20,7. Найти приращение Δy функции $f(x)=x^3$ при переходе аргумента от значения x к значению $x+\Delta x$.

Решение. $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. Найдем $f(x+\Delta x)$. Так как у нас $f(x)=x^3$, то $f(x+\Delta x)$ получим заменой x на $x+\Delta x$ в выражении функции $f(x):f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3$, а потому

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3;$$

$$\Delta y=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3.$$

Пользуясь этой формулой, вычислите, чему равно приращение Δy функции, когда x от значения $x_1=2$ переходит к значению $x_2=2{,}01$.

Ответ. 0,120 601.

Задача 20,8 (для самостоятельного решения). Найти приращение Δy функции $f(x)=x^3$ при переходе аргумента от значения $x_1=2$ к новому значению $x_2=3$.

Ответ. $\Delta y=19$.

Задача 20,9. Найти приращение Δy функции $f(x)=\sin x$ при переходе аргумента от значения x к значению $x+\Delta x$.

Решение. $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. У нас $f(x)=\sin x$. Мы найдем $f(x+\Delta x)$, если заменим x на $x+\Delta x$ в выражении функции $f(x)$:

$$f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x);\quad \Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$$

и, применяя формулу

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

получим

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}. \qquad (20{,}6)$$

Задача 20,10 (для самостоятельного решения). Найти приращение Δy функции $y=\cos x$ при переходе аргумента от значения x к значению $x+\Delta x$.

Ответ. $\Delta y=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}. \qquad (20{,}7)$

Задача 20,11 (для самостоятельного решения). Найти приращение функции $f(x)=\sin x$ при переходе аргумента от значения $x_1=\frac{\pi}{6}$ к значению $x_2=\frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Задача 20,12. Найти приращение функции $y=a^x$.

Решение. $f(x)=a^x$; $f(x+\Delta x)=a^{x+\Delta x}$; $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$;

$$\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1). \qquad (20{,}8)$$

Задача 20,13. Найти приращение функции $y = \ln x$.

Решение. У нас $f(x) = \ln x$; $f(x + \Delta x) = \ln(x + \Delta x)$;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x;$$

$$\Delta y = \ln\frac{x + \Delta x}{x}; \quad \Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Задача 20,14 (для самостоятельного решения). Найти приращение ΔS функции $S = \frac{gt^2}{2}$ при переходе аргумента от значения t к значению $t + \Delta t$.

Ответ. $\Delta S = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}$.

Задача 20,15. Доказать, что при $x = 0$ функция $\sin x$ непрерывна.

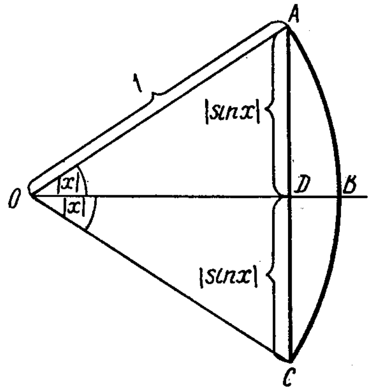
Решение. Мы должны обнаружить, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$.

Учащийся не должен думать, что мы здесь имеем право просто подставить под знак минуса нуль вместо x. Это мы имели бы право сделать, если бы непрерывность функции $\sin x$ при $x = 0$ была уже доказана.

Рассмотрим окружность радиуса $OA = 1$ (фиг. 20,4 *а*). Тогда

$$AD = DC = |\sin x|;$$

$$\breve{AB} = \breve{BC} = |x|.$$



Фиг. 20,4а.

Отрезок AD короче дуги $\breve{AB}$, а потому $|\sin x| \leqslant |x|$. Если теперь угол x уменьшать, делая его все меньшим и меньшим по абсолютной величине, мы можем и синус этого угла сделать по абсолютному значению сколь угодно малым, а это значит, что при $x \to 0$ $\sin x$ есть величина бесконечно малая, и ее предел

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0, \text{ т. е. } \lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0.$$

И так как здесь выполняется соотношение (20,1): $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, то при $x = 0$ функция $\sin x$ действительно непрерывна.

Задача 20,16. Доказать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x.

Решение. В задаче 20,9 для определения приращения $f(x) = \sin x$ была получена формула (29,6), верная при любом значении x.

Воспользуемся теперь вторым определением непрерывной функции (20,2) и докажем, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

На основании результата предыдущей задачи $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$, когда $\Delta x \to 0$; что касается $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, то он величина ограниченная при любом значении $x: |\cos x| \leqslant 1$. Произведение же величины бесконечной малой на ограниченную есть величина бесконечно малая, поэтому, когда $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Так как это выполняется при любом значении x, то мы теперь вправе утверждать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x (иначе говорят: «непрерывна всюду», «непрерывна на всей числ вой оси»). Теперь уже, определяя предел $\sin x$ при $x \to a$, мы вправе с полным основанием писать:

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a.$$

Задача 20,17 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \cos x$ непрерывна при всех значениях x.

Указание. Воспользоваться формулой (20,7).

Задача 20,18 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ непрерывны в любой точке своей области существования.

Указание. Использовать непрерывность всюду функций $\sin x$ и $\cos x$ и теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций.

Упражнения, связанные со вторым определением непрерывной функции

Задача 20,19. Пользуясь вторым определением непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ непрерывна в произвольной точке x.

Решение. $f(x + \Delta x) = 5(x + \Delta x)^2 - 6(x + \Delta x) + 2;$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 10x\Delta x - 6\Delta x + 5\Delta x^2 =$$
$$= (10x - 6)\Delta x + 5\Delta x^2.$$

Найдем теперь предел Δy при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [(10x - 6)\ \Delta x + 5\Delta x^2] = 0$$

при любом значении x, что и доказывает непрерывность заданной функции при любом значении x.

Задача 20,20 (для самостоятельного решения). Пользуясь вторым определением непрерывной функции, доказать, что функция $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$ непрерывна при любом значении x.

Указание. Найти Δy, после чего перейти к пределу при $\Delta x \to 0$.

Задача 20,21 (для самостоятельного решения). Доказать, что при $x=3$ функция $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ непрерывна.

Указание. Составить $\Delta y=f(3+\Delta x)-f(3)$ и найти $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$.

Задача 20,22 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ непрерывна при любом значении x

Указание. Определить Δy, после чего перейти к пределу при $\Delta x \to 0$.

Упражнения, связанные с классификацией точек разрыва.

Задача 20,23. Испытать на непрерывность при $x=1$ функцию

$$f(x)=2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}.$$

Решение. Так как знаменатель $1-x$ дроби равен нулю при $x=1$, то $f(x)$ разрывна при $x=1$. Установим характер этой точки разрыва. Найдем сначала левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to 0-1}f(x)$. Если $x\to 1-0$, то можно положить $x=1-\alpha\ (\alpha>0)$ и считать, что α, оставаясь положительной, стремится к нулю, Заменяя x на $1-\alpha$,

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-(1-\alpha)}}}\right)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=2,$$

так как при $\alpha\to+0$ величина $\frac{1}{\alpha}$ бесконечно большая, $2^{\frac{1}{\alpha}}$ также бесконечно велика, $1+2^{\frac{1}{\alpha}}$—бесконечно большая величина, обратная ей величина $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}$ — бесконечно мала:

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}=0,$$

а потому $\lim\limits_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=2.$

Таким образом

$$f(1-0)=2.$$

Теперь определим правосторонний предел функции. Если $x \to 1+0$, можно положить $x = 1 + \alpha\ (\alpha > 0)$ и считать, что α, оставаясь положительной, стремится к нулю.

Тогда, заменяя x на $1+\alpha$, получим:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-(1+\alpha)}}}\right) = \lim_{x\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\alpha}}}\right) = 3,$$

так как при $\alpha \to +0$, $\frac{1}{\alpha}$ и $2^{\frac{1}{\alpha}}$ — величины бесконечно большие, то $2^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ — величина бесконечно малая, а поэтому

$$\lim_{\alpha\to+0}(1+2^{-\frac{1}{\alpha}}) = 1;\ \lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\alpha}}} = 1;\ \text{а}\ \lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\alpha}}}\right) = 3$$

и, значит, $f(1+0) = 3$.

Итак, у функции **существуют** и левосторонний предел $f(1-0) = 2$, и правосторонний предел $f(1+0) = 3$, но между собой они не равны. Из этого мы заключаем, что точка $x = 1$ является для заданной функции точкой разрыва первого рода.

Задача 20,24 (для самостоятельного решения). Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$ при $x = 2$.

Указание. 1) Найти левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$ (положить $x = 2-\alpha\ (\alpha > 0)$ и найти предел полученной функции при $\alpha \to +0$). Получится, что $f(2-0) = \frac{2}{3}$. 2) Найти правосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$ (положить $x = 2+\alpha\ (\alpha > 0)$ и найти предел полученной функции при $\alpha \to +0$). Получится, что $f(2+0) = 0$.

Ответ. Точка $x = 2$ — точка разрыва первого рода: $f(2-0)$ и $f(2+0)$ существуют, но между собой не равны.

Задача 20,25 (для самостоятельного решения). Испытать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}$ при $x = 0$.

Указание. При $x = 0$ функция терпит разрыв. Левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = \frac{1}{3}$; $f(-0) = \frac{1}{3}$.

Правосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0 : f(+0) = 0$ (символы 1) $x \to -0$ и 2) $x \to +0$ означают, что 1) x стремится к нулю, оставаясь меньше нуля; 2) x стремится к нулю, оставаясь больше нуля).

Левосторонний и правосторонний пределы функции существуют $f(-0)=\frac{1}{3}$, $f(+0)=0$, но между собою не равны: $f(-0)\neq f(+0)$.

Заключение. Точка $x=0$ — точка разрыва первого рода.

Задача 20,26 (для самостоятельного решения). Функцию $f(x)=\frac{5}{2+7^{\frac{4}{5-x}}}$ испытать на непрерывность при $x=5$.

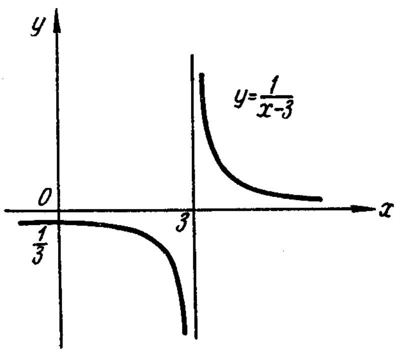
Ответ. $f(5-0)=0$, $f(5+0)=\frac{5}{2}$; $f(5-0)\neq(5+0)$. Точка $x=5$ — точка разрыва первого рода.

Задача 20,27 (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$ в точке $x=0$. Начертить график.

Ответ. Разрыв второго рода: $f(-0)=0$, $f(+0)=+\infty$.

Задача 20, 28 Какого рода разрыв имеет функция $y=\frac{1}{x}$ в точке $x=0$.

Решение. Левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$, а ее правосторонний предел $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$. Таким образом, здесь не существуют ни предел слева, ни предел справа, а потому точка $x=0$ — точка разрыва второго рода.



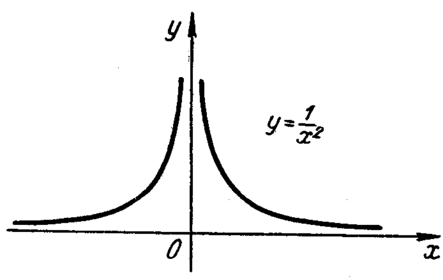
Фиг. 20,5.

Задача 20,29 (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет функция $y=\frac{1}{x-3}$ в точке $x=3$ (фиг. 20,5).

Ответ. Второго рода; при $x\to3$ не существуют ни предел слева, ни предел справа.

Задача 20,30. (для самостоятельного решения). Какого рода разрыв имеет фунция $y=\frac{1}{x^2}$ в точке $x=0$?

Ответ. Второго рода (фиг. 20,6).

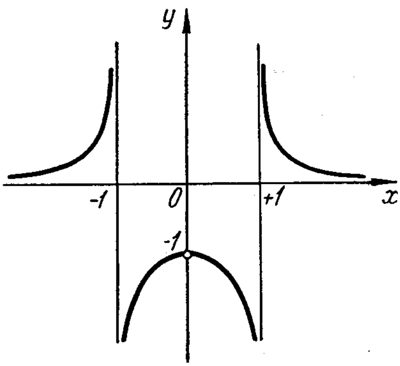


Фиг. 20,6.

Задача 20,31 (для самостоятельного решения). Определить точки разрыва функции $y=\frac{1}{x^2-1}$ и род этих точек разрыва.

Ответ. Точка $x=-1$ и $x=+1$ — точки разрыва второго рода (фиг. 20,7).

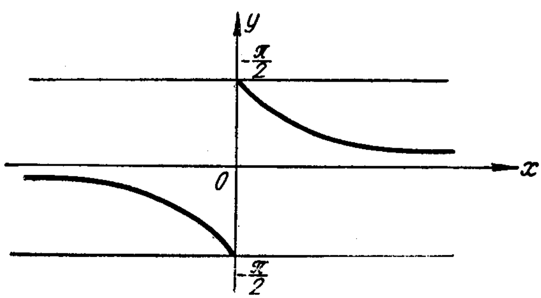
Задача 20,32. Какого рода разрыв в точке $x=0$ имеет функция $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.



Фиг. 20,7

Решение. В точке $x=0$ функция $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ не существует. Определим левосторонний и правосторонний пределы функции: $\lim\limits_{x\to-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$, так как при $x\to-0$ величина $\frac{1}{x}\to-\infty$, а $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\to-\frac{\pi}{2}$; $f(-0)=-\frac{\pi}{2}$. $\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=+\frac{\pi}{2}$ потому, что при $x\to+0$ величина $\frac{1}{x}\to+\infty$, а $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\to+\frac{\pi}{2}$; $f(+0)=+\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, оба предела — левосторонний и правосторонний — в точке $x=0$ существуют, но между собою не равны: $f(-0\neq f(+0)$, и точка $x=0$ — точка разрыва первого рода (фиг. 20,8).



Фиг. 20,8.

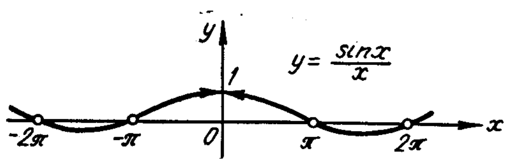
Задача 20,33. Какого рода разрыв имеет функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$?

Решение. В этой точке функция разрывна, так как $f(0)$ не существует. Однако нам известно, что при стремлении x к нулю по любому закону $(x\to 0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и, таким образом, существуют левосторонний предел функции $f(-0)$, правосторонний предел функции $f(+0)$ и они между собою равны: $f(-0)=f(+0)=1$. Но $f(0)$ не существует. На кривой, которая является графиком этой функции, отсутствует точка (она как бы «вырвана»), абсцисса которой равна нулю. Если условиться, что при $x=0$ функция $\frac{\sin x}{x}=1$, то тем самым график функции станет сплошным (непрерывным), и разрыв будет «устранен» (фиг. 20,9).

Заключение: Для функции $\frac{\sin x}{x}$ точка $x=0$ является точкой «устранимого» разрыва, так как $f(-0)=f(+0)$, и функция



Фиг. 20,9.

в этой точке может быть доопределена так, что можно взять $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

Замечание. Термин «устранимый» взят в кавычки потому, что фактически разрыв функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ ничем устранить нельзя, так как он существует в действительности. Можно только условно принять, что значение функции в этой точке равно 1. Такое соглашение восстановит на кривой отсутствующую на ней точку (0,1).

Это замечание следует иметь в виду и при решении других задач, в которых разрыв будет «устранимым».

Задача 20,34. Испытать на непрерывность функцию $f(x)=\frac{x^2-8}{x-2}$ в точке $x=2$.

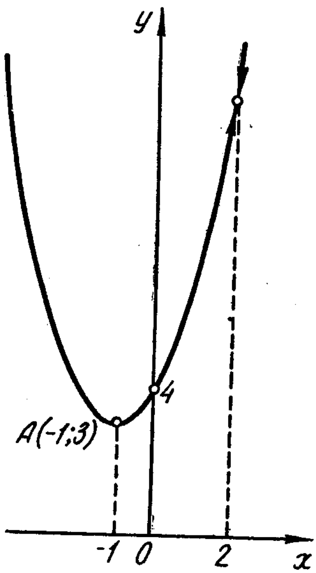
Решение. Так как при $x=2$ функция не существует и тем самым нарушено первое условие непрерывности, то в этой точке функция терпит разрыв. Найдем левосторонний и правосторонний пределы функции

$$\lim_{x\to 2-0}=\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2-0}(x^2+2x+4)=12,\ f(2-0)=12;$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2+0}(x^2+2x+4)=12;\ f(2+0)=12.$$

Таким образом, существует и предел этой функции при $x\to 2$, так как $f(2-0)=f(2+0)$. В точке $x=2$ разрыв можно «устранить», если значение функции в этой точке принять равным 12, т. е. если условиться, что $f(2) = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-8}{x-2} = 12$.

Точка $x = 2$ — точка «устранимого» разрыва. Графиком функции $f(x) = \frac{x^2-8}{x-2}$ является парабола (фиг. 20, 10), на которой нет точки с абсциссой $x = 2$. На графике эта точка обозначена кружком и к ней направлены стрелки. Сплошной ход кривой в этой точке оборвался. Слева и справа от точки $x = 2$ график функции — непрерывная линия.



Фиг. 20,10.

Задача 20,35 (для самостоятельного решения). 1) Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ и начертить график функции. 2) Чему должно быть равно $f(-3)$, чтобы пополненная этим значением функция была непрерывна при $x = -3$?

Ответ. Точка $x = -3$ — точка «устранимого» разрыва. Следует взять $f(-3) = -6$.

Задача 20,36 (для самостоятельного решения). 1) Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ и начертить график функции. Как следует доопределить эту функцию при $x = -1$, чтобы при $x = -1$ она была непрерывной?

Задача 20,37. Доказать, что функция $f(x) = x^3\cos^2 x + \frac{x^4}{x^2+1}$ непрерывна при всех значениях x.

Решение. Воспользуемся теоремами о сумме, произведении и частном непрерывных функций. Так как функция $\cos x$ непрерывна при всех значениях x, то и ее квадрат есть функция, непрерывная при всех значениях x, как произведение двух непрерывных функций: $\cos^2 x = \cos x\cdot\cos x$.

Функция $\varphi(x) = x$ непрерывна всюду, а потому и функция $\varphi_1(x) = x^3$ также всюду непрерывна, как произведение непрерывных функций: $\varphi_1(x) = (x)^3 = xxx$.

Произведение $x^3\cos^2 x$ — функция непрерывная, как произведение непрерывных функций x^3 и $\cos^2 x$.

Второе слагаемое $\frac{x^4}{x^2+1}$ — функция непрерывная, как частное двух непрерывных функций, причем знаменатель дроби не имеет действительных корней (уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных решений).

Заключение. Заданная функция непрерывна при всех значениях x.

Задача 20,38 (для самостоятельного решения). Пользуясь теоремами о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, решить вопрос о непрерывности функций:

$$1)\ f(x)=\frac{x^2}{9-x^2};\qquad 2)\ \varphi(x)=\frac{\sin x}{1-x^3};\qquad 3)\ \varphi(x)=\frac{x^2+x+1}{\sin x}.$$

Ответ. 1) Функция непрерывна при всех значениях x, кроме значений $x_1=-3$ и $x_2=3$.

2) Функция непрерывна для всех значений x, кроме $x=1$

3) Функция непрерывна для всех x, кроме $x=n\pi$, где n — любое целое число.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Задачи, приводящие к вычислению производной. Непосредственное вычисление производной из определения. Геометрический и механический смысл производной.

Это практическое занятие является первым по разделу «производная и дифференциал функции». К вычислению производной данной функции мы проходим всякий раз, когда требуется определить скорость изменения другой величины (функции), в зависимости от изменения другой величины (независимой переменной).

Определение 1. *Средней скоростью изменения функции $y=f(x)$ при переходе независимой переменной от значения x к значению $x+\Delta x$ называется отношение приращения Δy функции к приращению Δx независимой переменной:*

$$V_{\text{ср}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (21,1)$$

Определение 2. *Истинной (мгновенной) скоростью изменения функции y при данном значении x называют предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при стремлении к нулю Δx:*

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}V_{\text{ср}};$$

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (21,2)$$

При вычислении этого предела следует x считать величиной постоянной. Переменной же величиной здесь является Δx (конечно, значение x можно выбрать произвольно из области существования функции, но после того как этот выбор сделан, значение x должно оставаться постоянным, а изменению может подвергаться только Δx).

Найденный из (21,2) предел будет являться функцией x. О скорости изменения функции при данном значении x имеет смысл говорить лишь в том случае, когда предел (21,2) существует и не зависит от того, каким способом Δx стремится к нулю.

Функция, полученная в результате определения предела (21,2), называется производной функцией от функции $f(x)$. Сокращенно найденная из (21,2) функция называется просто производной.

Определение производной. *Производной функции $f(x)$ по независимой переменной x называется предел, к которому стремится отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение арумента стремится к нулю. Операция нахождения производной называется дифференцированием функции.*

Производная функции при частном значении x есть число, если при этом значении x производная имеет конечное значение.

Обозначение производной. Производная обозначается одним из символов: y'_x, y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, а ее значение при $x = x_0$ обозначается так:

$$y'_x(x_0);\ y'(x_0);\ y'_0;\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0};\ f'(x_0).$$

Когда мы нашли производную функцию $f'(x)$, тем самым мы нашли скорость изменения данной функции в точке x.

Механическое значение производной

1. Средняя скорость. Закон движения точки считается заданным, если ее путь s* есть известная функция времени t, т. е. если

$$s = f(t) \tag{21,3}$$

(s — расстояние движущегося тела от начала отсчета). Будем считать, что $s > 0$, если оно находится справа от начала отсчета и $s < 0$, если оно находится слева от начала отсчета. Средняя скорость движения $V_{ср}$ за время момента t до момента $t + \Delta t$ вычисляется по формуле

$$V_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{21,4}$$

Истинная скорость движения в момент времени t по определению есть предел, к которому стремится средняя скорость $V_{ср}$ за промежуток времени Δt, когда промежуток времени $\Delta t \to 0$. Или

---

* Предполагается, что точка движется в одном направлении.

иначе: скоростью движения в данный момент времени t называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени Δt стремится к нулю.

Скорость в момент времени t определяется равенствами

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{21,5}$$

Из сравнения (21,5) с (21,2) видно, что скорость точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t.

Геометрическое значение производной

Производная от функции $f(x)$, вычисленная при заданном значении x, равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ox и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x.*

Упражнения этого практического занятия имеют целью закрепить у студента понимание определения производной, ее механического и геометрического значения.

Мы будем решать задачи, в которых производная вычисляется не из готовой формулы, как это делается на следующих практических занятиях, а непосредственно, исходя из ее определения.

После твердого усвоения определения производной мы перейдем к упражнениям, которые помогут выработать прочные навыки вычисления производных.

Задача 21,1. Вычислить производную функции $y=x^2$ при $x=3$.

Решение. Проведем решение этой задачи двумя способами:

1) сначала найдем производную как функцию x, а потом вычислим ее значение при $x=3$, т. е. $y'(3)$,

2) значение производной будем вычислять, исходя из значения $x=3$:

$$y = x^2, \text{ т. е. } f(x) = x^2;$$
$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Теперь найдем приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 = (2x+\Delta x)\Delta x$.

Разделим теперь приращение функции Δy на приращение аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x+\Delta x)\Delta x}{\Delta x}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

В этом месте мы можем сказать, что найденное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть не что иное, как средняя скорость изменения данной функции $f(x) = x^2$ в промежутке $(x, x+\Delta x)$.

* Положительным направлением на касательной считается то, в котором возрастает абсцисса.

Для того чтобы найти производную y' этой функции, нужно найти предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$. Переходя к пределу, получаем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

(еще раз напоминаем, что здесь при отыскании предела величину x мы должны считать постоянной).

Итак, $x' = 2x$.

При $x = 3$ значение производной $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$. Найденное число 6 есть не что иное, как скорость изменения функции $f(x) = x^2$ при $x = 3$.

2) Найдем теперь значение производной данной функции при $x = 3$, минуя нахождение производной, как функции x.

У нас $f(x) = x^2$; $f(3) = 3^2$.

Перейдем от значения $x=3$ к значению $x = 3 + \Delta x$;

$$f(3 + \Delta x) = (3 + \Delta x)^2; \ f(3) = 9;$$

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3 + \Delta x)^2 - 9 = 6\Delta x + (\Delta x)^2 = (6 + \Delta x)\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 + \Delta x; \ y'(3 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6.$$

Найдя производную $y'(3)$, мы нашли и тангенс угла между положительными направлениями оси Ox и касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$, т. е. угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой $x = 3$.

Задача 21,2 (для самостоятельного решения). Вычислить производную функции $y = x^3$ при $x = 2$.

Дать геометрическое истолкование полученного результата. Задачу решить двумя способами по примеру решения предыдущей задачи. Найти среднюю скорость изменения функции в промежутке от $x_1 = 3$ до $x_2 = 3{,}1$.

Ответ. $y'(2) = 12$; средняя скорость изменения функции на интервале (3; 3,1) $v_{ср} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$. Подставляя сюда $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, получим $v_{ср} = 27{,}91$.

Задача 21,3. Точка движется по прямой по закону $S = t^3$, где S — путь, измеряемый в сантиметрах, а t — время в секундах. Найти среднюю скорость точки за время от $t = 2$ *сек* до $t_1 = (2 + \Delta t)$ *сек*, считая, что $\Delta t = 1$; 0,5, 0,01; 0,001. Вычислить также истинную скорость точки в момент $t = 2$ *сек*.

Решение. Согласно результату предыдущей задачи, если $y = x^3$, то $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$. Так как в задаче, которую мы решаем, функция обозначена буквой S, а аргумент буквой t, то выражение для Δy надо переписать, заменив y на S, а x на t:

$$\Delta S = 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3,$$

а средняя скорость будет равна

$$V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Если $\Delta t = 1$ *сек*, то, приняв, что $t = 2$ *сек*, получим

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 19 \text{ см/сек};$$

при $t = 2$ *сек*, а $\Delta t = 0{,}01$ *сек*:

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}01 + (0{,}01)^2 = 12{,}0601 \text{ см/сек};$$

при $t = 2$ *сек*, а $\Delta t = 0{,}001$ *сек*;

$$V_{ср} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + (0{,}001)^2 = 12{,}006\,001 \text{ см/сек}.$$

Найдем теперь истинную скорость в момент времени $t = 2$ *сек*. У нас

$$V_{ср} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2.$$

Истинная скорость по (21,4) будет равна

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} (3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2) = 3t^2.$$

При $t = 2$ *сек* получаем $V = 3 \cdot 2^2 = 12$ *см/сек*.

Все полученные нами средние скорости отличаются от истинной, но из рассмотрения полученных значений средних скоростей мы приходим к выводу, что они тем ближе к истинной скорости в момент $t = 2$ *сек*, чем меньше Δt.

Задача 21,4 (для самостоятельного решения). Точка движется по прямой по закону $S = 5t^3 - 3t^2 + 4$, где путь S измеряется в сантиметрах, а время t — в секундах. Найти среднюю скорость за промежуток времени от $t_1 = 1$ до $t_2 = (1 + \Delta t)$, считая $\Delta t = 0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}1$.

Определить также истинную скорость в момент $t = 1$ *сек*.

Указание. 1) Найти ΔS; 2) $V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Ответ. При $\Delta t = 0{,}5$ $V_{ср} = 15{,}25$ *см/сек*; при $\Delta t = 0{,}1$ $V_{ср} = 10{,}21$ *см/сек*; $V = 15t^2 - 6t$, $V(1) = 9$ *см/сек*.

Задача 21,5. Функция $y = \frac{2x + 1}{3x + 1}$. Вычислить производную при $x = 1$.

Решение. Сначала найдем производную y' как функцию x, а потом вычислим $y'(1)$.

Наращенное значение функции $y + \Delta y$ мы найдем, если заменим в аналитическом выражении функции x на $x + \Delta x$. Имеем

$$y + \Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{3(x + \Delta x) + 1}; \quad \Delta y = \frac{2(x + \Delta x) + 1}{3(x + \Delta x) + 1} - \frac{2x + 1}{3x + 1} =$$

$$= -\frac{\Delta x}{[3(x + \Delta x) + 1](3x + 1)}, \text{ а } \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{[3(x + \Delta x) + 1](3x + 1)}.$$

Эта формула дает выражение средней скорости изменения данной функции на интервале $(x, x+\Delta x)$. Чтобы найти производную, перейдем к пределу, устремляя Δx к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ -\frac{1}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)} \right\};$$

$$y' = -\frac{1}{(3x+1)^2}; \quad y'(1) = -\frac{1}{16}.$$

Найденный результат геометрически истолковывается так: угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{2x+1}{3x+1}$ в точке с абсциссой $x = 1$ равен $-\frac{1}{16}$; $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{16}$.

Если точка движется по прямой по закону $y = \frac{2x+1}{3x+1}$, где x — время в секундах, а y — путь в метрах, то найденное значение производной $y'(1) = -\frac{1}{16}$ — скорость движения в момент времени $t = 1$ *сек*, а знак минус у скорости показывает, что с увеличением времени расстояние движущейся точки от начала отсчета пути уменьшается.

Эту задачу можно решить и иначе: вычислить значение производной заданной функции при $x = 1$, минуя определение ее производной при любом x.

Перейдем от значения $x = 1$ к значению $x = 1 + \Delta x$. У нас

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x+1}. \quad \text{Тогда } f(1) = \frac{2 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{3}{4};$$

$$f(1+\Delta x) = \frac{2(1+\Delta x)+1}{3(1+\Delta x)+1} = \frac{2\Delta x+3}{3\Delta x+4};$$

в точке $x = 1$ приращение функции $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1)$;

$$\Delta y = \frac{2\Delta x+3}{3\Delta x+4} - \frac{3}{4} = \frac{-\Delta x}{4(3\Delta x+4)}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4(3\Delta x+4)};$$

а

$$y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{4(3\Delta x+4)} = -\frac{1}{16}.$$

Таким образом, найдена производная заданной функции при $x = 1$ без определения производной как функции x.

Задача 21,6 (для самостоятельного решения). Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 9$.

Ответ. $y'(9) = \frac{1}{6}$.

Задача 21,7 (для самостоятельного решения). Доказать, что для линейной функции $y = kx + b$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть величина постоянная.

Задача 21,8 (для самостоятельного решения). Пользуясь определением производной, найти производную функции $y=\sqrt{x^2-1}$ при $x=\sqrt{5}$.

Указания: 1) $\Delta y=\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}-\sqrt{x^2-1}$; 2) при определении $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{(x+\Delta x)^2-1}+\sqrt{x^2-1}$; 3) $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Ответ. $y'(\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Задача 21,9 (для самостоятельного решения). Закон движения точки по прямой задан формулой $s=t^3-3t^2+3t+5$ (s — в метрах, t — в секундах). В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?

Ответ. $V=3t^2-6t+3$; $V=0$ при $t=1$ *сек*.

Задача 21,10 (для самостоятельного решения). Две точки движутся по прямой по законам $s_1=t^3-5t^2+17t-4$; $s_2=t^3-3t$. В какой момент времени их скорости равны?

Ответ. $t=2$ *сек* ($V_1=3t^2-10t+17$; $V_2=3t^2-3$).

Задача 21,11 (для самостоятельного решения). Тело, брошенное вверх, движется по закону $s=-4{,}905t^2+981t+950$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти: 1) скорость тела в любой момент времени и его начальную скорость; 2) в какой момент времени скорость тела станет равной нулю и какую наивысшую высоту в этот момент времени достигнет тело.

Ответ. 1) $V=-9{,}81t+981$; $V_0=981$ *м/сек*; 2) $t=100$ *сек*; $s(100)=50$ *км*.

ДВАДЦАТЬ ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование алгебраических функций.

Это практическое занятие отводится для упражнений в определении производных алгебраических функций. Эти упражнения продолжаются и на следующем практическом занятии. Операция определения производной функции называется дифференцированием функции.

Вычисление производных мы будем вести не непосредственно, исходя из определения производной, а по формулам, с выводом которых читатель уже знаком. Здесь приводится для ссылок и справок.

СВОДКА ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Во всех приведенных ниже формулах функции u и v считаются функциями независимой переменной x : $u=u(x)$; $v=v(x)$. Эту таблицу читатель должен твердо выучить наизусть.

$$y=c \ (c \text{ — постоянная}); \ y'=0 \qquad (22{,}1)$$

(производная постоянной величины равна нулю);

$$y = x; \quad y' = 1 \tag{22, 2}$$

(производная независимой переменной равна 1);

$$y = cu \quad (c \text{ — постоянная}); \quad y' = cu' \tag{22, 3}$$

(постоянный множитель можно выносить за знак производной)

$$y = u \pm v; \quad y' = u' \pm v' \tag{22, 4}$$

$$y = v \cdot u; \quad y' = u'v + uv' \tag{22, 5}$$

$$y = \frac{u}{v}. \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{22, 6}$$

$$y = \frac{a}{u}; \quad y' = -\frac{a}{u^2} \cdot u' \quad (a \text{ — постоянная величина}); \tag{22, 7}$$

$$y = u^n; \quad y' = nu^{n-1} \cdot u' \tag{22, 8}$$

(n — любое действительное число)

$$y = \sqrt{u}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'; \tag{22, 9}$$

$$y = a^u; \quad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'; \quad y = e^u; \quad y' = e^u u'; \quad a > 0, \quad a \neq 1; \tag{22, 10}$$

$$y = \log_a u; \qquad y' = \frac{1}{u} u' \log_a e = \frac{u'}{u \ln a}; \tag{22, 11}$$

$$y = \ln u; \qquad y' = \frac{1}{u} u'; \tag{22, 12}$$

$$y = \sin u; \qquad y' = \cos u \cdot u'; \tag{22, 13}$$

$$y = \cos u; \qquad y' = -\sin u \cdot u'; \tag{22, 14}$$

$$y = \operatorname{tg} u; \qquad y' = \frac{1}{\cos^2 u} u'; \tag{22, 15}$$

$$y = \operatorname{ctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'; \tag{22, 16}$$

$$y = \sec y; \qquad y' = \sec u \operatorname{tg} u \cdot u'; \tag{22, 17}$$

$$y = \operatorname{cosec} u; \qquad y' = -\operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{ctg} u \cdot u'; \tag{22, 18}$$

$$y = \arcsin u; \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'; \tag{22, 19}$$

$$y = \arccos u; \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} u'; \tag{22, 20}$$

$$y = \operatorname{arctg} u; \qquad y' = \frac{1}{1 + u^2} u'; \tag{22, 21}$$

$$y = \operatorname{arcctg} u; \qquad y' = -\frac{1}{1 + u^2} u'. \tag{22, 22}$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Если $y = f(u)$, а u является не независимой переменной, а функцией независимой переменной $x: u = \varphi(x)$, то, таким образом, $y = f(\varphi(x))$.

Функция y называется в этом случае сложной функцией x. Переменная u называется промежуточной переменной. Производная сложной функции определяется на основании такой теоремы:

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, причем для соответствующих друг другу значений x и u существуют конечные производные y'_u и u'_x. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет конечную производную по x, и эта производная определяется по формуле

$$y'_x = y'_u u'_x{}^{*}, \tag{22, 23}$$

причем производная y'_u вычисляется так, как если бы u было независимой переменной. Короче: производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточной переменной на производную от промежуточной переменной по независимой переменной.

Эта теорема распространяется и на сложные функции, которые задаются с помощью цепи, содержащей три и более звена. Например, если $y = f(u)$. $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, т. е. если $y = f\{\varphi[(\psi(x)]\}$, то

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x. \tag{22, 24}$$

Формулы (22, 23) и (22, 24) дифференцирования сложной функции являются очень важными.

Прежде чем приступить к решению задач, сделаем замечание, которым нам неоднократно придется пользоваться:

Если функция, которую надо продифференцировать, не является сложной, то мы в формулах (22, 3) — (22,22) будем полагать, что $u = x$, т. е. u — независимая переменная, а тогда по формуле (22, 2) $u'_x = 1$ (производная независимой переменной равна единице), и поэтому, применяя указанные формулы, на u' умножать не придется, так как такое умножение равносильно умножению на единицу, а, как известно, умножение на единицу не изменяет произведения.

Сначала решим самые простые задачи.

Задача 22, 1. Найти производные функций:

$$1)\ y = x^4;\ 2)\ y = x^5;\ 3)\ y = \sqrt{x};\ 4)\ y = \sqrt[4]{x^3}.$$

Решение. Учитывая замечание, которое только что сделано, по формуле (22, 8), полагая в ней $u = x$, имеем:

1) В этом примере показатель степени $n = 4$, а потому $y' = 4x^3$;

2) Здесь $n = 5$, а потому $y' = 5x^4$;

---

* Индексы у производных указывают на то, по какому переменному производится дифференцирование.

3) Если $y=\sqrt{x}$, то, переписав пример в виде $y=x^{\frac{1}{2}}$, полагая в формуле (22, 8) $n=\frac{1}{2}$, получаем $y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=$ $=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

При решении этого примера можно было сразу воспользоваться формулой (22, 9).

$y=\sqrt[4]{x^3}$ 4) Пример можно переписать так: $y=x^{\frac{3}{4}}$. Здесь $n=\frac{3}{4}$, а $y'=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

Задача 22,2. Найти производные функций:

1) $y=5x^3$; 2) $y=-4x^2$; 3) $y=7\sqrt{x}$; 4) $y=\frac{8}{x^2}$, 5) $y=4\sqrt[3]{x^2}$.

Решение. При решении всех этих примеров можно пользоваться формулой (22, 8) и надо учесть, что постоянный множитель можно выносить за знак производной (формула (22,3)).

1) $y'=5(x^3)'$ (здесь постоянный множитель 5 вынесен за знак производной); $y'=5\cdot 3x^2=15x^2$ $((x^3)'=3x^2)$;

2) $y'=-4(x^2)'=-4\cdot 2x=-8x$ (постоянный множитель -4 вынесен за знак производной, а $(x^2)'=2x$);

3) $y=7x^{\frac{1}{2}}$; $y'=7(x^{\frac{1}{2}})'=7\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=7\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{7}{2\sqrt{x}}$ (постоянный множитель 7 вынесен за знак производной, а $(x^{\frac{1}{2}})'=$ $=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$). Здесь можно было сразу воспользоваться формулой (22, 9), и тогда, если $y=7\sqrt{x}$, то $y'=7\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{7}{2\sqrt{x}}$.

Учащемуся рекомендуется запомнить (это очень часто встречается), что если $y=\sqrt{x}$, то $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) Перепишем пример в виде $y=8x^{-2}$, тогда $y'=8(x^{-2})'=$ $=8(-2x^{-3})$, $y'=-\frac{16}{x^3}$ (постоянный множитель 8 вынесен за знак производной, а $(x^{-2})'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}$). Можно было сразу воспользоваться формулой (22, 7), взяв в ней $a=8$; $u=x^2$, а $u'=2x$. Здесь уже на u' придется умножить, так как u — не независимая переменная, а ее функция: $u=x^2$.

Имеем $y=\frac{8}{x^2}$; $y'=-\frac{8}{x^4}\underbrace{(x^2)'}_{\text{производная знаменателя}}=-\frac{8}{x^4}2x=-\frac{16}{x^4}$, т. е. то же, что и раньше, но функцию, данную для дифференцирования, не пришлось преобразовать.

5) Данную функцию перепишем в виде $y=4x^{\frac{2}{3}}$; тогда $y' = 4(x^{\frac{2}{3}})' = 4\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$.

Задача 22, 3 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y=7x^6$; 2) $y=8\sqrt{x}$; 3) $y=\frac{4}{x^5}$.

Ответ. 1) $y'=42x^5$; 2) $y'=\frac{4}{\sqrt{x}}$; 3) $y'=-\frac{20}{x^6}$.

Задача 22, 4. Найти производные функции:

1) $y=\frac{6}{\sqrt{x}}$; 2) $y=\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $y=-\frac{5}{4x^3}$; 4) $y=\frac{7\sqrt{x}}{8}$.

Решение. Здесь для решения всех примеров удобно применить формулу (22,7):

1) $y' = -\frac{6}{(\sqrt{x})^2}\underbrace{(\sqrt{x})'}_{\text{производная знаменателя}} = -\frac{6}{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x\sqrt{x}}$;

2) $y' = -\frac{4}{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2}\underbrace{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'}_{\text{производная знаменателя}} = -\frac{4}{\sqrt[3]{x^4}}(x^{\frac{2}{3}})' = -\frac{4}{x\sqrt[3]{x}}\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} =$

$= -\frac{8}{3x\sqrt[3]{x^2}}$ (здесь можно было также воспользоваться формулой (22,8), но данную функцию переписать в виде $y=4x^{-\frac{2}{3}}$, тогда $y' = 4(x^{-\frac{2}{3}})' = 4\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{8}{3}\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}\Big)$;

3) $y' = \frac{5}{(4x^3)^2}\underbrace{(4x^3)'}_{\text{производная знаменателя}} = \frac{5}{16x^6}4(x^3)' = \frac{20}{16x^6}3x^2 = \frac{15}{4x^4}$ (можно поступить и иначе: данную функцию переписать в виде

$$y=-\frac{5}{4}x^{-3};\quad y'=-\frac{5}{4}(x^{-3})' = -\frac{15}{4}x^{-4} = \frac{15}{4x^4}\Big);$$

4) $y' = \frac{7}{8}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{16\sqrt{x}}$.

Если дифференцируется дробь с постоянным знаменателем, то применять формулу (22,6) для дифференцирования дроби не следует, а поступить надо так: взять производную только от числителя дроби, а знаменатель оставить без изменения:

$$y=\frac{u}{c}=\frac{1}{c}u;\quad y'=\frac{1}{c}u'=\frac{u'}{c}.$$

Следует запомнить: ***производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя, разделенной на тот же знаменатель.***

Использование здесь формулы (22,6) привело бы к ненужному усложнению: $y=\frac{u}{c}$; $y'=\frac{u'c-c'u}{c^2}=\frac{u'c-0\cdot u}{c^2}=\frac{u'c}{c^2}=\frac{u'}{c}$ ($c'=0$ потому, что производная постоянной величины равна нулю).

Если отыскивается производная от дроби с постоянным числителем, то также не следует применять формулу (22,6) для дифференцирования дроби, а надо воспользоваться формулой (22,7) для дифференцирования дроби с постоянным числителем:

$$y=\frac{a}{u};\quad y'=-\frac{a}{u^2}u'.$$

Если здесь пользоваться формулой для дифференцирования дроби, то получим

$$y=\frac{a}{u};\quad y'=\frac{a'u-au'}{u^2}=\frac{0\cdot u-au'}{u^2}=-\frac{au'}{u^2}=-\frac{a}{u^2}u'.$$

Такой способ вычисления производной от дроби с постоянным числителем следует считать нецелесообразным.

Задача 22, 5 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y=\frac{a}{x^n};\quad 2)\ y=\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}};\quad 3)\ y=\frac{\sqrt[6]{x^5}}{8};\quad 4)\ y=\frac{4\sqrt{x}}{7}.$$

Ответ. 1) $y'=-\frac{an}{x^{n+1}}$; 2) $y'=-\frac{15}{4x\sqrt[4]{x^3}}$; 3) $y'=\frac{5}{48\sqrt[6]{x}}$;

4) $y'=\frac{2}{7\sqrt{x}}$.

Задача 22, 6. Найти производную функции $y=5x^3-3x^2+x-1$.

Решение. Заданная функция есть алгебраическая сумма нескольких функций. Известно (формула (22,4), что производная алгебраической суммы функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций, а потому $y'=(5x^3)'-(3x^2)'+$ $+x'-(1)'$. Здесь мы дифференцирование выполним без промежуточных записей;

$$y'=15x^2-6x+1;$$

производная от x равна $1: x'=1$, а производная 1 равна нулю, как производная постоянной величины.

Задача 22, 7 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y=a\sqrt{x}+x\sqrt{a}$; 2) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+$ $+\frac{13}{5}x^5-2x^6+\frac{4}{7}x^7$; 3) $y=9x^7-\frac{3}{x^5}-\frac{3}{x^{11}}-\frac{a}{x^m}$;

4) $y=3x^2\sqrt[3]{x}-4x\sqrt[4]{x^3}+9\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}$.

Указание. Перейти к дробным показателям степеней.

Ответ. 1) $y' = \frac{a}{\sqrt{x}} + \sqrt{a}$ (при дифференцировании второго слагаемого учесть, что $\sqrt{a}$ — постоянная величина, а $x' = 1$);

2) $y' = x^2(1 - 6x + 13x^2 - 12x^3 + 4x^4)$;

3) $y' = 63x^6 + \frac{15}{x^6} + \frac{33}{x^{12}} + \frac{am}{x^{m+1}}$;

4) $y' = 7x\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[4]{x^3} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{4}{3x^3\sqrt[3]{x}}$.

Задача 22, 8(для самостоятельного решения). Найти производные функций 1) $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$. **Указание.** $\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} = 5x^{\frac{8}{5}}$.

2) $y = 27x^3 - \frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2}$.

Ответ. 1) $y' = 8\sqrt[5]{x^3} + \frac{2\sqrt[15]{x}}{x} - \frac{2}{x\sqrt[3]{x}}$; 2) $y' = (9x - 6\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})^2$.

Задача 22,9. Найти производную функции $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$.

Решение. Здесь мы имеем дело со сложной функцией. Положим $u = 5x^2 + 7x + 2$, тогда $y = u^3$. Следует писать так: $y = u^3$; $u = 5x^2 + 7x + 2$.

Для того чтобы найти производную, воспользуемся формулой (22,23) для дифференцирования сложной функции:

$$y' = 3u^2u' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2(5x^2 + 7x + 2)' = \\ = 3(5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot (10x + 7).$$

Однако можно обойтись и без промежуточных записей, т. е. без введения переменной u. Мы настоятельно рекомендуем читателю после того, как он сделает несколько упражнений, выполненных при помощи введения вспомогательной переменной, от введения такой переменной отказаться и дифференцирование выполнять сразу.

Формула (22,8) должна быть понята так: производная от степенной функции u^n, где u есть функция x, равна $nu^{n-1}u'$, т. е. равна показателю степени, умноженному на ту же функцию u, но в степени на единицу меньшей, а полученное произведение надо еще умножить на производную от основания степени u.

В нашем случае получаем: $y' = \underbrace{3(5x^2+7x+2)^2}_{\text{производная степенной функции}} \cdot \underbrace{(10x+7)}_{\text{производная основания степени}}$

Выполним еще несколько аналогичных задач, но без столь подробных пояснений.

Задача 22, 10. Найти производную функции $y=(5x^3+4x^2+8)^4$.

Решение. 1) $y=u^4$, где $u=5x^3+4x^2+8$. По формуле (22,23) $y'=4u^3u'=4(5x^3+4x^2+8)^3(15x^2+8x)$ (производная от 8 равна 0). Проведем решение без введения промежуточной переменной: $y'=\underbrace{4(5x^3+4x^2+8)^3}_{\text{производная степени}}\ \underbrace{(15x^2+8x)}_{\text{производная степени основания}}$

Задача 22, 11 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y=(5x^2+7)^3$; 2) $y=(1+5x-8x^2)^5$;

3) $y=(a+bx)^m$; 4) $y=\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}\right)^4$.

Найти производные, введя сначала промежуточную переменную, а потом минуя ее введение.

Ответ. 1) $y'=30x(5x^2+7)^2$;
2) $y'=5(1+5x-8x^2)^4(5-16x)$;
3) $y'=bm(a+bx)^{m-1}$;
4) $y'=4\left(1+2\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{6}{x^3}\right)$.

Задача 22, 12. Найти производные функций:

1) $y=\sqrt{x^2+2}$; 2) $y=\sqrt{3x}$; 3) $y=\frac{2}{(3x^2-5)^3}$.

Решение. 1) Положив $u=x^2+2$, получим $y=\sqrt{u}$, и поэтому на основании формулы (22,23)

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Можно было бы сразу воспользоваться формулой (22,9) для дифференцирования квадратного корня из функции, не вводя промежуточной переменной u.

Эту формулу следует понимать так: чтобы получить производную от квадратного корня из функции, надо единицу разделить на два корня квадратных из той же функции и полученную дробь умножить на производную от функции, стоящей под корнем.

Следовало поступить так: 1) $y=\sqrt{x^2+2}$; $y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}}_{\text{производная от квадратного корня из функции}}\cdot\underbrace{2x}_{\text{производная от функции, стоящей под корнем}}$

2) $y=\sqrt{3x};\quad y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{3x}}}_{\substack{\text{произвоеная квад-}\\ \text{ратного корня}\\ \text{из функции}}}\cdot\underbrace{3}_{\substack{\text{производная от}\\ \text{функции, стоя-}\\ \text{щей под корнем}}}$

3) $y=\frac{2}{(3x^2-5)^3};\ y'=-\underbrace{\frac{2}{(3x^2-5)^6}}_{\substack{\text{производная дро-}\\ \text{би с постоянным}\\ \text{числителем}}}\cdot 3\underbrace{(3x^2-5)^2 6x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}};$

$y'=-\frac{36}{(3x^2-5)^4}.$

Для упражнения выполним еще один совершенно аналогичный пример, но без введения переменной u.

Задача 22, 13. Найти производную функции $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. По формуле (22,7) $y'=-\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{дроби}}}\underbrace{(\sqrt{x^2+x+1})'}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}\\ \text{дроби}}}=$

$=-\underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{дроби}}}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{знаменателя}}}\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{функции, стоящей}\\ \text{под корнем}}}=-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

Задача 22, 14 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y=\sqrt{3x^2+5x+1}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$; 3) $y=\frac{10}{(4x^3-5x^2+7x-1)^4}$.

Ответ. 1) $y'=\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}$; 2) $y'=-\frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$;

3) $y'=-\frac{40(12x^2-10x+7)}{(4x^3-5x^2+7x-1)^5}$.

Задача 22, 15. Найти производные функций: 1) $Q=\sqrt[3]{3t-2t^2}$;

2) $S=\sqrt[4]{(2t^2-t^3)^3}$.

Решение. Перепишем пример в виде $Q=(3t-2t^2)^{\frac{1}{3}}$;

$Q'=\frac{1}{3}\underbrace{(3t-2t^2)^{-\frac{2}{3}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}}}\underbrace{(3-4t)}_{\substack{\text{производная осно-}\\ \text{вания степени}}}.$ Окончательно $Q'=\frac{3-4t}{3\sqrt[3]{(3t-2t^2)^2}}$.

2) Перепишем пример в виде $S=(2t^2-t^3)^{\frac{3}{4}}$;

$S'=\frac{3}{4}\underbrace{(2t^2-t^3)^{-\frac{1}{4}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{степени}}}\cdot\underbrace{(4t-3t^2)}_{\substack{\text{производная осно-}\\ \text{вания степени}}}.$

Окончательно $S' = \frac{3t(4-3t)}{4\sqrt[4]{2t^2-t^3}}$.

Задача 22, 16 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y = \sqrt[3]{4+2\sqrt{3x}+3x}$; 2) $y = \sqrt[4]{(3+4\sqrt[3]{2x})^3}$;

Ответ.

1) $y' = \frac{1+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\sqrt[3]{(4+2\sqrt{3x}+3x)^2}}$; 2) $y' = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$.

Теперь решим несколько задач, в которых требуется найти производную произведения и частного функций. Нам придется пользоваться формулами (22,5) и (22,6).

Задача 22, 17. Найти производную функций $y = x^2(5x-4)^6$.

Решение. Здесь надо продифференцировать произведение двух функций. Будем считать, что в формуле (22,5) $u = x^2$, $v = (5x-4)^6$. Каждую из этих функций мы уже умеем дифференцировать, а потому на основании указанной формулы $y' = (x^2)' \times (5x-4)^6 + x^2[(5x-4)^6]'$. Теперь выполним дифференцирование: $y' = 2x(5x-4)^6 + x^2 \cdot 6(5x-4)^5 \cdot 5$, а после упрощений получим $y' = 8x(5x-4)^5(5x-1)$.

Задача 22, 18 (для самостоятельного решения). Найти производную функции $y = (5x^2-7x+2)(15x^2+5)^3$.

Ответ. $y = (10x-7)(15x^2+5)^3 + 90x(15x^2+5)^2(5x^2-7x+2)$.

Задача 22, 19. Найти производную функции

$$y = (3x^2+5ax-2a^2)\sqrt{a^2+3x^2}.$$

Решение. По формуле (22,5) имеем при $u = 3x^2+5ax-2a^2$; $v = \sqrt{a^2+3x^2}$; $y' = (3x^2+5ax-2a^2)' \cdot \sqrt{a^2+3x^2} + (3x^2+5ax-2a^2)(\sqrt{a^2+3x^2})'$.

Выполняя дифференцирование, получим $y' = (6x+5a) \times \sqrt{a^2+3x^2} + (3x^2+5ax-2a^2)\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{a^2+3x^2}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{6x}_{\text{производная подкоренного выражения}}$; после упрощений

$$y' = \frac{5a^3+30ax^2+27x^3}{\sqrt{a^2+3x^2}}.$$

Задача 22, 20. Найти производную функции

$$y = (9a^2-6abx+5b^2x^2)\sqrt[3]{(a+bx)^2}.$$

Решение. Эту задачу мы решим без промежуточных записей (формула (22,5)):

$$y' = \underbrace{(-6ab+10b^2x)}_{\text{производная первого сомножителя}}\sqrt[3]{(a+bx)^2} + (9a^2-6abx+5b^2x^2) \times$$

$$\times \underbrace{\frac{2}{3}(a+bx)^{-\frac{1}{3}} \cdot b}_{\text{производная второго сомножителя}}.$$

Теперь следует сделать упрощения, после которых должно получиться

$$y' = \frac{40b^3x^2}{3\sqrt[3]{a+bx}}.$$

Задача 22, 21 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \left(40 - 12x + \frac{27}{5}x^2\right)\sqrt{5+3x};$$

$$2)\ y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2};\quad 3)\ y = (8x^3 - 21)\sqrt[3]{(7+4x^3)^2}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = \frac{81x^2}{2\sqrt{5+3x}};\quad 2)\ y' = \frac{2}{2x^2\sqrt{3x+x^2}};\quad 3)\ y' = \frac{160x^5}{\sqrt[3]{7+4x^3}}.$$

Задача 22, 22 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y = \left(\frac{10}{3} - 2x + x^2\right)\sqrt{(5+2x)^3};\quad 2)\ y = (3x^4+4)\sqrt[4]{9x^4-3};$$

$$3)\ y = \left(\frac{2}{3x^3} + \frac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2-9}.$$

Ответ.

$$1)\ y' = 7x^2\sqrt{5+2x};\quad 2)\ y' = \frac{135x^7}{\sqrt[4]{(9x^4-3)^3}};\quad 3)\ y' = \frac{18}{x^4\sqrt{7x^2-9}}$$

Задача 22, 23. Найти производную функции $y = uvw$, где u, v, w — функции x: $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$.

Решение. Запишем данную функцию в виде $y = (uv)w$ и применим к ней формулу (22,5):

$$y' = (uv)'w + uvw', \text{ но } (uv)' = u'v + uv',$$

а поэтому $y' = (u'v + uv')w + uvw'$; раскрывая скобки, будем иметь окончательно

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'. \tag{22,24}$$

Можно указать, что вообще, если $y = u_1u_2u_3 \ldots u_n$, то

$$y' = u_1'u_2u_3 \ldots u_n + u_1u_2'u_3 \ldots u_n + u_1u_2u_3' \ldots u_n + \\ + \ldots + u_1u_2u_3 \ldots u_n'.$$

Этот результат словесно выражается так: *чтобы вычислить производную произведения любого числа функций, надо продифференцировать первую функцию и умножить полученную производную на произведение всех остальных функций, затем найти производную второй функции и умножить ее на произведение всех остальных функций. Точно так же поступить со всеми функциями-сомножителями и все полученные таким образом произведения сложить.*

Задача 22, 23а. Найти производную функции

$$y = (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2 \sqrt{4a + 6bx}.$$

Решение. На основании формулы (22,24), полученной в предыдущей задаче,

$$y' = (2a + 3bx)'(2a - 3bx)^2 \sqrt{4a + 6bx} +$$
$$+ (2a + 3bx)[(2a - 3bx)^2]' \sqrt{4a + 6bx} +$$
$$+ (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2 (\sqrt{4a + 6bx})'.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$y' = 3b(2a - 3bx)^2 \sqrt{4a + 6bx} + (2a + 3bx) \cdot 2 \cdot (2a - 3bx) \cdot (-3b) \times$$
$$\times \sqrt{4a + 6bx} + (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2 \frac{1}{2\sqrt{4a + 6bx}} \cdot 6b$$

и после упрощений окончательно

$$y' = \frac{3}{2} b (3bx - 2a)(21bx + 2) \sqrt{4a + 6bx}.$$

Задача 22, 24 (для самостоятельного решения). Найти производную функции

$$y (4x - 7)(3x + 7) \sqrt[3]{3x + 7}.$$

Ответ.

$$y' = 28x \sqrt[3]{3x + 7}.$$

Задача 22, 25 (для самостоятельного решения). Найти производную функции

$$y = \frac{a - x}{a + x}.$$

Ответ.

$$y' = -\frac{2a}{(a + x)^2}.$$

Задача 22, 26. Найти производную функции

$$y = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}.$$

Решение. Здесь следует применить формулу (22,6) для дифференцирования дроби. При решении этой задачи и следующей будем делать подробные записи, а в дальнейшем от них откажемся. Надо научиться дифференцировать бегло, без промежуточных записей. Здесь $u = a^2 - x^2$, $v = a^2 + x^2$;

$$y' = \frac{(a^2 - x^2)'(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)'(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}.$$

Выполняя дифференцирование в числителе, получим, что

$$y'=\frac{-2x(a^2+x^2)-2x(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)^2},$$

а после очевидных упрощений

$$y'=-\frac{4a^2x}{(a^2+x^2)^2}.$$

Задача 22, 27. Найти производную функции

$$y=\frac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}.$$

Решение. Применяя формулу (22,6), имеем

$$y'=\frac{(5+3x+x^2)'(5-3x+x^2)-(5-3x+x^2)'(5+3x+x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$y'=\frac{(3+2x)(5-3x+x^2)-(-3+2x)(5+3x+x^2)}{(5-3x+x^2)^2},$$

а после упрощений

$$y'=\frac{6(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}.$$

Задача 22, 28 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

$$1)\ y=\frac{x}{1+x^2};\quad 2)\ y=\frac{1+x^2}{1-x^2};\quad 3)\ y=\frac{x^m}{(1-x)^n}.$$

Ответ.

$$1)\ y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};\quad 2)\ y'=\frac{4x}{(1-x^2)^2};\quad 3)\ y'=\frac{x^{m-1}[m(1-x)+nx]}{(1-x)^{n+1}}.$$

Задача 22, 29. Найти производную функции

$$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. По формуле (22,6), считая $u=x$, $v=\sqrt{1+x^2}$, получаем

$$y'=\frac{x'\sqrt{1+x^2}-(\sqrt{1+x^2})'x}{(\sqrt{1+x^2})^2},$$

а выполняя дифференцирование имеем

$$y'=\frac{1\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x\cdot x}{1+x^2};$$

после упрощений получим, что

$$y'=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование тригонометрических функций.

Задача 23, 1. Найти производные функций:

1) $y=\sin kx$; 2) $y=\cos lx$; 3) $y=\operatorname{tg} px$; 4) $y=\operatorname{ctg} qx$.

Решение. 1) По формуле (22,13), полагая $u=kx$, имеем: $y=\sin u$; $u=kx$; $y'=\cos u\cdot u'$; $y'=\underbrace{\cos kx}_{\substack{\text{производная}\\ \text{синуса}}}\cdot\underbrace{k}_{\substack{\text{производная}\\ u=kx}}$; $y'=k\cos kx$.

2) По формуле (22,14), полагая

$y=\cos u$; $y=lx$; $y'=-\sin u\cdot u'$; $y'=-\underbrace{\sin lx}_{\substack{\text{производная}\\ \text{косинуса}}}\cdot\underbrace{l}_{\substack{\text{производная}\\ u=lx}}$; $y'=-l\sin x$.

3) По формуле (22,15), полагая

$$y=\operatorname{tg} u;\ u=px;\ y'=\frac{1}{\cos^2 u}u';\ y'=\underbrace{\frac{1}{\cos^2 px}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{тангенса}}}\underbrace{p}_{\substack{\text{производная}\\ u=px}};\ y'=\frac{p}{\cos^2 px},$$

или $y'=p\sec^2 px$.

4) По формуле (22,16), полагая

$$y=\operatorname{ctg} u;\ u=qx;\ y'=-\frac{1}{\sin^2 u}u';\ y'=-\underbrace{\frac{1}{\sin^2 qx}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{котангенса}}}\underbrace{q}_{\substack{\text{производная}\\ u=qx}};\ y'=-\frac{q}{\sin^2 qx}.$$

или $y'=-q\operatorname{cosec}^2 qx$.

После нескольких упражнений студент сам откажется от введения промежуточной переменной u, подразумевая ее в тех местах, где она нужна.

Задача 23, 2 (для самостоятельного решения). Найти производные функций: 1) $y=\sin 3x$; 2) $y=\sin 5x$; 3) $y=\sin 15x$; 4) $y=\cos 4x$; 5) $y=-\cos 3x$; 6) $y=\cos 9x$.

Ответ. 1) $y'=3\cos 3x$; 2) $y'=5\cos 5x$; 3) $y'=15\cos 15x$ 4) $y'=-4\sin 4x$; 5) $y'=3\sin 3x$; 6) $y'=-9\sin 9x$.

Задача 23, 3. Найти производные функций:

1) $y=\sin 2x^2$; 2) $y=\sin\sqrt{x}$; 3) $y=\operatorname{tg}\frac{1+x}{x}$; 4) $y=\cos\sqrt{\frac{1}{1+x}}$

Решение. 1) Мы прежде всего вычисляем производную синуса, а так как синус берется от $2x^2$, то вычисляем производную $2x^2$. Производная данной функции равна произведению этих производных. Пользуясь формулой (22,13), получаем

$$y'=\underbrace{\cos 2x^2}_{\substack{\text{производная}\\ \text{синуса}}}\cdot\underbrace{4x}_{\substack{\text{производная}\\ 2x^2}};\qquad y'=4x\cos 2x^2.$$

2) При решении этого примера мы также прежде всего должны вычислить производную синуса, а так как синус вычисляется от $\sqrt{x}$, то надо взять производную от этого корня и полученные производные перемножить. Формула (22, 13) дает

$$y' = \underbrace{\cos\sqrt{x}}_{\text{производная синуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{производная корня}}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}.$$

3) Здесь прежде всего надо продифференцировать тангенс, но так как он берется от дроби, то следует найти производную дроби и эти производные перемножить. По формуле (22,15) $\left(u = \frac{1+x}{x}\right)$.

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}}}_{\text{производная тангенса}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1+x}{x}\right)'}_{\text{производная дроби}} = \frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}} \cdot \frac{1\cdot x-(1+x)\cdot 1}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1+x}{x}.$$

4) В этом примере следует сначала продифференцировать косинус. Так как косинус вычисляется от квадратного корня, то вслед за этим надо продифференцировать корень. Но корень вычисляется от дроби, а поэтому надо продифференцировать дробь и все три полученные производные перемножить. Здесь цепочка из трех звеньев:

$$y = \cos u; \quad u = \sqrt{v}; \quad v = \frac{1}{1+x}.$$

Производная

$$y' = \underbrace{-\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}}_{\text{производная косинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}}}_{\text{производная корня}} \cdot \left[\underbrace{-\frac{1}{(1+x)^2}}_{\text{производная дроби}}\right].$$

Окончательно

$$y' = \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}.$$

Аналогичное упражнение выполните самостоятельно.

Задача 23, 4 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \sin\sqrt{\frac{1}{1-x}}$; 2) $y = \sqrt{\sin x}$;

3) $y = \sqrt{\frac{1}{\cos x}}$; 4) $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$.

Ответы даются в таком виде, который позволяет проверить решение. Упрощение ответа сделайте сами.

Ответ.

$$1)\ y' = \cos\sqrt{\frac{1}{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1-x}}}\cdot\left[-\frac{1}{(1-x)^2}\right]\cdot(-1);$$

$$2)\ y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x;\quad 3)\ y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos x}}}\cdot\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot(-\sin x);$$

$$4)\ y' = -\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

Задача 23, 5. Найти производную функции $y = 3\sin^2 x$.

Решение. Запишем пример так: $y = 3(\sin x)^2$.
Если $u = \sin x$, то $y = 3u^2$, и тогда

$$y' = 6uu' = 6\sin x\underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\u}}.$$

Теперь покажем как решить задачу, не вводя u. Прежде всего продифференцируем степень, а так как в степень возводится $\sin x$, то продифференцируем и $\sin x$. Найденные производные перемножим, постоянный множитель 3 вынесем за знак производной:

$$y' = 3\cdot\underbrace{2\sin x}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная сте-}\\\text{пени}}}\ \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{синуса}}};\quad y' = 6\sin x\cos x,$$

или

$$y' = 3\sin 2x.$$

Задача 23, 6. Найти производную функции $y = \cos^6 x$.

Решение. Запишем пример в виде $y = (\cos x)^6$ и положим $y = u^6$, а $u = \cos x$; тогда $y' = 6u^5u' = 6(\cos x)^5\cdot(-\sin x)$; $y' = -6\sin x\cos^5 x$.

Теперь ту же задачу решим без введения u.

У нас дифференцируется шестая степень косинуса: сначала продифференцируем степень, а так как в степень возводится косинус, то надо найти производную и от косинуса, а затем эти производные перемножить.

Итак,

$$y = \cos^6 x;\quad y' = \underbrace{6\cos^5 x}_{\substack{\text{производная}\\\text{от шестой}\\\text{степени ко-}\\\text{синуса}}}\cdot\ \underbrace{(-\sin x)}_{\substack{\text{производная}\\\text{от }\cos x}};$$

$$y = -6\sin x\cos^5 x.$$

Теперь самостоятельно, но без введения u (u держать в уме) решите несколько аналогичных примеров.

Задача 23, 7 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y=\sin^3 x$; 2) $y=\operatorname{tg}^3 x$; 3) $y=\operatorname{ctg}^4 x$;
4) $y=5\cos^5 x$; 5) $y=7\operatorname{tg}^6 x$; 6) $y=8\sin^2 x$.

Ответ. 1) $y'=3\sin^2 x\cos x$; 2) $y'=3\operatorname{tg}^2 x\sec^2 x$;
3) $y'=-4\operatorname{ctg}^3 x\operatorname{cosec}^2 x$; 4) $y'=-25\cos^4 x\sin x$;
5) $y'=42\operatorname{tg}^5 x\sec^2 x$; 6) $y'=16\sin x\cos x=$
$=8\sin 2x$.

Задача 23, 8. Найти производную функций:

1) $y=\sqrt{\sin x}$: 2) $y=\sqrt{\sin^2 x+3\cos^3 4x}$; 3) $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Решение. 1) Вычисляем производную от квадратного корня, а так как корень извлекается из $\sin x$, то следует вычислить производную от синуса и перемножить эти производные. Последовательно получаем

$$y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\\text{квадратно-}\\\text{го корня}}}\cdot\underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{от си-}\\\text{нуса}}}.$$

2) Здесь корень квадратный извлекается из суммы $\sin^2 x+$ $+3\cos^3 4x$. Поэтому сначала вычисляем производную от квадратного корня, а потом умножаем ее на производную от подкоренного выражения:

$$y'=\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x+3\cos^3 4x}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{корня}}}\Big[\underbrace{(2\sin x\cos x)}_{\substack{\text{производная от}\\\sin^2 x}}+3\cdot\underbrace{3\cos^2 4x}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от сте-}\\\text{пени }\cos}}\cdot\underbrace{(-\sin 4x)}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\\cos 4x}}\cdot\underbrace{4}_{\substack{\text{про-}\\\text{извод-}\\\text{ная от}\\4x}}\Big].$$

3) Сначала возьмем производную дроби, затем вычислим производную от знаменателя дроби и перемножим эти производные:

$$y'=-\underbrace{\frac{1}{\cos^6 x}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{дроби}}}\cdot\underbrace{3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}_{\substack{\text{производная зна-}\\\text{менателя дроби}}}=\frac{3\sin x}{\cos^4 x}.$$

Задача 23, 9 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y=\sin(px+g)$;

2) $y=\frac{1}{7}\sin 7x+\frac{3}{5}\sin 5x+\frac{1}{3}\sin 3x-5\sin x$;

3) $y=\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{2}{3}\sin 6x+\sin 4x-2\sin 2x-5x$;

4) $y=\frac{1}{9}\cos 9x+\frac{3}{7}\cos 7x-\frac{8}{3}\cos 3x-6\cos x$.

Задача 23, 10. Найти y', если

$$y = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x.$$

Решение. Производную от первого, второго и третьего слагаемых будем искать, как производную от произведения

$$y' = \underbrace{3x^2 \sin x + x^3 \cos x}_{\text{производная первого слагаемого}} + \underbrace{6x \cos x - 3x^2 \sin x}_{\text{производная второго слагаемого}} - \underbrace{6 \sin x - 6x \cos x}_{\text{производная третьего слагаемого}} + \underbrace{6 \sin x}_{\text{производная четвертого слагаемого}};$$

после приведения подобных членов получаем $y' = x^3 \cos x$.

Задача 23, 11 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$; 2) $y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) \sin x$;

3) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - 2x$; 4) $y = \left(\cos^2 x + \frac{2}{3}\right) \sin^3 x$.

Указание. При дифференцировании первого сомножителя во втором примере учесть решение третьего примера задачи 23, 8.

Ответ. 1) $y' = \frac{1}{\cos^4 x}$; 2) $y' = \frac{8 - 3\cos^4 x}{\cos^5 x}$;

3) $y' = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$; 4) $y' = 5 \sin^2 x \cos^3 x$.

Задача 23, 12 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \frac{1}{3} \cos x \operatorname{ctg} x - \frac{1}{6} \cos 2x \sin x - \frac{3}{2} \sin x - \frac{4}{3} \operatorname{cosec} x$;

2) $y = \frac{15}{8} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x$.

Ответ. 1) $y' = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$; 2) $y' = -\frac{\cos^6 x}{\sin^2 x}$.

Задача 23,12. Найти производную функции

$$y = \frac{3 \operatorname{cosec} x - 2 \sin x}{5 \cos^5 x} - \frac{16}{5} \operatorname{ctg} 2x.$$

Решение. Первое слагаемое — дробь, а потому при его дифференцировании должна быть использована формула (22,6);

$$y' = \frac{1}{5}\,\frac{(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)'\cos^5 x - (\cos^5 x)'(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{\cos^{10} x} -$$

$$-\frac{16}{5}\left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{(-3\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x - 2\cdot\cos x)\cos^5 x - (-5\cos^4 x\sin x)\cdot(3\operatorname{cosec} x - 2\sin x)}{5\cos^{10} x} +$$

$$+\frac{32}{5}\,\frac{1}{\sin^2 2x},$$

а после упрощений окончательно получим $\left(\text{если заменить}\right.$

$$\left.\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},\quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\right),$$

что

$$y' = \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^6 x}.$$

ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование обратных тригонометрических функций.

Задача 24, 1. Найти производные функций;

1) $y = \arcsin 2x$; 2) $y = \arccos x^m$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}\ (x > 0)$; 4) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x > 0)$.

Решение. 1) Задачу перепишем в виде

$$y = \arcsin u,\quad u = 2x.$$

Тогда по формуле (22,19)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}(2x)';\quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\underbrace{2}_{\substack{\text{про-}\\\text{извод-}\\\text{ная}\\\text{от}\\u=2x}};\quad y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Можно было обойтись и без введения промежуточного аргумента. Присмотритесь к формуле (22,19). **Производная от функции $y = \arcsin u$ находится так: единица делится на квадратный корень из единицы минус квадрат той функции, которая стоит**

под знаком арксинуса, и эта дробь умножается на производную этой функции. Поэтому сразу можно было бы писать:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\\text{арксинуса}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от}\\\text{функции,}\\\text{стоящей}\\\text{под зна-}\\\text{ком арк-}\\\text{синуса}}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Таким образом, мы функцию u не ввели, а держали ее в уме.

2) Здесь мы используем формулу (22,20), которая только знаком отличается от формулы (22,19) и проведем решение с введением и без введения промежуточного аргумента. Перепишем задачу так:

$$y = \arccos u; \quad u = x^m; \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot (x^m)' =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \underbrace{mx^{m-1}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{функции}\\u=x^m}} = -\frac{mx^{m-1}}{\sqrt{1-x^{2m}}};$$

$$(u = x^m, \quad \text{а потому } u^2 = x^{2m}).$$

Теперь решим эту задачу, не вводя промежуточного аргумента.

$$y' = -\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^{2m}}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная от арк-}\\\text{косинуса}}} \cdot \underbrace{mx^{m-1}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная от}\\\text{функции,}\\\text{стоящей}\\\text{под знаком}\\\text{арккосинуса}}}$$

3) При решении этого примера будем пользоваться формулой (22,21). Опять-таки сначала введем промежуточный аргумент u, а потом проведем решение без этого осложнения.

Перепишем задачу так: $y = \text{acrtg}\, u$; $u = \sqrt{x}$;

$$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ (так как } u = \sqrt{x}, \text{ то } u^2 = x).$$

Запомните, что производная функции $y = \operatorname{arctg} u$ равна дроби, у которой числитель равен 1, а знаменатель равен 1 плюс квадрат функции, стоящей под знаком арктангенса, и дробь умножается на производную этой функции:

$$y = \operatorname{arctg}\sqrt{x};$$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{от арк-}\\\text{тан-}\\\text{генса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{производная}\\\text{от функции,}\\\text{стоящей под}\\\text{знаком арк-}\\\text{тангенса}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

4) Здесь следует воспользоваться формулой (22, 22). Поступим, как и раньше: сначала введем промежуточную функцию u, а потом проведем решение, не вводя ее.

Перепишем задачу:

$$y = \operatorname{arc\,ctg} u, \quad u = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$y' = -\frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{1+u^2}\Big(\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\text{произ-}\\\text{водная}\\\text{дроби}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\substack{\text{производ-}\\\text{ная зна-}\\\text{менателя}\\\text{дроби}}}\Big).$$

Так как $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $u^2 = \frac{1}{x}$, а потому

$$y' = -\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right),$$

и окончательно

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Мы получили такой же ответ, как и в предыдущей задаче. Этот результат не является случайным, потому что при $\alpha > 0$ имеет место формула $\operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\alpha}$, а в нашем случае $\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

В дальнейшем нам придется ссылаться на соотношения между обратными тригонометрическими функциями.

Читателя, интересующегося относящимися сюда выводами, отсылаем к книге: С. И. Новоселов. Обратные тригонометрические функции.

Задача 24, 2 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \arcsin 5x$; 2) $y = \arcsin \sqrt{x}\ (x > 0)$; 3) $y = \arcsin mx$;
4) $y = \arccos 6x$; 5) $y = \arccos(1 - x^2)$; 6) $y = \arccos \frac{1}{x}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$; 2) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;
3) $y' = \frac{m}{\sqrt{1-m^2x^2}}$; 4) $y' = -\frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}$;
5) $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$; 6) $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Задача 24, 3 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \operatorname{arctg} 5x$; 2) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; 3) $y = \operatorname{arctg} 3x^2$;

4) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$; 5) $y = \operatorname{arcctg} mx$; 6) $\operatorname{arcctg} \frac{1}{1+x^2}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{5}{1+25x^2}$; 2) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$; 3) $y' = \frac{6x}{1+9x^4}$;

4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$; 5) $y' = -\frac{m}{1+m^2x^2}$;

6) $y' = \frac{2x}{2+2x^2+x^4}$.

В двух следующих задачах даны упражнения в дифференцировании степеней обратных тригонометрических функций.

Задача 24, 4. Найти производные функций:

1) $y = \arcsin^2 x$; 2) $y = \arcsin^3 3x$; 3) $y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}$.

Решение. 1) Этот пример решим сначала с помощью введения промежуточного аргумента u. Перепишем задачу так: $y = (\arcsin x)^2$.

Пусть $y = u^2$, $u = \arcsin x$,

Поэтому $y' = 2uu' = 2(\arcsin x)(\arcsin x)'$;

$$y' = \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Этот же пример решим без введения промежуточного аргумента. У нас $y = \arcsin^2 x$.

Прежде всего следует продифференцировать степень, а так как в степень возводится $\arcsin x$, то вслед за этим надо продифференцировать $\arcsin x$ и производные перемножить:

$$y' = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Мы настоятельно рекомендуем не вводить промежуточных аргументов.

а) продифференцируем сначала степень;

в) так как в степень возводится $\arcsin 3x$, надо взять производную от $\arcsin 3x$;

с) вычислим производную от $3x$ потому, что арксинус вычисляется от $3x$. Полученные производные перемножим.

Записи расположатся так:

$$y' = \underbrace{3\arcsin^2 3x}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от степени}\\ \text{арксинуса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{от арксинуса}}} \underbrace{\cdot 3}_{\substack{\text{про-}\\ \text{извод-}\\ \text{ная } 3x}}$$

3) Этот пример также решим без введения промежуточного аргумента

$$y' = \underbrace{4\operatorname{arctg}^3\sqrt{x}}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}}_{\text{производная арктангенса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{производная корня}}$$

Задача 24, 5 (для самостоятельного решения). Найти производные функций:

1) $y = \arcsin^3 x^2$; 2) $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x^2}$; 3) $y = \arccos^4 5x$;

4) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^3}$; 5) $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$.

Ответ. 1) $y' = 3\arcsin^2 x^2 \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 2) $y' = -\frac{4x}{x^4+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$;

3) $y' = -\frac{20\arccos^3 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$; 4) $y' = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$;

5) $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Задача 24, 6.* Продифференцировать:

1) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = \operatorname{tg}(\arcsin x)$;

3) $y = \operatorname{arctg}\frac{\cos x}{1+\sin x}$; 4) $y = \operatorname{arctg}\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}$.

Решение. 1) При дифференцировании не будем вводить промежуточных аргументов:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}}}_{\text{производная от арксинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\text{производная подкоренного выражения}};$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}.$$

А так как $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ -x, & \text{если } x < x, \end{cases}$

то получаем, что при $x > 0$ $y' = -\frac{x}{x\sqrt{1-x^2}}$; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

а при $x < 0$ $y' = -\frac{x}{-x\sqrt{1-x^2}}$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

В первом случае ($x > 0$) получилась производная, равная производной от $\arccos x$, а во втором ($x < 0$) производная получилась

* В этой и следующих задачах буквы a и b имеют такие значения, что содержащие их функции вещественны. Неоднозначность знака не указывается.

такая же, как от арксинуса. Этот результат не случаен. Из тригонометрии известно, что если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos x,$$

а при значениях $-1 \leqslant x \leqslant 0$

$$\arcsin\sqrt{1-x^2} = \pi - \arccos x.$$

$$2)\ \underbrace{y' = \sec^2(\arcsin x)}_{\text{производная тангенса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная арк-}\\ \text{синуса}}};$$

$$3)\ y' = \underbrace{\frac{1}{1+\dfrac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}}}_{\substack{\text{производная арк-}\\ \text{тангенса}}} \underbrace{\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}}_{\text{производная дроби}}; \qquad y' = -\frac{1}{2}.$$

$$4)\ y' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)^2}\cdot\frac{-b\sin x(b+a\cos x)-(-a\sin x)(a+b\cos x)}{(b+a\cos x)^2};$$

$$y' = \frac{-b^2\sin x + a^2\sin x}{(b+a\cos x)^2+(a+b\cos x)^2} \text{ и окончательно}$$

$$y' = \frac{(a^2-b^2)\sin x}{(a^2+b^2)+(a^2+b^2)\cos^2 x + 4ab\cos x}.$$

Задача 24, 7 (для самостоятельного решения). Продифференцировать:

1) $y = \arcsin x + \arccos x$; 2) $y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x$;

3) $y = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{a+x}{1-ax}$

и объяснить простоту полученных результатов.

Ответ. 1) 0; 2) 0; 3) $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Задача 24, 8. Показать, что каждая из функций

1) $y = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{x-b}{a-b}}$; 2) $y = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-x}}$;

3) $y = \arcsin\dfrac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}$

имеет производную, равную $\dfrac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$.

Решение. Дифференцирование проведем с подробными записями, но без введения промежуточных аргументов:

$$1)\ y' = 2\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\dfrac{x-b}{a-b}}\right)^2}}}_{\text{производная арксинуса}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-b}{a-b}}}}_{\substack{\text{производная}\\ \text{корня}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{a-b}}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная под-}\\ \text{коренного}\\ \text{выражения}}}.$$

В этом примере мы прежде всего дифференцируем арксинус (постоянный множитель 2 сразу вынесен за знак производной). Арксинус берется от корня и, следовательно, нужно взять производную корня. Корень извлекается из дроби, а потому следует вычислить производную дроби (дробь имеет постоянный знаменатель $a-b$, а производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя дроби, разделенной на тот же знаменатель). Производная заданной функции равна произведению полученных выше производных.

После упрощений получаем:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{1-\frac{x-b}{a-b}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}}\cdot\frac{1}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

$$2)\ y' = 2\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}\right)^2}}_{\text{производная от арктангенса}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}}}_{\text{производная корня}}\cdot\underbrace{\frac{(a-x)+(x-b)}{(a-x)^2}}_{\text{производная подкоренного выражения}}.$$

Упрощения проведите самостоятельно и получите, что

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

$$3)\ y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}\right)^2}}\cdot\frac{2}{a-b}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}\times$$

$$\times[-1\cdot(x-b)+1\cdot(a-x)] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4(a-x)(x-b)}{(a-b)^2}}}\cdot\frac{2}{a-b}\times$$

$$\times\frac{(-2x+a+b)}{2\sqrt{(a-x)(x-b)}} = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2-4(a-x)(x-b)}}\cdot\frac{a+b-2x}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}.$$

Но выражение под корнем в знаменателе первой дроби равно $(a+b-2x)^2$, а потому получаем, что $y' = \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)}}$.

Задача 24, 9 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функцию

$$y = \arccos\sqrt{\frac{\cos 3x}{\cos^3 x}}.$$

Ответ.

$$y' = -\sqrt{\frac{3}{\cos x\cos 3x}}.$$

ДВАДЦАТЬ ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование показательной и логарифмической функций. Логарифмическое дифференцирование.

При дифференцировании показательной и логарифмической функций мы будем пользоваться формулами (22,10), (22,11) и (22,12) из основной таблицы формул.

Задача 25, 1. Найти производные функций:

1) $y = a^{3x}$ $(a > 0)$; 2) $y = 7^{\frac{1}{4x}}$ 3) $y = 2^{x^3}$;

4) $y = 4^{\sin^2 x}$; 5) $y = e^{x^4}$; 6) $y = e^{\sqrt{x^2+x+2}}$;

7) $y = e^{\sqrt{\sin x}}$ 8) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$;

9) $y = e^{\operatorname{tg} x}$; 10) $y = e^{\arcsin^2 x}$.

Решение. 1) По формуле (12,10), если $y' = a^u$ $(a > 0)$, то $y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.

В нашем случае, полагая $y = a^u$, $u = 3x$, имеем $y' = a^u \ln a \cdot 3 = 3a^{3x} \ln a$.

Здесь снова возникает вопрос о целесообразности введения промежуточного аргумента u.

Можно обойтись без этого. Техника дифференцирования у читателя уже выработалась, а потому все последующие примеры должны решаться без введения вспомогательных переменных. Пример первый должен решаться так: $y' = a^{3x} \ln a\,(3x)'$;

$$y' = \underbrace{a^{3x}\ln a}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная пока-}\\ \text{зательной}\\ \text{функции}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная пока-}\\ \text{зателя}\\ \text{степени}}}.$$

2) Здесь также будем пользоваться формулой (22,10):

$$y' = \underbrace{7^{\frac{1}{4x}} \cdot \ln 7}_{\substack{\text{производная}\\ \text{показательной}\\ \text{функции}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{\substack{\text{производная}\\ \text{показателя}\\ \text{степени}}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}7^{\frac{1}{4x}} \cdot \ln 7.$$

3) По формуле (22,10) имеем:

$$y' = \underbrace{2^{x^3}\ln 2}_{\substack{\text{производ-}\\ \text{ная пока-}\\ \text{зательной}\\ \text{функции}}} \cdot \underbrace{3x^2}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{показа-}\\ \text{теля}\\ \text{степени}}} = 3x^2 2^{x^2} \ln 2.$$

4) По формуле (22,10) имеем

$$y' = \underbrace{4^{\sin^2 x} \cdot \ln 4}_{\substack{\text{производная}\\ \text{показательной}\\ \text{функции}}} \cdot \underbrace{2\sin x}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{степени}\\ \text{синуса}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{произ-}\\ \text{водная}\\ \text{синуса}}} = 4^{\sin^2 x}\sin 2x \cdot \ln 4.$$

5) Из формулы (22,10) следует, что производная от функции $y = e^{x^4}$ равна ей же самой, умноженной на производную показателя степени u. Получаем $y' = e^{x^4}(x^4)' = 4x^3e^{x^4}$.

$$6)\ y' = e^{\sqrt{x^2+x+2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+2}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{\text{производная подкоренного выражения}}.$$

7) Здесь также следует воспользоваться формулой (22,10):

$$y' = e^{\sqrt{\sin x}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}}_{\text{производная корня}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{производная синуса}}.$$

Применим формулу для дифференцирования произведения:

$$y' = (e^x)'(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)' =$$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + e^x(3x^2 - 6x + 6);$$

$$y' = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + 3x^2 - 6x + 6).$$

Окончательно после приведения подобных членов в скобке $y' = x^3e^x$.

$$9)\ y' = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x)' = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}.$$

$$10)\ y' = e^{\arcsin^2 x} \cdot \underbrace{2\arcsin x}_{\text{производная степени арксинуса}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{\text{производная арксинуса}}.$$

Задача 25,2 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = a^{x^n}\ (a > 0)$; 2) $y = (a^x)^n\ (a > 0)$;

3) $y = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$; 4) $y = \frac{x^4}{e^x}$;

5) $y = e^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = e^{-x}$.

Ответ. 1) $y' = a^{x^n} \cdot \ln \cdot a \cdot nx^{n-1}$; 2) $y' = na^{nx} \cdot \ln a$;

3) $y' = e^{\operatorname{arc\,tg} x} \frac{1}{1+x^2}$; 4) $y' = \frac{(4x^3 - x^4)}{e^x}$;

5) $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = -e^{-x}$.

Задача 25, 3. Продифференцировать функции:

1) $y = \ln(ax + b)$; 2) $y = \ln^5 x$; 3) $y = \ln \sin x$;

4) $y = \ln \operatorname{arc\,tg} x$; 5) $y = x \ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$;

7) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 8) $y = \ln(\ln x)$.

Решение. По формуле (22, 12), если $y = \ln u$, то $y' = \frac{1}{u} u'$. Чтобы получить производную от функции $\ln u$, где u — функция x, надо единицу разделить на функцию u, стоящую под знаком логарифма; полученную дробь следует умножить на производную этой функции:

$$y' = \frac{1}{ax+b}(ax+b)' = \frac{1}{ax+b} a = \frac{a}{ax+b}.$$

2) Здесь дифференцируется степень логарифма, а потому

$$y' = \underbrace{5\ln^4 x}_{\text{производная степени}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{производная логарифма}}; \quad y' = \frac{5\ln^4 x}{x};$$

3) $y' = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{\text{производная логарифма}} \cdot \underbrace{\cos x = \operatorname{ctg} x}_{\text{производная синуса}}$

4) Аналогично решается пример 4: $y' = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

5) Здесь следует применить формулу для дифференцирования произведения

$$y' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

6) По формуле для дифференцирования дроби имеем

$$y' = \frac{(\ln x)' x - x' \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

7) $y' = \underbrace{\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}}_{\text{производная логарифма}} \underbrace{\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}_{\text{производная от функции, стоящей под знаком логарифма}}$.

После упрощений получим, что $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

8) $y' = \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\text{производная логарифма}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{производная от функции, стоящей под знаком логарифма}}; \quad y' = \frac{1}{x \ln x}$

Задача 25, 3а (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \ln(15e^x + x^2)$; 2) $y = 5^{\ln(x^2+x+1)}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{15e^x + 2x}{15e^x + x^2}$; 2) $y' = 5^{\ln(x^2+x+1)} \ln 5 \cdot \frac{2x+1}{x^3+x+1}$.

Задача 25, 4. Продифференцировать функции:

1) $y=\ln\frac{x}{1-x^4}$;

2) $y=\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 3) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Во всех этих примерах прежде чем вычислить производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

1) Перепишем пример в виде $y=\ln x-\ln(1-x^4)$, а теперь

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x^4}(1-x^4)'=\frac{1}{x}+\frac{4x^3}{1-x^4};$$

окончательно

$$y'=\frac{1+3x^4}{x(1-x^4)}.$$

2) Перепишем пример в виде $y=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, и тогда

$$y'=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x;\quad y'=\frac{1}{x(1+x^2)}.$$

3) В преобразованном виде пример запишется так:

$$y=\ln(1+x)-\ln(1-x),$$

а поэтому

$$y'=\frac{1}{1+x}(1+x)'-\frac{1}{1-x}(1-x)',$$

или

$$y'=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\quad y'=\frac{2}{1-x^2}.$$

Задача 25, 5 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y=\ln\frac{x^2-2}{\sqrt{(6-2x^2)^3}}$; 2) $y=\ln\frac{\sqrt[21]{(x+4)^{13}}\sqrt[28]{(x-3)^{13}}}{\sqrt[12]{x+1}}$;

3) $y=\ln\frac{x^2(2x+4)^7}{(6+7x+2x^2)(2x+3)^7}$; 4) $y=\ln\sqrt{\frac{\sqrt{3}-x\sqrt{7}}{\sqrt{3}+x\sqrt{7}}}$.

Указание. Прежде чем вычислять производную, целесообразно выполнить логарифмирование.

Ответ. 1) $y'=\frac{x^3}{(x^2-2)(3-x^2)}$; 2) $y'=\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2-11x-12}$;

3) $y'=\frac{12}{x(6+7x+2x^2)}$; 4) $y'=\frac{\sqrt{21}}{7x^2-3}$.

Задача 25, 6 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2-2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Указание. Под знаком логарифма в первом слагаемом выгодно освободиться от иррациональности в знаменателе. После этого дробь сначала прологарифмировать и только потом приступить к дифференцированию. Производная второго слагаемого найдена в задаче 25,3 (пример 7).

2) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}$; 2) $y' = \frac{2ax^2}{x^4-a^4}$.

Задача 25, 7 (для самостоятельного решения). Продифференцировать функции:

1) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

2) $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{1-x\sqrt{2}+x^2}{1+x\sqrt{2}+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$;

3) $y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + 2\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)$.

Указание. В каждом примере, прежде чем дифференцировать первую дробь, надо ее прологарифмировать.

Ответ 1) $y' = \frac{1}{1+x^4}$; 2) $y' = \frac{x^2}{1+x^4}$; 3) $y' = \frac{1}{1+x^2+x^4}$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Если требуется продифференцировать произведение нескольких функций или дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведения, часто представляется выгодным обе части данного выражения сначала прологарифмировать, по основанию e, а потом уже приступить к дифференцированию. Этот прием получил название логарифмического дифференцирования. Производная от логарифма функции называется логарифмической производной.

К этому приему удобно прибегать и при дифференцировании выражений, содержащих корни из дробей. К нему прибегают всегда, когда следует продифференцировать функцию вида

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

т. е. когда и основание степени, и показатель степени есть функции x.

Способ логарифмического дифференцирования будет подробно рассмотрен на ряде примеров.

Задача 25, 8. Найти производную функций:

1) $y=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$;

2) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}$;

3) $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}$; 4) $y=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Решение. Во всех предложенных примерах целесообразно сначала прологарифмировать по основанию e обе части равенства, а потом уже дифференцировать.

1) Если $y=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)$, то $\ln y = 2\ln(x+5)+3\ln(2x-7)+\ln(x-2)+\ln(x+3)$.

Будем считать функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x и найдем ее производную:

Производная функции $\ln y$ с учетом того, что y есть функция x, равна $\frac{1}{y}y'$, а потому, вычисляя производную левой и правой частей равенства, получим

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{x+5}+\frac{3}{2x-7}\cdot 2+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}.$$

Умножая обе части этого равенства на y и учитывая, что y есть заданная функция, получим

$$y'=(x+5)^2(2x-7)^3(x-2)(x+3)\left[\frac{2}{x+5}+\frac{6}{2x-7}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}\right].$$

2) Поступая так же, как в первом примере, получим

$$\ln y=\frac{1}{4}\ln(x^2+7x-8)+\frac{1}{6}\ln(x^4-1)-\frac{1}{3}\ln(x^3-3x^2+x-4).$$

Считая функцию $\ln y$ сложной функцией переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+7x-8}(2x+7)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^4-1}4x^3-$$
$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-3x^2+x-4}\cdot(3x^2-6x+1).$$

Умножая обе части этого равенства на y и зная, что y есть заданная функция, получаем окончательно выражение искомой производной:

$$y'=\frac{\sqrt[4]{x^2+7x-8}\cdot\sqrt[6]{x^4-1}}{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x-4}}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2x+7}{x^2+7x-8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4x^3}{x^4-1}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\cdot\frac{3x^2-6x+1}{x^3-3x^2+x-4}\right).$$

3) Здесь опять-таки целесообразно сначала прологарифмировать по основанию e обе части равенства, а потом уже дифференцировать:

$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4).$$

Считая, как и в двух предыдущих примерах, $\ln y$ сложной функцией переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y}y' = 2\cdot\frac{1}{x+5} + 3\cdot\frac{1}{x-4} - 5\cdot\frac{1}{x+2} - 2\cdot\frac{1}{x+4},$$

а после умножения обеих частей равенства на y, учитывая, что y есть заданная функция, получаем окончательное выражение производной

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x-4}\right).$$

4) Прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(ax+b) - \ln(cx+d)].$$

Считая, что $\ln y$ есть сложная функция переменной x и дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{ax+b}\cdot a - \frac{1}{cx+d}\cdot c\right].$$

Умножая обе части этого равенства на $y = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, получим, что искомая производная

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d}\right)\sqrt{\frac{ax+d}{cx+d}};$$

и после очевидных упрощений окончательно

$$y' = \frac{ad-bc}{2(ax+b)(cx+d)}\sqrt{\frac{ax+d}{cx+d}};$$

Задача 25, 9 (для самостоятельного решения). Найти производные функции:

1) $y = (5x-4)^3(x-2)^2(3-4x)$; 2) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x(x^2+2)}{x-4}}$;

3) $y = \dfrac{5x^2}{x^2+1}\cdot\sin^3 x\cdot\cos^4 x$; 4) $y = \dfrac{(x+5)^7(x^2-4x+2)^3}{(x^3+3x^2+5)^2}$.

Задача 25, 10 (для самостоятельного (решения). Продифференцировать функции:

$$1)\ y=\frac{(2x-3)^2(4x+7)^2}{\sqrt[3]{(x-2)^5(x-4)^7}};\quad 2)\ y=\sqrt{\frac{(2+x)(3-4x)}{(5-2x)(3x-4)}};$$

$$3)\ y=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x-4)^5}\sqrt{(x-1)^3}}.$$

Теперь мы займемся дифференцированием функций вида

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Читатель должен обратить внимание на тот факт, что для дифференцирования этой функции непригодна формула ни (22,8), ни (22,10), так как в первой из них основание степени u есть функция x, а показатель степени — величина постоянная, во второй основание степени — постоянная величина, а показатель степени — функция x. В рассматриваемом случае и основание степени $f(x)$ и показатель степени $\varphi(x)$ — величины переменные — функции независимой переменной.

В общем виде задача дифференцирования этой функции решается так:

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Прологарифмируем по основанию e обе части равенства и получим

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x).$$

Теперь, считая $\ln y$ сложной функцией переменной x, найдем производную обеих частей последнего равенства, дифференцируя правую часть, как произведение

$$\frac{1}{y}y'=\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x).$$

Умножая теперь обе части этого равенства на y и учитывая, что $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$, получаем окончательно

$$y'=[f(x)]^{\varphi(x)}\left\{\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}.$$

Запоминать эту формулу не следует, а вместо этого надо хорошо усвоить метод вычисления производной от функций рассматриваемого вида.

Задача 25, 11. Найти производную функции $y=x^x\ (x>0)$.

Решение. Беря натуральные логарифмы от обеих частей равенства, получим $\ln y=x\ln x$ и дифференцируем теперь обе части равенства, считая $\ln y$ сложной функцией x:

$$\frac{1}{y}y'=\ln x+\frac{1}{x}x;\quad \frac{1}{y}y'=\ln x+1.$$

Умножая теперь обе части равенства на y, который по условию равен x^x, получаем окончательно $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Замечание. В условии задачи указано, что $x > 0$ потому, что x в последующем оказывается под знаком логарифма, а логарифмы можно вычислять только от положительных чисел.

Задача 25, 12. Определить производную функции

$$y = (\sin x)^{\cos x}, \quad (0 < x < \pi).$$

Решение. Беря натуральные логарифмы обеих частей равенства, получаем

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x$$

(так как $\sin x$ стоит под знаком логарифма, то является существенной оговорка в условии задачи, что x берется из интервала $(0; \pi)$, так как для значений x из этого интервала $\sin x > 0$ и $\ln \sin x$ имеет смысл). Теперь продифференцируем обе части последнего равенства, считая, что $\ln y$ — сложная функция переменной x:

$$\frac{1}{y} y' = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Умножая обе части этого равенства на y, который по условию задачи равен $(\sin x)^{\cos x}$, получаем окончательно, что

$$y' = (\sin x)^{\cos x}\left\{-\sin x \cdot \ln \cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right\}.$$

ДВАДЦАТЬ ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Гиперболические функции. Дифференцирование гиперболических функций. Дифференцирование неявных функций.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Предыдущие практические занятия убедили читателя в широком применении при решении разобранных задач показательной функции e^x. Но кроме самой этой функции как в математике, так и в прикладных науках применяются различные комбинации ее с функцией e^{-x}.

По определению вводятся такие часто встречающиеся комбинации функций e^x и e^{-x}:

$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом x и обозначается символом $\operatorname{sh} x$;

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty); \qquad (26, 1)$$

$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим косинусом x и обозначается символом $\operatorname{ch} x$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (-\infty < x < +\infty); \qquad (26, 2)$$

$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ называется гиперболическим тангенсом x и обозначается символол $\operatorname{th} x$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (-\infty < x < +\infty); \qquad (26,3)$$

$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ называется гиперболическим котангенсом x и обозначается символом $\operatorname{cth} x$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (-\infty < x < 0), \quad (0 < x + \infty). \qquad (26, 4)$$

Производные гиперболических функций вычисляются по формулам ($u = u(x)$):

$$y = \operatorname{sh} u; \quad y' = \operatorname{ch} u \cdot u'; \qquad (26, 5)$$

$$y = \operatorname{ch} u; \quad y' = \operatorname{sh} u \cdot u'; \qquad (26, 6)$$

$$y = \operatorname{th} u; \quad y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'; \qquad (26, 7)$$

$$y = \operatorname{cth} u; \quad y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'. \qquad (26, 8)$$

Эти формулы следует запомнить.

Задача 26, 1 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$ — нечетные, а функция $\operatorname{ch} x$ — четная.

Указание. В формулах (26,1)—(26,2) заменить x на $-x$ и убедиться, что $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$; $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$; $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$, а $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$;

Задача 26, 2. Вычислить производные функций: 1) $y = \operatorname{sh}^2 x$; 2) $y = \operatorname{th}^3 x^2$; 3) $y = \ln \operatorname{sh} x$; 4) $y = \cos(\operatorname{ch} x)$.

Решение. 1) Используя правило дифференцирования сложной функции и формулу (26, 5), получаем, что $y' = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$ (проверьте, что из определения гиперболических функций действительно следует, что $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$);

$$2)\ y' = \underbrace{3 \operatorname{th}^2 x^2}_{\text{произ-водная степени}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x^2}}_{\text{производная гиперболического тангенса}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{произ-водная } x^2};$$

$$3)\ y' = \frac{1}{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x = \operatorname{cth} x; \quad 4)\ y' = -\underbrace{\sin(\operatorname{ch} x)}_{\text{производная косинуса}} \cdot \underbrace{\operatorname{sh} x}_{\text{производная гиперболического косинуса}}$$

Задача 26, 3 (для самостоятельного решения). Вычислить производные функций: 1) $y=\operatorname{ch}^3 x$; 2) $y=\operatorname{sh} x+\frac{1}{3}\operatorname{sh}^2 x$; 3) $y=\operatorname{ch}(\sin x)$; 4) $y=\sin(\operatorname{ch} x)$; 5) $y=\ln \operatorname{ch} x$; 6) $y=\ln \operatorname{th} x$; 7) $y=\cos x\cdot\operatorname{ch} x+\sin x\cdot\operatorname{sh} x$; 8) $y=\operatorname{th} x-\frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x$; 9) $y=\frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{\operatorname{sh} x+\sin x}$.

Ответ. 1) $y'=3\operatorname{ch}^2 x\operatorname{sh} x$; 2) $y'=\operatorname{ch}^3 x$; 3) $y'=\operatorname{sh}(\sin x)\cdot\cos x$; 4) $y'=\cos(\operatorname{ch} x)\cdot\operatorname{sh} x$; 5) $y'=\operatorname{th} x$; 6) $y'=\frac{2}{\operatorname{sh} 2x}$; 7) $y'=2\operatorname{sh} x\cos x$; 8) $y'=\operatorname{sch}^4 x$; 9) $y=\frac{2\operatorname{sh} x\sin x}{(\operatorname{sh} x+\sin x)^2}$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением вида $f(x, y)=0$, которое не разрешено относительно y, то y называется неявной функцией x.

Несмотря на то, что уравнение $f(x, y)=0$ не разрешено относительно y, оказывается возможным найти производную от y по x.

В примерах, которые рассматриваются ниже, указан прием для нахождения производной в случае, когда функция задана неявно. Прием этот состоит в том, что обе части уравнения $f(x, y)=0$ дифференцируются по x с учетом, что y есть функция x, и из полученного уравнения определяется y'.

Задача 26, 4. Найти производную от неявной функции $5x+3y-7=0$.

Решение. Дифференцируя по x обе части ревенства и учитывая, что: 1) y есть функция x и что 2) производная правой части равенства равна нулю, получаем $5+3y'=0$; $3y'=-5$; $y'=-\frac{5}{3}$.

Задача 26, 5. Найдем производную y' неявных функций:

1) $x^2+y^2-25=0$; 2) $x^3+y^3-3axy=0$.

Решение. 1) При дифференцировании y^2 по x получается $(y^2)_x=2yy'$.

Здесь сначала продифференцирована степень y, а потом дифференцируется по x основание степени y (производная от y по x есть y'). Обе эти производные на основании правила дифференцирования сложной функции перемножаются.

Дифференцируя обе части равенства, получаем $2x+2yy'=0$. Сокращая на 2 и перенося x в правую часть равенства, имеем $yy'=-x$; разрешая это уравнение относительно y', находим, что $y'=-\frac{x}{y}$.

2) При дифференцировании последнего слагаемого второго примера надо применить формулу для дифференцирования произ-

ведения и тогда $(3axy)'_x = 3a(y + xy')$. Поэтому получаем $3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0$.

Сокращаем на 3, раскрываем скобки, переносим члены, не содержащие y', в правую часть равенства и получаем $(y^2 - ax)y' = ay - x^2$, а отсюда $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

Задача 26,6 (для самостоятельного решения). Найти производную y' неявных функций:

1) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$;

2) $x^3 + y^3 - a = 0$.

Ответ. 1) $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$; 2) $y' = -\frac{x^2}{y^2}$.

Задача 26,7. Найти производную неявных функций:

1) $y^n - \frac{x+y}{x-y} = 0$; 2) $x^n - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 0$.

Решение. 1) Считая, что y есть функция x, производную по x от y^n находим так:

$$(y^n)' = ny^{n-1}y'.$$

Дифференцируя обе части уравнения, получаем:

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = 0.$$

Умножим теперь обе части последнего равенства на $(x-y)^2$, раскроем скобки в числителе дроби и получим

$$ny^{n-1}y'(x-y)^2 - x - xy' + y + yy' + x - xy' + y - yy' = 0.$$

У членов, содержащих y', вынесем за скобку y', а остальные члены перенесем в правую часть равенства:

$$y'[ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x] = -2y;$$

отсюда уже получаем, что $y' = -\frac{2y}{ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x}$.

Покажем теперь, как использовать условие задачи для того, чтобы упростить это выражение.

У нас в знаменателе дроби есть y^{n-1}, а потому, если умножить числитель и знаменатель дроби на y, то в знаменателе окажется y^n, который можно на основании условия задачи заменить на $\frac{x+y}{x-y}$; выполним эти преобразования: $y' = -\frac{2y^2}{ny^n(x-y)^2 - 2xy}$; подставим теперь $\frac{x+y}{x-y}$ вместо y^n.

После этого окажется, что

$$y' = -\frac{2y^2}{n\frac{x+y}{x-y}(x-y)^2 - 2xy} = -\frac{2y^2}{n(x^2-y^2) - 2xy}.$$

2) **Указание.** В полученном выражении для y' на основании условия задачи заменить x^n на $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

Ответ. $y' = \frac{n(x^4-y^4)+4x^2y^2}{4x^3y}$.

Задача 26,8 (для самостоятельного решения). Найти производные неявных функций: 1) $y^5 - 5axy + x^5 = 0$; 2) $a^x - e^{x-y} = 0$.

После того как производная y' будет определена, надо учесть, что из условия задачи следует равенство $a^x = e^{x-y}$.

Ответ. 1) $y' = \frac{ay-x^4}{y^4-ax}$; 2) $y' = 1 - \ln a$.

Задача 26,9. Найти производную неявной функции $e^y = x^{x+y}$.

Решение. В правой части равенства переменными являются и основание степени x, и показатель степени $x+y$, а потому здесь следует сначала прологарифмировать обе части равенства, а потом уже дифференцировать.

После логарифмирования с учетом того, что $\ln e = 1$, получаем $y = (x+y)\ln x$. Отсюда $y' = (1+y')\ln x + (x+y)\frac{1}{x}$. Раскрывая скобки, имеем:

$$y' = y'\ln x + \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y' - y'\ln x = \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y'(1-\ln x) = \ln x + (x+y)\cdot\frac{1}{x},$$

$$y' = \frac{x\ln x + x + y}{x(1-\ln x)};$$

и окончательно:

$$y' = \frac{x(\ln x + 1) + y}{x(1-\ln x)}.$$

ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Параметрическое представление функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В геометрии и механике часто употребляется так называемый параметрический способ задания уравнения кривой. Кривую линию можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений движущейся точки, а координаты x и y этой точки выразить в виде непрерывных функций вспомогательной переменной t, которая называется параметром. Плоская кривая в этом случае определяется двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (27,1)$$

причем параметр t должен изменяться в таком промежутке, чтобы при изменении его в этом промежутке точка с координатами (x, y) описывала всю кривую или ее рассматриваемую часть.

Предполагается, что каждому значению t соответствует только по одному значению x и y.

Задание кривой уравнениями (27, 1) **называется параметрическим.**

Если из уравнений (27, 1) можно исключить параметр t, то y определится как явная или неявная функция x. Однако читатель должен знать, что исключение параметра t из уравнений (27, 1) является в большом числе случаев задачей трудной, а иногда и просто неразрешимой.

Задачи (27, 1) — (27, 9) отводятся для упражнений в исключении параметра.

В механике уравнения (27, 1) называются уравнениями движения точки. Если из этих уравнений исключить t, то получится уравнение траектории точки.

Задача 27, 1. Исключить параметр t из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= 8t^2 - 7 \\ y &= 16t^2 + 4 \end{aligned}\right\}$$

и определить линию, определяемую полученным уравнением.

Решение. Из первого уравнения определим t^2 в зависимости от x:

$$t^2 = \frac{x+7}{8}.$$

Подставим это значение t^2 во второе уравнение, и тогда $y = 16 \cdot \frac{x+7}{8} + 4$; $y = 2x + 18$. Линия, определяемая этим уравнением, — прямая. Значит, заданные уравнения определяют прямую.

Задача 27, 2. Какую линию определяют уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t - 4t^2 \\ y &= t - 2t^2 \end{aligned}\right\}?$$

Решение. Если второе уравнение умножить на 2 и вычесть его почленно из первого, то получим $x - 2y = 0$. Это уравнение определяет прямую, а потому и заданные уравнения есть параметрические уравнения этой прямой.

Задача 27, 3 (для самостоятельного решения). Линия задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y &= 3t^2 \\ x &= 5t^2 \end{aligned}\right\}.$$

Определить вид линии.

Ответ. Прямая линия $3x - 5y = 0$.

Задача 27, 4. Даны уравнения движения точки:

$$\left.\begin{aligned} x &= 5t^2 \\ y &= 3t \end{aligned}\right\}.$$

Определить траекторию точки.

Решение. Исключим из уравнений параметр t. Найдем из второго уравнения t и подставим найденное значение в первое уравнение:

$$t = \frac{y}{3};\quad x = 5\cdot\frac{y^2}{9};\quad y^2 = \frac{9}{5}x;$$

траектория — парабола. Заданные уравнения — параметрические уравнения параболы.

Задача 27, 5. Какую линию определяют уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}\ (0 \leqslant t \leqslant \pi)?$$

Решение. Для исключения параметра t возведем обе части каждого уравнения в квадрат и сложим почленно полученные уравнения:

$$\begin{array}{l} +\begin{array}{l} x^2 = r^2\cos^2 t, \\ y^2 = r^2\sin^2 t, \end{array} \\ \hline x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t); \end{array}\quad x^2 + y^2 = r^2;\quad y = \sqrt{r^2 - x^2}. \qquad (27,2)$$

Перед корнем выбран знак плюс потому, что когда t изменяется на отрезке $[0, \pi]$, то $y = r\sin t$ не принимает отрицательных значений. Кривая — полуокружность с центром в начале координат, расположенная в верхней полуплоскости.

Если бы параметр t изменился на отрезке $[\pi, 2\pi]$, то в (27, 2) следовало бы у корня взять знак минус $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, так как в этом случае $y = r\sin t$ положительных значений не принимает.

Уравнение $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ определяет полуокружность с центром в начале координат, расположенную в нижней полуплоскости.

Если же считать, что параметр t изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$, то уравнения

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}\right\}$$

определяют две функции: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

Графики этих двух функций в совокупности образуют целую окружность.

Задача 27, 6. Кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Исключить параметр t из этих уравнений.

Решение. Обе части первого уравнения разделим на a, а второго на b:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos t \\ \frac{y}{b} &= \sin t \end{aligned}\right\}.$$

Обе части каждого из этих уравнений возведем в квадрат и почленно сложим:

$$+\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \cos^2 t \\ \frac{y^2}{a^2} &= \sin^2 t \end{aligned}$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кривая — эллипс. Итак, заданные уравнения — уравнения эллипса в параметрической форме. Когда параметр t изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$, точка на эллипсе описывает всю кривую.

Задача 27, 7 (для самостоятельного решения). Исключить параметр t из уравнений и определить вид кривой:

1) $\left.\begin{aligned} x &= 6\sin\frac{\pi}{3}t \\ y &= 3\cos\frac{\pi}{3}t \end{aligned}\right\}$, 2) $\left.\begin{aligned} x &= 4\sin t \\ y &= 4\cos t \end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} x &= 3\cos t^2 \\ y &= 3\sin t^2 \end{aligned}\right\}$, 4) $\left.\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 4 - 3\sin t \end{aligned}\right\}$.

Ответ. 1) Кривая — эллипс, определяемый уравнением $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$. 2) Кривая — окружность $x^2 + y^2 = 16$. 3) Кривая — окружность $x^2 + y^2 = 9$. 4) Кривая — окружность $x^2 + (y-4)^2 = 9$.

Задача 27, 8. Исключить параметр t из уравнений:

$$x = 2 + 3\cos t,$$
$$y = -3 + 4\sin t.$$

Решение. В первом уравнении из правой части в левую перенесем 2, а во втором — 3. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x - 2 &= 3\cos t \\ y + 3 &= 4\sin t \end{aligned}\right\}.$$

Обе части первого уравнения разделим на 3, а второго — на 4, после этого обе части каждого уравнения возведем в квадрат и сложим их почленно:

$$+\left.\begin{aligned}\frac{(x-2)^2}{9}&=\cos^2 t\\ \frac{(y+3)^2}{16}&=\sin^2 t\end{aligned}\right\},$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1.$$

Кривая эллипс, центр которого находится в точке (2, —3).

Задача 27, 9. Исключить параметр t из уравнений

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}\right\}.$$

Решение. Обе части каждого уравнения возведем в степень $\frac{2}{3}$ и почленно их сложим:

$$+\left.\begin{aligned}x^{\frac{2}{3}}&=a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t\\ y^{\frac{2}{3}}&=a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t\end{aligned}\right\}$$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

Кривая — астроида.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Производная функции

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\},$$

заданной параметрически, вычисляется по формуле

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (27,3)$$

Ниже предлагаются задачи, в которых требуется найти производную от функций, заданных параметрически, минуя определение y как функции x.

Эти задачи не должны вызвать у читателя затруднений, так как предполагается, что техника дифференцирования у него выработана хорошо на большом количестве примеров, решенных на предыдущих практических занятиях.

Поэтому подробно мы рассмотрим решение только двух задач, а остальные должны быть решены самостоятельно. Формула (27,3) используется при решении задач (27, 9) — (27, 13).

Задача 27, 9 а. Найти производную y'_x от функций, заданных параметрически:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x &= \frac{a\sin t}{1+b\cos t} \\ y &= \frac{c\cos t}{1+b\cos t}\end{aligned}\right\}. \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} x &= \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y &= \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{aligned}\right\}.$$

Решение. 1) Находим x'_t и y'_t и полученные значения подставляем в формулу (27, 3):

$$x'_t = a\frac{\cos t(1+b\cos t)-(-b\sin t)\sin t}{(1+b\cos t)^2}; \quad x'_t = \frac{a(\cos t+b)}{(1+b\cos t)^2}.$$

$$y'_t = c\frac{-\sin t(1+b\cos t)-(-b\sin t)\cos t}{(1+b\cos t)^2}; \quad y'_t = c\frac{-\sin t}{(1+b\cos t)^2}.$$

Теперь по формуле (27, 3) имеем:

$$y'_x = -c\frac{\sin t}{a(b+\cos t)};$$

$$2)\ x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{\sqrt{1+t^2}(1+t^2-t^2)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2};$$

находим далее, что и $y'_t = \frac{1}{1+t^2}$, потому $y'_x = 1$.

Замечание. Из тригонометрии известно, что

$$\operatorname{arctg} t = \arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \arccos\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

и, таким образом, у нас в задаче

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{arctg} t \\ y &= \operatorname{arctg} t\end{aligned}\right\},$$

т. е. $y = x$, а потому и $y'_x = 1$.

Если бы это сразу было замечено, то не было бы необходимости находить x'_t и y'_t.

Задача 27, 10. Найти производную y'_x от функции, заданной параметрически,

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t - \cos 2t \\ y &= 2\sin t - \sin 2t\end{aligned}\right\}$$

в точке, где $t = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

$$x'_t = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2};$$

$$y'_t = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2},$$

а потому

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}};\quad y'_x=\operatorname{tg}\frac{3t}{2};\quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}=\operatorname{tg}\frac{3}{2}\frac{\pi}{6}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1:$$

Задача 27, 11 (для самостоятельного решения). Найти при $t=\frac{\pi}{8}$ производные функций, заданных параметрически:

1) $\left.\begin{array}{l}x=a(1-t)\\ y=at\end{array}\right\}$, 2) $\left.\begin{array}{l}x=\sin 2t\\ y=\sin^2 t\end{array}\right\}$,

3) $\left.\begin{array}{l}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{array}\right\}$, 4) $\left.\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}\\ y=\frac{1}{2}t^2\end{array}\right\}$.

Ответ. 1) $y'_x=-1$; 2) $y'_x=\frac{1}{2}$; 2) $y'_x=0{,}414$; 4) $y'_x=0{,}833$.

Задача 27,12 (для самостоятельного решения). Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $\left.\begin{array}{l}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{array}\right\}$, 2) $\left.\begin{array}{l}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{array}\right\}$,

3) $\left.\begin{array}{l}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{array}\right\}$, 4) $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1-t}{1+t}\\ y=\frac{2t}{1+t}\end{array}\right\}$.

Ответ. 1) $y'_x=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$; 2) $y'_x=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$;

3) $y'_x=-\operatorname{ctg}t$; 4) $y'_x=-1$.

Задача 27,13 (для самостоятельного решения). Найти производные функций, заданных параметрически:

1) $\left.\begin{array}{l}x=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}\\ y=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}\end{array}\right\}$, 2) $\left.\begin{array}{l}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{array}\right\}$. 3) $\left.\begin{array}{l}x=\frac{3a-2t}{at}\\ y=\frac{4(a-t)^3}{a^2t^2}\end{array}\right\}$.

Ответ. 1) $y'_x=-\operatorname{tg}3t$; 2) $y'_x=-\operatorname{tg}t$; 3) $y'_x=\frac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2t}$.

ДВАДЦАТЬ ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференциал функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1) Если дана дифференцируемая функция $y=f(x)$, то ее приращение

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x, \tag{28, 1}$$

где, $\alpha\to 0$, когда $\Delta x\to 0$.

2. При $\Delta x \to 0$ величина $\alpha\Delta x$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем Δx.

3) Из формулы (28, 1) следует, что приращение функции, которая имеет производную в точке x, не равную нулю, может быть представлено в виде суммы двух слагаемых. В первое слагаемое $f'(x) \cdot \Delta x$ приращение Δx независимой переменной входит в первой степени, т. е. оно, как говорят, линейно относительно Δx. Это слагаемое является главной частью приращения функции и называется дифференциалом функции.

***Определение.** Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение производной этой функции на приращение независимой переменной. Дифференциал функции обозначается символом dy, и, таким образом, дифференциал функции*

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{28, 2}$$

Определение.** Дифференциалом независимой переменной называется ее приращение: $dx = \Delta x$, и поэтому можно сказать, что* ***дифференциалом функции называется произведение ее производной на дифференциал независимой переменной:

$$dy = f'(x)\,dx, \tag{28, 3}$$

а формула (28, 1) может быть переписана в виде

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \tag{28, 4}$$

4) Второе слагаемое $\alpha\Delta x$ в (28, 1) при $\Delta x \to 0$ есть величина бесконечно малая высшего порядка малости чем Δx. Из этого следует, что разность $\Delta y - dy$ между приращением функции и ее дифференциалом, равная $\alpha\Delta x$, есть величина бесконечно малая высшего порядка, по сравнению с Δx.

5) Для вычисления дифференциала функции необходимо задать начальное значение независимой переменной x и ее приращение Δx.

6) Если Δx мало, а $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$, входящая в приращение функции, значительно меньше, чем дифференциал функции dy, причем тем меньше, чем меньше Δx.

Поэтому вычисление Δy приращения функции может быть с хорошим приближением заменено вычислением дифференциала функции dy, ***а вычислить дифференциал функции значительно проще, так как для этого требуется только найти производную этой функции и умножить ее на приращение независимой переменной:***

$$\Delta y \approx dy. \tag{28, 5}$$

7) Из формулы (28, 5), учитывая, что

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \tag{28, 6}$$

следует, что $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x$, *а отсюда заключаем, что наращенное значение функции*

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \qquad (28,7)$$

Эта формула позволяет по известному значению функции и ее производной в точке x найти приближенное значение функции в точке $x+\Delta x$, близкой к x, и тем самым дает возможность использовать дифференциал функции для приближенных вычислений.

8) Таблица для вычисления дифференциалов основных элементарных функций получается из таблицы для вычисления производных этих функций путем умножения соответствующей производной на дифференциал независимой переменной dx.

9) Правила дифференцирования:

$$d(cu)=cdu, \qquad (28,8)$$

$$d(u\pm v)=du\pm dv, \qquad (28,9)$$

$$d(uv)=udv+vdu, \qquad (28,10)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}. \qquad (28,11)$$

Задача 28, 1. Определить приращение и дифференциал функции $y=x^3$ при переходе x от значения $x=2$ к значению $x_1=2{,}01$.

Решение. Решим задачу сначала в общем виде, т. е. определим приращение заданной функции при произвольных значениях x и Δx, а потом уже при заданных.

У нас $y=x^3$, а потому, так как $y'=3x^2$, то

$$dy=y'dx=3x^2dx; \quad \Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=$$

$$=x^3+3x^3\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3;$$

$$\Delta y=\underbrace{3x^2\Delta x}_{dy}+\underbrace{3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}_{\alpha\Delta x}.$$

Таким образом, дифференциал функции и ее приращение найдены при произвольных значениях x и Δx.

Подчеркнутое слагаемое $3x^2\Delta x$, линейное относительно Δx, и есть dy — дифференциал функции.

Теперь определим Δy и dy при заданных числовых значениях. Начальное значение $x=2$. Приращение аргумента

$$\Delta x=x_1-x=2{,}01-2=0{,}01,$$

а потому приращение функции

$$\Delta y=3\cdot 2^2\cdot 0{,}01+3\cdot 2\,(0,01)^2+(0{,}01)^3; \qquad (28,12)$$

$$dy=\underbrace{0{,}12}_{dy}+\underbrace{0{,}0006+0{,}000\,001}_{\alpha\Delta x}=0{,}120601.$$

Дифференциал же функции — первое слагаемое в равенстве (28, 12), $dy = 3 \cdot 2^3 \cdot 0,12$.

Теперь определим погрешность, которую мы допустим, если приращение функции заменим дифференциалом функции dy. Эта погрешность равна $\Delta y - dy = 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, и мы усматриваем, что она при $\Delta x \to 0$ есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

При числовых данных задачи абсолютная величина погрешности от замены приращения функции ее дифференциалом

$$|\Delta x - dy| = |0,120\,601 - 0,12| = 0,000\,601.$$

Относительная погрешность

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0,000\,601}{0,120\,601} = 0,00498 \approx 0,005$$

в процентах это составляет всего около $\frac{1}{2}$ %. Подчеркнем еще раз, что ***определение дифференциала функции вместо ее приращения дает значительную экономию в вычислениях, а допускаемая пр этом погрешность будет тем меньше, чем меньше приращение аргумента.***

Мы очень подробно разобрали эту задачу и теперь предложим ряд аналогичных задач для самостоятельного решения.

Задача 28, 2 (для самостоятельного решения). Дано $y = 3x^2 + 5x - 4$. Определить Δy и dy при произвольных значениях x и Δx, а потом при переходе x 1) от значения $x = 2$ к значению $x_3 = 1,98$; 2) от значения $x = 4$ к значению $x_1 = 4,03$.

Ответ. $\Delta y = (6x + 5)\Delta x + 3(\Delta x)^2$; $dy = (6x + 5)dx$; при числовых данных: 1) $\Delta y = -0,3388$; $dy = -0,34$; 2) $\Delta y = 0,8727$; $dy = 0,87$. Относительная погрешность в процентах: 1) 0,3; 2) 0,3.

Задача 28, 3 (для самостоятельного решения). Вычислить приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 - x^2 + 3$ сначала при произвольных значениях x и Δx, а затем:

1) при переходе x от значения $x = 3$ к значению $x_1 = 3,01$ и

2) при переходе x от значения $x = 3$ к значению $x_1 = 3,001$.

Найти в этих двух случаях абсолютную и относительную погрешности.

Ответ. $\Delta y = (6x^2 - 2x)\Delta x + (6x - 1)(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$;
$dy = (6x^2 - 2x)dx$

при числовых данных: 1) $\Delta y = 0,481\,702$; $dy = 0,48$; 2) $\Delta y = 0,048\,017\,002$; $dy = 0,048$; абсолютная погрешность: 1) 0,001702; 2) 0,000 017 002; относительная погрешность в процентах; 1) 0,35; 2) 0,03.

Задача 28, 4. Показать, что при $\Delta x \to 0$ с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$. Тогда $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$; $dy = nx^{n-1}\Delta x$, а так как на основании (28,5) с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, то

$$(x+\Delta x)^n - x^n \approx nx^{n-1}\Delta x, \text{ а } (x+\Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x.$$

Полагая здесь $x = 1$, получаем, что для достаточно малых Δx имеет место приближенное равенство

$$(1+\Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x. \tag{28, 13}$$

Числовые примеры для приближенных вычислений по формуле (28, 13):

1) $(1{,}03)^5 \approx 1 + 5 \cdot 0{,}03 = 1{,}15$ $(\Delta x = 0{,}03;\ n = 5)$;

2) $\sqrt{1{,}005} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}005 = 1{,}0025$ (здесь $n = \frac{1}{2}$, а $\Delta x = 0{,}005$);

3) $\sqrt[3]{0{,}988} = \underbrace{\sqrt[3]{1 - 0{,}012}}_{\left(n=\frac{1}{3};\ \Delta x = -0{,}012\right)} = 1 + \frac{1}{3}(-0{,}012) = 1 - 0{,}004 = 0{,}996.$

4) $\sqrt[4]{267} = \sqrt[4]{256 + 11} = \sqrt[4]{256\left(1 + \frac{11}{256}\right)} =$

$$= 4\sqrt[4]{1 + \frac{11}{256}} \approx 4\left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{256}\right) = 4\,(1 + 0{,}0107) = 4{,}0428$$

$$\left(n = \frac{1}{4};\quad \Delta x = \frac{11}{256}\right).$$

Задача 28, 5 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой (28, 13), вычислить:

1) $\frac{1}{1{,}0005}$; 2) $\frac{1}{0{,}9988}$; 3) $\frac{1}{(1{,}003)^3}$;

4) $\frac{5}{0{,}9997}$; 5) $\frac{37}{1{,}04}$; 6) $\frac{15{,}23}{0{,}999}$.

Указание. 4) $\frac{5}{0{,}9997} = 5 \cdot \frac{1}{1 - 0{,}0003} = 5(1 - 0{,}0003)^{-1}$; теперь надо взять в (28, 13) $n = -1$; $\Delta x = 0{,}0003$.

Ответ. 1) 0,9995; 2) 1,0012; 3) 0,991; 4) 5,0015; 5) 36,852; 6) 15,246.

Задача 28, 6 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой (28, 13), вычислить:

1) $\sqrt{4{,}012}$: 2) $\frac{1}{\sqrt{4{,}028}}$; 3) $\frac{5}{\sqrt[3]{1{,}002}}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}9843}$.

Ответ. 1) 2,003; 2) 0,498; 3) 4,997; 4) 0,995.

Задача 28, 7. При нагревании объем твердого тела растет пропорционально кубу его линейного расширения. Если α — коэффициент линейного расширения, β — коэффициент объемного расширения, а t — температура, то имеет место формула $1+\beta t = (1+\alpha t)^3$.

Пользуясь формулой (28, 13), доказать, что имеет место приближенное равенство $\beta \approx 3\alpha$.

Решение. При малых $\alpha (1+\alpha t)^3 \approx 1 + 3\alpha t$ и значит, $1 + \beta t \approx 1 + 3\alpha t$; $\beta t \approx 3\alpha t$; $\beta = 3\alpha$, т. е. коэффициент объемного расширения твердого тела приближенно равен утроенному коэффициенту его линейного расширения.

Задача 28, 8. Высота ртутного столба в барометре при температуре $t°$ приводится к $0°$ по формуле $p_0 = p\frac{1+\alpha' t}{1+\alpha t}$, где α — коэффициент расширения ртути, а α' — коэффициент расширения латунной шкалы. Упростить эту формулу так, чтобы она не содержала дробей.

Решение. По формуле (28, 13) $\frac{1}{1+\alpha t} = (1+\alpha t)^{-1} \approx 1 - \alpha t$, а потому $p_0 = p(1+\alpha' t)(1-\alpha t) = p(1+\alpha' t - \alpha t - \alpha\alpha' t)$. Так как α и α' — малы, то последним произведением в скобке можно пренебречь; окончательно получаем упрощенную формулу

$$p_0 \approx p\,[1 - (\alpha - \alpha')\,t].$$

Задача 28, 9 (для самостоятельного решения). Ускорение силы тяжести g_h на высоте h над уровнем моря определяется по формуле

$$g_h = g\frac{R^2}{(R+h)^2},$$

где g — ускорение силы тяжести на уровне моря, а R — радиус земли. Считая, что h мало по сравнению с R, доказать, что имеет место приближенная формула

$$g_h \approx g\left(1 - \frac{2h}{R}\right),$$

Указание. $R + h = R\left(1 + \frac{h}{R}\right)$.

Задача 28, 10. Доказать, что если Δx — бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\sin \Delta x \approx \Delta x$ (Δx—выражается в радианах).

Решение. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Приращение этой функции $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$, а ее дифференциал $dy = \cos x\Delta x$. На основании формулы (28, 5) с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, а потому $\sin(x+\Delta x)-\sin x \approx \cos x\cdot\Delta x$, или $\sin(x+\Delta x)\approx \sin x+$ $+\cos x\cdot\Delta x$. Полагая здесь $x=0$ и учитывая, что $\sin 0=0$, а $\cos 0=1$, получаем требуемое приближенное равенство

$$\sin\Delta x\approx\Delta x. \tag{28, 14}$$

Эта формула показывает, что для малых углов (выраженных в радианах) синус равен числу радианов, содержащихся в угле. Например, так как $4^\circ=0{,}0698$ радиана, то $\sin 0{,}0698\approx 0{,}0698$. Это же значение для $\sin 4^\circ$ дают и четырехзначные таблицы (не забудьте, что при использовании формулы (28, 14) следует градусы переводить в радианы).

Заметим, что формула (28, 14) для углов, не больших 3°, дает величину синуса с четырьмя верными десятичными знаками (для перевода градусов в радианы и обратно следует пользоваться справочниками). Для углов же, не превышающих 7°, эта формула дает значение синуса с тремя верными десятичными знаками.

Задача 28, 11 (для самостоятельного решения). Доказать, что если Δx — величина бесконечно малая то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$\operatorname{t}d\,\Delta x\approx\Delta x. \tag{28, 15}$$

Применить это равенство к вычислению $\operatorname{tg}3^\circ$ и сравнить полученное число со значением $\operatorname{tg}3^\circ$ из четырехзначных таблиц.

Задача 28, 12 (для самостоятельного решения). Доказать, что если Δx — бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{\Delta x}{x}. \tag{28, 16}$$

Указание. Рассмотреть функцию $y=\ln x$. Приращение этой функции

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{\Delta}\right);\quad dy=\frac{1}{x}\,dx.$$

Из формулы (28, 16) следует, что, например,

$$\ln 1{,}007=\ln(1+0{,}007)\approx 0{,}007;$$

$$\ln 1{,}008=\ln(1+0{,}008)\approx 0{,}008.$$

Задача 28, 13 (для самостоятельного решения). Доказать, что если Δx — бесконечно малая величина, то с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство

$$e^{\Delta x}\approx 1+\Delta x. \tag{28, 17}$$

Получить это же равенство из формулы (28, 16).

Указание. Рассмотреть функцию $y = e^x$.

$$\Delta y = e^x (e^{\Delta x} - 1),$$

$$dy = e^x \Delta x.$$

Пользуясь формулой (28, 17), можно получить приближенные значения $e^{\Delta x}$ при малых значениях Δx. Например, $e^{0,003} \approx 1 + 0,003 = 1,003$; $e^{0,009} \approx 1 + 0,009 = 1,009$; $e^{0,04} \approx 1 + 0,04 = 1,04$ (все десятичные знаки верны).

Приведем сводку полученных приближенных формул (28, 13), (28, 14), (28, 15) (28, 16), (28, 17), причем во всех этих формулах заменим для удобства Δx, а в последней $\frac{\Delta x}{x}$, буквой α;

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha; \quad e^\alpha \approx 1 + \alpha,$$

$$\sin \alpha \approx \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha;$$

$$\ln (1 + \alpha) \approx \alpha;$$

Задача 28, 14. Составить таблицу для вычисления значений функции $y = \sin x$ при значениях x, равных $30°1'$; $30°2'$; $30°3'$, имея в виду, что $1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} = 0,00029$ радиана.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. При переходе аргумента от значения x к значению $x + \Delta x$ наращенное значение функции определяется из приближенного равенства (28, 7). У нас $f(x) = \sin x$. Поэтому $f(x + \Delta x) = \sin (x + \Delta x)$, а $f'(x) = \cos x$. Для заданной функции $f(x) = \sin x$ приближенное равенство (28,7) запишется так:

$$\sin (x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x. \qquad (28, 18)$$

Полагая в этой формуле $x = 30° = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = 1' = 0,00029$, а $\sin 30° = 0,50000$; учитывая, что $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.86602$, получим

$$\sin 30° 1' = 0,50000 + 0,86602 \cdot 0,00029 = 0,50025,$$

что совпадает точно со значением $\sin 30° 1'$ по пятизначным таблицам.

Из формулы (28, 18) найдем и $\sin 30° 2'$, учитывая, что теперь $\Delta x = 2' = 2 \cdot 0,00029 = 0,00058$ радиана и по-прежнему $x = 30°$.

$$\sin 30° 2' = 0,50000 + 0,86602 \cdot 0,00058 = 0,50050$$

(все десятичные знаки верны).

При вычислении $\sin 30° 3'$ воспользуемся той же формулой, взяв $\Delta x = 3' = 3 \cdot 0,00029 = 0,00087$;

$$\sin 30° 3' = 0,50000 + 0,86602 \cdot 0,00087 = 0,50075$$

(это значение отличается от табличного на 0,00001 (по пятизначным таблицам $\sin 30^\circ 3' = 0{,}50076$).

Задача 28,15 (для самостоятельного решения). Составить таблицу для вычисления функции $\cos x$ при значениях x, равных $60^\circ 1'$; $60^\circ 2'$; $60^\circ 3'$ (для справок $\sin 60^\circ = 0{,}86602$: $\cos 60^\circ = 0{,}50000$; $1' = 0{,}00029$ радиана).

Полученные значения сравнить со значениями из пятизначных таблиц тригонометрических функций.

Задача 28, 16 (для самостоятельного решения). Вычислить $\operatorname{tg} 45^\circ 1'$, $\operatorname{tg} 45^\circ 2'$, $\operatorname{tg} 45^\circ 3'$ и сравнить полученные значения со значениями из пятизначных таблиц тригонометрических функций.

Задача 28, 17. Вычислить натуральные логарифмы чисел 2,001; 2,002; 2,003; 2,004 и сравнить их с табличными значениями по пятизначным таблицам натуральных логарифмов (для справки: $\ln 2 = 0{,}69315$).

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Чтобы применить формулу (28, 7), надо определить $f(x + \Delta x)$ и $f'(x)$:

$$f(x+\Delta x) = \ln(x+\Delta x); \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Подставляя эти значения в (28, 7), получаем

$$\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \frac{1}{x}\Delta x. \tag{28, 19}$$

Чтобы найти $\ln 2{,}001$, возьмем в формуле (28, 19) $x = 2$, а $\Delta x = 0{,}001$:

$$\ln 2{,}001 = \ln(2+0{,}001) \approx \ln 2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}001 =$$
$$= 0{,}69315 + 0{,}00050 = 0{,}69365.$$

Аналогично по формуле (28, 19) вычисляется $\ln 2{,}002$; $\ln 2{,}003$ и $\ln 2{,}004$: берем по-прежнему $x = 2$, а Δx надо взять равным соответственно 0,002; 0,003; 0,004. Имеем

$$\ln 2{,}002 = \ln(2+0{,}002) \approx 2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}002 = 0{,}69315 +$$
$$+ 0{,}001 = 0{,}69415; \ \ln 2{,}003 = \ln(2+0{,}003) \approx 2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}003 =$$
$$= 0{,}69315 + 0{,}0015 = 0{,}69465; \ \ln 2{,}004 = \ln(2+0{,}004) \approx 2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot 0{,}004 = 0{,}69315 + 0{,}0020 = 0{,}69515.$$

Пятизначные таблицы логарифмов дают значения, равные найденным. Решение последних задач показало читателю, как дифференциал функции может быть использован для составления таблиц тригонометрических функций и логарифмов. Формула (28,7) позволяет составлять таблицы и других функций.

Мы считаем необходимым обратить внимание на то, что заменяя во всех предыдущих задачах приращение функции Δy ее дифференциалом dy, мы не интересовались оценкой погрешности, которую мы при этом допускаем. В последующем, при изучении раздела «Бесконечные ряды», будут указаны более совершенные приемы составления таблиц функций и там указаны формулы, оценивающие погрешность, возникающую при замене точного значения функции ее приближенным значением.

Задача 28,18. Прямым измерением найдено, что диаметр круга равен 6,7 *см*, причем максимальная погрешность измерения составляет 0,03 см. Найти приближенную относительную и процентную погрешности в вычисленной площади этого круга.

Решение. Относительная погрешность вычисленной площади $\delta_s = \frac{\Delta s}{s}$, а ее приближенное значение мы получим, заменив в этом равенстве Δs на ds. В таком случае $\delta_s \approx \frac{ds}{s}$. Но площадь круга $s = \frac{1}{4}\pi x^2$ (x — диаметр), а поэтому $ds = \frac{1}{2}\pi x\, dx$. Таким образом, $\delta_s \approx \frac{\frac{1}{2}\pi x\, dx}{\frac{1}{4}\pi x^2} = 2 \cdot \frac{dx}{x}$. У нас $x = 6{,}7$ *см*; $dx = 0{,}03$ *см*, а потому $\delta_s \approx$ $\approx 2 \cdot \frac{0{,}03}{6{,}7} \approx 0{,}009$, а умножая эту величину на 100, получим процентную погрешность, которая равна $(0{,}009 \cdot 100)\% = 0{,}9\%$.

Задача 28,19. Доказать, что приближенная относительная погрешность вычисленного объема шара равна утроенной относительной погрешности в измерении его диаметра.

Решение. Объем шара вычисляется по формуле $V = \frac{1}{6}\pi x^3$, где x — диаметр шара. Приближенно погрешность ΔV вычисленного объема равна $dV = \frac{1}{2}\pi x^2\, dx$. Относительная погрешность $\delta_V \approx \frac{dV}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2\, dx}{\frac{1}{6}\pi x^3} = 3 \cdot \frac{dx}{x}$. Но относительная погрешность измерения диаметра $\delta_x \approx \frac{dx}{x}$, а потому $\delta_V \approx 3\delta_x$, что и требовалось.

Задача 28,20 (для самостоятельного решения). С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 2%.

Ответ. $\delta_R = 0{,}66\%$.

Задача 28,21 Период малых колебаний маятника (в секундах) определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{28,20}$$

где l — длина маятника в сантиметрах, а $g = 981$ *см/сек*^{2} — ускорение силы тяжести.

Доказать, что приближенная относительная погрешность измеренного периода колебания маятника равна половине относительной погрешности его измеренной длины.

Решение. Приближенно абсолютная погрешность периода колебания $\Delta T \approx dT = \frac{\pi dl}{\sqrt{gl}}$, а потому относительная погрешность

$\delta_T \approx \frac{dT}{T} = \frac{\frac{\pi dl}{\sqrt{gl}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{1}{2}\frac{dl}{l}$, а так как относительная погрешность

измерения длины маятника $\delta_l = \frac{dl}{l}$, то $\delta_T \approx \frac{1}{2}\delta_l$, и требуемое доказано.

Задача 28,22 (для самостоятельного решения). Пользуясь формулой (28,20), установить, насколько следует изменить длину маятника $l = 25$ *см*, чтобы его период T увеличился на 0,05 *сек*.

Ответ. $dl = \frac{\sqrt{g}}{\pi}\sqrt{l}\,dT$; $dl = 2{,}49$ *см*.

Задача 28,23 (для самостоятельного решения). Из формулы (28,20) следует, что определение ускорения силы тяжести с помощью колебания маятника может быть сделано по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Определить относительную погрешность в определении g, если известны:

1) относительная погрешность в измерении l (T вычислено точно);

2) относительная погрешность в измерении T (l вычислено точно).

Ответ. 1) $\delta_g = \delta_l$; $\delta_g = 2\delta_T$;

ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Произвсдные высших порядков. Формула Лейбница.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Производная от функции $y = f(x)$ в общем случае является функцией x. Если от этой функции вычислить производную, то получим производную второго порядка, или, короче, вторую производную функции $y = f(x)$. Таким образом, вторая производная от первоначальной функции есть производная от первой производной.

Производная от второй производной называется третьей производной. Производная от третьей производной называется четвертой производной и т. д.

Обозначения. *Вторая производная функции $y = f(x)$ обозначается одним из символов: y'' (читается: игрек два штриха); $\frac{d^2y}{dx^2}$ (читается: де два игрек по де икс дважды); $f''(x)$ (читается: эф три штриха от икс).*

Третья производная функции $y = f(x)$ обозначается одним из символов: y''' (читается: игрек три штриха): $f'''(x)$ (читается: эф три штриха от x); $\frac{d^3y}{dx^3}$; $y^{(3)}$.

Производная порядка n есть производная от производной порядка $(n-1)$. Эта производная обозначается одним из символов: $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Для обозначения последовательных производных нами приняты обозначения: y'', y^3, $y^{(4)}$, ... $y^{(n)}$.

Задача 29,1. Найти третью производную функцию $y = 5x^4$.

Решение. $y' = 20x^3$; $y'' = 60x^2$; $y''' = 120x$.

Задача 29,2. $y = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$. Найти $y^{(4)}$.

Решение. $y' = 12x^3 + 15x^2 - 8x$; $y'' = 36x^2 + 30x - 8$; $y^{(3)} = 72x + 30$; $y^{(4)} = 72$.

Задача 29,3. $y = \sin^2 x$. Найти $y^{(5)}$.

Решение. $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$; $y'' = 2\cos 2x$;

$$y^{(3)} = -4\sin 2x;\ y^{(4)} = -8\cos 2x;\ y^{(5)} = 16\sin 2x.$$

Задача 29,4. $y = \sqrt{x+5}$. Найти $y^{(4)}$.

Решение. Запишем заданную функцию в виде $y = (x+5)^{\frac{1}{2}}$.

Тогда $y' = \frac{1}{2}(x+5)^{-\frac{1}{2}}$; $y'' = -\frac{1}{4}(x+5)^{-\frac{3}{2}}$; $y^{(3)} = \frac{3}{8}(x+5)^{-\frac{5}{2}}$;

$y^{(4)} = -\frac{15}{16}(x+5)^{-\frac{7}{2}}$.

Задача 29,5. Найти $y^{(4)}$ от функции $y = \ln \sin x$.

Решение. $y' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x$; $y'' = -\operatorname{cosec}^2 x$,

$y^{(3)} = -2\operatorname{cosec} x\,(-\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x) = 2\operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{ctg} x$;

$y^{(4)} = 4 \operatorname{cosec} x\,(-\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x) \quad \operatorname{ctg} x + 2\operatorname{cosec}^2 x\,(-\operatorname{cosec}^2 x) =$
$= -4\operatorname{cosec}^2 x \operatorname{ctg}^2 x - 2\operatorname{cosec}^4 x = -2\operatorname{cosec}^2 x\,(2\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)$.

Задача 29,6 (для самостоятельного решения).

1) $y = \arcsin x$; найти y''. 2) $y = \operatorname{arctg} x$; найти y''.

3) $y = \ln x$; найти $y^{(4)}$. 4) $y = \frac{1+x}{1-x}$; найти $y^{(3)}$.

Ответ. 1) $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; 2) $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; 3) $-3!x^{-4}$; 4) $\frac{12}{(1-x)^4}$.

Задача 29,7 (для самостоятельного решения).

1) $y = \sqrt{x}$; найти $y^{(3)}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; найти $y^{(3)}$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; найти $y^{(4)}$.

Ответ. 1) $\frac{3\sqrt{x}}{8x^3}$; 2) $-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot x^3 \sqrt{x}}$; 3) $-\frac{80}{81x^3 \sqrt[3]{x^2}}$.

Определить от заданной функции производную порядка n — значит найти формулу, по которой можно определить производную любого порядка этой функции. Вообще говоря, для этого надо вычислить все последовательные производные до n-й включительно. Однако этого можно избежать, пользуясь методом математической индукции. На практике поступают так: находят несколько последовательных производных, подмечают закономерность, по которой они все образовываются, и, считая, что эта закономерность выполняется для производной любого порядка, составляют выражение для производной порядка n (заметим, что нулевая производная означает саму функцию).

Мы прежде всего определим производные порядка n основных элементарных функций.

Задача 29,8. Найти $y^{(n)}$ функции $y = x^m$.

Решение. $y' = mx^{m-1}$; $y'' = m(m-1)x^{m-2}$.

$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$.

Здесь нетрудно усмотреть закономерность, которая состоит в следующем: 1) число множителей перед x равно порядку производной; 2) первый множитель равен показателю степени m, а каждый следующий — на единицу меньше; 3) в последнем множителе из m вычитается число, на единицу меньшее порядка производной; 4) показатель степени буквы x равен m минус порядок производной. Полагая, что для производной порядка n эта закономерность сохраняется, получаем

$$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Задача 29,9. Найти $y^{(n)}$ функции $y = a^x$.

Решение. $y' = a^x \ln a$; $y'' = a^x (\ln a)^2$; $y^{(3)} = a^x (\ln a)^3$; $y^{(4)} = a^x (\ln a)^4$.

Здесь уже нетрудно подметить, что каждая из найденных производных равна произведению a^x на $\ln a$ в степени, равной порядку производной. Полагая, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.

Задача 29, 10. Найти $y^{(n)}$ функции $y = e^x$.

Решение. $y' = e^x$; $y'' = e^x$; $y^{(3)} = e^x$; ... ; $y^{(n)} = e^x$.

Задача 29, 11. Найти $y^{(n)}$ функции $y = \ln x$.

Решение. $y' = \frac{1}{x} = (-1)^{\circ} \cdot \frac{1}{x}$; $y'' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \cdot \frac{1}{x^2}$, $y^{(3)} = \frac{2}{x^3} = (-1)^2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{x^3}$; $y^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} = (-1)^3 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$.

Усмотрим закономерность, по которой составлена каждая из этих производных: 1) все производные содержат множителем число -1 в степени, которая на единицу меньше порядка производной; 2) числитель дроби есть произведение натуральных чисел, начиная с единицы и кончая числом, на единицу меньшим порядка производной; 3) знаменатель дроби есть x в степени, равной порядку производной. Считая, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{x^n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n};$$

по этой формуле, например, $y^{(7)} = (-1)^6 \frac{6!}{x^7}$.

Задача 29,12. Найти $y^{(n)}$ функции $y = \sin x$.

Решение. $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; $y'' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$;

$$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad y^{(4)} = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Легко усматривается закономерность, по которой образованы все эти производные: у каждой из них под знаком синуса к x прибавляется произведение $\frac{\pi}{2}$ на порядок производной. Считая что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, получаем, что $y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 29,13 (для самостоятельного решения). Найти $y^{(n)}$ функции $y = \cos x$.

Ответ. $y^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 29, 14 (для самостоятельного решения). Найти $y^{(n)}$ функции $y = \frac{1}{x}$.

Ответ. $y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Задача 29, 15. Вычислить $y^{(n)}$ функции $y=\sqrt{x}$, пользуясь формулой, полученной в задаче 29,8 при $m=\frac{1}{2}$, а затем эту же производную вычислить непосредственно.

Ответ. $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n-1)\,2^n}\,\frac{\sqrt{x}}{x^n}$*).

Задача 29, 16 (для самостоятельного решения). Найти $y^{(n)}$ функции $y=(a+bx)^m$;

Ответ. $y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,b^n(a+bx)^{m-n}$;

Задача 29, 17 (для самостоятельного решения). Доказать на основании формулы, полученной при решении предыдущей задачи, что

$$1)\ \left(\frac{1}{a+bx}\right)^n = \frac{(-1)^n n!\, b^n}{(a+bx)^{n+1}};\quad 2)\ \left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!\, b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}.$$

Задача 29, 18 (для самостоятельного решения). Доказать, что

$$1)\ (\sin px)^{(n)} = p^n \sin\left(px + n\cdot\frac{\pi}{2}\right);\quad 2)\ (\cos px)^{(n)} = p^n\cos\left(px+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Задача 29, 19 (для самостоятельного решения). Показать, что функция $y=c_1\cos x + c_2\sin x$ (c_1 и c_2 — постоянные величины) удовлетворяет уравнению $y''+y=0$.

Задача 29, 20 (для самостоятельного решения). Показать, что функция $u=c_1 r + c_2\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{du}{dr}-\frac{1}{r^2}u=0$$

(c_1 и c_2 — постоянные величины).

Задача 29, 21 (для самостоятельного решения). Показать, что функция $V=c_1\cos ax + c_2\sin ax + c_3x + c_4$ удовлетворяет уравнению $V^{(4)}+a^2V''=0$ (c_1, c_2, c_3, c_4, — постоянные величины).

МЕХАНИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Если точка движется по прямой и задан ее закон движения $s=f(t)$ (s — путь, t — время), то ускорение точки равно второй производной от пути по времени.

Задача 29, 22. Найти ускорение точки, совершающей простые гармонические колебания по закону $s=A\sin(\omega t+\varphi)$.

Решение. $\frac{ds}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi)$; $\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$, но так как $s=A\sin(\omega t+\varphi)$, то $\frac{d^2s}{dt^2}=-\omega^2 s$.

---

* Символ $(2n-1)!!$ означает произведение нечетных натуральных чисел от 1 до $(2n-1)$ включительно. Например, $9!!=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9$.

Задача 29, 23 (для самостоятельного решения). Доказать, что если точка совершает затухающие колебания по закону $x = Ae^{-kt}\sin\omega t$, то ее ускорение $\frac{d^2x}{dt^2} = -(\omega^2 + k^2)x - 2kv$; где v — скорость точки $\left(v = \frac{dx}{dt}\right)$.

Формула Лейбница. Эта формула дает возможность вычислить производную любого порядка от произведения двух функций, минуя последовательное применение формулы для вычисления производной от произведения двух функций. Формула Лейбница записывается так:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}. \tag{29, 1}$$

Задача 29, 24. Найти $y^{(5)}$, если $y = e^{4x}\sin 3x$.

Решение. Если $y = uv$, то на основании (29, 1)

$$y^{(5)} = u^{(5)}v + c_5^1 u^{(4)}v' + c_5^2 u^{(3)}v'' + c_5^3 u''v^{(3)} + c_5^4 u'v^{(4)} + uv^{(5)}. \tag{29, 2}$$

Полагая в заданной функции $u = e^{4x}$, $v = \sin 3x$, для применения формулы (29, 2) нам следует найти первые пять последовательных производных каждой функции u и v:

$u' = 4e^{4x}$; $u'' = 16e^{4x}$; $u^{(3)} = 64e^{4x}$; $u^{(4)} = 256e^{4x}$; $u^{(5)} = 1024e^{4x}$;
$v' = 3\cos 3x$; $v'' = -9\sin 3x$; $u^{(3)} = -27\cos 3x$; $v^{(4)} = 81\sin 3x$;
$v^{(5)} = 243\cos 3x$.

Подставляя эти производные в (29,2), получим

$$y^{(5)} = 1024e^{4x}\cdot\sin 3x + 5\cdot 256e^{4x}\cdot 3\cos 3x + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}64e^{4x}(-9\sin 3x) + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}16e^{4x}(-27\cos 3x) + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}4e^{4x}\cdot 81\sin 3x + e^{4x}\times$$
$\times 243\cos 3x$; и после упрощений $y^{(5)} = -e^{4x}(3116\sin 3x + 237\cos 3x)$.

Задача 29, 25 (для самостоятельного решения). $y = x^4e^{2x}$; найти $y^{(6)}$.

Ответ. $y^{(6)} = 64e^{2x}(x^4 + 12x^3 + 45x^2 + 60x + 22{,}5)$.

Задача 28, 26 (для самостоятельного решения). Найти производную порядка n от функции $y = x^2e^x$.

Ответ. $y^{(n)} = [x^2 + 2nx + n(n-1)]\,e^x$.

Задача 29, 27 (для самостоятельного решения). Определить $y^{(4)}$ от функции $y = x^3\ln\frac{x}{a}$.

Ответ. $y^{(4)} = \frac{6}{x}$.

Задача 29, 28 (для самостоятельного решения) $y = e^x \cos x$. Найти $y^{(5)}$.

Ответ. $y^{(5)} = 4\sqrt{2}\, e^x \cos\left(x + \frac{5}{4}\pi\right)$.

ТРИДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Правило Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых и двух бесконечно больших величин (раскрытие «неопределенностей» видов: $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и приводящихся к ним).

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

При вычислении предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ может оказаться, что при $x \to a$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, т. е. являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими величинами. Говорят, что в этих случаях мы имеем дело с «неопределенностями» вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Вычисление предела в этом случае называется «раскрытием неопределенности» и производится по правилу, указанному французским математиком Гильомом Лопиталем (1661—1704 гг.)

Правило Лопиталя. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ таковы, что*

1) $$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0;$$

или

$$\lim_{x \to x} f(x) = \pm\infty \text{ и } \lim_{x \to a} \varphi(x) = \pm\infty;$$

2) они имеют первые производные в окрестности точки $x = a$ (за возможным исключением самой точки a);

3) существует $\lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, тогда существует также и $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и имеет место равенство $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Сущность этого правила состоит в том, что в случае «неопределенностей» вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ вычисление предела отношения функций, при соблюдении указанных требований, заменяется вычислением предела отношения их производных, которое в большом числе случаев оказывается проще.

В случае, когда и отношение производных приводит к одному из этих видов «неопределенностей» $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, можно уже к этому *отношению применить правило Лопиталя и тем самым исследовать отношение вторых производных. Может оказаться, что и отношение вторых производных дает опять-таки какую-либо из этих «неопределенностей». Тогда следует перейти к отношению третьих производных и т. д. Укажем, что если понадобится прибегнуть к отношению вторых, третьих и т. д. производных, то прежде чем это делать, следует провести все возможные упрощения в выражении, полученном на предыдущем этапе.*

1. Предел отношения двух бесконечно малых величин $\left(\text{«неопределенности» вида } \frac{0}{0}\right)$

Задача 30, 1. Найти $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$.

Если в заданное отношение подставить вместо x число a, то получим «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя, т. е. заменим отношение функций отношением их производных.

Следует предостеречь читателя от распространенной ошибки: надо дифференцировать не дробь, а отдельно ее числитель и знаменатель:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x \to a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}} = \frac{m}{a} a^{m-n}.$$

Задача 30, 2. Найти $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$.

Решение. Если в данную дробь подставить -1 вместо x, то получится «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2 - 10x + 2}{4x^3 - 6x^2 - 32x + 2} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.$$

Задача 30, 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n}$.

Решение. Если заменить в данной дроби x нулем, то получится «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя: заменим числитель и знаменатель дроби их производными и будем отыскивать предел этого нового отношения:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{n}(a^n - x^n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (-nx^{n-1})}{nx^{n-1}}.$$

Сокращая дробь на nx^{n-1} и подставляя после этого $x=0$, получим, что искомый предел равен $\frac{1}{n}(a^n)^{\frac{1}{n}-1}=\frac{a^{1-n}}{n}$.

Если бы мы не произвели сокращения на nx^{n-1}, то снова имели бы «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Еще раз напоминаем, что прежде чем решить вопрос о необходимости перехода к следующим производным, надо сделать все возможные упрощения.

Задача 30,4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

Решение. Если подставить в числитель и знаменатель 1 вместо x, то получится «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x}=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-x^2}=-1.$$

И здесь были сделаны необходимые упрощения. Если бы мы их не сделали, а в полученную дробь подставили бы $x=1$, то снова получили бы «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$.

Задача 30,5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. Подставляя в данную дробь $x=0$, получим «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}_{\substack{\text{Снова «неопре-}\\\text{деленность» ви-}\\\text{да }\frac{0}{0};\ \frac{1}{3}\text{ вы-}\\\text{носим за знак}\\\text{предела, вто-}\\\text{рично приме-}\\\text{няем правило}\\\text{Лопиталя.}}}=\underbrace{\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}}_{\substack{\text{Снова «неопре-}\\\text{деленность» ви-}\\\text{да }\frac{0}{0}.\text{ В тре-}\\\text{тий раз приме-}\\\text{няем правило}\\\text{Лопиталя.}}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

Теперь предлагается ряд задач для самостоятельного решения.

Задача 30,6 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$ и $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-x^2+x+6}$; 5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$;

6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{x-a}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{1-x+\ln x}$.

Указание. В числителе сначала вынести x за скобку, и тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}x\,\frac{x^{x-1}-1}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}x\lim_{x\to 1}\frac{x^{x-1}-1}{1-x+\ln x};$$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x+e^{-x}-e^x-xe^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

Указание. Разложить числитель на множители и сократить дробь.

Ответ. 1) 2; 2) $\frac{3}{29}$; 3) $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}$; 4) 0; 5) $\sqrt{\frac{3}{8}}$; 6) $a\sqrt{3}$; 7) $\ln\frac{a}{b}$; 8) $\sqrt{a}$; 9) -2; 10) -1.

Задача 30,7 (для самостоятельного решения). Для вычисления пределов в этой задаче правило Лопиталя придется применять не менее двух раз. Найти пределы;

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos x}$.

Указание. Искомый предел равен:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2;$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x)-\operatorname{arctg}(a-x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x-\sin x}$.

Ответ. 1) 2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 4; 5) $\frac{1+a^2}{\cos^2 a}$; 6) ∞.

Задача 30,8 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}}$$

Указание. Здесь «неопределенность» вида $\frac{0}{0}$, так как

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=1;\quad \ln 1=0;\quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ. -1.

2. Предел отношения двух бесконечно больших величин $\left(\text{«неопределенность» вида } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Задача 30,9. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

Замечание. В условии задачи подчеркнуто, что $x\to+0$; это указание является существенным, потому что при $x\to-0$, так же как при $x\to 0$, $\ln x$ не существует, так как отрицательные числа логарифмов не имеют.

Решение. При $x\to+0$ числитель и знаменатель данной дроби — величины бесконечно большие, и мы имеем здесь случай «неопределенности» вида $\frac{\infty}{\infty}$.

На основании правила Лопиталя заменяем отношение функций отношением их производных и отыскиваем предел этого нового отношения:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Задача 30,10. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

Решение. При $x\to\frac{\pi}{2}$ функции $\operatorname{tg}3x$ и $\operatorname{tg}5x$ — величины бесконечно большие, т. е. мы имеем «неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя, т. е. заменим отношение функций отношением их производных и будем отыскивать предел этого нового отношения:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x}}_{\substack{\text{Здесь имеет место «неопределенность»}\\ \text{вида } \frac{0}{0}.\ \text{Прежде чем применять правило}\\ \text{Лопиталя, преобразуем дробь.}}}=\frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^2 = \underbrace{\frac{3}{5} \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^2}_{\text{Предел степени равен степени предела. Применяем теперь правило Лопиталя}} = \frac{3}{5} \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-5 \sin 5x}{-3 \sin 3x} \right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{9} \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} \right)^2 = \frac{5}{3} \left(\frac{1}{-1} \right)^2 = \frac{5}{3}.$$

Задача 30,11 (для самостоятельного решения). Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Ответ. 0.

Задача 30,12. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Решение. Здесь имеет место «неопределенность» вида $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\text{Здесь «неопределенность» вида } \frac{\infty}{\infty}\text{. Вторично применим правило Лопиталя.}} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2}}_{\text{Здесь уже никакой «неопределенности» нет.}} = +\infty.$$

Задача 30,13 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1) \lim_{x \to 0} \frac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x}; \quad 2) \lim_{x \to +0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x}.$$

Ответ. 1) 1; 2) 1.

Задача 30,14 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1) \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x}; \quad 2) \lim_{x \to a-0} \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{a}}; \quad 3) \lim_{x \to 1+0} \frac{\ln(x-1) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{ctg} \pi x},$$

Ответ. 1) $+\infty$; 2) 0; 3) -2.

3. Разность двух бесконечно больших величин («неопределенность» вида $\infty - \infty$)

Если

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \ \text{и} \ \lim_{x \to a} \varphi(x) = +\infty, \qquad (30\ 1)$$

то для определения предела $\lim\limits_{x \to a}[f(x) - \varphi(x)]$ *надо преобразовать эту разность* $f(x) - \varphi(x)$ *к такому виду:*

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}; \text{ тогда } \lim_{x \to a}[f(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}}.$$

Учитывая (30,1), заключаем, что теперь мы должны исследовать «неопределенность вида» $\frac{0}{0}$, *которую мы умеем раскрывать с помощью правила Лопиталя.*

Задача 30,15. Найти: $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

Решение. При $x \to 1$ $\frac{1}{\ln x}$ и $\frac{1}{x-1}$ — бесконечно большие величины одного и того же знака, а потому мы имеем здесь разность двух бесконечно больших величин («неопределенность» вида $\infty - \infty$). Разность $\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$;

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \underbrace{\lim_{x \to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}}_{\text{«неопределенность» вида } \frac{0}{0}} = \lim_{x \to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x + x - 1}{x}} = \lim_{x \to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x \to 1}\frac{1}{\ln x + x\frac{1}{x} + 1} =$$

$$= \frac{1}{0+1+1} = \frac{1}{2}.$$

Задача 30,16. Найти $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$.

Решение. При $x \to 1$ дроби $\frac{2}{x^2-1}$ и $\frac{1}{x-1}$ — величины бесконечно большие одного и того же знака, а потому их разность приводит к «неопределенности» вида $\infty - \infty$. Выражение, стоящее в скобках, приводим к общему знаменателю и получаем

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \underbrace{\lim_{x \to 1}\frac{2-x-1}{x^2-1}}_{\text{«неопределенность» вида } \frac{0}{0}} = \lim_{x \to 1}\frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 30,17 (для самостоятельного решения). Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

Ответ. 0.

Задача 30,18 (для самостоятельного решения). Найти:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x\operatorname{tg}x}\right);\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right);\quad 3)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{2}\sec x\right).$$

Ответ. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -1.

Задача 30,19. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)$.

Решение. При $x\to 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{2x^2}=-\infty\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x(e^{2x}-1)}=+\infty.$$

Значит, мы имеем «неопределенность» вида $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{2x^2}+\frac{1}{x(e^{2x}-1)}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(e^{2x}-1)+2x}{2x^2(e^{2x}-1)}}_{\substack{\text{«Неопределенность» вида } \frac{0}{0};\\ \text{в числителе раскрываем скоб-}\\ \text{ки и делаем приведение по-}\\ \text{добных членов.}}}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^{2x}+x+1}{x^2(e^2x-1)}}_{\text{Применяем правило Лопиталя.}}=\underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2(x-1)e^{2x}+1}{2x(e^{2x}-1)+2x^2e^{2x}}}_{\substack{\text{Опять «неопределенность» вида}\\ \frac{0}{0}.\ \text{Прежде чем вторично приме-}\\ \text{нять правило Лопиталя, упростим}\\ \text{числитель и знаменатель дроби.}}}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(2x-1)+1}{e^{2x}(x+x^2)-x}}_{\text{Снова применяем правило Лопиталя}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}(2x-1)+2e^{2x}}{2e^{2x}(x+x^2)+e^{2x}(1+2x)-1}}_{\text{«Неопределенность» вида } \frac{0}{0}.}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}(2x-1)+4e^{2x}+4e^{2x}}{4e^{2x}(x+x^2)+2e^{2x}(1+2x)+2e^{2x}(1+2x)+2e^{2x}}=\frac{1}{4}\,\frac{4}{2+2+2}=\frac{1}{6}.$$

4. Произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую («неопределенность» вида $0\cdot\infty$)

«Неопределенности» этого вида могут быть сведены к «неопределенности» вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Действительно, пусть

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\ a\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty. \qquad (30,2)$$

Записав

$$f(x)\varphi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \text{ или } f(x)\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \tag{30,3}$$

мы получим, что

$$\underbrace{\lim_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)}_{\substack{\text{«Неопределенность»}\\ \text{вида } 0\cdot\infty}}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}}_{\substack{\text{На основании}\\ \text{(30,2) здесь}\\ \text{«неопределен-}\\ \text{ность» вида } \frac{0}{0}.}}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}}_{\substack{\text{На основании}\\ \text{(30,2) здесь}\\ \text{«неопределен-}\\ \text{ность» вида } \frac{\infty}{\infty}.}}.$$

При решении задач в этом случае следует выражение $f(x)\cdot\varphi(x)$ записать в одном из видов (30,3).

Задача 30,20. Найти $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$ (см. замечание в задаче 30,9).

Решение. При $x\to+0$ $\ln x$ — величина бесконечно большая, а x — бесконечно малая. Поэтому здесь имеет место «неопределенность» вида $0\cdot\infty$. Применяем преобразование, указанное в (30,3):

$$\lim_{x\to+0} x\ln x=\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\substack{\text{Неопределен-}\\ \text{ность вида } \frac{\infty}{\infty}:\\ \text{применяем пра-}\\ \text{вило Лопиталя.}}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0.$$

Задача 30,21. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

Решение. При $x\to+\infty$ имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, а потому при $x\to+\infty$ выражение xe^{-x} — произведение величины бесконечно большой на бесконечно малую («неопределенность» вида $0\cdot\infty$). Так как $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, то

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}}_{\substack{\text{Неопреде-}\\ \text{ленность}\\ \text{вида } \frac{\infty}{\infty}.\\ \text{Применяем}\\ \text{правило}\\ \text{Лопиталя.}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Задача 30,22 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$;2) $\lim\limits_{x\to+0} x^n\ln x$ $(n>0)$.

Ответ. 1) $\frac{2}{\pi}$; 2) 0.

Задача 30, 23 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x)$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{a}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\sec\frac{\pi}{2}x\cdot\ln\frac{1}{x}$.

Ответ. 1) 0, 2) $-\frac{4}{\pi}$; 3) $\frac{2}{\pi}$.

5. «Неопределенности» видов 1^∞; ∞^0, 0^0

«Неопределенности» этих видов сводятся к «неопределенности» вида $0\cdot\infty$, которая была рассмотрена в предыдущем параграфе. Это достигается с помощью тождества

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)} \tag{30, 4}$$

в предположении, что $f(x)>0$ (это предположение необходимо сделать, так как в показателе степени в правой части равенства $f(x)$ стоит под знаком логарифма). Теперь можно написать, что

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}e^{\varphi(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)}$$

и дело сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ln f(x)$.

Задача 30, 24. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^x$ («неопределенность» вида 0^0).

Решение. На основании (30, 4) можем записать, что $x^x=e^{x\ln x}$, а потому

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln x}. \tag{30, 5}$$

Найдем теперь $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$ (здесь «неопределенность» вида $0\cdot\infty$):

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{\substack{\text{Неопределенность вида }\frac{\infty}{\infty}.\\ \text{Применяем правило Лопиталя.}}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

Подставляя этот результат в (30, 5), получим, что

$$\lim_{x\to+0}x^x=e^0=1.$$

Задача 30, 25. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}$ («неопределенность» вида 1^∞)

Решение. На основании (30, 4) имеем $(1+mx)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)}$, а потому

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)} = e^{\lim\limits_{e\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+mx)}; \qquad (30, 6)$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+mx)}_{\text{«неопределенность» вида } 0\cdot\infty;} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{x}}_{\text{«неопределенность вида } \frac{0}{0}.} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{1} = m.$$

Подставляя найденное значение в (30, 6), получим что

$$\lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{x}} = e^m.$$

Задача 30, 26 (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ («неопределенность» вида ∞^0);

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ («неопределенность» вида ∞^0).

Ответ. 1) 1; 2) 1.

Задача 30, 27. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ («неопределенность» вида 1^∞).

Решение. На основании (30, 4) $\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}}$, а потому

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}};$$

$$\underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}}_{\substack{\text{«неопределен-}\\\text{ность» вида}\\ 0\cdot\infty,\ \text{т. к. } \frac{\operatorname{tg} x}{x}\to 1,\\ \text{когда } x\to 0}} = \underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}}{x^2}}_{\substack{\text{«неопределен-}\\\text{ность» вида } \frac{0}{0}}} = \lim_{x\to+0}\frac{\ln\operatorname{tg} x - \ln x}{x^2} = \underbrace{\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\sec^2 x - \frac{1}{x}}{2x}}_{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\sec^2 x = \frac{2}{\sin 2x}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{2}{\sin 2x} - \frac{1}{x}}{x} = \underbrace{\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2x-\sin 2x}{x^2\cdot\sin 2x}}_{\text{Применяем правило Лопиталя}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2-2\cos 2x}{2x\sin 2x + 2x^2\cos 2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{2 \sin 2x}{\sin 2x + 2x \cos 2x + 2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x}}_{\text{«Неопределенность» вида } \frac{0}{0}\text{. Вторично применяем правило Лопиталя}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to +0} \frac{4 \cos 2x}{2 \cos 2x + 4 \cos 2x - 8x \sin 2x - 4x \sin 2x - 4x^2 \cos 2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2+4} = \frac{1}{3}.$$

И тогда $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}$.

Задача 30, 28 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{x}}$ (0^0)

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x (0^0)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$ (1^∞)

Ответ. 1) 1; 2) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; 3) $\left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{a^2}{2}}$.

Задача 30, 29 (для самостоятельного решения). Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx}$ (1^∞);

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ (1^∞);

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ (1^∞);

4) $\lim\limits_{x \to +0} (-\ln x)^x$ (∞^0);

5) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$ (∞^0).

Ответ. 1) $e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$; 2) e; 3) e^{-1}; 4) 1; 5) 1.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Возрастание и убывание функций.

Краткие сведения из теории

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется возрастающей в некотором интервале, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.*

Если же из неравенства $x_2 > x_1$ следует нестрогое* неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, то функция называется неубывающей в этом интервале.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется убывающей в некотором интервале, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.*

Если же из неравенства $x_2 > x_1$ следует нестрогое неравентво $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, то функция называется невозрастающей в этом интервале. Функции возрастающие и убывающие, а также функции невозрастающие и неубывающие называются монотонными.

ПРИЗНАКИ ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Следующая теорема выражает важный для практических целей признак строгого возрастания и строгого убывания функции и указывает правило для определения интервалов, в которых функция возрастает и убывает (иначе, интервалов монотонности функции).

Теорема. *Если во всех точках некоторого интервала первая производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ в этом интервале возрастает. Если же во всех точках некоторого интервала первая производная $f'(x) < 0$, то функция в этом интервале убывает.*

Эта теорема выражает достаточный признак возрастания и убывания функции на интервале.

Замечание. *Строгое возрастание или строгое убывание функции на интервале не исключает возможности обращения в нуль первой производной функции в некоторых* ***отдельных точках*** *этого интервала. Слова «отдельных точках» подчеркнуты потому, что в случае строгого возрастания или строгого убывания функции точки, в которых первая производная обращается в нуль, не должны сплошь заполнять никакого частичного интервала, даже малого, ибо если бы это имело место, то функция в этих частичных интервалах сохраняла бы постоянное значение и тем самым не была бы строго возрастающей или строго убывающей на всем рассматриваемом интервале.*

Правило. *Для определения интервалов строгого возрастания и строгого убывания функции следует решить неравенства:*

$$f'(x) > 0 \text{ и } f'(x) < 0. \tag{31,1}$$

Следует также рассмотреть, как располагаются в этих интервалах точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль. Если окажется, что эти точки не заполняют сплошь какого-либо частичного интервала, то неравенства (31,1) укажут интервалы строгого возрастания и строгого убывания функции.

---

* Неравенства вида $a < b$ и $a > b$ называются строгими, а неравенства вида $a \leqslant b$ и $a \geqslant b$ — нестрогими.

При решении задач, в которых требуется определить интервалы возрастания и убывания функции, следует прежде всего определить область существования этой функции.

Задача. 31,1. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x)=x^3-12x+11.$$

Решение. Областью существования данной функции является вся ось Ox (функция существует при любом значении x). Ее производная $f'(x)=3x^2-12$. Чтобы найти интервалы возрастания функции, решим неравенство $3x^2-12>0$. Деля на 3 обе его части, получаем $x^2-4>0$. Отсюда следует, что $x^2>4$, а $x<-2$ и $x>2$, т. е. $|x|>2$. Следовательно, данная функция возрастает в двух бесконечных интервалах: $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$. Чтобы определить интервалы убывания функции, решим неравенство $3x^2-12<0$ или $x^2-4<0$, из которого следует, что $x^2<4$, а $x<2$, или $x>-2$, т. е. $|x|<2$. Отсюда заключаем, что функция убывает на интервале $(-2; 2)$. Производная функция $3x^2-12$ обращается в нуль при $x=-2$ и $x=+2$. В точке $x=-2$ функция переходит от возрастания к убыванию, а в точке $x=+2$ она от убывания переходит к возрастанию.

Легко усмотреть, что $f(1)=0$, а $f(0)=11$. Так как $f(1)=0$, то $x^3-12x+11$ делится без остатка на $x-1$ и мы получаем, что

$$x^3-12x+11=(x-1)(x^2+x-11).$$

Приравняв последнее выражение нулю и решая уравнение $x^2+x-11=0$, найдем и другие два значения x, при которых $f(x)=0$. Этими значениями являются

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{45}}{2};\quad x_1\approx-3{,}85;\quad x_2\approx2{,}85.$$

Полученных данных достаточно, чтобы составить представление о графике функции. Постройте его эскиз.

Задача 31,2 (для самостоятельного решения). Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=x^3-3x-2$. Построить эскиз графика.

Ответ. Функция возрастает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; $f(2)=0$; $f(-1)=0$; $f(0)=-2$; $f'(x)=0$ при $x=-1$ и $x=1$.

Задача 31,3 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x)=x^3$ возрастает на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$, а ее производная обращается в нуль при $x=0$.

Задача 31,4. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$y=\sin x.$$

Решение. Область определения функции — вся ось Ox. Находим $y' = \cos x$. Решаем неравенство $\cos x > 0$.

Это неравенство, выполняясь на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, выполняется также и на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где k — любое целое положительное или отрицательное число, так как функция $\cos x$ — периодическая, а ее период $T = 2\pi$.

Заключение. Функция $y = \sin x$ возрастает на интервалах

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Решая неравенство $\cos x < 0$, получаем, что оно выполняется в интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, где k — любое целое положительное или отрицательное число, а потому приходим к заключению, что функция $y = \sin x$ убывает в этих интервалах.

Задача 31,4а (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ возрастает во всех интервалах, в которых она существует.

Задача 31,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{ctg} x$ убывает во всех интервалах, в которых она существует.

Задача 31, 6. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 - x^2}.$$

Решение. Функция существует при всех значениях x, кроме $x = -1$ и $x = +1$, т. е. областью ее существования являются интервалы: $(-\infty, -1)$; $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$.

Находим производную функции

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2}; \quad f'(x) = \frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби положительны при всех значениях x (значения $x = -1$ и $x = +1$ не должны рассматриваться, так как при этих значениях не существует и заданная функция). Значит, во всех интервалах в которых функция определена, она возрастает.

Задача 31,7 (для самостоятельного решения). Определить интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$. Начертить эскиз графика функции.

Ответ. Функция возрастает в интервале $(-1, +1)$, убывает в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; $f'(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$.

Задача 31,8. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20.$$

1) **Решение.** Функция существует при всех значениях x:

$$y' = 12x^2 - 42x + 18 = 6(4x^2 - 7x + 3); \quad y' = 6(2x - 1)(x - 3).$$

Решаем неравенства: 1) $y' > 0$ и 2) $y' < 0$.

1. Решаем неравенство $y' > 0$; $6(2x - 1)(x - 3) > 0$.

Произведение двух множителей положительно тогда, когда они оба имеют один и тот же знак, т. е. когда они одновременно положительны или одновременно отрицательны. Эти соображения приводят к двум системам неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} (A) \qquad\qquad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} (B)$$

Первое из неравенств (A) дает $x > \frac{1}{2}$, а второе $x > 3$; поэтому неравенства (A) приводят к заключению, что $x > 3$. Из неравенств (B) получаем: из первого $x < \frac{1}{2}$, из второго $x < 3$; приходим к заключению, что эти неравенства выполняются при $x < \frac{1}{2}$. Таким образом, функция возрастает в интервалах $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и $(3, +\infty)$.

2) Теперь решим неравенство $y' < 0$; $6(2x - 1)(x - 3) < 0$ или $(2x - 1)(x - 3) < 0$. Произведение двух сомножителей отрицательно тогда, когда эти сомножители имеют разные знаки. Это приводит к двум системам неравенств:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} (C) \qquad\qquad \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} (D)$$

В системе (C) из первого неравенства $x > \frac{1}{2}$, из второго $x < 3$; на основании этого заключаем, что (C) выполняется для значений x из интервала $\frac{1}{2} < x < 3$. Система неравенств (D) дает: из первого $x < \frac{1}{2}$, из второго $x > 3$, что противоречиво, так как не может быть, чтобы одновременно x было меньше $\frac{1}{2}$ и больше трех.

Заключение. Неравенство $y' < 0$ выполняется для значений $\frac{1}{2} < x < 3$; таким образом, данная функция убывает на интервале $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$. В точке $x = \frac{1}{2}$ функция сменяет возрастание на убывание, а в точке $x = 3$ убывание прекращается и сменяется возрастанием.

Задача 31,9 (для самостоятельного решения). Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1.$$

Указание. $y' = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$. Так как $x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$, то $y' > 0$, когда $x^2 - 4x + 3 > 0$, и $y' < 0$ при

$$x^2 - 4x + 3 < 0; \ x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

Функция возрастает в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$, а убывает в интервале $(1,3)$. Производная обращается в нуль при $x = 0$, но это значение содержится в интервале $(-\infty, 1)$ где функция возрастает. Этот пример показывает, что хотя в интервале $(-\infty, 1)$ функция строго возрастает, но ее первая производная обратилась в нуль в отдельной точке $(0, 0)$.

ТРИДЦАТЬ ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Определение максимума и минимума функций. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение максимума. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ максимум, если значение функции в этой точке больше, чем ее значение во всех точках, достаточно близких к x_0.*

Иначе: функция $f(x)$ имеет максимум при $x = x_0$, если

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$$

для любых Δx — как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по абсолютной величине.

Определение минимума. *Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ минимум, если значение функции в этой точке меньше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_0.*

Иначе: функция $f(x)$ имеет минимум при $x = x_0$, если

$$f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$$

для любых как положительных, так и отрицательных Δx, достаточно малых по абсолютной величине.

Если в некоторой точке функция имеет максимум или минимум, то говорят, что в этой точке имеет место экстремум, а значение функции в этой точке называется экстремальным.

Замечание. *Следует помнить: 1) Максимум (минимум) не является обязательно наибольшим (наименьшим) значением, принимаемым функцией. Вне рассматриваемой окрестности точки x_0 функция может принимать бо́льшие (меньшие) значения, чем в этой точке. 2) Функция может иметь несколько максимумов и минимумов. 3) Функция, определенная на отрезке, может достигнуть экстремума только во внутренних точках этого отрезка.*

Необходимое условие экстремума. *Если функция $f(x)$ имеет экстремум при $x = x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю, или ∞, или вовсе не существует.*

Из этого следует, что точки экстремума функции следует разыскивать только среди тех, в которых ее первая производная $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ или не существует. *Исследование остальных точек отпадает. Точки, в которых первая производная функции равна нулю, бесконечности, а также те, в которых она не существует, но функция сохраняет непрерывность, называются критическими.*

Следует уяснить, что указанный признак экстремума является только необходимым, но отнюдь не достаточным: производная функции может быть равна нулю, ∞ или не существовать не только в тех точках, в которых функция достигает экстремума. Поэтому определив критические точки, в которых функция может достигать экстремума, надо каждую из точек в отдельности исследовать на основании достаточных условий существования экстремума. Укажем два таких достаточных условия.

ПЕРВОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

Пусть точка $x = x_0$ является критической точкой функции $f(x)$, а сама функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема во всех точках некоторого интервала, содержащего эту точку (за исключением возможно самой этой точки). Тогда: 1) если при $x < x_0$ производная функция $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то при $x = x_0$ имеет место максимум, т. е. если при переходе слева направо через критическую точку первая производная функции меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция достигает максимума; 2) если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то при $x = x_0$ имеет место минимум; иначе: если при переходе слева направо через критическую точку первая производная функции меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция достигает минимума; 3) если же при переходе через критическую точку первая производная функции не меняет знак, то экстремума нет.

ВТОРОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА

Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $f(x)$ равна нулю: $f'(x_0) = 0$, то при $x = x_0$ имеет место максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$. Если же $f''(x) = 0$, то для заключения об экстремуме в этой точке требуется дальнейшее исследование (предполагается, что функция $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ имеет непрерывную вторую производную).

Способ, которым функция исследуется на экстремум с помощью первого достаточного условия (по первой производной), мы будем называть первым, а способ исследования функции на экстремум на основании второго достаточного условия (по второй производной) — вторым.

Правило для исследования функции на экстремум при помощи первой производной (первый способ)

Для исследования функции на экстремум по первой производной следует:

1. Найти $f'(x)$ — первую производную функции.

2. Решить уравнение $f(x) = 0$, а также определить те значения x, при которых $f'(x) = \infty$ или не существует (короче: найти критические точки функции $f(x)$. Пусть этими точками будут точки с абциссами x_1, x_2, x_3. . ., x_n, которые находятся в интервале (a, b).

3. Все критические точки расположить в порядке возрастания их абсцисс в интервале (a, b).

$$a < x_1 < x_2 < x_3 <, \ldots < x_n < b.$$

4. Внутри каждого из интервалов (a, x_1); (x_1, x_2); (x_2, x_3); . . . (x_n, b) взять любую точку и установить в этой точке знак первой производной функции (производная сохраняет знак в каждом интервале между двумя соседними критическими точками).

5. Рассмотреть знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах, переходя последовательно слева направо от первого интервала к последнему. Если при таком переходе знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах различны, то экстремум в критической точке есть: максимум будет, если знак поменяется с $+$ на $-$, а минимум, если он поменяется с $-$ на $+$. Если же в двух соседних интервалах имеет место сохранение знака первой производной, то экстремума в рассматриваемой критической точке нет.

6. Найти значения функции в точках, где она достигает экстремума (экстремальные значения функции).

Правило для исследования функции на экстремум по второй производной (второй способ)

Для того чтобы исследовать функцию на экстремум по второй производной, следует:

1. Найти $f'(x)$ — первую производную функции.

2. Решить уравнение $f'(x)=0$.

3. Исследовать знак $f''(x)$ — второй производной функции — в каждой точке, найденной в п. 2. Если окажется, что в рассматриваемой точке $f''(x)>0$, то в этой точке будет минимум, а если $f''(x)<0$, то в ней будет максимум. Если же окажется, что в рассматриваемой точке $f''(x)=0$, то исследование надлежит провести по первому правилу.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке всегда имеются точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Этих значений функция достигает или в критических точках, или на концах отрезка $[a, b]$. Поэтому, ***чтобы определить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, надо: 1) определить критические точки функции; 2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка $[a, b]$; 3) наибольшее из значений, найденных в п. 2, будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции на отрезке $[a, b]$.***

Задача 32,1. Найти экстремум функции $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$, а также определить ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-2, 4]$.

Решение. Проведем решение сначала по первому правилу, а потом по второму. Областью существования функции является весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

1. Находим, что

$$f'(x)=x^3-2x^2-3x. \tag{32,1}$$

2. Решаем уравнение $f'(x)=0$, т. е. уравнение

$$x^3-2x^2-3x=0.$$

Разлагаем левую часть уравнения на множители:

$$x(x^2-2x-3)=0, \tag{32,2}$$

откуда $x_1=0$; $x^2-2x-3=0$, а $x_2=3$; $x_3=-1$.

Производная конечна при любом x (говорят в этом случае, что производная конечна всюду). Поэтому критическими точками будут только найденные из (32,2).

3. Располагаем критические точки в порядке возрастания абсцисс: -1; 0; 3.

4. Рассмотрим интервалы

$$(-\infty, -1);\ (-1{,}0);\ (0{,}3)\ (3, +\infty) \qquad (32{,}3)$$

Выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак первой производной по выражению (32,1). В интервале $(-\infty, -1)$ возьмем, например, точку $x=-2$; $f'(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-3(-2)=-10<0$; в интервале $(-1{,}0)$ возьмем точку $x=-\frac{1}{2}$: $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}>0$; в интервале $(0{,}3)$ возьмем точку $x=1$ и вычислим в ней $f'(x): f'(1)=-4<0$: в интервале $(3, +\infty)$ возьмем точку $x=4: f'(4)-=20>0$ (вместо этих точек читатель может в каждом из интервалов (32,3) взять любые другие). Таким образом, в интервалах (32,3) первая производная имеет такую последовательность знаков:

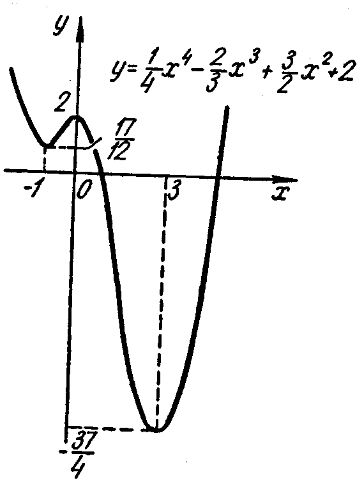
$$\underbrace{-,\ +,}_{\min}\ \underbrace{-,}_{\max}\ \underbrace{+,}_{\min}$$

и мы приходим к заключению, что в критической точке $x=-1$ имеет место минимум, в критической точке $x=0$ — максимум; а в критической точке $x=3$ — минимум. Найдем теперь экстремальные значения функции

$$f(-1)=\frac{17}{12};\ f(0)=2;\ f(3)=-\frac{37}{4}, \qquad (32{,}4)$$

Эскиз графика представлен на фиг. 32,1.

Теперь проведем решение по второму правилу, т. е. исследуем функцию на экстремум с помощью второй производной.



Фиг. 32,1.

У нас критические точки уже определены: $x_1=-1$; $x_2=0$ и $x_3=3$. Найдем вторую производную функции. Дифференцируя первую производную, получаем $f''(x)=3x^2-4x-3$, и согласно второму правилу определяем знак второй производной в каждой критической точке:

$f''(-1)=4>0$; при $x=-1$ функция имеет минимум,

$f''(0)-3<0$; при $x=0$ функция имеет максимум,

$f''(3)=12>0$; при $x=3$ функция имеет минимум.

Читатель должен отметить, что исследование, проведенное по второму способу, было значительно проще. Однако от исследования функции на экстремум по первому правилу при помощи первой производной отказываться не следует, так как может оказаться, что в критической точке вторая производная окажется равной нулю, а в этом случае нельзя сделать никакого заключения о наличии экстремума.

Поэтому упражнения в нахождении экстремума функции по первой производной необходимы. Теперь ответим на второй вопрос задачи: определим наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-2,4]$. Этот отрезок содержит внутри себя все критические точки. Так как значения функции в критических точках мы уже вычислили (32,4), то нам осталось вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. $f(-2)$ и $f(4): f(-2)=\frac{16}{3}$; $f(4)=-\frac{2}{3}$. Сравнивая эти значения со значениями (32,4) функции в критических точках, мы видим, что наибольшим из них является $f(-2)=\frac{16}{3}$, а наименьшим — $f(3)=-\frac{37}{4}$, т. е. наибольшего значения функция достигает на левом конце отрезка при $x=-2$, а наименьшего — в критической точке $x=3$. Решим подробно еще одну аналогичную задачу.

Задача 32,2. Определить экстремум функции $y=x^3-3x^2+3x+2$ и найти ее наименьшее и наибольшее значение на отрезке $[2,5]$.

Решение. Сначала решим задачу по первому способу, а потом — по второму. Областью существования функции является весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Находим вторую производную функции: $f'(x)=3x^2-6x+3$. Решим уравнение $3x^2-6x+3=0$. Это уравнение имеет только один корень $x=1$. Производная конечна при любом значении x, а потому $x=1$ является единственной критической точкой.

Рассмотрим интервалы $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

Внутри каждого из этих интервалов выберем произвольную точку и определим в ней знак первой производной. Например, в первом интервале возьмем точку $x=0$, во втором $x=2$.

$$f'(0)=3>0;\ f'(2)=3>0$$

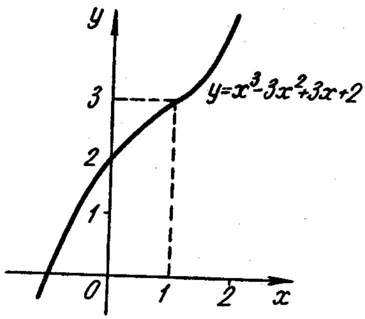
(читатель вместо этих точек может в каждом из этих интервалов взять любые другие).

Таким образом, в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$ имеет место такая последовательность знаков первой производной: $+$, $+$. Из этого мы заключаем, что первая производная знака не поменяла, а потому в точке $x=1$ экстремума нет.

Если первую производную записать в виде $f'(x)=3(x-1)^2$, то можно сразу заключить, что она положительна при любом значении $x \neq 1$, а потому рассматриваемая функция возрастает на всем бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,2.

Покажем, что по второму правилу с помощью второй производной исследование провести нельзя. Действительно, $f''(x) = 6x - 6$, и в критической точке $x = 1$ имеет, что $f''(1) = 0$. Таким образом, исследование следует вести по первому правилу, а на основании его мы уже заключили, что экстремума нет.

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Так как отрезок $[2, 5]$ не содержит критической точки, то для определения наименьшего и наибольшего значения функции на этом отрезке следует определить только значения ее на концах отрезка: $f(2) = 4$, $f(5) = 67$. Наименьшего значения на отрезке $[2,5]$ функция достигает на левом конце при $x = 2$, и это наименьшее значение $f(2) = 4$. Наибольшего значения функция достигает при $x = 5$ — на первом конце отрезка; это значение $f(5) = 67$.



Фиг. 32,2.

Задача 32,3 (для самостоятельного решения). Найти сначала по первому, а потом по второму правилу экстремум функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 24x + 1$, а также наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[-5,2]$.

Указание. Уравнение $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ имеет корни: $x_1 = -4$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Эти корни могут быть легко найдены на основании следствия теоремы Безу, известной из алгебры. Можно также уравнение представить в виде

$$x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24 = 0,$$

а тогда его левая часть равна $(x-2)(x^2 + x - 12)$.

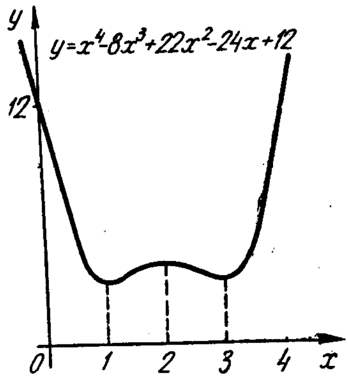
Ответ. При $x = -4$ минимум; $f(-4) = -\frac{365}{3}$; при $x = 2$ — максимум; $f(2) = \frac{67}{3}$; при $x = 3$ — минимум; $f(3) = \frac{85}{4}$; на отрезке $[-5,2]$: $y_{\text{наиб.}} = y(2) = \frac{67}{3}$; $y_{\text{наим.}} = y(-4) = -\frac{365}{3}$, т. е. функция достигает наибольшего значения в критической точке $x = 2$, которая является правым концом отрезка, а наименьшего значения — в критической точке $x = -4$ внутри рассматриваемого отрезка (в этой точке функция достигает также и минимума).

Задача 32,4 (для самостоятельного решения). Найти сначала по первому правилу, а потом по второму экстремум функции

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12.$$

Указание. Уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ может быть переписано так: $x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0$, или $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Ответ. При $x = 1$ — минимум; $f(1) = 3$; при $x = 2$ — максимум; $f(2) = 4$; при $x = 3$ — минимум; $f(3) = 3$ (см. фиг. 32,3).



Фиг. 32,3.

Задача 32,5. Исследовать на экстремум функцию $y = x^4 + 8x^3 + 16x^2$, а также найти ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[-3, 1]$.

Решение. Область существования — бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Первая производная $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 32x$. Для определения критических точек решаем уравнение

$$4x^3 + 24x^2 + 32x = 0.$$

Перепишем его в виде $x(x^2 + 6x + 8) = 0$, откуда $x = 0$; $x^2 + 6x + 8 = 0$. Критические точки: $x_1 = -4$; $x_2 - 2$; $x_3 = 0$.

Применим первое правило. Критические точки разбивают область существования функции на интервалы:

$$(-\infty, -4);\ (-4, -2);\ (-2, 0);\ (0, +\infty).$$

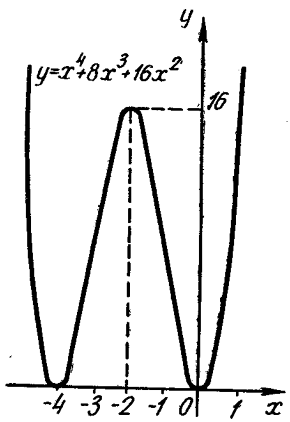
В каждом из этих интервалов первая производная сохраняет знак. Поэтому для исследования в них знака первой производной можно в каждом интервале выбрать произвольную точку. В первом интервале возьмем точку $x = -5$, $f'(-5) = -60 < 0$; во втором интервале возьмем точку $x = -3$; $f'(-3) = +12 > 0$; в третьем интервале выберем точку $x = -1$; $f'(-1) = -12 < 0$ в четвертом интервале — точку $x = +1$; $f'(1) = 60 > 0$.

Последовательность знаков первой производной в рассмотренных интервалах запишется так:

$$\underbrace{-,\ +}_{\min},\ \underbrace{+,\ -}_{\max},\ \underbrace{-,\ +}_{\min}.$$

Следовательно, при $x = -4$ имеем минимум, а $f(-4) = 0$; при $x = -2$ — максимум и $f(-2) = 16$, а при $x = 0$ — минимум, причем $f(0)=0$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,4. Вторым способом задачу решите самостоятельно.

Найдем теперь наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[-3,1]$. На этом отрезке имеются две критические точки $x=-2$ и $x=0$; $f(-2)=16$, $f(0)=0$. Для решения вопроса о наибольшем и наименьшем значении в нем функции надо еще рассмотреть значения функции на концах отрезка: $f(-3)$ и $f(1)$. Подсчет показывает, что $f(-3)=9$, а $f(1)=25$. Сравнивая эти значения функции с ее значениями в критических точках, приходим к заключению, что наименьшее значение функции в точке $x=0$, и оно равно 0, а наибольшее значение функция имеет на правом конце рассматриваемого отрезка в точке $x=1$, и оно равно 25.



Фиг. 32,4.

Задача 32,6 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум по второму правилу функцию $f(x)=x^4-\frac{20}{3}x^3+8x^2$. Начертить эскиз графика функции.

Ответ. Критические точки: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=4$. При $x_1=0$ — минимум; при $x_2=1$ — максимум; при $x_3=4$ — минимум.

Задача 32,7 (для самостоятельного решения). По второму правилу исследовать на экстремум функцию

$$y=4x^3-21x^2+18x+20.$$

Ответ. Критические точки: $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=3$; при $x=\frac{1}{2}$ — максимум, при $x=3$ — минимум;

$$y_{\max}=\frac{97}{4};\ y_{\min}=-7.$$

Задача 32,8. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x)=(x-1)^3(x+1)^2.$$

Решение. Функция определена при всех значениях x. Проведем решение по первому и второму правилам. Начнем с определения первой производной:

$$f'(x)=3(x-1)^2(x+1)^2+3(x+1)(x-1)^3=$$
$$=(x-1)^2(x+1)(5x+1).$$

Так как производная имеет конечное значение при любом x, то критическими точками будут только те, в которых первая производная равна нулю. Решая уравнение $(x-1)^2(x+1)(5x+1)=0$, находим критические точки; $x_1=-1$; $x_2=-\frac{1}{5}$; $x_3=1$.

Эти точки разбивают интервал $(-\infty, +\infty)$, в котором существует заданная функция, на интервалы.

$$(-\infty, -1); \left(-1, -\frac{1}{5}\right); \left(-\frac{1}{5}, 1\right); (1, +\infty).$$

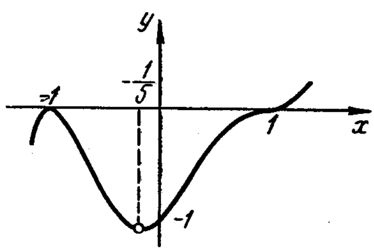
Теперь мы должны исследовать знак первой производной в каждом из этих интервалов. Учитывая, что в каждом из этих интервалов первая производная сохраняет знак, мы можем в каждом из них рассмотреть любую точку. Возьмем в первом интервале $x=-2$; $f'(-2)=81>0$. Во втором интервале берем $x=-\frac{1}{2}$; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}<0$. В третьем интервале берем $x=0$;

$$f'(0)=1>0.$$

В четвертом интервале возьмем $x=2$; $f'(2)=33>0$ (вместо этих точек читатель может в каждом из этих интервалов взять любые другие). Последовательность знаков первой производной будет такой;

$$\underbrace{+, -}_{\max}\!\!\!\!\!\!\underbrace{\;\;, +}_{\min}, +.$$

Из рассмотрения этой последовательности знаков заключаем, что в точке $x=-1$ — максимум, а $f(-1)=0$; в точке $x=-\frac{1}{5}$ — минимум, а $f\left(-\frac{1}{5}\right)=-1\frac{331}{3125}$; в точке $x=1$ экстремума нет; $f(1)=0$; в интервале $\left(-\frac{1}{5}, +\infty\right)$ функция возрастает, так как ее первая производная в этом интервале положительна (эскиз графика представлен на фиг. 32,5). Теперь решим эту же задачу по второму правилу. Находим, что



Фиг. 32.5.

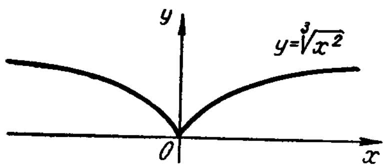
$f''(x)=2(x-1)(x+1)(5x+1)+(x-1)^2(5x+1)+5(x-1)^2(x+1)$. Поскольку нас интересует только знак второй производной в критических точках, то нет надобности упрощать это выражение. Подставляя в это выражение критические значения x, получим:

$f''(-1) = -16 < 0$. Значит, при $x = -1$ функция имеет максимум; $f''\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{143}{25} > 0$. Это означает, что при $x = -\frac{1}{5}$ минимум $f''(1) = 0$. Для заключения о поведении функции в этой точке надо прибегнуть к исследованию по первой производной (оно уже было проведено выше: в этой точке экстремума нет).

Задача 32,9. Определить экстремум функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение. Легко находим, что $f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.

Уравнение $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$ не удовлетворяется ни одним конечным значением x. Рассмотрим значения x, при которых $f'(x) = \infty$ или не существует, Ясно, что таким единственным значением будет $x = 0$. Таким образом, имеется только одна критическая точка $x = 0$, которая весь бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$ существования функции разбивает на 2 интервала: $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Исследуем знак первой производной в любой точке каждого из этих интервалов. Возьмем, например, в первом интервале точку $x = -1$; $f'(-1) = -\frac{2}{3} < 0$; во втором интервале возьмем точку $x = 1$; $f'(1) = \frac{2}{3} > 0$. Последовательность знаков первой производной:



Фиг. 32,6.

$$\underbrace{-,\ +}_{\min}$$

Так как производная меняет знак с — на +, то в критической точке $x=0$ функция имеет минимум, и $f(0) = 0$. Эскиз графика представлен на фиг. 32,6.

Исследование заданной функции во второй производной провести нельзя, так как $f''(x)$ не существует в точке $x = 0$.

ТРИДЦАТЬ ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений на определение максимума и минимума функций и их наибольшего и наименьшего значения на отрезке (необходимые краткие сведения из теории помещены в тридцать втором практическом занятии).

Задача 33,1. Определить экстремум квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Решение. Прежде всего находим первую производную функции

$$y' = 2ax + b$$

и решаем уравнение $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$. Бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$ существования заданной функции разбивается на два:

$$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right); \quad \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right). \tag{33,1}$$

Для исследования вопроса о знаке первой производной в этих интервалах возьмем в каждом из них произвольную точку: например, в первом — точку $-\frac{b}{2a} - 1$, а во втором $-\frac{b}{2a} + 1$, и вычислим первую производную функции в этих точках:

$$y'\left(-\frac{b}{2a} - 1\right) = 2a\left(-\frac{b}{2a} - 1\right) + b = -2a;$$

$$y'\left(-\frac{b}{2a} + 1\right) = 2a\left(-\frac{b}{2a} + 1\right) + b = 2a.$$

Таким образом мы получаем такую последовательность знаков первой производной:

$$\text{при } a > 0 \ \underbrace{-,\ +}_{\min}, \quad \text{при } a < 0 \ \underbrace{+,\ -}_{\max}$$

Заключение. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке $x = -\frac{b}{2a}$ достигает: минимума, если $a > 0$, максимума при $a < 0$. Значение ординаты в этой точке:

$$y\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Исследование во второй производной значительно проще приводит к этому же результату ($y'' = 2a$), и сразу видно, что в критической точке $x = -\frac{b}{2a}$ при $a < 0$ — максимум, а при $a > 0$ — минимум. Читателю известно, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ определяет параболу с осью, параллельной оси Oy. В первой части этой книги вершину параболы мы определяли выделением в правой части уравнения $y = ax^2 + bx + c$ полного квадрата и последующим параллельным переносом координатных осей. После разбора этой задачи учащийся получает более простой способ определения координат вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$: надо просто определить экстремум этой функции. Числовые примеры:

1) Найти вершину параболы $y = 2x^2 + 6x - 7$.

Решение. $y' = 4x + 6$; $4x + 6 = 0$; $x = -\frac{3}{2}$ — абсцисса вершины.

Так как $a = 2 > 0$, то в этой точке функция имеет минимум. Ордината вершины равна

$$y\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{3}{2}\right) - 7 = -11\frac{1}{2},$$

а координаты вершины этой параболы

$$\left(-\frac{3}{2}, -11\frac{1}{2}\right);$$

2) Найти вершину параболы $y = -5x^2 - 4x + 2$.

Решение. $y' = -10x - 4$; $-10x - 4 = 0$; $x = -\frac{2}{5}$. Так как здесь $a = -5 < 0$, то в этой точке функция имеет максимум, а $y\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{14}{5}$. Координаты вершины параболы $\left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$.

Несколько аналогичных задач решите самостоятельно. Найти координаты вершины парабол и начертить эскизы их графиков:

1) $y = x^2 + x + 1$; 2) $y = -4x^2 + 9x - 1$;
3) $y = -2x^2 + 2x + 3$; 4) $y = 4x^2 + 6x - 4$;
5) $y = 6x^2 + 2x$.

Ответ. 1) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{9}{8}, \frac{65}{16}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{25}{4}\right)$; 5) $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$.

Задача 33, 2 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ и начертить эскиз графика этой функции.

Указания. 1) Функция периодическая, а ее период $T = 2\pi$; $f(x + 2\pi) = f(x)$. Поэтому при определении экстремума можно ограничиться определением экстремума на отрезке $[0; 2\pi]$;

2) $y' = 3\sin x \cos x (\sin x - \cos x)$. На отрезке $[0, 2\pi]$ уравнение $3\sin x \cos x (\sin x - \cos x) = 0$ имеет такие корни: 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; 2π, а потому критическими точками будут 0; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

3) Дальнейшее исследование выгоднее провести по второй производной, знак которой следует определить во всех критических точках.

Ответ. Максимум в точках: 0; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5}{4}\pi$; 2π; $f(0) = 1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(2\pi) = 1$.

Минимум в точках: $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, а $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\pi)=-1$; $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Задача 33, 3 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$. Сделать эскиз графика функции.

Указания. 1) Область определения функции — интервал $(-\infty, +\infty)$, 2) первая производная обращается в нуль при $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $f'(x)=\infty$ при $x=-1$; $x=0$; $x=+1$; 4) критические точки -1; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1.

Ответ. При $x=\pm 1$ экстремума нет; при $x=0$ — минимум; при $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ — максимум.

В следующих четырех задачах, которые должны быть решены самостоятельно, надо иметь в виду, что ***если в рассматриваемом интервале имеется единственный экстремум, то в критической точке функция достигает наименьшего, или наибольшего значения, смотря по тому, будет ли в этой точке минимум или максимум.***

Задача 33, 4 (для самостоятельного решения). Найти наименьшее значение функции $y=x^2\ln x$.

Указание. 1) Область существования функции — интервал $(0, +\infty)$; производная существует во всем этом интервале; 2) критическая точка $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Других критических точек нет. 3) $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)>0$, и тогда при $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ — минимум. Так как заданная функция имеет на интервале $(0, +\infty)$ единственный минимум, то при $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ функция достигает наименьшего значения, и это наименьшее значение $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$.

Задача 33, 5. Найти наибольшее значение функции $y=x^{1-\ln x}$.

Указание. $y'=x^{1-\ln x}\frac{1}{x}(1-2\ln x)$.

Для всех значений x из интервала $(0, +\infty)$, в котором определена заданная функция, производная имеет конечное значение и обращается в нуль, когда $1-2\ln x=0$, т. е. при $\ln x=\frac{1}{2}$, и тогда $x=\sqrt{e}$ — единственная критическая точка.

Докажите, что в этой точке функция достигает максимума. Так как эта точка — единственная критическая точка функции, а в ней достигается максимум, то в ней достигается и наибольшее значение заданной функции:

$$y_{\text{наиб}} = y(\sqrt{e}) = (\sqrt{e})^{1-\ln\sqrt{e}} = (\sqrt{e})^{1-\frac{1}{2}} = (\sqrt{e})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{e}.$$

Задача 33, 6 (для самостоятельного решения). Найти наименьшее значение функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

Ответ. $y_{\text{наим}} = e$ при $x = e$.

Указание. $y' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. Область существования функции состоит из двух интервалов: $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. В каждом из этих интервалов производная имеет конечное значение, причем $y' = 0$ при $\ln x - 1 = 0$, т. е. когда $\ln x = 1$, а $x = e$.

Задача 33, 7 (для самостоятельного решения). Найти наименьшее значение функции $y = x^x$.

Ответ. Наименьшего значения функция достигает при $x = e^{-1}$ и $y_{\text{наим}} = \sqrt[e]{e^{-1}}$.

Указание. $y' = x^x(\ln x + 1)$ и имеет конечное значение при всех $x > 0$.

Задача 33, 8 (для самостоятельного решения). Определить экстремум функции $u = 2x + 3\sqrt[3]{(2-x)^2}$.

Указания. 1) $u = \dfrac{2(2-x)^{\frac{1}{3}} - 2}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}$;

2) критических точек две: $x = 1$ и $x = 2$;

3) рассмотреть знак первой производной в интервалах $(-\infty, 1)$; $(1, 2)$; $(2, +\infty)$.

Ответ. При $x = 1$ функция имеет максимум: $y_{\max} = 5$; при $x = 2$ — минимум, $y_{\min} = 4$. В интервале $(2, +\infty)$ функция возрастает.

Задача 33, 9 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $u = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2ax - x^2)^4}$.

Ответ. При $x = 0$ и $x = 2a$ функция имеет минимум: $u(0) = 0$; $u(2a) = 0$; при $x = a$ — максимум и $u(a) = \frac{3}{2}a^2\sqrt[3]{a^2}$.

Указание к решению задач 33, 10 и 33, 11. В этом случае, когда первая производная представляет собой отношение двух функций, а исследование на экстремум ведется при помощи второй производной, полезно для упрощения вычислений иметь в виду следующее: пусть $y' = \frac{u}{v}$, где u и v — функция x.

Тогда

$$y'' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{v\left(u' - \frac{u}{v}v'\right)}{v^2}.$$

Сокращая последнюю дробь на v и принимая во внимание, что $\frac{u}{v} = y'$, получим $y'' = \frac{u' - y'v'}{v}$.

Так как при исследовании функции на экстремум по второй производной мы определяем знак второй производной при тех значениях x, которые обращают в нуль первую производную, то в предыдущей формуле окажется, что $y' = 0$, и тогда $y'v' = 0$, а знак y'' будет таким же, как и знак $\frac{u'}{v}$. Поэтому нет надобности в рассматриваемом случае отыскивать полностью вторую производную для определения знака второй производной при значениях x, найденных из уравнения $y' = 0$, а надо эти значения подставить в выражение $\frac{u'}{v}$. Составить же это выражение значительно проще, чем отыскивать вторую производную. Если окажется, что $v > 0$, то придется исследовать знак только u'.

Задача 33,10. Исследовать на экстремум по второй производной функцию

$$y = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}.$$

Решение. Находим прежде всего первую производную:

$$y' = \frac{1 + 4x^2 - 4x^4 - x^6}{(x^4 - x^2 + 1)^2}.$$

При всех действительных значениях x производная имеет конечное значение. Критические точки найдем из уравнения $y' = 0$. Приравнивая числитель дроби нулю, имеем $1 + 4x^2 - 4x^4 - x^6 = 0$, откуда $1 - x^6 + 4x^2(1 - x^2) = 0$. Рассматривая $2 - x^6$ как разность кубов, получаем $1 - x^6 = (1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)$, а уравнение перепишется в виде:

$$(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4) + 4x^2(1 - x^2) = 0,$$

или

$$(1 - x^2)(1 + 5x^2 + x^4) = 0;$$

отсюда получаем два уравнения: 1) $1 - x^2 = 0$; 2) $1 + 5x^2 + x^4 = 0$.

Корнями первого уравнения будут числа $x = -1$; $x = +1$, а второе уравнение имеет только комплексные корни, а потому критическими точками будут только точки $x = -1$ и $x = +1$. Для определения знака второй производной при этих значениях составим, согласно сделанному указанию, выражение $\frac{u'}{v}$. У нас $u = 1 + 4x^2 - 4x^4 - x^6$; $v = (x^4 - x^2 + 1)^2$;
а так как $v > 0$ при любом x, то надо исследовать знак только $u' = 8x - 16x^3 - 6x^5$; $u'(-1) = 14 > 0$.

Значит, при $x = -1$ функция имеет минимум, и $y_{\min} = -2$. При $x = +1$ имеем $u'(+1) = -14 < 0$ и, значит, при $x = +1$ функция имеет максимум, а $y_{\max} = +2$.

Задача 33,11 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $u = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$.

Указание. $u' = \frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$. Корнями уравнения $u' = 0$ будут $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $u' = \infty$ при $x = -2$. Но при $x = -2$ заданная функция не существует, а потому значение $x = -2$ рассмотрению не подлежит. Критическими точками, подлежащими рассмотрению, являются $x_1 = -3$ и $x_2 = 0$.

Ответ. При $x = -3$ экстремума нет; при $x = 0$ функция имеет минимум, а $u_{\min} = u(0) = 6\frac{3}{4}$.

Теперь мы решим несколько задач, в которых требуется определить наибольшее или наименьшее значение функции, причем, в отличие от предыдущих задач, эта функция не дается в готовом виде, а определяется из условия задачи.

Общее указание. *Во всех случаях, когда функция, определенная из условия задачи, окажется функцией двух независимых переменных, надо, используя известные теоремы, одну из этих переменных исключить.*

Задача 33,12. Доказать, что из всех прямоугольников, имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решение. Обозначим длину одной стороны прямоугольника через x. Тогда длина другой его стороны будет $p - x$, а его площадь $s = x(p - x)$ $(0 < x < p)$. Эта функция и есть та, которая получена из условия задачи и наибольшее значение которой должно быть найдено:

$$\frac{ds}{dx} = p - 2x; \qquad \frac{d^2s}{dx^2} = -2.$$

Приравняем первую производную нулю. Из уравнения $p - 2x = 0$ находим, что $x = \frac{p}{2}$. Так как вторая производная отрицательна, то при этом значении x функция достигает максимума, а поскольку в интервале $0 < x < p$ имеется единственный максимум, то он будет и наибольшим значением функции в этом интервале.

Мы нашли, что наибольшего значения площадь прямоугольника достигает, когда одна его сторона $x = \frac{p}{2}$, его другая сторона равна $p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$, т. е. стороны его равны, а прямоугольник — квадрат: $S_{\text{наиб}} = \frac{p^2}{4}$ кв. ед.

Итак, из всех прямоугольников, имеющих один и тот же периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.

Задача 33,13 (для самостоятельного решения). Доказать, что из всех прямоугольников, имеющих данную площадь a^2, квадрат имеет наименьший периметр.

Указание. Если обозначить длину одной стороны прямоугольника через x, то другая сторона равна $\frac{a^2}{x}$, а периметр

$$p = 2\left(\frac{a^2}{x} + x\right).$$

Это и есть составленная из условия задачи функция, наименьшее значение которой требуется определить.

Найти $\frac{dp}{dx}$ и решить уравнение $\frac{dp}{dx} = 0$.

Ответ. $x = a$, т. е. прямоугольник — квадрат.

Задача 33,14. Основание треугольника равно a, а его периметр $2p$. Определить его две другие стороны так, чтобы площадь его была наибольшей.

Решение. Пусть вторая сторона треугольника $b = x$. Тогда его третья сторона $c = 2p - a - x$. Известно, что площадь треугольника определяется по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, а в наших обозначениях $S = \sqrt{p(p-a)(p-x)[p-(2p-a-x)]}$, т. е.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}. \quad (0 < x < p)$$

Таким образом из условия задачи определена функция, наибольшее значение которой требуется найти. Очевидно, что эта функция достигает наибольшего значения, когда ее подкоренное выражение будет наибольшим. В подкоренном выражении первые два постоянные множителя можно не учитывать, а потому требуется определить наибольшее значение произведения $f(x) = (p-x)(a+x-p)$. Находим, что $f'(x) = -(a+x-p) + (p-x) = 2p - a - 2x$. Решая уравнение $2p - a - 2x = 0$, находим, что $x = p - \frac{a}{2}$, т. е. $b = p - \frac{a}{2}$. Третья сторона $c = 2p - a - \left(p - \frac{a}{2}\right) = p - \frac{a}{2}$, т. е. $b = c$, и рассматриваемый треугольник — равнобедренный. Так как $f''(x) = -2 < 0$, то отсюда заключаем, что при $x = p - \frac{a}{2}$ площадь достигает наибольшего значения (при $x = p - \frac{a}{2}$ функция s имеет максимум, но так как в интервале $(0, p)$ он единственный, то $x = p - \frac{a}{2}$ доставляет функции наибольшее значение в этом интервале).

Задача 33,15. (для самостоятельного решения). В треугольнике одна сторона a, противолежащий ей угол α. Определить два других угла так, чтобы площадь его была наибольшей.

Указание. Второй угол треугольника обозначить через x, тогда его третий угол $\pi - (\alpha + x)$. Площадь треугольника $S_\Delta = \frac{1}{2} ay \sin x$, где x — угол, образуемый сторонами a и y. Функция S — функция двух переменных x и y. Используем теперь известную из тригонометрии теорему синусов

$$\frac{a}{y} = \frac{\sin \alpha}{\sin [\pi - (\alpha + x)]},$$

откуда

$$y = \frac{a \sin (\alpha + x)}{\sin \alpha},$$

а

$$S = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin (\alpha + x) \sin x}{\sin \alpha}.$$

Теперь уже S — функция одной независимой переменной.

Наибольшего значения S достигнет тогда, когда его достигнет множитель числителя $f(x) = \sin(\alpha + x) \sin x$, производная $f'(x) = \sin (2x + \alpha)$.

Уравнение $\sin (2x + \alpha) = 0$ имеет решение $2x + \alpha = \pi k$. Значения $k = 0$ и $k > 1$ не должны рассматриваться. Остается одно решение:

$$2x + \alpha = \pi, \text{ а } x = \frac{1}{2}(\pi - \alpha).$$

Если $x = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$, то третий угол равен $\pi - \alpha - \frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ и, таким образом, углы, прилежащие к стороне a, между собою равны, и искомый треугольник — равнобедренный. Решите самостоятельно вопрос о том, доставляет ли значение $x = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ наибольшее значение функции S $\left(\text{докажите, что } f''(x) < 0, \text{ когда } x = \frac{1}{2}(\pi - \alpha)\right)$.

Задача 33,16. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

Решение. В задаче требуется определить в каком отношении должны находиться радиус и высота цилиндра, чтобы при заданном объеме V его полная поверхность была наименьшей. Полная поверхность цилиндра

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2. \quad (R > 0)$$

Наименьшее значение этой функции и следует определить. Но легко усмотреть, что S является функцией двух независимых переменных. На основании указания стр. 248 следует одну из этих переменных исключить. Известно, что объем цилиндра $V = \pi R^2 H$.

В задаче V — величина известная. Выразим H через V:

$$H = \frac{V}{\pi R^2}. \qquad (A)$$

С этим значением H полная поверхность цилиндра

$$S = 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2, \text{ или } S = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2.$$

Теперь уже S — функция только одной независимой переменной R:

$$S'(R) = \frac{-2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2};$$

$$S''(R) = \frac{4V}{R^3} + 4\pi \quad (R \neq 0),$$

и при любом R имеем, что $S''(R) > 0$. Из уравнения $S'(R) = 0$ следует, что

$$4\pi R^3 - 2V = 0, \text{ а } R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Так как $S''(R) > 0$, то это значение R доставляет функции S минимум, а вместе с тем и наименьшее значение.

Подставив в равенство (A) это значение R, получим, что

$$H = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \text{ т. е. } H = 2R.$$

Таким образом, на изготовление цилиндра заданного объема будет употреблено наименьшее количество материала, если взять высоту цилиндра равной диаметру.

Задача 33, 17 (для самостоятельного решения). Требуется изготовить цилиндрический сосуд заданного объема V, открытый сверху. Определить его радиус и высоту так, чтобы поверхность была наименьшей.

Ответ.

$$R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Задача 33, 18 (для самостоятельного решения). Какие размеры должен иметь цилиндр, поверхность которого равна S, чтобы его объем был наибольшим?

Указание. Объем цилиндра

$$V = \pi R^2 H \qquad (A)$$

— функция двух независимых переменных R и H. Чтобы одну из них исключить, воспользуемся формулой для вычисления полной поверхности цилиндра:

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

из которой следует, что

$$H = \frac{S - 2\pi R^2}{2\pi R}. \qquad (A)$$

Это значение H подставим в формулу (А) и получим, что

$$V = \frac{SR - 2\pi R^3}{2}.$$

Ответ. $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$; $H = 2R$, т. е. высота цилиндра должна быть равна диаметру его основания.

Задача 33, 19 (для самостоятельного решения). Доказать, что прямой круговой конус при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность тогда, когда $R^2 : H^2 : l^2 = 1 : 2 : 3$.

Указание. $S_{\text{бок. конуса}} = \pi R l$; $l = \sqrt{H^2 + R^2}$; тогда $S = \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$. Наименьшее значение этой функции требуется найти. Но она — функция двух независимых переменных. Одну из них можно исключить с помощью формулы для объема конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \text{ откуда } H = \frac{3V}{\pi R^2},$$

и тогда

$$S = \frac{1}{R}\sqrt{9V^2 + \pi^2 R^6}.$$

Ответ. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$; $H = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$; $l = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{3v}{\pi\sqrt{2}}}$, откуда следует, что $R^2 : H^2 : l^2 = 1 : 2 : 3$.

Задача 33, 20 (для самостоятельного решения). Чему должны быть равны радиус основания R, высота H и образующая l прямого кругового конуса для того, чтобы при заданном объеме V он имел наименьшую полную поверхность?

Указание. Учесть указание, данное в предыдущей задаче.

Ответ. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sqrt{2}}}$; $H = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$; $l = 3\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi\sqrt{2}}}$.

Задача 33, 21 (для самостоятельного решения). Чему должны быть равны высота H, радиус оснований R и образующая l прямого кругового конуса, чтобы при заданной боковой поверхности S он имел наибольший объем?

Указание. Объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi R^3H$.

Из этой формулы одну независимую переменную следует исключить. Используем с этой целью формулу для вычисления боковой поверхности прямого кругового конуса $S=\pi Rl$, или так как образующая конуса $l=\sqrt{H^2+R^2}$, то $S=\pi R\sqrt{H^2+R^2}$, откуда $H=\frac{\sqrt{S^2-\pi^2R^4}}{\pi R}$, а объем V с этим значением H становится функцией одной независимой переменной:

$$V=\frac{1}{3}R\sqrt{S^2-\pi^2R^4}.$$

Ответ. Объем конуса будет наибольшим при

$$R=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{S}{\pi}};\quad H=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{2S}{\pi}};\quad l=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\frac{3S}{\pi}},$$

откуда следует, что $R^2:H^2:l^2=1:2:3$.

Задача 33, 21а (для самостоятельного решения). При данной длине прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна ширине и квадрату высоты.

Из цилиндрического ствола дерева диаметром d надо вырезать балку наибольшей прочности. Определить ширину и высоту балки.

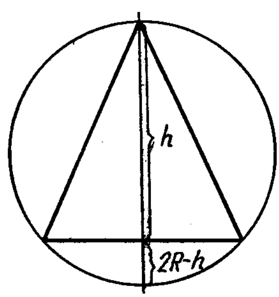
Указание. $h^2=d^2-x^2$. Прочность $y=kx(d^2-x^2)$, где k — коэффициент пропорциональности.

Ответ. Ширина балки $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$, а ее высота $h=\sqrt{\frac{2}{3}}d$.

Задача 33, 22 (для самостоятельного решения). Найти радиус основания r и высоту h прямого кругового конуса, вписанного в шар радиуса R так, чтобы его объем был наибольшим.

Указание. Объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Исключим одну из переменных, например r^2. На фиг. 33,1 изображено сечение фигуры плоскостью, проходящей через ось конуса. Известно, что в прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между отрезками гипотенузы. Поэтому $\frac{r}{2R-h}=\frac{h}{r}$ и $r^2=h(2R-h)$, а объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi h^2(2R-h)$.



Фиг. 33,1.

Ответ. $h=\frac{3}{4}R$; $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

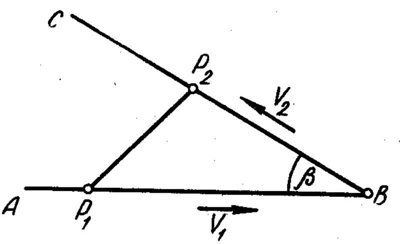
Задача 33, 23 (для самостоятельного решения). На какой высоте следует поместить источник света над освещенной поверхностью, чтобы освещение на расстоянии a от основания перпендикуляра, опущенного из источника света на освещенную поверхность, было наибольшим?

Известно, что освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна синусу угла между лучом и освещенной поверхностью.

Указание. Освещенность $E = k\frac{\sin\varphi}{a^2+h^2}$, где k — коэффициент пропорциональности, h — высота источника света над освещенной поверхностью, φ — угол между лучом и освещенной поверхностью. Так как $\sin\varphi = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$, то $E = k\frac{h}{(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Ответ. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; максимальная освещенность $E_{max} = \frac{2k\sqrt{3}}{9a^2}$.

Задача 33, 24 (для самостоятельного решения). Точка P_1 движется в направлении от A к B с постоянной скоростью V_1. В тот момент, когда P_1 проходит через A, другая точка P_2 выходит из B и движется с постоянной скоростью V_2 по направлению к C. В какой момент времени t расстояние P_1P_2 между этими двумя точками будет наименьшим, если принять $AB = a$, $\angle ABC = \beta$ (фиг. 33, 2).



Фиг. 33,2.

Указание. За время t первая точка, двигаясь с постоянной скоростью V_1, пройдет расстояние V_1t и в треугольнике P_1P_2B сторона $P_1B = a - V_1t$; вторая точка, вышедшая из B за то же время t пройдет расстояние $P_2B = V_2t$, а потому по известной формуле геометрии квадрат стороны P_1P_2 треугольника P_1P_2B равен

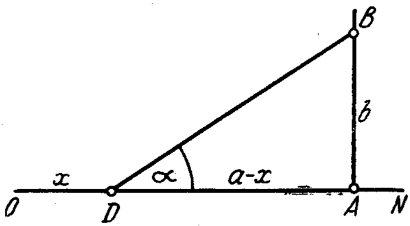
$$(P_1P_2)^2 = (a - V_1t)^2 + (V_2t)^2 - 2(a - V_1t)V_2t\cos\beta.$$

Ответ. Момент времени t, в который расстояние P_1P_2 между точками будет наименьшим, определится по формуле

$$t = \frac{a(V_1 + V_2\cos\beta)}{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\beta}.$$

Задача 33, 25. На расстоянии $AB = b$ от прямолинейной магистрали ON находится завод B. От какого места D магистрали надо сделать прямолинейное ответвление DB, чтобы стоимость проводки водопровода к заводу была наименьшей, если известно, что стоимость единицы длины водопровода по направлениям OD, DN и DB равна соответственно k_1, k_2 и k_3 рублей, $OA = a$, $ON = l$ (фиг. 33, 3).

Указание. Стоимость водопровода: 1) на участке OD равна $k_1 x$; 2) на участке DN равна $k_2(l-x)$; 3) на участке DB она равна $k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}$.



Фиг. 33,3.

Общая стоимость $k = k_1 x + k_2(l-x) + k_3\sqrt{(a-x)^2+b^2}$. Убедиться, что $\frac{dk}{dx} = k_1 - k_2 - \frac{(k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$, определить x из уравнения

$$k_1 - k - \frac{k_3(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0 \qquad (A)$$

и показать, что при найденном x

$$\frac{d^2k}{dx^2} > 0.$$

Выгодно ввести в рассмотрение угол $BDA = \alpha$. Из фиг. 33, 3 видно, что $\cos\alpha = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$. Из уравнения ($A$) следует, что

$$\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = \frac{k_1-k_2}{k_3}, \qquad (B)$$

т. е.

$$\cos\alpha = \frac{k_1-k_2}{k_3}, \quad (k_1-k_2 < k_3) \qquad (33, 23$$

и, значит, ответвление DB следует вести под углом α, определяемым из равенства (33, 23). Выражение для x получается очень просто:

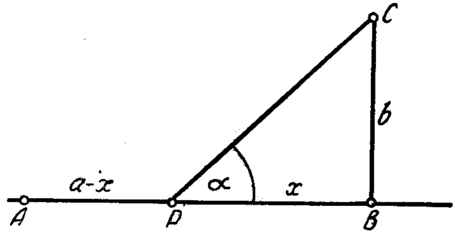
$$\frac{(a-x)^2}{(a-x)^2+b^2} = \cos^2\alpha; \quad \frac{(a-x)^2+b^2}{(a-x)^2} = \sec^2\alpha; \quad 1+\frac{b^2}{(a-x)^2} = \sec^2\alpha;$$

$$\frac{b^2}{(a-x)^2} = \operatorname{tg}^2\alpha; \quad \left(\frac{a-x}{b}\right)^2 = \operatorname{ctg}^2\alpha; \quad \frac{a-x}{b} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

и x определяется равенством $x = a - b \operatorname{ctg} \alpha$, в котором α уже известно из (33, 23).

Задача 33, 26 (для самостоятельного решения). Стоимость перевозки груза на один километр по железной дороге AB равна k_1 рублей, а по шоссе PC — k_2 рублей $(k_1 < k_2)$. С какого места P надо начать шоссе, чтобы возможно дешевле доставить груз из A в C. Известно, что $AB = a$; $BC = b$ (фиг. 33, 4).

Ответ. $AP = a - b \operatorname{ctg} \alpha$, а угол α определяется из соотношения $\cos \alpha = \frac{k_1}{k_2}$. Из последнего равенства усматриваем, что на-



Фиг. 33,4.

правление, в котором надо вести шоссе, зависит только от отношения стоимостей и не зависит от положения точки P. Если, например, $k_2 = 4k_1$, то $\cos \alpha = \frac{k_1}{4k_1} = \frac{1}{4}$, а $\alpha \approx 75°$.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Точки перегиба. Асимптомы.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Определение 1. *Говорят, что на интервале (a, b) кривая обращена выпуклостью вниз, если она лежит выше касательной, проведенной в любой ее точке.*

Определение 2. *Говорят, что на интервале (a, b) кривая обращена выпуклостью вверх, если она лежит ниже касательной, проведенной в любой ее точке.*

Дуги кривой, обращенные выпуклостью вверх, в дальнейшем будем называть выпуклыми, а обращенные выпуклостью вниз, — вогнутыми.

Дуга кривой $y = f(x)$ выпукла на интервале (a, b), если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, и вогнута на этом интервале, если во всех его точках $f''(x) > 0$.

Правило. *Интервалы, в которых дуги кривой выпуклы, определяются из неравенства $f''(x) < 0$, а интервалы, в которых дуги этой кривой вогнуты, — из неравенства $f''(x) > 0$.*

Определение 3. *Точка кривой, отделяющая ее выпуклую дугу от вогнутой, называется точкой перегиба.*

Определение 4. *Точки кривой, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x) = \infty$, а также те из них, в которых $f''(x)$ не существует, называются критическими точками второго рода.*

Точки перегиба следует искать среди критических точек второго рода.

В критической точке второго рода $x = x_0$ перегиб будет только в том случае, когда при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак.

Правило. *Для определения точек перегиба кривой надо определить все критические точки второго рода и рассмотреть знаки $f''(x)$ в каждых двух соседних интервалах, на которые эти точки делят область существования функции. В случае, если знаки $f''(x)$ в двух соседних интервалах различны, критическая точка второго рода является точкой перегиба. Если же в двух соседних интервалах $f''(x)$ имеет один и тот же знак, то в рассматриваемой критической точке второго рода перегиба нет. В точке перегиба кривая пересекает касательную.*

Задача 34,1. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

$$y = 5x^2 + 20x + 9.$$

Решение. Область существования функции — интервал

$$(-\infty, +\infty); \; y' = 10x + 20; \; y'' = 10 > 0,$$

и так как $y'' > 0$ при любом значении x, то кривая вогнута на всем интервале $(-\infty, +\infty)$. Точек перегиба нет.

Задача 34,2. Определить интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

$$y = -6x^2 + 8x - 11.$$

Решение. Область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = -12x + 8; \; y'' = -12 < 0.$$

Так как неравенство $y'' < 0$ выполняется при любом x из области существования функции, то кривая на всем интервале $(-\infty, +\infty)$ выпукла. Точек перегиба нет.

Задача 43,3. (для самостоятельного решения). Определить интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба кривых:

1) $y = 3x^2 + x + 1$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 9$; 3) $y = x^2 + x$.

Ответ. На всем бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$ кривая 1) вогнута, 2) выпукла, 3) вогнута. Ни одна из этих кривых точек перегиба не имеет.

Задача 34,4. Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3$.

Решение. Область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$; $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$. Решаем уравнение $6x = 0$ и находим, что $x=0$. Вторая производная конечна и существует при любом x, а потому $x = 0$ — единственная критическая точка второго рода. Область существования функции она разделяет на два интервала:

$$1)\ (-\infty,\ 0) \text{ и } 2)\ (0,\ +\infty).$$

В каждом из этих интервалов y'' сохраняет знак. При любом значении x из первого интервала $y'' < 0$, а при любом x из второго интервала $y'' > 0$. Таким образом при переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет знак. Эта точка является точкой перегиба. Ее координаты $(0,\ 0)$. В первом интервале $(-\infty,\ 0)$ кривая выпукла $(y'' < 0)$, а во втором — вогнута $(y'' > 0)$.

Задача 34,5 (для самостоятельного решения). Доказать, что кривая $y = x(x^2 - b^2)$ имеет точку перегиба в начале координат.

Задача 34,6. Определить точку перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3 - 12x^2 + x - 1$.

Решение. Область существования функции — бесконечный интервал $(-\infty,\ +\infty)$. Находим $y'' : y' = 3x^2 - 24x + 1$; $y'' = 6x - 24$.

При любом x вторая производная конечна и существует. Критическую точку второго рода найдем из уравнения $y'' = 0$, т. е. из уравнения $6x - 24 = 0$. Такой точкой будет $x = 4$. Интервал существования функции она разделяет на два:

$$1)\ (-\infty,\ 4) \text{ и } 2)\ (4,\ +\infty).$$

В каждом из этих интервалов y'' сохраняет знак. При любом x из первого интервала $y'' < 0$, а при любом x из второго интервала $y'' > 0$, а потому точка с абсциссой $x = 4$ — точка перегиба, а так как в первом интервале $y'' > 0$, и дуга кривой на нем — выпукла, а во втором интервале $y'' > 0$, дуга кривой на нем — выпукла, а во втором интервале $y'' > 0$, и дуга кривой вогнута. Координаты точки перегиба $(4,\ -125)$.

Задача 34,7 (для самостоятельного решения). Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$.

Ответ. Точка перегиба $(5,\ -5)$; слева от точки перегиба кривая вогнута $(y'' > 0)$, справа от нее — выпукла $(y'' < 0)$.

Задача 34,8 (для самостоятельного решения). Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой

$$y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2.$$

Ответ. Точки перегиба при $x = -2$ и $x = 1$; на интервалах $(-\infty, -2)$ и $(1, +\infty)$ кривая вогнута, на интервале $(-2, 1)$ — выпукла.

Задача 34,9 (для самостоятельного решения). Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой

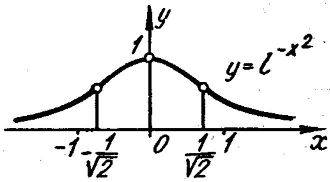
$$y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 45x - 14.$$

Ответ. Точки перегиба $(-1, -72)$ и $(3, -68)$. На интервале $(-\infty, -1)$ кривая вогнута; на интервале $(-1, 3)$ кривая выпукла; на интервале $(3, +\infty)$ кривая вогнута.

Задача 34,10 (для самостоятельного решения). Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой $y = (x-1)^4$.

Ответ. Кривая на всем бесконечном интервале вогнута ($y'' > 0$).

Задача 34,11 (для самостоятельного решения). Определить точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса, или кривая вероятностей).



Фиг. 34,1.

Ответ. Точек перегиба две: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Слева от точки $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ кривая вогнута, на интервале $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ кривая выпукла, а справа от точки $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — вогнута (фиг. 34,1).

Асимптоты

Определение. *Если расстояние d от точки кривой $y = f(x)$, имеющей бесконечную ветвь, до некоторой определенной прямой по мере удаления точки по этой кривой в бесконечность стремится к нулю, то прямая называется асимптотой кривой.*

Различают асимптоты: 1) горизонтальные, 2) вертикальные и 3) наклонные.

1. Кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = b$ только в том случае, когда существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, и этот предел равен b, т. е. если

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b. \tag{34,1}$$

2. Кривая $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = a$, если при $x \to a$, $x \to a - 0$ или при $x \to a + 0$, $f(x) \to \infty$. Для определения вертикальных асимптот надо отыскать те значения аргумента, вблизи которых $f(x)$ неограниченно возрастает по абсо-

лютной величине. Если такими значениями аргумента являются a_1, a_2, ..., то уравнения вертикальных асимптот будут

$$x = a_1;\ x = a_2;\ \ldots$$

3. Для определения наклонной асимптоты $y = kx + b$ кривой $y = f(x)$ надо найти числа k и b из формул

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (34,2)$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] \qquad (34,3)$$

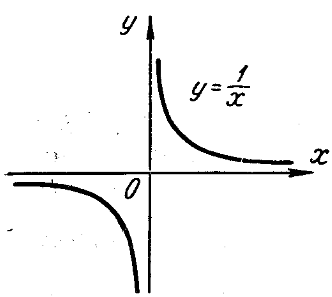
(следует отдельно рассматривать случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$). Наклонные асимптоты у кривой $y = f(x)$ существуют в том и только в том случае, когда пределы (34,2) и (34,3) имеют конечное значение (если окажется, что $k = 0$, а b имеет конечное значение, то асимптота будет горизонтальной). При определении пределов (34,2) и (34,3) удобно пользоваться правилом Лопиталя.

Задача 34,12. Найти асимптоты кривой $y = \frac{1}{x}$ (равноосная гипербола).

Решение. 1) Находим горизонтальные асимптоты по формулам (34,1):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

и кривая имеет единственную горизонтальную асимптоту $y = 0$, т. е. горизонтальной асимптотой является ось Ox.



Фиг. 34,2.

2) Определяем вертикальную асимптоту; для этого находим те значения x, вблизи которых $f(x) = \frac{1}{x}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Таким значением будет $x = 0$. Вертикальная асимптота имеет уравнение $x = 0$, т. е. это ось Oy (фиг. 34,2).

Задача 34,13. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2}{x^2-4}$.

Решение. 1) Для определения горизонтальных асимптот находим по (34,1)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2-4} = 0 \text{ и } \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^2-4} = 0.$$

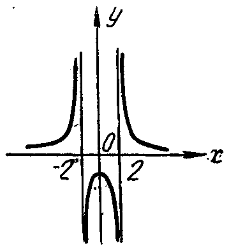
Горизонтальная асимптота одна: $y = 0$ (ось Ox).

2) Для определения вертикальных асимптот находим те значения x, вблизи которых $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$ неограниченно возрастает

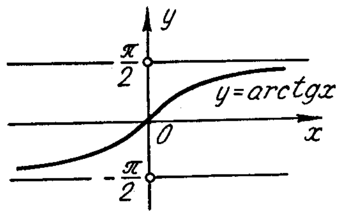
по абсолютной величине. Такими значениями являются $=-2$ и $x=+2$, и вертикальными асимптотами будут прямые $x=-2$ и $x=+2$. Эскиз графика показан на фиг. 34,3.

Задача 34,14 (для самостоятельного решения). Определить асимптоты графика функции $y=\frac{3}{x-2}$.

Ответ. Вертикальная асимптота $x=2$, горизонтальная асимптота $y=0$ (ось Ox); наклонных асимптот нет.



Фиг. 34,3.



Фиг. 34,4.

Задача 34,15 (для самостоятельного решения). Определить асимптоты графика функции $y=\frac{x-2}{x+4}$.

Ответ. Горизонтальная асимптота $y=1$;
вертикальная асимптота $x=-4$;
наклонных асимптот нет.

Задача 34,16. Найти асимптоты кривой $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$.

Решение. Находим горизонтальные асимптоты по формулам (34,1) полагая в них $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}.$$

Горизонтальные асимптоты имеют уравнения $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=-\frac{\pi}{2}$.

Вертикальных асимптот нет, так как нет значений x, вблизи которых функция $f(x)=\operatorname{arctg} x$ неограниченно возрастает по абсолютной величине (фиг. 34,4).

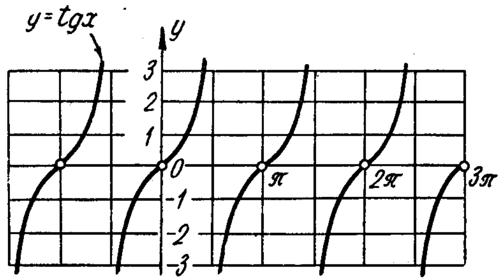
Задача 34,17 (для самостоятельного решения). Найти асимптоты кривой $y=\operatorname{tg} x$.

Ответ. Вертикальных асимптот бесконечно много. Их уравнения

$$x=\frac{\pi}{2}(2k+1),$$

где $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ (фиг. 34,5) (это следует из того, что вблизи точек $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ функция $\operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает по абсолютной величине). Других асимптот нет.

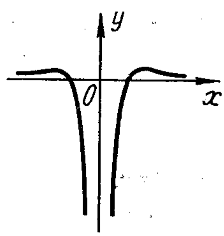
Задача 34,18 (для самостоятельного решения). Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2 - 1}{x^4}$.



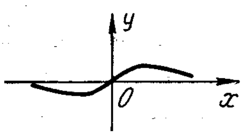
Фиг. 34,5.

Ответ. Горизонтальная асимптота $y = 0$; вертикальная асимптота $x = 0$ (фиг. 34,6).

Задача 24,19 (для самостоятельного решения). Найти асимптоты кривой $y = \frac{x}{1+x^2}$.



Фиг. 34,6.



Фиг. 34,7.

Ответ. Горизонтальная асимптота $y = 0$ (фиг. 34,7).

Задача 34,20. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$.

Решение. Горизонтальных асимптот нет. Так как y неограниченно возрастает, когда $x \to -\frac{3}{2}\left(2x + 3 = 0 \text{ при } x = -\frac{3}{2}\right)$, то имеется вертикальная асимптота: ее уравнение $x = -\frac{3}{2}$, при этом $y \to -\infty$, когда $x \to -\frac{3}{2} - 0$ и $y \to +\infty$, когда $x \to -\frac{3}{2} + 0$ (эти сведения мы используем в дальнейшем при построении эскиза графика).

Теперь определим наклонные асимптоты, уравнение которых имеет вид $y = kx + b$, а k и b определяются по формулам (34,2) и (34,3), в которых надо взять $f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 3}$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{2x + 3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3x} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 1}{2x + 3} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x + 2}{4x + 6} = -\frac{3}{4}.$$

Так как k и b имеют конечные значения и равные между собой при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, то имеется единственная наклонная асимптота, уравнение которой

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

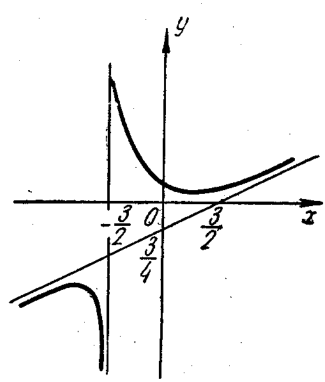
Чтобы сделать заключение об интервалах, на которых кривая находится над асимптотой и под ней, надо составить разность $\delta = y_{\text{кр.}} - y_{\text{ас.}}$. На тех интервалах, где $\delta > 0$, кривая лежит над асимптотой, а на тех, где $\delta < 0$, кривая лежит под асимптотой.

В нашем случае $y_{\text{кр}} = \frac{x^2+1}{2x+3}$; $y_{\text{ас}} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$:

$$\delta = \frac{x^2+1}{2x+3} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right); \quad \delta = \frac{13}{4(2x+3)}.$$

Знак δ такой же, как и знак двучлена $2x+3$. Решая неравенства 1) $2x+3>0$ и 2) $2x+3<0$, находим, что первое выполняется при $x > -\frac{3}{2}$, а второе — при $x < -\frac{3}{2}$; поэтому: 1) $\delta > 0$, когда $x > -\frac{3}{2}$, а значит на интервале $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ кривая лежит над асимптотой; 2) $\delta < 0$, когда $x < -\frac{3}{2}$, а это значит, что на интервале $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ кривая лежит под асиптотой.

Набросок графика функции сделан на фиг. 34,8.



Фиг. 34,8.

Задача 34,21 (для самостоятельного решения). Определить асимптоты кривой $y = \frac{2x^2+x+3}{x+6}$.

Ответ. Уравнения асимптот: 1) $x = -6$; 2) $y = 2x - 11$.

Самостоятельно решить вопрос об интервалах, в которых кривая лежит над асимптотой и под ней.

Замечание. Следует иметь в виду, что когда k имеет конечное значение, а b — бесконечное, то наклонной асимптоты нет. Этот случай имеет место в следующей задаче.

Задача 34,22. Найти асимптоты кривой $y = \frac{2x^2 + 4x\sqrt{x} + 2}{2x+4}$.

Ответ. Вертикальная асимптота $x = -2$. Так как $b \to +\infty$, когда $x \to +\infty$, то наклонной асимптоты нет. Так как при $x < 0$ не существует $\sqrt{x}$, то пределы (34,2) и (34,3) при $x \to -\infty$ не должны рассматриваться.

ТРИДЦАТЬ ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Общее исследование функции.

Приобретенные на предыдущих занятиях навыки в определении интервалов монотонности функции, экстремума функции, интервалов выпуклости и вогнутости графика функции, его точек перегиба и асимптот позволяют провести полное исследование функции и построить эскиз графика функции, который, хотя и не будет отличаться большой точностью, но все же даст возможность усмотреть характерные свойства и особенности исследуемой функции

Под полным исследованием функции обычно понимается решение таких вопросов:

1) Определение области существования функции.

2) Выяснение вопроса о четности и нечетности функции.

3) Определение точек разрыва функции.

4) Определение асимптот графика функции.

5) Определение интервалов возрастания и убывания функции.

6) Определение экстремума функции.

7) Определелие интервалов выпуклости и вогнутости графика функции.

8) Определение точек перегиба.

Полученные данные следует использовать для построения графика функции. Для бо́льшей точности эскиза графика рекомендуется построить еще и отдельные точки графика, давая значения независимой переменной и определяя соответствующие значения функции. Полезно также получаемые данные сразу наносить на чертеж.

Учитывая, что на предыдущих занятиях все элементы этой схемы были полно изучены, мы дадим подробное решение только трех задач, после чего остальные задачи должны быть решены самостоятельно. Эти задачи снабжены ответами и необходимыми указаниями.

Задача 35,1. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Решение. 1. Определим область существования этой функции. Функция существует при всех значениях x, кроме $x = -1$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль. Значит, функция определена в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$.

2. Исследуем вопрос о наличии центра симметрии и оси симметрии. Проверим для этого выполняются ли равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$.

Непосредственная подстановка убеждает нас, что ни одно из этих равенств не выполняется, так что ни центра, ни оси симметрии график функции не имеет.

3. Числитель и знаменатель дроби $y=\frac{x^4}{2(x+1)^2}$ непрерывные функции и, следовательно, функция y будет непрерывной при всех значениях x, кроме $x=-1$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль.

4. Переходим к определению асимптот графика.

а) Вертикальные асимптоты найдем, приравняв знаменатель нулю: $2(x+1)^2=0$; $x=-1$.

Вертикальная асимптота одна: ее уравнение $x=-1$.

б) Горизонтальные асимптоты находим так: отыскиваем $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\pm\infty,$$

а это означает, что горизонтальных асимптот нет.

в) Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot 2(x+1)^2}=\frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1.$$

Наклонная асимптоты одна: $y=\frac{1}{2}x-1$.

5 и 6. Определяем интервалы возрастания и убывания функции и экстремум функции.

Находим первую производную $y'=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$.

Определим критические точки: 1) Решаем уравнение $y'=0$, т. е. уравнение $\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}=0$ и находим, что $x_1=-3$; $x_2=0$.

2) Определяем значения x, при которых $y'=\infty$. Таким значением является $x=-1$. Но это значение рассмотрению не должно подлежать, так как оно не входит в область определения функции. Критические точки, подлежащие рассмотрению: $x_1=-3$, $x_2=0$ и точка $x=-1$ — разделяют интервалы существования функции на такие интервалы:

1) $(-\infty, -3)$; 2) $(-3, -1)$; 3) $(-1,0)$; $(0, +\infty)$.

В каждом из этих интервалов производная сохраняет знак: в первом — плюс, во втором—минус, в третьем—плюс, в четвертом—

плюс (в этом можно убедиться, взяв в каждом интервале произвольное значение x и вычислив при нем значение y'). Последовательность знаков первой производной запишется так: $+$, $-$, $+$, $+$. Значит, в интервале $(-\infty, -3)$ функция возрастает, в интервале $(-3, -1)$ — убывает, в интервалах $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$ функция возрастает.

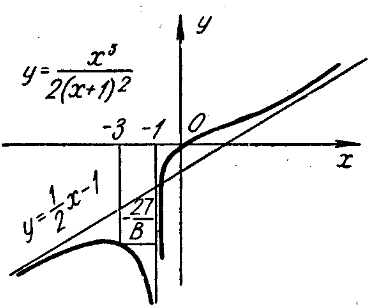
При $x = -3$ функция имеет максимум и $y_{\text{макс.}} = -\frac{28}{8}$. Так как знаки во втором и третьем интервалах различны, то можно было бы предположить, что при $x = -1$ есть экстремум. Но такое предположение неверно, так как при $x = -1$ заданная функция не существует. Итак, функция имеет единственный экстремум (максимум) при $x = -3$.

7 и 8. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции и точек перегиба.

Находим, что $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$ и определяем критические точки второго рода: 1) решаем уравнение $\frac{3x}{(x+1)^4} = 0$ и находим, что $x = 0$; 2) определяем значения x, при котором $y'' = \infty$. Таким значением является $x = -1$). Как уже было отмечено выше, это значение рассматриваться не должно, так как при нем не существует заданной функции.

Критическая точка второго рода $x = 0$ разделяет интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, +\infty)$ существования функции на интервалы:

$$1)\ (-\infty, -1);\ 2)\ (-1, 0);\ 3)\ (0, +\infty).$$



Фиг. 35,1.

В каждом из этих интервалов вторая производная конечна и сохраняет знак: в первом — минус, во втором — минус, в третьем — плюс, и мы имеем такое чередование знаков второй производной в этих интервалах: $-$, $-$, $+$.

Значит, в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ кривая выпукла, а в интервале $(0, +\infty)$ — вогнута. При $x = 0$ вторая производная равна нулю, а при переходе из второго интервала в третий она поменяла знак. Это указывает на то, что при $x = 0$, кривая имеет точку перегиба. Координаты точки перегиба $(0, 0)$ — это начало координат. Все полученные сведения наносим на чертеж и получаем эскиз кривой (фиг. 35,1).

Задача 35,2. Исследовать функцию $y=\frac{x^3}{x^2+2x+3}$.

1. Определим область существования функции. Прежде всего, определим, при каких значениях x знаменатель x^2+2x+3 обращается в нуль. Приравниваем знаменатель нулю и решим уравнение $x^2+2x+3=0$; получим, что $x=-1\pm i\sqrt{2}$. Корни знаменателя комплексны. Значит, ни при одном вещественном значении x знаменатель дроби в нуль не обращается. Дробь, представляющая собой отношение двух непрерывных функций, будет функцией непрерывной при всех значениях x, за исключением тех, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. В нашем случае числитель и знаменатель — функции, непрерывные на всей оси. Следовательно, заданная функция непрерывна при любом x (мы выяснили, что ни при одном вещественном x знаменатель в нуль не обращается), и областью ее определения является вся ось Ox, т. е. интервал $(-\infty, +\infty)$.

2. Определим, нельзя ли отнести данную функцию к классу четных или нечетных функций. Для этого вычислим $f(-x)$: $f(-x)=\frac{-x^3}{x^2-2x+3}$. Мы заключаем, что $f(x)$ не равно ни $f(-x)$, ни $-f(x)$, т. е. нашу функцию нельзя отнести ни к классу четных, ни к классу нечетных функций, и график функции не имеет ни оси, ни центра симметрии.

3. Определим теперь асимптоты графика: а) вертикальных асимптот нет, так как нет тех конечных значений x, при которых $y\to\infty$; б) найдем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2+2x+3}=\pm\infty.$$

Так как конечный предел отсутствует, то горизонтальных асимптот нет; в) находим наклонные асимптоты, уравнение которых $y=kx+b$:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+2x+3}=1;$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x(x^2+2x+3)}=1;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+3}-x\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x}{x^2+2x+3}=-2;$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+4}-x\right)=-2.$$

Значения k и b как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$ одни и те же. Наклонная асимптота одна; $y=x-2$.

3. Теперь определим интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремум $y'=\frac{x^2(x^2+4x+9)}{(x^2+2x+3)^2}$.

Определим критические точки функции: 1) Решаем уравнение $y' = 0$, т. е. уравнение $\frac{x^2(x^2+4x+9)}{(x^2+2x+3)^2} = 0$. Из него следует, что $x = 0$ и $x^2 + 4x + 9 = 0$, т. е. $x = -2 \pm i\sqrt{5}$. Значит, производная имеет один действительный корень $x = 0$.

2) Ни при одном действительном значении x первая производная не принимает бесконечно больших значений (из уравнения $x^2 + 2x + 3 = 0$ следует, что $x = -1 \pm i\sqrt{2}$). Таким образом, имеется одна критическая точка $x = 0$. Область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$ она разделяет на два интервала: 1) $(-\infty, 0)$ и 2) $(0, +\infty)$. Выбирая в каждом из них произвольные значения x и вычислив при нем y', мы получим такую последовательность знаков первой производной: $+$, $+$.

Так как в рассматриваемых двух соседних интервалах y' имеет один и тот же знак, то в критической точке $x = 0$ экстремума нет: во всей области существования функции возрастает.

5. Определяем точки перегиба: $y'' = \frac{2x(x^2+18x+27)}{(x^2+2x+3)^3}$. Приравниваем y'' нулю:

$$\frac{2x(x^2+18x+27)}{(x^2+2x+3)^3} = 0;$$

$$2x(x^2+18x+27) = 0; \quad x = 0; \quad x^2 + 18x + 27 = 0;$$

$$x = -9 \pm \sqrt{54}; \quad x_2 \approx -16{,}2; \quad x_3 \approx -1{,}8.$$

Ни при одном значении x знаменатель дроби в нуль не обращается; таким образом, критическими точками второго рода будет

$$x_1 \approx -16{,}2; \quad x_2 \approx -1{,}8; \quad x_3 = 0.$$

Эти точки разделяют область существования функции — интервал $(-\infty, +\infty)$ на интервалы 1) $(-\infty; -16{,}2)$; $(-16{,}2; -1{,}8)$; 3) $(-1{,}8; 0)$ и 4) $(0; +\infty)$.

Для определения знака второй производной в каждом из этих интервалов достаточно определить ее знак в произвольной точке этого интервала, так как при всех значениях x из данного интервала она имеет один и тот же знак. Последовательность знаков второй производной записывается так: $-$, $+$, $-$, $+$, и так как в каждом из двух соседних интервалов вторая производная имеет различные знаки, то найденные три критические точки второго рода — точки перегиба графика функции. Их координаты: 1) $(-16{,}2; -18{,}2)$; 2) $(-1{,}8; -2{,}64)$ 3) $(0, 0)$.

Прежде чем приступить к построению эскиза графика функции, определим взаимное расположение кривой и асимптоты.

Выясним, не пересекает ли кривая асимптоту. Для этого решим совместно их уравнения:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{x^2+2x+3} \\ y &= x-2 \end{aligned}\right\}. \tag{35,1}$$

Исключая y, получим, что $x-2=\frac{x^2}{x^2+2x+3}$, откуда

$$(x-2)(x^2+2x+3)=x^2;\ x=-6.$$

Подставляя это значение во второе уравнение системы (35,1), получим, что $y=-8$. Асимптота пересекает кривую в точке $(-6, -8)$.

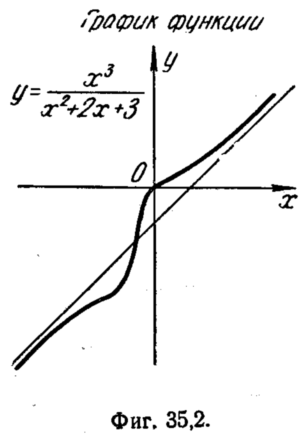
У нас $y_{\text{кр.}}=\frac{x^3}{x^2+2x+3}$; $y_{\text{ас.}}=x-2$;

$$\delta=y_{\text{кр.}}-y_{\text{ас}}=\frac{x^3}{x^2+2x+3}-(x-2)=\frac{x+6}{x^2+2x+3}.$$

Так как знаменатель положителен при любом x (корни его комплексны), то знак дроби зависит от знака числителя. Он будет положительным при $x+6>0$, т. е. при $x>-6$. Значит, при $x>-6$ кривая располагается над асимптотой.

Разность δ будет отрицательной, когда числитель дроби отрицательный, $x+6<0$, т. е. при $x<-6$, а кривая расположена ниже асимптоты при $x<-6$.

Теперь достаточно данных, чтобы начертить эскиз кривой (фиг. 35,2).



Фиг. 35,2.

Задача 35,3. Исследовать функцию $y=\frac{e^x}{x}$.

1. Определим область существования функции:

Функция существует при всех значениях x, кроме $x=0$, т. е. в интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. В этих интервалах функция непрерывна.

2. Исследуем вопрос об оси и центре симметрии кривой.

У нас $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$, а $f(-x)=\frac{e^{-x}}{-x}$ (ни одно из равенств $f(x)=f(-x)$ и $f(-x)=-f(x)$ не имеет места, т. е. у кривой не существует ни оси, ни центра симметрии).

3. Определим асимптоты графика функции.

а) Значение $x=0$ является точкой разрыва функции. Вертикальная асимптота имеет уравнение $x=0$ и, таким образом, ось Oy является вертикальной асимптотой кривой. При этом

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0}\frac{e^x}{x} = -\infty \quad \lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0}\frac{e^x}{x} = +\infty.$$

б) Определяем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty; \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x} = 0$$

и горизонтальная асимптота имеет уравнение $y=0$ (ось Ox является горизонтальной асимптотой).

в) Определим наклонные асимптоты, уравнение которых $y = kx+b$. По формуле (34,2)

$$k_1 = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{e^x}{x}}{x} = +\infty.$$

При $x\to +\infty$ наклонной асимптоты нет.

При $x\to -\infty$, $k_2 = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\frac{e^x}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x^2} = 0$, а это опять-таки говорит о том, что наклонной асимптоты у кривой нет.

4. Определяем интервалы монотонности функции:

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Находим критические точки:

1) Из уравнения $y'=0$, т. е. $\frac{e^x(x-1)}{x^2}=0$, следует, что $x-1=0$, а $x=1$;

2) $y'=\infty$ при $x=0$, но при $x=0$ функция не определена.

Таким образом, функция имеет критическую точку: $x=1$. Область существования функции она разделяет на интервалы: 1) $(-\infty, 0)$; 2) $(0, 1)$; 3) $(1, +\infty)$. В каждом из этих интервалов y' сохраняет знак. Беря в них произвольные значения x и вычислив при них y', получаем такую последовательность знаков производной: —, —, +.

Заключение. В первых двух интервалах функция убывает, в третьем возрастает. При $x=1$ функция достигает минимума, а $y_{\min} = y(1) = e$. Координаты точки экстремума $(1, e)$.

5. Теперь определим точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции:

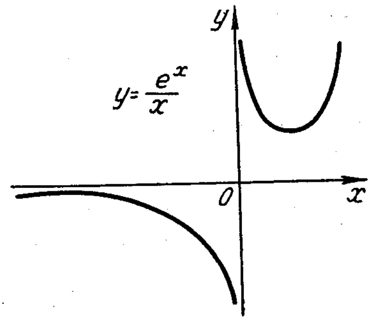
$$y'' = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}.$$

Определим критические точки второго рода:

Из уравнения $\frac{e^x(x-2x+2)}{x^3}=0$, учитывая, что $e^x \neq 0$ ни при одном конечном значении x, должно быть $x^2-2x+2=0$, т. е. $x=1 \pm i$. Значит, нет действительных значений x, при которых вторая производная равна нулю.

Определим те значения x, при которых $y''=\infty$. Таким единственным значением является $x=0$. Значит, имеется одна критическая точка второго рода $x=0$. Но точки перегиба при $x=0$ не может быть, так как при $x=0$ заданная функция не существует. Итак, точек перегиба график функции не имеет.

Для определения интервалов выпуклости и вогнутости графика функции рассмотрим знак y'' на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ Выбрав в каждом из них произвольное значение x и вычислив при нем y'', получим такую последовательность знаков второй производной: —, +. Значит, на интервале $(-\infty, 0)$ кривая выпуклая, а на интервале $(0, +\infty)$ кривая вогнута.



Фиг. 35,3.

Еще раз подчеркиваем, что несмотря на то, что переходя через $x=0$ вторая производная поменяла знак, точка $x=0$ не является точкой перегиба, так как при $x=0$ не существует заданная функция (фиг. 35,3).

Задача 35,4 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\frac{3x^3}{3x^2+4x+4}$ и построить эскиз графика.

Ответ. 1) Область существования функции — бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$: 2) функция непрерывна при любом x; 3) центра симметрии и оси симметрии нет; 4) вертикальных и горизонтальных асимптот нет; наклонная асимптота $y=x-\frac{4}{3}$; 5) экстремума нет, функция возрастает на всем интервале существования; 6) критические точки второго рода: а) $x_1=-6-2\sqrt{6}$, $y_1 \approx -4{,}5$; б) $x_2=-6+2\sqrt{6}$; $y^2 \approx -1{,}5$; в) $x_3=0$; $y_3=0$ является точками перегиба; 7) на интервале $(-\infty, -6-2\sqrt{6})$ кривая выпукла; на интервале $(-6-2\sqrt{6}; -6+2\sqrt{6})$ кривая вогнута; на интервале $(-6+2\sqrt{6}; 0)$ кривая выпукла, на интервале $(0, +\infty)$ кривая вогнута.

Задача 35,5 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\frac{x}{e^x}$ и построить эскиз графика.

Ответ. 1) Область определения — интервал $(-\infty, +\infty)$; 2) функция не относится ни к четным, ни к нечетным: график функции не имеет ни центра, ни оси симметрии; 3) в интервале $(-\infty, 0)$ $y<0$ кривая находится под осью Ox, в интервале $(0, +\infty)$ кривая расположена над осью Ox, а в точке $(0, 0)$ она пересекает координатные оси; 4) вертикальных и наклонных асимптот нет. Горизонтальная асимптота $y=0$ — ось Ox; 5) на интервале $(-\infty, 1)$ функция возрастает; на интервале $(1, +\infty)$ — убывает. При $x=1$ максимум, $y_{\max}\approx 0{,}37$; 6) на интервале $(-\infty, 2)$ $y''<0$ кривая выпукла, на интервале $(2, +\infty)$ $y''>0$ кривая вогнута. Точка перегиба: $x=2$; $y\approx 0{,}3$.

Задача 35,6 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ и построить эскиз кривой.

Ответ. 1) Область определения — два бесконечных интервала: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$; 2) точка разрыва одна: $x=1$; 3) функция не принадлежит ни к четным, ни к нечетным: кривая не имеет ни оси, ни центра симметрии; 4) асимптоты: вертикальная $x=1$; наклонная $y=x-1$; 5) критические точки первого рода: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$. В интервале $(-\infty, 0)$ $y'>0$ функция возрастает; в интервале $(0,1)$ $y'<0$ функция убывает; в интервале $(1,2)$ $y'<0$ функция убывает; в интервале $(2, +\infty)$ $y'>0$ функция возрастает. При $x=0$ функция имеет максимум: $y_{\max}=-2$; при $x=2$ функция имеет минимум: $y_{\min}=2$. Экстремальные точки $(0, -2)$ и $(2,2)$; 6) $y''=\frac{2}{(x-1)^3}$. Критическая точка второго рода $x=1$. Перегиба в ней быть не может, так как в этой точке функции не существует: точки перегиба нет. При $x<1$ $y''<0$: на интервале $(-\infty, 1)$ кривая выпукла; при $x>1$ $y''>0$: на интервале $(1, +\infty)$ кривая вогнута.

Задача 35,7 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3$ и построить эскиз ее графика.

Ответ. 1) Интервалы существования функции $(-\infty, -1)$; $(-,+\infty)$;

2) ни оси, ни центра симметрии кривая не имеет;

3) кривая пересекает ось Ox в точке $x=1$. В интервале $(-\infty, -1)$ кривая лежит над осью Ox, в интервале $(-1,1)$ — под осью Ox, а в интервале $(1, +\infty)$ — над осью Ox;

4) асимптоты: $x=-1$ — вертикальная, $y=1$ — горизонтальная;

5) критические точки первого рода; $x_1=-1$ и $x_2=1$. Значение $x=-1$ не должно рассматриваться, так как оно не принадлежит области существования функции; функция возрастает в интервалах, где она определена; экстремума нет;

6) критические точки второго рода: $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=3$. Значение $x_1=-1$ не должно рассматриваться: $y(-1)$ не сущест-

вует. В интервале $(-\infty, -1)$ кривая вогнута, в интервале $(-1, 1)$ — выпукла, в интервале $(1,3)$ — вогнута, а интервале $(3, +\infty)$ — выпукла. Точки перегиба: $x=1$ и $x=3$; их координаты: $(1, 0)$; $\left(3, \frac{1}{8}\right)$.

Задача 35,8 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=\frac{2x}{1+x^2}$ и построить эскиз графика.

Ответ. 1) Область определения — вся числовая ось;

2) функция — нечетная, кривая симметрична относительно начала координат;

3) горизонтальная асимптота $y=0$ — ось Ox. Других асимптот нет;

4) критические точки первого рода: $x_1=-1$ и $x_2=1$: в интервале $(-\infty, -1)$ функция убывает, в интервале $(-1, 1)$ — возрастает, в интервале $(1, +\infty)$ убывает; при $x=-1$ — минимум, $y_{\min}=-1$; при $x=1$ — максимум, $y_{\max}=1$. Экстремальные точки $(-1, -1)$ и $(1, 1)$;

5) критические точки второго рода

$$x_1=-\sqrt{3},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{3}$$

являются точками перегиба.

В интервале $(-\infty, -\sqrt{3})$ $y''<0$ кривая выпукла, в интервале $(-\sqrt{3}, 0)$ $y''>0$ кривая вогнута, в интервале $(0, \sqrt{3})$ $y''<0$ — кривая выпукла, в интервале $(\sqrt{3}, +\infty)$ $y''>0$ кривая вогнута;

6) при $x<0$ кривая расположена под осью Ox, а при $x>0$ — над осью Ox.

Задача 35,9 (для самостоятельного решения). Исследовать функцию $y=x\ln x$ и построить эскиз ее графика.

Ответ. 1) Область существования функции — интервал $(0, +\infty)$: функция определена только при положительных значениях x;

2) ни оси симметрии, ни центра симметрии нет;

3) асимптот нет;

4) критическая точка первого рода $x=e^{-1}$. В интервале $(0, e^{-1})$ функция убывает, в интервале $(e^{-1}, +\infty)$ — возрастает. При $x=e^{-1}$ минимум: $y_{\min}=-e^{-1}$ 5) $y''=\frac{1}{x}$. Критическая точка второго рода $x=0$ не принадлежит области существования функции. Точек перегиба нет. Во всей области существования функции $y''>0$. Кривая выпукла. 6) Кривая пересекает ось Ox в точке $x=1$. При $0<x<1$ кривая находится под осью Ox, а при $x>1$ — над осью Ox.

ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Геометрические приложения производной: уравнения касательной и нормали к плоской кривой. Длины касательной и нормали. Подкасательная и нормаль и их длины. Кривизна, радиус кривизны. Центр кривизны. Соотношение между радиусом кривизны и длиной нормали. Эволюта кривой.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Касательная к кривой

а) Если кривая определена уравнением $y = f(x)$, то уравнение касательной к ней в точке M с координатами (x_1, y_1) имеет вид

$$y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1). \tag{36,1}$$

б) Если кривая задана уравнением $f(x, y) = 0$, то уравнение касательной, проведенной в точку $M(x_1, y_1)$ на ней, имеет вид

$$y - y_1 = y'(x_1, y_1)(x - x_1), \tag{36,2}$$

где $y'(x_1, y_1)$ есть производная неявной функции $f(x, y) = 0$, в которой буквы x и y заменены числами x_1 и y_1 — координатами точки касания.

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{36,3}$$

то касательная к этой кривой в точке, соответствующей значению параметра $t = t_1$, определяется уравнением

$$y - y_1 = y'_x(t_1)(x - x_1), \tag{36,4}$$

причем $y'_x(t_1)$ определяется по формуле (27,3), и в полученном выражении буква t заменяется числом t_1. Числа же x_1 и y_1 находятся из (36,3), если там заменить букву t числом t_1.

2. Нормаль к кривой

а) Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то нормаль к ней в точке $M(x_1, y_1)$ имеет уравнение

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1). \tag{36,5}$$

б) Если кривая задана уравнением $f(x, y) = 0$, то уравнение нормали записывается так:

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1, y_1)}(x - x_1). \tag{36,6}$$

в) В случае, если кривая задана параметрическими уравнениями, то нормаль к ней в точке, где параметр $t = t_1$, имеет уравнение

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'_x(t_1)}(x - x_1). \qquad (36{,}6a)$$

3. Длины касательной и нормали. Подкасательная и поднормаль

Определение. *Длиною касательной или нормали к кривой в точке $M(x_1, y_1)$ называется длина отрезка этих прямых от точки касания до точки их пересечения с осью Ox. Эти длины обозначаются соответственно буквами T и N. Подкасательная и поднормаль являются соответственно проекциями отрезков T и N на ось Ox.* Их длины будем обозначать: S_T и S_N. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то для определения длин этих отрезков служат формулы:

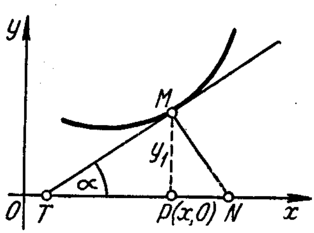
$$T = \left| \frac{y'}{y'(x_1)} \sqrt{1 + [y'(x_1)]^2} \right|; \qquad (36{,}7)$$

$$S_T = \left| -\frac{y_1}{y'(x_1)} \right|; \qquad (36{,}8)$$

$$N = \left| y_1 \sqrt{1 + [y'(x_1)]^2} \right|;$$

$$S_N = |y_1 \cdot y'(x_1)|. \qquad (36{,}9)$$

Касательную и нормаль легко построить, если соединить конец подкасательной T и конец поднормали N с точкой касания M на кривой. Но для определения положения на оси Ox точек T и N — концов подкасательной и поднормали (фиг. 36) недостаточно знать длины этих отрезков, определяемые по формулам (36,8) и (36,10), а необходимо еще знать направление, в котором надо отложить длины этих отрезков от точки P для получения точек T и N. Условимся считать подкасательную PT и поднормаль PN положительными или отрицательными, смотря по тому, будут ли направления от P к T и от P к N совпадать с положительным или отрицательным направлением оси Ox. По величине и по знаку $PN = y_1 y'(x_1)$, а $PT = -\frac{y_1}{y'(x_1)}$.



Фиг. 36.

Отсюда следует, что PT и PN имеет противоположные знаки, так как произведение $y_1 y'(x_1)$ и частное $\frac{y_1}{y'(x_1)}$ имеют один и тот же знак.

Если окажется, что $PT > 0$, то точка T лежит с положительной стороны, а точка N — с отрицательной стороны от P. Противоположное расположение получим, когда $PT < 0$. Иначе: точка T лежит с положительной стороны от P, а точка N — с отрицательной, если y_1 и $y'(x)$ имеют разные знаки, а противоположное расположение этих точек имеет место тогда, когда y_1 и $y'(x_1)$ имеют одинаковые знаки.

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями, для определения величин T, N, S_T и S_N следует сначала по заданному в точке касания значению параметра $t = t_1$ определить координаты точки касания x_1 и y_1, вычислить y'_x в точке касания при $t = t_1$, а затем воспользоваться формулами (36,7)—(36,10), причем в них следует заменить $y'(x_1)$ на $y'_x(t_1)$.

В случае, если уравнение кривой задано в виде $f(x, y) = 0$, в тех же формулах надо значение производной $y'(x_1)$ заменить на $y'(x_1, y_1)$, где x_1 и y_1 — по-прежнему координаты точки касания.

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$, то длиной ее касательной и нормали считается длина отрезков этих линий от точки касания $M(r_1, \varphi_1)$ до точки пересечения их с прямой, проходящей через полюс перпендикулярно к радиусу-вектору, проведенному в точку касания. Эти отрезки называются полярной касательной и полярной нормалью. Проекции этих отрезков на указанную прямую называются полярной подкасательной и полярной поднормалью. Длины этих четырех отрезков вычисляются по формулам:

$$T = \left| \frac{r_1}{r'(\varphi_1)} \sqrt{r_1^2 + [r'(\varphi_1)]^2} \right|; \tag{36,11}$$

$$N = \left| \sqrt{r_1^2 + [r'(\varphi_1)]^2} \right|; \tag{36,12}$$

$$S_T = \frac{r_1^2}{|r'(\varphi_1)|}; \tag{36,13}$$

$$S_N = |r'(\varphi_1)|. \tag{36,14}$$

Во всех этих формулах r_1 и φ_1 — полярные координаты точки касания.

4. Кривизна и радиус кривизны

а) Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то ее кривизна K и радиус кривизны R определяются по формулам

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{36,15}$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}. \tag{36,16}$$

Входящий в эти формулы $\sqrt{1+y'^2}$ берется со знаком плюс. Кривизна и радиус кривизны кривой, по определению — величины не отрицательные.

б) В случае, если кривая задана параметрическими уравнениями (36,3), то в точке, для которой параметр $t = t_1$,

$$K = \frac{|y''(t_1)x'(t_1) - x''(t_1)y'(t_1)|}{[x'^2(t_1) + y'^2(t_1)]^{\frac{3}{2}}}, \tag{36,17}$$

$$R = \frac{[x'^2(t_1) + y'^2(t_1)]^{\frac{3}{2}}}{|y''(t_1)x'(t_1) - x''(t_1)y'(t_1)|}, \tag{36,18}$$

причем берется только положительное значение корня $\sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1)}$.

в) Если кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r = f(\varphi),$$

$$K = \frac{\left|r_1^2 + 2r'^2(\varphi_1) - r_1 r''(\varphi_1)\right|}{\left[r_1^2 + r'^2(\varphi_1)\right]^{\frac{3}{2}}}; \tag{36,19}$$

$$R = \frac{\left[r_1^2 + r'^2(\varphi_1)\right]^{\frac{3}{1}}}{\left|r_1^2 + 2r'^2(\varphi_1) - r_1 r''(\varphi_1)\right|}, \tag{36,20}$$

где r_1 и φ_1 — полярные координаты точки, в которой вычисляются K и R, а $\sqrt{r_1^2 + r'^2(\varphi_1)}$ следует брать со знаком плюс.

5. Круг кривизны. Центр кривизны. Эволюта и эвольвента

Координаты α и β центра кривизны в точке $M(x_1, y_1)$ кривой определяются по формулам

$$\begin{cases} \alpha = x_1 - \dfrac{y'(x_1)(1 + y'^2(x_1))}{y''(x_1)}, \\ \beta = y_1 + \dfrac{1 + y'^2(x_1)}{y''(x_1)}. \end{cases} \tag{36,21}$$

В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями (36,3), координаты центра кривизны в ее точке M, соответствующей значению параметра $t = t_1$, определяются по формулам

$$\begin{cases} \alpha = x(t_1) - \dfrac{y'_t(t_1)\left[x'^2_t(t_1) + y'^2_t(t_1)\right]}{x'_t(t_1)\,y''_{t^2}(t_1) - x''_{t^2}(t_1)\,y'_t(t_1)}; \\ \beta = y(t_1) + \dfrac{x'_t(t_1)\left[x'^2_t(t_1) + y'^2_t(t_1)\right]}{x'_t(t_1)\,y''_{t^2}(t_1) - x''_{t^2}(t_1)\,y'_t(t_1)}. \end{cases} \tag{36,22}$$

Формулы (36,22) применимы и тогда, когда кривая задана полярным уравнением $r = f(\varphi)$. Так как в полярных координатах

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то, подставляя сюда $r = f(\varphi)$, получим $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$, и параметром теперь является полярный угол φ.

Определение. *Геометрическое место центров кривизны данной кривой называется ее эволютой. По отношению к своей эволюте исходная кривая называется эвольвентой.*

Если в формулах (36,21) опустить индекс у x_1 и y_1 и заменить y на $f(x)$, а в формулах (36,22) опустить индекс у t, то эти формулы можно считать параметрическими уравнениями эволюты, причем в первом случае параметром является x, во втором — t.

Исключение параметра x из уравнений (36,21) или параметра t из уравнений (36,22) определит эволюту неявным уравнением

$$F(\alpha,\ \beta) = 0.$$

Задача 36, 1. Для параболы $y^2 = 2px$ в произвольной ее точке $M(x_1,\ y_1)$ найти уравнение касательной и нормали, длины подкасательной и поднормали, длины касательной и нормали, радиус кривизны, координаты центра кривизны и эволюту.

Решение. Прежде всего из уравнения параболы определим y' и y'' в точке с координатами $(x_1,\ y_1)$: $2yy' = 2p$; $y' = \frac{p}{y}$; $y'(x_1,\ y_1) = \frac{p}{y_1}$; $y'' = -\frac{p}{y^2}y'$.

Подставляя сюда найденное значение y', получим $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$, $y''(x_1,\ y_1) = -\frac{p^2}{y_1^3}$. Подставляя $y'(x_1,\ y_1)$ в уравнение касательной (36,1), получим

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1), \text{ или } yy_1 - y_1^2 = px - px_1. \tag{36,23}$$

Так как точка $M(x_1,\ y_1)$ лежит на параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, а потому

$$y_1^2 = 2px_1. \tag{36,24}$$

Используем эту зависимость для упрощения уравнения (36,23) касательной. Для этого в его правой части прибавим и отнимем px_1 и получим

$$yy_1 - y_1^2 = px + px_1 - px_1 - px_1,$$

или

$$yy_1 - y_1^2 = p(x + x_1) - 2px_1,$$

а с учетом того, что $y_1^2 = 2px_1$, уравнение касательной запишется в виде

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Подставляя значение производной $y'(x_1y_1)$ в уравнение (35,5), получим уравнение нормали

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{p}{y_1}}(x - x_1),$$

которое после упрощений запишется так:

$$y_1(x - x_1) + p(y - y_1) = 0.$$

Формула (36,8) дает для длины подкасательной

$$S_T = \left|-\frac{y_1}{\frac{p}{y_1}}\right|; \quad S_T = \left|-\frac{y_1^2}{p}\right|. \qquad (36,25)$$

Используя равенство (36,24), получим, что $S_T = |-2x_1|$, т. е. длина подкасательной параболы равна удвоенной абсциссе точки касания. Так как в (36,25) $-\frac{y_1^2}{p}$ отрицательное число, то для построения подкасательной ее длину $2x_1$ надо отложить от основания ординаты точки касания в отрицательном направлении оси Ox. Соединив конец подкасательной с точкой касания, получим касательную к параболе.

Из того, что $y' = \frac{p}{y_1}$, следует, что $y_1y'(x_1, y_1) = p$.

Так как левая часть этого равенства, взятая по абсолютной величине, на основании (36,10) есть длина поднормали, то мы заключаем, что у параболы длина поднормали есть величина постоянная, равная параметру параболы. Так как $p > 0$, то мы получим поднормаль, если отложим по оси Ox в положительном ее направлении от основания ординаты точки касания отрезок, равный параметру параболы. Соединив конец этого отрезка с точкой касания, получим нормаль к параболе. Получить самостоятельно по формулам (36,6) и (36,9), что длины касательной и нормали равны

$$T = \left|\frac{y_1}{p}\sqrt{y_1^2 + p^2}\right|; \quad N = \sqrt{y_1^2 + p^2}.$$

Радиус кривизны определим по формуле (36,16), подставив в нее y' и y'':

$$R = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y_1^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|-\frac{p^2}{y_1^3}\right|}; \quad R = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Самостоятельно докажите, что радиус кривизны в любой точке параболы $y^2 = 2px$ равен кубу длины нормали, проведенной в эту точку, разделенному на квадрат ее параметра, т. е.

$$R = \frac{N^3}{p^2}.$$

Координаты центра кривизны находим по формулам (36,21) с учетом найденных значений y' и y'':

$$\alpha = x_1 - \frac{\frac{p}{y_1}\left[1 + \frac{p^2}{y_1^2}\right]}{-\frac{p^2}{y_1^3}}; \quad \beta = y_1 + \frac{1 + \frac{p^2}{y_1^2}}{-\frac{p^2}{y_1^3}},$$

и после упрощений

$$\alpha = \frac{px_1 + y_1^2 + p^2}{p}; \quad \beta = -\frac{y_1^3}{p^2}.$$

Эволюта параболы. В последних уравнениях опустим индексы у x и y и, учитывая, что из уравнения параболы $y^2 = 2px$, а $y = \pm\sqrt{2px}$, получим

$$\alpha = \frac{px + 2px + p^2}{p}; \ \alpha = 3x + p; \ \beta = -\frac{\pm 2px\sqrt{2px}}{p^2};$$

$$\beta = \pm\frac{2px\sqrt{2px}}{p^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} (\alpha - p)^3 &= 27x^3 \\ \beta^2 &= \frac{8x^3}{p} \end{aligned}\right\}.$$

Это и есть параметрические уравнения эволюты параболы, а параметром является x. Чтобы исключить параметр x, разделим почленно первое уравнение на второе и получим, что

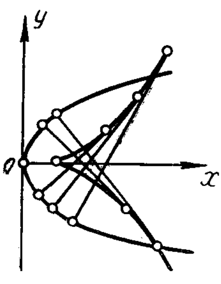
$$\frac{(\alpha - p)^3}{\beta^2} = \frac{22p}{8},$$

а отсюда получается уравнение эволюты в виде

$$\beta^2 = \frac{8}{27p}(\alpha - p)^3.$$

Текущими координатами здесь являются α и β. Обозначая их, как обычно, через x и y, получим

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3.$$



Фиг. 36,1.

Это полукубическая парабола. вершина которой находится в точке $(p, 0)$ (фиг. 36,1).

Задача 36, 2. Для эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

найти в произвольной точке на нем $M(x_1,\ y_1)$:

1) уравнения касательной и нормали;
2) длины подкасательной и поднормали;
3) радиус кривизны;
4) координаты центра кривизны;
5) эволюту.

Решение. Запишем уравнение эллипса в неявном виде:

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

и найдем y' и y'' по правилу дифференцирования неявных функций:

$$2b^2x+2a^2yy'=0;\quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y};\quad y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

В точке касания $M(x_1,\ y_1)$

$$y'(x_1,\ y_1)=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1};\quad y''(x_1,\ y_1)=-\frac{b^4}{a^2y_1^3}.$$

Уравнение касательной по формуле (36,2) запишется так:

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

или

$$b^2x_1x+a^2y_1y=b^2x_1^2+a^2y_1^2.$$

Так как точка $M(x_1,\ y_1)$ лежит на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса, а потому $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$, и уравнение касательной запишется так:

$$b^2x_1x+b^2y_1y=a^2b^2,$$

или после деления обеих частей этого уравнения на a^2b^2

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

Уравнение нормали получите самостоятельно по формуле (36,6). Оно будет таким:

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=c^2\ (c^2=a^2-b^2).$$

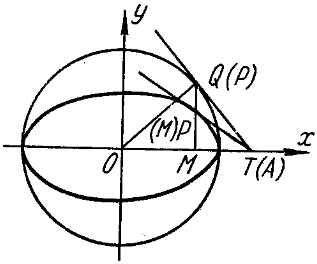
Длина подкасательной найдется по формуле (36,8);

$$S_T=\left|-\frac{y_1}{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}}\right|=\left|\frac{a^2y_1^2}{b^2x_1}\right|,$$

но $a^2y_1^2 = a^2b^2 - b^2x_1^2 = b^2(a^2 - x_1^2)$, а потому

$$S_T = \left|\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}\right|,$$

и, таким образом, длина подкасательной не зависит от b — малой полуоси эллипса. Это значит, что у эллипсов, имеющих одну общую ось $2a$, их подкасательные в точках с одинаковыми абсциссами, равны между собой (фиг. 36,2). Длина поднормали на основании формулы (36,10)



Фиг. 36,2.

$$S_N = \left| y_1\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)\right| = \left|-\frac{b^2}{a^2}x_1\right|.$$

По формуле (36,16) определится радиус кривизны

$$R = \frac{\left(a^4y_1^2 + b^4x_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

а по формулам (36,21) координаты центра кривизны

$$\alpha = x_1 - \frac{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\left(1 + \frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2}\right)}{-\frac{b^4}{a^2y_1^3}} = x_1 - \frac{\left(a^4y_1^2 + b^4x_1^2\right)x_1}{a^4b^2};$$

$$\beta = y_1 + \frac{1 + \frac{b^4x_1^2}{a^4y_1^2}}{-\frac{b^4}{a^2y_1^3}} = y_1 - \frac{\left(a^4y_1^2 + b^4x_1^2\right)y_1}{a^2b^4}.$$

Теперь получим уравнение эволюты эллипса: в последних двух формулах для вычисления α и β опустим индекс у x и y и получим, что

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,x}{a^4b^2}, \\ \beta = y - \dfrac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}. \end{cases}$$

Постараемся с помощью уравнения эллипса исключить из последних двух равенств x и y. Из уравнення эллипса следует, что

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2,$$

$$b^2x^2 = a^2b^2 - a^2y^2.$$

В выражениях для α и β заменим a^2y^2 и b^2x^2 по этим формулам, в правых частях выполним вычитание, раскроем скобки и, учитывая, что у эллипса $a^2-b^2=c^2$, получим после очевидных сокращений, что

$$\alpha=\frac{c^2x^3}{a^4};\quad \beta=-\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

Перепишем их в виде

$$a\alpha=\frac{c^2x^3}{a^3};\quad b\beta=-\frac{c^2y^3}{b^3}$$

и возьмем каждое из этих равенств в степень $\frac{2}{3}$.

Получаем

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}=\frac{c^{\frac{4}{3}}x^2}{a^2};\ (b\beta)^{\frac{2}{3}}=\frac{c^{\frac{4}{3}}y^2}{b^2}$$

и сложим их почленно:

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Но из уравнения эллипса следует, что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

а потому

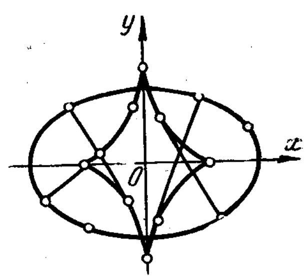
$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$

Это и есть уравнение эволюты эллипса. Здесь α и β — текущие координаты.

Если их обозначить через x и y, то уравнение эволюты перепишется в виде

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}.$$

Кривая, определяемая этим уравнением, напоминает астроиду и получается из нее растяжением по вертикали (см. фиг. 36,3).



Фиг. 36,3.

Задача 36, 3 (для самостоятельного решения). Взять параметрические уравнения эллипса в виде

$$x=a\cos t;\quad y=b\sin t$$

и доказать, что в точке, соответствующей значению параметра $t = t_1$, имеют место следующие равенства:

$$S_T = |a \sin t_1 \operatorname{tg} t_1|; \; S_N = \left| -\frac{b^2}{a} \cos t_1 \right|;$$

$$T = |-\operatorname{tg} t_1 \sqrt{a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1}|;$$

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1};$$

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1)^{\frac{3}{2}}}{ab};$$

$$\alpha = \frac{c^2}{a} \cos^3 t_1; \quad \beta = -\frac{c^2}{b} \sin^3 t_1.$$

Пользуясь выражением для радиуса кривизны, доказать, что в вершинах эллипса $\left(t = 0 \text{ и } t = \frac{\pi}{2}\right)$ радиус кривизны

$$(R)_{t=0} = \frac{b_2}{a}; \quad (R)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{b},$$

а координаты центра кривизны в этих точках:

$$(a)_{t=0} = \frac{c^2}{a}; \; (\beta)_{t=0} = 0; \; (\alpha)_{t=\frac{\pi}{2}} = 0; \; (\beta)_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{c^2}{b}.$$

Задача 36, 4 (для самостоятельного решения). Пользуясь результатами предыдущей задачи, доказать, что у эллипса радиус кривизны равен кубу нормали, разделенному на квадрат параметра эллипса.

Указание. Параметром p эллипса называется половина длины его хорды, проведенной через фокус перпендикулярно большой оси: $p = \frac{b^2}{a}$.

Задача 36, 5 (для самостоятельного решения). Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = 3x^4 - 5x^2 + 4$ в точке $x = -1, \; y = 2$.

Ответ. Уравнение касательной:

$$2x + y = 0.$$

Уравнение нормали:

$$x - 2y + 5 = 0.$$

Задача 36, 6. Найти уравнения касательной и нормали к кривой

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$$

в точке (—2,3).

Решение. Уравнение кривой задано в неявной форме. Находим производную по правилу дифференцирования неявной функции:

$$12x^2 - 3y^2 - 6xyy' + 12x - 5y - 5xy' - 16yy' + 9 = 0;$$

$$y' = \frac{12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y + 9}{6xy + 5x + 16y}; \quad y'(-2,\ 3) = -\frac{9}{2}.$$

Уравнение касательной

$$9x + 2y + 12 = 0;$$

уравнение нормали

$$2x - 9y + 31 = 0.$$

Задача 36, 7. Найти уравнение касательной и нормали кривой

$$\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$$

в точке, где $t = 3$.

Решение. Для того чтобы воспользоваться формулами (36,4) и (35,6*a*), надо определить x_1, y_1 и $y'(t)$ при $t = 3$. Определим прежде всего x_1 и y_1:

$$x_1 = 3 \cdot 3 - 5 = 4,$$

$$y_1 = 3^2 - 4 = 5.$$

После этого находим y'_x производную в точке, где

$$t = 3; \quad y'_t = 2t; \quad x'_t = 3; \quad y'_x = \frac{2t}{3}; \quad y'_x(3) = 2.$$

Уравнение касательной $y - 5 = 2(x - 4)$, или $2x - y - 3 = 0$.

Уравнение нормали $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 4)$, или $x + 2y - 14 = 0$.

Задача 36, 8 (для самостоятельного решения). Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$\begin{cases} x = 2\cos t + 3\sin t \\ y = \cos t + 2\sin t \end{cases}$$

в точке, где $t = \frac{\pi}{2}$.

Ответ. Уравнение касательной $x - 2y + 1 = 0$;
уравнение нормали $2x + y - 8 = 0$.

Задача 36, 9 (для самостоятельного решения). Найти уравнение касательной и нормали к гиперболе

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

в точке на ней $(x_1,\ y_1)$.

Ответ. Уравнение касательной $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$;

уравнение нормали $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = c^2\ (c^2 = a^2 + b^2)$.

Задача 36, 10. Для циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \tag{36,26}$$

в точке, где $t = t_1$, определить:

1) уравнения касательной, нормали и длину поднормали;

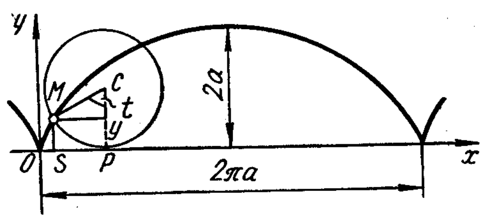
2) доказать, что нормаль в произвольной точке циклоиды проходит через точку касания производящего круга, а касательная — через соответствующую ей высшую точку этого круга;

3) доказать, что у циклоиды радиус кривизны имеет длину в два раза большую, чем соответствующая нормаль:

4) определить координаты центра кривизны и доказать, что эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная данной *, но перемещенная на отрезок $a\pi$ в положительном направлении оси Ox и на отрезок $2a$ в отрицательном направлении оси Oy.

Решение. Если круг радиуса a катится без скольжения по прямой, то всякая точка, лежащая на его окружности, описывает кривую, которая называется циклоидой. Уравнения (36,26) есть параметрические уравнения циклоиды. Примем прямую, по которой катится круг, за ось Ox.

Если в исходном положении точка, вычерчивающая циклоиду, находилась в начале координат, а центр катящегося круга был на оси Oy, то параметр t есть центральный угол, соответствующий дуге, на которую прокатился круг по оси Ox.



Фиг. 36,4.

Циклоида состоит из конгруэнтных арок, каждая из которых соответствует одному полному обороту производящего круга. Расстояние на оси Ox между началом и концом одной арки равно длине окружности производящего циклоиду круга, т. е. $2\pi a$. Когда точка описывает одну полную арку циклоиды, параметр t изменяется от $t = 0$ до $t = 2\pi$ (фиг. 36,4).

1) Пусть при $t = t_1$ $x = x_1$, $y = y_1$, причем

$$x_1 = a(t_1 - \sin t_1); \quad y_1 = a(1 - \cos t_1). \tag{36,26a}$$

* Две геометрические фигуры называются конгруэнтными, если одну из них можно совместить с другой, изменив только в результате некоторого движения ее положение на плоскости.

Чтобы найти уравнения касательной и нормали на основании (36,4) и (36,6а), найдем y'_x при $t = t_1$:

$$y'_t = a\sin t; \quad x'_t = a(1 - \cos t);$$

$y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, а в точке, где $t = t_1$, $y'_x(t_1) = \operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}$.

Уравнение касательной $y - y_1 = \operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}(x - x_1)$;

уравнение нормали $y - y_1 = -\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}(x - x_1)$.

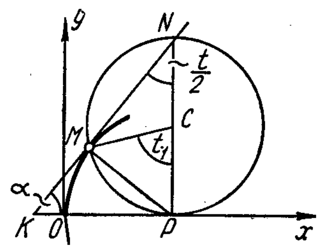
Длина поднормали находится по формуле (36,10):

$$S_N = \left|y_1 \cdot \operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}\right|.$$

Но $y_1 = a(1 - \cos t_1)$, а потому

$$S_N = \left|a(1 - \cos t_1)\operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}\right|; \quad S_N = |a \sin t_1|,$$

т. е длина поднормали равна проекции на ось Ox радиуса производящего круга (фиг. 36,4).



Фиг. 36,5.

2) Точка P касания производящего круга с осью Ox (фиг. 36,5) имеет координаты at_1 и 0: $P(at_1\ 0)$. Покажем, что нормаль в точке M проходит через эту точку. Для этого надо доказать, что координаты этой точки удовлетворяют уравнению нормали. Подставляя координаты этой точки вместо текущих координат x и y в уравнение нормали, а вместо x_1 и y_1 их выражения из (36,26а), получим в левой части уравнения

$$0 - a(1 - \cos t_1) = -2a\sin^2\frac{t_1}{2},$$

а в правой части

$$-\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}[at_1 - a(t_1 - \sin t_1)] = -\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}(at_1 - at_1 + a\sin t_1) =$$

$$= -a\operatorname{tg}\frac{t_1}{2}\sin t_1 = -2a\sin^2\frac{t_1}{2}.$$

Таким образом, координаты точки P удовлетворяют уравнению нормали и, значит, нормаль в точке M проходит через точку касания производящего круга P (at_1, 0). Касательная же необходимо пройдет через противоположную точку N диаметра PN, так как касательная перпендикулярна нормали, проведенной в точку касания (в окружности вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой).

3) Найдем радиус кривизны циклоиды по формуле (36,18) и длину ее нормали по формуле (36,9). Из уравнений циклоиды (36,26) следует, что

$$x'(t) = a(1 - \cos t); \quad y'(t) = a \sin t;$$
$$x''(t) = a \sin t; \qquad y''(t) = a \cos t.$$

Заменяя здесь t на t_1 и подставляя в (36,18), получим, что

$$R = \frac{[a^2(1-\cos t_1)^2 + a^2 \sin^2 t_1]^{\frac{3}{2}}}{[a^2 \cos t_1 (1-\cos t_1) - a^2 \sin^2 t_1]} = \frac{(2a^2 - 2a^2 \cos t_1)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos t_1)},$$

$$R = \frac{2^{\frac{3}{2}} a^2 (1-\cos t_1)^{\frac{3}{2}}}{a^2(1-\cos t_1)}; \quad R = 2\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t_1};$$

$$R = 4a\left|\sin\frac{t_1}{2}\right|. \qquad (36,27)$$

По формуле (36,9), полагая в ней $y_1 = a(1-\cos t_1)$, будем иметь $y'_x(t_1) = \operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}$.

Получим, что длина нормали

$$N = a\left|(1-\cos t_1)\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{t_1}{2}}\right|;$$

$$N = 2a\sin^2\frac{t_1}{2}\left|\operatorname{cosec}\frac{t_1}{2}\right|;$$

$$N = 2a\left|\sin\frac{t_1}{2}\right|. \qquad (36,28)$$

Из формул (36,27) следует, что

$$\frac{R}{N} = 2, \text{ или } R = 2N,$$

т. е. радиус кривизны в произвольной точке циклоиды равен удвоенной длине, соответствующей нормали.

4) Координаты центра кривизны определяются по формулам (36,22). Подставляя в них ранее найденные значения x'_t, x''_t, y'_t, y''_t, вычисленные в точке, где $t = t_1$, и учитывая (36,26а), получим, что

$$\alpha = a(t_1 + \sin t_1);$$
$$\beta = -a(1-\cos t_1).$$

Если в этих формулах опустить индекс у t_1, то получим уравнение эволюты циклоиды

$$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t), \\ \beta = -a(1-\cos t). \end{cases}$$

Если теперь взять $t = \pi + \tau$, то уравнение эволюты циклоиды запишется так:

$$\alpha = a\pi + a(\tau - \sin\tau);$$
$$\beta = -2a + a(1 - \cos\tau).$$

Из этих формул мы заключаем, что эволюта циклоиды есть циклоида такая же, как данная, но смещенная на отрезок $a\pi$ в положительном направлении оси Ox и на отрезок $2a$ в отрицательном направлении оси Oy.

Циклоида обладает замечательным механическим свойством: материальная точка, двигаясь по этой кривой, достигает заданной на ней точки, затрачивая на это одно и то же время, независимо от того, из какой исходной точки кривой началось движение.

Задача 36.11 (для самостоятельного решения). Найти радиус кривизны и эволюту астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

в произвольной ее точке, где $t = t_1$.

Указание. Астроида — кривая, описываемая точкой окружности радиуса a, которая катится без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса, в четыре раза большего, т. е. равного $4a$*.

Ответ. $R = \frac{3}{2} a \sin 2t_1$; $\alpha = a\cos t_1 (1 + 2\sin^2 t_1)$; $\beta = a\sin t_1 (1 + 2\cos^2 t_1)$.

Уравнение эволюты $(\alpha + \beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha - \beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$.

Если повернуть координатные оси на 45° вокруг начала координат, то можно усмотреть, что эволютой астроиды является опять-таки астроида, образованная кругами, радиусы которых в два раза больше исходных. Докажите это.

Задача 36, 12. Найти угол между касательной и радиусом-вектором произвольной точки спирали Архимеда

$$r = a\varphi.$$

Решение. Спираль Архимеда представляет собой траекторию точки M, которая равномерно движется по прямой ON в то время, как сама эта прямая равномерно вращается вокруг точки O (полюса). Предполагается, что в начальный момент дви-

---

* Уравнение астроиды в прямоугольных координатах $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

жения точка M находилась в полюсе полярной системы координат, а прямая ON совпадала с полярной осью (фиг. 36, 6).

Известно, что угол μ между радиусом-вектором произвольной точки кривой $r = r(\varphi)$ и касательной к ней в этой точке определяется по формуле

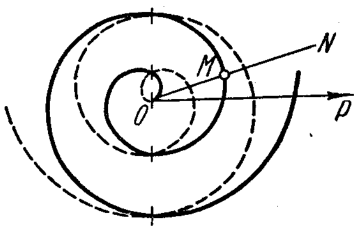
$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'}, \tag{36,29}$$

где r' есть производная от r по φ.

Подставляя в эту формулу из уравнения спирали Архимеда $r = a\varphi$ и $r' = a$, получим, что

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a\varphi}{a} = \varphi, \text{ а } \mu = \operatorname{arctg} \varphi. \tag{36,30}$$

Число a в уравнении спирали Архимеда называется параметром. Полученный результат показывает, что μ не зависит от a. Это значит, что все спирали Архимеда пересекают радиусы-векторы, соответствующие одному и тому же значению полярного угла, под одним и тем же углом. Интересно подметить и такую особенность: когда $\varphi \to \infty$, то из (36,30) следует, что $\mu \to \frac{\pi}{2}$, а это означает, что по мере развертывания спирали она стремится стать нормальной к своим радиусам-векторам.



Фиг. 36,6.

Задача 36,13. Определить полярные поднормаль и подкасательную спирали Архимеда в произвольной точке спирали (r_1, φ_1).

Решение. По формулам (36,13) и (36,14) находим, что длина полярной поднормали $S_N = a$, а длина полярной подкасательной

$$S_T = a\varphi_1^2 = a\varphi_1 \cdot \varphi_1 = r_1\varphi_1.$$

Из этого заключаем, что полярная поднормаль спирали Архимеда есть величина постоянная, равная ее параметру, и что концы всех поднормалей лежат на окружности радиуса a с центром в полюсе. Рассматривая длину полярной подкасательной, приходим к выводу, что она равна длине дуги окружности радиуса r_1, соответствующей центральному углу, равному φ_1. В частности, в точке, где спираль вторично (после полюса) пересекает положительное направление полярной оси (в этой точке $\varphi_1 = 6\pi$), длина полярной подкасательной равна длине окружности, радиус которой равен радиусу-вектору этой точки.

Задача 36,14 (для самостоятельного решения). Определить радиус кривизны спирали Архимеда в произвольной ее точке.

Ответ. $R = \dfrac{a(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{2+\varphi^2}$.

Задача 36, 15 (для самостоятельного решения). Доказать, что подкасательная гиперболической спирали $r = \frac{a}{\varphi}$ имеет постоянную длину, равную a.

Задача 36, 16 (для самостоятельного решения). Для логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ определить в ее произвольной точке:

1) угол между радиусом-вектором касательной в этой точке;
2) длину полярной подкасательной поднормали;
3) длину полярной касательной и нормали.

Ответ. 1) Логарифмическая спираль пересекает все свои радиусы-векторы под одним и тем же углом μ: $\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{\ln a}$. Например, спираль $r = e^{\varphi}$ пересекает все свои радиусы-векторы под углом 45°. 2) $S_T = \frac{r}{\ln a}$; $S_N = r \ln a$. 3) $T = \sqrt{1 + \frac{1}{\ln^2 a}} \cdot r$; $N = \sqrt{1 + \ln^2 a} \cdot r$.

Задача 36, 17. Доказать, что радиус кривизны в произвольной точке логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ пропорционален радиусу-вектору этой точки и равен $R = r\sqrt{1 + \ln^2 a}$ (сопоставляя величину R с длиной полярной нормали, найденной в задаче 36, 16, приходим к выводу, что радиус кривизны в произвольной точке логарифмической спирали равен полярной нормали в этой точке).

Задача 36, 18 (для самостоятельного решения). Доказать, что эволюта логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ есть так же логарифмическая спираль, конгруэнтная данной, но повернутая относительно ее на некоторый угол.

Указание. С помощью формул, связывающих прямоугольные координаты с полярными ($x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$), уравнение логарифмической спирали записать в виде

$$\begin{cases} x = a^{\varphi}\cos\varphi, \\ y = a^{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$$

и по формулам (36, 22) определить координаты центра кривизны произвольной точки (r_1, φ_1) логарифмической спирали. Получится, что

$$\begin{cases} \alpha = -a^{\varphi_1}\sin\varphi_1 \ln a, \\ \beta = a^{\varphi_1}\cos\varphi_1 \ln a. \end{cases}$$

Радиус-вектор центра кривизны

$$r_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{a^{2\varphi_1}\ln^2 a\,(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1)},$$

$$r_1 = a^{\varphi_1}\ln a.$$

Если взять $\ln a = a^{\varphi_0}$ и опустить индекс y, r_1 и φ_1, то получим эволюту логарифмической спирали в виде $r = a^{\varphi}a^{\varphi_0}$, или $r = a^{\varphi+\varphi_0}$. Эта кривая получается из данной логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ вращением ее на некоторый угол φ_0.

Задача 36, 19. В какой точке кривая $y=\ln x$ имеет наименьший радиус кривизны?

Решение. Находим по формуле (36, 16), что в произвольной точке $A(x, y)$ этой кривой $R=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$.

Чтобы определить наименьшее значение R, находим производную

$$\frac{dR}{dx}=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^2},$$

приравниваем ее нулю и решаем уравнение $(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}=$ $=0$, откуда $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Критической точкой является также и $x=0$. Но значения $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и $x=0$ должны быть отброшены, так как для значений $x\leqslant 0$ функция $y=\ln x$ не существует (на кривой $y=\ln x$ нет точек с абсциссами $x\leqslant 0$). Осталось исследовать значение $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Найдите R'', подставьте в полученное выражение $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ и убедитесь, что $R''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)>$ >0. Это доказывает, что радиус кривизны кривой $y=\ln x$ будет наименьшим в точке с абсциссой $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, т. е. в точке $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2};\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$.

Задача 36, 20 (для самостоятельного решения). Доказать, что у цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ радиус кривизны пропорционален квадрату ординаты $\left(R=\frac{1}{a}y^2\right)$ и что он равен длине нормали N.

Указание. $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$: $y''=\frac{y}{a^2}$.

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Функции многих независимых переменных. Область существования. Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал первого порядка функции нескольких независимых переменных.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Переменные x, y, z, ... t называются независимыми между собой, если каждая из них может принимать любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные.

2. Переменная величина u называется функцией независимых переменных $x, y, z, \ldots, t$, если каждой системе значений этих переменных в области их изменения соответствует единственное определенное значение u.*

Символически функция u независимых переменных $x, y, z, \ldots, t$ записывается так:

$$y = f(x, y, z, \ldots, t). \qquad (37.1)$$

3. Областью существования функции $f(x, y, z, \ldots, t)$ называется совокупность значений независимых переменных $x, y, z, \ldots, t$, при которых функция определена (т. е. принимает действительные значения). Область существования функции называется также областью определения функции.

В дальнейшем для упрощения записей все определения и формулы приводятся только для функций от трех независимых переменных.

4. Частные приращения функции. Если $u = f(x, y, z)$ и одна из независимых переменных, например x, получила приращение Δx, то частным приращением $\Delta_x u$ функции называется разность $\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$. Соответственно

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z),$$

а

$$\Delta_z u = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

5. Частные производные. Составим отношение $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$. Если при *стремлении Δx к нулю это отношение стремится к определенному пределу, то этот предел называется частной производной функции $u = f(x, y, z)$ по независимой переменной x и обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, u'_x, f'_x.*

Таким образом

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x},$$

или в более подробной записи

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются частные производные функции $u = f(x, y, z)$ по независимым переменным y и z. Частная производная по y обозначается одним из символов $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, u'_y, f'_y, $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$, а частная производная

---

* Многозначные функции нами не рассматриваются.

по z — одним из символов: $\frac{\partial u}{\partial z}$; $\frac{\partial f}{\partial z}$; u'_z; f'_z

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)^*}{\Delta z}.$$

Вычисление частных производных функции нескольких независимых переменных производится по тем же правилам, по которым вычисляются производные функции одной независимой переменной, только следует иметь в виду, что при определении частной производной надо считать постоянными все независимые переменные, кроме той, по которой вычисляется частная производная.

Задача 37, 1. Найти область существования функции $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение. Представим функцию в виде $u = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$. Очевидно, что функция определена для тех значений x и y, которые удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant 4$. На языке геометрии это означает, что функция определена в точках, лежащих внутри окружности $x^2 + y^2 = 4$ и на ее границе, так как для всех точек, лежащих вне ее, имеет место неравенство $x^2 + y^2 > 4$.

Задача 37, 2. Найти область существования функции $z = \ln(x - y)$.

Решение. Так как отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют, то должно выполняться неравенство $x - y > 0$, т. е. $y < x$.

Точки плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, расположены под прямой $y = x$, причем точки, лежащие на этой прямой, рассматриваться не могут. Короче: область определения функции — полуплоскость, расположенная под прямой $y = x$, причем сама прямая $y = x$ при рассмотрении не учитывается.

Задача 37, 3 (для самостоятельного решения). $u = \frac{z}{x+y}$. Найти область существования функции.

Ответ. Функция определена во всех точках пространства, кроме точек плоскости $x + y = 0$, так как в точках этой плоскости знаменатель дроби у заданной функции обращается в нуль.

Задача 37, 4 (для самостоятельного решения). Найти область существования функций: 1) $z = xy$ и 2) $z = x^2 + y^2$.

Ответ. Обе функции определены во всей плоскости xOy, т. е. при любых значениях x и y.

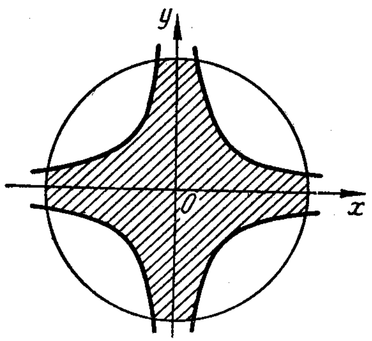
---

*) Следует иметь в виду, что символы $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ... нельзя рассматривать как частные от деления, например ∂f на ∂x, так как ни ∂f, ни ∂x в отдельности смысла не имеют.

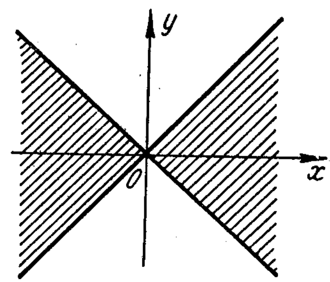
Задача 37, 5. Найти область существования функции $z = \arcsin(3 - x^2 - y^2)$.

Решение. Так как функция $u = \arcsin t$ определена для значений аргумента t из отрезка $[-1, +1]$, то искомая область существования найдется из условия $-1 \leqslant 3 - x^2 - y^2 \leqslant 1$, откуда следует, что $2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$ и область существования функции заключена между двумя концентрическими окружностями: $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, причем могут рассматриваться и точки, принадлежащие этим окружностям.

Задача 37, 6 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $z = \arcsin 3xy$.



Фиг. 37,1.



Фиг. 37,2.

Ответ. Область существования ограничена двумя сопряженными гиперболами:

$$y = \frac{1}{3x} \text{ и } y = -\frac{1}{3x}.$$

Задача 37, 7 (для самостоятельного решения). Найти область существования функции $f(x, y) = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin 2xy$.

Ответ. Областью существования является общая часть областей существования слагаемых функций: 1) $\arcsin(1 - x^2 - y^2)$ и 2) $\arcsin 2xy$, т. е. область, изображенная на фиг. 37, 1.

Задача 37, 8. Найти область существования функции $u = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

Решение. Должно выполняться требование: $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} > 0$. Эта дробь положительна, когда положителен ее знаменатель, т. е. когда $x^2 - y^2 > 0$, или $y^2 < x^2$, а это влечет за собой неравенство $|y| < |x|$.

Рассмотрим два случая: 1) $x > 0$, 2) $x < 0$. 1) Если $x > 0$, то $|x| = x$, и тогда $|y| < x$, или $-x < y < x$. На языке геометрии это означает, что область определения есть часть правой полуплоскости (т. к. рассматриваются значения $x>0$), ограниченная прямыми $y=x$ и $y=-x$, причем точки, лежащие на этих прямых, рассматриваться не могут. 2) Если $x<0$, то $|x|=$ $=-x$, и тогда $|y|<-x$, или $x<y<-x$.

Последние неравенства определяют ту часть левой полуплоскости, которая находится между прямыми $y=-x$ и $y=x$, причем опять-таки точки, принадлежащие этим прямым, не должны рассматриваться (фиг. 37, 2).

Задача 37, 9 (для самостоятельного решения). $u=\ln x+\ln y$. Найти область определения функции.

Ответ. Первый квадрант $(x>0,\ y>0)$, причем оси Ox и Oy исключаются.

Задача 37, 10 (для самостоятельного решения). $u=\sqrt{\ln x+\ln y}$. Найти область определения функции.

Ответ. $x>0$; $y>0$; $xy\geqslant 1$. Область состоит из точек первого квадранта, лежащих над гиперболой $y=\frac{1}{x}$ и на ней.

Задача 37, 11. Найти частные производные функций: 1) $u=$ $=x^2+3xy+4y^2$; 2) $u=\sin(3x+5y-4z)$; 3) $u=e^{\frac{x}{y}}$.

Решение. 1) Функция u — функция двух независимых переменных — x и y. При определении частной производной функции u по независимой переменной x вторая независимая переменная должна рассматриваться как величина постоянная. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+3y$, так как производная по x от $4y^2$ равна нулю, как производная от постоянной величины.

При отыскании $\frac{\partial u}{\partial y}$ независимая переменная x рассматривается как величина постоянная, а потому $\frac{\partial u}{\partial y}=3x+8y$.

2) Функция u — функция трех независимых переменных: x, y и z. При определении частной производной по каждой из этих переменных две других следует считать величинами постоянными. Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}=3\cos(3x+5y-4z)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=5\cos(3x+5y-4z)$; $\frac{\partial u}{\partial z}=$ $=-4\cos(3x+5y-4z)$.

3) Заданная функция есть функция двух независимых переменных x и y. При дифференцировании по каждой из них вторая переменная должна рассматриваться как величина постоянная.

Поэтому $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$, так как $\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{1}{y}$, ибо производная от дроби с постоянным знаменателем равна производной числителя, разделенной на тот же знаменатель, а производная по y от дроби $\frac{x}{y}$ есть производная от дроби с постоянным числителем x и переменным знаменателем y. Как известно, в таком случае

$$\left(\frac{x}{y}\right)_y = -\frac{x}{y^2}.$$

Задача 37, 12 (для самостоятельного решения). Найти частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ функций:

$$1)\ z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x};\ 2)\ z=x^n+y^n;\ 3)\ z=\cos(ax+by).$$

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x}=nx^{n-1}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=ny^{n-1}$

(при дифференцировании по x производная от y^n равна нулю, так как y^n рассматривается как величина постоянная, а при дифференцировании по y производная от x^n равна нулю, так как x^n считается теперь величиной постоянной).

3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-a\sin(ax+by)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-b\sin(ax+by)$.

Задача 37, 13 (для самостоятельного решения). Найти частные производные функций: 1) $u=ax+by+cz$; 2) $u=y\sin x+\sin y$; 3) $u=x^{\sin y}\,(x>0)$; 4) $u=z^{xy}\,(z>0)$, 5) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Ответ. 1) $\frac{\partial u}{\partial x}=a$; $\frac{\partial u}{\partial y}=b$; $\frac{\partial u}{\partial z}=c$ (при дифференцировании по x две другие независимые переменные считаются постоянными, а потому производная по x от by и от cz, как производная от постоянных, равна нулю. Аналогично при дифференцировании по y независимые переменные x и z считаются постоянными, и поэтому производная по y от ax и cz равна нулю и т. д.)

$$2)\ \frac{\partial u}{\partial x}=y\cos x;\ \frac{\partial u}{\partial y}=\sin x+\cos y;$$

$$3)\ \frac{\partial u}{\partial x}=\sin y\cdot x^{\sin y-1};\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^{\sin y}\cdot\cos y\cdot\ln x$$

(здесь при дифференцировании по x заданную функцию следует рассматривать как степенную. Основание степени x — величина переменная, а показатель степени $\sin y$ — величина постоянная.

При дифференцировании по y величину x следует рассматривать как постоянную, а $\sin y$ — как величину переменную, а потому в этом случае функцию $x^{\sin y}$ следует рассматривать как показательную).

4) $\frac{\partial u}{\partial z}=xyz^{xy-1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=xz^{xy}\ln z$; $\frac{\partial u}{\partial x}=yz^{xy}\ln z$;

5) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Задача 37, 14 (для самостоятельного решения). Найти частные производные функций: 1) $z = e^x \cos y - e^y \sin x$;

$$2)\ z = \sqrt{x^2 + y^2};\ 3)\ z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y};$$

$$4)\ z = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}};\quad 5)\ u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y - e^y \cos x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y - e^y \sin x$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$;

4) $\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}$;

5) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$;

Задача 37, 15 (для самостоятельного решения). Известно, что сторона треугольника a определяется через две другие стороны и угол α между ними по формуле

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.}$$

Найти $\frac{\partial a}{\partial b}$, $\frac{\partial a}{\partial c}$ и $\frac{\partial a}{\partial a}$.

Ответ. $\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{b - c \cos \alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos a}} = \frac{b - c \cos \alpha}{a}$;

$$\frac{\partial a}{\partial c} = \frac{c - b \cos \alpha}{a};\quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{bc \sin \alpha}{a}.$$

Задача 37, 16 (для самостоятельного решения). Сила тока согласно закону Ома вычисляется по формуле $I = \frac{V}{R}$. Найти $\frac{\partial I}{\partial V}$ и $\frac{\partial I}{\partial R}$.

Ответ. $\frac{\partial I}{\partial R} = -\frac{V}{R^2}$; $\frac{\partial I}{\partial V} = \frac{I}{R}$.

Задача 37, 17 (для самостоятельного решения). Формула Клапейрона $pV = RT$, где R — величина постоянная, связывает для идеального газа его объем V, давление p и абсолютную температуру T.

Считая каждую из этих величин V, p и T функцией, а две другие—независимыми переменными, определить частные производные этих функций.

Решение. 1) $V=\frac{RT}{p}$; $\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p}$; $\frac{\partial V}{\partial p}=-\frac{RT}{p^2}$; 2) $p=\frac{RT}{V}$; $\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{R}{V}$; $\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}$; 3) $T=\frac{pV}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial V}=\frac{p}{R}$.

Докажите, что $\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=-1$.

Задача 37, 18. Доказать, что функция $z=y^2\sin(x^2-y^2)$ удовлетворяет уравнению $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\underbrace{y^2\cos(x^2-y^2)}_{\text{производная функции } \sin(x^2-y^2)}\cdot\underbrace{2x}_{\text{производная по } x \text{ функции } x^2-y^2\text{, стоящей под знаком синуса}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\underbrace{2y}_{\text{производная по } y \text{ первого сомножителя}}\cdot\sin(x^2-y^2)+y^2\cdot\underbrace{\cos(x^2-y^2)}_{\text{производная функции } \sin(x^2-y^2)}\underbrace{(-2y)}_{\text{производная по } y \text{ функции } x^2-y^2}$$

Умножая обе части первого равенства на y^2, а второго — на xy и почленно складывая, получим

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xy^2\sin(x^2-y^2).$$

Но так как $z=y^2\sin(x^2-y^2)$, то правая часть последнего равенства есть $2xz$, и тем самым требуемое доказано.

Задача 37, 19 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Задача 37, 20 (для самостоятельного решения). Доказать, что если $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, то имеет место равенство

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Полный дифференциал и полное приращение функции. Связь между полным дифференциалом функции и ее полным приращением

Полное приращение функции $u=f(x,y,z)$ определяется по формуле

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(x,\ y,\ z). \tag{37, 2}$$

где Δx, Δy, Δz — приращения независимых переменных.

По определению приращения независимых переменных Δx, Δy, Δz и их дифференциалы dx, dy и dz — числа, между собою равные:

$$\Delta x=dx;\ \Delta y=\Delta y;\ \Delta z=dz.$$

Полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$ обозначается символом du и вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial y}{\partial z}dz \qquad (37, 3)$$

и аналогично, если $z = f(x, y)$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (37,4)$$

Полный дифференциал du функции есть главная часть ее приращения Δu, линейная относительно Δx, Δy и Δz, т. е. $\Delta u \approx du$, причем при бесконечно малых Δx, Δy и Δz разность $\Delta u - du$ — величина бесконечно малая высшего порядка малости, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Приближенное равенство $\Delta u \approx du$ на основании формулы (37, 3) может быть записано так:

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz, \qquad (37,5)$$

или более подробно:

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \qquad (37, 6)$$

Это приближенное равенство тем более точно, чем меньше величины dx, dy, dz.

Вычисление Δu приращения функции представляет собой задачу, значительно более сложную, чем вычисление ее дифференциала du, а потому в практических вычислениях с достаточной точностью при малых приращениях независимых переменных заменяют вычисление приращения функции вычислением ее дифференциала.

Задачи 37,21—37,22 являются упражнениями в вычислении полного приращения и полного дифференциала функции, а также в применении формулы (37,6) для приближенных вычислений.

Задача 37,21. Найти полное приращение Δu и полный дифференциал du функции $u(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 + 1$.

Решение. $\Delta u = u(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - u(x, y) = 3(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2 + 1 - (3x^2 + xy - y^2 + 1)$;

$$\Delta u = \underline{3x^2} + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y - y^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2 + 1 - \underline{3x^2} - xy + y^2 - 1;$$

$$\Delta u = \underbrace{(6x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y}_{du} + \underbrace{3(\Delta x^2) + \Delta x\Delta y - (\Delta y)^2}_{\substack{\text{при бесконечно малых } \Delta x \text{ и } \Delta y \text{—} \\ \text{величина бесконечно малая} \\ \text{высшего порядка по} \\ \text{сравнению с} \\ \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}} \qquad (37, 7)$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x + y$, а $\frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y$, то на основании формулы (37, 4)

$$du = (6x + y)\,dx + (x - 2y)\,dy; \quad (\Delta x = dx; \ \Delta y = dy). \qquad (37, 8)$$

Разность

$$\Delta u - du = 3(\Delta x)^2 + \Delta x \cdot \Delta y - (\Delta y)^{2*}$$

представляет собой погрешность, которая возникает от замены приращения Δu функции ее дифференциалом du. В связи с этим примером решим такой числовой пример; найти для заданной функции ее полное приращение и полный дифференциал в точке (1,2), если: 1) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$; 2) $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$; 3) $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$.

1) Подставляя в (37, 7) значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$, находим, что

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,1 + (1 - 2 \cdot 2)\,2 + 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 - 2^2 = \\ = 8 - 6 + 3 + 2 - 4 = 3;$$

подставляя эти же значения в (37, 8), получаем, что

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,1 + (1 - 2 \cdot 2)\,2 = 8 - 6 = 2,$$

а разность

$$\Delta u - du = 3 - 2 = 1. \qquad (37,9)$$

2) Подставим теперь в (37,7) и (37,8) значения $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$, получим:

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}2 + 3\,(0{,}1)^2 + \\ + 0{,}1 \ 0{,}2 - (0{,}2)^2 = 0{,}8 - 0{,}6 + 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}04; \\ \Delta u = 0{,}21,$$

а

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}1 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}2 = 0{,}8 - 0{,}6 = 0{,}20;$$

$$\Delta u - du = 0{,}21 - 0{,}20 = 0{,}01. \qquad (37,10)$$

3) Подставим теперь в (37,7) и (37, 8) те же значения x и y, но возьмем $\Delta x = 0{,}01$, а $\Delta y = 0{,}02$;

$$\Delta u = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}02 + 3\,(0{,}01)^2 + \\ + 0{,}01 \cdot 0{,}02 - (0{,}02)^2 = 0{,}08 - 0{,}06 + 0{,}0003 + 0{,}0002 - \\ - 0{,}0004 = 0{,}0201;$$

$$du = (6 \cdot 1 + 2)\,0{,}01 + (1 - 2 \cdot 2)\,0{,}02 = 0{,}08 - 0{,}06 = 0{,}02,$$

а

$$\Delta u - du = 0{,}0201 - 0{,}02 = 0{,}0001. \qquad (37,11)$$

* В выражениях $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$ скобки могут быть опущены, так как Δx, Δy рассматриваются как единый символ.

Сравнивая разности (37, 10), (37, 11) и (37, 12) между полным приращением функции и ее полным дифференциалом, мы усматриваем, что они уменьшаются вместе с уменьшением приращений Δx и Δy независимых переменных.

Этот пример иллюстрирует высказанное выше утверждение, что равенство (37, 5) тем более точно, чем меньше приращения независимых переменных.

Задача 37, 22 (для самостоятельного решения). Найти полное приращение функции $u = x^3y^2$ и ее полный дифференциал в точке (2,1) при: 1) $\Delta x = -0{,}1$, $\Delta y = -0{,}1$; 2) $\Delta x = -0{,}01$; $\Delta y = -0{,}01$. В обоих случаях сравнивать разности $\Delta u - du$.

Ответ. 1) $\Delta u = -2{,}4442$; $du = -2{,}8$; $\Delta u - du = 0{,}3558$; 2) $\Delta u = -0{,}2762$; $du = -0{,}2800$; $\Delta u - du = 0{,}0038$.

Задача 37, 23. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

Решение. Полный дифференциал функции находится по формуле (37, 4). Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Поэтому

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx + \frac{y}{(x + \sqrt{y^2 + x^2})\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy.$$

Задача 37, 24 (для самостоятельного решения). Найти полный дифференциал функций: 1) $z = \frac{ay - bx}{by - ax}$; 2) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; 3) $z = x \sin y + y \sin x$; 4) $u = x + ye^{\frac{x}{y}}$.

Ответ. 1) $dz = \frac{(b^2 - a^2)(xdy - ydx)}{(by - ax^2)}$; 2) $dz = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$;

3) $dz = (\sin y + y \cos x)\, dx + (x \cos y + \sin x)\, dy$; 4) $du = (1 + e^{\frac{x}{y}})\, dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}}\, dy$.

Задача 37, 25 (для самостоятельного решения). Найти полный дифференциал функций: 1) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 2) $u = \frac{\operatorname{arctg} y}{1 + x^2}$;

3) $u = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}$: 4) $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; 5) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$.

Ответ. 1) $du = -\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$;

2) $du = \dfrac{(1+x^2)\,dy - 2x(1+y^2)\operatorname{arctg} y\,dx}{(1+x^2)^2(1+y^2)}$;

3) $du = \dfrac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}\,dx - \dfrac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}\,dy$;

4) $du = \dfrac{x\sqrt{2}\,(y\,dx - x\,dy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$;

5) $du = \dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\,dx - \left(e^{\frac{x}{y}}\cdot\dfrac{x}{y^2} + e^{\frac{z}{y}}\cdot\dfrac{z}{y^2}\right)dy + e^{\frac{z}{y}}\cdot\dfrac{1}{y}\,dz.$

Задача 37, 26. Для вычисления объема цилиндра были вычислены его высота и диаметр основания. При этом оказалось, что высота $h = 60$ *см*, а диаметр $D = 50$ *см*, и границы ошибок, допущенных при измерении, $\Delta h = \Delta D = 0{,}1$ *см*. Найти границу ошибки ΔV в объеме цилиндра, вычисленном по этим данным.

Решение. Объем цилиндра $V = \dfrac{\pi D^2 h}{4}$.

Считая, что $\pi \approx 3{,}14$ и подставляя сюда числовые данные задачи, получим, что $V = 117{,}75$ *дм*^{3}. Чтобы вычислить границу ошибки в полученном числе, примем, что $\Delta V \approx dV$.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial D}dD + \frac{\partial V}{\partial h}dh.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi D h}{2}, \quad a \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi D^2}{4},$$

получаем, что

$$dV = \frac{\pi D h}{2}dD + \frac{\pi D^2}{4}dh.$$

Оценим абсолютную величину dV:

$$|dV| = \left|\frac{\pi D h}{2}\,dD + \frac{\pi D^2}{4}\,dh\right| \leqslant \frac{\pi D h}{2}|\Delta D| + \frac{\pi D^2}{4}|\Delta h|.$$

Подставляя числовые данные из условия задачи, получим, что граница ошибки равняется 0,7 *дм*^{3}. Таким образом, $\Delta V \approx$ $\approx 0{,}7$ *дм*^{3}.

Следует иметь в виду, что мы приняли $\pi = 3{,}14$, что также внесло ошибку в результат вычислений. Однако ошибка, возникшая из-за этого, значительно меньше той, которая возникла от неточности в измерении D и h.

Задача 37, 27. Для вычисления удельного веса тела его взвешивают и измеряют его объем. Оказывается, что вес $P = 326$ *г*, а объем $V = 126$ *см*^{3}; при этом границы ошибок величин P и V равны $\Delta P = 0{,}5$ *г*, $\Delta V = 1$ *см*^{3}.

Определить границу ошибки ΔD в удельном весе D, вычисленном по этим данным.

Решение. Удельный вес $D=\frac{P}{V}=\frac{326}{126}=2{,}59\ \frac{г}{см^3}$. Теперь положим, что $\Delta D\approx dD$;

$$dD=\frac{\partial D}{\partial P}dP+\frac{\partial D}{\partial V}dV=\frac{1}{V}dP-\frac{P}{V^2}dV=\frac{VdP-PdV}{V^2};$$

$$|dD|=\left|\frac{V\Delta P-P\Delta V}{V^2}\right|=\frac{|V\Delta P-P\Delta V|}{V^2}\leqslant\frac{V|\Delta P|+P|\Delta V|}{V^2}.$$

Подставляя сюда числовые данные задачи, найдем, что граница ошибки $AD\approx 0{,}024\ \frac{г}{см^3}$.

Задача 37, 28 (для самостоятельного решения). Даны две точки $P(x,\ y)$ и $P_1(x_1,\ y_1)$. Насколько изменится расстояние S между ними, если координаты точек получат приращения dx, dy и dx_1, dy_1 и сколько процентов p от длины S составит это изменение.

Ответ. $dS=(dx-dx_1)\cos\alpha+(dy-dy_1)\sin\alpha_1$, где α — угол, образуемый с положительным направлением оси Ox прямой, проведенной из P_1 по направлению к P

$$\left(\frac{x-x_1}{S}=\cos\alpha;\quad \frac{y-y_1}{S}=\sin\alpha\right).$$

Количество процентов $p=\frac{dS}{S}\cdot 100$.

Задача 37, 29 (для самостоятельного решения). Решить предыдущую задачу с такими числовыми данными:

$$S=4200\ м;\quad \alpha=34°17'25'';\quad dx=-1м;$$

$$dy=3\ м;\quad dx_1=4\ м;\quad dy_1=2\ м.$$

Ответ. Расстояние S уменьшится на 3,65 $м$, или на 0,087%.

Задача 37, 30. Даны две точки $P(x,\ y)$ и $P_1(x_1,\ y_1)$. Расстояние между ними равно S, а угол α определяется, как и в задаче 37, 29. Точка P_1 неподвижна. Насколько изменится угол α, если координаты точки P станут равными $x+dx$, $y+dy$.

Указание. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y-y_1}{x-x_1}$; $\ln\operatorname{tg}\alpha=\ln(y-y_1)-\ln(x-x_1)$.

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}d\alpha=\frac{dy}{y-y_1}-\frac{dx}{x-x_1}$$

(x_1 и y_1 по условию — постоянные величины). Так как $y-y_1=$ $=S\sin\alpha$, а $x-x_1=S\cos\alpha$, то отсюда получается ответ

$$d\alpha=\frac{\cos\alpha}{S}\cdot dy-\frac{\sin\alpha}{S}dx.$$

Задача 38, 31 (для самостоятельного решения). Решить предыдущую задачу при таких числовых данных: $S = 3500$ *м*; $\alpha = 52°13'24''$; $dx = 1$ *м*; $dy = 2$ *м*. Выразить $d\alpha$ в секундах.

Указание. В формуле, полученной в ответе предыдущей задачи, $d\alpha$ измеряется в радианах. Чтобы получить $d\alpha$ в секундах, следует полученное число умножить на 206 264,8, т. е. на число секунд в одном радиане.

Ответ. $25'',6$.

Задача 37, 32. Вычислить приближенно величину $(1{,}03)^{3{,}001}$.

Решение. Мы знаем, что $1^3 = 1$. Нам следует теперь произвести вычисления для того случая, когда основание степени 1 получит приращение 0,03, а показатель степени 3 — приращение 0,001. Будем исходить из функции $f(x, y) = x^y$ и воспользуемся формулой (37, 6).

Учитывая, что в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial x} = x^y \ln x$, получим $(x + \Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y$.

У нас $x = 1$; $y = 3$; $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = 0{,}001$, а потому $(1{,}03)^{3{,}001} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1}\, 0{,}03 + 1^3 \ln 1 \cdot 0{,}001 = 1 + 0{,}09 = 1{,}09$, т. к. $\ln 1 = 0$.

Задача 37, 33 (для самостоятельного решения). Вычислить приближенно: 1) $(0{,}97)^{2{,}02}$; 2) $(1{,}003)^{2{,}07}$; 3) $\sqrt{(6{,}03)^2 + (8{,}04)^2}$.

Указание. В последнем примере следует исходить из функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ответ. 1) 0,94; 2) 1,006; 3) 10,05.

ТРИДЦАТЬ ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференцирование сложной функции от одной и нескольких независимых переменных.

1. Дифференцирование сложной функции от одной независимой переменной

Формула полной производной. *Если $z = f(u, v)$, а u и v являются функциями независимой переменной x: $u = \varphi(x)$ $v = \psi(x)$, то и z является функцией x.*

В таком случае говорят, что z есть сложная функция аргумента x. Производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (38, 1)$$

Вычисленная по этой формуле производная называется полной производной от функции z по независимой переменной x.

Аналогично, если $z = f(u, v, w)$, а $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \omega(x)$, *то полная производная от функции* z *по независимой переменной* x *вычисляется по формуле*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \qquad (38, 2)$$

Частный случай. *Если* $z = f(x, u, v)$ а u и v *в свою очередь, также являются функциями* x, *т. е.* $u = \varphi(x)$; $v = \psi(x)$, *то*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (38, 3)$$

Читатель должен обратить внимание на то, что в правой части формулы (38, 3) стоит частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, *вычисленная в предположении, что* u и v — *величины постоянные. Эту производную следует отличать от полной производной* $\frac{dz}{dx}$, *которая вычисляется в предположении, что* u и v *являются функциями* x. *Различие в этих двух производных объясняет также и различие в их обозначениях.*

Задача 38, 1. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, а $u = 2x^3$; $v = 3x^2$; $w = x^4$.

Решение. Здесь следует воспользоваться формулой (38, 2). Определим производные, входящие в эту формулу:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3\cos(3u + 2v - 4w); \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 2\cos(3u + 2v - 4w);$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = -4\cos(3u + 2v - 4w); \quad \frac{du}{dx} = 6x^2; \quad \frac{dv}{dx} = 6x; \quad \frac{dw}{dx} = 4x^3.$$

Подставляя эти величины в (38, 2), получим

$$\frac{dz}{dx} = [3\cos(3u + 2v - 4w)]\, 6x^2 + [2\cos(3u + 2v - 4w)]\, 6x - 4\cos(3u + 2v - 4w)\, 4x^3.$$

Вынося в правой части за скобку $\cos(3u + 2v - 4w)$ и заменяя под знаком косинуса u, v и w их выражениями через x, получим окончательно

$$\frac{dz}{dx} = (18x^2 + 12x - 16x^3)\cos(6x^3 + 6x^2 - 4x^4).$$

Задача 38, 2 (для самостоятельного решения). Найти полную производную $\frac{du}{dt}$ функции $u = \sin\frac{x}{y}$, где $x = e^t$; $y = t^2$.

Указание. Формулу (38, 1) следует переписать в виде

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Ответ. $\frac{du}{dt} = (t-2)\cdot\frac{e^t}{t^3}\cdot\cos\frac{e^t}{t^2}.$

Задача 38, 3 (для самостоятельного решения). 1) $u = z^2 + y^2 + zy$; $z = \sin x$; $y = e^x$. Определить полную производную $\frac{du}{dx}$.

Указание. На основании формулы (38, 1)

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

2) $u = v^2 + vy$; $v = \ln x$; $y = e^x$.

Найти полную производную $\frac{du}{dx}$.

Указание. Применить формулу (38, 1), переписав ее в виде

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

3) Найти полную производную $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(u, v)$ $u = ax^2 + bx + c$; $v = ax + b$.

Ответ. 1) $\frac{du}{dx} = 3e^{3x} + e^x(\sin x + \cos x) + \sin 2x$; 2) $\frac{du}{dx} = \frac{2v + y}{x} + ve^x$; $\frac{du}{dx} = \frac{2\ln x + e^x}{x} + e^x \ln x$; 3) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}(2ax + b) + \frac{\partial z}{\partial v}a$.

Задача 38, 4. Определить полную производную функции

$$u = e^{ax}(y - z); \quad y = a\sin x; \quad z = \cos x.$$

Решение. Здесь следует применить формулу (38, 3), так как функция u зависит от x как непосредственно, так и через посредство функций y и z. Определим производные, входящие в правую часть этой формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}(y - z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{ax}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -e^{ax}; \quad \frac{dy}{dx} = a\cos x; \quad \frac{dz}{dx} = -\sin x;$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dx} = ae^{ax}(y - z) + e^{ax}a\cos x - e^{ax}(-\sin x) =$$

$$= e^{ax}(a^2 + 1)\sin x.$$

Задача 38, 5 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(x, u, v)$, $u = \frac{1}{x}$; $v = \ln x$.

Указание. Применить формулу (38, 3).

Ответ. $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{x}$.

Задача 38, 6 (для самостоятельного решения). $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $y = \sin^2 x$. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Указание. $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$.

Ответ. $\frac{dz}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin 2x$.

Задача 38, 7 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если 1) $z=u^v$, где $u=\sin x$; $v=\operatorname{tg} x$; 2) $z=uvw$, где $u=\sin x$; $v=\ln x$; $w=\operatorname{tg} x$.

Ответ. 1) $\frac{dz}{dx}=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1+\sec^2 x\ln\sin x)$;

2) $\frac{dz}{dx}=\sin x\ln x+\frac{\sin^2 x}{x\cos x}+\frac{\sin x\ln x}{\cos^2 x}$.

Задача 38, 8 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=x^y$, где $y=\ln x$.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{dz}{dx}=x^y\left(\frac{y}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$.

Задача 38, 9 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=e^{\frac{x}{y}}$, где $y=\sin^3 x$.

Ответ. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{3x}{y}\sin^2 x\cos x\right)$.

Задача 38, 10 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{dz}{dx}$, если 1) $z=\ln(x^2+y^2)$, где $y=e^{x^2}$; 2) $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, где $y=\cos x$.

Ответ. 1) $\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{x^2+y^2}(1+2ye^{x^2})$, а вместо y можно подставить e^{x^2}; 2) $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+y^2}\sin x$.

Задача 38, 11. Движение точки задано уравнениями

$$x=3t^2;\quad y=2t^4;\quad z=4t^6.$$

С какой скоростью возрастает ее расстояние от начала координат?

Решение. Расстояние r точки от начала координат определяется формулой $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где x, y и z — координаты точки.

Для решения задачи следует найти $\frac{dr}{dt}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{dz}{dt}$;

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{dx}{dt}=6t;\quad \frac{dy}{dt}=8t^3;\quad \frac{dz}{dt}=24t^5.$$

Ответ. $\frac{dr}{dt}=\frac{18t+16t^5+96t^9}{\sqrt{9+4t^4+16t^8}}$.

2. Дифференцирование сложной функции от нескольких независимых переменных

Если $z = f(u, v)$ — функция от двух переменных u и v, а каждая из них есть в свою очередь функция двух независимых переменных x и y, то и z есть функция независимых переменных x и y, а ее частные производные по этим переменным вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (38, 4)$$

Частный случай. Если функция z зависит от x и y не только через посредство u и v, но и явно, т. е. $z = f(x, y, u, v)$, то имеют место формулы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (38, 5)$$

причем следует иметь в виду, что производные $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ от функции z вычисляются в предположении, что u и v — величины постоянные.

Задача 38, 12. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(u^2 + v^2)$, а

$$u = x\cos y; \quad v = y\sin x.$$

Решение. Следует воспользоваться формулами (38, 4). Определим частные производные, входящие в эти формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot 2u; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v^2} \cdot 2v; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\cos x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x\sin y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x.$$

Подстановка этих производных в (38, 4) дает

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v^2}\cos y + \frac{2v}{u^2 + v^2}y\cos x = \frac{2}{u^2 + v^2}(u\cos y + vy\cos x) =$$

$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}(x\cos^2 y + y^2\sin x\cos x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2u}{u^2 + v^2}x\sin y + \frac{2v}{u^2 + v^2}\sin x = \frac{2}{u^2 + v^2}(v\sin x - ux\sin y) =$$

$$= \frac{2}{x^2\cos^2 y + y^2\sin^2 x}(y\sin^2 x - x^2\sin y \cdot \cos y).$$

Задача 38, 13. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, а $u = x\sin y$, $v = x\cos y$.

Решение. Здесь опять-таки следует применить формулы (38, 4). Определяем частные производные, входящие в эти формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\frac{1}{v} = \frac{v}{u^2+v^2};\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1+\frac{u^2}{v^2}}\left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{u}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y;\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \cos y;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x\sin y.$$

Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v}{u^2+v^2}\sin y - \frac{u}{u^2+v^2}\cos y = \frac{1}{u^2+v^2}(v\sin y - u\cos y) =$$

$$= \frac{1}{x^2\sin^2 y + x^2\cos^2 y}(x\sin y\cos y - x\sin y\cos y) = 0;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Задача 38, 14 (для самостоятельного решения). Определить $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial u}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial w}$, если $u = \ln\cos\frac{xy}{\sqrt{z}}$, где $x = tvw$; $y = e^{\frac{t}{v}}$; $z = \sqrt{\frac{tv}{w}}$.

Указание. Формулы (38, 4) в данном случае для определения, например, $\frac{\partial u}{\partial t}$ запишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

и аналогично для $\frac{\partial u}{\partial v}$ и $\frac{\partial u}{\partial w}$.

Ответ. $\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{tg}\frac{xy}{\sqrt{z}}\left(\frac{yvw}{\sqrt{z}} + \frac{xe^{\frac{t}{v}}}{v\sqrt{z}} - \frac{xyv}{4z\sqrt{z}\sqrt{tvw}}\right)$.

Задача 38, 15. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$ а $u = x + y$; $v = x - y$.

Решение. Применяя формулы (38, 4), получаем, учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = 1;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1;\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 1 = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v}(-1) = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Задача 38, 16 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, а $u = x^2 + y^2$; $v = xy$.

Ответ. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}$.

Задача 38, 17. Доказать, что функция $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Решение. Обозначим $x^2 - y^2 = u$. Тогда заданная функция

$$z = y\varphi(u). \tag{38, 6}$$

Легко усмотреть, что z зависит от x только через посредство u, а от y — как непосредственно, так и через посредство u. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = y\varphi'(u)\,2x = 2xy\varphi'(u).$$

Производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ должна быть определена по второй из формул (38, 5). Входящая в эту формулу производная $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \varphi(u)$, а потому, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(u) + y\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(u) - 2y^2\varphi'(u).$$

Подставляя найденные выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в левую часть заданного уравнения, получим

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\,2xy\varphi'(u) + \frac{1}{y}\left[\varphi(u) - 2y^2\varphi'(u)\right] =$$

$$= 2y\varphi'(u) + \frac{1}{y}\varphi(u) - 2y\varphi'(u) = \frac{1}{y}\varphi(u) = \frac{1}{y}\,\frac{z}{y} = \frac{z}{y^2}.$$

так как на основании (38, 6) $\varphi(u) = \frac{z}{y}$.

Задача 38, 18. Доказать, что функция $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Решение. Обозначим $\frac{y}{x} = u$. Тогда заданная функция перепишется в виде

$$z = xy + x\varphi(u) \tag{38, 7}$$

и очевидно, что z зависит от x и y как непосредственно, так и через посредство u. Поэтому частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следует отыскивать по формулам (38, 5). Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y + \varphi(u), \quad \text{а} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \varphi(u) + x\varphi'(u)\left(-\frac{y}{x^2}\right) = y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\varphi'(u);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x\varphi'(u)\frac{1}{x} = x + \varphi'(u).$$

Подставляя значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в левую часть заданного уравнения, получим

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left[y + \varphi(u) - \frac{y}{x}\varphi'(u)\right] + y[x + \varphi'(u)] = xy + x\varphi(u) -$$

$$- y\varphi'(u) + xy + y\varphi'(u) = xy + \underbrace{x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}_{z} + xy = xy + z.$$

Задача 38, 19 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = x + y + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

Указание. Обозначить $\frac{x}{y} = u$ и воспользоваться формулами (38, 5). Учесть, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 1$.

Задача 38, 20 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

Указание. Обозначить $x - y = u$ и воспользоваться формулами (38, 5), в которых $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = x$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = y$.

Задача 38, 21 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

Указание. Положить $ye^{\frac{x^2}{2q^2}} = u$, воспользоваться формулами (38, 5) и учесть, что $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = e^y$.

Задача 38, 22 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Производные и дифференциалы высших порядков функций нескольких независимых переменных.

1. Производные высших порядков

Если задана функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ *и вычислены ее частные производные* $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, *то они, вообще говоря, также являются функциями независимых переменных* x *и* y, *а потому от каждой из них можно вычислить производные как по* x, *так и по* y.

Если вычислить частную производную по x *от* $\frac{\partial z}{\partial x}$, *то получим частную производную второго порядка от функции* z, *взятую два раза по* x. *Эта производная обозначается символом* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *и, таким образом,* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Если вычислить частную производную по y *от* $\frac{\partial z}{\partial x}$, *то получим частную производную второго порядка функции* z, *взятую сначала по* x, *а потом по* y. *Эта производная обозначается символом* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *и, таким образом,* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Подобно этому частная производная по x *от* $\frac{\partial y}{\partial y}$ *даст вторую частную производную функции* z, *вычисленную сначала по* y, *а потом по* x. *Она обозначается символом* $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

а частная производная по y *от* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *есть вторая частная производная от функции* z, *взятая два раза по* y. *Она обозначается символом* $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Также вводятся частные производные порядка более высокого, чем второй.

Например, символ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ *обозначает производную третьего порядка функции* $z = f(x, y)$, *вычисленную три раза по* x.

Символ же $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ *обозначает, что от функции* z *взята производная третьего порядка, причем она вычислялась два раза по* x *и от полученной производной* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *вычислена один раз производная по* y *и т. д.*

Задача 39, 1. Найти частные производные третьего порядка функции $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$.

Решение. $$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3; \qquad (39, 1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 - 8x^2y + 15xy^2 - 4y^3. \qquad (39, 2)$$

Если взять производную по x от $\frac{\partial z}{\partial x}$ (выражение (39, 1)), то получим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 18xy - 8y^2$; если то же выражение (39, 1) продифференцировать по y, то получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9x^2 - 16xy + 15y^2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -8x^2 + 30xy - 12y^2.$$

Продифференцируем теперь по x производную $\frac{\partial z}{\partial y}$ (выражение (39, 2) и получим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 9x^2 - 16xy + 15y^2.$$

Читатель должен усмотреть разницу в обозначениях $\frac{\partial z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Символ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ означает, что от функции z сначала была взята производная по x, а результат был продифференцирован по y. Символ же $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ показывает, что от функции z была сначала вычислена производная по y, а полученный результат продифференцирован по x. Таким образом, производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}$ отличаются порядком, в котором велось дифференцирование.

Если продифференцировать по y производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то получим третью производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 18x - 16y$.

Продифференцировав же по x производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, получим

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} = 18x - 16y.$$

Если вычислить производную по y от $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, получим

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -16x + 30y.$$

Производная по x от $\frac{\partial^2 z^3}{\partial y \partial x}$ даст $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x^2} = 18x - 16y$.

Производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = -16x + 30y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -16x + 30y,$$

наконец, если взять производную по x от $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, то получим $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x + 18y$, а если взять производную по y от $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, то получим $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 30x - 24y$.

Здесь опять-таки следует пометить, что производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},$$

а также производные

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$$

отличаются только порядком дифференцирования.

Оказалось, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x}; \qquad (39, 3)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x y y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \qquad (39, 4)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}. \qquad (39, 5)$$

Это совпадение не является случайным. Имеет место такая важная теорема: ***если частные производные непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования.***

Задача 39, 2 (для самостоятельного решения). Найти частные производные второго порядка функций:

1) $z = xy$; 2) $z = e^{ax+by}$; 3) $z = \ln(x^2 + y^2)$; 4) $z = e^{xy}$.

Ответ. 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 e^{ax+by}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = abe^{ax+by}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = b^2 e^{ax+by}$;

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = -4\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$;

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy}(xy + 1)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$.

Задача 39, 3. Определить производную $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ функции $u = \sin(xyz)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz\cos(xyz); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = z\cos(xyz) - xyz^2\sin(xyz);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \cos(xyz) - xyz\sin(xyz) - 2xyz\sin(xyz) - x^2y^2z^2\cos(xyz);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 - x^2y^2z^2)\cos xyz - 3xyz\sin(xyz).$$

Задача 39, 4. Показать, что функции: 1) $z = \ln r$, где $r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$ и 2) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ удовлетворяют уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Решение. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}$. Но так как

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} = \frac{x-x_1}{r},$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x-x_1)\frac{1}{r^2}.$$

Теперь вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, рассматривая правую часть последнего равенства как произведение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2r}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}(x-x_1).$$

Подставляя сюда найденное выше значение $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_1}{r}$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(x-x_1)^2}{r^4}.$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2(y-y_1)^2}{r^4}.$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$ в левую часть уравнения Лапласа и учитывая, что если

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$

то $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = r^2$, получим

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2(x-x_1)^2}{r^4} + \frac{1}{r^2} - \frac{2(y-y_2)^2}{r^4} =$$

$$= \frac{2}{r^2} - \frac{2[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]}{r^4} = \frac{2}{r^2} - \frac{2r^2}{r^4} = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} = 0,$$

и тем самым доказано требуемое.

$$2)\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y}{(x^2+y^2)^2}2x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^2}2y.$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в левую часть уравнения Лапласа, получим

$$\frac{y}{(x^2+y^2)^2}2x-\frac{x}{(x^2+y^2)^2}2y=0,$$

и требуемое доказано.

Задача 39, 5 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция $\varphi=\frac{1}{r}$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Задача 39, 6 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции 1) $v=r\cos\theta$ и 2) $v=\frac{\cos\theta}{r^2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа в сферических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0.$$

Задача 39, 7. Доказать, что если функция $u=u(x,\ y,\ z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

то и функция

$$v=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$$

также удовлетворяет этому уравнению.

Указание. Подставить в заданное уравнение вместо u функцию v и доказать, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right);\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z^2}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$
$$+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

так как по условию

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Поэтому $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$, что и требовалось.

Задача 39, 8. Известно, что $z=f(u, v)$, а переменные u и v являются функциями независимых переменных x и y.

$$u=\varphi(x, y);\quad v=\psi(x, y).$$

Определить $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение. На основании формулы (38, 4)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Учитывая, что производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ являются, вообще говоря, функциями u и v, имеем, опять-таки на основании формул (38, 4)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получим окончательно, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^8}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{d^2 z}{du^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Этим же путем найдем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Задача 39, 9 (для самостоятельного решения). Вычислить $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Функции $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$; $v = \psi(x, y)$.

Указание. Воспользоваться методом, с помощью которого была найдена производная $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ в предыдущей задаче, и учесть, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Ответ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Замечание. Формулы, полученные в последних двух задачах, не должны запоминаться. Читатель должен усвоить метод, с помощью которого эти формулы были получены.

На применение этого метода предлагается задача 39, 10.

Задача 39, 10 (для самостоятельного решения). Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = f(u, v)$; $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

Указание.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}2x + \frac{\partial z}{\partial v}y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}2x + \frac{\partial z}{\partial v}y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}2x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}y\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)2x + \frac{\partial z}{\partial u}2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)y = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\cdot 2x +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial v}\cdot 2 + \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right]y = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)2x + 2\frac{\partial z}{\partial u} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)y.$$

Подставляя сюда значения частных производных функций u и v по x, получим окончательно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u}$$

$\left(\text{учтено, что } \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\right).$

Ответ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2(x^2 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Задача 39, 11 (для самостоятельного решения). Определить частные производные второго порядка функции $z=\varphi(u, v)$, где $u=x+y$; $v=x-y$.

Ответ. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Задача 39, 12 (для самостоятельного решения). Доказать, что функции 1) $u=e^{kn^2t}\sin nx$ и 2) $u=e^{-kn^2t}\cdot\cos nx$ удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Задача 39, 13. Показать, что функция

$$z=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$$

удовлетворяет уравнению колебания струны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

(функции φ и ψ — какие угодно дважды дифференцируемые функции).

Решение. Введем обозначения $x-at=u$; $x+at=v$. Тогда заданная функция перепишется так: $z=\varphi(u)+\psi(v)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Но так как функция φ не зависит от v, а функция ψ — от u, то $\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0$ и $\frac{\partial\psi}{\partial u}=0$.

Если учесть, что $\frac{\partial u}{\partial x}=1$ и $\frac{\partial v}{\partial x}=1$, то $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2},$$

так как $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)=0$ и $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=0$; $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$ $\Big($учтено, что $\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0$ и $\frac{\partial\psi}{\partial u}=0\Big)$.

Учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial t}=-a$, а $\frac{\partial v}{\partial t}=a$, имеем $\frac{\partial z}{\partial t}=-a\frac{\partial\varphi}{\partial u}+a\frac{\partial\psi}{\partial v}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-a\frac{\partial\varphi}{\partial u}+a\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)=-a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)=$$

$$=-a\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=a^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right).$$

Умножая $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ на a^2, убеждаемся, что действительно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

что и требовалось.

Задача 39, 14 (для самостоятельного решения). Доказать, что функция

$$z = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Указание. Положить $x + y = u$.

Задача 39, 15 (для самостоятельного решения). Показать, что функция

$$z = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Указание. Ввести замену; $xy = u$; $\frac{y}{x} = v$.

2. Дифференциалы высших порядков

Аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ — независимые переменные.

Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка; он обозначается через d^2z. Таким образом $d^2z = d(dz)$.

Дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{39, 6}$$

Дифференциал третьего порядка функции $z = f(x, y)$ есть дифференциал ее дифференциала второго порядка; обозначается он символом d^3z, т. е. $d^3z = d(d^2z)$.

Дифференциал третьего порядка вычисляется по формуле

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \tag{39, 7}$$

Если условиться над символами $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ производить все арифметические действия по тем же правилам, по которым они производятся над числами, а произведение

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n}u$$

заменять частной производной $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$, то формулы для вычисления d^2z и d^3z можно в символической записи переписать так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z, \qquad (39, 8)$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z \qquad (39, 9)$$

и вообще для дифференциала порядка n функции $z = f(x, y)$ имеет место символическая формула

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z. \qquad (39, 10)$$

При вычислении по формуле (39, 10) следует применить известную из алгебры формулу Ньютона для возведения бинома в целую и положительную степень.

Например, выражение $\frac{\partial^2}{\partial x^3}dx^3 \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 \cdot z$ следует заменить выражением $\frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2}dx^3dy^2$, а выражение $\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2\frac{\partial}{\partial y}dy\cdot z$ выражением $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy$ и т. д....

Вычисление дифференциалов любого порядка функции $z = f(x, y)$, где x и y — независимые переменные, по формулам, приведенным в этом параграфе, не может вызвать у читателя никаких затруднений, так как по существу все вычисления сводятся к определению частных производных высших порядков, которые читатель уже умеет находить.

Мы разъясним при решении задач другой способ нахождения дифференциалов высших порядков, который даст возможность определять их, минуя вычисление частных производных, а по известному выражению дифференциала мы сможем находить и частные производные.

Задача 39, 16. Найти d^2z функции $z = x^2y^2$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся формулой (39, 6), для чего определим все частные производные, входящие в нее:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2; \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2.$$

Подставляя вторые производные в (39, 6), находим, что

$$d^2z = 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2.$$

Второй способ. Определим сначала дифференциал первого порядка заданной функции, опираясь на основные формулы:

$$dz = y^2d(x^2) + x^2d(y^2) = y^2\cdot 2xdx + x^2 \ 2ydy = 2xy^2dx + 2x^2ydy = 2xy(ydx + xdy).$$

Для определения d^2z дифференцируем dz, но при этом следует иметь в виду, что так как x и y — независимые переменные, то их дифференциалы dx и dy — величины постоянные, которые при дифференцировании выносятся за знак дифференциала. Учитывая это, получим

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d[2xy(ydx + xdy)] = 2[d(xy)(ydx + xdy) + \\ &+ xy\,d(ydx + xdy)] = 2[(ydx + xdy)(ydx + xdy) + \\ &+ xy \cdot (dydx + dxdy)] = 2[(ydx + xdy)^2 + xy \cdot 2dxdy] = \\ &= 2[(y^2dx^2 + 2xydxdy + x^2dy^2) + 2xydxdy] = \\ &= 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2. \end{aligned} \tag{39, 11}$$

Теперь уже, зная дифференциал второго порядка, можно найти частные производные второго порядка. Легко усмотреть, что коэффициент при dx^2 равен $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, коэффициент при $dxdy$ есть $2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, а коэффициент при dy^2 есть $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Это следует из того, что при произвольных dx и dy равенство

$$Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

имеет место только при условии, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A;\ 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C.$$

Таким образом, из (39, 11) заключаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$$

и совпадает с ранее найденными значениями этих производных.

Сейчас подробно двумя способами будет решена еще одна задача.

Задача 39, 17. Найти дифференциал третьего порядка d^3z функции $z = \cos(x + 2y^2)$.

Решение. Первый способ. Воспользуемся формулой (39, 7), для чего прежде всего определим частные производные третьего порядка, входящие в эту формулу.

Производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(x + 2y^2);\ \frac{\partial z}{\partial y} = -4y\sin(x + 2y^2).$$

Производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(x + 2y^2);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4y\cos(x + 2y^2);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4\sin(x + 2y^2) - 16y^2\cos(x + 2y^2). \tag{39, 12}$$

Производные третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \sin(x + 2y^2); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 4y\sin(x + 2y^2);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -4\cos(x + 2y^2) + 16y^2\sin(x + 2y^2);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -16y\cos(x + 2y^2) - 32y\cos(x + 2y^2) + 64y^3\sin(x + 2y^2) =$$

$$= -48y\cos(x + 2y^2) + 64y^3\sin(x + 2y^2). \qquad (39, 13)$$

Подставляя значения третьих частных производных в (39, 7), получим, что

$$d^3z = \sin(x + 2y^2)\,dx^3 + 3\cdot 4y\sin(x + 2y^2)\,dx^2dy +$$
$$+ 3[-4\cos(x + 2y^2) + 16y^2\sin(x + 2y^2)]\,dxdy^2 +$$
$$+ [-48y\cos(x + 2y^2) + 64y^3\sin(x + 2y^2)]\,dy^3.$$

Второй способ. Теперь мы вычислим третий дифференциал d^3z тремя последовательными дифференцированиями:

$$dz = -\sin(x + 2y^2)\,dx - 4y\sin(x + 2y^2)\,dy;$$

$$dz = -\sin(x + 2y^2)\cdot(dx + 3ydy).$$

Дифференцируя второй раз, следует помнить, что дифференциалы dx и dy независимых переменных должны рассматриваться как величины постоянные, а потому они должны выноситься за знак дифференциала

$$d^2z = d(dz) = d[-\sin(x + 2y^2)\cdot(dx + 4ydy)] =$$
$$= d[-\sin(x + 2y^2)]\cdot(dx + 4ydy) + [-\sin(x + 2y^2)]\,d(dx + 4ydy) =$$
$$= [-\cos(x + 2y^2)\,dx - 4y\cos(x + 2y^2)\,dy]\,(dx + 4ydy) +$$
$$+ [-\sin(x + 2y^2)]\,4dydy = -\cos(x + 2y^2)\,dx^2 -$$
$$-4y\cos(x + 2y^2)\,dydx - 4y\cos(x + 2y^2)\,dxdy -$$
$$-16y^2\cos(x + 2y^2)\,dy^2 - 4\sin(x + 2y^2)\,dy^2 = -\cos(x + 2y^2)\,dx^2 -$$
$$-8y\cos(x + 2y^2)\,dxdy - [16y^2\cos(x + 2y^2) + 4\sin(x + 2y^2)]\,dy^2.$$

Читатель легко заметит, что коэффициенты при dx^2, $dxdy$ и dy^2 равны соответственно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, которые были найдены выше в выражениях (39, 12).

Чтобы упростить определение дифференциала третьего порядка, выражение дифференциала второго порядка перепишем в виде

$$d^2z = -\cos(x + 2y^2)(dx^2 + 8ydxdy + 16y^2dy^2) - 4\sin(x + 2y^2)\,dy^2.$$

Тогда

$$d^3z = d\,(d^2z) = d\,[-\cos(x+2y^2)\,(dx^2 + 8y\,dx\,dy + 16y^2dy^2] +$$
$$+ d\,[-4\sin(x+2y^2)\,dy^2] = d\,[-\cos(x+2y^2)]\,(dx^2 + 8y\,dx\,dy +$$
$$+ 16y^2dy^2) + [-\cos(x+2y^2)]\,d\,(dx^2 + 8y\,dx\,dy + 16y^2dy^2) +$$
$$+ d\,[-4\sin(x+2y^2)]\,dy^2 = [\sin(x+2y^2)\,dx +$$
$$+ 4y\sin(x+2y^2)\,dy]\,(dx^2 + 8y\,dx\,dy + 16y^2dy^2) +$$
$$+ [-\cos(x+2y^2)]\,(8dy\,dx\,dy + 32y\,dy\,dy^2) +$$
$$+ [-4\cos(x+2y^2)\,dx - 16y\cos(x+2y^2)\,dy]\,dy^2 =$$
$$= \sin(x+2y^2)\,dx^3 + 4y\sin(x+2y^2)\,dx^2dy + 8y\sin(x+2y^2)\,dx^2dy +$$
$$+ 32y^2\sin(x+2y^2)\,dx\,dy^2 + 16y^2\sin(x+2y^2)\,dx\,dy^2 +$$
$$+ 64y^3\sin(x+2y^2)\,dy^3 - 8\cos(x+2y^2)\,dx\,dy^2 -$$
$$- 32y\cos(x+2y^2)\,dy^3 - 4\cos(x+2y^2)\,dx\,dy^2 -$$
$$- 16y\cos(x+2y^2)\,dy^3 = \sin(x+2y^2)\,dx^3 + 12y\sin(x+2y^2)\,dx^2dy +$$
$$+ [48y^2\sin(x+2y^2) - 12\cos(x+2y^2)]\,dx\,dy^2 +$$
$$+ [64y^3\sin(x+2y^2) - 48y\cos(x+2y^2)]\,dy^3.$$

Теперь легко усмотреть, что коэффициенты при dx^3, dx^2dy, $dxdy^2$ и dy^3 равны соответственно: $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, значения которых были найдены выше (выражения (39, 13)).

Задача 39, 18 (для самостоятельного решения). Найти двумя способами d^2z функции $z = x^3y^3$.

Ответ. $d^2z = 6xy^3dx^2 + 18x^2y^2dxdy + 6x^3ydy^2$.

Задача 39, 19 (для самостоятельного решения). Найти двумя способами дифференциал третьего порядка функции $z = \sin(2x + y)$ при $x = \frac{\pi}{2}$; $y = 0$.

Ответ. $d^3z = 8dx^3 + 12dx^2dy + 6dxdy^2 + dy^3$.

Задача 39, 20 (для самостоятельного решения). Найти дифференциал второго порядка функций:

1) $z = e^{x-y^2} + \cos x$; 2) $z = y\ln x$;
3) $z = xy$; 4) $z = e^{ax+by}$; 5) $y + e^{xy}$.

Ответ.

1) $d^2z = (e^{x-y^2} - \cos x)\,dx^2 - 4ye^{x-y^2}dxdy + 2e^{x-y^2}(2y^2 - 1)\,dy^2$;
2) $d^2z = -\frac{y}{x^2}\,dx^2 + \frac{2}{x}\,dxdy$;
3) $d^2z = 2dxdy$; 4) $d^2z = e^{ax+by}(adx + bdy)^2$;
5) $d^2z = e^{xy}y^2dx^2 + 2e^{xy}(xy + 1)\,dxdy + x^2e^{xy}dy^2$.

Задача 39, 21 (для самостоятельного решения). Найти дифференциалы третьего порядка функций:

1) $z = x^4y - xy^4$;
2) $z = x\sin y + y\cos x$;

определить все частные производные третьего порядка.

Ответ.

1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24xy$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 12x^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2} = -12y^2$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -24xy$;

2) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y \sin x$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -\cos x$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\sin y$; $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -x \cos y$.

б) Аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ являются функциями одной или нескольких независимых переменных.

Задача 39, 22. Вычислить дифференциал второго порядка функции $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

Решение. Здесь уже x и y — не независимые переменные, а функции независимых переменных u и v, т. е. заданная функция является сложной.

Если при вычислении дифференциала первого порядка функции $z = f(x, y)$ совершенно безразлично, будут ли аргументы независимыми переменными или функциями других независимых переменных (свойство инвариантности дифференциала первого порядка), то при вычислении дифференциалов высших порядков надо строго различать эти два случая.

Так как $z = f(x, y)$, то $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

При повторном дифференцировании мы теперь не можем уже, как это делалось раньше, считать дифференциалы dx и yd величинами постоянными, потому что x и y — не независимые переменные, а функции независимых переменных u и v. Поэтому

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d(dx) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d(dy);$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy;$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy;$$

$$d(dx) = d^2 x; \quad d(dy) = d^2 y.$$

Подставляя только что найденные величины в предыдущее равенство, получим, что

$$d^2 z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy\right) dx + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) dy + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y.$$

Окончательно после приведения подобных членов получаем

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y,$$

или в другой записи (символической):

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y. \qquad (39, 14)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (39, 6) или (39, 8) для вычисления второго дифференциала функции $z = f(x, y)$ в том случае, когда аргументы x и y являются независимыми переменными, мы видим, что в рассматриваемом случае появились два дополнительных слагаемых $\frac{\partial z}{\partial x} d^2x$ и $\frac{\partial z}{\partial y} d^2y$.

Заметим, что формула (39, 6) является частным случаем формулы (39, 14), так как если x и y — независимые переменные, то dx и dy — величины постоянные, а потому их дифференциалы $d^2x = 0$ и $d^2y = 0$, добавочные слагаемые становятся равными нулю и мы получаем из (39, 14) формулу (39, 6).

Формулу (39,6) вряд ли имеет смысл запоминать. Значительно важнее уяснить метод, с помощью которого она была получена.

Задача 39, 23. Определить d^2z, если $z = x^y$, где $x = uv$; $y = u + v$.

Решение. Дифференциал первого порядка

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial z} dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy;$$

$$\begin{aligned} d^2z = d(dz) &= d(yx^{y-1}dx) + d(x^y \ln x\, dy) = d(yx^{y-1})\, dx + \\ &+ yx^{y-1}d(dx) + d(x^y \ln x)\, dy + x^y \ln x \cdot d(dy) = \\ &= [dy \cdot x^{y-1} + yd(x^{y-1})]\, dx + yx^{y-1}d^2x + \\ &+ [d(x^y) \ln x + x^y d(\ln x)]\, dy + x^y \ln x \cdot d^2y. \end{aligned}$$

Нам осталось вычислить дифференциалы $d(x^{y-1})$; $d(x^y)$ и $d(\ln x)$:

$$\begin{aligned} d(x^{y-1} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^{y-1})\, dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^{y-1})\, dy = \\ &= (y-1)\, x^{y-2}dx + x^{y-1} \ln x dy; \\ d(x^y) &= yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy; \\ d(\ln x) &= \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

Подставляя эти величины в предыдущее равенство, имеем

$$\begin{aligned} d^2z &= \{x^{y-1}dy + y[(y-1)\, x^{y-2}dx + x^{y-1} \ln x\, dy]\}\, dx + \\ &+ yx^{y-1}d^2x + \left[(yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy) \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} dx\right] dy + \\ &+ x^y \ln x \cdot d^2y = y(y-1)\, x^{y-2}dx^2 + 2(x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x)\, dxdy + \\ &+ x^y \ln^2 x \cdot dy^2 + yx^{y-1}d^2x + x^y \ln x \cdot d^2y. \qquad (39, 14) \end{aligned}$$

На основании данных задачи надо в последнее выражение подставить $x = uv$; $y = u + v$; $dx = udv + vdu$; $dx^2 = (udv + vdu)^2$; $dy = du + dv$; $dy^2 = (du + dv)^2$; $d^2x = du\, dv + dv\, du = 2\, du\, dv$; $d^2y = 0$, так как du и dv, как дифференциалы независимых переменных, — величины постоянные, а значит, их дифференциалы равны нулю.

Решение задачи можно, конечно, провести сразу по формуле (39, 14), и тогда было бы

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x.$$

Подставляя эти значения в (39, 14), получим выражение d^2z, уже ранее найденное. В нем следует сделать замены, указанные выше.

Задача 39, 24 (для самостоятельного решения). Найти дифференциал второго порядка функции $z=f(u, v)$, где $u=x^2+y^2$; $v=xy$.

Указание. Здесь u и v — промежуточные переменные, а x и y — независимые переменные.

Формула (39, 14) должна быть переписана в виде

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}du dv+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}dv^2+\frac{\partial z}{\partial u}d^2u+\frac{\partial z}{\partial v}d^2v;$$

$$du=2x\,dx+2y\,dy;\quad du^2=4(x^2\,dx^2+2xy\,dx\,dy+y^2\,dy^2);$$

$$d^2u=2\,dx^2+2\,dy^2;\quad d^2v=2dx\,dy.$$

Ответ.

$$d^2z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}4x^2+4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+2\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot y^2\right)dx^2+$$
$$+2\left(4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial v}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx\,dy+$$
$$+\left(4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+4xy\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+2\frac{\partial z}{\partial v}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)dy^2.$$

Задача 39, 25 (для самостоятельного решения). Использовать результат, полученный в предыдущей задаче, если $z=e^u\cos v$, а u и v имеют те же значения, что и в задаче (39, 24).

СОРОКОВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Линии и поверхности уровня. Производная функции по заданному направлению. Градиент функции.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Физическим полем называется часть пространства, в которой происходит физическое явление.

1. Скалярное поле

Физическое поле называется скалярным, если физическое явление, его образующее, характеризуется функцией $f=f(x, y, z)$, зависящей ***только от координат*** *точек пространства, в кото-*

ром это явление происходит. Скалярное поле полностью определено заданием одной функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных.*

Если физическое явление образовало скалярное поле, то каждой точке $P(x_1, y_1, z_1)$ пространства, в котором происходит это явление, ставится в соответствие определенное число, характеризующее это явление в рассматриваемой точке. Это число есть частное значение функции $f(x, y, z)$, вычисленное в точке $P(x_1, y_1, z_1)$ (примерами скалярного поля являются: поле электрического потенциала, давление в атмосфере).

2. Поверхность уровня

Если однозначная функция $f(x, y, z$ соответствует скалярному полю, образованному физическим явлением, то ***поверхностью уровня*** *(иначе эквипотенциальной поверхностью) этого поля называется поверхность, во всех точках которой функция $f(x, y, z)$ сохраняет одно и то же значение.*

Поверхности уровня имеют уравнение

$$f(x, y, z) = c, \tag{40, 1}$$

где c — постоянная величина.

Придавая постоянной c различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня.

Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково.

Уравнение поверхности уровня, проходящей через точку $P(x_1, y_1, z_1)$, имеет вид

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1). \tag{40, 2}$$

3. Производная по направлению

Производная от функции $f(x, y, z)$ по направлению $(\bar{l})$ характеризует скорость изменения функции $f(x, y, z)$ по этому направлению.

Эта производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(l, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(l, y) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(l, z). \tag{40, 3}$$

* Предполагается, что функция $f(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция x, y, z, имеющая непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ равна нулю по любому направлению, касательному к поверхности уровня. Она достигает своего наибольшего значения по направлению нормали к поверхности уровня.

4. Градиент функции

Градиентом скалярной функции $f(x, y, z)$ называется вектор, проекции которого на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно равны $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и *$\frac{\partial f}{\partial r}$, т. е.*

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}. \tag{40, 4}$$

На основании этого определения проекции вектора $\operatorname{grad} f$ на координатные оси запишутся так:

$$(\operatorname{grad} f)_x = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad (\operatorname{grad} f)_y = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad (\operatorname{grad} f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{40, 5}$$

(предполагается при этом, что $f(x, y, z)$ — однозначная непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные).

Мудуль вектора $\operatorname{grad} f$ вычисляется по формуле

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \tag{40, 6}$$

Если $\bar{\tau}$ — единичный вектор направления $(\bar{l})$,

$$\bar{\tau} = \cos(l, x)\bar{i} + \cos(l, y)\bar{j} + \cos(l, z)\bar{k},$$

то формула (40, 3) запишется так:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f \cdot \tau). \tag{40, 7}$$

Вектор $\operatorname{grad} f$ в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания функции. Скорость изменения скалярной функции f по некоторому *направлению $(\bar{l})$ равна проекции вектора $\operatorname{grad} f$ на это направление, т. е.*

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\operatorname{grad} f)_l. \tag{40, 8}$$

В этом состоит основное свойство градиента функции.

Задача 40, 1. Скалярное поле образовано функцией

$$V = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Найти поверхности уровня этого поля.

Решение. На основании формулы (40, 1) уравнение семейства поверхностей уровня найдем в виде

$$\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}=c,$$

или

$$R^2-x^2-y^2-z^2=c^2.$$

Отсюда уже получаем окончательно $x^2+y^2+z^2=R^2-c^2$. Поверхностями уровня является семейство концентрических сфер.

Задача 40, 2. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$v=\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решение. По формуле (40, 1) уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид

$$\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=c.$$

Отсюда

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\operatorname{tg}c,$$

и окончательно

$$z^2=\operatorname{tg}^2 c\,(x^2+y^2).$$

Это уравнение семейства круговых конусов с общей вершиной в начале координат. Их общей осью является ось Oz.

Задача 40, 3. Найти производную функции $f(x, y)=x^3-y^3$ в точке $M(1, 1)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем угол $\alpha=60^\circ$ с положительным направлением оси Ox.

Решение. В формуле (40, 3)

$$\cos(l, x)=\cos\alpha=\cos 60^\circ=\frac{1}{2};$$

$$\cos(l, y)=\cos(90-\alpha)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos(l, z)=0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2.$$

Подстановка в (40, 3) дает

$$\frac{\partial f}{\partial l}=3x^2\quad\frac{1}{2}-3y^2\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В точке $M(1, 1)$ имеем $x=1$, $y=1$. Подставляя эти значения x и y в последнее равенство, будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial l}=3\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}).$$

Итак, искомая производная

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}).$$

Задача 40, 4. Найти производную функции $f(x\quad y)=3x^2-6xy+y^2$ в точке $A\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2}\right)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox. В каком направлении эта производная имеет: а) наибольшее значение; б) наименьшее значение; в) значение, равное нулю?

Найти также градиент этой функции, его модуль и его направляющие косинусы.

Решение. По условию задачи $\cos(l,\ x)=\cos\alpha$, и тогда

$$\cos(l,\ y)=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$$

Дальше: $\frac{\partial f}{\partial x}=6x-6y$; $\frac{\partial f}{\partial y}=4y-6x$.

Подстановка в формулу (40, 3) дает

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(6x-6y)\cos\alpha+(2y-6x)\sin\alpha;$$

в точке $A\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\left[6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cos\alpha+\left[2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\sin\alpha,$$

т. е. $\frac{\partial f}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha.$

Теперь нам надо найти те значения α, при которых $\frac{\partial f}{\partial l}$ имеет значения: а) наибольшее, б) наименьшее, в) равное 0.

Обозначим $u=\cos\alpha+\sin\alpha$ и найдем экстремум этой функции $u'=-\sin\alpha+\cos\alpha$. Из уравнения $-\sin\alpha+\cos\alpha=0$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha=1$, а $\alpha=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Считая, что α может изменяться от 0 до 2π, из последней формулы получаем

при $k=0$ $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$ при $k=1$ $\alpha_2=\frac{5\pi}{4}$, $u''=-\cos\alpha-\sin\alpha$, и так как $u''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$, то при $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$ функция u достигает максимума, а вместе с тем и наибольшего значения.

Таким образом, производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ нашей функции имеет наибольшее значение по направлению, составляющему с положительным направлением оси Ox угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

При $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ имеем $u''\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2} > 0$. Производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ имеет наименьшее значение по направлению, составляющему с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{5}{4}\pi$.

Ответим теперь на последний вопрос задачи: надо найти то значение α, при котором $\frac{\partial f}{\partial l} = 0$, т. е. при котором $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$. Решая это уравнение, имеем $\cos\alpha = -\sin\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha = -1$ и для α, содержащегося между 0 и 2π, получаем

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi \text{ и } \alpha = \frac{7}{4}\pi.$$

Другое решение этой же задачи: мы нашли, что направление наибыстрейшего роста функции составляет с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Известно, что **направление наибыстрейшего роста функции в данной точке совпадает с направлением вектора, являющегося градиентом этой функции,** который определяется формулой (40, 4), а длина его находится по формуле (40, 6).

Для нашей функции $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + y^2$

$$\operatorname{grad} f = (6x - 6y)\cdot\bar{i} + (2y - 6x)\cdot\bar{j},$$

а в точке $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ $(\operatorname{grad} f)_{\substack{x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}}} = \bar{i} + \bar{j}.$

Длина вектора $\operatorname{grad} f$ в этой точке

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

а его проекция на оси прямоугольной системы координат равна

$$(\operatorname{grad} f)_x = 1; \quad (\operatorname{grad} f)_y = 1.$$

Известно, что направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|};$$

в нашем случае вектор $\operatorname{grad} f$ в точке $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ имеет направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значит, вектор $\operatorname{grad} f$ составляет в точке $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ с положительным направлением оси Ox угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Этого и следовало ожидать потому, что этот вектор указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке, а мы нашли, что производная $\frac{\partial f}{\partial l}$, определяющая скорость изменения функции, достигает своего наибольшего значения именно по направлению $\bar{l}$, составляющему угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси Ox.

Задача 40, 5. Определить производную функции

$$f(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$$

в точке $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ в направлении $\bar{l}$, составляющем с осями прямоугольной системы координат Ox, Oy, Oz углы, соответственно равные α, β и γ, градиент этой функции, его величину и направляющие косинусы.

Решение 1. По формуле (40, 3) находим производную $\frac{\partial f}{\partial l}$ по указанному в задаче направлению. Чтобы воспользоваться этой формулой, найдем частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial z}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y^2 + z^2); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2 + z^2); \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z(y^2 + x^2).$$

Подставляя эти значения производных в (40, 3), получим

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 2x(y^2 + z^2)\cos\alpha + 2y(x^2 + z^2)\cos\beta + 2z(z^2 + y^2)\cos\gamma.$$

В точке $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ значение $\frac{\partial f}{\partial l}$ найдем, подставив в предыдущее равенство $x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_A = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

2. По формуле (40, 4)

$$\operatorname{grad} f = 2x(y^2 + z^2)\,\bar{i} + 2y(x^2 + z^2)\,\bar{j} + 2z(x^2 + y^2)\,\bar{k}.$$

В точке A $(\operatorname{grad} f)_A = \bar{i} + \bar{j} + k$, а его проекции на координатные оси и его модуль в этой точке равны:

$$(\operatorname{grad} f)_x = (\operatorname{grad} f)_y = (\operatorname{grad} f)_z = 1,$$

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Направляющие косинусы вектора $\operatorname{grad} f$ в точке A равны:

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Контроль: $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1$).

Эти направляющие косинусы определяют направление наибыстрейшего роста нашей функции в точке A.

Если направление $\bar{l}$, о котором шла речь в задаче, совпадало бы с направлением вектора $\operatorname{grad} f$, то производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ достигла бы своего наибольшего значения в этом направлении, и тогда в точке A

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Задача 40, 6. Найти $|\operatorname{grad} u|$ и направляющие косинусы градиента в точке $A(x_0, y_0, z_0)$, если функция $u = \frac{1}{r}$,

где
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (40, 6) для определения $\operatorname{grad} u$, нам надо найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$. У нас $u = \frac{1}{r}$, а потому проекция градиента этой функции на оси Ox

$$\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}, \text{ но } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

а потому $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$, и тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}$,

или $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$.

Аналогично $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$; $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z = \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$.

Пользуясь формулой (40, 6), получаем, что

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\frac{x^2}{r^6} + \frac{y^2}{r^6} + \frac{z^2}{r^6}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^6}} = \frac{1}{r^2}.$$

В точке A $|\operatorname{grad} u| = \frac{1}{r_0^2}$, где

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Направляющие косинусы вектора $a = \operatorname{grad}\frac{1}{r}$ найдем по формулам

$$\cos(a, x) = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|};\quad \cos(\bar{a}\ y) = \frac{a_y}{|\bar{a}|} =$$

$$= \frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|};\quad \cos(\bar{a}, z) = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = \frac{\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_s}{\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|}.$$

Подставляя в эти формулы найденные значения $\left|\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right|$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_x$, $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_y$ и $\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)_z$, получим

$$\cos(\bar{a},\ x) = -\frac{x}{r^5};\ \cos(\bar{a},\ y) = -\frac{y}{r^5};\ \cos(\bar{a},\ z) = -\frac{z}{r^5}.$$

Чтобы найти значения направляющих косинусов градиента нашей функции в точке A, надо в последних формулах заменить x, y и z соответственно на x_0, y_0 и z_0, а r — на

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

СОРОК ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференцирование неявных функций.

1. Если независимая переменная x и функция y связаны уравнением

$$f(x,\ y) = 0, \tag{41, 1}$$

неразрешенным относительно y, то говорят, что y есть неявная функция x (или функция y от x задана неявно). Для того чтобы, не решая уравнение (41,1) относительно y, найти производную от y по x, пользуются формулой

$$y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{41, 2}$$

Чтобы определить вторую производную от y по x, надо переписать (41, 2) в виде $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\ y' = 0$, продифференцировать его по x и в полученном выражении заменить y' уже найденным значением (41,2). Точно так же определяется y''' и т. д.

Запоминать достаточно громоздкие формулы для определения y'' и y''' не имеет смысла. На примерах будет показан метод определения производных высших порядков в рассматриваемом случае.

Задача 41, 1. Определить y' и y'', если функция y от x задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, где a — величина постоянная.

Решение. Обозначим левую часть этого уравнения через $f(x,\ y)$. Чтобы воспользоваться формулой (41, 2), найдем $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} 3x^2 - 3ay;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax.$$

Подставляя эти выражения в (41, 2), получим после сокращения на 3

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}. \tag{41, 3}$$

Чтобы определить y'', перепишем равенство (41,3) в таком виде:

$$x^2 - ay + (y^2 - ax)\,y' = 0. \tag{41,4}$$

Продифференцируем его по x, помня, что y есть функция от x. Здесь следует применить правило дифференцирования сложной функции. Получим

$$2x - ay' + (2yy' - a)\,y' + (y^2 - ax)\,y'' = 0,$$

или

$$2x - 2ay' + 2yy'^2 + (y^2 - ax)\,y'' = 0.$$

Подставляя сюда вместо y' его значение из (41,3), получим

$$2x - 2a\cdot\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) + 2y\cdot\left(\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)^2 + (y^2 - ax)\,y'' = 0.$$

Отсюда

$$y'' = -\frac{2x + 2a\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax} + 2y\left(\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)^2}{y^2 - ax},$$

или

$$y'' = -\frac{2x\,(y^2 - ax)^2 + 2a\,(x^2 - ay)\,(y^2 - ax) + 2y\,(x^2 - ay)^2}{(y^2 - ax)^3}.$$

Если в числителе дроби раскрыть скобки и сделать приведение подобных членов, то получится выражение $2xy^4 + 2x^4y - 6ax^2y^2 + 2a^3xy$, которое выгодно переписать в виде $2xy\,(x^3 + y^3 - 3axy) + 2a^3xy$. Так как по условию $x^3 + y^3 - 3axy$ равняется нулю, то окончательно числитель дроби равен $2a^3xy$, а

$$y'' = -\frac{2a^3xy}{(y^2 - ax)^3}, \quad \text{или} \quad y'' = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}.$$

Задача 41, 2. Функция y от x задана уравнением

$$x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + 3y + 2 = 0.$$

Определить y', y'', y''' при $x = 2$; $y = 0$.

Решение. Обозначим левую часть заданного уравнения через $f(x, y)$. Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y - 2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 8y + 3,$$

и на основании (41,2)

$$y' = -\frac{2x - 3y - 2}{-3x + 8y + 3}. \tag{41,5}$$

Подставляя вместо x и y их значения, имеем

$$y'(2,0) = -\frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 2}{-3 \cdot 2 + 8 \cdot 0 + 3}; \quad y'(2, 0) = \frac{2}{3}.$$

Перепишем (41,5) в виде

$$2x - 3y - 2 - (3x - 7y - 3)\, y' = 0.$$

Продифференцируем это равенство по x, имея опять-таки в виду, что y есть функция x:

$$2 - 3y' - (3 - 8y')\, y' - (3x - 8y - 3)\, y'' = 0. \qquad (41,6)$$

Подставляя сюда вместо x и y их значения, а вместо y' — найденное выше его значение $\left(y' = \frac{2}{3}\right)$, получим

$$2 - 3 \cdot \frac{2}{3} - \left(3 - 8 \cdot \frac{2}{3}\right)\frac{2}{3} - (3 \cdot 2 - 8 \cdot 0 - 3)\, y'' = 0,$$

откуда

$$+\frac{14}{9} - 3y'' = 0; \text{ а } y'' = \frac{14}{27}.$$

Для определения y''' продифференцируем опять по x равенство (41,6):

$$-3y'' - (-8y'')\, y' - (3 - 8y')\, y'' - (3 - 8y')\, y'' - (3x - 8y - 3)\, y''' = 0.$$

Подставляя сюда данные значения x и y и уже найденные значения y' и y'', получим, что

$$-294 + 243y''' = 0, \text{ а } y''' = \frac{98}{81}.$$

Задача 41, 3 (для самостоятельного решения). Кривая определена уравнением $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

Определить, в какую сторону направлена вогнутость этой кривой в точке (1,1).

Указание. Направление вогнутости кривой в данной точке определяется знаком второй производной в этой точке. Поэтому следует найти y''.

Ответ. $y' = 0$; $1 + 2y' + y'^2 + (x + y + 1)\, y'' = 0$; $y'' = -\frac{1}{3}$. Кривая в точке (1,1) обращена вогнутостью в сторону отрицательных ординат.

Задача 41, 4 (для самостоятельного решения). Найти y''' функции, заданной в предыдущей задаче при тех же значениях x и y.

Указание. Продифференцировать по x полученное при решении предыдущей задачи равенство $1 + 2y' + y'^2 + (x + y + 1)\, y'' = 0$.

Ответ. $y''' = \frac{1}{3}$.

Задача 41, 5 (для самостоятельного решения). Функция y от x задана уравнениями:

$$1)\ x\sin y-\cos y+\cos 2y=0,$$
$$2)\ y\sin x-\cos(x-y)=0,$$
$$3)\ \sin x\ln y+\cos y\ln x=0.$$

Найти y'.

Ответ. 1) $y'=-\dfrac{\sin y}{x\cos y+\sin y-2\sin 2y}$;

2) $y'=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$,

3) $y'=\dfrac{\cos x\ln y+\dfrac{1}{x}\cos y}{\sin y\ln x-\dfrac{1}{y}\sin x}$.

Задача 41, 6 (для самостоятельного решения). Кривая определена уравнением

$$x^2-2xy+5y^2-2x+4y+1=0.$$

В точке $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ на ней определить уравнение касательной нормали, направление вогнутости, а также y'''.

Ответ. Уравнение касательной $2y+1=0$; уравнение нормали $2x-1=0$; $y''=1$. Кривая обращена вогнутостью в сторону положительных ординат; $y'''=-3$.

Указание 1. Касательная к кривой $f(x,\ y)=0$ в точке $P(x_0,\ y_0)$ определяется уравнением $y-y_0=y'(x_0,\ y_0)(x-x_0)$, а нормаль

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0,y_0)}(x-x_0).$$

1. Если функция z от двух независимых переменных x и y задается уравнением

$$f(x,\ y,\ z)=0, \tag{41,7}$$

не разрешенным относительно z, то говорят, что z есть неявная функция переменных x и y. В этом случае частные производные функции z по независимым переменным x и y определяются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}. \tag{41,8}$$

На примерах будет показано, как можно определить в рассматриваемом случае производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, не прибегая к готовым формулам (41,8).

На примерах будет также показан и метод определения частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Задача 41, 7. Функция z независимых переменных x и y задана уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Первый способ. Перенесем a^2 в левую часть данного уравнения и обозначим ее через $f(x, y, z)$. Тогда $f(x, y, z)=$ $=x^2+y^2+z^2-a^2=0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x; \ \frac{\partial f}{\partial y}=2y; \ \frac{\partial f}{\partial z}=2z.$$

Подставляя эти значения в (41,8), будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z}; \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{2z}=-\frac{y}{z}.$$

Второй способ. Продифференцируем данное уравнение и получим

$$2xdx+2ydy+2zdz=0,$$

отсюда

$$dz=-\frac{x}{z}dx-\frac{y}{z}dy. \qquad (41,9)$$

С другой стороны, мы знаем, что дифференциал функции $z=\varphi(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (41,10)$$

Сравнивая формулу (41,10) с выражением (41,9), мы заключаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}; \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z};$$

таким образом, мы определили искомые производные, не прибегая к готовым формулам (41,8).

Задача 41, 8. Функция z независимых переменных x и y задана неявно уравнением $4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4=0$. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x=1$; $y=1$; $z=1$.

Решение. Первый способ. Обозначим левую часть уравнения через $f(x, y, z)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x+y+1; \ \frac{\partial f}{\partial y}=4y+x-z; \ \frac{\partial f}{\partial z}=-6z-y.$$

По формулам (41,8) получаем

$$\frac{\partial z}{x\partial}=\frac{8x+4y+1}{6z+y}; \ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+4y-z}{6z+y}. \qquad (41,11)$$

Подставляя сюда значения $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$, получим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{13}{7}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4}{7}.$$

Второй способ. Дифференцируя заданное уравнение, получаем

$$8xdx + 4ydy - 6zdz + xdy + ydx - ydz - zdy + dx = 0,$$

или

$$(8x + y + 1)\,dx + (4y + x - z)\,dy + (-6z - y)\,dz = 0,$$

откуда

$$dz = \frac{8x + y + 1}{6z + y}dx + \frac{x + 4y - z}{6z + y}dy;$$

сравнение с формулой (41,10) показывает, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{8x + y + 1}{6z + y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + 4y - z}{6z + y},$$

что совпадает с выражениями (41,11), полученными раньше.

Задача 41, 9 (для самостоятельного решения). Функция z независимых переменных x и y задана уравнениями:

$$1)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0; \quad 2)\ \frac{z^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0.$$

$$3)\ xy + xz + yz = 1.$$

Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Решение провести двумя способами.

Ответ. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{p}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{q}$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y + z}{x + y}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x + z}{x + y}$.

Задача 41, 10. Из уравнения, заданного в задаче 41,7, определить вторые производные.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Решение. В указанной задаче было получено, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \text{ а } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1 \cdot z - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x}{z^2}.$$

Подставляя сюда значение $\frac{\partial z}{\partial x}$ получим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z - \left(-\frac{x}{z}\right)x}{z^2} = -\frac{z^2 + x^2}{z^2}.$$

Дифференцируя по y выражение $\frac{\partial z}{\partial x}$ и учитывая, что при дифференцировании по y переменная x, стоящая в числителе, рассматривается как величина постоянная (так как x и y — независимые переменные, то x не зависит от y), получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z^2}\left(-\frac{y}{z}\right) = -\frac{xy}{z^3}.$$

Аналогично находим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}$.

Задача 41, 11. Из уравнения $f(x, y, z) = 0$, в котором x рассматривается как функция независимых переменных y и z, определить $\frac{\partial x}{\partial y}$ и $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Решение. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

откуда следует, что

$$dx = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}dy - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}dz.$$

С другой стороны, если x есть функция y и z:

$$x = x(y, z), \text{ то } dx = \frac{\partial x}{\partial y}dy + \frac{\partial x}{\partial z}dz.$$

Сравнивая последнее равенство с предыдущим, получим, что

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}; \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Задача 41, 12 (для самостоятельного решения). Из уравнения $f(x, y, z) = 0$, в котором y рассматривается как функция независимых переменных x и z, определить

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Ответ. $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$

СОРОК ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Экстремум функции нескольких независимых переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух независимых переменных.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Экстремум функции

***Определение* 1.** *Функция $u = f(x, y, z, \ldots, v)$ при некоторой системе значений x_0, y_0, $z_0 \ldots$, v_0 независимых переменных имеет максимум (минимум), если приращение функции*

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z,\ \ldots,\ v_0 + \Delta v) -$$
$$- f(x_0,\ y_0,\ \ldots,\ v_0)$$

отрицательно (положительно) при всевозможных, достаточно малых по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных значениях

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ \ldots,\ \Delta v.$$

Максимум или минимум функции называется ее экстремумом.

Необходимые условия экстремума

Если функция $u = f(x, y, z, \ldots, v)$ достигает экстремума при значениях независимых переменных $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots, v = v_0, \ldots$, то при этих значениях или выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0;\ \ldots;\ \frac{\partial u}{\partial v} = 0, \qquad (42,1)$$

или частные производные при этих значениях не существуют.

Иначе: ***в точке экстремума первый дифференциал функции равен нулю или не существует. Количество уравнений (41,1) равно числу независимых переменных.***

Точки, в которых выполняются равенства (42,1), называются стационарными точками функции.

Равенства (42,1) выражают необходимое, но недостаточное условие экстремума функции нескольких независимых переменных. Это значит, что не при всех тех значениях независимых переменных, при которых эти равенства выполняются, функция имеет экстремум.

Достаточные условия экстремума

Для того чтобы решить вопрос, какие из значений независимых переменных, получаемых из уравнений (42,1), доставляют функции максимум или минимум, или ни то, ни другое, обращаются к исследованию дифференциала второго порядка этой функции.

Если при значениях независимых переменных, найденных из уравнений (42,1), дифференциал второго порядка функции сохраняет постоянный знак при всевозможных достаточно малых по абсолютной величине приращениях независимых переменных, то функция при этих значениях имеет экстремум, причем максимум будет в том случае, когда дифференциал второго порядка отрицателен, а минимум — когда он положителен.

Если дифференциал второго порядка при значениях независимых переменных, найденных из системы уравнений (42,1), не сохраняет постоянного знака, то для этих значений функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Если же окажется, что при этих значениях дифференциал второго порядка обратится в нуль, то решение вопроса об экстремуме требует исследование дифференциалов порядка выше, чем второй.

Правило определения экстремума функции двух независимых переменных

Чтобы определить экстремум функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных, следует:

1) Определить стационарные точки, в которых функция может достигать экстремума, для чего надо решить систему уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{xy} = 0;$$

2) Определить вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3) Вычислить значения вторых частных производных в каждой стационарной точке, а полученные числа обозначить соответственно через A, B и C.

4) Составить выражение $\Delta = AC - B^2$. При этом,

а) если $\Delta > 0$, то экстремум в стационарной точке есть: если $A > 0$, то будет минимум, а при $A < 0$ — максимум;

б) если $\Delta < 0$, то экстремума в рассматриваемой стационарной точке нет;

в) если $\Delta = 0$, то имеет место сомнительный случай, и для заключения об экстремуме надо привлечь к рассмотрению частные производные порядка выше второго (этот случай в программу не входит и нами не рассматривается).

Задача 42,1. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430.$$

Решение. Прежде всего определяем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 36y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 36x. \tag{42, 2}$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{42,1}$$

которая в нашем случае запишется так:

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0, \\ 6y^2 - 36x = 0; \end{cases}$$

после сокращения на 6 имеем

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 0, \\ y^2 - 6x = 0. \end{cases} \tag{42,3}$$

Из первого уравнения $y = \frac{x^2}{6}$. Подставляя его во второе уравнение, получим $\frac{x^4}{36} - 6x = 0$, или $x^4 - 216x = 0$, которое перепишем так:

$$x(x^3 - 216) = 0.$$

Разлагая на множители выражение в скобках, получим уравнение $x(x-6)(x^2+6x+36) = 0$.

Отсюда следует, что $x_1 = 0$; $x_2 = 6$, а остальные два корня — комплексные, которые нас не интересуют (это корни уравнения $x^2 + 6x + 36 = 0$).

Подставляя эти значения x в равенство $y = \frac{x^2}{6}$, получаем, что $y_1 = 0$; $y_2 = 6$.

Итак, есть две пары решений системы уравнений (42,3):

$$1)\ x_1 = 0;\ y_1 = 0;\quad 2)\ x_2 = 6;\ y_2 = 6.$$

Теперь определим число Δ, для чего найдем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Из (42,2) получаем, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y,$$

Поставим теперь сюда сначала первую пару решений, а потом вторую и определим числа A, B, C и Δ.

Для первой пары решений:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0;\quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=-36;\quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}=0,$$

а потому число $\Delta=AC-B^2=-36$.

Так как $\Delta<0$, то при $x=0$; $y=0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Для второй пары решений:

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=6\\y=6}}=72;\quad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=6\\k=6}}=-36;\quad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=6\\y=6}}=72.$$

Теперь число $\Delta=AC-B^2=72\cdot72-36^2=3888$, и так как оно положительно, то экстремум при значениях $x=6$; $y=6$ есть. Учитывая, что A — число положительное, заключаем, что при этих значениях x и y имеет место минимум. Чтобы определить минимальное значение функции, подставим в нее $x=6$, $y=6$ и получим $z_{\min}=-2$.

Замечание. Из $\Delta>0$ следует, что $AC-B^2>0$, $AC>B^2$, т. е. $AC>0$, а это означает, что A и C в случае, когда функция имеет экстремум, имеют один и тот же знак.

При решении этого примера читатель усмотрел, что не все значения независимых переменных, которые получаются при решении системы (42,1), доставляют функции экстремум. Так, значения $x=0$ и $y=0$, хотя и являются решениями системы (42,1), но при них функция не имеет ни максимума, ни минимума (экстремума нет).

Задача 42, 2. Исследовать на экстремум функцию

$$z=14x^3+27xy^2-69x-54y.$$

Решение. Находим прежде всего $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=42x^2+27y^2-69;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=54xy-54. \qquad (42,4)$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases}42x^2+27y^2-69=0,\\ 54xy-54=0.\end{cases}$$

После очевидных сокращений эта система запишется так:

$$\begin{cases}14x^2+9y^2=23,\\ xy=1.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим 4 пары решений, при которых исследуемая функция может иметь экстремум.

Первая пара: $x_1 = 1$; $y_1 = 1$; вторая пара: $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$; третья пара: $x_3 = -1$; $y_3 = -1$; четвертая пара: $x_4 = \frac{-3}{\sqrt{14}}$; $y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$.

Теперь определим, какие именно из этих значений доставляют функции экстремум.

Определим из (42,4) вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 84x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 54y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 54x.$$

Для каждой пары значений определим числа A, B и C и число Δ.

1. Для $x_1 = 1$; $y_1 = 1$ имеем

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 84; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}} = 54.$$

Число $\Delta = AC - B^2 = 84 \cdot 54 - 54^2 > 0$.

Экстремум есть, а так как $A > 0$, то имеет место минимум

$$z_{\min} = 14 \cdot 1 + 27 \cdot 1 \cdot 1 - 69 - 54 = -82.$$

2. Для $x_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_2 = \frac{\sqrt{14}}{3}$

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{252}{\sqrt{14}}; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = 18\sqrt{14}$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=x_2\\y=y_2}} = \frac{162}{\sqrt{14}}; \quad \Delta = AC - B^2 = \frac{252}{\sqrt{14}} \frac{162}{\sqrt{14}} - (18\sqrt{14})^2 < 0,$$

и при $x = \frac{3}{\sqrt{14}}$; $y = \frac{\sqrt{14}}{3}$ экстремума нет.

3. Для $x_3 = -1$; $y_3 = -1$

$$A = -84; \quad B = -54; \quad C = -54;$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-84)(-54) - (-54)^2 > 0.$$

Экстремум есть, и именно максимум, так как $A = -84 < 0$;

$$z_{\max} = -14 - 27 + 69 + 54 = 82.$$

4. Для $x_4 = -\frac{3}{\sqrt{14}}$; $y_4 = -\frac{\sqrt{14}}{3}$ имеем

$$A = -\frac{252}{\sqrt{14}};\quad B = -18\sqrt{14};\quad C = -\frac{162}{\sqrt{14}};$$

$$\Delta = AC - B^2 = \left(-\frac{252}{\sqrt{14}}\right)\left(-\frac{162}{\sqrt{14}}\right) - (-18\sqrt{14})^2 < 0.$$

Экстремума при значениях $x = x_4$ и $y = y_4$ нет.

Задача 42, 3 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию

$$z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y.$$

Ответ. Экстремума нет.

Задача 42, 4 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Указание. Система уравнений $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ приведет к системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Почленное сложение даст уравнение $x^3 + y^3 = 0$, откуда следует, что $y = -x$.

Подставляя в первое уравнение, получим $x^3 - 2x = 0$, откуда $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$, а $y_1 = 0$; $y_2 = -\sqrt{2}$; $y_3 = \sqrt{2}$.

Имеем три пары решений: 1) $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; 2) $x_2 = \sqrt{2}$; $y_2 = -\sqrt{2}$; 3) $x_3 = -\sqrt{2}$; $y_3 = \sqrt{2}$.

Ответ. $z_{\min} = -8$ при $x_2 = \sqrt{2}$, $y_2 = -\sqrt{2}$ и при $x_3 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$. Вопрос об экстремуме при $x = 0$, $y = 0$ остается открытым.

Задача 42, 5 (для самостоятельного решения). Исследовать на экстремум функции: 1) $z = x^3y^2(12 - x - y)$; 2) $z = xy(xy(x + y - 1))$; 3) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

Ответ. 1) Максимум при $x = 6$; $y = 4$; $z_{\max} = 6912$;

2) минимум при $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{3}$; $z_{\min} = -\frac{1}{27}$;

3) минимум при $x = 5$; $y = 6$; $z_{\min} = -86$.

Задача 42,6. Найти экстремум функции

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z.$$

Решение. Здесь мы имеем дело с функцией трех независимых переменных. Определим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y - 1;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + x + 1;\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 2$$

и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0. \\ 2y + x + 1 = 0. \\ 2z - 2 = 0; \end{cases}$$

получаем $x = 1$; $y = -1$; $z = 1$.

Значит, при этих значениях независимых переменных возможен экстремум.

Для того чтобы сделать заключение, будет ли он, надо обратиться к исследованию дифференциала второго порядка этой функции. Известно, что дифференциал первого порядка

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Дифференциал второго порядка читатель определит самостоятельно и получит, что

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz.$$

У нас

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0,$$

а потому

$$d^2u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2dxdy = 2(dx^2 + dxdy + dy^2) + 2dz^2.$$

Выражение, стоящее в скобках, не отрицательно при любых dx и dy: $(a^2 + b^2) \geqslant -ab$, а последнее слагаемое положительно.

Таким образом, $d^2u > 0$ при любых dx, dy и dz.

Тем самым мы доказали, что при $x = 1$; $y = -1$ и $z = 1$ функция u достигает минимума, а $u_{\min} = -2$.

Задача 42,7 (для самостоятельного решения). Определить экстремум функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Ответ. При $x = -\frac{2}{3}$; $y = -\frac{1}{3}$; $z = 1$ функция достигает минимума, а $u_{\min} = -\frac{4}{3}$.

2. Отыскание наибольших и наименьших значений функции двух независимых переменных в замкнутой области

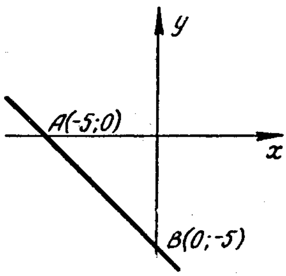
Функция ограниченная и дифференцируемая в замкнутой области достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значения или во внутренних точках этой области, которые являются точками стационарности функции, или на ее границе.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции, надо: 1) Найти стационарные точки функции, для чего следует решить систему уравнений $\frac{dz}{dx}=0$; $\frac{dz}{dy}=0$;

2) вычислить в стационарных точках значения функции; 3) найти наибольшее и наименьшее значение функции на каждой линии, ограничивающей область; 4) сравнить все полученные значения. Наибольшее из них будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим значением функции в замкнутой области.

Задача 42,8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+1$$



Фиг. 42,1.

в замкнутом треугольнике, ограниченном осями координат и прямой $x+y+5=0$ (фиг. 42,1).

Решение. 1) Находим стационарные точки функции:

$$\frac{dz}{dx}=2x-y+3; \qquad \frac{dz}{dy}-x+4y+2.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ -x+4y+2=0 \end{cases}$$

и находим, что $x=-2$; $y=-1$. Итак, имеется одна стационарная точка $(-2, -1)$.

2) Определяем значение функции в этой точке:

$$z(-2, -1)=-3$$

(запись $z(-2, -1)$ означает, что ищется значение функции $z=z(x, y)$ при $x=-2$, $y=-1$).

Переходим к исследованию функции на границах области, которая состоит из отрезка оси Ox, отрезка оси Oy и отрезка AB прямой.

а) На оси Ox $y=0$, а заданная функция принимает при $y=0$ такой вид: $z=x^2+3x+1$ $(-5\leqslant x\leqslant 0)$.

Эта функция должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$. Так как на этом отрезке функция z непрерывна, то она достигает на нем как наибольшего, так и наименьшего своего значения. Это может произойти или в точках стационарности функции, где $\frac{dz}{dx}=0$, или на концах рассматриваемого отрезка.

Определим прежде всего точку стационарности

$$\frac{dz}{dx}=2x+3; \quad 2x+3=0; \quad x=-\frac{3}{2}.$$

Определим значение функции при $x = -\frac{3}{2}$ и на концах отрезка $[-5,0]$:

$$z\left(-\frac{3}{2},\ 0\right) = -\frac{5}{4};\ z[-5,0] = 11;\ z[0,0] = 1.$$

Сравнение показывает, что $(z_{\text{наиб.}})_{OA} = 11$; $(z_{\text{наим.}})_{OA} = -\frac{5}{4}$.

б) На оси Oy: $x = 0$, а данная функция при $x = 0$ запишется так:

$$z = 2y^2 + 2y + 1\ (-5 \leqslant y \leqslant 0).$$

Эта функция — функция одной независимой переменной. Она должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$ (см. фиг. 42,1). Определим на этом отрезке ее наименьшее и наибольшее значения, которые в силу непрерывности должны существовать. Прежде всего определяем точки стационарности функции:

$$\frac{dz}{dy} = 4y + 2;\ 4y + 2 = 0;\ y = -\frac{1}{2}.$$

Определим значение функции при $y = -\frac{1}{2}$, а также на концах рассматриваемого отрезка:

$$z\left(0,\ -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};\ z(0,\ -5) = 41;\ z(0,\ 0) = 1;$$

$$(z_{\text{наиб.}})_{OB} = 41;\ (z_{\text{наим.}})_{OB} = \frac{1}{2}.$$

в) Наконец, исследуем данную функцию на отрезке прямой AB, принадлежащем границе области.

Уравнение прямой AB $x + y + 5 = 0$. Поэтому на ней $y = -x - 5$.

Подставляя это значение y в заданную функцию, получаем

$$z = 4x^2 + 26x + 41.$$

Наибольшее и наименьшее значение этой функции должно быть определено для значений $-5 \leqslant x \leqslant 0$:

$$\frac{dz}{dx} 8x + 26;\ 8x + 26 = 0;\ x = -\frac{13}{4}.$$

Находим соответствующее значение y. Из $y = -x - 5$ следует, что

$$y = -\left(-\frac{13}{4}\right) - 5 = \frac{13}{4} - 5 = -\frac{7}{4}.$$

Итак, рассмотрению подлежит точка $\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right)$ (надо следить за тем, чтобы исследуемые точки принадлежали рассматриваемой области):

$$z\left(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}\right) = -\frac{5}{4};\ z(-5,\ 0) = 11;\ z(-5,\ 0) = 41;$$

$$(z_{\text{наиб.}})_{AB} = 41; \quad (z_{\text{наим.}})_{AB} = -\frac{5}{4}.$$

Сравнивая теперь значение функции z в стационарной точке $(-2,\ -1)$ с наибольшими и наименьшими значениями на отрезках OA, OB и AB, найденными в пунктах а), б) и в), усматриваем, что в заданной замкнутой области

$$z_{\text{наиб.}} = z(0,\ -5) = 41,$$

$$z_{\text{наим.}} = z(-2,\ -1) = -3;$$

таким образом, оказалось, что наименьшего своего значения функция достигла в стационарной точке $(-2,\ -1)$, а наибольшего — на границе области, в точке $(0,\ -5)$.

Задача 42,9 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами: $A(1,\ -3)$; $B(1,\ 2)$; $C(4,\ 2)$; $D(4, -3)$

$$(1 \leqslant x \leqslant 4); \quad (-3 \leqslant y \leqslant 2).$$

Указания. В стационарной точке $(3,\ -2)$ $z(3,\ -2) = -11$. Рассматривая границу области, получаем: 1) На отрезке AB: $z = z(1,\ y) = y^2 + 4y - 3$. Наибольшего значения на AB функция достигает в точке $B\ (1,\ 2)$ и $(z_{\text{наиб.}})_{AB} = 9$, а наименьшее ее значение на AB в точке $(1,\ -2)$ и $(z_{\text{наим.}})_{AB} = -7$;

2) на отрезке CD: $z = z(4,\ y) = y^2 + 4y - 6$. На CD наибольшего значения функция достигает в точке $C\ (4,\ 2)$ и $(z_{\text{наиб.}})_{CD} = 6$, а наименьшее ее значение в точке $(4,\ -2)$ и $(z_{\text{наим.}})_{CD} = -10$;

3) на отрезке $BC: z = z(x,\ 2) = x^2 - 6x + 14$; наибольшего значения функция достигает в точке $B(1,\ 2)$; а $(z_{\text{наиб.}})_{BC} = 9$; $(z_{\text{наим.}})_{BC} = 5$;

4) на отрезке $AD: z = z(x - 3) = x^2 - 6x - 1$; $(z_{\text{наиб.}})_{AD} = -6$; $(z_{\text{наим.}})_{AD} = -10$.

Сравнить полученное значение функции в стационарной точке $(3,\ -2)$ с ее наибольшими и наименьшими значениями на границе области.

Ответ. В рассматриваемой области функция достигает наименьшего значения в стационарной точке: $z_{\text{наим.}} = -11$. Наибольшего значения функция достигает на отрезке AB в точке $(1, 2)$ и $z_{\text{наиб.}} = 9$.

Задача 42, 10 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy(x + y + 1)$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$; $x = 1$; $x = 2$; $y = -\frac{3}{2}$.

Ответ. Стационарные точки: $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; $(0, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 0)$ находятся вне рассматриваемой области. Наибольшего значения функция достигает на границе области в точке $\left(2, \frac{1}{2}\right)$; а $z_{\text{наиб.}} = 3{,}5$. Наименьшего значения функция достигает в точке $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$, а $z_{\text{наим.}} = -4{,}5$.

Задача 42, 11 (для самостоятельного решения). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \cos x \cos y \cos (x + y)$ в замкнутом квадрате, ограниченном линиями $x = 0$; $x = \pi$; $y = 0$, $y = \pi$.

Указания. 1) После определения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ их выгодно представить в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2x];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2y].$$

2) Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2x] = 0 \\ -\frac{1}{2}[\sin(2x + 2y) + \sin 2y] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

следует, что $\sin 2x = \sin 2y$, и тогда $2\cos(x + y)\sin(x - y) = 0$. Отсюда получаем, что

$$x - y = k\pi, \qquad (B)$$

$$x + y = \frac{\pi}{2}(2k + 1), \qquad (C)$$

где k — любое целое число. Но условие задачи требует, чтобы выполнялись неравенства $0 \leqslant x \leqslant \pi$; $0 \leqslant y \leqslant \pi$, а потому должно быть $-\pi \leqslant x - y \leqslant \pi$ и $0 \leqslant x + y \leqslant 2\pi$; поэтому в (B) можно брать $k = -1$; $k = 0$ и $k = 1$, а в (C) $k = 0$ и $k = 1$.

$$\left\{\begin{array}{lll} x - y = 0, & \text{откуда} & y = x; \\ x - y = -\pi, & \text{»} & y = x + \pi; \\ x - y = \pi, & \text{»} & y = x - \pi; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} x + y = \frac{\pi}{2} & \text{»} & y = \frac{\pi}{2} - x; \\ x + y = \frac{3\pi}{2} & \text{»} & y = \frac{3\pi}{2} - x. \end{array}\right.$$

Подставляя в первое уравнение системы (A) первые три значения y, получим уравнение $\sin 4x + \sin 2x = 0$, а подстановка в это же уравнение последних двух значений y приводит к уравнению $\sin 2x = 0$.

Из этих уравнений находим стационарные точки:

$$(0,\ 0)\ (0,\ \pi):\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right);\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right);\ (\pi,\ \pi);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right);\ \left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right);\ (\pi,\ 0)$$

(решения, находящиеся вне данного квадрата, отброшены).

3) Теперь следует отобрать из стационарных точек те, которые лежат внутри квадрата;

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right),\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right).$$

4) На прямой $y = 0$ имеем $f(x,\ 0) = \cos^2 x$,
» » $y = \pi$ имеем $f(x,\ \pi) = \cos^2 x$,
» » $x = 0$ имеем $f(0,\ y) = \cos^2 y$,
» » $x = \pi$ имеем $f(\pi,\ y) = \cos^2 y$.

На каждой из этих прямых наибольшее значение функции равно 1, а наименьшее — нулю. Наибольшее значение функция имеет в вершинах квадрата, а наименьшее, равное нулю, — в точках $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right);\ \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right);\ \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right);\ \left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ. Наибольшего значения функция достигает в вершинах квадрата и $z_{\text{наиб.}} = 1$; наименьшего — в стационарных точках

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right);\ \text{и}\ \left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right)\ \text{и}\ z_{\text{наим.}} = -\frac{1}{8}.$$

Задача 42, 12. Доказать, что из всех треугольников имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

Решение. Обозначим стороны треугольника через x, y и z. По формуле Герона площадь треугольника

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Замечая, что $z = 2p - x - y$, мы получим S как функцию только двух независимых переменных,

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

Вместо того, чтобы искать экстремум этой функции, будем искать экстремум ее квадрата

$$f(x,\ y) = S^2 = p(p-x)(p-y)(x+y-p);$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p(p-y)(2p-2x-y);\quad \frac{\partial f}{\partial y} = p(p-x)(2p-2y-x).$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} p(p-y)(2p-2x-y)=0 \\ p(p-x)(2p-2y-x)=0 \end{aligned}\right\}.$$

Эта система приводит к таким четырем системам:

1) $\left.\begin{aligned} p-y=0 \\ p-x=0 \end{aligned}\right\}$, 2) $\left.\begin{aligned} 2p-2x-y=0 \\ 2p-2y-x=0 \end{aligned}\right\}$,

3) $\left.\begin{aligned} 2p-2x-y=0 \\ p-x=0 \end{aligned}\right\}$; 4) $\left.\begin{aligned} 2p-2y-x=0 \\ p-y=0 \end{aligned}\right\}$.

Находим стационарные точки:

$$(p,\ p);\ \left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right);\ (p,\ 0);\ (0,\ p).$$

Исследованию подлежит только одна точка $M\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$, так как остальные точки не удовлетворяют смыслу задачи: не может быть треугольника, у которого сторона равна половине периметра.

Исследуем на экстремум точку $M\left(\frac{2}{3}p,\ \frac{2}{3}p\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2p(p-y);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2p(p-x);\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=p(2x+2y-3p);$$

$$A=\left(\frac{d^2 f}{\partial x^2}\right)_M=-\frac{2}{3}p^2;\quad B=\left(\frac{d^2 f}{\partial x \partial y}\right)_M=-\frac{1}{3}p^2;$$

$$C=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_M=-\frac{2}{3}p^2;$$

$$\Delta=AC-B^2=\left(-\frac{2}{3}p^2\right)\left(-\frac{2}{3}p^2\right)-\left(-\frac{1}{3}p^2\right)^2p^2=$$

$$=\frac{4}{9}p^4-\frac{1}{9}p^4=\frac{1}{3}p^4>0;$$

$\Delta>0$, а так как $A<0$, то в исследуемой точке функция достигает максимума. Итак, в единственной стационарной точке функция достигает максимума, а потому и наибольшего значения: таким образом, при $x=\frac{2}{3}p$, $y=\frac{2}{3}p$ функция достигает и наибольшего значения. Но тогда $z=2p-x-y=\frac{2}{3}p$. А так как $x=y=z$, то треугольник — равносторонний.

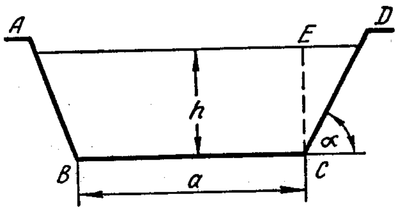
Задача 42, 13. Канал, подводящий воду к турбине, имеет в сечении равнобедренную трапецию, площадь которой задана и равна S. Определить глубину канала и угол α откоса так, чтобы периметр, смоченный водой, был наименьшим*.

---

* Периметр, смоченный водой, называется «мокрым». Он влияет на трение и от его величины зависят расходы на сооружение канала.

Решение. «Мокрый» периметр обозначим буквой L, и тогда (фиг. 42, 2) $L = AB + BC + CD$. Так как $h = CD \sin\alpha$, то $CD = AB = \frac{h}{\sin\alpha}$. Учитывая, что $BC = a$, получаем, что $L = a + \frac{2h}{\sin\alpha}$.

Таким образом, L есть функция трех независимых переменных: a, h и α. Условие задачи позволяет одну из переменных исключить. Требуется, чтобы площадь сечения была постоянна и равна S. В трапеции $S = \frac{BC + AD}{2} h$. Но $BC = a$, а $AD = BC + 2ED = a + 2h \operatorname{ctg}\alpha$, а потому



Фиг. 42,2.

$$S = \frac{2a + 2h \operatorname{ctg}\alpha}{2} h;$$

$$S = (a + h \operatorname{ctg}\alpha) h;$$

откуда следует, что

$$a = \frac{S}{h} - h \operatorname{ctg}\alpha,$$

и для L получаем формулу

$$L = \frac{S}{h} - h \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2h}{\sin\alpha},$$

в которой только две независимых переменных — h и α. (S — величина постоянная).

Находим

$$\frac{\partial L}{\partial h} = -\frac{S}{h^2} - \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha}; \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha} = h \operatorname{cosec}^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

и решаем систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} - \operatorname{ctg}\alpha + \frac{2}{\sin\alpha} &= 0 \\ h \operatorname{cosec}^2\alpha - \frac{2h\cos\alpha}{\sin^2\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\};$$

после упрощений эта система запишется так:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{S}{h^2} + \frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha} &= 0 \\ \frac{h(1 - 2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Из второго уравнения следует, что $h(1 - 2\cos\alpha) = 0$, откуда или $h = 0$, или $1 - 2\cos\alpha = 0$. Но глубина h не может быть равна нулю, а потому остается только $1 - 2\cos\alpha = 0$ или $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, а $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Найденное значение α подставим в первое уравнение и получим

$$-\frac{S}{h^2}+\frac{2-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=0;\ \frac{S}{h^2}=\sqrt{3};\ h^2=\frac{S}{\sqrt{3}},\ \text{a}\ h=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}.$$

Теперь определим значения производных второго порядка при найденных значениях α и h:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial h^2}=\frac{2S}{h^3};\ \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2}=2\frac{1-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}h;\ \frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial h}=\frac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Находим числа A, B и C:

$$A=\frac{6}{\sqrt{S}\sqrt[4]{3}};\ B=0;\ C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S};$$

$$\Delta=AC-B^2=\frac{6}{\sqrt[4]{S}\sqrt[4]{3}}\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}\sqrt{S}>0.$$

Значит, экстремум есть, а так как $A>0$, то при найденных значениях h и α функция L достигает минимума, и $L_{\min}=2\sqrt{S}\sqrt[4]{3}$.

Задача 42, 14. Два пункта P_1 и P_2 отстоят от двух пересекающихся под прямым углом прямых, которые принимаются за оси прямоугольной системы координат Ox и Oy, на расстояния соответственно равные: $x_1=a_1$, $S_1=b_1$; $x_2=a_2$, $y_2=b_2$ (все эти числа положительны). P_1 и P_2 надо соединить телеграфным проводом так, чтобы провод сначала шел к какой-нибудь точке Q_1, на положительной части оси Ox, от нее к точке Q_2 на положительной части оси Oy, а после этого — от Q_2 к P_2 (фиг. 42, 3), где на осях Ox и Oy надо поместить точки Q_1 и Q_2, чтобы длина телеграфной линии была наименьшей?

Решение. Все обозначения указаны на фиг. 42, 3. Длина телеграфной линии

$$L=P_1Q_1+Q_1Q_2+Q_2P_2;$$

$$P_1Q_1=\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2};\ Q_1Q_2=\sqrt{x^2+y^2};\ Q_2P_2=\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2};$$

$$L=\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}$$

Z — функция двух независимых переменных — x и y. Приступаем к определению стационарных точек:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

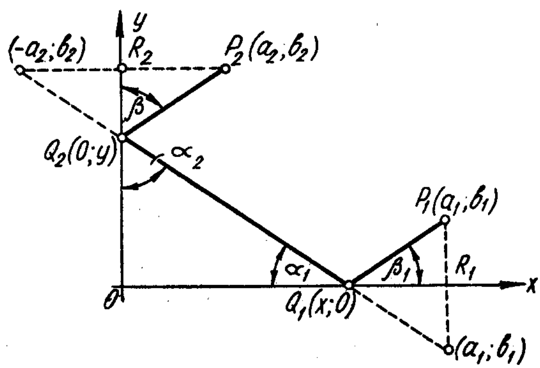
$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{b_2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}}.$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} -\frac{a_1 - x}{\sqrt{b_1^2 + (a_1 - x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\frac{b^2 - y}{\sqrt{a_2^2 + (b_2 - y)^2}} = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Запишем уравнения системы так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{a_1 - x}{\sqrt{b_1^2 = (a_1 - x)^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{b_2 - y}{\sqrt{a_2^2 + (b_2 - y)^2}} \end{aligned}\right\}. \qquad (A)$$



Фиг. 42,3

Возводя в квадрат обе части каждого уравнения, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{(a_1 - x)^2}{b_1^2 + (a_1 - x)^2} \\ \frac{y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(b_2 - y)^2}{a_2^2 + (b_2 - y)^2} \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{b_1^2 + (a_1 - x)^2}{(a_1 - x)^2} \\ \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{a_2^2 + (b_2 - y)^2}{(b_2 - y)^2} \end{aligned}\right\}.$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} 1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{b_1^2}{(a_1-x)^2}+1 \\ \frac{x^2}{y^2}+1=\frac{a_2^2}{(b_2-y)^2}+1 \end{aligned}\right\}.$$

После очевидных упрощений получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{x^2}=\frac{b_1^2}{(a_1-x)^2} \\ \frac{x^2}{y^2}=\frac{a_2^2}{(b_2-y)^2} \end{aligned}\right\}, \text{ или } \left.\begin{aligned} \frac{y}{x}=\frac{b_1}{a_1-x} \\ \frac{x}{y}=\frac{a_2}{b_2-y} \end{aligned}\right\}.$$

Перемножая почленно уравнения последней системы, получим

$$1=\frac{a_2b_1}{(a_1-x)(b_2-y)};\quad a_1-x=\frac{a_2b_1}{b_2-y}.$$

Отсюда

$$x=a_1-\frac{a_2b_1}{b_2-y}=\frac{a_1b_2-a_1y-a_2b_1}{b_2-y}.$$

Но из второго уравнения последней системы следует, что $x=\frac{a_2y}{b_2-y}$. Сравнивая это значение с только что полученным, имеем

$$\frac{a_2y}{a_2-y}=\frac{a_1b_2-a_1y-a_2b_1}{b_2-y},$$

откуда следует, что

$$a_2y=a_1b_2-a_1y-a_2b_1,$$

или

$$a_1y+a_2y=a_1b_2-a_2b_1;$$

$$y=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1+a_2}.$$

Определите самостоятельно x; получите $x=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1+b_2}$, причем $a_1b_2-a_2b_1>0$, так как $x>0$ и $y>0$ по условию. Значения x и y можно определить значительно проще, если рассмотреть геометрическое значение уравнений системы (A) (вообще от такого истолкования никогда не следует отказываться, так как оно часто приводит к значительным упрощениям).

В первом уравнении системы (А)

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\alpha_1;\quad \frac{a_1-x}{\sqrt{b_1^2+(a_1-x)^2}}=\cos\beta_1,$$

а потому

$$\cos\alpha_1=\cos\beta_1 \text{ и } \alpha_1=\beta_1.$$

Второе уравнение системы (A) дает:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\alpha_2; \quad \frac{b_2-y}{\sqrt{a_2^2+(b_2-y)^2}}=\cos\beta_2 \text{ и } \alpha_2=\beta_2.$$

Из этого мы заключаем, что треугольники $P_1Q_1R_1$, Q_1OQ_2 и $P_2Q_2R_2$ подобны, т. к. они имеют по равному острому углу.

Из подобия треугольников следует, что $\frac{b_1}{a_1-x}=\frac{y}{x}=\frac{b_2-y}{a_2}$.

Отсюда уже просто можно найти значения x и y, которые были найдены раньше.

Теперь самостоятельно докажите, что

1) найденные значения x и y доставляют функции L минимум;

2) кратчайшая длина провода $L_{\text{наим}}=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$;

3) для построения точек Q_1 и Q_2 следует поступить так; перпендикуляры P_1R_1 и P_2R_2 продолжить за точки R_1 и R_2 на расстояния, равные этим перпендикулярам, и концы полученных отрезков соединить прямой линией. Эта линия пересечет ось Ox в точке Q_1, а ось Oy в точке Q_2 (следует написать уравнение прямой, проходящей через точки $(a_1, -b_1)$ и $(-a_2, b_2)$ и найти координаты точек пересечения этой прямой с координатными осями).

Задача 42,15 (для самостоятельного решения). Число a разделить на три слагаемых так, чтобы произведение этих трех слагаемых было наибольшим.

Ответ. Каждое слагаемое равно $\frac{a}{3}$ (полученный результат допускает простое геометрическое истолкование: из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых сумма трех измерений есть величина постоянная, равная a, наибольший объем имеет куб с ребром, равным $\frac{a}{3}$).

Задача 42,16 (для самостоятельного решения). Требуется изготовить из жести коробку без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда заданного объема V так, чтобы затрата материала была наименьшей. Определить размеры коробки.

Ответ. Основание параллелепипеда — квадрат со стороной $a=\sqrt[3]{V}$, а высота его $h=\frac{\sqrt[3]{V}}{2}$.

Задача 42,17. Задано n неподвижных материальных точек P_i с массами m_i и координатами $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3 \ldots, n)$. Найти координаты x и y точки $P(x, y)$, для которой сумма квадратов ее расстояний от этих неподвижных точек, помноженных на массу соответствующих точек, имеет наименьшее значение.

Указание. Искомая сумма $S = \sum_{i=1}^{n} m_i\,[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]$.

Ответ.

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n};\quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

СОРОК ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Если на поверхности через точку M на ней провести всевозможные кривые и к ним в этой точке провести касательные прямые (они называются касательными к поверхности), то окажется, что все эти касательные лежат в одной плоскости, которая называется касательной плоскостью к поверхности в точке M, а перпендикуляр к касательной плоскости, восстановленный к ней в точке касания M, называется нормалью к поверхности.

1. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, разрешенным относительно z (т. е. в явной форме), а точка касания M имеет координаты (x_0, y_0, z_0), то уравнение касательной плоскости записывается так:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{43,1}$$

а нормаль к поверхности в точке M определяется уравнением

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{43,2}$$

Символы $z'_x(x_0, y_0)$ и $z'_y(x_0, y_0)$ означают, что производные функции $z = f(x, y)$ вычислены при значениях $x = x_0$, $y = y_0$.

2. Если поверхность определена уравнением $f(x, y, z) = 0$, неразрешенным относительно z (уравнение поверхности задано в неявной форме), а точка касания имеет координаты (x_0, y_0, z_0), то касательная плоскость определяется уравнением

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) +$$
$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \tag{43,3}$$

а нормаль к поверхности в точке $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{43,4}$$

Символы $f_x(x_0, y_0, z_0)$, $f'_y(x_0, y_0, z_0)$, $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ *означают частные производные функции $f(x, y, z)$ вычисленные для значений $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.*

Задача 43,1. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 3y^2$ в точке, для которой $x = 1$; $y = 1$.

Решение. Прежде всего определим аппликату точки касания: $z(1,1) = 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 4$. Итак, точка касания имеет координаты (1, 1, 4), т. е. $x_0 = 1$; $y_0 = 1$; $z_0 = 4$. Так как уравнение поверхности разрешено относительно z, то касательная плоскость и нормаль определяются уравнениями (43,1) и (43,2). Определяем частные производные функции $z: z'_x(x, y) = 2x$; $z'_y(x, y) = 6y$. Вычислим теперь значения частных производных в точке касания: $z'_x(1, 1) = 2$; $z'_y(1, 1) = 6$.

Подставляя эти значения и координаты точки касания в уравнения (43,1) и (43,2), получим уравнение касательной плоскости $z - 4 = 2(x-1) + 6(y-1)$, или $2x + 6y - z - 4 = 0$. Уравнение нормали $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-4}{-1}$.

Задача 43,2 (для самостоятельного решения). Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям:

1) к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + y^2$ в точке (1, 1, 3);

2) к поверхности $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$ в точке (1, 0, 2);

3) к гиперболическому параболоиду $z = xy$ в точке (1, 2, 2).

Ответ.

1) $4x + 2y - z - 3 = 0$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$;

2) $5x + y - z - 3 = 0$; $\frac{x-1}{5} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{-1}$;

3) $2x + y - z - 2 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Задача 43,3. Определить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$ в точке M (1, 2, 2).

Решение. Здесь уравнение поверхности задано в неявной форме (оно не разрешено относительно z), а потому касательная плоскость и нормаль к поверхности определяется уравнениями (43,3) и (43,4). Обозначим левую часть уравнения поверхности через $f(x, y, z)$, найдем частные производные этой функции и их значения в точке касания M: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M$,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M = 2 \cdot 1 - 4 = -2;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y + 6; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M = 2 \cdot 2 + 6 = 10;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 8; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M = 2 \cdot 2 - 8 = -4.$$

Подставляя найденные значения частных производных и координаты точек касания в уравнения (43,3) и (43,4), получим уравнение касательной плоскости

$-2(x-1)+10(y-2)-4(z-2)=0$, или $x-5y+2z+5=0$; уравнение нормали

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-2}{2}.$$

Задача 43,4 (для самостоятельного решения). Определить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям в заданных на них точках:

1) $x^2+y^2-x+2y+4z-13=0$ в точке $(2, 1, 2)$;

2) $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точке $(1, 2, 3)$;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Ответ.

1) $3x+4y+4z-18=0$; $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{4}$;

2) $x-6y+9z-16=0$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{9}$;

3) $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$; $\frac{y-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}$.

Указание (к пункту 3). Воспользоваться тем, что $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$.

Задача 43,5 (для самостоятельного решения). Определить уравнение той касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, которая отсекает равные отрезки на координатных осях.

Указание. Воспользоваться уравнением, полученным при решении предыдущей задачи. Отрезки, отсекаемые этой плоскостью на координатных осях, равны: $\frac{a^2}{x_0}$; $\frac{b^2}{y_0}$; $\frac{c^2}{z_0}$.

По условию задачи $\frac{a^2}{x_0}=\frac{b^2}{y_0}=\frac{c^2}{z_0}$.

Обозначив каждое из этих отношений через k, получим

$$x_0=\frac{a^2}{k};\ y_0=\frac{b^2}{k};\ z_0=\frac{c^2}{k}.$$

Так как точка (x_0, y_0, z_0) — точка касания, то ее координаты удовлетворяют уравнению поверхности, а потому, подставляя полученные значения x_0, y_0, z_0 вместо текущих в уравнение эллипсоида, получим

$$\frac{a^2}{k^2}+\frac{b^2}{k^2}+\frac{c^2}{k^2}=1, \text{ а } k=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2};$$

тогда

$$x_0 = \frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \; y_0 = \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \; z_0 = \frac{c^2}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Подставляя эти значения в уравнение касательной плоскости к эллипсоиду, полученное в предыдущей задаче, имеем окончательно

$$x+y+z\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}=0.$$

Задача 43,6 (для самостоятельного решения). В такой точке эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

Указание. Из уравнения нормали к эллипсоиду, полученного в задаче 43,4, следует, что направляющие косинусы нормали равны:

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{a^2A}; \; \cos\beta=\frac{y_0}{b^2A}; \; \cos\gamma=\frac{z_0}{c^2A},$$

где

$$A=\pm\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{x_0}{a^2A}=\frac{y_0}{b^2A}=\frac{z_0}{c^2A},$$

или

$$x_0=Aa^2k; \; y_0=Ab^2k; \; z_0=Ac^2k,$$

где k — общее значение написанных выше отношений. Так как точка $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка касания, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипсоида, а потому

$$A^2a^2k^2+A^2b^2k^2+A^2c^2k^2=1; \; Ak=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

координаты точки, удовлетворяющей условию задачи,

$$x_0=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \; y_0=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \; z_0=\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Задача 43,7. К поверхности $x^2+3y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x+4y+z=0$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в виде $f(x, y, z)=x^2+3y^2+z^2-1=0$. Обозначим координаты точки касания M через x_0, y_0, z_0. Определим значения частных производных функции $f(x, y, z)$ в этой точке:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x; \; \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_M=2x_0; \; \frac{\partial f}{\partial y}=6y; \; \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_M=6y_0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z; \; \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_M=2z_0.$$

Уравнение касательной плоскости запишется в виде (43,3):

$$x_0(x-x_0)+3y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

Так как точка касания $M(x_0, y_0\ z_0)$ принадлежит поверхности, то $x_0^2+3y_0^2+z_0^2=1$ и уравнение касательной плоскости может быть записано так:

$$x_0x+3y_0y+z_0z-1=0 \qquad (A)$$

Из условия параллельности этой плоскости и заданной в условии задачи плоскости $2x+4y+z=0$ следует, что

$$\frac{x_0}{2}=\frac{3y_0}{4}=\frac{z_0}{1}.$$

Обозначая каждое отношение через k, получим, что

$$x_0=2k;\ y_0=\frac{4}{3}k;\ z_0=k.$$

Подставляя эти значения в уравнение поверхности, получим:

$$4k^2+3\cdot\frac{16}{9}k^2+k^2=1.$$

Откуда $k=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}$ и, значит,

$$x_0=\pm\frac{6}{\sqrt{93}};\ y_0=\pm\frac{4}{\sqrt{93}};\ z_0=\pm\frac{3}{\sqrt{93}}.$$

Подставляя это значение в уравнение (A), получим окончательно уравнение касательной плоскости:

$$2x+4y+z=\pm\frac{\sqrt{93}}{3}.$$

Таким образом, оказалось, что условию задачи удовлетворяют две плоскости.

Задача 43,8 (для самостоятельного решения). К поверхности $x^2+2y^2+z^2=1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x-y+2z=0$

Ответ. $x-y+2z\pm\sqrt{\frac{11}{2}}=0.$

СОДЕРЖАНИЕ

Илья Абрамович Каплан

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть II

Дифференциальное исчисление функций одной и многих независимых переменных

Редактор *А. П. Гужва*
Обложка художника *И. Ф. Криворучко*
Технический редактор *Л. Т. Момот*
Корректоры *Т. А. Жигальцова, Л. П. Пипенко*

Сдано в набор 20/II 1973 г. Подписано к печати 3/VIII 1973 г. БЦ 20299. Формат бумаги $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага типографская № 3. Объем: 23 усл. печ. л., 23 физ. печ. л., 20,5 уч.-изд. л. Тираж 75 600. Заказ 3-430. Цена 70 к.

Издательское объединение «Вища школа».
Издательство при Харьковском государственном университете.
310003, Харьков, 3, ул. Университетская, 16.

Харьковская книжная фабрика «Коммунист» Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Государственного комитета Совета Министров Украинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Харьков, ул. Энгельса, 11.